TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Anja Kuronen

Ositetuista matriiseista

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Joulukuu 2010

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KURONEN, ANJA: Ositetuista matriiseista

Pro gradu -tutkielma, 29 s.

Matematiikka

Joulukuu 2010

Tiivistelmä

Tutkielman aiheena on ositetut matriisit, joiden sovelluksia hyödynnetään paljon muun muassa tilastotieteessä. Matriisit voidaan osittaa monella eri tavalla, mutta tässä työssä keskitytään 2×2 -muodostelmassa ositettuun matriisiin, koska se on todettu hyödyllisimmäksi ositetuista matriiseista. Ositetun matriisin peruslaskutoimitukset ja alkeismuunnokset voidaan määritellä vastaavasti kuin tavalliselle matriisille. Tutkielmassa esitetään ositetun matriisin determinanttiin ja käänteismatriisiin liittyviä tuloksia ja todistetaan niitä. Ositettujen matriisien avulla voidaan todistaa myös yleisiä matriiseihin liittyviä tuloksia. Työssä käsitellään tuloksia, jotka koskevat summan käänteismatriisia, summan ja tulon astetta sekä tulon ominaisarvoa. Lopuksi käsitellään jatkuvuusperiaatetta, joka on eniten käytettyjä tekniikoita matriisiteoriassa. Pääasiallisena lähdeteoksena tässä tutkielmassa on käytetty Fuzhen Zhangin kirjaa *Matrix theory: basic results and techniques*. Toisena lähdeteoksena on käytetty Karim Abadirin ja Jan Magnusin kirjaa *Matrix algebra.*

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee ositettuja matriiseja ja niihin liittyviä tuloksia. Ositettuja matriiseja sovelletaan muun muassa tilastotieteessä. Ositetut matriisit määritellään ja niiden peruslaskutoimituksia tarkastellaan luvun kolme alussa. Määritelmien jälkeen käsitellään ositetun matriisin alkeismuunnoksia, jotka voidaan määritellä vastaavasti kuin tavalliselle matriisille. Tämän jälkeen todistetaan ositetun matriisin determinanttiin ja käänteismatriisiin liittyviä lauseita. Ositettujen matriisien avulla voidaan todistaa myös yleisiä matriiseihin liittyviä tuloksia. Tästä esimerkkinä todistetaan lauseita, jotka käsittelevät summan käänteismatriisia, summan ja tulon astetta sekä tulojen $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ ominaisarvoja. Lopuksi käsitellään jatkuvuusperiaatteen käyttämistä lauseiden todistamisessa. Lauseita selvennetään esimerkkien avulla.

Pääasiallisena lähdeteoksena tässä tutkielmassa on käytetty Fuzhen Zhangin kirjaa *Matrix theory: basic results and techniques* [2]. Zhangin kirjasta käsitellään tarkemmin lukua 2, *Partitioned Matrices*. Toisena lähdeteoksena on käytetty Karim Abadirin ja Jan Magnusin kirjaa *Matrix algebra* [1].

Tutkielman lukijalta edellytetään lineaarialgebran osaamista, ja joitakin perustuloksia oletetaan tunnetuiksi, kuten determinanttiin liittyviä laskusääntöjä. Seuraavaksi luvussa kaksi käsitellään tarkemmin, mitä tietoja lukijalta odotetaan, ja annetaan jatkossa tarvittavia määritelmiä kertauksenomaisesti.

2 Esitietoja

Ositettujen matriisien ymmärtäminen edellyttää lineaarialgebran perusteiden hallintaa. Lukijalta edellytetään matriisien ja niiden laskutoimitusten osaamista, sekä matriiseihin liittyvien käsitteiden hallitsemista. Seuraavaksi käydään läpi niitä peruskäsitteitä, joita tässä tutkielmassa käytetään.

2.1 Matriisi ja peruslaskutoimitukset

Matriisien määrittelyssä tarvitaan kunnan käsitettä. Oletetaan kunta-aksioomat tunnetuiksi. Merkitään kuntaa symbolilla F. Kun kunta F on tarpeen määritellä joksikin tietyksi joukoksi tässä tutkielmassa, niin se on yleensä reaalilukujen joukko, $\mathbb{R}$, tai kompleksilukujen joukko, $\mathbb{C}$.

Määritellään matriisi ja matriisien peruslaskutoimitukset. Voidaan kuvailla, että *$m \times n$ -matriisi* $\boldsymbol{A}$ on suorakulmainen taulukko

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriisista käytetään merkintää $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. Matriisin i. rivin ja j. sarakkeen alkiota merkitään symbolilla a_{ij}. Matriisin jokainen alkio a_{ij} on kunnan F alkio, kun $1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq n$. Alkiot $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ muodostavat matriisin *i. rivin* ja alkiot $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ muodostavat matriisin *j. sarakkeen.*

Kaksi $m \times n$ -matriisia $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat samat, jos matriisien kaikki vastinalkiot ovat yhtä suuria eli $a_{ij} = b_{ij}$, kun $1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq n$.

Kaikkien $m \times n$ -matriisien, joiden alkiot ovat kunnasta F, joukkoa merkitään symbolilla $F^{m \times n}$. Olkoot $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in F^{m \times n}$, ja olkoon skalaari $c \in F$. Määritellään nyt *matriisien yhteenlasku* $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ ja *skalaarilla kertominen* $c\boldsymbol{A}$ seuraavasti:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{ja} \quad c(a_{ij}) = (ca_{ij}),$$

kun $1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq n$. Matriisia $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ sanotaan *summamatriisiksi* tai lyhyemmin *summaksi.*

Matriisien $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ tulo $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ on matriisi, jonka alkio c_{ij} saadaan

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Matriisilla $\boldsymbol{A}$ on oltava yhtä monta saraketta kuin matriisilla $\boldsymbol{B}$ on rivejä, jotta niiden tulo voidaan laskea. Matriisia $\boldsymbol{AB}$ sanotaan *tulomatriisiksi* tai lyhyemmin *tuloksi.*

2.2 Matriisin alkeismuunnokset ja muita määritelmiä

Tässä kappaleessa annetaan matriiseihin liittyviä määritelmiä, joita tarvitaan seuraavassa luvussa. Aloitetaan määrittelemällä alkeismuunnokset ja yleisesti käytettyjä matriisien erikoistapauksia, kuten yksikkö- ja nollamatriisi sekä alimatriisi.

Määritelmä 2.1. Matriisin *alkeismuunnokset* voidaan jakaa alkeisrivimuunnoksiin ja alkeissarakemuunnoksiin. Alkeisrivimuunnoksia ovat

I. kaksi riviä vaihdetaan,

II. yksi rivi kerrotaan nollasta eroavalla vakiolla ja

III. yhteen riviin lisätään toinen rivi vakiolla kerrottuna.

Alkeismuunnokset määritellään sarakkeille vastaavasti kuin riveille.

Määritelmä 2.2. *Yksikkömatriisi* eli identiteettimatriisi on neliömatriisi, jonka alkiot a_{ii} ovat ykkösiä ja alkiot a_{ij}, kun $i \neq j$, ovat nollia. Merkitään yksikkömatriisia symbolilla

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Nollamatriisi on $m \times n$ -matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia. Merkitään nollamatriisia symbolilla

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Yksikkömatriisia voidaan merkitä symbolilla $\boldsymbol{I}_n$, kun halutaan korostaa sen olevan $n \times n$ -matriisi. Vastaavasti $m \times n$ -nollamatriisia voidaan merkitä symbolilla $\mathbf{0}_{m \times n}$.

Määritelmä 2.3. Matriisin $\boldsymbol{A}$ *alimatriisi* saadaan poistamalla osa matriisiin riveistä ja sarakkeista. Jos pois jätetään alimmat rivit ja oikeanpuoleisimmat sarakkeet, niin saadaan *pääalimatriisi.*

Määritellään seuraavaksi muutamia muita matriiseihin liittyviä käsitteitä, kuten transpoosi, determinantti ja kääntyvä matriisi. Otetaan niihin liittyviä tuloksia käyttöön todistamatta niitä.

Määritelmä 2.4. Matriisin $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *transpoosi* $\boldsymbol{A}^T = (a_{ji})$ saadaan muuttamalla rivit sarakkeiksi ja sarakkeet riveiksi. Matriisi $\boldsymbol{A}$ on *symmetrinen*, jos

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}.$$

Määritelmä 2.5. Matriisin $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *konjugaattitranspoosi*, jota merkitään symbolilla $\boldsymbol{A}^*$, on

$$\boldsymbol{A}^* = (\bar{a}_{ji}) \in \mathbb{C}^{n\times m},$$

missä $\bar{a}_{ji}$ on alkion a_{ji} kompleksikonjugaatti.

Määritelmä 2.6. Neliömatriisin $\boldsymbol{A}$ *determinantti* on luku, jota merkitään

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kun $n = 1$, $\det \boldsymbol{A} = a_{11}$.
Kun $n = 2$, $\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
Yleisesti matriisin determinantti määritellään induktiivisesti kaavalla

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \boldsymbol{A}(i|j), \tag{2.1}$$

kun $i \in 1, \dots, n$. Kaavassa (2.1) symbolilla $\boldsymbol{A}(i|j)$ merkitään matriisin $\boldsymbol{A}$ alimatriisia, joka saadaan matriisista $\boldsymbol{A}$ poistamalla rivi i ja sarake j.

Lause 2.1. *Olkoot matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ $n \times n$ -matriiseja. Tällöin*

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Määritelmä 2.7. Neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ on *kääntyvä*, jos on olemassa sellainen matriisi $\boldsymbol{B}$, että

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

Matriisia $\boldsymbol{B}$ sanotaan matriisin $\boldsymbol{A}$ *käänteismatriisiksi* ja sitä merkitään symbolilla $\boldsymbol{A}^{-1}$. Matriisia, joka ei ole kääntyvä, sanotaan *singulaariseksi.*

Määritelmä 2.8. Matriisin *aste* on matriisin lineaarisesti riippumattomien rivien lukumäärän. Merkitään matriisin $\boldsymbol{A}$ astetta symbolilla $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. Jos $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, niin $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

Lause 2.2. *Olkoon matriisi* $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$. *Silloin on olemassa sellaiset kääntyvät matriisit* $\boldsymbol{P} \in F^{m\times m}$ *ja* $\boldsymbol{Q} \in F^{n\times n}$, *että*

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}.$$

Yksikkömatriisin $\boldsymbol{I}_r$ *rivien lukumäärä* r *on matriisin* $\boldsymbol{A}$ aste.

Todistus. Sivuutetaan. □

Oletetaan seuraava tulos tunnetuksi

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) &= \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^T) \\ &= \operatorname{rank}(\bar{\boldsymbol{A}}) \\ &= \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) \end{aligned}$$

ja otetaan se käyttöön todistamatta sitä.

Tarvitaan vielä nolla-avaruuden ja kuva-avaruuden käsitteitä, joten kerrataan niiden määritelmät.

Määritelmä 2.9. Tulkitaan matriisi $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$ lineaarikuvaukseksi $\boldsymbol{A} : F^n \to F^m$. Määritellään lineaarikuvauksen $\boldsymbol{A}$ *ydin* eli *nolla-avaruus*

$$\operatorname{Ker} \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in F^n : \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\} \in F^m$$

ja *kuva-avaruus*

$$\operatorname{Im} \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{Ax} : \boldsymbol{x} \in F^n\}.$$

Oletetaan tunnetuksi seuraava tulos. Olkoon $\mathcal{A} : V \to W$ lineaarikuvaus n-ulotteiselta vektoriavaruudelta V. Silloin

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = n.$$

3 Ositetut matriisit

Aloitetaan luku määrittelemällä ositettu matriisi ja tarkastellaan ositetun matriisin peruslaskutoimituksia. Tämän jälkeen käsitellään ositettujen matriisien alkeismuunnoksia, determinanttia ja käänteismatriisia, ja todistetaan niihin liittyviä lauseita. Todistetaan myös summan käänteismatriisia, tulon ja summan astetta sekä tulon ominaisarvoa koskevia tuloksia hyödyntäen ositettuja matriiseja. Luvun lopussa esitellään yleisesti käytetty jatkuvuusperiaate.

3.1 Määrittely

Määritelmä 3.1. *Ositettu matriisi* saadaan jakamalla matriisi alimatriiseihin. Nämä erilliset alimatriisit, eli lohkot, muodostavat yhdessä alkuperäisen matriisin. Ositetaan $m \times n$ -matriisi $\boldsymbol{M}$ seuraavasti

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1p} & a_{1,p+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qp} & a_{q,p+1} & \dots & a_{qn} \\ \hline a_{q+1,1} & \dots & a_{q+1,p} & a_{q+1,p+1} & \dots & a_{q+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} & a_{m,p+1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix},$$

missä alimatriisi

$\boldsymbol{A}$ on $q \times p$ -matriisi,

$\boldsymbol{B}$ on $q \times (n-p)$ -matriisi,

$\boldsymbol{C}$ on $(m-q) \times p$ -matriisi ja

$\boldsymbol{D}$ on $(m-q) \times (n-p)$ -matriisi.

Tässä $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$ muodostavat ositetun matriisin $\boldsymbol{M}$ lohkorivit. Vastaavasti ositetun matriisin $\boldsymbol{M}$ lohkosarakkeet ovat

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

2×2 -muodostelmassa ositetun matriisin lisäksi on olemassa myös muunlaisia ositettuja matriiseja. Matriisin osittaminen sarakkeittain tai riveittäin on hyödyllistä joissakin tilanteissa. Annetaan esimerkki sarakkeittain ositetusta matriisista

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_1} & \boldsymbol{S_2} & \boldsymbol{S_3} \end{bmatrix},$$

jossa alimatriisit ovat matriisin $\boldsymbol{A}$ sarakkeet

$$\boldsymbol{S_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ a_{51} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ a_{52} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{S_3} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ a_{53} \end{bmatrix},$$

ja esimerkki riveittäin ositetusta matriisista

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ \hline a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R_1} \\ \boldsymbol{R_2} \\ \boldsymbol{R_3} \\ \boldsymbol{R_4} \\ \boldsymbol{R_5} \end{bmatrix},$$

jossa alimatriisit ovat matriisin $\boldsymbol{A}$ rivit

$$\boldsymbol{R_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R_2} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R_3} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{R_4} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{R_5} = \begin{bmatrix} a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix}.$$

Matriisin osittaminen neljään alimatriisiin 2×2 -muodostelmassa on kuitenkin osoittautunut hyödyllisimmäksi tavaksi osittaa matriisi. Annetaan seuraavaksi laskusäännöt tällaisten ositettujen matriisien yhteenlaskulle ja tulolle.

Olkoot $m \times n$ -matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ositettu seuraavasti

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Tällöin ositettujen matriisien summa on

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Olkoon $\boldsymbol{A}$ $m \times n$ -matriisi kuten edellä ja olkoon $n \times r$ -matriisi $\boldsymbol{C}$,

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} \end{bmatrix},$$

ositettu siten, että alla olevat tulot $\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{C}_{kl}$ on määritetty. Tällöin ositettujen matriisien tulo on

$$\boldsymbol{AC} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{C}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{C}_{12} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{C}_{22} \end{bmatrix}.$$

3.2 Alkeismuunnokset

Määritelmässä 2.1 esitetyt matriisin alkeisrivi- ja alkeissarakemuunnokset voidaan yleistää koskemaan ositettuja matriiseja seuraavasti:

I. kaksi lohkoriviä vaihdetaan,

II. yksi lohkorivi kerrotaan vasemmalta sopivan kokoisella kääntyvällä matriisilla ja

III. yhteen lohkoriviin lisätään toinen lohkorivi kerrottuna vasemmalta jollakin matriisilla.

Alkeismuunnokset määritellään sarakkeille vastaavasti kuin riveille, mutta matriisien kertominen tapahtuu tällöin oikealta.

Määritelmä 3.2. Yksikkömatriisista $\boldsymbol{I}$ saadaan *yleistetty alkeismuunnosmatriisi* yksittäisellä alkeismuunnoksella. Merkitään näin saatua matriisia symbolilla $\boldsymbol{G}$.

Esimerkki 3.1. Olkoon yksikkömatriisi $\boldsymbol{I}$ ositettu seuraavasti

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Tekemällä (I)-alkeisrivimuunnos saadaan

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}.$$

Tekemällä (II)-alkeisrivimuunnos kertomalla ensimmäinen rivi vasemmalta matriisilla $\boldsymbol{X}$ saadaan

$$\boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Tekemällä (III)-alkeisrivimuunnos lisäämällä toiseen riviin ensimmäinen rivi kerrottuna matriisilla $\boldsymbol{X}$ vasemmalta saadaan

$$\boldsymbol{G}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Matriisit $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$ ja $\boldsymbol{G}_3$ ovat esimerkkejä yleistetyistä alkeismuunnosmatriiseista.

Lause 3.1. *Olkoon $\boldsymbol{G}$ yleistetty alkeismuunnosmatriisi, joka on saatu yksikkömatriisista $\boldsymbol{I}$ yhdellä alkeisrivimuunnoksella. Jos sama alkeisrivimuunnos tehdään ositetulle matriisille $\boldsymbol{M}$, niin saadaan sama matriisi kuin tulosta $\boldsymbol{GM}$.*

Vastaavasti olkoon $\boldsymbol{G}'$ yhdellä alkeissarakemuunnoksella yksikkömatriisista $\boldsymbol{I}$ saatu yleistetty alkeismuunnosmatriisi. Jos sama alkeissarakemuunnos tehdään ositetulle matriisille $\boldsymbol{M}$, niin saadaan sama matriisi kuin tulosta $\boldsymbol{MG}'$.

Todistus. Esitetään todistuksen idea neljään alimatriisiin 2×2 -muodostelmassa ositetulle matriisille.

Olkoon ositettu matriisi

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix},$$

missä matriisit $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ ja $\boldsymbol{D}$ ovat matriisin $\boldsymbol{M}$ alimatriiseja, $\boldsymbol{A}$ on $m \times m$-matriisi ja $\boldsymbol{D}$ on $n \times n$ -matriisi. Olkoon matriisille $\boldsymbol{M}$ tehtävä muunnos esimerkiksi (III)-alkeisrivimuunnos, jossa ensimmäinen rivi kerrottuna vasemmalta $n \times m$ -matriisilla $\boldsymbol{E}$ lisätään toiseen riviin. Kun sama alkeisrivimuunnos tehdään yksikkömatriisille $\boldsymbol{I}$, saadaan yleistetty alkeismuunnosmatriisi

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Nyt saadaan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{M}.$$

Muille alkeismuunnoksille todistus menee vastaavasti. □

Esimerkki 3.2. Olkoon matriisi $\boldsymbol{M} \in F^{3\times 3}$ ositettu matriisi

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$$

ja olkoon yksikkömatriisi $\boldsymbol{I}_3$ ositettu matriisi

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \boldsymbol{0}_{1\times 2} \\ \boldsymbol{0}_{2\times 1} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Tehdään matriisille $\boldsymbol{M}$ ensimmäinen alkeisrivimuunnos, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} d & e & f \\ g & h & i \\ \hline a & b & c \end{array}\right].$$

Tekemällä vastaava alkeismuunnos yksikkömatriisille $\boldsymbol{I}_3$ saadaan alkeismuunnosmatriisi

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{2\times 1} & \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{I}_1 & \boldsymbol{0}_{1\times 2} \end{bmatrix}.$$

Tällöin tulosta $\boldsymbol{GM}$ saadaan sama matriisi kuin tekemällä alkeismuunnos suoraan matriisille $\boldsymbol{M}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{GM} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 1} & \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0}_{1\times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{C} & \mathbf{0}_{2\times 1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{I}_1\boldsymbol{A} + \mathbf{0}_{1\times 2}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_1\boldsymbol{B} + \mathbf{0}_{1\times 2}\boldsymbol{D} \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} d & e & f \\ g & h & i \\ \hline a & b & c \end{array}\right]\end{aligned}$$

lauseen 3.1 mukaan.

Esimerkki 3.3. Olkoon ositettu matriisi

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix},$$

missä $\boldsymbol{A}$ on kääntyvä matriisi. Muunnetaan $\boldsymbol{M}$ alkeismuunnoksilla sellaiseksi, että alimatriisien $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ paikalle saadaan nollamatriisit. Lisätään ensin toiseen riviin ensimmäinen rivi kerrottuna vasemmalta matriisilla $-\boldsymbol{CA}^{-1}$, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten toiseen sarakkeeseen ensimmäinen sarake kerrottuna oikealta matriisilla $-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, jolloin saadaan halutunlainen matriisi

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} - \boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} - 0\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ 0 & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

Vastaavilla yleistetyillä alkeismuunnosmatriiseilla kerrottaessa päästään samaan lopputulokseen

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{CA}^{-1} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ 0 & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 3.4. [2, Problems: 2, s. 33] Olkoon matriisi $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Osoitetaan, että

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että matriisilla

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}$$

on olemassa käänteismatriisi ja merkitään sitä ositetulla matriisilla

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

Käänteismatriisin määritelmän 2.7 mukaan voidaan kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Ositettujen matriisien kertolaskusäännöllä saadaan

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} + \mathbf{0}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{B} + \mathbf{0}\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{C} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Yhtälöstä ratkaisemalla saadaan $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_m$, $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{C} = -\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_n$, joten käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{X} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

3.3 Determinantti ja käänteismatriisi

Olkoon seuraavissa tarkasteluissa $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$ ositettu matriisi

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

missä $\boldsymbol{A}$ on $m \times m$ -neliömatriisi ja $\boldsymbol{D}$ on $n \times n$ -neliömatriisi. Käsitellään tällaisen ositetun matriisin $\boldsymbol{M}$ determinanttia ja käänteismatriisia. Seuraavat tulokset ovat perustavanlaatuisia ja niitä hyödynnetään usein matriisilaskennassa ja matriisien epäyhtälöissä.

Lause 3.2. *Olkoon $\boldsymbol{M}$ kaavan* (3.1) *mukainen ositettu matriisi ja olkoot alimatriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{D}$ neliömatriiseja. Jos ositetun matriisin $\boldsymbol{M}$ alimatriisi $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ tai $\boldsymbol{C} = \mathbf{0}$, niin*

$$\det \boldsymbol{M} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{D}.$$

Todistus. [1, s. 111] Oletetaan ensin, että $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$. Nyt matriisi $\boldsymbol{M}$ voidaan kirjoittaa tulona

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

Yläkolmiomatriisin ja alakolmiomatriisin determinantti saadaan laskemalla diagonaalialkioiden tulo. Nyt ottamalla yhtälöstä puolittain determinantti saadaan

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{M} &= \det \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \\ &= \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{D}.\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$. Tällöin voidaan vastaavasti kirjoittaa matriisi $\boldsymbol{M}$ tulona

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Nyt ottamalla yhtälöstä determinantti puolittain saadaan

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{M} &= \det \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \\ &= \det \boldsymbol{D} \det \boldsymbol{A} \\ &= \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{D}.\end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.5. Olkoon ositettu matriisi $\boldsymbol{M}$ kuten esimerkissä 3.2. Ratkaistaan matriisin $\boldsymbol{M}$ determinantti

$$\det \boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge).$$

Jos matriisin $\boldsymbol{M}$ alimatriisi $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, niin determinantti on

$$\det \boldsymbol{M} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a(ei - hf).$$

Jos matriisin $\boldsymbol{M}$ alimatriisi $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$, niin determinantti on

$$\det \boldsymbol{M} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix} = a(ei - hf).$$

Siis jos $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ tai $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$, niin lauseen 3.2 mukaan saadaan

$$\det \boldsymbol{M} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{D} = \det \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} = a(ei - hf).$$

Lause 3.3. *Olkoon matriisi $\boldsymbol{M}$ kaavan* (3.1) *mukainen ositettu neliömatriisi. Jos matriisi $\boldsymbol{A}$ on kääntyvä, niin*

$$\det \boldsymbol{M} = \det \boldsymbol{A} \det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}),$$

ja jos $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$, niin

$$\det \boldsymbol{M} = \det(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB}).$$

Todistus. Todistetaan ensin lauseen alkuosa. Oletetaan, että matriisi $\boldsymbol{A}$ on kääntyvä. Kerrotaan matriisi $\boldsymbol{M}$ yleistetyllä alkeismuunnosmatriisilla seuraavasti

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Koska (III)-alkeisrivimuunnos ei vaikuta matriisin determinantin arvoon, niin

$$\det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\right) = \det \boldsymbol{M}.$$

Kun otetaan determinantti puolittain yhtälöstä (3.2), niin lauseen 3.2 mukaan saadaan

$$\det \boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \det \boldsymbol{A} \det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

Todistetaan sitten lauseen toinen osa. Oletetaan, että matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{C}$ kommutoivat. Tällöin matriisit $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ ja $\boldsymbol{D}$ ovat samankokoisia neliömatriiseja. Oletetaan ensin, että $\boldsymbol{A}$ on kääntyvä. Lauseen 2.1 mukaan saadaan

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{M} &= \det \boldsymbol{A} \det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) \\ &= \det(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})) \\ &= \det(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{AC}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) \\ &= \det(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CA}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) \\ &= \det(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB}). \end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että matriisi $\boldsymbol{A}$ on singulaarinen eli se ei ole kääntyvä. Käytetään todistamisessa niin sanottua jatkuvuusperiaatetta. Polynomifunktiolla $\det(\boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{I})$ on äärellinen määrä nollakohtia, kun ε on muuttuja. Tällöin voidaan valita sellainen nollakohta $\delta > 0$, että

$$\det(\boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{I}) \neq 0,$$

kun $0 < \varepsilon < \delta$. Toisin sanoen, $\boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{I}$ on kääntyvä, kun $\varepsilon \in (0, \delta)$. Merkitään

$$\boldsymbol{M}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

Koska matriisien kertolasku noudattaa osittelulakia ja matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{C}$ kommutoivat, niin saadaan

$$(\boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \varepsilon \boldsymbol{IC} = \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{C}\varepsilon \boldsymbol{I} = \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{I})\,.$$

Havaitaan siis, että matriisit $\boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{I}$ ja $\boldsymbol{C}$ kommutoivat. Nyt saadaan

$$\det \boldsymbol{M}_\varepsilon = \det((\boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{I})\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CB}), \tag{3.3}$$

kun $0 < \varepsilon < \delta$. Yhtälön (3.3) molemmat puolet ovat jatkuvia funktioita, joissa muuttuja on ε. Kun $\varepsilon > 0$ lähestyy nollaa, niin

$$\det \boldsymbol{M} = \det(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB}).$$

□

Esimerkki 3.6. Olkoon ositettu matriisi $\boldsymbol{M}$ kuten esimerkissä 3.2, ja olkoon $a \neq 0$. Matriisin $\boldsymbol{M}$ determinantti on

$$\det \boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge).$$

Ratkaistaan luku $\det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})$. Alimatriisin $\boldsymbol{A}$ käänteismatriisi on

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan matriisi $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} da^{-1}b & da^{-1}c \\ ga^{-1}b & ga^{-1}c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e - da^{-1}b & f - da^{-1}c \\ h - ga^{-1}b & i - ga^{-1}c \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Lasketaan matriisin $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}$ determinantti

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}) &= \left(e - da^{-1}b\right)\left(i - ga^{-1}c\right) - \left(h - ga^{-1}b\right)\left(f - da^{-1}c\right) \\
&= ei - ega^{-1}c - ida^{-1}b + da^{-1}bga^{-1}c \\
&\quad - hf + hda^{-1}c + ga^{-1}bf - ga^{-1}bda^{-1}c \\
&= ei - hf - a^{-1}bdi + a^{-1}bgf + a^{-1}cdh - a^{-1}cge.
\end{aligned}$$

Nyt lauseen 3.3 mukaan saadaan

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{M} &= \det \boldsymbol{A} \det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}) \\
&= aei - ahf - bdi + bgf + cdh - cge \\
&= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge).
\end{aligned}$$

Seuraavaksi käsitellään ositettujen matriisien käänteismatriiseja. Todistetaan kaksi käänteismatriiseihin liittyvää lausetta.

Lause 3.4. *Olkoon kaavan* (3.1) *mukainen matriisi*

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$$

kääntyvä ja olkoon sen käänteismatriisi ositettu matriisi

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \end{bmatrix},$$

missä $\boldsymbol{A}$ *ja* $\boldsymbol{X}$ *sekä toisaalta* $\boldsymbol{D}$ *ja* $\boldsymbol{V}$ *ovat kertaluvuiltaan samoja neliömatriiseja. Silloin*

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{V} \det \boldsymbol{M}. \tag{3.4}$$

Todistus. Olkoot matriisit $\boldsymbol{M}$ ja $\boldsymbol{M}^{-1}$ kuten edellä. Käänteismatriisin määritelmän 2.7 mukaan voidaan kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BU} & \boldsymbol{AY}+\boldsymbol{BV} \\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DU} & \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DV} \end{bmatrix},$$

josta saadaan ratkaistua yhtälöt

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BU} = \boldsymbol{I} \tag{3.5}$$
$$\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DU} = 0 \tag{3.6}$$
$$\boldsymbol{AY}+\boldsymbol{BV} = 0 \tag{3.7}$$
$$\boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DV} = \boldsymbol{I}. \tag{3.8}$$

Kerrotaan matriisi $\boldsymbol{M}$ oikealta yleistetyllä alkeismuunnosmatriisilla, jolloin saadaan yhtälöiden (3.7) ja (3.8) perusteella

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Y} \\ 0 & \boldsymbol{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AY}+\boldsymbol{BV} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}.$$

Otetaan edellisestä yhtälöstä determinantti puolittain, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{M} \det \boldsymbol{V} &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Y} \\ 0 & \boldsymbol{V} \end{bmatrix} \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Y} \\ 0 & \boldsymbol{V} \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \det \boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

Siis saadaan yhtälö (3.4)

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{V} \det \boldsymbol{M}.$$

□

Huomautus 3.1. Yksikkömatriisit $\boldsymbol{I}$ voivat edellisessä todistuksessa olla eri kokoisia.

Huomautus 3.2. Matriisi $\boldsymbol{A}$ on singulaarinen, jos ja vain jos $\boldsymbol{V}$ on singulaarinen.

Esimerkki 3.7. Olkoon matriisi $\boldsymbol{M}$ ositettu matriisi

$$\left[\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix},$$

missä $a, e, i \neq 0$. Tällöin matriisin $\boldsymbol{M}$ käänteismatriisi on

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} a^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & i^{-1} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \end{bmatrix}.$$

Nyt saadaan lauseen 3.4 mukaan

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{V} \det \boldsymbol{M} = \left(e^{-1} i^{-1}\right)(aei) = a$$

Lause 3.5. *Olkoot $\boldsymbol{M}$ ja $\boldsymbol{M}^{-1}$ määritelty kuten lauseessa 3.4. Jos $\boldsymbol{A}$ on matriisin $\boldsymbol{M}$ kääntyvä pääalimatriisi, niin*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}, \\
\boldsymbol{Y} &= -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}, \\
\boldsymbol{U} &= -(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}, \\
\boldsymbol{V} &= (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}.
\end{aligned}$$

Todistus. Kääntyvät matriisit $\boldsymbol{M}$ ja $\boldsymbol{M}^{-1}$ voidaan lausua alkeismatriisien tulona. Koska

$$\boldsymbol{M}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{M}^{-1} \end{bmatrix},$$

niin saamme matriisin $\boldsymbol{M}$ käänteismatriisin tekemällä matriisille $\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ rivimuunnoksia siten, että saamme matriisin $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{M}^{-1} \end{bmatrix}$.

Oletetaan, että matriisi $\boldsymbol{A}$ kääntyvä matriisi. Aloitetaan kertomalla matriisin

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

ensimmäinen rivi vasemmalta matriisilla $\boldsymbol{A}^{-1}$, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}.$$

Lisätään ensimmäinen rivi matriisilla $-\boldsymbol{C}$ vasemmalta kerrottuna riviin kaksi

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}.$$

Matriisilla $\left[\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right]$ on olemassa käänteismatriisi, koska

$$\det\left[\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right] \neq 0.$$

Voidaan siis kertoa toinen rivi matriisilla $\left[\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right]^{-1}$, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Lisätään toinen rivi matriisilla $-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ vasemmalta kerrottuna riviin yksi

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Nyt olemme saaneet ositetun matriisin $\boldsymbol{M}$ käänteismatriisin $\boldsymbol{M}^{-1}$, missä

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{Y} &= -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}, \\ \boldsymbol{U} &= -(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{V} &= (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.8. Olkoot matriisit $\boldsymbol{M}$ ja $\boldsymbol{M}^{-1}$ kuten esimerkissä 3.7, ja olkoot $a, e, i \neq 0$. Ratkaistaan ensin matriisi

$$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

jolloin matriisin $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ käänteismatriisi on

$$(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & i^{-1} \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan ratkaista käänteismatriisin $\boldsymbol{M}^{-1}$ alimatriisit $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{U}$ ja $\boldsymbol{V}$. Saadaan lauseen 3.5 mukaan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} a^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{Y} &= -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & i^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{U} &= -(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{V} &= (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & i^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.9. [2, Problems: 5, s. 40] Olkoon $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$ ja $\boldsymbol{B} \in F^{n\times m}$. Osoitetaan, että $\det \boldsymbol{Z}_1 = \det \boldsymbol{Z}_2$, kun

$$\boldsymbol{Z}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Z}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Matriisi $\boldsymbol{Z}_1$ voidaan kirjoittaa tuloina

$$\boldsymbol{Z}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix}$$

ja vastaavasti matriisi $\boldsymbol{Z}_2$ voidaan kirjoittaa tuloina

$$\boldsymbol{Z}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Ottamalla yhtälöistä determinantti puolittain saadaan

$$\det \boldsymbol{Z}_1 = \left|\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right| = \left|\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right| = \det \boldsymbol{Z}_2.$$

3.4 Summan käänteismatriisi

Kun matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat samankokoisia kääntyviä matriiseja, niin tulon $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ käänteismatriisi on käänteismatriisien $\boldsymbol{B}^{-1}$ ja $\boldsymbol{A}^{-1}$ tulo

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Summalle $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ ei kuitenkaan päde vastaava yleisesti, sillä esimerkiksi matriisi $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ ei ole kääntyvä, vaikka matriisi $\boldsymbol{A}$ olisikin kääntyvä.

Lause 3.6. *Olkoot $\boldsymbol{A} \in F^{m\times m}$ ja $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$ kääntyviä matriiseja ja olkoon $\boldsymbol{C} \in F^{m\times n}$ ja $\boldsymbol{D} \in F^{n\times m}$. Jos matriisi $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$ on kääntyvä, niin*

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}. \tag{3.9}$$

Todistus. Oletetaan, että matriisit $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$ ovat kääntyviä matriiseja. Esimerkin 3.9 perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}) &= \det(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})) \\
&= \det(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}) \\
&= \det(\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})) \\
&= \det \boldsymbol{B}^{-1} \det(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}) \\
&= \det \boldsymbol{B}^{-1} \det(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}) \\
&= \det \boldsymbol{B}^{-1} \det(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}) \\
&= \det \boldsymbol{B}^{-1} \det \boldsymbol{A}^{-1} \det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}) \neq 0.
\end{aligned}$$

Siis matriisilla $\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ on olemassa käänteismatriisi, koska sen determinantti on eri suuri kuin nolla.

Todistetaan sitten yhtälö (3.9). Saadaan yhtälöketju

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD})^{-1}\\
&\quad=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD})\left(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\right)\\
&\quad=\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{CBD}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&\qquad-\boldsymbol{CBD}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&\quad=\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{C}(-(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}+\boldsymbol{B}\\
&\qquad-\boldsymbol{BD}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1})\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&\quad=\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{C}\left(-(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BD}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}+\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&\quad=\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{C}\left(-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}+\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&\quad=\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{C}\left(-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&\quad=\boldsymbol{I}_m.
\end{aligned}$$

Siis käänteismatriisin määritelmän 2.7 perusteella yhtälö (3.9) pätee. □

Esimerkki 3.10. Olkoot matriisit

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}\text{ ja }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

kääntyviä matriiseja, ja olkoon matriisi $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ja $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}3&5\end{bmatrix}$. Ratkaistaan kääntyvä summamatriisi $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD}$ annettujen matriisien avulla

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD}=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&10\\12&25\end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että summalla $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD}$ on olemassa käänteismatriisi. Ratkaistaan ensin matriisi

$$\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\end{bmatrix},$$

jolloin matriisin $\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ käänteismatriisi on

$$(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7}\end{bmatrix}.$$

Matriisin $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD}$ käänteismatriisi on lauseen 3.6 mukaan

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD})^{-1}&=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{5}{21}&-\frac{2}{21}\\-\frac{4}{35}&\frac{3}{35}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Tarkistetaan käänteismatriisin määritelmän 2.7 avulla

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CBD})^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 12 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{21} & -\frac{2}{21} \\ -\frac{4}{35} & \frac{3}{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Monet käänteismatriiseja koskevat tulokset voidaan johtaa yhtälöstä (3.9), kuten myös yhtälöt

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

ja

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^*)^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{A}^{-1}.$$

3.5 Tulon ja summan aste

Tässä kappaleessa käsitellään tulon $\boldsymbol{AB}$ ja summan $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ astetta.

Lause 3.7 (Sylvester). *Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ja $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times p}$. Silloin*

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{B} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{A}). \tag{3.10}$$

Erityisesti pätee

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - n \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\}.$$

Todistus. Kun matriisi $\boldsymbol{A}$ on lineaarikuvaus kompleksiavaruudelta $\mathbb{C}^n$, niin

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \dim\operatorname{Im}\boldsymbol{A}.$$

Olkoon nyt lineaarikuvaus tulo $\boldsymbol{AB}$ vektoriavaruudelta $\operatorname{Im}\boldsymbol{B}$. Silloin kuvauksen kuva-avaruus on $\operatorname{Im}(\boldsymbol{AB})$ ja kuvauksen nolla-avaruus on $\operatorname{Im}\boldsymbol{B} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$. Saadaan

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) &= \dim\operatorname{Im}\boldsymbol{B} \\ &= \dim\operatorname{Im}(\boldsymbol{AB}) + \dim\operatorname{Ker}(\boldsymbol{AB}) \\ &= \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) + \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{B} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{A}), \end{aligned}$$

josta seuraa, että $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{B} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{A})$.

Todistetaan seuraavaksi epäyhtälöt. Aloitetaan ensimmäisestä epäyhtälöstä

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - n \\ &\quad = \dim\operatorname{Im}\boldsymbol{A} + \dim\operatorname{Im}\boldsymbol{B} - n \\ &\quad = \dim\operatorname{Im}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) + \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{B} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{A}) - n \\ &\quad = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) - n + \dim\operatorname{Im}\boldsymbol{A} + \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{B} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

Koska

$$\dim \operatorname{Im} \boldsymbol{A} + \dim(\operatorname{Im} \boldsymbol{B} \cap \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}) \leq n,$$

niin

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - n \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}).$$

Koska

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \dim \operatorname{Im}(\boldsymbol{AB}) \leq \dim \operatorname{Im} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

niin saadaan toinen epäyhtälö

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \min(\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})).$$

□

Lause 3.8. *Olkoon* $\boldsymbol{A}$ $m \times n$ *-matriisi,* $\boldsymbol{B}$ $n \times p$ *-matriisi ja* $\boldsymbol{C}$ $p \times q$ *-matriisi. Tällöin kolmen matriisin tulon asteelle pätee*

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC}) - \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}). \tag{3.11}$$

Todistus. [1, s. 122-123] Esitetään todistuksen keskeinen idea. Tiedetään, että

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z} \end{bmatrix} \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{Y})$$

kaikilla sopivan kokoisilla matriiseilla $\boldsymbol{Z}$, ja yhtäsuuruus on voimassa, kun $\boldsymbol{Z} = 0$. Tarkastellaan yhtälöä

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} - \boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tästä ratkaisemalla saadaan epäyhtälö

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC}) \leq \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}),$$

mistä epäyhtälö (3.11) seuraa

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC}) - \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

□

Lause 3.9. *Olkoot* $\boldsymbol{A}$ *ja* $\boldsymbol{B}$ $m \times n$ *-matriiseja. Olkoon ositettu matriisi*

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_m} & \boldsymbol{I_m} \end{bmatrix} \text{ ja } \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = &\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{D} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{C}) \\ &- \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{A}^* \cap \operatorname{Im}\boldsymbol{B}^*).\end{aligned}$$

Erityisesti pätee

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

Todistus. Oletusten perusteella

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{I_m} & \boldsymbol{I_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix} = \boldsymbol{CD}.$$

Lauseen 3.7 perusteella saadaan

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{CD}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{D}) - \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{D} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{C}). \tag{3.12}$$

Saadaan

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{D}) &= \operatorname{rank}(\boldsymbol{D}^*) \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{B}^*\end{bmatrix} \\ &= \dim\operatorname{Im}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{B}^*\end{bmatrix} \\ &= \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{A}^* + \operatorname{Im}\boldsymbol{B}^*) \\ &= \dim\operatorname{Im}\boldsymbol{A}^* + \dim\operatorname{Im}\boldsymbol{B}^* - \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{A}^* \cap \operatorname{Im}\boldsymbol{B}^*) \\ &= \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^*) - \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{A}^* \cap \operatorname{Im}\boldsymbol{B}^*) \\ &= \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{A}^* \cap \operatorname{Im}\boldsymbol{B}^*).\end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu tulos yhtälöön (3.12), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = &\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{A}^* \cap \operatorname{Im}\boldsymbol{B}^*) \\ &- \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{D} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{C})\end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = &\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{D} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{C}) \\ &- \dim(\operatorname{Im}\boldsymbol{A}^* \cap \operatorname{Im}\boldsymbol{B}^*).\end{aligned}$$

□

3.6 Tulojen $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ ominaisarvot

Aloitetaan tarvittavilla ominaisarvon ja similaarisuuden määritelmillä.

Määritelmä 3.3. Skalaari $\lambda \in \mathbb{C}$ on neliömatriisin $\boldsymbol{A}$ *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, että

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Silloin vektori $\boldsymbol{x}$ on ominaisarvoa λ vastaava *ominaisvektori.*

Määritelmä 3.4. Olkoot $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in F^{n \times n}$. Matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat *similaariset*, jos on olemassa sellainen kääntyvä matriisi $\boldsymbol{Q}$, että

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}.$$

Huomautus 3.3. Similaarisilla matriiseilla $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ on samat ominaisarvot.

Samankokoisten neliömatriisien $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ tulot $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ eivät välttämättä ole yhtä suuret, eivätkä similaariset keskenään.

Lause 3.10. *Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ja $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Tulojen $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ nollasta poikkeavat ominaisarvot ovat samat ja useampikertaiset ominaisarvot esiintyvät kummassakin täsmälleen yhtä monta kertaa.*

Zhang esittää kirjassaan [2, s. 51-53] lauseelle 3.10 neljä erilaista todistusta. Käsitellään niistä seuraavaksi kolme ja käsitellään neljäs seuraavassa kappaleessa.

Todistus 1. Todistetaan determinanttien avulla. Kerrotaan matriisi

$$\begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}$$

kahdella eri alkeismuunnosmatriisilla. Saadaan matriisit

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \lambda\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} \end{bmatrix}.$$

Koska alkeismuunnosmatriisilla kertominen ei muuta determinantin arvoa, ottamalla determinantti yhtälöistä saadaan

$$\begin{aligned} \lambda^n \det(\lambda^m \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) &= \det(\lambda\boldsymbol{I}_n)\det(\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \lambda\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} \end{bmatrix} \\ &= \det(\lambda\boldsymbol{I}_m)\det(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) \\ &= \lambda^m \det(\lambda^n \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Oletetaan, että ominaisarvo $\lambda \neq 0$. Tällöin yhtälöstä (3.13) saadaan, että $\det(\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) = 0$, jos ja vain jos $\det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = 0$. Tästä seuraa, että tuloilla $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ on samat nollasta poikkeavat ominaisarvot. $\square$

Todistus 2. Todistetaan matriisien similaarisuuden avulla. Aloitetaan tarkastelemalla ositettua matriisia

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}.$$

Tehdään matriisille alkeisrivimuunnos lisäämällä ensimmäiseen riviin toinen rivi kerrottuna vasemmalta matriisilla $\boldsymbol{A}$, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

ja tekemällä vastaava alkeissarakemuunnos saadaan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BA} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Yhtälöstä (3.14) saadaan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix},$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (3.15) saadaan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BA} \end{bmatrix}.$$

Siis matriisit

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BA} \end{bmatrix}$$

ovat similaariset. Siis matriiseilla $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ on samat nollasta eroavat ominaisarvot. $\square$

Todistus 3. Osoitetaan, että matriisi $\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}$ on singulaarinen, jos ja vain jos matriisi $\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}$ on singulaarinen. Voidaan oletetaan, että ominaisarvo $\lambda = 1$, koska jos $\lambda \neq 1$, niin kerrotaan se termillä $\frac{1}{\lambda}$.

Oletetaan ensin, että $\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}$ on kääntyvä ja merkitään käänteismatriisia symbolilla $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})^{-1}$. Todistetaan sitten, että $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}$ on kääntyvä. Ratkaistaan lauseke

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BXA}) &= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BXA} - \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{BABXA} \\
&= \boldsymbol{I}_n + (\boldsymbol{BXA} - \boldsymbol{BABXA}) - \boldsymbol{BA} \\
&= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})\boldsymbol{XA} - \boldsymbol{BA} \\
&= \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{BA} \\
&= \boldsymbol{I}_n.
\end{aligned}$$

Siis matriisi $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}$ on kääntyvä määritelmän 2.7 mukaan.

Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}$ on kääntyvä, ja merkitään käänteismatriisia symbolilla $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})^{-1}$. Todistetaan, että $\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}$ on kääntyvä. Ratkaistaan lauseke vastaavasti kuin edellä

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AYB}) &= \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{AYB} - \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{ABAYB} \\ &= \boldsymbol{I}_m + (\boldsymbol{AYB} - \boldsymbol{ABAYB}) - \boldsymbol{AB} \\ &= \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})\boldsymbol{YB} - \boldsymbol{AB} \\ &= \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{AB} \\ &= \boldsymbol{I}_m.\end{aligned}$$

Nyt voidaan siis päätellä, että $\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}$ on singulaarinen, jos ja vain jos matriisi $\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}$ on singulaarinen. Siis $\det(\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) = 0$, jos ja vain jos $\det(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = 0$. Tästä seuraa, että tuloilla $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ on samat nollasta poikkeavat ominaisarvot. □

3.7 Jatkuvuusperiaate

Jatkuvuusperiaate on yksi yleisimmin käytetyistä tekniikoista matriisiteoriassa. Käytetään tätä tekniikkaa edellisen kappaleen lauseen 3.10 todistamiseen.

Esimerkki 3.11. [2, s. 52-53] Osoitetaan, että matriiseilla $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ on samat nollasta eroavat ominaisarvot, kun matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat samankokoiset neliömatriisit.

Oletetaan ensin, että $\boldsymbol{A}$ on kääntyvä. Matriisit $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ ovat similaariset [Ks. lauseen 3.10 todistus], eli

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Siis matriiseilla on samat ominaisarvot.

Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{A}$ on singulaarinen. Korvataan matriisi $\boldsymbol{A}$ matriisilla $\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I}$ ja tarkastellaan polynomia $\det(\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I})$. Valitaan sellainen nollakohta $\delta > 0$, että $\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I}$ on kääntyvä kaikilla muuttujan ε arvoilla, kun $0 < \varepsilon < \delta$. Siis matriiseilla $(\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I})$ on samat ominaisarvot, kun $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Merkitsemällä karakteristiset polynomit yhtä suuriksi saadaan

$$\det(\lambda\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}) = \det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I})),$$

kun $0 < \varepsilon < \delta$. Yhtälön molemmat puolet ovat muuttujan ε jatkuvia funktioita. Kun $\varepsilon > 0$ lähestyy nollaa, niin

$$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB}) = \det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{BA}).$$

Siis matriiseilla $\boldsymbol{AB}$ ja $\boldsymbol{BA}$ on samat nollasta poikkeavat ominaisarvot.

Todistaminen jatkuvuusperiaatetta käyttäen tehdään kolmessa vaiheessa

1. osoitetaan, että väite pätee, kun $\boldsymbol{A}$ on kääntyvä,
2. korvataan singulaarinen $\boldsymbol{A}$ kääntyvällä matriisilla $\boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{I}$,
3. käytetään funktion jatkuvuutta halutun lopputuloksen saamiseen.

Kaikissa tapauksissa jatkuvuusperiaate ei kuitenkaan auta saamaan ratkaisua. Seuraavaksi esimerkki tällaisesta tapauksesta.

Lause 3.11. *Olkoot $\boldsymbol{C}$ ja $\boldsymbol{D}$ sellaisia $n \times n$ -neliömatriiseja, että*

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^T = \boldsymbol{0}.$$

Jos $\boldsymbol{D}$ on kääntyvä, niin

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T),$$

missä $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat $n \times n$ -neliömatriiseja. Yhtälö ei päde yleisesti, jos $\boldsymbol{D}$ ei ole kääntyvä.

Todistus. Oletetaan, että matriisi $\boldsymbol{D}$ on kääntyvä. Tarkastellaan seuraavaa yhtälöä

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D^T} & 0 \\ \boldsymbol{C^T} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

Otetaan determinantti ensin yhtälön vasemmasta puolesta

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D^T} & 0 \\ \boldsymbol{C^T} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\right) &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{D^T} & 0 \\ \boldsymbol{C^T} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \det \boldsymbol{D}^T \end{aligned}$$

ja sitten yhtälön oikeasta puolesta lauseen 3.3 perusteella

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T) \det \boldsymbol{D}.$$

Koska $\det \boldsymbol{D}^T = \det \boldsymbol{D}$, niin saadaan

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T).$$

□

Esimerkki 3.12. Olkoon $\boldsymbol{M}$ ositettu matriisi

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & c & d \\ 0 & f & g & h \\ \hline 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix},$$

jossa alimatriisi $\boldsymbol{D}$ on kääntyvä matriisi. Tällöin

$$\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{D}^T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix},$$

joten saadaan

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Lasketaan matriisin $\boldsymbol{M}$ determinantti

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} = afkp.$$

Lauseen 3.11 mukaan saadaan

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{M} &= \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} ak & bp \\ 0 & fp \end{bmatrix} = akfp. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.13. Olkoon matriisi $\boldsymbol{M}$ ositettu seuraavasti

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{D}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

joten edelleen saadaan

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^T = \mathbf{0}.$$

Nyt alimatriisi $\boldsymbol{D}$ ei kuitenkaan ole kääntyvä. Saadaan, että

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1,$$

mutta matriisin $\boldsymbol{M}$ determinantti on

$$\det \boldsymbol{M} = 1.$$

Siis

$$\det \boldsymbol{M} \neq \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T).$$

Viitteet

[1] K. Abadir and J. Magnus, *Matrix algebra*, Cambridge University Press, New York, 2005.

[2] F. Zhang, *Matrix theory: basic results and techniques*, Springer-Verlag, New York, 1999.