TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Mika Mattila

Insidenssifunktioihin liittyvien matriisien ominaisarvoista

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Lokakuu 2010

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MATTILA, MIKA: Insidenssifunktioihin liittyvien matriisien ominaisarvoista

Pro gradu -tutkielma, 62 s.

Matematiikka

Lokakuu 2010

Tiivistelmä

Olkoon $(P, \preceq, \wedge)$ paikallisesti äärellinen meet-puolihila. Olkoon

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq P$$

äärellinen osajoukko, missä $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$. Olkoon f lisäksi funktio $P \to \mathbb{C}$. Tällöin $n \times n$-matriisia $(S)_f$, missä

$$(S)_f = f(x_i \wedge x_j),$$

sanotaan joukon S meet-matriisiksi funktion f suhteen. Joukon S join-matriisi funktion f suhteen join-puolihilassa $(P, \preceq, \vee)$ määritellään duaalisesti.

Tässä tutkielmassa esitetään alaraja tietynlaisen, positiivisesti definiitin meet-matriisin pienimmälle ominaisarvolle. Lisäksi määritetään kompleksitasosta sellainen alue, johon meet-suljetun joukon S meet-matriisin kaikki ominaisarvot kuuluvat. Sama tehdään vielä meet-suljetun joukon join-matriisille semimultiplikatiivisen funktion f suhteen. Näistä kaikista osoitetaan myös duaaliset tulokset. Tämän jälkeen tarkastellaan näihin lauseisiin liittyviä vakioita c_n ja C_n, joita tarvitaan niiden käytännön soveltamisessa. Lopuksi esitetään yleisemmät versiot neljästä edellä mainitusta päätuloksesta koskien yleistettyjen meet- ja join-matriisien ominaisarvoja. Viimeksi mainitut tulokset ovat uusia. Uutta tietoa löydetään myös ns. resiprookkimatriisien ominaisarvoista sekä vakion c_n alarajoista.

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan meet- ja join-matriiseja, jotka ovat tietynlaisia symmetrisiä kompleksisia neliömatriiseja. Kuten alaluvussa 2.3 nähdään, näillä matriiseilla on tietty yhteys insidenssifunktioihin eli yleistettyihin aritmeettisiin funktioihin, mihin myöskin tämän tutkielman nimi viittaa. Tavoitteena on selvittää, mitä näiden matriisien ominaisarvoista voidaan sanoa erilaisten oletusten ollessa voimassa. Vastaus riippuu paljolti siitä, mitä milloinkin oletetaan. Joissakin tapauksissa ominaisarvot ovat reaalisia, jolloin niille voidaan määrittää ala- tai yläraja. Ylä- tai alarajoista ei kuitenkaan ole mielekästä puhua siinä tapauksessa, että ominaisarvot ovat aidosti kompleksisia. Näissä tapauksissa voidaan kuitenkin, tietyin oletuksin, määrätä kompleksitasosta ne alueet, jotka sisältävät kaikki ominaisarvot.

Vaikka meet- ja join-matriiseista alettiin puhua vasta viime vuosikymmenellä, on niihin rinnastettavia matriiseja tutkittu kirjallisuudessa lukuisia kertoja kuluneen 140 vuoden aikana. Ensimmäistä kertaa näin teki irlantilainen H.J.S. Smith 1870-luvulla artikkelissaan [14]. Siinä Smith mm. määrittää sellaisen $n \times n$-matriisin determinantin, jossa i. rivin ja j. sarakkeen alkiona on $\mathrm{syt}(i, j)$. Reilut 90 vuotta myöhemmin Balatoni [1] löysi rajat tämän matriisin pienimmälle ja suurimmalle ominaisarvolle. Smithin määrittelemä matriisi on ns. SYT-matriisin erikoistapaus, jotka kaikki puolestaan kuuluvat meet-matriisien luokkaan. Beslin ja Ligh [2] puolestaan osoittivat, että kaikki SYT-matriisit ovat positiivisesti definiittejä, jolloin niiden kaikki ominaisarvot ovat reaalisia ja positiivisia. Mainitsemisen arvoinen on myös Wintnerin artikkeli [15] 1940-luvulta, jossa hän tarkastelee sellaisen matriisin suurinta ominaisarvoa, jossa i. rivin ja j. sarakkeen alkiona on

$$\left(\frac{\mathrm{syt}(i, j)}{\mathrm{pyj}(i, j)}\right)^{\alpha}$$

ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Kyseinen matriisi ei ole meet- tai join-matriisi, mutta, kuten luvussa 8 nähdään, varsin läheisesti yhteydessä näihin. Vuonna 1998 artikkelissa [11] Lindqvist ja Seip puolestaan tutkivat saman matriisin suurimman ja pienimmän ominaisarvon asymptoottista käyttäytymistä luvun n kasvaessa. Tuorein meet- ja join-matriisien ominaisarvoihin liittyvä julkaisu on Ilmosen, Haukkasen ja Merikosken artikkeli [7], joka on myös tämän tutkielman päälähde. Kyseinen paperi on edelleen kattavin tästä aiheesta julkaistu tutkimus.

Tässä tutkielmassa käydään läpi artikkelin [7] lauseet, todistukset ja esimerkit. Tätä ennen on kuitenkin tarpeen perehtyä vektori- ja matriisinormeihin, määritellä alaan liittyvät käsitteet sekä esittää tarvittavat aputulokset. Tämä tehdään luvussa 2. Luvussa 3 määrätään alaraja tietyt oletukset täyttävän, reaalisen ja positiivisesti definiitin meet-matriisin pienimmälle ominaisarvolle. Luvussa 5 tehdään sama join-matriisille. Luvussa 4 tarkastellaan meet-suljetun joukon meet-matriisia ja määrätään kompleksitasosta ne alueet, joihin tämän matriisin ominaisarvot kaikki kuuluvat. Lisäksi seurauslauseena saadaan meet-suljetun joukon join-matriisia koskeva tulos funktion f ollessa semimultiplikatiivinen. Luvussa 6 todistetaan luvun 4 lauseita vastaavat tulokset join-suljetun joukon join-matriisille sekä meet-matriisille semimultiplikatiivisen funktion f suhteen. Luvussa 7 määritetään rajoja reaalisille vakioille C_n ja c_n, joita tarvitaan lukujen 2-6 tulosten soveltamiseen käytännössä. Lopuksi luvussa 8 tarkastellaan yleistettyjen meet- ja join-matriisien ominaisarvoja ja osoitetaan niille lukujen 3, 4, 5 ja 6 päätuloksia vastaavat lauseet. Esimerkkeinä tarkastellaan mm. resiprookkimatriiseja, joiden ominaisarvoja ei aikaisemmin ole tutkittu.

Lukijan edellytetään hallitsevan hyvin lineaarialgebran, hilateorian, lukuteorian sekä jossain määrin myös algebran perustiedot ja käsitteet. Kaikki jatkossa tarvittavat määritelmät ja lauseet on kuitenkin esitetty luvussa 2. Poikkeuksena ovat kuitenkin yleistettyihin meet- ja join-matriiseihin liittyvät määritelmät ja lauseet, jotka on sisällytetty lukuun 8. Aputulosten todistukset joudutaan kuitenkin lähes kaikki sivuuttamaan. Luvun 2.1 materiaali perustuu kirjaan [6], loppuosa luvusta artikkeliin [7]. Samoin luvut 3-6 vastaavat varsin pitkälle artikkelin [7] lukuja 3-6 sekä alaluku 7.1 lukua 7. Luvuissa 7.2 ja 8 esitetty materiaali sen sijaan on pääosin uutta.

2 Esitietoja

Tämän luvun tarkoituksena on käydä läpi myöhemmin tarvittavien käsitteiden määritelmät sekä lauseiden todistuksissa tarvittavat aputulokset. Ensimmäiseksi perehdytään vektori- ja matriisinormeihin niiltä osin, kuin se on jatkon kannalta tarpeen.

2.1 Vektori- ja matriisinormeista

Useissa myöhemmissä luvuissa esitettävissä todistuksissa tullaan käyttämään *spektraalinormiksi* kutsutun matriisinormin ominaisuuksia. Toisellekin matriisinormille, ns. *Frobeniuksen normille* tulee myös olemaan käyttöä. Ennen näihin pääsemistä on kuitenkin syytä tutustua vektori- ja matriisinormeihin myös yleisesti.

Määritelmä 2.1. Olkoon V vektoriavaruus yli kunnan $\mathbb{C}$. Funktio $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$ on *vektorinormi*, mikäli kaikilla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ pätee

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$, (ei-negatiivisuus)
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, jos ja vain jos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, (positiivisuus)
3. $\|c\boldsymbol{x}\| = |c|\|\boldsymbol{x}\|$ kaikilla skalaareilla $c \in \mathbb{C}$, (homogeenisuus)
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$. (kolmioepäyhtälö)

Huomautus 2.1. Vaikka vektorinormin määritelmässä normifunktion määrittelyjoukkona onkin yleinen vektoriavaruus V, voidaan tässä tutkielmassa hyvin rajoittua tapaukseen $V = \mathbb{C}^n$.

Esimerkki 2.1. Jos $V = \mathbb{C}^n$ ja $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$, voidaan määritellä

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Voidaan osoittaa, että ko. funktio todella on vektorinormi, ns. vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ *euklidinen normi*. Nimitys juontuu siitä, että vektoriavaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ tapauksessa $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ kertoo pisteiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ välisen euklidisen etäisyyden (kun tason/avaruuden piste samaistetaan oman suuntavektorinsa kanssa). Tällä tavalla käsite saadaan kuitenkin yleistettyä useampiulotteisille sekä kompleksisille vektoriavaruuksille. Euklidinen vektorinormi on itse asiassa ainoa tässä tutkielmassa tarvittava vektorinormi, joten jos muuta ei ole mainittu, tarkoittaa $\|\boldsymbol{x}\|$ jatkossa aina vektorin $\boldsymbol{x}$ euklidista normia.

Hyvin tärkeä vektorinormeihinkin liittyvä kaava on Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö. Seuraavaksi esitetään yksi sen muotoiluista (ilman todistusta).

Lause 2.1 (Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö)**.** *Olkoot $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. Tällöin*

$$|\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{x}| \leq \sqrt{\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x}} \sqrt{\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{y}} = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|.$$

Lisäksi kaavassa on voimassa yhtälö täsmälleen silloin, kun vektorien $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ välillä on lineaarinen riippuvuus.

Seuraavaksi voidaankin määritellä matriisinormi, joka on oikeastaan vain vektorinormin käsitteen yleistys neliömatriiseille. Itse asiassa osa (mutta ei kaikki) vektorinormeista määrittelee myös matriisinormin, kun matriisi tulkitaan sopivasti vektoriksi. Mutta vaikka neliömatriisia $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ voidaankin helposti ajatella vektoriavaruuden $\mathbb{C}^{n^2}$ vektorina, antaa (neliö)matriisien välinen kertolasku aiheen menetellä hieman toisin. Seuraavan määritelmän viimeinen ehto koskeekin juuri matriisikertolaskua.

Määritelmä 2.2. Funktio $|||\bullet||| : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ on *matriisinormi*, mikäli kaikilla $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ pätee

1. $|||\boldsymbol{A}||| \geq 0$, (ei-negatiivisuus)
2. $|||\boldsymbol{A}||| = 0$, jos ja vain jos $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, (positiivisuus)
3. $|||c\boldsymbol{A}||| = |c| \, |||\boldsymbol{A}|||$ kaikilla $c \in \mathbb{C}$, (homogeenisuus)
4. $|||\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}||| \leq |||\boldsymbol{A}||| + |||\boldsymbol{B}|||$, (kolmioepäyhtälö)
5. $|||\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}||| \leq |||\boldsymbol{A}||| \, |||\boldsymbol{B}|||$. (alimultiplikatiivisuus)

Esimerkki 2.2. Euklidinen vektorinormi voidaan yleistää varsin luonnollisesti koskemaan neliömatriiseja, kun määritellään

$$|||\boldsymbol{A}||| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{A})}$$

jokaisella $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Matriisin $\boldsymbol{A}$ normi on siis sama kuin täsmälleen samoista alkioista muodostetun vektoriavaruuden $\mathbb{C}^{n^2}$ vektorin euklidinen normi. Ensimmäiset neljä matriisinormin ominaisuutta seuraavat suoraan vastaavista vektorinormin ominaisuuksista, ja alimultiplikatiivisuus voidaan osoittaa Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön avulla. Tätä matriisinormia kutsutaan usein *Frobeniuksen normiksi.* Matriisin $\boldsymbol{A}$ Frobeniuksen normia merkitään jatkossa notaatiolla $|||\boldsymbol{A}|||_F$.

Vektorinormin määritelmän yleistäminen sopivasti neliömatriiseille ei ole ainoa tapa määritellä uusi matriisinormi. Kuten sanottu, tällainen yleistäminen ei ole kaikkien vektorinormien tapauksessa edes mahdollista. Seuraavassa määritelmässä esitelläänkin analyyttinen menetelmä, jolla minkä tahansa vektorinormin avulla voidaan määritellä matriisinormi. Tätä matriisinormia kutsutaan tällöin kyseisen vektorinormin indusoimaksi matriisinormiksi.

Määritelmä 2.3. Olkoon $\|\bullet\|$ vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ vektorinormi. Määritellään nyt funktio $|||\bullet||| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, missä

$$|||\boldsymbol{A}||| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|.$$

Voidaan osoittaa, että kyseinen funktio todella saa suurimman arvonsa niiden vektorien joukossa, joiden normi on 1. Tämä seuraa siitä, että kuvaus $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, missä $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, on lineaarikuvauksena jatkuva (kun $\mathbb{C}^n$ tulkitaan metriseksi avaruudeksi, jossa metriikka määritellään euklidisen vektorinormin avulla). Tällöin kompakti (eli suljettu ja rajoitettu) joukko $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ kuvautuu niin ikään kompaktiksi joukoksi $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \text{ ja } \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$. Lopuksi viimeksi mainitun joukon alkiot kuvataan vielä funktiolla $\|\bullet\|$, joka sekin on jatkuva vektorinormin ominaisuuksien nojalla. Määritelmässä mainitun suurimman (kuten myös pienimmän) arvon olemassaolo seuraa nyt jatkuvan funktion ääriarvolauseesta.

Yhtäpitävästi voitaisiin määritellä myös, että

$$|||\boldsymbol{A}||| = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}. \tag{2.1}$$

Näin voidaan tehdä, sillä vektorinormin homogeenisuuden nojalla

$$\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \|\boldsymbol{A}(\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x})\| = \max_{\|\boldsymbol{y}\|=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\| = |||\boldsymbol{A}|||\,.$$

Vielä pitää osoittaa, että tällä funktiolla on määritelmän 2.2 mukaiset ominaisuudet. Tämä tehdään seuraavassa lauseessa.

Lause 2.2. *Määritelmän 2.3 funktio* $|||\bullet||| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ *on matriisinormi.*

Todistus (vrt. [6, s. 293]). Olkoot $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. Luvun $|||\boldsymbol{A}|||$ ei-negatiivisuus seuraa suoraan siitä, että funktio $\|\bullet\|$ saa vain ei-negatiivisia arvoja. Joukon $\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,\ \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ kaikki alkiot ovat siis ei-negatiivisia, ja $|||\boldsymbol{A}|||$ on niistä suurin.

2. Selvästi $|||\boldsymbol{0}||| = 0$. Toisaalta, jos $|||\boldsymbol{A}||| = 0$, niin joukon $\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\ \ \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ kaikkien alkioiden on oltava nollia. Tämä on kuitenkin mahdollista vain, jos $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

3. Olkoon $c \in \mathbb{C}$. Matriisinormin homogeenisuus seuraa suoraan vektorinormin homogeenisuudesta, sillä

$$|||c\boldsymbol{A}||| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = |c| \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = |c|\,|||\boldsymbol{A}|||\,.$$

4. Myös kolmioepäyhtälö seuraa suoraan vektorinormin vastaavasta ominaisuudesta, sillä

$$\begin{aligned}
|||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||| &= \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bx}\| \\
&\le \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}(\|\boldsymbol{Ax}\|+\|\boldsymbol{Bx}\|) \le \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|\boldsymbol{Ax}\| + \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|\boldsymbol{Bx}\| \\
&= |||\boldsymbol{A}||| + |||\boldsymbol{B}|||\,.
\end{aligned}$$

5. Mikäli $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ jollakin $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$, saadaan $\|\boldsymbol{ABx}\| = \|\boldsymbol{A0}\| = \|\boldsymbol{0}\| = 0$. Jos matriisin $\boldsymbol{B}$ nolla-avaruus on koko $\mathbb{C}^n$, niin jokaisella $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ pätee $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$, jolloin

$$|||\boldsymbol{AB}||| = 0 = |||\boldsymbol{B}||| = \underbrace{|||\boldsymbol{A}|||}_{\in\mathbb{R}}\,\underbrace{|||\boldsymbol{B}|||}_{=0}\,.$$

Muussa tapauksessa maksimiarvo löydetään niiden vektorien $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ joukosta, jotka eivät kuulu kyseiseen nolla-avaruuteen. Kaavan (2.1) nojalla voidaan tällöin kirjoittaa

$$\begin{aligned}
|||\boldsymbol{AB}||| &= \max_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{ABx}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \max_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}}\Big(\frac{\|\boldsymbol{ABx}\|}{\|\boldsymbol{Bx}\|}\frac{\|\boldsymbol{Bx}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\Big) \\
&\le \Big(\max_{\boldsymbol{y}\ne\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{Ay}\|}{\|\boldsymbol{y}\|}\Big)\Big(\max_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{Bx}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\Big) = |||\boldsymbol{A}|||\;|||\boldsymbol{B}|||\,.
\end{aligned}$$

□

Erityisesti euklidinen vektorinormi indusoi siis lauseen 2.2 nojalla oman matriisinorminsa. Tätä normia kutsutaan *spektraalinormiksi*, ja matriisin $\boldsymbol{A}$ spektraalinormista käytetään merkintää $|||\boldsymbol{A}|||_S$. Spektraalinormin tarkempaa käsittelyä varten tarvitaan kuitenkin vielä muutama uusi käsite ja lause.

Määritelmä 2.4. Matriisi $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ on *Hermiten matriisi*, mikäli $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$.

Huomautus 2.2. Hermiten matriisin käsite on tarpeellinen ainoastaan kompleksisia matriiseja tarkasteltaessa. Jos nimittäin $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, niin $\boldsymbol{A}$ on Hermiten matriisi, jos ja vain jos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$ eli $\boldsymbol{A}$ on symmetrinen.

Esimerkki 2.3. Olkoon $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Tällöin matriisi $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ on Hermiten matriisi, sillä

$$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}.$$

Määritelmä 2.5. Matriisi $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ on *unitaarisesti diagonalisoituva*, mikäli on olemassa sellaiset matriisit $\boldsymbol{U},\boldsymbol{D}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, että $\boldsymbol{D}$ on diagonaalimatriisi, $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}$ ja $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{AU}$.

Määritelmän matriisille $\boldsymbol{U}$ pätee siis $\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{U}^*$, ja sitä sanotaan *unitaariseksi.*

Lause 2.3 ([6], s. 104). *Hermiten matriisi on unitaarisesti diagonalisoituva, ja sen kaikki ominaisarvot ovat reaalisia.*

Huomautus 2.3. Voidaan osoittaa, että jos $\boldsymbol{A}$ on unitaarisesti diagonalisoituva kompleksinen neliömatriisi, niin määritelmän 2.5 matriisin $\boldsymbol{D}$ diagonaalialkiot ovat matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvot jossakin järjestyksessä. Matriisit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{D}$ ovat nimittäin similaariset, jolloin niillä on täsmälleen samat ominaisarvot (algebrallista kertalukua myöten). Toisaalta diagonaalimatriisin $\boldsymbol{D}$ ominaisarvot ovat triviaalisti sen diagonaalilla olevat alkiot, mistä tämä voidaan todeta.

Määritelmä 2.6. Hermiten matriisi $\boldsymbol{A}$ on *positiivisesti semidefiniitti*, mikäli

$$\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$$

jokaisella $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$. Jos edellä olevassa epäyhtälössä on aina voimassa aito suuremmuus, sanotaan matriisia $\boldsymbol{A}$ *positiivisesti definiitiksi.*

Seuraavassa lauseessa esitetään eräs varsin käyttökelpoinen tapa luonnehtia positiivisesti definiittejä ja semidefiniittejä matriiseja.

Lause 2.4 ([6], s. 402). *Hermiten matriisi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on positiivisesti semidefiniitti, jos ja vain jos kaikki sen ominaisarvot ovat ei-negatiivisia. Matriisi $\boldsymbol{A}$ on positiivisesti definiitti, jos ja vain jos kaikki sen ominaisarvot ovat positiivisia.*

Tulevissa tarkasteluissa ollaan kiinnostuneita lähes yksinomaan vain matriisien ominaisarvoista, joten puhuttaessa positiivisesti semidefiniitistä matriisista halutaan ensisijaisesti korostaa sen ominaisarvojen olevan ei-negatiivisia.

Esimerkki 2.4. Esimerkin 2.3 Hermiten matriisin $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ kaikki ominaisarvot ovat siis lauseen 2.3 nojalla reaalisia. Itse asiassa ne kaikki ovat vieläpä ei-negatiivisia, sillä jos $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on matriisin $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori (jolloin siis $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$), niin $(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ja

$$\lambda \underbrace{\|\boldsymbol{x}\|^2}_{>0} = \lambda\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(\lambda\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0.$$

On siis oltava $\lambda \geq 0$. Lauseen 2.4 nojalla edelleen seuraa, että matriisi $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ on positiivisesti semidefiniitti.

Huomautus 2.4. Matriisit $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ ovat positiivisesti semidefiniittejä myös siinä tapauksessa, että matriisi $\boldsymbol{A}$ ei ole neliömatriisi. Mikäli $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, niin jokaisella $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$

$$\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0.$$

Matriisin $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ kanssa voidaan toimia vastaavasti.

Määritelmä 2.7. Vektorinormi $\|\bullet\|$ on *unitaarisesti invariantti*, mikäli $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ jokaisella $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ ja jokaisella unitaarisella matriisilla $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Esimerkki 2.5. Euklidinen vektorinormi $\|\bullet\|$ on unitaarisesti invariantti, sillä jos $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ ja $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on unitaarinen, niin

$$\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2.$$

Tällöin ei-negatiivisuuden perusteella myös $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$.

Annetun matriisin normin laskeminen suoraan määritelmästä 2.3 edellyttää siis optimointiongelman ratkaisemista. Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että spektraalinormin tapauksessa tämä optimointiongelma voidaan kuitenkin muuttaa ominaisarvoprobleemaksi. Todistus on kirjoittajan oma.

Lause 2.5. *Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tällöin*

$$|||\boldsymbol{A}|||_S = \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \textit{ on matriisin } \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} \textit{ ominaisarvo}\}.$$

Todistus. Esimerkin 2.4 nojalla joukon

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ on matriisin } \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} \text{ ominaisarvo}\}$$

alkiot ovat siis kaikki reaalisia ja ei-negatiivisia, joten väite on tältä osin mielekäs (juurtaminen ei aiheuta ongelmaa ja äärellisessä reaalilukujoukossa on varmasti suurin alkio). Lisäksi lauseen 2.3 nojalla $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ on unitaarisesti diagonalisoituva, jolloin on olemassa matriisi $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ja sellainen unitaarinen matriisi $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, että $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$. Huomautuksen 2.3 nojalla diagonaalialkiot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ovat vieläpä matriisin $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ ominaisarvot. Merkitään nyt $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Tällöin $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^*$, ja jokaisella $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, jolla $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, pätee

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{D}(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x})_i}(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x})_i \le \sum_{i=1}^{n} \lambda \overline{(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x})_i}(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x})_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} \overline{(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x})_i}(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x})_i = \lambda(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x}) = \lambda \underbrace{\|\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x}\|^2}_{=1} = \lambda.
\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa euklidisen vektorinormin unitaarisesta invarianttiudesta. On siis osoitettu, että jokaisella $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, jolla $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, pätee $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \le \sqrt{\lambda}$. Siispä $|||\boldsymbol{A}|||_S \le \sqrt{\lambda}$.

Vielä pitää kuitenkin osoittaa, että mainittu yläraja myös saavutetaan. Tätä varten oletetaan, että $\boldsymbol{x}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, jonka euklidinen normi on 1 (tällainen $\boldsymbol{x}$ löydetään, kun mikä tahansa ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori jaetaan omalla normillaan). Nyt

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^*((\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^*(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}) = \lambda \underbrace{\|\boldsymbol{x}\|^2}_{=1} = \lambda,$$

joten $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\lambda}$. Väite seuraa nyt tästä. □

Määrittelytapansa vuoksi spektraalinormilla on lisäksi tiettyjä erityisominaisuuksia, joita käsitellään seuraavissa huomautuksissa.

Huomautus 2.5. Matriisin $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ spektraalinormi voidaan vaihtoehtoisesti laskea kaavasta

$$|||\boldsymbol{A}|||_S = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}\|=1} |\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|.$$

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla nimittäin

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}\|=1} |\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})| \leq \max_{\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}\|=1} (\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|) = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = |||\boldsymbol{A}|||_S\,.$$

Lisäksi mainittu yläraja saavutetaan, kun asetetaan $\boldsymbol{y} = \frac{1}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Tässä on siis rajoituttava tarkastelemaan sellaisten vektoreiden $\boldsymbol{x}$ joukkoa, joilla $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Näin voidaan tehdä, sillä muissa kuin triviaaleissa tapauksissa maksimi saavutetaan kyseisessä joukossa.

Huomautus 2.6. Jokaiselle matriisille $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pätee $|||\boldsymbol{A}|||_S = |||\boldsymbol{A}^*|||_S$. Nimittäin huomautuksen 2.5 nojalla

$$\begin{aligned} |||\boldsymbol{A}|||_S &= \max_{\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}\|=1} |\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}\|=1} |\overline{\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}| \\ &= \max_{\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}\|=1} |(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{y}| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}\|=1} |\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}| = |||\boldsymbol{A}^*|||_S\,. \end{aligned}$$

Huomautus 2.7. Jokaisella $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on voimassa

$$|||\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}|||_S = |||\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|||_S = |||\boldsymbol{A}|||_S^2\,.$$

Jälkimmäinen yhtälö on seurausta siitä, että ensinnäkin alimultiplikatiivisuuden sekä huomautuksen 2.6 nojalla

$$|||\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|||_S \leq |||\boldsymbol{A}|||_S\,|||\boldsymbol{A}^*|||_S = |||\boldsymbol{A}|||_S^2\,.$$

Toisaalta, kun $\boldsymbol{x}$ on matriisin $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ suurinta ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, jolle lisäksi pätee $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, lauseen 2.5 ja huomautuksen 2.6 nojalla saadaan

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}\| = \|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\underbrace{\lambda}_{\geq 0}|\,\underbrace{\|\boldsymbol{x}\|}_{=1} = \lambda = |||\boldsymbol{A}^*|||_S^2 = |||\boldsymbol{A}|||_S^2\,.$$

Täten

$$|||\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|||_S = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}\| \geq |||\boldsymbol{A}|||_S^2\,,$$

mistä väite seuraa. Toinen yhtälö voidaan osoittaa samalla tavalla.

Huomautus 2.8. Positiivisesti semidefiniitille Hermiten matriisille $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pätee

$$|||\boldsymbol{A}|||_S = \max\{\lambda \mid \lambda \text{ on matriisin } \boldsymbol{A} \text{ ominaisarvo}\}.$$

Jos nimittäin λ on matriisin $\boldsymbol{A}$ suurin ominaisarvo, niin λ^2 on matriisin $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ suurin ominaisarvo. Tällöin lauseen 2.5 nojalla

$$|||\boldsymbol{A}|||_S = \sqrt{\lambda^2} = \lambda.$$

Matriisiosion lopuksi pitää vielä määritellä (neliö)matriisin *spektraalisäde*, joka spektraalinormin tavoin liittyy ominaisarvoihin.

Määritelmä 2.8. Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tällöin

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ on matriisin } \boldsymbol{A} \text{ ominaisarvo}\},$$

missä lukua $\rho(\boldsymbol{A}) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ sanotaan matriisin $\boldsymbol{A}$ *spektraalisäteeksi*.

Huomautus 2.9. Mikäli matriisi $\boldsymbol{A}$ on positiivisesti semidefiniitti Hermiten matriisi, niin

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max\{\lambda \mid \lambda \text{ on matriisin } \boldsymbol{A} \text{ ominaisarvo}\} = |||\boldsymbol{A}|||_S.$$

Matriisin spektraalisäde kertoo siis pienimmän sellaisen origokeskisen kompleksitason ympyrän säteen, jonka sisällä ja kehällä sen kaikki ominaisarvot sijaitsevat. Mitä pienempi spektraalisäde matriisilla on, sitä lähempänä origoa (ja samalla toisiaan) sen ominaisarvot ovat. Seuraavassa lauseessa nähdään, että spektraalisäteellä on varsin tärkeä yhteys matriisinormeihin. Todistus itsessään on myös varsin elegantti.

Lause 2.6. *Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ja $|||\bullet|||$ mielivaltainen matriisinormi. Tällöin*

$$\rho(\boldsymbol{A}) \leq |||\boldsymbol{A}|||.$$

Todistus (vrt. [6, s. 297]). Jokaisella matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvolla λ on triviaalisti $|\lambda| \leq \rho(\boldsymbol{A})$. Lisäksi jollakin ominaisarvolla λ pätee $|\lambda| = \rho(\boldsymbol{A})$. Olkoon $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tätä (itseisarvoltaan maksimaalista) ominaisarvoa vastaava ominaisvektori (jolloin $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$) ja

$$\boldsymbol{X} = [\underbrace{\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x}\ \cdots\ \boldsymbol{x}}_{n \text{ kpl}}] \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Nyt $\boldsymbol{AX} = \lambda\boldsymbol{X}$, ja edelleen

$$\rho(\boldsymbol{A})\,|||\boldsymbol{X}||| = |\lambda|\,|||\boldsymbol{X}||| = |||\lambda\boldsymbol{X}||| = |||\boldsymbol{AX}||| \leq |||\boldsymbol{A}|||\,|||\boldsymbol{X}|||.$$

Väite seuraa, kun tämä epäyhtälö jaetaan termillä $|||\boldsymbol{X}||| > 0$ ($\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$, joten $|||\boldsymbol{X}||| \neq 0$). □

Mikäli matriisin $\boldsymbol{A}$ spektraalisäde tunnetaan, määrää se siis alarajan mille tahansa matriisin $\boldsymbol{A}$ normille. Toisaalta, jos vaikkapa $|||\boldsymbol{A}|||_S$ on saatu laskettua, on samalla löydetty myös yläraja spektraalisäteelle $\rho(\boldsymbol{A})$. Juuri tätä menetelmää tullaan käyttämään luvussa 7.

Matriisin $\boldsymbol{A}$ itseisarvoltaan pienimmällä ominaisarvolla ei ole matriisiteorian kannalta lainkaan samanlaista merkitystä kuin itseisarvoltaan suurimmalla. Merkinnällisistä syistä otetaan kuitenkin käyttöön analoginen merkintä

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = \min\{|\lambda| \mid \lambda \text{ on matriisin } \boldsymbol{A} \text{ ominaisarvo}\}.$$

Huomautus 2.10. Positiivisesti semidefiniitille Hermiten matriisille $\boldsymbol{A}$ pätee siis

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = \min\{\lambda \mid \lambda \text{ on matriisin } \boldsymbol{A} \text{ ominaisarvo}\}.$$

Lisäksi, mikäli $\boldsymbol{A}$ on vielä kääntyvä, on $\kappa(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{A})}$ ja $\rho(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{A})}$.

Reaaliluku $\kappa(\boldsymbol{A})$ kertoo siis suurimman sellaisen origokeskisen ympyrän säteen, jonka sisäpisteiden joukkoon ei kuulu yksikään matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvoista.

2.2 Osittaisista järjestyksistä ja hiloista

Seuraavissa luvuissa jatkuvana perusoletuksena on, että P on epätyhjä joukko, joka on lisäksi *osittain järjestetty*. Aloitetaan siis määrittelemällä, mitä tällä käsitteellä tarkoitetaan.

Määritelmä 2.9. Olkoon P epätyhjä joukko. Relaatio $\preceq \subseteq P \times P$ on *osittainen järjestys joukossa* P, mikäli seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

1. $x \preceq x$ jokaisella $x \in P$, (refleksiivisyys)
2. $(x \preceq y$ ja $y \preceq x) \Rightarrow x = y$ jokaisella $x, y \in P$, (antisymmetrisyys)
3. $(x \preceq y$ ja $y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$ jokaisella $x, y, z \in P$. (transitiivisuus)

Osittainen järjestysrelaatio toteuttaa siis ne ominaisuudet, jotka järjestysrelaatioksi kutsuttavan relaation useimmiten halutaan vähintään toteuttavan. Erikoisuutena kuitenkin on, että joukossa P *saa* olla ns. ei-vertailullisia alkiopareja, joista kumpikaan ei edellä toista. Itse asiassa pelkistetyin mahdollinen osittainen järjestysrelaatio saadaan, kun määritellään $\preceq = \{(x, x) \mid x \in P\}$. Tällöin antisymmetrisyys- ja transitiivisuusehdot toteutuvat triviaalisti.

Historiallisesti hyvin tärkeä ja siten myös tämän työn kannalta hyvin keskeinen osittainen järjestys on struktuuri $(\mathbb{Z}_+, |)$, missä $|$ on luonnollisesti määritelty jaollisuusrelaatio positiivisten kokonaislukujen joukossa. Rajoittuminen positiivisiin kokonaislukuihin on tarpeen antisymmetrisyysehdon saamiseksi voimaan. Omaperäisempi, tätä yleistävä esimerkki osittaisesta järjestyksestä saadaan struktuurista $(\mathbb{Z}[X]_+, |)$, missä

$$\mathbb{Z}[X]_+ = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X] \mid a_n > 0\}.$$

Relaatio $|$ on siis tavanomaisesti määritelty polynomien jaollisuusrelaatio ja $\mathbb{Z}[X]_+$ kaikkien sellaisten kokonaislukukertoimisten polynomien joukko, joissa johtava kerroin on positiivinen. Tämäkin rajoitus on tarpeellinen juuri antisymmetrisyyden vuoksi. Jos nimittäin $g = -f$, niin $f|g$ ja $g|f$, mutta $f \neq g$.

Myös matriisien joukkoon saadaan määriteltyä erilaisia osittaisia järjestyksiä. Esimerkiksi, jos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, voidaan määritellä $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$, jos ja vain jos $a_{ij} \leq b_{ij}$ jokaisella $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Seuraavaksi esitettävä lause liittyy juuri tähän relaatioon ja sitä tullaan tarvitsemaan useasti myöhemmissä luvuissa.

Lause 2.7 ([6], s. 501). *Olkoon $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ja merkitään $|\boldsymbol{A}| = [|a_{ij}|]$. Olkoon sitten $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sellainen matriisi, jolle pätee $\boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{B}$ ja $|\boldsymbol{A}| \leqslant \boldsymbol{B}$. Tällöin jokainen matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvo kuuluu joukkoon*

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{kk}| \leq \rho(\boldsymbol{B}) - b_{kk} \right\}.$$

Esitetään vielä toinen, edellistä hieman haastavampi, mutta yhtä lailla tärkeä esimerkki osittain järjestetystä matriisijoukosta.

Esimerkki 2.6 (vrt. [6, s. 469]). Samaa kokoa $n \times n$ olevien Hermiten matriisien joukossa voidaan niin ikään määritellä osittainen järjestysrelaatio $\preceq$, jota tullaan myös tarvitsemaan myöhemmissä luvuissa. Tämä järjestys määritellään siten, että $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$, jos ja vain jos matriisi $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ on positiivisesti semidefiniitti. Osoitetaan vielä, että näin määritelty relaatio todella on osittainen järjestys.

1. Relaation refleksiivisyys seuraa suoraan siitä, että nollamatriisi on positiivisesti semidefiniitti.

2. Antisymmetrisyyttä varten oletetaan, että $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{B} \preceq \boldsymbol{A}$ joillakin Hermiten matriiseilla $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$. Tällöin matriisit $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ ovat molemmat positiivisesti semidefiniittejä, joten on oltava

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \geq 0$$

sekä

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x}) \geq 0$$

jokaisella $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$. Tästä seuraa, että $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = 0$ jokaisella $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$. Merkitään nyt $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$. Kun vektorin $\boldsymbol{x}$ rooliin valitaan vuorotellen kaikki n yksikkövektoria $\boldsymbol{e}_i$ (vektori, joissa i. alkio on 1 ja muut nollia), saadaan matriisin $\boldsymbol{C}$ diagonaalialkiot osoitettua nolliksi. Alkion c_{ij} osoittamiseksi nollaksi asetetaan ensin $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$, mistä saadaan yhtälö $c_{ij} + c_{ji} = 0$. Asettamalla sitten $\boldsymbol{x} = \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$ saadaan yhtälö $-\mathbf{i}c_{ij} + \mathbf{i}c_{ji} = 0$. Kertomalla tämä skalaarilla $\mathbf{i}$ päästään yhtälöön $c_{ij} - c_{ji} = 0$. Tämän jälkeen voidaan yhtälöt laskea yhteen, mistä lopulta nähdään, että $c_{ij} = 0$. Siispä $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, joten $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

3. Transitiivisuuden todistamiseksi oletetaan, että $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{B} \preceq \boldsymbol{C}$ joillakin Hermiten matriiseilla $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$. Matriisit $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$ ovat siis molemmat positiivisesti semidefiniittejä. Tällöin myös $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{C}$, sillä jokaisella $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ pätee

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^*((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}))\boldsymbol{x} \\ &= \underbrace{\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x}}_{\geq 0} + \underbrace{\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{x}}_{\geq 0} \geq 0.\end{aligned}$$

Tapauksessa $n = 1$ tilanne pelkistyy ei-negatiivisten reaalilukujen luonnolliseksi järjestykseksi, joten tietyssä mielessä suuremmilla luvun n arvoilla saadaan struktuurin $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \leq)$ yleistyksiä. Yleistämisen hintana kuitenkin on, että järjestysrelaation vertailullisuus menetetään. Tämän tutkielman kannalta kyseinen, sinänsä mielenkiintoinen näkökulma on kuitenkin varsin merkityksetön.

Edellisen esimerkin relaatiolla $\preceq$ on lisäksi seuraava tärkeä ominaisuus, jota sitäkin tullaan tarvitsemaan jatkossa.

Lause 2.8 ([6], s. 471)**.** *Oletetaan, että $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat positiivisesti definiittejä matriiseja, joille lisäksi pätee $\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$. Olkoot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ matriisin $\boldsymbol{A}$ sekä $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ matriisin $\boldsymbol{B}$ ominaisarvot, missä $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ja $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n$. Tällöin $\lambda_i \geq \mu_i$ jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Jos alkiot $x, y \in P$ on annettu, voidaan lähteä tutkimaan niiden yhteisten ylärajojen joukkoa

$$\{z \in P \mid x \preceq z \text{ ja } y \preceq z\}.$$

Mikäli tämä joukko on epätyhjä ja siinä on olemassa pienin alkio a, on se alkioiden x ja y pienin yläraja. Alkiota a kutsutaan tällöin alkioiden x ja y *joiniksi* ja merkitään $a = x \vee y$. Vastaavasti voidaan tarkastella alkioiden x ja y yhteisten alarajojen joukon

$$\{z \in P \mid z \preceq x \text{ ja } z \preceq y\}$$

suurimman alkion olemassaoloa. Mikäli tässä joukossa on suurin alkio b, sanotaan sitä alkioiden x ja y *meetiksi* ja merkitään $b = x \wedge y$. Tämä antaakin aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 2.10. Osittain järjestetty joukko $(P, \preceq)$ on *join-puolihila*, mikäli $x \vee y \in P$ on olemassa kaikilla $x, y \in P$. Jos taas $x \wedge y \in P$ on olemassa kaikilla $x, y \in P$, on $(P, \preceq)$ *meet-puolihila*. Struktuuria $(P, \preceq)$ sanotaan *hilaksi*, mikäli se on sekä meet-puolihila että join-puolihila.

Samaan tapaan voitaisiin määritellä mielivaltaisen joukon P osajoukon S pienin yläraja ja suurin alaraja. Mikäli $\bigvee S$ ja $\bigwedge S$ ovat olemassa jokaisella $S \subseteq P$, sanotaan hilan $(P, \preceq)$ olevan *täydellinen hila*. Siinä missä tavallisessa hilassa operaattoreita $\vee$ ja $\wedge$ voidaan ajatella laskutoimituksina joukossa P (eli funktioina $P \times P \to P$), täydellisessä hilassa ne ovat funktioita $\mathcal{P}(P) \to P$. Jatkossa tarkastelun kohteena ovat kuitenkin lähes yksinomaan puolihilat ja hilat.

Osoittautuu, että $(\mathbb{Z}_+, |)$ ja $(\mathbb{Z}[X]_+, |)$ ovat molemmat hiloja, joissa kummassakin kahden alkion meet ja join voidaan löytää samalla tavalla niiden alkutekijähajotelmien avulla. Itse asiassa hila $(\mathbb{Z}[X]_+, |)$ sisältää hilan $(\mathbb{Z}_+, |)$ alihilanaan, mikäli kokonaisluku samaistetaan sitä vastaavan vakiopolynomin kanssa. Kummassakin hilassa kahden alkion join on niiden pienin yhteinen monikerta ja meet niiden suurin yhteinen tekijä, sillä jo aiemmin mainittujen positiivisuusrajoitusten ansiosta kumpikin näistä on aina yksikäsitteisenä olemassa ko. joukossa. Esimerkiksi polynomien $X^2 - 1$ ja $2X - 2$ suurin yhteinen tekijä on $X - 1 \in \mathbb{Z}[X]_+$, sillä $-X + 1 \notin \mathbb{Z}[X]_+$.

Laskutoimituksen $\vee$ tai $\wedge$ (tai mahdollisesti molempien) olemassaolon lisäksi struktuurilta $(P, \preceq)$ oletetaan jatkossa vielä yksi ominaisuus, *paikallinen äärellisyys*. Ennen tähän käsitteeseen pääsemistä pitää kuitenkin määritellä myös, mitä tarkoitetaan suljetulla välillä osittain järjestetyssä joukossa.

Määritelmä 2.11. Jos $x, y \in P$ ja $x \preceq y$, niin *suljettu väli*

$$[x, y] = \{z \in P \mid x \preceq z \preceq y\}.$$

Mikäli $x \not\preceq y$, määritellään $[x, y] = \emptyset$.

Määritelmä 2.12. Osittain järjestetty joukko P on *paikallisesti äärellinen*, mikäli kaikilla $x, y \in P$ suljettu väli $[x, y]$ on äärellinen joukko.

Paikallisesta äärellisyydestä ei missään nimessä seuraa, että joukko P olisi äärellinen (esimerkiksi $(\mathbb{Z}, \leq)$, missä $\leq$ tarkoittaa kokonaislukujen luonnollista järjestystä, on paikallisesti äärellinen). Sen sijaan paikallinen äärellisyys on tietyssä mielessä mm. rationaali- ja reaalilukuihin liittyvän tiheysominaisuuden vastakohta.

Esimerkki 2.7. Osoitetaan, että hila $(\mathbb{Z}[X]_+, |)$ on paikallisesti äärellinen. Oletetaan tunnetuksi, että polynomirengas $\mathbb{Z}[X]$ on faktoriaalinen (engl. UFD, unique factorization domain) eli jokaisella $f \in \mathbb{Z}[X]$ on olemassa luvut $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ sekä sellaiset jaottomat polynomit $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}[X]$, että

$$f = f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}.$$

Koska jokaisella $i \in \{1, \ldots, k\}$ pätee joko $f_i \in \mathbb{Z}[X]_+$ tai $-f_i \in \mathbb{Z}[X]_+$, voidaan kirjoittaa

$$f = (-1)^m (f_1')^{n_1} \cdots (f_k')^{n_k},$$

missä $m \in \mathbb{N}$ ja $f_1', \dots, f_k' \in \mathbb{Z}[X]_+$ ovat edelleen jaottomia. Tarkastelemalla nyt polynomin f johtavan kertoimen muodostumista huomataan, että luvun m pitää olla parillinen. Mielivaltaiselle polynomille f on siis löydetty esitys joukon $\mathbb{Z}[X]_+$ jaottomien polynomien tulona. Jos nyt $g \in \mathbb{Z}[X]_+$ ja $g|f$, niin voidaan kirjoittaa

$$g = f_1^{m_1} \cdots f_k^{m_k},$$

missä $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ ja $m_i \leq n_i$ jokaisella $i \in \{1, \dots, k\}$. Tästä on helppo nähdä, että välillä $[g, f]$ on alkioita täsmälleen

$$\prod_{i=1}^{k} (1 + (n_i - m_i))$$

kappaletta ja väli $[g, f]$ on siis äärellinen joukko. Siispä $(\mathbb{Z}[X]_+, |)$ on paikallisesti äärellinen.

Esimerkki 2.8. Hilaan $(\mathbb{Z}[X]_+, |)$ voidaan halutessa lisätä myös vakiopolynomi 0. Tällöin se on vieläpä syntyneen (täydellisen) hilan suurin alkio, sillä $f|0$ jokaisella $f \in \mathbb{Z}[X]_+ \cup \{0\}$. Täydellisyydestä huolimatta uusi hila ei kuitenkaan enää ole paikallisesti äärellinen, sillä esimerkiksi väli $[1, 0]$ sisältää kaikki joukon $\mathbb{Z}[X]_+ \cup \{0\}$ alkiot.

Joukossa $\mathbb{Z}[X]_+$ voidaan määritellä myös ns. *unitaarinen jaollisuusrelaatio*. Ko. relaatio on yleensä tapana määritellä vain joukossa $\mathbb{Z}_+$, mutta se voidaan yleistää joukkoon $\mathbb{Z}[X]_+$ varsin luonnollisella tavalla.

Määritelmä 2.13. Polynomi g jakaa polynomin f unitaarisesti, mikäli $g|f$ ja $\mathrm{syt}(g, \frac{f}{g}) = 1$. Tällöin merkitään $g \| f$.

Alkutekijähajotelmien kannalta tämä tarkoittaa, että ensinnäkin polynomin g jokainen jaoton alkutekijä on myös polynomin f alkutekijä. Lisäksi jokaisella molemmille yhteisellä alkutekijällä on vieläpä täsmälleen sama eksponentti kummankin polynomin hajotelmassa. Tätä kautta on varsin helppo nähdä, että myös relaatio $\|$ määrää osittaisen järjestyksen joukkoon $\mathbb{Z}[X]_+$. Seuraavassa esimerkissä kuitenkin nähdään, että muilta ominaisuuksiltaan unitaarinen jaollisuusrelaatio eroaa ominaisuuksiltaan melko paljon tavanomaisesta.

Esimerkki 2.9. Olkoot $f, g \in \mathbb{Z}[X]_+$. Tavanomaisen suurimman yhteisen tekijän lisäksi myös näiden polynomien suurin yhteinen unitaaritekijä voidaan löytää varsin helposti niiden alkutekijähajotelmien avulla. Esityksistä tarvitsee vain poimia ne alkutekijöiden potenssit, jotka ovat yhteiset kummallekin hajotelmalle (siis sekä tekijän että eksponentin on oltava molemmissa sama). Suurin yhteinen unitaaritekijä on kaikkien tällaisten termien tulo. Mikäli tällaisia termejä ei ole, on $f \wedge g = 1$. Struktuuri $(\mathbb{Z}[X]_+, \|)$ on siis meet-puolihila.

Pienimmän yhteisen unitaarimonikerran löytäminen ei sen sijaan ole aina mahdollista. Mikäli on olemassa yksikin sellainen jaoton $r \in \mathbb{Z}[X]_+$ sekä sellaiset eri luvut $i, j \in \mathbb{Z}_+$, että r^i esiintyy polynomin f ja r^j polynomin g alkutekijähajotelmassa, niin ko. polynomeilla ei ole lainkaan yhteisiä unitaarimonikertoja (eikä tietenkään siis myöskään pienintä yhteistä unitaarimonikertaa). Jos nimittäin $i < j$ ja $g \| h$, niin $f \nparallel h$ (tällöin $r^{j-i} | \frac{h}{f}$ ja $r^{j-i} | f$, jolloin $\mathrm{syt}(f, \frac{h}{f}) \neq 1$ ja edelleen $f \nparallel h$). Tapaus $j < i$ käsitellään vastaavasti.

Meet-puolihila $(\mathbb{Z}[X]_+, \|)$ on hilan $(\mathbb{Z}[X]_+, |)$ tapaan paikallisesti äärellinen. Itse asiassa hilan $(\mathbb{Z}[X]_+, \|)$ paikallinen äärellisyys seuraa hilan $(\mathbb{Z}[X]_+, |)$ paikallisesta äärellisyydestä, sillä jokainen puolihilan $(\mathbb{Z}[X]_+, \|)$ väli $[g, f]$ on hilan $(\mathbb{Z}[X]_+, |)$ vastaavan välin osajoukko (joka esimerkin 2.7 perusteella on äärellinen joukko). Tuloperiaatteen avulla on kuitenkin helppo todeta, että jos $g \| f$, polynomilla g on m eri alkutekijää ja polynomilla f niitä on n kappaletta, niin hilan $(\mathbb{Z}[X]_+, \|)$ välillä $[g, f]$ on 2^{n-m} alkiota.

Myöhemmissä luvuissa on jatkuvana oletuksena myös, että f on funktio $P \to \mathbb{C}$ (ts. f saa kompleksisia arvoja) ja

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

on epätyhjä ja äärellinen joukon P osajoukko, missä $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$. Lisäksi joukon S alkioille oletetaan pätevän $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$, alkiot on siis mahdollisuuksien mukaan listattu "suuruusjärjestyksessä". Kyseinen ehto silti harvoin määrittelee joukon S alkioiden luettelointijärjestyksen yksikäsitteisesti, esimerkiksi struktuurissa $(\mathbb{Z}_+, |)$ joukon $\mathbb{Z}_+$ osajoukko $S = \{1, 2, 3, 5, 15\}$ voitaisiin yhtä hyvin ilmoittaa seitsemällä muullakin tavalla, esimerkiksi
$S = \{1, 2, 5, 3, 15\}$ tai $S = \{1, 5, 3, 15, 2\}$.

Seuraavaksi päästään lopultakin määrittelemään meet- ja join- matriisien käsitteet, joiden ominaisarvoja tulevissa luvuissa on tarkoitus tutkia.

Määritelmä 2.14. Olkoon $f : P \to \mathbb{C}$ funktio ja joukko $S \subseteq P$ kuten edellä. Mikäli $(P, \preceq, \wedge)$ on meet-puolihila, niin $n \times n$-matriisia $(S)_f$, missä

$$((S)_f)_{ij} = f(x_i \wedge x_j),$$

kutsutaan *joukon S meet-matriisiksi funktion f suhteen.* Jos taas tarkastelun kohteena on join-puolihila $(P, \preceq, \vee)$, sanotaan $n \times n$-matriisia $[S]_f$, missä

$$([S]_f)_{ij} = f(x_i \vee x_j),$$

joukon S join-matriisiksi funktion f suhteen.

Mikäli funktio f on kiinnitetty eikä sekaannuksen vaaraa ole, voidaan puhua lyhyesti joukon S meet- tai join-matriisista. Varsin tärkeä erikoistapaus näistä saadaan, kun $P = \mathbb{Z}_+$ ja $\preceq = |$. Tällöin

$$((S)_f)_{ij} = f(\mathrm{syt}(x_i, x_j))$$

ja

$$([S]_f)_{ij} = f(\text{pyj}(x_i, x_j)).$$

Näistä ensimmäistä sanotaan joukon S SYT-matriisiksi (engl. GCD matrix) ja jälkimmäistä joukon S PYJ-matriisiksi (engl. LCM matrix) funktion f suhteen. Jos lisäksi $f = \text{id}$, missä $\text{id} : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ on positiivisten kokonaislukujen joukon identtinen kuvaus, on $(S)_f = (S)$ joukon S SYT-matriisi ja $[S]_f = [S]$ sen PYJ-matriisi. Mainitsemisen arvoisia näistä tekee se, että meet- ja join-matriiseihin liittyvä tutkimus keskittyi hyvin pitkään juuri tavallisiin SYT-matriiseihin. Mikäli $f = \text{id}$ ja valitaan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, on (S) juuri se sama matriisi, jonka determinanttia Smith tarkastelee artikkelissa [14].

Toinen keskeinen erikoistapaus saadaan, kun joukon $P = \mathbb{Z}_+$ osittaiseksi järjestysrelaatioksi valitaan unitaarinen jaollisuusrelaatio $\|$. Tällöin

$$((S)_f)_{ij} = f(\text{syut}(x_i, x_j)),$$

missä $\text{syut}(x_i, x_j)$ tarkoittaa lukujen x_i ja x_j suurinta yhteistä unitaaritekijää. Matriisia $(S)_f$ sanotaan johdonmukaisesti joukon S SYUT-matriisiksi funktion f suhteen. PYUJ-matriisin $[S]_f$ tutkiminen sen sijaan ei ole tässä tapauksessa aina mielekästä, sillä kuten esimerkissä 2.9 nähtiin, ei pienintä yhteistä unitaarimonikertaa ole kaikissa tapauksissa lainkaan olemassa. Ongelman välttämiseksi jouduttaisiin joukon S alkiot valitsemaan aivan erityisellä tavalla tai vaihtoehtoisesti alkion $\text{pyuj}(x_i, x_j)$ määritelmää pitäisi muuttaa niin, että se olisi aina olemassa. Tällaiset ongelmat on kuitenkin tässä yhteydessä parempi sivuuttaa, ja siksi jatkossa join-matriisia muodostettaessa aina oletetaankin, että $(P, \preceq)$ on join-puolihila.

Meet- ja join-matriisien ominaisarvoja on yleisellä tasolla tutkittu varsin vähän. Itse asiassa vasta tämän tutkielman päälähteessä [7] ominaisarvojen tutkimus ulotettiin ensimmäistä kertaa yleisesti meet-ja join-matriiseihin. Kaikki aikaisemmat tulokset koskivat joko SYT- tai PYJ-matriisien tai muiden samansukuisten reaalisten matriisien (jotka eivät kuitenkaan ole meet- tai join-matriiseja) ominaisarvoja. Kaikki aiemmin tarkastellut matriisit olivat lisäksi positiivisesti semidefiniittejä, joten aidosti kompleksisten meet- ja join-matriisien ominaisarvojen tutkiminen edellyttää kokonaan uudenlaisia menetelmiä. Yleisemmästä tarkastelusta huolimatta artikkelissa [7] löydettiin uutta tietoa myös eniten tutkituista SYT-matriiseista. Yhtä hyvin tuloksia voidaan kuitenkin soveltaa vaikkapa SYUT-matriiseihin, joita ei juurikaan ole käsitelty kirjallisuudessa.

2.3 Insidenssifunktioita sekä niitä koskevia aputuloksia

Insidenssifunktioista käytetään toisinaan myös varsin kuvaavaa nimitystä *yleistetyt aritmeettiset funktiot.* ”Yleistämisessä” on kyse vain siitä, että tarkasteltavien funktioiden määrittelyjoukoksi otetaan joukon $\mathbb{Z}_+$ sijaan joukko

$P \times P$, missä P on mikä tahansa osittain järjestetty joukko. Esimerkiksi konvoluutio määritellään tällöin joukon $\mathbb{Z}_+$ jaollisuusrelaation asemasta joukon P relaation $\preceq$ avulla.

Määritelmä 2.15. Olkoon P osittain järjestetty joukko. Funktio

$$f : P \times P \to \mathbb{C}$$

on joukon P *insidenssifunktio*, mikäli $f(x, y) = 0$ aina, kun $x \npreceq y$.

Lisäksi määritellään

$$F(P) = \{f \mid f \text{ on joukon } P \text{ insidenssifunktio}\}.$$

Kahden insidenssifunktion laskeminen yhteen tai kertominen keskenään käy varsin luonnollisesti, kun määritellään

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

ja

$$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$$

jokaisella $x, y \in P$. Näitä laskutoimituksia mielenkiintoisempi on kuitenkin *konvoluutio* $*$, joka on yleistys tavallisten aritmeettisten funktioiden Dirichlet'n konvoluutiosta. Jokaisella $(x, y) \in P \times P$ funktioiden f ja g konvoluution $f * g$ arvoksi määritellään

$$(f * g)(x, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} f(x, z)g(z, y),$$

missä summa yli tyhjän joukon tulkitaan nollaksi. On helppo nähdä, että jokainen näillä laskutoimituksilla saatava funktio on myös insidenssifunktio määritelmän 2.15 mielessä.

Seuraavaksi on aika mainita muutama erityisen merkityksen omaava insidenssifunktio. Aritmeettisilla funktioilla δ ja ζ on olemassa vastineensa insidenssifunktioiden joukossa, kun määritellään

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = y, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

sekä

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \preceq y, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Kuten todettu, lukuteoriassa symboleille δ ja ζ on vakiintunut merkitys aritmeettisina funktioina. Tarkoitettaessa jompaakumpaa äsken määritellyistä insidenssifunktioista δ tai ζ onkin siksi syytä puhua joukon P funktiosta δ tai ζ.

Struktuuri $(F(P), +)$ muodostaa Abelin ryhmän, jossa neutraalialkiona on nollafunktio f_0 (jolla siis pätee $f_0(x, y) = 0$ jokaisella $(x, y) \in P \times P$). Mikäli laskutoimitukseksi otetaan kertolasku, on neutraalialkio selvästi ζ. Struktuuri $(F(P), \cdot)$ jää kuitenkin Abelin monoidiksi, sillä esimerkiksi nollafunktiolla ei ole olemassa käänteisalkiota joukossa $F(P)$. Laskutoimituksella $*$ syntyy myöskin monoidi, joka useimmiten ei ole vaihdannainen.

Kahden laskutoimituksen struktuureista tulevat kyseeseen $(F(P), +, \cdot)$ sekä $(F(P), +, *)$, joista kumpikin on rengas. Nolla-alkiona on kummassakin funktio f_0, ykkösalkiona ensimmäisessä ζ ja jälkimmäisessä δ. Kumpikaan näistä renkaista ei kuitenkaan muodosta kokonaisaluetta tai kuntaa. Rengas $(F(P), +, *)$ kuitenkin on, ainakin tämän työn kannalta, ominaisuuksiltaan huomattavasti kiinnostavampi, joten jatkossa toisena laskutoimituksena tulee olemaan aina konvoluutio.

Voidaan osoittaa (ks. [12, s. 295]), että joukon P insidenssifunktiolla f on olemassa käänteisalkio konvoluution suhteen, jos ja vain jos $f(x, x) \neq 0$ jokaisella $x \in P$. Funktio ζ selvästi täyttää tämän ehdon, joten sillä on siis olemassa mainittu käänteisalkio. Tätä funktiota kutsutaan joukon P Möbiuksen funktioksi μ. Olemassaolon lisäksi funktiosta μ ei yleisessä tapauksessa voida kuitenkaan sanoa juuri mitään.

Seuraavaksi esitellään (ilman todistuksia) tässä tutkielmassa tarvittavat, meet-matriiseihin liittyvät aputulokset. Niitä varten pitää kuitenkin vielä tehdä muutamia lisäoletuksia sekä selventää joitakin merkintöjä.

Olkoon $(P, \preceq, \wedge, \hat{0})$ paikallisesti äärellinen meet-puolihila, jossa on lisäksi pienin alkio $\hat{0}$. Kyseiselle alkiolle pätee siis $\hat{0} \preceq x$ jokaisella $x \in P$. Lisäksi joukon $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ oletetaan edelleen olevan joukon P äärellinen osajoukko, jossa siis $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$. Joukon S sanotaan olevan *alhaalta suljettu*, mikäli jokainen sellainen alkio $y \in P$, joka edeltää jotain joukon S alkiota, kuuluu aina myöskin joukkoon S. Formaalimmin ilmaistuna joukko S on alhaalta suljettu, mikäli

$$\forall y \in P : ((\exists x \in S : y \preceq x) \Rightarrow y \in S).$$

Mikäli S ei ole alhaalta suljettu, voidaan se helposti laajentaa sellaiseksi. Suppeinta sellaista alhaalta suljettua joukkoa, joka sisältää osajoukkonaan joukon S, kutsutaan *joukon S virittämäksi järjestysideaaliksi*, ja sille käytetään merkintää $\downarrow S$. Toisin sanoen

$$\downarrow S = \{z \in P \mid \exists x \in S, z \preceq x\}.$$

Mikäli joukko S on jo valmiiksi alhaalta suljettu, on triviaalisti $\downarrow S = S$.

Joukko S on puolestaan meet-suljettu, mikäli $x \wedge y \in S$ jokaisella $x, y \in S$. Meet-suljettu joukko on itse asiassa meet-puolihilan $(P, \wedge)$ meet-alihila. On helppo huomata, että alhaalta suljettu joukko on aina myös meet-suljettu, mutta käänteinen väite ei pidä paikkaansa.

Paikallisesti äärellisessä hilassa mikä tahansa äärellinen joukko voidaan täydentää meet-suljetuksi siten, että myös laajennettu joukko on edelleen äärellinen. Tämä seuraa siitä, että $\bigwedge S \in P$ ja jokainen tällaisen *joukon S meet-sulkeuman* alkio kuuluu äärelliseen joukkoon

$$\bigcup_{i=1}^{n} [\bigwedge S, x_i].$$

Pienimmän alkion olemassaolosta joukossa P puolestaan seuraa, että jokaisen äärellisen joukon virittämä järjestysideaali on myös äärellinen joukko. Näin on, sillä selvästi

$$\downarrow S = \bigcup_{i=1}^{n} [\hat{0}, x_i].$$

Joukko $\downarrow S$ on siis äärellisen monen äärellisen joukon unionina äärellinen. Täten voidaan siis kirjoittaa $\downarrow S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, missä $w_i \preceq w_j \Rightarrow i \leq j$. Viimeksi mainitusta ehdosta itse asiassa seuraa, että on oltava $w_1 = \hat{0}$.

Jokaista funktiota $f : P \to \mathbb{C}$ kohti on olemassa ainakin yksi joukon P insidenssifunktio g, jolle pätee

$$g(\hat{0}, z) = f(z)$$

jokaisella $z \in P$ (vähänkin epätriviaalimmissa osittaisissa järjestyksissä tällaisia funktioita on jopa ääretön määrä). Kun kaikkien joukon P insidenssifunktioiden määrittelyjoukoiksi rajataan joukko $\{\hat{0}\} \times P \subset P \times P$, niin saadussa rajoittumafunktioiden joukossa on täsmälleen yksi funktio, joka toteuttaa em. ehdon. Jokaista funktiota $f : P \to \mathbb{C}$ saadaan siis vastaamaan yksikäsitteinen rajoittumafunktio, josta käytetään merkintää f_d. Täten funktio f voidaan samaistaa rajoittuman f_d kanssa, vaikka tarkasti ottaen kyse on isomorfismista kahden funktiojoukon välillä.

Lause 2.9 ([8], Lemma 3.2)**.** *Olkoon $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ $n \times m$-matriisi, jossa*

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(f_d * \mu)(\hat{0}, w_j)}, & \textit{jos } w_j \preceq x_i, \\ 0 & \textit{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin $(S)_f = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$.

Huomautus 2.11. Mikäli $(f_d * \mu)(\hat{0}, w_j) \in \mathbb{R}$ ja $(f_d * \mu)(\hat{0}, w_j) \geq 0$ jokaisella $w_j \in \downarrow S$, on lauseessa 2.9 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja edelleen huomautuksen 2.4 matriisi $(S)_f = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ on positiivisesti semidefiniitti. Näin voidaan esimerkiksi osoittaa, että tavallinen SYT-matriisi on aina positiivisesti semidefiniitti.

Lause 2.10 ([3], Theorem 12)**.** *Olkoon S meet-suljettu joukko sekä olkoot $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sellaiset $n \times n$-matriisit, joissa*

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{jos } x_j \preceq x_i, \\ 0 & \textit{muulloin} \end{cases}$$

ja

$$d_i = \sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \not\preceq x_j,\text{ kun } j<i}} (f_d * \mu)(\hat{0}, z).$$

Tällöin $(S)_f = \boldsymbol{EDE}^T$.

Edellisessä lauseessa määriteltyä matriisia $\boldsymbol{E}$ kutsutaan tässä joukon S *insidenssimatriisiksi.* Se sisältää siis kaiken osittaisen järjestyksen $(P, \preceq)$ joukkoa S koskevan informaation. Joukon S alkioiden luettelointijärjestyksellä (joka siis ei yleensä ole yksikäsitteinen) on luonnollisesti suuri merkitys insidenssimatriisia muodostettaessa, sillä alkioiden järjestyksen muuttaminen (mikäli näin voidaan tehdä rikkomatta ehtoa $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$) tuottaa useimmiten eri insidenssimatriisin. Ehdosta $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$ kuitenkin seuraa, että jokainen joukolle S mahdollinen insidenssimatriisi on aina alakolmiomatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat kaikki ykkösiä.

Matriisista $\boldsymbol{E}$ käytetään siis jatkossa nimitystä insidenssimatriisi siitäkin huolimatta, että graafiteoriassa kyseisellä termillä on varsin erilainen merkitys. Matriisilla $\boldsymbol{E}$ on kuitenkin tietty yhteys graafiteoriaan. Jos nimittäin joukon S alkioista piirretään suunnattu pseudograafi $G = (V, E)$, missä $V = S$ ja $x_i E x_j \Leftrightarrow x_i \preceq x_j$, niin matriisi $\boldsymbol{E}$ on graafin G *vierusmatriisi* (engl. adjacency matrix).

Lause 2.11 ([4], Example 1)**.** *Olkoon S alhaalta suljettu joukko. Tällöin jokaisella $x_i \in S$ pätee*

$$f(x_i) = \sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \not\preceq x_j,\text{ kun } j<i}} f(z).$$

Seuraavaksi käydään läpi duaaliset merkinnät ja tulokset join-matriiseille.

Olkoon $(P, \preceq, \vee, \hat{1})$ paikallisesti äärellinen join-puolihila, jossa on lisäksi suurin alkio $\hat{1}$. Tälle alkiolle pätee siis $x \preceq \hat{1}$ jokaisella $x \in P$. Joukon $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sanotaan olevan *ylhäältä suljettu*, mikäli jokainen sellainen alkio $y \in P$, jota edeltää jokin joukon S alkioista, kuuluu aina myöskin joukkoon S. Kvanttoreiden avulla sanottuna joukko S on siis ylhäältä suljettu, mikäli

$$\forall y \in P : ((\exists x \in S : x \preceq y) \Rightarrow y \in S).$$

Joukon S virittämä *järjestysfiltteri* $\uparrow S$ määritellään kaavalla

$$\uparrow S = \{z \in P \mid \exists x \in S, x \preceq z\}.$$

Kyseinen joukko on siis suppein joukon S sisältävä joukon P osajoukko, joka on lisäksi ylhäältä suljettu. Joukko S on puolestaan join-suljettu, mikäli $x \vee y \in S$ jokaisella $x, y \in S$. Joukko $\uparrow S$, missä $S \subseteq P$, on yksi esimerkki join-suljetusta joukosta. Joukon S täydentäminen join-suljetuksi siten, että se pysyy äärellisenä, on mahdollista samalla periaatteella kuin edellä esitetty meet-suljetuksi täydentäminen.

Aivan kuten järjestysideaalienkin tapauksessa, myös jokainen äärellisen joukon virittämä järjestysfiltteri on aina äärellinen joukko (tämä on seurausta suurimman alkion $\hat{1}$ olemassaolosta). Voidaan siis kirjoittaa $\uparrow S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, missä $w_i \preceq w_j \Rightarrow i \leq j$ (tässä on siis oltava $w_m = \hat{1}$). Tässä tapauksessa funktio f samaistetaan sruktuurin $(P, \preceq, \vee, \hat{1})$ sellaisen insidenssifunktion rajoittuman f_u kanssa, jolle on voimassa

$$f_u(z, \hat{1}) = f(z)$$

jokaisella $z \in P$. Funktiota f_u voidaan siis pitää jonkin joukon P insidenssifunktion rajoittumana joukkoon $P \times \{\hat{1}\}$.

Lause 2.12 ([9], Lemma 4.2)**.** *Olkoon $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ $n \times m$-matriisi, jossa*

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(\mu * f_u)(w_j, \hat{1})}, & \text{jos } x_i \preceq w_j, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin $[S]_f = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$.

Huomautus 2.12. Samoin kuin lauseen 2.9 tapauksessa myös lauseesta 2.12 seuraa, että kun siinä määritelty matriisi $\boldsymbol{A}$ on reaalinen, niin matriisi $[S]_f = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ on positiivisesti definiitti. Tätä tietoa ei kuitenkaan sellaisenaan voi soveltaa PYJ-matriiseihin, sillä joukossa $\mathbb{Z}_+$ ei ole suurinta alkiota jaollisuusrelaation mielessä.

Seuraava lause 2.13 esitetään poikkeuksellisesti todistuksineen. Tässä muodossa tulos mainitaan ensimmäistä kertaa artikkelissa [7], jossa sen todistus sivuutetaan. Lauseen voimassaolo voidaan toki perustella samalla tavalla kuin lauseen 2.10 artikkelissa [3]. Yksinkertaisempaa on kuitenkin vedota lauseeseen 2.12, mistä väite seuraa varsin suoraan.

Lause 2.13 ([7], Proposition 2.5)**.** *Olkoon S join-suljettu joukko sekä olkoot $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sellaiset $n \times n$-matriisit, joissa*

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } x_j \preceq x_i, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja

$$d_i = \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \not\preceq z, \text{ kun } i<j}} (\mu * f_u)(z, \hat{1}).$$

Tällöin $[S]_f = \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}$.

Todistus. Olkoon matriisi $\boldsymbol{A}$ kuten lauseessa 2.12. Tällöin saman lauseen perusteella $[S]_f = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$, jolloin

$$([S]_f)_{ij} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)_{ij} = \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \preceq z}} (\mu * f_u)(z, \hat{1}).$$

Toisaalta

$$(\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{E})_{ij} = \sum_{\substack{x_i \preceq x_k \\ x_j \preceq x_k}} d_k.$$

Pitää siis osoittaa, että kummassakin summalausekkeessa on täsmälleen samat termit. Olkoon nyt $z \in P$ sellainen alkio, että $x_i \preceq z$ ja $x_j \preceq z$. Pienimmän ylärajan määritelmän nojalla nyt $x_i \vee x_j \preceq z$. Koska joukko S on join-suljettu, on oltava $x_i \vee x_j \in S$. Merkitään siis $x_i \vee x_j = x_p$, missä $i \leq p$ ja $j \leq p$. Tästä seuraa, että ensimmäisen summan termi $(\mu * f_u)(z, \hat{1})$ on mukana jälkimmäisessä summassa joko termissä d_p tai jossakin vielä suuremman indeksin omaavassa termissä d_q. Jokainen ensimmäisen summan termi on siis mukana myös jälkimmäisessä summassa. Lisäksi alkion d_i määritelmässä esiintyvä ehto "$x_j \not\preceq z$, kun $i < j$" pitää huolen siitä, että termi $(\mu * f_u)(z, \hat{1})$ esiintyy täsmälleen yhdessä termissä d_k (termi löydetään etsimällä suurin sellainen indeksi k, jolle pätee $x_i \preceq x_k$, $x_j \preceq x_k$ ja $x_k \preceq z$). Summalausekkeet ovat siis samat, ja väite seuraa. $\square$

Lause 2.14 ([9], Lemma 4.5)**.** *Olkoon S ylhäältä suljettu joukko. Tällöin jokaisella $x_i \in S$ on voimassa*

$$f(x_i) = \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \not\preceq z,\ \text{kun}\ i<j}} f(z).$$

Seuraavaksi esitetään kaksi aputulosta, joiden avulla meet- ja join-matriisit voidaan esittää toistensa avulla. Tämä edellyttää kuitenkin tiettyjen lisäoletusten tekemistä.

Määritelmä 2.16. Olkoon $(P, \preceq, \wedge, \vee)$ paikallisesti äärellinen hila ja joukko $S \subseteq P$ kuten edellä. Funktion $f : P \to \mathbb{C}$ sanotaan olevan *semimultiplikatiivinen*, mikäli

$$f(x)f(y) = f(x \vee y)f(x \wedge y)$$

jokaisella $x, y \in P$.

Termi "semimultiplikatiivinen" viittaa lukuteorian semimultiplikatiivisiin ja multiplikatiivisiin funktioihin. Seuraava esimerkki osoittaa, mistä syystä.

Esimerkki 2.10. Olkoon $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ multiplikatiivinen aritmeettinen funktio, toisin sanoen $f(mn) = f(m)f(n)$ aina, kun $\mathrm{syt}(m, n) = 1$. Osoitetaan, että funktio f on myös semimultiplikatiivinen. Olkoot $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ja kirjoitetaan

$$m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \qquad \text{sekä} \qquad n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p},$$

missä $a_p, b_p \in \mathbb{N}$ jokaisella $p \in \mathbb{P}$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(m)f(n) &= f\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p}\right) f\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p}\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} f(p^{a_p}) \prod_{p \in \mathbb{P}} f(p^{b_p}) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} f(p^{\min\{a_p, b_p\}}) \prod_{p \in \mathbb{P}} f(p^{\max\{a_p, b_p\}}) \\ &= f\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{a_p, b_p\}}\right) f\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{a_p, b_p\}}\right) \\ &= f(\mathrm{syt}(m, n)) f(\mathrm{pyj}(m, n)). \end{aligned}$$

Esimerkki 2.11. Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Tällöin kuvaus (ns. sijoitushomomorfismi) $f : \mathbb{Z}[X]_+ \to \mathbb{C}$, missä $f(g) = g(z)$ jokaisella $g \in \mathbb{Z}[X]_+$, on semimultiplikatiivinen funktio, sillä tunnetusti

$$\begin{aligned} f(g)f(h) = g(z)h(z) = (gh)(z) &= [(\mathrm{pyj}(g, h))(\mathrm{syt}(g, h))](z) \\ &= [(\mathrm{pyj}(g, h))(z)][(\mathrm{syt}(g, h))(z)] = f(g \vee h) f(g \wedge h). \end{aligned}$$

Lause 2.15 ([9], Lemma 5.2)**.** *Olkoon f joukon P sellainen semimultiplikatiivinen funktio, että $f(x) \neq 0$ jokaisella $x \in P$. Olkoon lisäksi $\boldsymbol{F} = \mathrm{diag}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Tällöin*

$$(S)_f = \boldsymbol{F}[S]_{\frac{1}{f}} \boldsymbol{F}.$$

Lause 2.16 ([9], Lemma 5.1)**.** *Olkoon f joukon P sellainen semimultiplikatiivinen funktio, että $f(x) \neq 0$ jokaisella $x \in P$. Olkoon lisäksi $\boldsymbol{F} = \mathrm{diag}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Tällöin*

$$[S]_f = \boldsymbol{F}(S)_{\frac{1}{f}} \boldsymbol{F}.$$

Määritellään vielä matriisijoukko $K(n) \subset \{0, 1\}^{n \times n} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, johon kuuluvat kaikki sellaiset alakolmiomatriisit, joissa jokainen diagonaalialkio on 1. Toisin sanoen joukkoon $K(n)$ kuuluvat kaikki n alkion kokoisille joukoille mahdolliset insidenssimatriisit. Jokainen $\boldsymbol{X} \in K(n)$ on myös kääntyvä, sillä $\det \boldsymbol{X} = 1 \neq 0$. Samoin $\det \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T = 1 \neq 0$, joten matriisin $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T$ ominaisarvot ovat kaikki nollasta eroavia. Lisäksi, koska $\boldsymbol{X}$ on reaalinen, on $\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}^T$ ja voidaan kirjoittaa $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T = (\boldsymbol{X}^*)^* \boldsymbol{X}^*$. Esimerkin 2.4 nojalla matriisin $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T$ kaikki ominaisarvot ovat siis ei-negatiivisia, jolloin lauseen 2.4 nojalla se on positiivisesti semidefiniitti. Ja koska mikään ominaisarvoista ei myöskään voi olla 0, ovat matriisin $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T$ kaikki ominaisarvot positiivisia. Näin ollen

$$\rho(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T) = \max\{\lambda \mid \lambda \text{ on matriisin } \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T \text{ ominaisarvo}\},$$

$$\kappa(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T) = \min\{\lambda \mid \lambda \text{ on matriisin } \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T \text{ ominaisarvo}\}$$

ja voidaan määritellä (vain luvusta $n \in \mathbb{Z}_+$ riippuvat) vakiot

$$c_n = \min\{\kappa(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T) \mid \boldsymbol{X} \in K(n)\}$$

ja

$$C_n = \max\{\rho(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T) \mid \boldsymbol{X} \in K(n)\}.$$

Näillä vakioilla on varsin keskeinen rooli meet- ja join-matriisien ominaisarvojen arvioinnissa. Esitetään seuraavaksi muutama, melko triviaali niitä koskeva huomio.

Helposti nähdään, että $\boldsymbol{I}_n \in K(n)$. Edelleen $\kappa(\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T) = \rho(\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T) = 1$, joten $1 \in \{\kappa(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T) \mid \boldsymbol{X} \in K(n)\}$ ja $1 \in \{\rho(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T) \mid \boldsymbol{X} \in K(n)\}$. Siispä jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ on voimassa $c_n \leq 1 \leq C_n$.

Osoitetaan sitten, että lukujono $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ on vähenevä ja jono $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ kasvava. Jokaista $\boldsymbol{X} \in K(n)$ kohti voidaan muodostaa matriisi

$$\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X} \end{bmatrix} \in K(n+1),$$

jolle edelleen pätee

$$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}')^T = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T \end{bmatrix}.$$

Tästä on helppo nähdä, että jokainen matriisin $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T$ ominaisarvo on myös matriisin $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}')^T$ ominaisarvo. Lisäksi matriisilla $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}')^T$ on luku 1 ”ylimääräisenä” ominaisarvona. Jos nyt $\lambda = \kappa(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T)$ ja $\mu = \rho(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T)$, niin myös $\lambda = \kappa(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}')^T)$ ja $\mu = \rho(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}')^T)$. Tämän seurauksena jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ on voimassa $C_n \leq C_{n+1}$ ja $c_{n+1} \leq c_n$ (minimi ja maksimi valitaan aina edellistä joukkoa laajemmasta joukosta).

Vakioiden c_n ja C_n määrääminen on siis varsin mekaaninen ja suoraviivainen prosessi, jota varten pitää muodostaa

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

eri matriisia sekä niiden karakteristiset polynomit ja lopulta määrittää niiden kaikkien juuret. Luvun n ollessa suuri puhutaan siis varsin suuresta työmäärästä jopa matemaattiselle ohjelmistolle. Mikäli ei kuitenkaan ole tarpeen löytää näiden vakioiden tarkkaa arvoa (ts. meet/join-matriisin ominaisarvojen rajan ei tarvitse olla paras mahdollinen), voidaan myös niitä itseään arvioida sopivasti alas- tai ylöspäin. Nämä rajat ovat myös laskennallisesti paljon helpommin määrättävissä. Tähän työhön ryhdytään tämän tutkielman luvussa 7.

3 Alaraja tietynlaisen positiivisesti definiitin meet-matriisin pienimmälle ominaisarvolle

Ilman minkäänlaisia lisäoletuksia on meet- ja join-matriisien ominaisarvoista hyvin vaikea sanoa yhtään mitään. Lisäoletuksia voidaan puolestaan tehdä funktiosta f, joukosta S tai mahdollisesti molemmista. Tässä luvussa ylimääräiset oletukset koskevat nimenomaan funktiota f, jonka mm. oletetaan saavan vain reaalisia arvoja. Kyseiset oletukset tekevät vieläpä joukon S meet-matriisista positiivisesti definiitin, joten sen ominaisarvoille pystytään löytämään alaraja reaalilukujen joukosta. Osajoukosta $S \subseteq P$ sen sijaan ei äärellisyyden lisäksi ole tarpeen tehdä tässä muita oletuksia. Esimerkkeinä tällaisista matriiseista käsitellään SYT- ja SYUT-matriiseja.

Lause 3.1 ([7], Theorem 3.1). *Olkoon $(P, \preceq, \wedge, \hat{0})$ paikallisesti äärellinen meet-puolihila, jossa on lisäksi pienin alkio $\hat{0}$. Olkoon f funktio $P \to \mathbb{R}$ ja $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ joukon P äärellinen osajoukko, missä $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$. Merkitään nyt $\downarrow S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Mikäli $(f_d * \mu)(\hat{0}, w_i) > 0$ kaikilla $w_i \in \downarrow S$, niin*

$$\kappa((S)_f) \geq c_n \cdot \min\{(f_d * \mu)(\hat{0}, x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ $n \times m$-matriisi, missä

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(f_d * \mu)(\hat{0}, w_j)}, & \text{jos } w_j \preceq x_i, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Lauseen 2.9 nojalla nyt $(S)_f = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$. Matriisin $\boldsymbol{A}$ sarakkeita voidaan nyt permutoida millä tahansa permutaatiomatriisilla $\boldsymbol{Q}$, sillä $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$ ja

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T)\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}^T) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^T.$$

Yleisyyttä rajoittamatta voidaan siis olettaa, että $w_i = x_i$ jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Kyse on vain siitä, että joukon $\downarrow S$ alkioita lueteltaessa joukon S alkiot mainitaan ensimmäisenä.

Matriisi $\boldsymbol{A}$ voidaan nyt jakaa osiin siten, että

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}],$$

missä $\boldsymbol{B}$ on $n \times n$-matriisi ja matriisi $\boldsymbol{C}$ on kokoa $n \times (m - n)$. Tällöin

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = [\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}][\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}]^T = [\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{B}^T \\ \hline \boldsymbol{C}^T \end{array}\right] = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T.$$

Täten

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T,$$

ja koska matriisi $\boldsymbol{CC}^T$ on esimerkin 2.4 nojalla positiivisesti semidefiniitti, on $\boldsymbol{AA}^T \succeq \boldsymbol{BB}^T$. Lauseesta 2.8 seuraa nyt, että

$$\kappa(\boldsymbol{AA}^T) \geq \kappa(\boldsymbol{BB}^T).$$

Tarkastellaan seuraavaksi $n \times n$-matriisia $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, jolle pätee

$$b_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(f_d * \mu)(\hat{0}, x_j)}, & \text{jos } x_j \preceq x_i, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Olkoon $\boldsymbol{E}$ nyt joukon S insidenssimatriisi ja $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, missä

$$d_i = \sqrt{(f_d * \mu)(\hat{0}, x_i)}.$$

Matriisi $\boldsymbol{B}$ voidaan tällöin esittää muodossa

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{ED}.$$

Samoin perustein kuin matriisi $\boldsymbol{CC}^T$, myös matriisi $\boldsymbol{BB}^T$ on positiivisesti semidefiniitti. Lisäksi

$$\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{E})\det(\boldsymbol{D}) = 1^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \sqrt{(f_d * \mu)(\hat{0}, x_i)} > 0,$$

joten matriisi $\boldsymbol{B}$ on kääntyvä. Lisäksi $\boldsymbol{B}$ on positiivisesti definiitti (0 ei voi olla sen ominaisarvo, sillä muuten olisi $\det(\boldsymbol{B}) = 0$). Nyt huomautuksen 2.8 nojalla reaalisen Hermiten matriisin $(\boldsymbol{BB}^T)^{-1} = (\boldsymbol{B}^{-1})^T\boldsymbol{B}^{-1}$ suurin ominaisarvo on

$$\rho((\boldsymbol{BB}^T)^{-1}) = |||(\boldsymbol{BB}^T)^{-1}|||_S\,.$$

Tällöin huomautuksen 2.10 perusteella

$$\kappa(\boldsymbol{BB}^T) = \frac{1}{\rho((\boldsymbol{BB}^T)^{-1})} = \frac{1}{|||(\boldsymbol{BB}^T)^{-1}|||_S}.$$

Positiivisuusoletuksen nojalla

$$\begin{aligned} |||(\boldsymbol{D}^2)^{-1}|||_S &= \left|\left|\left| \mathrm{diag}\left(\frac{1}{(f_d * \mu)(\hat{0}, x_1)}, \ldots, \frac{1}{(f_d * \mu)(\hat{0}, x_n)}\right) \right|\right|\right|_S \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{(f_d * \mu)(\hat{0}, x_i)} = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n}(f_d * \mu)(\hat{0}, x_i)}. \end{aligned}$$

Nyt spektraalinormin alimultiplikatiivisuuden ja huomautuksen 2.7 perusteella

$$\begin{aligned} |||(\boldsymbol{BB}^T)^{-1}|||_S &= |||(\boldsymbol{ED}(\boldsymbol{ED})^T)^{-1}|||_S = |||(\boldsymbol{ED}^2\boldsymbol{E}^T)^{-1}|||_S \\ &= |||(\boldsymbol{E}^T)^{-1}(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}|||_S \\ &\leq |||(\boldsymbol{E}^T)^{-1}|||_S \cdot |||(\boldsymbol{D}^2)^{-1}|||_S \cdot |||\boldsymbol{E}^{-1}|||_S \\ &= |||(\boldsymbol{D}^2)^{-1}|||_S \cdot (|||(\boldsymbol{E}^{-1})^T|||_S \cdot |||\boldsymbol{E}^{-1}|||_S) \\ &= |||(\boldsymbol{D}^2)^{-1}|||_S \cdot |||(\boldsymbol{E}^T)^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}|||_S \\ &= |||(\boldsymbol{D}^2)^{-1}|||_S \cdot |||(\boldsymbol{EE}^T)^{-1}|||_S\,. \end{aligned}$$

Joukon S insidenssimatriisi $\boldsymbol{E}$ kuuluu nyt selvästi luvussa 2.2 määriteltyyn luokkaan $K(n)$. Tällöin $\kappa(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T) \geq c_n$, ja huomautusten 2.8 ja 2.10 perusteella

$$\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S = \rho((\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}) = \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)} \leq \frac{1}{c_n},$$

josta edelleen

$$\frac{1}{|||(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}|||_S} \geq c_n.$$

Tästä voidaan nyt päätellä, että

$$\begin{aligned}
\kappa(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) \geq \kappa(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T) &= \frac{1}{|||(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^{-1}|||_S} \geq \frac{1}{|||(\boldsymbol{D}^2)^{-1}|||_S \cdot |||(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}|||_S} \\
&= \frac{1}{|||(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}|||_S} \cdot \frac{1}{|||(\boldsymbol{D}^2)^{-1}|||_S} \geq c_n \cdot \min_{1 \leq i \leq n} (f_d * \mu)(\hat{0}, x_i).
\end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 3.1 ([7], Example 3.1)**.** Olkoon $(P, \preceq) = (\mathbb{Z}_+, \|)$, missä $\|$ on esimerkin 2.9 unitaarisen jaollisuusrelaation rajoittuma positiivisten kokonaislukujen joukkoon. Tässä struktuurissa lukujen $x_i, x_j \in \mathbb{Z}_+$ suurin alaraja on siis niiden suurin yhteinen unitaaritekijä, jolle käytetään merkintää

$$x_i \wedge x_j = \mathrm{syut}(x_i, x_j).$$

Kuten aiemmin on todettu, $(\mathbb{Z}_+, \|)$ on paikallisesti äärellinen meet-puolihila, jossa lisäksi on olemassa pienin alkio $1 \in \mathbb{Z}_+$. Kahden aritmeettisen funktion (jotka ovat siis funktioita $\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$) unitaarikonvoluutio määritellään kaavalla

$$(f *_U g)(n) = \sum_{d \| n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

ja aritmeettinen funktio δ puolestaan kaavalla

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{jos } n = 1, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Funktio δ on siis neutraalialkio laskutoimituksen $*_U$ suhteen. Lisäksi määritellään $\zeta(n) = 1$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n. Tämän funktion käänteisalkiosta unitaarikonvoluution suhteen käytetään merkintää μ^*. Kyse on siis Möbiuksen funktion unitaarianalogiasta. Verrattuna yleisen osittain järjestetyn joukon P Möbiuksen funktioon μ, funktion μ^* arvot on suhteellisen helppo määrätä. Voidaan nimittäin osoittaa, että kun $w(n)$ tarkoittaa luvun n eri alkutekijöiden lukumäärää, niin

$$\mu^*(n) = \begin{cases} 1 & \text{kun } n = 1, \\ (-1)^{w(n)} & \text{kun } n > 1. \end{cases}$$

Olkoon nyt $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{Z}_+$ äärellinen, $\downarrow S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ ja f mielivaltainen reaaliarvoinen aritmeettinen funktio. Nyt matriisi $(S^*)_f$, missä siis

$$((S^*)_f)_{ij} = f(\mathrm{syut}(x_i, x_j)),$$

on reaalinen ja symmetrinen, joten sen ominaisarvot ovat kaikki reaalisia. Niiden positiivisuus sen sijaan riippuu funktion f ominaisuuksista.

Koska 1 on puolihilan $(\mathbb{Z}_+, \|)$ pienin alkio, voidaan kirjoittaa

$$f_d(\hat{0}, z) = f_d(1, z) = f(z).$$

Nyt

$$(f_d * \mu)(1, x) = \sum_{1\|y\|x} f_d(1, y)\mu(y, x) = \sum_{y\|x} f(y)\mu(y, x).$$

Mikäli $y\|x$, on lisäksi

$$\zeta(y, x) = \zeta\left(\frac{x}{y}\right)$$

sekä

$$\delta(y, x) = \delta\left(\frac{x}{y}\right),$$

ja saadaan

$$\sum_{y\|x} f(y)\mu(y, x) = \sum_{y\|x} f(y)\mu^*\left(\frac{x}{y}\right) = (f *_U \mu^*)(x).$$

Mikäli nyt

$$(f *_U \mu^*)(w_i) > 0$$

jokaisella $w_i \in \downarrow S$, niin lauseen 3.1 nojalla

$$\kappa((S^*)_f) \geq c_n \cdot \min_{1 \leq i \leq n} (f *_U \mu^*)(x_i).$$

Esimerkiksi, jos $f(n) = n^\alpha$ jollakin $\alpha \in \mathbb{R}_+$, niin matriisia $(S^*)_f$ voidaan kutsua joukon S SYUT-potenssimatriisiksi. Kun nyt J^*_α tarkoittaa Jordanin totienttifunktion unitaarianalogiaa, niin

$$(f *_U \mu^*)(n) = J^*_\alpha(n) > 0$$

jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Edellä mainittu ehto on siis voimassa, valittiinpa joukon S alkiot miten tahansa. Erikoistapauksessa $\alpha = 1$ tarkoittaa J^*_α Eulerin totienttifunktion unitaarianalogiaa. Tarkempia tietoja Jordanin totienttifunktion sekä sen unitaarianalogian arvoista löytyy lähteestä [13].

Esimerkki 3.2 ([7], Example 3.2)**.** Tarkastellaan sitten tapausta $(P, \preceq) = (\mathbb{Z}_+, |)$. Nyt lukujen $x_i, x_j \in \mathbb{Z}_+$ suurin alaraja on niiden suurin yhteinen tekijä, toisin sanoen

$$x_i \wedge x_j = \mathrm{syt}(x_i, x_j).$$

Olkoon jälleen $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{Z}_+$ äärellinen, $\downarrow S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ ja f mielivaltainen aritmeettinen funktio. Tässä tapauksessa merkinnällä μ tarkoitetaan tavanomaista Möbiuksen funktiota ja laskutoimituksella $*$ Dirichlet'n konvoluutiota. Aivan samoin kuin edellisessä esimerkissä voidaan osoittaa, että jos

$$(f * \mu)(w_i) > 0$$

jokaisella $w_i \in \downarrow S$, niin lauseen 3.1 perusteella

$$\kappa((S)_f) \geq c_n \cdot \min_{1 \leq i \leq n} (f * \mu)(x_i).$$

Tässäkin tapauksessa kyseistä tulosta voitaisiin soveltaa aritmeettiseen funktion $f(n) = n^\alpha$, missä $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Hong ja Loewy ovat kuitenkin käsitelleet tämän tapauksen kattavasti artikkelissaan [5].

4 Meet-suljetun joukon meet-matriisin ominaisarvoista

Ennen artikkelia [7] kaikki kirjallisuudessa esitetyt SYT- ja vastaavien matriisien ominaisarvoihin liittyvät tulokset koskivat vain *reaalisia* (ja symmetrisiä) matriiseja. Seuraavaksi esitettävä lause 4.1 on edelleen tätä kirjoitettaessakin ainoa yritys määrittää rajoja *kompleksisen* (ja symmetrisen) meet-matriisin ominaisarvoille. Hankalaksi tämän tapauksen tekee se, että vaikka reaalisen ja symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat kaikki reaalisia, sama ei päde yleisesti symmetrisille kompleksisille matriiseille. Esimerkiksi matriisilla

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}$$

on symmetrisyydestä huolimatta ainoana ominaisarvona $\mathbf{i}$. Kompleksisten matriisien ollessa kyseessä ei siis voida puhua ominaisarvojen ylä- tai alarajoista. Sen sijaan voidaan tiettyjen olosuhteiden vallitessa rajata kompleksitasosta ne alueet, jotka sisältävät kaikki meet-matriisin ominaisarvot. Tämän onnistumiseksi on joukon S kuitenkin oltava meet-suljettu. Tässä tapauksessa funktiota f koskevia oletuksia ei puolestaan tarvitse tehdä lainkaan. Lisäksi lauseen 4.1 seurauksena saadaan seurauslause 4.1, joka koskee meet-suljetun joukon S meet-matriisia semimultiplikatiivisen funktion f suhteen.

Lause 4.1 ([7], Theorem 4.1). *Olkoon $(P, \preceq, \wedge, \hat{0})$ paikallisesti äärellinen meet-puolihila, jossa on olemassa pienin alkio $\hat{0}$. Oletetaan lisäksi, että joukko $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, missä $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$, on äärellinen ja meet-suljettu joukon P osajoukko. Olkoon $f : P \to \mathbb{C}$ mielivaltainen funktio. Tällöin jokainen matriisin $(S)_f$ ominaisarvo kuuluu alueeseen*

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - f(x_k)| \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - |f(x_k)| \right\},$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \npreceq x_j,\ \text{kun}\ j<i}} (f_d * \mu)(\hat{0}, z).$$

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{E}$ joukon S insidenssimatriisi ja $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, missä

$$d_i = \sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \npreceq x_j,\ \text{kun}\ j<i}} (f_d * \mu)(\hat{0}, z).$$

Lauseen 2.10 nojalla $(S)_f = \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}^T$. Käytetään merkintää $|\boldsymbol{A}|$ tarkoittamaan matriisista $\boldsymbol{A}$ saatua matriisia, jonka i. rivin ja j. sarakkeen alkiona on matriisin $\boldsymbol{A}$ vastaavan alkion itseisarvo. Lisäksi merkitään $|\boldsymbol{A}| \leqslant |\boldsymbol{B}|$, mikäli $|a_{ij}| \leq |b_{ij}|$ jokaisella $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nyt kompleksilukujen kolmioepäyhtälön nojalla

$$|(S)_f| = |\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}^T| \leqslant \boldsymbol{E}|\boldsymbol{D}|\boldsymbol{E}^T.$$

Matriisi $|\boldsymbol{D}|$ puolestaan voidaan esittää muodossa

$$|\boldsymbol{D}| = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T,$$

missä $\boldsymbol{\Lambda}^T = \boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ on $n \times n$-matriisi, jossa

$$l_i = \sqrt{d_i} = \sqrt{\left| \sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \npreceq x_j,\ \text{kun}\ j<i}} (f_d * \mu)(\hat{0}, z) \right|}.$$

Matriisi

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda})^T = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T$$

on esimerkin 2.4 nojalla positiivisesti semidefiniitti, joten huomautuksen 2.8 nojalla sen spektraalisäde

$$\rho(\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T) = |||\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T|||_S.$$

Nyt spektraalinormin alimultiplikatiivisuuden sekä huomautuksen 2.7 nojalla

$$|||\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T|||_S \leq |||\boldsymbol{E}|||_S \cdot |||\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T|||_S \cdot |||\boldsymbol{E}^T|||_S = |||\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T|||_S \cdot |||\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T|||_S,$$

ja koska insidenssimatriisi $\boldsymbol{E}$ kuuluu joukkoon $K(n)$, on lisäksi oltava

$$\left|\left|\left|\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T\right|\right|\right|_S \leq C_n.$$

Koska

$$\left|\left|\left|\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\right|\right|\right|_S = \max_{1\leq i\leq n} |d_i|,$$

saadaan arvio

$$\rho(\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T) \leq \left|\left|\left|\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T\right|\right|\right|_S \cdot \left|\left|\left|\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\right|\right|\right|_S \leq C_n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |d_i|.$$

Käytetään seuraavaksi lausetta 2.7. Asetetaan siinä $\boldsymbol{A} = (S)_f$ ja $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}|\boldsymbol{D}|\boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T$. Koska

$$\rho(\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T) - b_{kk} \leq C_n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |d_i| - |f(x_k \wedge x_k)| = C_n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |d_i| - |f(x_k)|,$$

voidaan lauseen 2.7 avulla päätellä, että jokainen matriisin $(S)_f$ ominaisarvo kuuluu alueeseen

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - f(x_k)| \leq C_n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |d_i| - |f(x_k)| \right\}.$$

□

Mikäli joukko S on meet-suljettu ja funktio f saa joukossa S vain reaalisia arvoja, voidaan lauseen 4.1 avulla tietenkin löytää myös yläraja matriisin $(S)_f$ suurimmalle ominaisarvolle (tässä tapauksessa kaikki ominaisarvot ovat siis reaalisia ja positiivisia).

Huomautus 4.1. Jos joukko S on alhaalta suljettu, niin lauseen 2.11 nojalla

$$\sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \not\preceq x_j,\ \text{kun}\ j<i}} (f_d * \mu)(\hat{0}, z) = (f_d * \mu)(\hat{0}, x_i).$$

Tämä seuraa siitä, että jos $z \in P$ ja $z \prec x_i$ jollakin $x_i \in S$, on oltava $z = x_k$ jollakin $x_k \in S$, missä $k < i$. Termiä $(f_d * \mu)(\hat{0}, z)$ ei siis oteta mukaan summaan. Tässä tapauksessa lauseessa 4.1 on siis

$$\max_{1\leq i\leq n} |d_i| = \max_{1\leq i\leq n} |(f_d * \mu)(\hat{0}, x_i)|.$$

Esimerkki 4.1 ([7], Example 4.1)**.** Olkoon $(P, \preceq, \wedge) = (\mathbb{Z}_+, |, \text{syt})$ ja olkoon $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ joukon P äärellinen osajoukko, missä $x_i | x_j \Rightarrow i \leq j$. Olkoon lisäksi $\alpha \in \mathbb{C}$. Määritellään nyt aritmeettinen funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$, missä $f(n) = n^\alpha$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Tässä n^α tarkoittaa siis kyseisen kompleksiluvun pääarvoa, jonka suuntakulma on positiivinen ja pienin mahdollinen. Tällöin

$$(f * \mu)(x_i) = J_\alpha(x_i),$$

missä J_α on Jordanin totienttifunktion kompleksinen yleistys. Lauseesta 4.1 seuraa nyt, että jokainen matriisin $(S)_f$ ominaisarvo kuuluu alueeseen

$$\bigcup_{k=1}^{n}\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - x_k^\alpha| \leq C_n \cdot \max_{1\leq i\leq n}|J_\alpha(x_i)| - x_k^{\mathrm{Re}(\alpha)}\right\}.$$

Tässä siis

$$\begin{aligned}|f(x_k)| &= |x_k^\alpha| = |(e^{\log x_k})^{\mathrm{Re}(\alpha)+i\mathrm{Im}(\alpha)}| = |e^{\mathrm{Re}(\alpha)\log x_k} \cdot e^{i\mathrm{Im}(\alpha)\log x_k}| \\ &= |e^{\mathrm{Re}(\alpha)\log x_k}| \cdot \underbrace{|e^{i(\mathrm{Im}(\alpha)\log x_k)}|}_{=1} = |(e^{\log x_k})^{\mathrm{Re}(\alpha)}| = x_k^{\mathrm{Re}(\alpha)},\end{aligned}$$

kun $\log x_k$ tarkoittaa luvun x_k luonnollista logaritmia.

Tapauksessa $\alpha = 1$ on

$$(f * \mu)(x_i) = \varphi(x_i),$$

missä φ on Eulerin totienttifunktio, ja jokainen matriisin $(S)_f$ ominaisarvo kuuluu joukkoon

$$\bigcup_{k=1}^{n}\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - x_k| \leq C_n \cdot \max_{1\leq i\leq n}\varphi(x_i) - x_k\right\}.$$

Seuraava seurauslause käsittelee meet-suljetun joukon join-matriisia semimultiplikatiivisen funktion f suhteen.

Seuraus 4.1 ([7], Corollary 4.1)**.** *Olkoon $(P, \preceq, \wedge, \vee, \hat{0})$ paikallisesti äärellinen hila, jossa on olemassa pienin alkio $\hat{0}$. Olkoon $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ joukon P äärellinen, meet-suljettu osajoukko, missä $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$. Olkoon vielä $f : P \to \mathbb{C}$ semimultiplikatiivinen funktio, jolle on vielä voimassa $f(x) \neq 0$ jokaisella $x \in P$. Tällöin voidaan määritellä funktio $g : P \to \mathbb{C}$, missä $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ jokaisella $x \in P$. Nyt jokainen matriisin $[S]_f$ ominaisarvo kuuluu alueeseen*

$$\bigcup_{k=1}^{n}\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - f(x_k)| \leq \max_{1\leq i\leq n}|f^2(x_i)| \cdot C_n \cdot \max_{1\leq i\leq n}|d_i| - |f(x_k)|\right\},$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \not\preceq x_j,\ \mathit{kun}\ j<i}} (g_d * \mu)(\hat{0}, z).$$

Todistus. Semimultiplikatiivisuusoletuksen sekä lauseen 2.16 nojalla

$$[S]_f = \boldsymbol{F}(S)_g\boldsymbol{F},$$

missä $\boldsymbol{F} = \operatorname{diag}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Kompleksilukujen kolmioepäyhtälöstä saadaan jälleen

$$|\boldsymbol{F}(S)_g\boldsymbol{F}| \leqslant |\boldsymbol{F}| \cdot |(S)_g| \cdot |\boldsymbol{F}|.$$

Käsittelemällä matriisia $|(S)_g|$ samaan tapaan kuin lauseen 4.1 todistuksessa saadaan matriisi $|\boldsymbol{F}| \cdot |(S)_g| \cdot |\boldsymbol{F}|$ esitettyä muodossa $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}$, missä $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Matriisi $|\boldsymbol{F}| \cdot |(S)_g| \cdot |\boldsymbol{F}|$ on siis esimerkin 2.4 nojalla positiivisesti semidefiniitti, jolloin huomautuksen 2.8 perusteella

$$\begin{aligned}\rho(|\boldsymbol{F}| \cdot |(S)_g| \cdot |\boldsymbol{F}|) &= \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert |\boldsymbol{F}| \cdot |(S)_g| \cdot |\boldsymbol{F}| \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert_S \leq \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert |\boldsymbol{F}| \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert_S^2 \cdot \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert (S)_g \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert_S \\ &= (\max_{1\leq i\leq n} |f(x_i)|)^2 \cdot \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert (S)_g \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert_S = \max_{1\leq i\leq n} |f^2(x_i)| \cdot \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert (S)_g \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert_S\,.\end{aligned}$$

Tämän jälkeen voidaan jatkaa normin $\vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert (S)_g \vert\kern-0.25ex\vert\kern-0.25ex\vert_S$ arviointia kuten lauseen 4.1 todistuksessa, ja väite seuraa. □

5 Alaraja tietynlaisen positiivisesti definiitin join-matriisin pienimmälle ominaisarvolle

Tässä luvussa todistetaan luvun 3 meet-matriiseihin liittyvää lausetta 3.1 vastaava tulos join-matriiseille. Toisin sanoen, tavoitteena on löytää alaraja tietynlaisen positiivisesti definiitin join-matriisin pienimmälle ominaisarvolle, kun funktion f oletetaan olevan reaaliarvoinen ja joukon $S \subseteq P$ pelkästään äärellinen. Lauseen 5.1 todistus on hyvin samanlainen lauseen 3.1 todistuksen kanssa. Tästä syystä seuraavasta todistuksesta on jätetty pois kohtia, jotka olisivat täysin identtisiä lauseen 3.1 todistuksen kanssa.

Lauseen 5.1 käyttöä havainnollistetaan tarkastelemalla PYJ-matriiseja. Ongelmana tosin on, että lauseen käyttäminen edellyttää suurimman alkion $\hat{1} \in P$ olemassaoloa. Tämä vaikeus on kuitenkin voitettavissa, kuten esimerkissä 5.1 nähdään. PYUJ-matriisien käsitteleminen sen sijaan joudutaan tässä sivuuttamaan pienimmän yhteisen unitaarimonikerran olemassaoloon liittyvien ongelmien vuoksi.

Lause 5.1 ([7], Theorem 5.1). *Olkoon $(P, \preceq, \vee, \hat{1})$ paikallisesti äärellinen join-puolihila, jossa on lisäksi suurin alkio $\hat{1}$. Olkoon f funktio $P \to \mathbb{R}$ ja $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ joukon P äärellinen osajoukko, missä $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$. Merkitään lisäksi $\uparrow S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Mikäli $(\mu * f_u)(w_i, \hat{1}) > 0$ kaikilla $w_i \in \uparrow S$, niin*

$$\kappa((S)_f) \geq c_n \cdot \min\{(\mu * f_u)(x_i, \hat{1}) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ $n \times m$-matriisi, missä

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(\mu * f_u)(w_j, \hat{1})}, & \text{jos } x_i \preceq w_j, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässäkin tapauksessa voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $w_i = x_i$ jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Matriisi $\boldsymbol{A}$ voidaan jälleen jakaa osiin siten, että

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}],$$

missä $\boldsymbol{B}$ on $n \times n$-matriisi ja matriisi $\boldsymbol{C}$ on kokoa $n \times (m - n)$. Tällöin

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T.$$

Koska matriisit $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ ja $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$ ovat molemmat positiivisesti semidefiniittejä, ovat $\kappa(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)$ ja $\kappa(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)$ näiden matriisien pienimmät ominaisarvot tässä järjestyksessä. Lisäksi

$$\kappa(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) \geq \kappa(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T).$$

Tarkastellaan sitten $n \times n$-matriisia $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, missä

$$b_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(\mu * f_u)(x_j, \hat{1})}, & \text{jos } x_i \preceq x_j, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Olkoon $\boldsymbol{E}$ nyt joukon S insidenssimatriisi ja $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, missä

$$d_i = \sqrt{(\mu * f_u)(x_i, \hat{1})}.$$

Matriisi $\boldsymbol{B}$ voidaan tällöin esittää muodossa

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{D}.$$

Lisäksi

$$\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{E}^T)\det(\boldsymbol{D}) = 1^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \sqrt{(\mu * f_u)(x_i, \hat{1})} > 0,$$

joten matriisi $\boldsymbol{B}$ (ja samalla myös matriisi $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$) on siis kääntyvä. Lisäksi $\boldsymbol{B}$ on positiivisesti definiitti. Nyt huomautuksen 2.8 nojalla reaalisen Hermiten matriisin $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^{-1} = (\boldsymbol{B}^{-1})^T\boldsymbol{B}^{-1}$ suurin ominaisarvo on $\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S$. Samalla sen käänteisluku on matriisin $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$ pienin ominaisarvo $\kappa(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)$.

Huomautuksen 2.7 nojalla

$$\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S = \left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{E}^{-1})^T\right|\!\right|\!\right|_S = \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}^{-1})^T\boldsymbol{E}^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S = \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S.$$

Lisäksi samalla tavalla kuin lauseen 3.1 todistuksessa saadaan

$$\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n}(\mu * f_u)(x_i, \hat{1})},$$

ja

$$\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \leq \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \cdot \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \leq \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \cdot \frac{1}{c_n}.$$

Tästä voidaan nyt päätellä, että

$$\kappa(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) \geq \kappa(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T) = \frac{1}{|||(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^{-1}|||_S} \geq c_n \cdot \min_{1\leq i\leq n} (\mu * f_u)(x_i, \hat{1}).$$

$\square$

Kuten luvussa 3 huomattiin, meet-matriisin pienintä ominaisarvoa koskevaa lausetta 3.1 voitiin sellaisenaan käyttää SYT-matriiseihin. Join-matriisien pienintä ominaisarvoa koskevan lauseen 5.1 soveltaminen PYJ-matriiseihin sen sijaan ei sellaisenaan onnistu, sillä hilassa $(\mathbb{Z}_+, |, \mathrm{syt}, \mathrm{pyj})$ ei ole olemassa suurinta alkiota. Ongelma pystytään kuitenkin kiertämään, kuten Korkee ja Haukkanen ovat tehneet [[9], s. 54]. Keksimällään menetelmällä heidän onnistui kääntää join-matriisien determinantteihin liittyvät tuloksensa koskemaan PYJ-matriisien determinantteja. Seuraavassa esimerkissä lausetta 5.1 sovelletaan PYJ-matriiseihin samanlaista lähestymistapaa käyttäen.

Esimerkki 5.1 ([7], Example 5.1)**.** Olkoon $(P, \preceq) = (\mathbb{Z}_+, |)$, f aritmeettinen funktio ja $S = \{x_i, x_2, \ldots, x_n\}$ joukon $\mathbb{Z}_+$ äärellinen osajoukko. Nyt lukujen $x_i, x_j \in \mathbb{Z}_+$ pienin yläraja on niiden pienin yhteinen monikerta, toisin sanoen

$$x_i \vee x_j = \mathrm{pyj}(x_i, x_j).$$

Merkitään sitten

$$s = \bigvee S = \mathrm{pyj}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sekä

$$T_s = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x|s \}.$$

Joukkoon T_s kuuluvat siis kaikki luvun s positiiviset tekijät, erityisesti $x_i \in T_s$ jokaisella $x_i \in S$. Nyt $(T_s, |, \mathrm{pyj}, s)$ on paikallisesti äärellinen join-puolihila, $S \subseteq T_s$ on äärellinen ja puolihilassa on lisäksi suurin alkio s (jolle siis pätee $x|s$ jokaisella $x \in T_s$).

Matriisi $[S]_f$ on siis reaalinen ja lauseen 2.12 nojalla positiivisesti semidefiniitti, joten $\kappa([S]_f)$ on matriisin $[S]_f$ pienin ominaisarvo. Mikäli nyt

$$(\mu * f_u)(w_i, s) > 0$$

jokaisella $w_i \in \uparrow S$, niin

$$\kappa([S]_f) \geq c_n \cdot \min_{1\leq i\leq n} (\mu * f_u)(x_i, s).$$

Tässä

$$(\mu * f_u)(z, s) = \sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}_+ \\ z|y|s}} \mu\left(\frac{y}{z}\right) f(y),$$

kun summalausekkeessa esiintyvä μ tarkoittaa lukuteoreettista Möbiuksen funktiota. Siis jos

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}_+ \\ z|y|s}} \mu\left(\frac{y}{z}\right) f(y) > 0$$

jokaisella $w_i \in \uparrow S$, niin

$$\kappa([S]_f) \geq c_n \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}_+ \\ z|y|s}} \mu\left(\frac{y}{z}\right) f(y).$$

6 Join-suljetun joukon join-matriisin ominaisarvoista

Tässä luvussa käydään läpi luvun 4 lausetta 4.1 ja seurauslausetta 4.1 vastaavat tulokset join-suljetun joukon join-matriisille. Näistä jälkimmäinen koskee siis join-suljetun joukon join-matriisia semimultiplikatiivisen funktion f suhteen.

Lause 6.1 ([7], Theorem 6.1)**.** *Olkoon $(P, \preceq, \vee, \hat{1})$ paikallisesti äärellinen join-puolihila, jossa on olemassa suurin alkio $\hat{1}$. Oletetaan lisäksi, että joukko $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, missä $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$, on äärellinen ja join-suljettu joukon P osajoukko. Olkoon $f : P \to \mathbb{C}$ mielivaltainen funktio. Tällöin jokainen matriisin $[S]_f$ ominaisarvo kuuluu alueeseen*

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - f(x_k)| \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - |f(x_k)| \right\},$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \npreceq z, \text{ kun } i<j}} (\mu * f_u)(z, \hat{1}).$$

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{E}$ joukon S insidenssimatriisi ja $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, missä

$$d_i = \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \npreceq z, \text{ kun } i<j}} (\mu * f_u)(z, \hat{1}).$$

Lauseen 2.13 nojalla $[S]_f = \boldsymbol{E}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{E}$. Nyt kompleksilukujen kolmioepäyhtälön nojalla

$$|[S]_f| = |\boldsymbol{E}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{E}| \leqslant \boldsymbol{E}^T |\boldsymbol{D}| \boldsymbol{E}.$$

Matriisi $|\boldsymbol{D}|$ voidaan taasen esittää muodossa

$$|\boldsymbol{D}| = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Lambda},$$

missä $\mathbf{\Lambda}^T = \mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ on $n \times n$-matriisi, jossa

$$l_i = \sqrt{d_i} = \sqrt{\left| \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \not\preceq z,\ \text{kun}\ i<j}} (\mu * f_u)(z, \hat{1}) \right|}.$$

Matriisi

$$(\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{E})^T \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^T |\boldsymbol{D}| \boldsymbol{E}$$

on esimerkin 2.4 nojalla positiivisesti semidefiniitti, joten huomautuksen 2.8 nojalla sen spektraalisäde

$$\rho(\boldsymbol{E}^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{E}) = \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{E}^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{E} \right|\!\right|\!\right|_S .$$

Nyt spektraalinormin alimultiplikatiivisuuden sekä huomautuksen 2.7 nojalla

$$\left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{E}^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{E} \right|\!\right|\!\right|_S \leq \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{E}^T \right|\!\right|\!\right|_S \cdot \left|\!\left|\!\left| \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} \right|\!\right|\!\right|_S \cdot |\!|\!| \boldsymbol{E} |\!|\!|_S = \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T \right|\!\right|\!\right|_S \cdot \left|\!\left|\!\left| \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^T \right|\!\right|\!\right|_S ,$$

ja koska $\boldsymbol{E} \in K(n)$, on lisäksi oltava

$$\left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T \right|\!\right|\!\right|_S \leq C_n.$$

Koska

$$\left|\!\left|\!\left| \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^T \right|\!\right|\!\right|_S = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|,$$

saadaan arvio

$$\rho(\boldsymbol{E}^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{E}) \leq \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T \right|\!\right|\!\right|_S \cdot \left|\!\left|\!\left| \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^T \right|\!\right|\!\right|_S \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|.$$

Käytetään jälleen lausetta 2.7 ja asetetaan $\boldsymbol{A} = [S]_f$ sekä $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}^T |\boldsymbol{D}| \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{E}$. Koska

$$\rho(\boldsymbol{E}^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{E}) - b_{kk} \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - |f(x_k \vee x_k)| = C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - |f(x_k)|,$$

voidaan päätellä, että jokainen matriisin $[S]_f$ ominaisarvo kuuluu alueeseen

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - f(x_k)| \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - |f(x_k)| \right\}.$$

□

Huomautus 6.1. Jos joukko S on ylhäältä suljettu, niin lauseen 2.14 nojalla

$$\sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \not\preceq z,\ \text{kun}\ i<j}} (\mu * f_u)(z, \hat{1}) = (\mu * f_u)(x_i, \hat{1}).$$

Tämä seuraa siitä, että jos $z \in P$ ja $x_i \prec z$ jollakin $x_i \in S$, on oltava $z = x_k$ jollakin $x_k \in S$, missä $i < k$. Termiä $(\mu * f_u)(z, \hat{1})$ ei siis oteta mukaan summaan. Tällöin lauseessa 6.1 on siis

$$\max_{1 \leq i \leq n} |d_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |(\mu * f_u)(x_i, \hat{1})|.$$

Seuraus 6.1 ([7], Corollary 6.1). *Olkoon $(P, \preceq, \wedge, \vee, \hat{1})$ paikallisesti äärellinen hila, jossa on olemassa suurin alkio $\hat{1}$. Olkoon $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ joukon P äärellinen, join-suljettu osajoukko, missä $x_i \preceq x_j \Rightarrow i \leq j$. Olkoon vielä $f : P \to \mathbb{C}$ semimultiplikatiivinen funktio, jolle on vielä voimassa $f(x) \neq 0$ jokaisella $x \in P$. Tällöin voidaan määritellä funktio $g : P \to \mathbb{C}$, missä $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ jokaisella $x \in P$. Nyt jokainen matriisin $(S)_f$ ominaisarvo kuuluu alueeseen*

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - f(x_k)| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |f^2(x_i)| \cdot C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - |f(x_k)| \right\},$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \npreceq z, \text{ kun } i<j}} (\mu * g_u)(z, \hat{1}).$$

Todistus. Semimultiplikatiivisuusoletuksen sekä lauseen 2.15 nojalla

$$(S)_f = \boldsymbol{F}[S]_g \boldsymbol{F},$$

missä $\boldsymbol{F} = \operatorname{diag}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Kompleksilukujen kolmioepäyhtälöä käyttäen saadaan

$$|\boldsymbol{F}[S]_g \boldsymbol{F}| \leqslant |\boldsymbol{F}| \cdot |[S]_g| \cdot |\boldsymbol{F}|.$$

Myös matriisi $|\boldsymbol{F}| \cdot |(S)_g| \cdot |\boldsymbol{F}|$ on muotoa $\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{B}$, missä $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Esimerkin 2.4 nojalla se on siis positiivisesti semidefiniitti, jolloin huomautuksen 2.8 perusteella

$$\begin{aligned} \rho(|\boldsymbol{F}| \cdot |[S]_g| \cdot |\boldsymbol{F}|) &= \left|\!\left|\!\left| |\boldsymbol{F}| \cdot |[S]_g| \cdot |\boldsymbol{F}| \right|\!\right|\!\right|_S \leq \left|\!\left|\!\left| |\boldsymbol{F}| \right|\!\right|\!\right|_S^2 \cdot \left|\!\left|\!\left| [S]_g \right|\!\right|\!\right|_S \\ &= (\max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|)^2 \cdot \left|\!\left|\!\left| [S]_g \right|\!\right|\!\right|_S = \max_{1 \leq i \leq n} |f^2(x_i)| \cdot \left|\!\left|\!\left| [S]_g \right|\!\right|\!\right|_S. \end{aligned}$$

Tämän jälkeen normin $\left|\!\left|\!\left| [S]_g \right|\!\right|\!\right|_S$ arviointia jatketaan kuten lauseen 6.1 todistuksessa, mistä päästään väitteeseen. □

7 Vakioiden c_n ja C_n estimointia

Edeltävissä luvuissa esitettyjen lauseiden soveltamiseksi käytännössä tarvitaan luonnollisesti tietoa myös vakioista c_n ja C_n. Mikäli vakioiden tarkkoja arvoja ei haluta tai voida määrittää, voidaan vakion c_n asemasta käyttää sen alarajaa ja vakio C_n korvata ylärajallaan. Tämän luvun tavoitteena on löytää laskennallisesti yksinkertaiset rajat näille arvoille. Aloitetaan tarkastelemalla vakiota C_n.

7.1 Vakion C_n yläraja

Ennen vakion C_n arvioimisen aloittamista on hyvä tuntea seuraava lause. Siinä $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$ tarkoittaa siis, että $a_{ij} \leq b_{ij}$ jokaisella $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Lause 7.1 ([6], s. 491)**.** *Olkoot $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Jos $\boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$, niin $\rho(\boldsymbol{A}) \leq \rho(\boldsymbol{B})$.*

Olkoon $\boldsymbol{X}_0 \in K(n)$ sellainen alakolmiomatriisi, jossa kaikki diagonaalilla ja sen alapuolella olevat alkiot ovat ykkösiä. Matriisi $\boldsymbol{X}_0$ on siis joukon $K(n)$ suurin alkio relaation $\leqslant$ mielessä. Merkitään vielä $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{X}_0^T$.

On varsin helppo nähdä, että jos $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2 \in K(n)$ ja $\boldsymbol{X}_1 \leqslant \boldsymbol{X}_2$, niin

$$\boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_1^T \leqslant \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{X}_2^T.$$

Nyt jokaisella $\boldsymbol{X} \in K(n)$ pätee $\boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{X}_0$ ja edelleen

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T \leqslant \boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{X}_0^T = \boldsymbol{M}_0.$$

Lauseen 7.1 nojalla nyt

$$\rho(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T) \leqslant \rho(\boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{X}_0^T) = \rho(\boldsymbol{M}_0).$$

Tästä ja lauseesta 2.6 voidaan siis päätellä, että

$$C_n = \rho(\boldsymbol{M}_0) = \rho(\boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{X}_0^T) \leq \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{X}_0^T \right|\!\right|\!\right|_F.$$

Nyt

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{X}_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{bmatrix},$$

ja voidaan määritellä yläraja

$$T_n = |||\boldsymbol{M}_0|||_F = \sqrt{\operatorname{tr}(\boldsymbol{M}_0^* \boldsymbol{M}_0)} = \sqrt{\operatorname{tr}(\boldsymbol{M}_0^2)}.$$

Matriisin $\boldsymbol{M}_0^2$ diagonaalialkiot puolestaan ovat

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{M}_0^2)_{11} = n \\
&(\boldsymbol{M}_0^2)_{22} = (n-1) \cdot 2^2 + 1^2 \\
&(\boldsymbol{M}_0^2)_{33} = (n-2) \cdot 3^2 + 1^2 + 2^2 \\
&\qquad \vdots \\
&(\boldsymbol{M}_0^2)_{(n-1)(n-1)} = 2 \cdot (n-1)^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-2)^2 \\
&(\boldsymbol{M}_0^2)_{nn} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2,
\end{aligned}$$

joten laskemalla nämä yhteen ja ottamalla neliöjuuri saadaan

$$T_n = \sqrt{(2n-1) + (2n-3)\cdot 4 + (2n-5)\cdot 9 + \cdots + 3\cdot(n-1)^2 + n^2}.$$

Näin löydetty yläraja T_n on itse asiassa varsin hyvä arvio vakiolle C_n. Esimerkiksi $C_3 = 5.04892$, $T_3 = 5.09902$, $C_5 = 12.3435$, $T_5 = 12.4499$ sekä $C_9 = 36.6604$, $T_9 = 36.9459$. Mikäli tämä ei vielä riitä, voidaan vielä parempia ylärajoja löytää sopivien siirtymien avulla. Tämä onnistuu valitsemalla ensin riittävän pieni luku $t \in [0,1]$ ja laskemalla sitten funktion

$$T_n(t) = t + \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{M}_0 - t\boldsymbol{I}_n \right|\!\right|\!\right|_F$$

arvo. Oleellista on, että lukua t ei valita liian suureksi, sillä muuten $C_n \leq T_n(t)$ ei välttämättä ole enää voimassa. Suuremmilla luvun n arvoilla näyttäisi olevan mahdollista valita myös hieman suurempia parametrin t arvoja. Aina turvallinen valinta on $t = 0$, sillä $T_n(0) = T_n$. Tapauksessa $n = 3$ voidaan valita $t = 0.5$, jolloin saadaan parannettu yläraja $T_3(0.5) = 5.05522$. Kun $n = 5$, valinta $t = 0.7$ tuottaa ylärajan $T_5(0.7) = 12.3812$ ja tapauksessa $n = 9$ valinnalla $t = 1$ saadaan $T_9(1) = 36.9459$. Tässä esitetyt valinnat antavat suuntaa parametrin t valinnalle myös muilla luvun n arvoilla. Esimerkiksi, kun $n \geq 9$, voidaan hyvin todennäköisesti aina valita $t = 1$.

7.2 Vakion c_n alaraja

Edellisessä alaluvussa 7.1 löydettiin vakion C_n yläraja varsin helposti. Alarajan, erityisesti hyvän sellaisen, löytäminen vakiolle c_n on huomattavasti vaikeampaa, sillä matriisiteoriasta ei tunnu juurikaan olevan apua sellaisen etsimisessä. Tehtävän haasteellisuus näkyy siinä, että tähänastinen matemaattinen kirjallisuus ei tunne yhtään tällaista alarajaa. Seuraava lause parantaa tätä tilannetta hieman.

Lause 7.2. *Vakiolle c_n pätee*

$$\left(\frac{1}{T_n}\right)^{n-1} \leq c_n.$$

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{X}_0 \in K(n)$ se matriisi, jolle pätee $c_n = \kappa(\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_0^T)$. Merkitään lisäksi $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_0^T$. Olkoon

$$g(\lambda) = \det(\boldsymbol{M}_0 - \lambda\boldsymbol{I}_n) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{Z}[\lambda]$$

matriisin $\boldsymbol{M}_0$ karakteristinen polynomi. Nyt

$$\begin{aligned} g(0) = a_0 &= \det(\boldsymbol{M}_0 - 0\cdot\boldsymbol{I}_n) = \det(\boldsymbol{M}_0) = \det(\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_0^T) \\ &= \det(\boldsymbol{X}_0)\det(\boldsymbol{X}_0^T) = 1^n \cdot 1^n = 1, \end{aligned}$$

sillä ala- ja yläkolmiomatriisin determinantti on triviaalisti diagonaalialkioiden tulo. Olkoot sitten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ matriisin $\boldsymbol{M}_0$ ominaisarvot, missä

$$0 < c_n = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq C_n.$$

Tällöin $g(\lambda)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$g(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

mistä edelleen saadaan

$$1 = a_0 = \underbrace{\lambda_1}_{=c_n} \underbrace{\lambda_2}_{\leq C_n} \cdots \underbrace{\lambda_n}_{\leq C_n} \leq c_n (C_n)^{n-1} \leq c_n (T_n)^{n-1}.$$

Väite seuraa, kun tämä epäyhtälö jaetaan termillä $(T_n)^{n-1} > 0$. □

Erityisesti suurilla luvun n arvoilla lause 7.2 ei tuota erityisen hyvää alarajaa vakiolle c_n. Parempaan on kuitenkin vaikea pystyä. Edes se, millä joukon $K(n)$ matriisilla $\boldsymbol{X}_0$ pätee $c_n = \kappa(\boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{X}_0^T)$, ei etukäteen ole kovin selvää. Seuraava, jo artikkelissa [7] esitetty otaksuma pyrkii vastaamaan tähän kysymykseen.

Otaksuma 7.1. *Olkoon* $\boldsymbol{X}_0 = [(\boldsymbol{X}_0)_{ij}]$*, missä*

$$(\boldsymbol{X}_0)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jos } j > i, \\ 1, & \text{jos } j = i, \\ 0, & \text{jos } i > j \text{ ja } i + j \text{ on parillinen}, \\ 1, & \text{jos } i > j \text{ ja } i + j \text{ on pariton}. \end{cases}$$

Tällöin $c_n = \kappa(\boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{X}_0^T)$.

Otaksuman paikkansapitävyys on osoitettu laskennallisesti tapauksissa $n = 2, 3, \dots, 7$. Näitä suuremmilla luvun n arvoilla asiasta ei ole varmaa tietoa, vaan ongelma on yhä tätä kirjoitettaessakin avoin.

Mikäli otaksuman oletetaan olevan voimassa, voidaan sitä käyttää parantamaan lauseessa 7.2 esitettyä vakion c_n alarajaa. Tätä varten pitää vain laskea

$$
\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},
$$

minkä jälkeen saadaan

$$
\rho(\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_0^T) = \rho(\boldsymbol{M}_0) \leq |||\boldsymbol{M}_0|||_F = \operatorname{tr}(\boldsymbol{M}_0^*\boldsymbol{M}_0) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{M}_0^2).
$$

Kun nyt määritellään $S_n = |||\boldsymbol{M}_0|||_F$, voidaan lauseen 7.2 todistuksessa korvata C_n matriisin $\boldsymbol{M}_0$ itsensä suurimmalla ominaisarvolla $\rho(\boldsymbol{M}_0)$ ja vakio T_n puolestaan luvulla S_n. Näin saadaan todistettua seuraava otaksuman 7.1 seurauslause.

Lause 7.3. *Mikäli otaksuma 7.1 on voimassa, niin vakiolle c_n pätee*

$$
\left(\frac{1}{S_n}\right)^{n-1} \leq c_n.
$$

Kuten taulukosta 1 nähdään, ei kumpikaan vakiolle c_n löydetyistä alarajoista ole erityisen hyvä. Alarajan parantaminen saattaa kuitenkin edellyttää kokonaan uudenlaisten menetelmien käyttöä.

Huomautus 7.1. Alarajaa $\left(\frac{1}{T_n}\right)^{n-1}$ voidaan hieman parantaa luvussa 7.1 esitetyllä siirtymällä. Samanlainen siirtymä voidaan tehdä myös matriisille $\boldsymbol{M}_0$, jolloin saadaan parannettua alarajaa $\left(\frac{1}{S_n}\right)^{n-1}$. Mikäli rajoja T_n ja S_n saadaan hiemankin pienennettyä, saadaan lauseen 7.2 ja seurauksen 7.3 alarajoja kasvatettua selvästi, sillä kasvu kertautuu alarajaan eksponentin $n-1$ mukaisesti. Huomionarvoista kuitenkin on, että lauseen 7.2 alarajaa saadaan parhaimmillaankin parannettua vain lukuun $\left(\frac{1}{C_n}\right)^{n-1}$ asti. Lauseen 7.3 tapauksessa vastaava luku on $\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{M}_0)}\right)^{n-1}$.

Taulukko 1: Vakion c_n ja sen alarajojen käyttäytyminen pienillä n:n arvoilla

n	$\left(\frac{1}{T_n}\right)^{n-1}$	$\left(\frac{1}{S_n}\right)^{n-1}$	c_n
2	0.377964	0.377964	0.381966
3	0.0384615	0.0769231	0.198062
4	0.00170747	0.00674936	0.0870031
5	$4.16233 \cdot 10^{-5}$	$5.40833 \cdot 10^{-4}$	0.0370683
6	$6.36185 \cdot 10^{-7}$	$2.05280 \cdot 10^{-5}$	0.0148276
7	$6.64148 \cdot 10^{-9}$	$8.16298 \cdot 10^{-7}$	0.00581700

8 Yleistettyjen meet- ja join-matriisien ominaisarvoista

Tästä eteenpäin oletetaan, että $(P, \preceq, \wedge, \vee, \hat{0}, \hat{1})$ on hila, jossa on sekä pienin että suurin alkio. Joukkoa $S \subseteq P$ tai funktiota $f : P \to \mathbb{C}$ koskevia oletuksia ei tässä vaiheessa ole tarpeen vahvistaa, vaan niitä koskevat lisäoletukset kannattaa tehdä tapauskohtaisesti. Tässä luvussa tavoitteena on soveltaa aikaisempien lauseiden todistuksissa käytettyjä menetelmiä matriisiin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$, jonka erikoistapauksina meet- ja join-matriiseja voidaan pitää. Tällä tavalla lukujen 3-6 päätulokset saadaan yleistettyä vieläkin suuremmalle matriisijoukolle, esimerkiksi resiprookkimatriiseille, joissa i. rivin ja j. sarakkeen alkiona on

$$\frac{f(x_i \wedge x_j)}{f(x_i \vee x_j)} \quad \text{tai} \quad \frac{f(x_i \vee x_j)}{f(x_i \wedge x_j)}.$$

Vaikka matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ determinanttia ja käänteismatriisia koskevia tuloksia onkin kehitetty (ks. [10]), sen ominaisarvoja ei (yleisessä tapauksessa) ole aikaisemmin lainkaan tutkittu.

Määritelmä 8.1. Olkoon $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = [m_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, missä

$$m_{ij} = \frac{f(x_i \wedge x_j)^{\alpha} f(x_i \vee x_j)^{\beta}}{f(x_i)^{\gamma} f(x_j)^{\delta}}$$

ja $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia reaalilukuja, että matriisi $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ on olemassa.

Määritelmän kannalta on ongelmallista, mikäli $f(x) = 0$ jollakin $x \in S$. Tapauksissa $\gamma = \delta = 0$ tämä ongelma voidaan välttää tekemällä sopimus, että $0^0 = 1$. Samanlaisiin vaikeuksiin kuitenkin joudutaan, mikäli jompikumpi osoittajassa olevista termeistä menee nollaksi ja sitä vastaava eksponentti on negatiivinen. Yksi vaihtoehto olisi tehdä funktiota f ja joukkoa S koskeva lisäoletus siitä, että tällaisia ongelmatilanteita ei pääse syntymään. Parempi ratkaisu on kuitenkin pitää S ja f mielivaltaisina ja kieltää sellaisten parametrien α, β, γ ja δ valitseminen, että matriisia $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ ei voida muodostaa. Seuraavassa huomautuksessa matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ olemassaolon ehdot käydään läpi tarkemmin.

Huomautus 8.1. Matriisi $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ on olemassa, jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. Jos $f(x) = 0$ jollakin $x \in S$, niin $\gamma = \delta = 0$,
2. Jos $f(x_i \wedge x_j) = 0$ joillakin $x_i, x_j \in S$, niin $\alpha \geq 0$,
3. Jos $f(x_i \vee x_j) = 0$ joillakin $x_i, x_j \in S$, niin $\beta \geq 0$.

Esimerkki 8.1. Kun $\alpha = 1$ ja $\beta = \gamma = \delta = 0$, on $\boldsymbol{M}_{S,f}^{1,0,0,0} = (S)_f$. Jos taas $\beta = 1$ ja $\alpha = \gamma = \delta = 0$, on $\boldsymbol{M}_{S,f}^{0,1,0,0} = [S]_f$.

Ennen varsinaisiin tuloksiin pääsemistä on kuitenkin tarpeen määritellä kahden matriisin *Hadamardin tulo* ja matriisin *Hadamardin potenssi*. Kyse on yksinkertaisesti matriisien alkioittaisesta tulosta ja potenssista.

Määritelmä 8.2. Matriisien $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], \boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hadamardin tulo on $n \times n$-matriisi $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$, missä

$$(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}.$$

Määrittelytapansa johdosta Hadamardin tulo sopii hyvin yhteen matriisien yhteenlaskun kanssa. On hyvin helppo huomata, että struktuuri

$$(\mathbb{C}^{n\times n}, +, \circ)$$

on kommutatiivinen rengas. Siinä 1-alkiona on matriisi $\boldsymbol{J}$, missä $(\boldsymbol{J})_{ij} = 1$ jokaisella $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Määritelmä 8.3. Matriisin $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ α. Hadamardin potenssi on $n \times n$-matriisi $\boldsymbol{A}^{(\alpha)}$, missä

$$(\boldsymbol{A}^{(\alpha)})_{ij} = a_{ij}^{\alpha}.$$

Mikäli $\alpha < 0$ ja $a_{ij} = 0$ jollakin $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ei matriisi $\boldsymbol{A}^{(\alpha)}$ ole määritelty.

Huomautus 8.2. Mikäli $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ ja $\alpha = q \in \mathbb{Q}_+$, niin $\boldsymbol{D}^{(q)} = \boldsymbol{D}^q$. Tästä syystä on mielekästä määritellä

$$\boldsymbol{D}^{\alpha} = \operatorname{diag}(d_1^{\alpha}, d_2^{\alpha}, \ldots, d_n^{\alpha})$$

jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$. Siis esimerkiksi $\mathbf{0}^0 = \boldsymbol{I}$. Tapauksessa $\alpha < 0$ pitää sen sijaan vaatia, että $d_i \neq 0$ jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vaikka Hadamardin tulo toimii hyvin yhdessä matriisiyhteenlaskun kanssa, matriisien tavanomaisen kertolaskun kanssa tilanne on yleensä toinen. Tietyissä erikoistapauksissa ne kuitenkin käyttäytyvät miellyttävästi myös keskenään.

Lemma 8.1. *Olkoon $\boldsymbol{A} = [a_{ij}], \boldsymbol{B} = [b_{ij}], \boldsymbol{C} = [c_{ij}], \boldsymbol{D} = [d_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, missä $\boldsymbol{C}$ ja $\boldsymbol{D}$ ovat diagonaalimatriiseja. Tällöin*

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} \circ (\boldsymbol{CAD}).$$

Todistus. Koska

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})\boldsymbol{D})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} c_{ik}((\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})\boldsymbol{D})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})_{kl} d_{lj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} b_{kl} d_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ik} a_{kl} b_{kl} \cdot \underbrace{d_{lj}}_{\substack{=0, \\ \text{kun } l\neq j}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{c_{ik}}_{\substack{=0, \\ \text{kun } i\neq k}} \cdot a_{kj} b_{kj} d_{jj} = c_{ii} a_{ij} b_{ij} d_{jj} \\
&= b_{ij}((c_{ii} a_{ij}) d_{jj}) = b_{ij} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik} a_{kj} \right) d_{jj} \right) \\
&= b_{ij} \left((\boldsymbol{CA})_{ij} d_{jj} \right) = b_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{CA})_{ik} d_{kj} \right) \\
&= b_{ij}((\boldsymbol{CA})\boldsymbol{D})_{ij} = (\boldsymbol{B} \circ (\boldsymbol{CAD}))_{ij},
\end{aligned}$$

niin väite seuraa. □

Seuraavaksi esitettävät lauseet kertovat, miten matriisi $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ voidaan esittää matriisin $(S)_f$ tai $[S]_f$ avulla. Seuraavassa f^α tarkoittaa funktion f potenssia, toisin sanoen $f^\alpha(x) = [f(x)]^\alpha$ jokaisella $x \in P$.

Lause 8.1 ([10], Theorem 3.1 (Meet-oriented structure theorem))**.** *Olkoot $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sellaiset vakiot, että matriisi $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ on olemassa. Tällöin*

$$\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}((S)_{f^{\alpha-\beta}} \circ \boldsymbol{G})\boldsymbol{F}^{\beta-\delta},$$

missä $\boldsymbol{F} = \operatorname{diag}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ ja

$$(\boldsymbol{G})_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{jos } x_i \preceq x_j \textit{ tai } x_j \preceq x_i, \\ \frac{f^\beta(x_i \wedge x_j) f^\beta(x_i \vee x_j)}{f^\beta(x_i) f^\beta(x_j)} & \textit{muulloin.} \end{cases}$$

Lause 8.2 ([10], Theorem 3.2 (Join-oriented structure theorem))**.** *Olkoot* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *sellaiset vakiot, että matriisi* $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ *on olemassa. Tällöin*

$$\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}([S]_{f^{\beta-\alpha}} \circ \boldsymbol{G})\boldsymbol{F}^{\alpha-\delta},$$

missä $\boldsymbol{F} = \mathrm{diag}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ *ja*

$$(\boldsymbol{G})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } x_i \preceq x_j \text{ tai } x_j \preceq x_i, \\ \frac{f^\alpha(x_i \wedge x_j) f^\alpha(x_i \vee x_j)}{f^\alpha(x_i) f^\alpha(x_j)} & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Näihin struktuurilauseisiin voidaan nyt soveltaa jo aikaisemmin käytössä olleita menetelmiä. Tämä kuitenkin edellyttää tapauskohtaisten lisäoletusten tekemistä.

Lause 8.3. *Olkoot* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *sellaiset vakiot, että* $\gamma = \delta$ *ja matriisi* $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ *on olemassa. Olkoon* $f : P \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *semimultiplikatiivinen funktio ja* $\downarrow S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$*. Mikäli* $(f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, w_i) > 0$ *jokaisella* $w_i \in \downarrow S$*, niin*

$$\kappa(\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}) \geq c_n \cdot \min_{1 \leq i \leq n} (f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, x_i) \cdot \min_{1 \leq i \leq n} [f^2(x_i)]^{\beta-\gamma}.$$

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ $n \times m$-matriisi, missä

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, w_j)}, & \text{jos } w_j \preceq x_i, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

ja $\boldsymbol{F} = \mathrm{diag}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Lauseen 2.9 nojalla nyt $(S)_{f^{\alpha-\beta}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$. Taaskin voidaan olettaa, että $w_i = x_i$ jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Matriisi $\boldsymbol{A}$ jaetaan tässäkin tapauksessa osiin

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}],$$

missä $\boldsymbol{B}$ on $n \times n$-matriisi ja matriisi $\boldsymbol{C}$ on kokoa $n \times (m-n)$. Koska f on semimultiplikatiivinen funktio, on lauseessa 8.1 määritellyn matriisin $\boldsymbol{G}$ jokainen alkio 1. Toisin sanoen $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{J}$. Käyttämällä nyt lausetta 8.1 saadaan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma} &= \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}((S)_{f^{\alpha-\beta}} \circ \boldsymbol{G})\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} = \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}((S)_{f^{\alpha-\beta}} \circ \boldsymbol{J})\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} \\ &= \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}(S)_{f^{\alpha-\beta}}\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} = \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} \\ &= \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\left([\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}][\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}]^T\right)\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} = \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\left([\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{C}]\left[\frac{\boldsymbol{B}^T}{\boldsymbol{C}^T}\right]\right)\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} \\ &= \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} = \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} + \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} \\ &= (\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T + (\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})^T. \end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma} - \boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} &= (\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{A})^T - (\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T \\ &= (\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})^T, \end{aligned}$$

ja koska matriisi $(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})^T$ on esimerkin 2.4 nojalla positiivisesti semidefiniitti, on $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma} \succeq (\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T$. Lauseesta 2.8 seuraa nyt, että

$$\kappa(\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}) \geq \kappa((\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T).$$

Tarkastellaan sitten $n \times n$-matriisia $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, jolle pätee

$$b_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, x_j)}, & \text{jos } x_j \preceq x_i, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Olkoon $\boldsymbol{E}$ nyt joukon S insidenssimatriisi ja $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, missä

$$d_i = \sqrt{(f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, x_i)}.$$

Matriisi $\boldsymbol{B}$ voidaan tällöin esittää muodossa

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}.$$

Samoin perustein kuin matriisi $(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})^T$, myös matriisi $(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T$ on positiivisesti semidefiniitti. Lisäksi

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B}) &= \det(\boldsymbol{F})\det(\boldsymbol{E})\det(\boldsymbol{D}) \\ &= \prod_{i=1}^{n}[f(x_i)]^{\beta-\gamma} \cdot 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} \sqrt{(f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, x_i)} \neq 0,\end{aligned}$$

joten matriisi $\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B}$ on kääntyvä. Lisäksi matriisi $\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B}$ on positiivisesti definiitti (0 ei voi olla sen ominaisarvo, sillä muuten olisi $\det(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B}) = 0$). Nyt huomautuksen 2.8 nojalla reaalisen Hermiten matriisin

$$[(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T]^{-1} = ((\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^{-1})^T(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^{-1}$$

suurin ominaisarvo on

$$\rho([(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T]^{-1}) = |||[(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T]^{-1}|||_S.$$

Tällöin huomautuksen 2.10 perusteella

$$\begin{aligned}\kappa((\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T) &= \frac{1}{\rho([(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T]^{-1})} \\ &= \frac{1}{|||[(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T]^{-1}|||_S}.\end{aligned}$$

Positiivisuusoletuksen nojalla

$$\begin{aligned}|||(\boldsymbol{D}^2)^{-1}|||_S &= \left|\left|\left|\operatorname{diag}(\frac{1}{(f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, x_1)}, \ldots, \frac{1}{(f_d * \mu)(\hat{0}, x_n)})\right|\right|\right|_S \\ &= \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{(f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, x_i)} = \frac{1}{\min_{1\leq i\leq n}(f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, x_i)}.\end{aligned}$$

Samaan tapaan

$$\begin{aligned}
\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{2(\beta-\gamma)})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S &= \left|\!\left|\!\left|\mathrm{diag}\Big(\frac{1}{[f(x_1)]^{2(\beta-\gamma)}},\dots,\frac{1}{[f(x_n)]^{2(\beta-\gamma)}}\Big)\right|\!\right|\!\right|_S \\
&= \max_{1\le i\le n}\frac{1}{[f(x_i)]^{2(\beta-\gamma)}} = \frac{1}{\min_{1\le i\le n}[f(x_i)]^{2(\beta-\gamma)}}.
\end{aligned}$$

Nyt spektraalinormin alimultiplikatiivisuuden ja huomautuksen 2.7 perusteella

$$\begin{aligned}
&\left|\!\left|\!\left|[(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T]^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \\
&= \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma})^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \\
&= \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \\
&= \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma})^{-1}(\boldsymbol{E}^T)^{-1}(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \\
&\le \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{E}^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \\
&= \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\Big(\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}^{-1})^T\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|\boldsymbol{E}^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\Big)\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S^2 \\
&= \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}^T)^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{2(\beta-\gamma)})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S \\
&= \left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{2(\beta-\gamma)})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S.
\end{aligned}$$

Joukon S insidenssimatriisi $\boldsymbol{E}$ kuuluu nyt selvästi luvussa 2.2 määriteltyyn luokkaan $K(n)$. Tällöin $\kappa(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)\ge c_n$, ja huomautusten 2.8 ja 2.10 perusteella

$$\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S = \rho((\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}) = \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)} \le \frac{1}{c_n},$$

josta edelleen

$$\frac{1}{\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S}\ge c_n.$$

Tästä voidaan nyt päätellä, että

$$\begin{aligned}
\kappa(\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}) &\ge \kappa((\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{B})^T) = \frac{1}{\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S} \\
&\ge \frac{1}{\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S\cdot\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{2(\beta-\gamma)})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S} \\
&= \frac{1}{\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S}\cdot\frac{1}{\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{D}^2)^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S}\cdot\frac{1}{\left|\!\left|\!\left|(\boldsymbol{F}^{2(\beta-\gamma)})^{-1}\right|\!\right|\!\right|_S} \\
&\ge c_n\cdot\min_{1\le i\le n}(f_d^{\alpha-\beta}*\mu)(\hat{0},x_i)\cdot\min_{1\le i\le n}[f(x_i)]^{2(\beta-\gamma)}.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 8.2. Mikäli $\beta=0$, voidaan lauseessa 8.3 luopua semimultiplikatiivisuusoletuksesta. Tällöin nimittäin ehto $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{J}$ toteutuu triviaalisti. Jos vielä $\gamma = 0$, ei myöskään ole tarpeen rajata nollaa pois funktion f maalijoukosta. Tällöin puolestaan $\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma} = \boldsymbol{F}^0 = \boldsymbol{I}$. Tällä tavalla lauseen 3.1, jossa siis tarkastellaan matriisia $\boldsymbol{M}_{S,f}^{1,0,0,0} = (S)_f$, voidaan nähdä seuraavan lauseesta 8.3.

Koska tarkasteltava struktuuri on hila, voidaan mille tahansa joukolle S muodostaa sekä meet- että join-matriisi minkä tahansa funktion suhteen. Soveltamalla lauseen 8.1 sijaan lausetta 8.2 ja jatkamalla sitten samaan tapaan kuin lauseen 5.1 todistuksessa saadaan hieman erilainen lähestymistapa matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ pienimmälle ominaisarvolle.

Lause 8.4. *Olkoot $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sellaiset vakiot, että $\gamma = \delta$ ja matriisi $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ on olemassa. Olkoon $f : P \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ semimultiplikatiivinen funktio ja $\uparrow S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Mikäli $(\mu * f_u^{\beta-\alpha})(w_i, \hat{1}) > 0$ jokaisella $w_i \in \uparrow S$, niin*

$$\kappa(\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}) \geq c_n \cdot \min_{1\leq i\leq n} (\mu * f_u^{\beta-\alpha})(x_i, \hat{1}) \cdot \min_{1\leq i\leq n} [f^2(x_i)]^{\alpha-\gamma}.$$

Todistus. Sivuutetaan. Todistus saadaan muuttamalla sopivasti lauseen 8.3 todistusta (samalla tavalla kuin lauseen 5.1 todistus saadaan muokkaamalla lauseen 3.1 todistusta). □

Esimerkki 8.3. Myös lause 5.1 seuraa melko suoraan lauseesta 8.4. Tässä tapauksessa $\alpha = 0$, jolloin lauseessa 8.2 määritellylle matriisille $\boldsymbol{G}$ pätee $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{J}$ myös ilman semimultiplikatiivisuusoletusta. Lisäksi $\gamma = 0$, joten $\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma} = \boldsymbol{I}$ riippumatta siitä, kuvaako f jonkin joukon S alkion nollaksi. Funktion f maalijoukon rajaaminen ei siis tällöinkään ole tarpeen.

Lauseet 8.3 ja 8.4 tarjoavat siis kumpikin hieman erilaisen menetelmän arvioida matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ pienintä ominaisarvoa (kunhan f ja S täyttävät molempien lauseiden oletukset). Usein toinen näistä tuottaa kuitenkin toista paremman alarajan. Mikäli joukko $\downarrow S$ on suuri verrattuna joukkoon $\uparrow S$ verrattuna (molemmat ovat äärellisiä), lauseen 8.3 todistuksessa arvioinnin ulkopuolelle jäävän matriisin $(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}\boldsymbol{C})^T$ mukana menee suuri määrä informaatiota "hukkaan". Tällöin lause 8.4 tuottaa hyvin todennäköisesti paremman alarajan. Jos taas joukko $\uparrow S$ on joukkoa $\downarrow S$ selvästi suurempi, on syytä käyttää lausetta 8.3.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa joukko S on suljettu jommankumman laskutoimituksen $\wedge$ tai $\vee$ suhteen. Ensimmäisessä tapauksessa saadaan yleistettyä lausetta 4.1 seuraavasti.

Lause 8.5. *Olkoon S meet-suljettu joukko, $f : P \to \mathbb{C}$ funktio ja $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sellaiset vakiot, että $\gamma = \delta$ ja matriisi $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ on olemassa. Oletetaan lisäksi, että*

$$\left| \frac{f(x_i \wedge x_j) f(x_i \vee x_j)}{f(x_i) f(x_j)} \right|^\beta \leq 1 \tag{8.1}$$

aina, kun $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$*. Tällöin matriisin* $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ *kaikki ominaisarvot kuuluvat joukkoon*

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - f(x_k)^{\alpha+\beta-2\gamma}| \le C_n \cdot \max_{1\le i\le n} |f(x_i)|^{2(\beta-\gamma)} \cdot \max_{1\le i\le n} |d_i| - |f(x_k)|^{\alpha+\beta-2\gamma} \right\},$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \npreceq x_j,\ \text{kun}\ j<i}} (f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, z).$$

Todistus. Ehdosta (8.1) saadaan, että lauseessa 8.1 määritellylle matriisille $\boldsymbol{G} = [g_{ij}]$ pätee

$$|g_{ij}| = \left| \frac{f(x_i \wedge x_j) f(x_i \vee x_j)}{f(x_i) f(x_j)} \right|^{\beta} \le 1,$$

jolloin $|\boldsymbol{G}| \leqslant \boldsymbol{J}$. Olkoon $\boldsymbol{E}$ nyt joukon S insidenssimatriisi, $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sekä

$$\boldsymbol{\Lambda} = |\boldsymbol{D}|^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}(\sqrt{|d_1|}, \sqrt{|d_2|}, \ldots, \sqrt{|d_n|}),$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \npreceq x_j,\ \text{kun}\ j<i}} (f_d^{\alpha-\beta} * \mu)(\hat{0}, z).$$

Lauseen 2.10 nojalla $(S)_{f^{\alpha-\beta}} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}^T$. Lähdetään liikkeelle lauseen 8.1 tuloksesta. Nyt käyttämällä ensin lemmaa 8.1 ja sitten edellä mainittuja tietoja, saadaan

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}| &= |\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}((S)_{f^{\alpha-\beta}} \circ \boldsymbol{G})\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}| = |(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}(S)_{f^{\alpha-\beta}}\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}) \circ \boldsymbol{G}| \\
&= |\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}(S)_{f^{\alpha-\beta}}\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}| \circ |\boldsymbol{G}| \leqslant |(\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}(S)_{f^{\alpha-\beta}}\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma})| \circ \boldsymbol{J} \\
&= |\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}(S)_{f^{\alpha-\beta}}\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}| = |\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}||(S)_{f^{\alpha-\beta}}||\boldsymbol{F}^{\beta-\gamma}| \\
&= |\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}|\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}^T||\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma} \leqslant |\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}\boldsymbol{E}|\boldsymbol{D}|\boldsymbol{E}^T|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma} \\
&= |\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma} = (|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda})(|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda})^T.
\end{aligned}$$

Lauseen 7.1 nojalla nyt

$$\rho(|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}|(S)_{f^{\alpha-\beta}}||\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}) \le \rho(|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}).$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
\rho(|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}) &= \left|\!\left|\!\left| |\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}^T|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma} \right|\!\right|\!\right|_S \\
&\le \left|\!\left|\!\left| |\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma} \right|\!\right|\!\right|_S \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{E} \right|\!\right|\!\right|_S \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T \right|\!\right|\!\right|_S \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{E}^T \right|\!\right|\!\right|_S \left|\!\left|\!\left| |\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma} \right|\!\right|\!\right|_S \\
&= \left|\!\left|\!\left| |\boldsymbol{F}|^{2(\beta-\gamma)} \right|\!\right|\!\right|_S \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T \right|\!\right|\!\right|_S \left|\!\left|\!\left| \boldsymbol{D} \right|\!\right|\!\right|_S \\
&\le \max_{1\le i\le n} |f(x_i)|^{2(\beta-\gamma)} \cdot C_n \cdot \max_{1\le i\le n} |d_i|.
\end{aligned}$$

Koska $(\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta})_{ii} = f(x_i)^{\alpha+\beta-2\gamma}$ sekä

$$(|\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}|(S)_{f^{\alpha-\beta}}||\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma})_{ii} = |f(x_i)|^{\alpha+\beta-2\gamma},$$

seuraa lauseesta 2.7, että matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ ominaisarvot kuuluvat edellä mainittuun joukkoon (asetetaan siis $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ ja $\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}|(S)_{f^{\alpha-\beta}}||\boldsymbol{F}|^{\beta-\gamma}$). $\square$

Esimerkki 8.4. Lause 4.1 seuraa nyt suoraan lauseesta 8.5, kun valitaan $\alpha = 1$ ja $\beta = \gamma = \delta = 0$. Ehto (8.1) nimittäin toteutuu triviaalisti.

Esimerkki 8.5. Olkoon S meet-suljettu joukko. Tarkastellaan resiprookkimatriisia, jossa i. rivin ja j. sarakkeen alkiona on $\frac{f(x_i \vee x_j)}{f(x_i \wedge x_j)}$. Tässä tapauksessa siis $\alpha = -1$, $\beta = 1$ ja $\gamma = \delta = 0$. Mikäli nyt

$$\left| \frac{f(x_i \wedge x_j) f(x_i \vee x_j)}{f(x_i) f(x_j)} \right| \leq 1$$

aina, kun $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, niin lauseen 8.5 nojalla matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{-1,1,0,0}$ ominaisarvot kuuluvat joukkoon

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-1| \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|^2 \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - 1 \right\},$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{z \preceq x_i \\ z \npreceq x_j,\ \text{kun } j<i}} (f_d^{-2} * \mu)(\hat{0}, z).$$

Jokainen yhdisteeseen kuuluva joukko on siis kompleksitason kiekko, jonka keskipisteenä on 1. Valitsemalla näistä kiekoista se, jonka säde on suurin, huomataan, että kaikki muut kiekot sisältyvät siihen. Kaikki matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{-1,1,0,0}$ ominaisarvot kuuluvat siis mainittuun kompleksitason 1-keskiseen kiekkoon.

Seuraavassa lauseessa esitetään lausetta 8.5 vastaava, lauseeseen 8.2 perustuva lause join-suljetulle joukolle S.

Lause 8.6. *Olkoon S join-suljettu joukko, $f : P \to \mathbb{C}$ funktio ja $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sellaiset vakiot, että $\gamma = \delta$ ja matriisi $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ on olemassa. Oletetaan lisäksi, että*

$$\left| \frac{f(x_i \wedge x_j) f(x_i \vee x_j)}{f(x_i) f(x_j)} \right|^{\alpha} \leq 1 \tag{8.2}$$

aina, kun $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tällöin matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ kaikki ominaisarvot kuuluvat joukkoon

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - f(x_k)^{\alpha+\beta-2\gamma}| \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|^{2(\alpha-\gamma)} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - |f(x_k)|^{\alpha+\beta-2\gamma} \right\},$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \npreceq z, \text{ kun } i<j}} (\mu * f_u^{\beta-\alpha})(z, \hat{1}).$$

Todistus. Ehdosta (8.1) saadaan, että lauseessa 8.2 määritellylle matriisille $\boldsymbol{G} = [g_{ij}]$ pätee

$$|g_{ij}| = \left| \frac{f(x_i \wedge x_j) f(x_i \vee x_j)}{f(x_i) f(x_j)} \right|^{\alpha} \leq 1,$$

jolloin $|\boldsymbol{G}| \leqslant \boldsymbol{J}$. Olkoon $\boldsymbol{E}$ jälleen joukon S insidenssimatriisi, $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sekä

$$\boldsymbol{\Lambda} = |\boldsymbol{D}|^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}(\sqrt{|d_1|}, \sqrt{|d_2|}, \ldots, \sqrt{|d_n|}),$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \npreceq z, \text{ kun } i<j}} (\mu * f_u^{\beta-\alpha})(z, \hat{1}).$$

Lauseesta 2.13 saadaan, että $[S]_{f^{\beta-\alpha}} = \boldsymbol{E}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{E}$. Käytetään nyt lauseen 8.2 tulosta, jolloin

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}| &= |\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}([S]_{f^{\beta-\alpha}} \circ \boldsymbol{G})\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}| = |(\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}[S]_{f^{\beta-\alpha}}\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}) \circ \boldsymbol{G}| \\
&= |\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}[S]_{f^{\beta-\alpha}}\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}| \circ |\boldsymbol{G}| \leqslant |(\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}[S]_{f^{\beta-\alpha}}\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma})| \circ \boldsymbol{J} \\
&= |\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}[S]_{f^{\alpha-\beta}}\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}| = |\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}||[S]_{f^{\beta-\alpha}}||\boldsymbol{F}^{\alpha-\gamma}| \\
&= |\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}|\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}||\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma} \leqslant |\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}\boldsymbol{E}^T|\boldsymbol{D}|\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma} \\
&= |\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma} = (|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{\Lambda})(|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{\Lambda})^T.
\end{aligned}$$

Lauseen 7.1 nojalla nyt

$$\rho(|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}|[S]_{f^{\beta-\alpha}}||\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}) \leq \rho(|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}).$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
\rho(|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}) &= \left|\left|\left| |\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma} \right|\right|\right|_S \\
&\leq \left|\left|\left| |\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma} \right|\right|\right|_S \left|\left|\left| \boldsymbol{E}^T \right|\right|\right|_S \left|\left|\left| \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T \right|\right|\right|_S |||\boldsymbol{E}|||_S \left|\left|\left| |\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma} \right|\right|\right|_S \\
&= \left|\left|\left| |\boldsymbol{F}|^{2(\alpha-\gamma)} \right|\right|\right|_S \left|\left|\left| \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T \right|\right|\right|_S |||\,|\boldsymbol{D}|\,|||_S \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} |f(x_i)|^{2(\alpha-\gamma)} \cdot C_n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |d_i|.
\end{aligned}$$

Asetetaan nyt lauseessa 2.7 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma}$ ja $\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}|[S]_{f^{\beta-\alpha}}||\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}$. Väite seuraa nyt siitä, että $(\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,\beta,\gamma,\gamma})_{ii} = f(x_i)^{\alpha+\beta-2\gamma}$ sekä

$$(|\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma}|[S]_{f^{\beta-\alpha}}||\boldsymbol{F}|^{\alpha-\gamma})_{ii} = |f(x_i)|^{\alpha+\beta-2\gamma}.$$

$\square$

Esimerkki 8.6. Lause 6.1 on lauseen 8.6 suora seuraus, kun asetetaan $\beta = 1$ ja $\alpha = \gamma = \delta = 0$. Ehto (8.2) täyttyy nytkin triviaalisti.

Esimerkki 8.7. Olkoon S join-suljettu joukko. Tarkastellaan resiprookkimatriisia, jossa i. rivin ja j. sarakkeen alkiona on $\frac{f(x_i \wedge x_j)}{f(x_i \vee x_j)}$. Nyt siis $\alpha = 1$, $\beta = -1$ ja $\gamma = \delta = 0$. Mikäli lisäksi

$$\left| \frac{f(x_i \wedge x_j) f(x_i \vee x_j)}{f(x_i) f(x_j)} \right| \leq 1$$

aina, kun $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, niin matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{1,-1,0,0}$ ominaisarvot kuuluvat joukkoon

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 1| \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|^2 \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - 1 \right\},$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{x_i \preceq z \\ x_j \not\preceq z, \text{ kun } i<j}} (\mu * f_u^{-2})(z, \hat{1}).$$

Samalla tavalla kuin esimerkissä 8.5, tässäkin tilanteessa voidaan siis löytää sellainen kompleksitason 1-keskinen ympyrä, jonka sisä- ja reunapisteiden joukkoon kaikki matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{1,-1,0,0}$ ominaisarvot kuuluvat.

Huomautus 8.3. Mikäli funktio f on semimultiplikatiivinen, on

$$\left| \frac{f(x_i \wedge x_j) f(x_i \vee x_j)}{f(x_i) f(x_j)} \right|^{\alpha} = \left| \frac{f(x_i \wedge x_j) f(x_i \vee x_j)}{f(x_i) f(x_j)} \right|^{\beta} = 1$$

aina, kun $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Mikäli lausetta 8.5 (tai lausetta 8.6) halutaan soveltaa semimultiplikatiiviseen funktioon f, on ehto (8.1) (ehto (8.2)) siis automaattisesti voimassa.

Tarkastellaan lopuksi seuraavaa, historiallisestikin merkittävää esimerkkiä. Artikkelissaan [15] Wintner esittää sellaisen $n \times n$-matriisin suurinta ominaisarvoa koskevia tuloksia, missä i. rivin ja j. sarakkeen alkiona on

$$\left(\frac{\operatorname{syt}(i, j)}{\operatorname{pyj}(i, j)} \right)^{\alpha}$$

ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Seuraavassa esimerkissä edellä kehitettyä teoriaa sovelletaan tähän matriisiin. Tavoitteena ei niinkään ole löytää uutta tietoa ko. matriisin ominaisarvoista, vaan lähinnä antaa havainnollinen esimerkki lauseen 8.5 käytöstä.

Esimerkki 8.8. Wintnerin tarkastelemassa tilanteessa on siis $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ja joukon P voidaan ajatella olevan joukon S join-sulkeuma. Joukko S on meet-suljettu, sillä jokaisella $i, j \in S$ pätee

$$1 \leq \mathrm{syt}(i, j) \leq i, j \leq n.$$

Lisäksi tässä tapauksessa $\beta = -\alpha$, $\gamma = \delta = 0$ ja funktio $f = \mathrm{id}_P$, joka triviaalisti on semimultiplikatiivinen. Ehto (8.1) pätee siis automaattisesti. Nyt lauseen 8.5 nojalla matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,-\alpha,0,0}$ kaikki ominaisarvot kuuluvat joukkoon

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 1| \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} i^{-2\alpha} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| - 1 \right\},$$

missä

$$d_i = \sum_{\substack{z \mid i \\ z \nmid j, \text{ kun } j < i}} (\mathrm{id}_P^{2\alpha} * \mu)(z)$$

ja $*$ tarkoittaa tavallista Dirichlet'n konvoluutiota. Koska ainoa ehdot $z \mid i$ ja $z \nmid j$, kun $j < i$ toteuttava luku z on luku i itse, sievenee d_i muotoon

$$d_i = (\mathrm{id}_P^{2\alpha} * \mu)(i) = J_{2\alpha}(i),$$

missä $J_{2\alpha}$ tarkoittaa Jordanin totienttifunktiota. Kyseinen termi on vieläpä positiivinen, kun $\alpha > 0$. Lisäksi aivan kuten resiprookkimatriisienkin tapauksessa, myös tämä yhdiste luhistuu yhdeksi 1-keskiseksi kompleksitason kiekoksi. Koska matriisi $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,-\alpha,0,0}$ on kuitenkin reaalinen ja symmetrinen, ovat kaikki sen ominaisarvot reaalisia. Näin ollen edellä löydetty kiekko surkastuu edelleen suljetuksi reaalilukuväliksi, jonka keskipisteenä on 1. Matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\alpha,-\alpha,0,0}$ ominaisarvot kuuluvat siis joukkoon

$$\left\{ z \in \mathbb{R} \;\middle|\; |z - 1| \leq C_n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} i^{-2\alpha} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} J_{2\alpha}(i) - 1 \right\}.$$

Tarkastellaan vielä erikoistapausta, jossa $\alpha = \frac{1}{2}$. Tällöin

$$\mathrm{id}_P^{2\alpha} * \mu = \mathrm{id}_P * \mu = \phi,$$

missä ϕ tarkoittaa Eulerin totienttifunktiota. Edelleen matriisin $\boldsymbol{D}$ alkiot tulevat nyt muotoon

$$d_i = \phi(i) > 0.$$

Koska jokaisella $i \in \mathbb{Z}_+$ pätee $\phi(i) \leq i - 1$, on $\max_{1 \leq i \leq n} \phi(i) \leq n - 1$. Lisäksi $\max_{1 \leq i \leq n} i^{-1} = 1$ ja kyseinen maksimi saavutetaan, kun $i = 1$. Siispä matriisin $\boldsymbol{M}_{S,f}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0}$ ominaisarvot kuuluvat kaikki joukkoon

$$\left\{ z \in \mathbb{R} \;\middle|\; |z - 1| \leq C_n \cdot (n - 1) - 1 \right\}.$$

Viitteet

[1] F. Balatoni, *On the eigenvalues of the matrix of the Smith determinant*, Mat. Lapok 20 (1969) 397-403 (unkarinkielinen).

[2] S. Beslin, S. Ligh, *Greatest common divisor matrices*, Linear Algebra Appl. 118 (1989) 69-76.

[3] B.V.R. Bhat, *On greatest common divisor matrices and their applications*, Linear Algebra Appl. 158 (1991) 77-97.

[4] P. Haukkanen, *On meet matrices on posets*, Linear Algebra Appl. 249 (1996) 111-123.

[5] S. Hong, R. Loewy, *Asymptotic behavior of eigenvalues of greatest common divisor matrices*, Glasg. Math. J. 46 (2004) 551-569.

[6] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2005.

[7] P. Ilmonen, P. Haukkanen, J. K. Merikoski, *On eigenvalues of meet and join matrices associated with incidence functions*, Linear Algebra Appl. 429 (2008) 859-874.

[8] I. Korkee, P. Haukkanen, *Bounds for determinants of meet matrices associated with incidence functions*, Linear Algebra Appl. 329 (2001) 77-88.

[9] I. Korkee, P. Haukkanen, *On meet and join matrices associated with incidence functions*, Linear Algebra Appl. 372 (2003) 127-153.

[10] I. Korkee, *On a combination of meet and join matrices*, JP Jour. Algebra, Number Theory & Appl. 5(1) (2005) 75-88.

[11] P. Lindqvist, K. Seip, *Note on some greatest common divisor matrices*, Acta Arith. 84 (1998) 149-154.

[12] P. J. McCarthy, *Introduction to Arithmetical Functions*, Springer-Verlag, USA, 1986.

[13] D. S. Mitrinović, J. Sándor, B. Crstici, *Handbook of Number Theory*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[14] H. J. S. Smith, *On the value of a certain arithmetical determinant*, Proc. London Math. Soc. 7 (1875-1876) 208-212.

[15] A. Wintner, *Diophantine approximations and Hilbert's space*, Amer. J. Math. 66 (1944) 564-578.