TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Anna-Kaisa Torvinen

Reaalilukujonoista ja niiden merkityksestä kouluopetuksessa

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Syyskuu 2010

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

TORVINEN, ANNA-KAISA: Reaalilukujonoista ja niiden merkityksestä kouluopetuksessa

Pro gradu -tutkielma, 36 s.

Matematiikka

Syyskuu 2010

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan reaalilukujonoja ja niiden suppenemista. Ensin esitetään välttämättömiä esitietoja, jonka jälkeen luvussa 3 määritellään lukujono ja annetaan joitakin perustuloksia. Ei-tyhjän joukon X *lukujono* on funktio $f\colon \mathbb{N} \to X$. Funktion f arvo pisteessä n on x_n ja x_n on lukujonon n:s alkio. Lukujonolle käytetään merkintää $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Reaaliset lukujonot ovat funktioita $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Lukujonot ovat nimensä mukaisesti vain äärettömän monta lukua lueteltuna tietyssä järjestyksessä: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Luvussa 3.1 annetaan tarkka määritelmä lukujonon suppenemiselle. Kun lukujonon alkiot lähestyvät kohti tiettyä reaalilukua n:n arvon suuretessa, lukujonolla on raja-arvo ja sanotaan, että lukujono suppenee ja lukujonon raja-arvo on yksikäsitteisesti määrätty. Jos lukujono ei suppene, se hajaantuu. Luvussa 3.2 käsitellään Cauchy-jonoja. Cauchy-jonot ovat lukujonoja, joiden alkiot tietystä indeksistä alkaen ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan. Tullaan todistamaan, että jokainen suppeneva lukujono on Cauchy-jono, joten jos lukujono ei ole Cauchy-jono, se ei myöskään suppene. Osoitetaan lisäksi ns. Cauchyn kriteeri, että reaalilukujen joukossa jokainen Cauchy-jono suppenee. Lisäksi tutkielmassa sivutaan osajonoja, monotonisia jonoja ja esitetään Bolzano-Weierstrassin lause. Luvussa 3.3 käsitellään lyhyesti rajatta kasvavia ja väheneviä lukujonoja sekä esitetään menetelmä, jolla lukujonon suppenemista ja raja-arvoja voidaan tarkastella myös lukujonon alkioiden supremumin ja infimumin avulla. Luvussa 4 käsitellään reaalilukujonoja kouluopetuksessa.

Asiasanat: Cauchy-jono, lukujono, raja-arvo, suppeneminen

Sisältö

1 Johdanto

Antiikin Kreikassa matematiikan filosofia perustui siihen pythagoralaiseen näkemykseen, että kaikki matemaattinen tietous voidaan esittää kokonaisluvuilla. Kreikkalaiset matemaatikot tosin hyväksyivät myös rationaaliluvut, koska rationaaliluku voidaan esittää kahden kokonaisluvun avulla ja täten se voidaan palauttaa kokonaislukuihin, mutta sitä laajempaa lukujoukkoa ei heidän mielestään voinut olla. Toisaalta he tiesivät, etteivät rationaaliluvut riitä kaikkien janojen mittaamiseen. Voidaan ajatella, että matematiikan monimutkaistumisen pelossa uusia lukujoukon tulokkaita jopa vastustettiin: negatiiviset luvut (kielteiset), imaginaariluvut (kuvitteelliset) ja irrationaaliluvut (järjettömät) olivat ei-toivottuja tulokkaita jo niiden nimistäkin päätellen.

Analyysi on matematiikan osa-alue, joka käsittelee reaalilukuja ja kompleksilukuja ja niiden funktioita. Sen tavoitteena oli alun perin kehittää jatkuvuuteen liittyville käsitteille eksaktit matemaattiset määritelmät. Äärettömyys on taustalla irrationaaliluvun olemuksessa ja sitä kautta koko analyysissä. Se tekee analyysin vaikeaksi, mutta vaikeudet voitetaan raja-arvoajattelulla. Analyysi sai alkunsa 1600-luvulla Newtonin ja Leibnizin toisistaan riippumattomista keksinnöistä. 1700-luku oli matemaattisessa analyysissa villin keksimisen aikaa; menetelmät toimivat ja se riitti, loogisten perusteiden pitävyyttä ei juuri kyselty. 1800-luvulle tultaessa kriittisemmät ja enemmän täsmällisyyttä korostavat tutkimusasenteet alkoivat saada jalansijaa. 1800-luvulla Cauchy ensimmäisenä antoi analyysille tarkan loogisen pohjan määrittelemällä Cauchy-jonon. Raja-arvon Cauchy määritteli sanallisesti: *"Jos muuttujan peräkkäiset arvot lähestyvät rajatta kiinteää arvoa niin, että ne lopulta eroavat tästä miten vähän tahansa, niin mainittua kiinteää arvoa kutsutaan muiden arvojen raja-arvoksi."* 1800-luvun viimeisellä kolmanneksella Weierstrass aritmetisoi analyysin esittämällä uuden ϵ-δ -määritelmän raja-arvolle ja sen mukaisesti muillekin analyysin peruskäsitteille. Matemaatikot alkoivat kuitenkin huolestua siitä, että he olettivat reaalilukujen jatkumon olemassaolon ilman todistusta. Dedekind sittemmin konstruoi reaaliluvut Dedekindin leikkauksen avulla.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan reaalilukujonoja, jotka ovat välttämättömiä differentiaali- ja integraalilaskennan rinnalle 1600-luvun lopulta lähtien kehittyneessä sarjateoriassa. Ensiksi esitetään tutkielman varsinaista aihetta pohjustavia esitietoja. Luvussa 3 määritellään lukujono, joka on tärkeä ja hyödyllinen käsite sekä teoreettisessa että sovelluksiin suuntautuvassa matematiikassa. Tämän jälkeen luvussa 3.1 määritellään lukujonon suppeneminen ja siirrytään tarkastelemaan suppenevia reaalilukujonoja. Luvussa 3.2 määritellään Cauchy-jono. Lisäksi tutkielmassa sivutaan osajonoja, monotonisia jonoja ja esitetään Bolzano-Weierstrassin lause. Luvussa 3.3 käsitellään lyhyesti rajatta kasvavia ja väheneviä lukujonoja sekä esitetään menetelmä, jolla lukujonon suppenemista ja raja-arvoja voidaan tarkastella myös lukujonon alkioiden supremumin ja infimumin avulla. Luvussa 4 käsitellään reaalilukujonoja kouluopetuksessa. Tutkielman lähdekirjallisuutena on käytetty pääasiassa seuraavia teoksia: Hämäläinen, T. *Matemaattinen analyysi*, Merikoski, J., Halmetoja, M., Tossavainen, T. *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan.*

2 Esitiedot

Järjestetyn joukon epätyhjässä osajoukossa voi olla mielivaltaisen suuria (pieniä) alkioita. Muussa tapauksessa joukolla on yläraja (alaraja). Tältä pohjalta saadaan seuraavat määritelmät.

Määritelmä 2.1. Joukko $S \subset \mathbb{R}$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $x \leq M$ jokaisella $x \in S$. Tällöin M on S:n *yläraja*. Joukko $S \subset \mathbb{R}$ on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa $m \in \mathbb{R}$ siten, että $x \geq m$ jokaisella $x \in S$. Tällöin m on S:n *alaraja*. Jos joukko S on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu, niin S on *rajoitettu joukko*. Jos joukko ei ole rajoitettu, niin se on *rajoittamaton*.

Määritelmä 2.2. Jos ylhäältä rajoitetun ei-tyhjän joukon $S \subset \mathbb{R}$ ylärajojen joukolla on pienin alkio M, niin se on joukon S *supremum* eli *pienin yläraja*, ja merkitään $M = \sup S$, mikäli tällainen minimi on olemassa. Jos alhaalta rajoitetun ei-tyhjän joukon $S \subset \mathbb{R}$ alarajojen joukolla on suurin alkio m, niin se on joukon S *infimum* eli *suurin alaraja*, ja merkitään $m = \inf S$, mikäli tällainen maksimi on olemassa.

Määritelmä 2.3 (Täydellisyysaksiooma)**.** Jokaisella ylhäältä rajoitetulla eityhjällä joukolla $S \subset \mathbb{R}$ on pienin yläraja, $\sup S \in \mathbb{R}$.

Lukujoukoilla $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ on se merkittävä ero, että rationaaliluvut eivät muodosta ”jatkumoa” kuten reaaliluvut. Täydellisyysaksiomassa on kyse tämän intuitiivisen jatkumoajatuksen eksaktista ilmaisemisesta.

Lause 2.1. *Ylhäältä rajoitetun joukon supremum on yksikäsitteinen. Alhaalta rajoitetun joukon infimum on yksikäsitteinen.*

Todistus. Sivuutetaan. □

Lause 2.2. *Jos ei-tyhjällä joukolla $S \subset \mathbb{R}$ on suurin luku eli maksimi, niin* $\max S = \sup S$. *Jos ei-tyhjällä joukolla $S \subset \mathbb{R}$ on pienin luku eli minimi, niin* $\min S = \inf S$.

Todistus. Olkoon $x_0 = \max S$. Tällöin x_0 on S:n yläraja. Jos $M \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen S:n yläraja, niin $x \leq M$ jokaisella $x \in S$, joten erikoisesti $x_0 \leq M$. Siis $x_0 = \max S = \sup S$.

Olkoon seuraavaksi $x_0 = \min S$. Tällöin x_0 on S:n alaraja. Jos $m \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen S:n alaraja, niin $x \geq m$ jokaisella $x \in S$, joten erikoisesti $x_0 \geq m$. Siis $x_0 = \min S = \inf S$. [2, s. 147] □

Määritelmä 2.4. Joukon X relaatio $\preceq$ on *kokonaisjärjestys*, jos se on refleksiivinen, antisymmetrinen, transitiivinen ja vertailullinen. Paria $(X, \preceq)$ kutsutaan *kokonaisjärjestetyksi joukoksi.*

Määritelmä 2.5. Algebrallinen struktuuri $(\mathbb{F}, \oplus, 0, \odot, 1)$ on *kunta*, jos $(\mathbb{F}, \oplus, 0)$ ja $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \odot, 1)$ ovat Abelin ryhmiä, $\odot$ on osittuva $\oplus$:n suhteen ja $0 \neq 1$. Kunta on *järjestetty kunta*, jos se on renkaana järjestetty rengas.

Tarkempi määritelmä renkaasta ja kunnasta, ks. [2, s. 70-76].

Määritelmä 2.6. Järjestetty kunta $\mathbb{F}$ on *Arkhimedeen kunta*, jos se toteuttaa ehdon: Jos p, $q \in \mathbb{F}^+$ ovat mielivaltaisia, niin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $np > q$.

Tässä $\mathbb{F}^+$ tarkoittaa kunnan $\mathbb{F}$ positiivisten alkioiden joukkoa. Arkhimedeen ominaisuuden osoittamiseksi ei tarvitse etsiä pienintä luonnollista lukua n, jolla $np > q$, vaan riittää löytää mikä tahansa tällainen luku. Jos on olemassa yksikin sellainen n, että $np > q$, niin näitä lukuja on äärettömän monta, sillä jokainen luonnollinen luku $m > n$ toteuttaa saman ehdon.

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on täydellisesti järjestetty kunta, jolla on Arkhimedeen ominaisuus.

Määritelmä 2.7. Olkoon $(X, \preceq_1)$ ja $(Y, \preceq_2)$ kokonaisjärjestettyjä joukkoja. Funktio $f\colon X \to Y$ on *kasvava*, jos $x \preceq_1 y \implies f(x) \preceq_2 f(y)$, ja *aidosti kasvava*, jos $x \prec_1 y \implies f(x) \prec_2 f(y)$. Funktio f on *vähenevä*, jos $x \preceq_1 y \implies f(x) \succeq_2 f(y)$, ja *aidosti vähenevä*, jos $x \prec_1 y \implies f(x) \succ_2 f(y)$. Jos funktio f on (aidosti) kasvava tai vähenevä, niin se on (aidosti) *monotoninen*.

Lause 2.3 (Kolmioepäyhtälö). *Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| .$$

Todistus. Sivuutetaan, ks. [7, s. 40]. □

3 Lukujono

Lukujono on tärkeä ja hyödyllinen käsite sekä teoreettisessa että sovelluksiin suuntautuvassa matematiikassa. Seuraavassa annetaan määritelmä lukujonolle ja esitetään perustuloksia. Luvuilla tarkoitetaan tässä reaalilukuja ja luonnollisten lukujen joukkoon kuuluvat positiiviset kokonaisluvut, $\mathbb{N} = \big\{1, 2, 3, \dots\big\}$.

Määritelmä 3.1. Ei-tyhjän joukon X *lukujono* on funktio $f\colon \mathbb{N} \to X$. Funktion f *arvo* pisteessä n on x_n ja x_n on lukujonon n:s *alkio (termi)*. Joukko $\mathbb{N}$ on lukujonon *indeksijoukko*. Lukujonolle käytetään merkintöjä $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tai lyhyemmin (x_n). Se, että kyseessä on joukon X lukujono ilmaistaan merkinnällä $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. Joukon X kaikkien lukujonojen joukolle käytetään merkintää $F(X)$ tai $F(\mathbb{N}, X)$, jos halutaan korostaa indeksijoukkoa. Lukujonot $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ovat yhtäsuuret, jos ne ovat funktioina yhtäsuuret, eli $x_n = y_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Jos siis jokaista luonnollista lukua $n \in \mathbb{N}$ kohti annetaan yksikäsitteisesti määrätty luku $x_n \in \mathbb{R}$, saadaan reaalilukujono. *Reaaliset lukujonot* ovat näin ollen funktioita $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Lukujonot ovat nimensä mukaisesti vain äärettömän monta lukua lueteltuna tietyssä järjestyksessä: $x_1, x_2, x_3, \dots$ Merkitsemällä $f(n) = x_n$ voidaan esittää tämä kuvaus myös kuvien järjestettynä jonona $\big(f(1), f(2), f(3), \dots\big)$ eli $(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Lukujonon määrittelevän funktion lähtöjoukoksi voidaan periaatteessa valita luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ sijasta mikä tahansa numeroituvasti ääretön joukko. Numeroituvuuden perusteella näiden joukkojen ja luonnollisten lukujen välillä on olemassa bijektio, jolloin joukkojen alkioilla on yksi yhteen vastaavuus. Tällöin kuitenkin järjestyksen kanssa voi tulla ongelmia, koska esimerkiksi kokonaislukujen joukolla $\mathbb{Z}$ ei ole pienintä alkiota. Mutta esimerkiksi joukot $\mathbb{N}$, $\big\{-5, -4, -3, \dots\big\}$ tai $\big\{3, 4, 5, \dots\big\}$ käyvät lukujonojen lähtöjoukoksi. Lukujonojen käsitettä voidaan laajentaa verkoilla (nets), joiden indeksijoukkona voi olla myös ylinumeroituvia järjestettyjä joukkoja. Määritelmä on helppo laajentaa käsittämään myös kompleksiset lukujonot. Valitaan vain maalijoukoksi kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$, eli lukujonon alkiot x_n ovat kompleksilukuja. Tässä tutkielmassa keskitytään kuitenkin vain reaalilukujonoihin.

Koska lukujonot ovat funktioita, niin määritelman 2.7 mukaisesti voidaan puhua (aidosti) kasvavista, vähenevistä ja monotonisista lukujonoista. Määritellään tämä vielä täsmällisesti seuraavassa.

Määritelmä 3.2 (Monotoninen lukujono)**.** Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on
a) *kasvava*, jos $x_{n+1} \geq x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$
b) *aidosti kasvava*, jos $x_{n+1} > x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$
c) *vähenevä*, jos $x_{n+1} \leq x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$
d) *aidosti vähenevä*, jos $x_{n+1} < x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$
e) *monotoninen*, jos se on kasvava tai vähenevä
f) *aidosti monotoninen*, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan lukujonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, jonka n. alkio on $\dfrac{1}{n^2}$. Lukujono on muotoa

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\right).$$

Lukujono $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, jonka n. alkio on $4n - 3$, voidaan kirjoittaa

$$\big(4n - 3\big)_{n=1}^{\infty} = \big(1, 5, 9, 13, 17, \dots\big).$$

Lukujono $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, jonka n. alkio on $\dfrac{n}{n+1}$, on muotoa

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right).$$

Lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ alkiot ovat hyvin lähellä lukua 0, kun n on suuri. Vastaavasti lukujonon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ alkiot ovat hyvin lähellä lukua 1, kun n on suuri. Luvut 0 ja 1 ovatkin lukujonojen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ raja-arvoja (vastaavassa järjestyksessä). Raja-arvoihin palataan luvussa 3.1.

Alkuperäisestä lukujonosta alkioita poistamalla muodostettuja lukujonoja kutsutaan osajonoiksi. Seuraavassa annetaan tarkka määritelmä osajonolle.

Määritelmä 3.3. Lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *osajono* on lukujono $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, missä indeksijono $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ on aidosti kasvava eli $k < l \implies n_k < n_l$ kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$.

Mielivaltaisen lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ kaikki osajonot saadaan poistamalla lukujonosta $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ alkioita, kuitenkin niin, että jäljelle jää äärettömän monta alkiota muodostamaan lukujonon. Osajono on siis aito lukujono, jonka alkiot ovat alkuperäisen lukujonon alkioita alkioiden keskenäisen järjestyksen säilyttäen. Jokainen lukujono on lisäksi myös itsensä osajono.

Esimerkki 3.2. Lukujonot $n_k = 3k$ ja $m_k = k^3 + 1$ ovat sallittuja osajonon indeksijonoja. Vastaavat osajonot ovat tällöin

$$(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (x_{3k})_{k=1}^{\infty} = (x_3, x_6, x_9, x_{12}, x_{15} \dots)$$

ja

$$(x_{m_k})_{k=1}^{\infty} = (x_{k^3+1})_{k=1}^{\infty} = (x_2, x_9, x_{28}, x_{65}, x_{126} \dots).$$

Sen sijaan lukujonot $(n_k) = (1, 2, 5, 3, 9 \dots)$ ja $(m_k) = (1, 4, 4, 7, 9 \dots)$ eivät ole sallittuja indeksijonoja. Ne eivät toteuta määritelmän 3.3 ehtoa, koska $n_3 > n_4$ ja $m_2 = m_3$.

Määritelmä 3.4. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n \leq M$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n \geq M$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Jos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu, niin se on *rajoitettu*. Tällöin on olemassa $M \in \mathbb{R}^+$ siten, että $|x_n| \leq M$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Jos lukujono ei ole rajoitettu, niin se on *rajoittamaton*.

3.1 Suppeneminen

Tässä luvussa määritellään lukujonon suppeneminen ja tarkastellaan lukujonon raja-arvoja.

Kun lukujonon alkiot lähestyvät kohti tiettyä reaalilukua n:n arvon suuretessa, lukujonolla on raja-arvo ja sanotaan, että lukujono suppenee. Seuraavassa annetaan tarkka määritelmä lukujonon suppenemiselle.

Määritelmä 3.5 (Lukujonon suppeneminen)**.** Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee* kohti pistettä $x \in \mathbb{R}$ (tai jonolla on raja-arvo x), jos jokaista positiivista lukua ϵ vastaa sellainen luonnollinen luku n_ϵ, että $|x_n - x| < \epsilon$, kun $n \geq n_\epsilon$. Siis

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \qquad \text{tai} \qquad x_n \to x.$$

Jos lukujono ei suppene kohti reaalista raja-arvoa, se *hajaantuu*. Jos lukujono suppenee, lukujono on *suppeneva*. Jos lukujono hajaantuu, lukujono on *hajaantuva*.

Lukujonon raja-arvon määritelmä tarkoittaa havainnollisesti sitä, että lukujonon alkiot saadaan mielivaltaisen lähelle raja-arvoa aina, kun lukujonossa ollaan tarpeeksi kaukana. Jos lukujono halutaan todistaa suppenevaksi tällä perusteella, niin sen raja-arvo täytyy tietää.

Määritelmässä 3.5 esiintyvät epäyhtälöt $n \geq n_\epsilon$ ja $|x_n - x| < \epsilon$ voidaan korvata epäyhtälöillä $n > n_\epsilon$ ja $|x_n - x| \leq \epsilon$ (ks. [2, s. 125]). Ehto $|x_n - x| < \epsilon$ on myös ekvivalentti ehdon $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ kanssa. Geometrisesti ehto $|x_n - x| < \epsilon$ tarkoittaa sitä, että raja-arvon x ja lukujonon alkion x_n välinen etäisyys on pienempi kuin ϵ.

Huomautus. Määritelmässä 3.5 ei ole olennaista löytää parasta lukua n_ϵ, vaan ainoastaan jokin vaadittavan ehdon toteuttava luku n_ϵ. Alaindeksi ϵ viittaa siihen, että n_ϵ riippuu ensin valitusta luvusta $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Määritelmä yllä olevassa muodossaan on vasta reilut sata vuotta vanha, joten siitäkin voi päätellä, että määritelmään sisältyy jotain ei-triviaalia. Lukujonon suppenemista voidaan tarkastella myös lukujonon alkioiden supremumin ja infimumin avulla. Tähän palataan luvussa 3.3.1.

Määritelmä 3.6. Joukko $S \subset \mathbb{R}$ on luvun $x \in \mathbb{R}$ *ympäristö*, jos on olemassa sellainen $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, että $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset S$. Erityisesti kaikilla $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ väli $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ on luvun $x \in \mathbb{R}$ ympäristö.

Lause 3.1. *Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa x, jos ja vain jos luvun x jokaisen ympäristön ulkopuolella on vain äärellinen määrä lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ alkioita.*

Todistus. Olkoon $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Tarkastellaan luvun $x \in \mathbb{R}$ ympäristöä $]x - \epsilon, x + \epsilon[$. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, niin raja-arvon määritelmän mukaan $|x_n - x| < \epsilon$, kun $n \geq n_\epsilon$. Siis x_n kuulu välille $]x - \epsilon, x + \epsilon[$, mikä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että luvun x ympäristön $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ ulkopuolella on vain äärellinen määrä lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ alkioita. Ks. [7, s. 56-57]. $\square$

Lause 3.2 (Raja-arvon yksikäsitteisyys)**.** *Suppenevan lukujonon raja-arvo on yksikäsitteisesti määrätty. Toisin sanoen, jos* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* $\lim_{n\to\infty} x_n = y$*, niin* $x = y$*.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $x \neq y$. Valitaan $\epsilon = \dfrac{|x-y|}{2} \in \mathbb{R}^+$. Oletuksen mukaan on olemassa sellainen $n_\epsilon(1)$, että jos $n \geq n_\epsilon(1)$, niin $|x_n - x| < \dfrac{|x-y|}{2}$, ja on olemassa sellainen $n_\epsilon(2)$, että jos $n \geq n_\epsilon(2)$, niin $|x_n - y| < \dfrac{|x-y|}{2}$. Valitsemalla luvuksi n_ϵ suurempi luvuista $n_\epsilon(1)$ ja $n_\epsilon(2)$ saadaan, että $|x_n - x| + |x_n - y| < |x-y|$, kun $n \geq n_\epsilon$. Käyttämällä kolmioepäyhtälöä

$$\begin{aligned} |x-y| &= |x - x_n + x_n - y| \\ &\leq |x - x_n| + |x_n - y| \\ &< |x-y| \end{aligned}$$

syntyy ristiriita, joka osoittaa vastaoletuksen vääräksi. Suppenevan lukujonon raja-arvo on siis yksikäsitteisesti määrätty. □

Esimerkki 3.3. (Vakiojono) Oletetaan, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n = x$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että tällöin $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Jos $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ on annettu, niin $|x_n - x| = |x - x| = 0 < \epsilon$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis kaikki luonnolliset luvut kelpaavat luvuksi n_ϵ olipa ϵ mikä tahansa.

Seuraavassa esimerkit sekä suppenevasta että hajaantuvasta lukujonosta.

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan esimerkin 3.1 lukujonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$, missä $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Näytetään, että lukujono suppenee kohti pistettä $x = 0 \in \mathbb{R}$, eli $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Valitaan $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mielivaltaisesti. Tällöin

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \epsilon \text{ , kun } n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Kun nyt määritellään $n_\epsilon = \left\lceil \dfrac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$ (mikä tahansa ehdon toteuttava käy), niin $|x_n - 0| < \epsilon$, kun $n \geq n_\epsilon$.

Esimerkin 3.4 tulos pätee myös yleisessä tapauksessa tarkastellessa lukujonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$, missä $x_n = \dfrac{1}{n^k}$ ja $k \in \mathbb{N}$. Induktiolla k:n suhteen on nähdään, että $n^k \geq n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ (ks. [2, s. 126]).

Esimerkki 3.5. Tarkastellaan esimerkin 3.1 lukujonoa $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$, missä $y_n = 4n - 3$ ja $n \in \mathbb{N}$. Lukujono

$$\big(4n-3\big)_{n=1}^{\infty} = \big(1, 5, 9, 13, 17, \dots\big)$$

hajaantuu, sillä jos ϵ on mikä tahansa positiivinen luku, niin mistään n:n arvosta lähtien lukujonon jäsenten etäisyys jostakin tietystä pisteestä y ei ole pienempi kuin ϵ.

Lukujonon osoittaminen suppenevaksi vaatii ensin mahdollisen raja-arvon arvaamista ja tämän arvellun raja-arvon todistamista oikeaksi. Monessa tapauksessa oikean raja-arvon löytäminen on vaikeaa, mutta oikean raja-arvon löydyttyä lukujonon suppenemisen osoittaminen tähän lukuun on vaivattomampaa.

Seuraavassa esimerkissä arvataan ensin lukujonon mahdollinen raja-arvo ja sen jälkeen osoitetaan lukujonon suppenevan juuri tähän lukuun.

Esimerkki 3.6. Osoitetaan, että lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, jonka n. alkio on $\dfrac{2n}{4n-3}$, suppenee. Koska

$$\begin{aligned}\frac{2n}{4n-3} &= \frac{4n-3-2n+3}{4n-3}\\ &= 1 - \frac{2n-3}{4n-3},\end{aligned}$$

niin näyttää siltä, että lukujono suppenee kohti lukua $\dfrac{1}{2}$. Valitaan $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mielivaltaisesti. Nyt

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n}{4n-3} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2n}{4n-3} - \frac{2n-\frac{3}{2}}{4n-3}\right|\\ &= \left|\frac{\frac{3}{2}}{4n-3}\right|\\ &= \left|\frac{3}{8n-6}\right|\\ &= \left|\frac{1}{\frac{8}{3}n-2}\right|\\ &= \frac{1}{\frac{8}{3}n+2}\\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Tarkastellaan, miten n_ϵ riippuu annetusta luvusta $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Jos $\epsilon = 1$, niin

$$\frac{1}{\frac{8}{3}n+2} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{8}{3}n + 2 > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad n > -\frac{3}{8}.$$

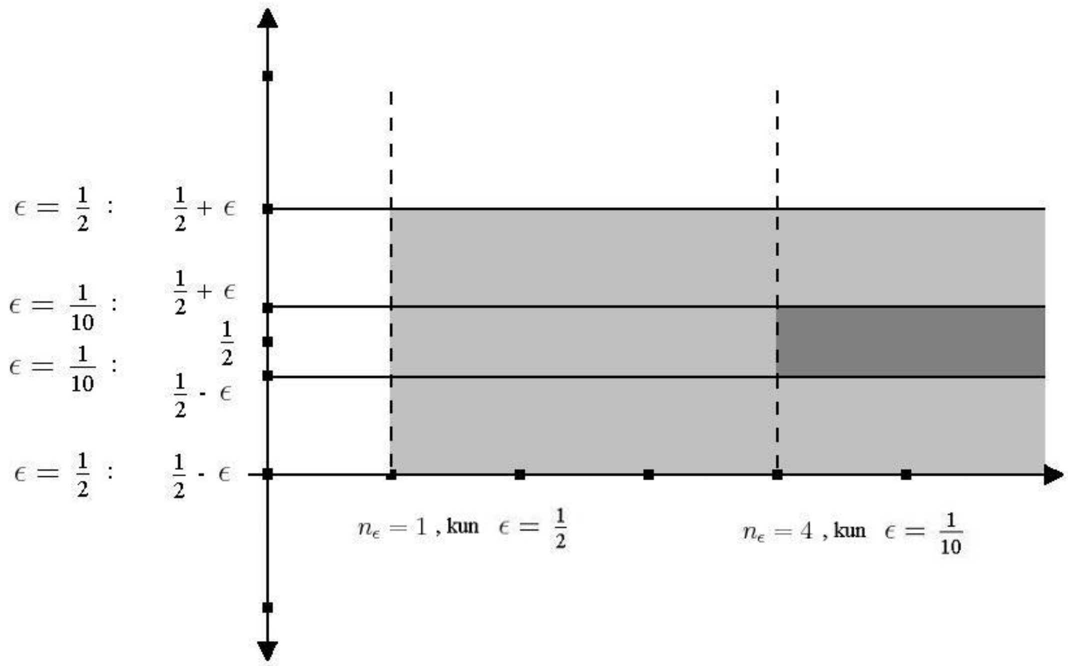
Siis ϵ-ehto pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. Tällöin

$$\frac{1}{\frac{8}{3}n+2} < \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{8}{3}n + 2 > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad n > 0.$$

Nyt ϵ-ehto pätee kaikilla $n \geq 1$ ja luvuksi n_ϵ voidaan valita esimerkiksi $n_\epsilon = 1$. Olkoon seuraavaksi $\epsilon = \dfrac{1}{10}$. Tällöin

$$\frac{1}{\frac{8}{3}n + 2} < \frac{1}{10} \iff \frac{8}{3}n + 2 > 10 \iff n > 3.$$

Nyt ϵ-ehto pätee kaikilla $n \geq 4$ ja luvuksi n_ϵ voidaan valita esimerkiksi $n_\epsilon = 4$. Yleisesti, jos $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ on mielivaltainen, niin mikä tahansa ehdon $n_\epsilon = \left\lceil \dfrac{3}{8\epsilon} - \dfrac{3}{4} \right\rceil + 1$ toteuttava indeksi kelpaa luvuksi n_ϵ.



Kuva 1: Esimerkin 3.6 geometrinen tulkinta.

Lause 3.3. *Jokainen suppeneva lukujono on rajoitettu. Toisin sanoen, jos lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee, on olemassa $m, M \in \mathbb{R}$ siten, että $m \leq x_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Oletetaan, että lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti lukua x. Valitaan raja-arvolle x jokin ympäristö, niin lukujonon kaikki alkiot äärellistä määrää lukuun ottamatta kuuluvat tähän ympäristöön. Valitaan $\epsilon = 1 \in \mathbb{R}^+$, jolloin raja-arvon x ympäristö on avoin väli $]x-1, x+1[$. Siis kaikki lukujonon alkiot äärellistä määrää lukuunottamatta on rajoitettu alhaalta luvulla $x - 1$ ja ylhäältä luvulla $x+1$. Nyt on olemassa sellainen luonnollinen luku $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, että $x-1 < x_n < x+1$, kun $n \geq n_\epsilon$. Olkoon $M = \max\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x+1\}$ ja olkoon $m = \min\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x - 1\}$. Silloin kaikilla n on voimassa $m \leq x_n \leq M$. Siis lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu. $\square$

Lauseen 3.3 perusteella tiedetään, että lukujono, joka ei ole rajoitettu, ei voi olla myöskään suppeneva.

Seuraava lause on hyödyllinen tarkasteltaessa monotonisten lukujonojen suppenemista.

Lause 3.4 (Monotonisen lukujonon suppenemislause)**.** *Jos reaalilukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on monotoninen ja rajoitettu, niin se suppenee.*

Todistus. Oletetaan, että lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on kasvava (vähenevä) ja rajoitettu. Lukujonon alkioiden joukko S on epätyhjä ja ylhäältä (alhaalta) rajoitettu, joten täydellisyysaksiooman mukaan sillä on pienin yläraja (suurin alaraja) $M = \sup S$ ($m = \inf S$). Osoitetaan, että lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti pienintä ylärajaa (suurinta alarajaa) eli $\lim_{n\to\infty} x_n = M$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = m$). Olkoon $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Koska $M - \epsilon < M$ ($m + \epsilon > m$), niin $M - \epsilon$ ($m + \epsilon$) ei ole joukon S yläraja (alaraja), joten on olemassa sellainen n_ϵ, että $x_{n_\epsilon} > M - \epsilon$ ($x_{n_\epsilon} < m + \epsilon$). Olkoon $n \geq n_\epsilon$. Koska lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on kasvava (vähenevä), niin $x_n \geq x_{n_\epsilon}$ ($x_n \leq x_{n_\epsilon}$). Koska M (m) on joukon S yläraja (alaraja), niin $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$). Koska $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, niin $M + \epsilon > M$ ($m - \epsilon < m$). Siis

$$M - \epsilon < x_{n_\epsilon} \leq x_n \leq M < M + \epsilon,$$

$$(m - \epsilon < m \leq x_n \leq x_{n_\epsilon} < m + \epsilon,)$$

kun $n \geq n_\epsilon$, joten $|x_n - M| < \epsilon$ ($|x_n - m| < \epsilon$). Raja-arvon määritelmän perusteella monotoninen ja rajoitettu lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee. Vrt. [7, s. 63]. □

Lausetta 3.4 käytetään yleensä suppenemistarkasteluissa niin, että lukujonon kasvavuudesta (vähenevyydestä) ja ylhäältä (alhaalta) rajoitteneisuudesta päätellään lukujonon suppeneminen. Kääntäen lause 3.4 sanoo, että jos lukujono hajaantuu, niin se ei ole monotoninen tai se ei ole rajoitettu. Lauseen 3.4 lisätuloksena saadaan, että rajoitettu ja kasvava lukujono suppenee kohti sen pienintä ylärajaa sekä rajoitettu ja vähenevä lukujono suppenee kohti sen suurinta alarajaa.

Seuraava lause näyttää, että kahden kohti samaa lukua z suppenevan lukujonon "välissä" oleva lukujono suppenee myös kohti lukua z. Tämän ns. kuristusperiaatteen nimellä tunnetun tuloksen nojalla lukujonoja voidaan käyttää myös toistensa arvioinnissa.

Lause 3.5 (Litistysperiaate)**.** *Jos $x_n \leq z_n \leq y_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x$, niin lukujono $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee ja $\lim_{n\to\infty} z_n = x$.*

Todistus. Valitaan $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mielivaltaisesti. Oletuksen ja määritelmän mukaan on olemassa sellainen $n_\epsilon(1)$, että jokaisella $n \geq n_\epsilon(1) \implies |x_n - x| < \epsilon$, ja on olemassa myös sellainen $n_\epsilon(2)$, että jokaisella $n \geq n_\epsilon(2) \implies |y_n - x| < \epsilon$. Siis $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$, kun $n \geq n_\epsilon(1)$, ja $x - \epsilon < y_n < x + \epsilon$, kun $n \geq n_\epsilon(2)$. Nyt, kun valitaan $n_\epsilon = \max\{n_\epsilon(1), n_\epsilon(2)\}$, niin oletuksen mukaan kaikilla $n \geq n_\epsilon$ pätee, että $x - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < x + \epsilon$. □

Lause 3.6 (Litistysperiaate II). *Jos* $0 \leq |y_n| \leq |x_n|$ *jokaisella* $n \in \mathbb{N}$ *ja* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, *niin lukujono* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee ja* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Todistus. Valitaan $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mielivaltaisesti. Oletuksen mukaan $-x_n \leq -y_n \leq 0 \leq y_n \leq x_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Oletuksen ja määritelmän mukaan on olemassa sellainen n_ϵ, että jokaisella $n \geq n_\epsilon \implies |x_n - 0| < \epsilon$. Siis, kun $n \geq n_\epsilon$, on $-\epsilon < x_n < \epsilon$ ja näin ollen $\epsilon > -x_n > -\epsilon \iff -\epsilon < -x_n < \epsilon$. Siis $-\epsilon < -x_n \leq -y_n \leq 0 \leq y_n \leq x_n < \epsilon$, joten $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee ja $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. □

Lause 3.7 (Raja-arvon laskusääntöjä). *Olkoot* $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *lukujonoja ja olkoon* $a \in \mathbb{R}$. *Jos* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, *niin*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y, \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = x - y, \tag{3.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (ax_n) = ax, \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n) = xy, \tag{3.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|. \tag{3.5}$$

Jos lisäksi $y \neq 0$ *ja* $y_n \neq 0$ *jokaisella* $n \in \mathbb{N}$, *niin*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}, \tag{3.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{x}{y}. \tag{3.7}$$

Todistus. Todistetaan kohta 3.1. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, niin jokaista positiivista lukua ϵ kohti on olemassa sellaiset luonnolliset luvut $n_\epsilon(1)$ ja $n_\epsilon(2)$, että $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ ja $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$, kun $n \geq n_\epsilon(1)$ ja $n \geq n_\epsilon(2)$. Olkoon n_ϵ suurempi luvuista $n_\epsilon(1)$ ja $n_\epsilon(2)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\big|(x_n + y_n) - (x + y)\big| &= \big|(x_n - x) + (y_n - y)\big| \\
&\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Todistetaan kohta 3.2. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, niin jokaista positiivista lukua ϵ kohti on olemassa sellaiset luonnolliset luvut $n_\epsilon(1)$ ja $n_\epsilon(2)$, että $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ ja $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$, kun $n \geq n_\epsilon(1)$ ja $n \geq n_\epsilon(2)$.

Olkoon n_ϵ suurempi luvuista $n_\epsilon(1)$ ja $n_\epsilon(2)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\big|(x_n - y_n) - (x - y)\big| &= \big|(x_n - x) - (y_n - y)\big| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Todistetaan kohta 3.3. Jos $a = 0$, niin kyseessä on vakiojono ja väite on selvä. Olkoon $a \neq 0$. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, niin jokaista positiivista lukua ϵ kohti on olemassa sellainen luonnollinen luku n_ϵ, että $|x_n - x| < \dfrac{\epsilon}{|a|}$, kun $n \geq n_\epsilon$. Nyt kaikilla $n \geq n_\epsilon$ pätee, että $|ax_n - ax| = |a|\,|x_n - x| < |a|\,\dfrac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$.

Todistetaan kohta 3.5. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, niin jokaista positiivista lukua ϵ kohti on olemassa sellainen luonnollinen luku n_ϵ, että $|x_n - x| < \epsilon$, kun $n \geq n_\epsilon$. Kolmioepäyhtälön perusteella $\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|$, joten $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

Sivuutetaan kohdat 3.4, 3.6 ja 3.7, ks. [8, s. 605-606]. □

Lukujonon suppenemisen määritelmä ei tarkoita sitä, että suppeneminen kohti raja-arvoa olisi välttämättä monotonista siinä mielessä, että n:n kasvaessa lukujonon alkio x_n olisi aina vain lähempänä raja-arvoa.

Esimerkki 3.7. Tarkastellaan lukujonoa $(x_n)_{n=1}^\infty$, missä $x_n = \dfrac{2^{1+(-1)^n}}{n}$. Nyt parillisilla n:n arvoilla pätee $\dfrac{4}{n}$ ja parittomilla n:n arvoilla pätee $\dfrac{1}{n}$. Silti lukujono $(x_n)_{n=1}^\infty$ suppenee kohti lukua 0. Nyt $0 \leq x_n \leq \dfrac{4}{n}$, joten kuristusperiaatteen nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, jos $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4}{n} = 0$. Jälkimmäinen väite pätee lauseen 3.7 kohdan 3 nojalla, joten $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Esimerkki 3.8. Olkoon $(x_n)_{n=1}^\infty$ lukujono

$$x_n = \frac{n^3 - n}{3n^3 - 17}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Laventamalla ensin termillä $\dfrac{1}{n^3}$ voidaan x_n kirjoittaa muotoon

$$x_n = \frac{\frac{n^3}{n^3} - \frac{n}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3} - \frac{17}{n^3}} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{17}{n^3}}.$$

Esimerkin 3.4 mukaan $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) ja lauseen 3.7 mukaan $\lim_{n\to\infty}(ax_n) = ax$. Lisäksi lauseen 3.7 kohdat 1-4 voidaan yleistää induktiolla äärellisille summille ja tuloille seuraavasti (ks. [2, s. 128]): Olkoon

$(x_{n,k})_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ lukujonoja, joilla $\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = x_k$, kun $k = 1, \ldots, m$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_{n,k} = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} x_{n,k} = \sum_{k=1}^{m} x_k,$$
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m} x_{n,k} = \prod_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} x_{n,k} = \prod_{k=1}^{m} x_k.$$

Nyt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{17}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 - 17 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 3,$$

ja lauseen 3.7 kohdan 7 perusteella

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(3 - \frac{17}{n^3})} = \frac{1}{3}.$$

Seuraavaksi näytetään, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$. Valitaan $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mielivaltaisesti. Tällöin

$$\begin{aligned} \left| x_n - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{n^3 - n}{3n^3 - 17} - \frac{1}{3} \right| \\ &= \left| \frac{3n^3 - 3n - (3n^3 - 17)}{9n^3 - 51} \right| \\ &= \left| \frac{-3n^3 + 17}{9n^3 - 51} \right|. \end{aligned}$$

Arvioidaan kolmioepäyhtälöllä osoittajaa ylöspäin:

$$\begin{aligned} \frac{|-3n^3 + 17|}{|9n^3 - 51|} &\leq \frac{|-3n| + |17|}{|9n^3 - 51|} \\ &= \frac{|3n| + |17|}{|9n^3 - 51|} \\ &= \frac{3n + 17}{|9n^3 - 51|}. \end{aligned}$$

Koska $n \geq 1$, niin $17n \geq 17$, joten $3n + 17 \leq 3n + 17n = 20n$. Poistetaan seuraavaksi itseisarvo nimittäjästä. On olemassa sellainen $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, jolloin $9n^3 - 51 > 0$. Valitaan $n_\epsilon \geq 2$ ja $n \geq n_\epsilon$. Nyt

$$\begin{aligned} \left| x_n - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{-3n + 17}{9n^3 - 51} \right| \\ &= \frac{|-3n + 17|}{|9n^3 - 51|} \\ &\leq \frac{20n}{9n^3 - 51}, \end{aligned}$$

kun $n \geq 2$. Arvioidaan seuraavaksi nimittäjää alaspäin, jolloin osamäärä tulee arvioiduksi ylöspäin:

$$\begin{aligned} 9n^3 - 51 \geq 8n^3 &\iff 9n^3 - 51 - 8n^3 \geq 0 \\ &\iff n^3 - 51 \geq 0 \\ &\iff n^3 \geq 51 \\ &\iff n \geq \sqrt[3]{51}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \left| x_n - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{-3n^3 + 17}{9n^3 - 51} \right| \\ &\leq \frac{20n}{|9n^3 - 51|} \\ &= \frac{20n}{9n^3 - 51} \\ &< \frac{20n}{8n^3} \\ &= \frac{20}{8n^2} \\ &\leq \frac{20}{8n} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

kun $n > \dfrac{20}{8\epsilon}$. Kun valitaan $n_\epsilon = \max\left\{ \lceil \sqrt[3]{51} \rceil , \left\lceil \dfrac{20}{8\epsilon} \right\rceil + 1 \right\}$, niin $\left| x_n - \dfrac{1}{3} \right| < \epsilon$, kun $n \geq n_\epsilon$. Siis $x_n \to \dfrac{1}{3}$, kun $n \to \infty$.

Lause 3.8. *Jos $(x_n)_{n=1}^\infty$ suppenee ja $(y_n)_{n=1}^\infty$ hajaantuu, niin $(x_n + y_n)$ hajaantuu ja $(x_n y_n)$ hajaantuu, kun $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$.*

Todistus. Todistetaan ensin summan hajaantuminen. Tehdään vastaoletus, että lukujono $(x_n + y_n)_{n=1}^\infty$ suppenee kohti raja-arvoa a. Oletetaan lisäksi, että lukujono $(x_n)_{n=1}^\infty$ suppenee kohti lukua x. Nyt

$$\begin{aligned} a - x &= \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n - x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita lukujonon $(y_n)_{n=1}^\infty$ haajaantumisen kanssa.

Todistetaan seuraavaksi tulon hajaantuminen. Tehdään vastaoletus, että lukujono $(x_n y_n)$ suppenee kohti raja-arvoa b. Oletetaan lisäksi, että lukujono

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti lukua x. Nyt

$$\begin{aligned}
b - x &= \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n \\
&= \lim_{n\to\infty} (x_n y_n - x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (x_n (y_n - 1)) \\
&= \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} (y_n - 1) \\
&= \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} 1 \\
&= x \cdot \lim_{n\to\infty} y_n - x,
\end{aligned}$$

joten

$$b = x \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Siis

$$\frac{b}{x} = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

mikä on ristiriita lukujonon $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ hajaantumisen kanssa. □

Huomautus. Se, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, ei kuitenkaan takaa sitä, että $(x_n y_n)$ suppenee.

Esimerkki 3.9. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujono, missä $x_n = \frac{1}{n}$. Olkoon $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujono, missä $y_n = n$. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa 0 ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ hajaantuu. Nyt tulojono $(x_n y_n)$ suppenee kohti raja-arvoa 1. Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujono, missä $z_n = n^2$. Lukujono $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ hajaantuu. Nyt kuitenkin tulojono $(x_n z_n)$ hajaantuu.

3.2 Cauchy-jonot

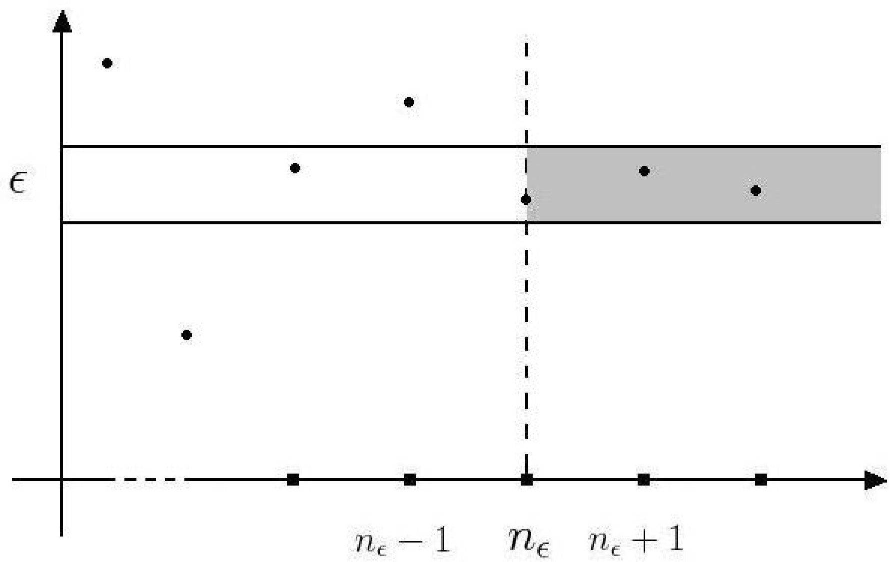
Luvussa 3 annettu lukujonon raja-arvon määritelmä tarkoittaa havainnollisesti sitä, että lukujonon alkiot saadaan mielivaltaisen lähelle raja-arvoa aina, kun lukujonossa ollaan tarpeeksi kaukana. Jos lukujono halutaan todistaa suppenevaksi tällä perusteella, niin sen raja-arvo täytyy tietää. Suppenemista voidaan myös havainnollistaa sanomalla, että lukujono alkiot saadaan lähelle toisiaan aina, kun lukujonossa ollaan tarpeeksi kaukana.

Tässä luvussa käsiteltävät Cauchy-jonot ovat sellaisia lukujonoja, joiden alkiot tietystä indeksistä alkaen ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan. Ensin annetaan täsmällinen määritelmä Cauchy-jonolle. Tämän jälkeen esitetään menetelmä, jolla lukujono voidaan todistaa suppenevaksi, vaikka sen raja-arvoa ei tiedetä.

Määritelmä 3.7. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ on *Cauchy-jono*, jos $\lim_{n,m\to\infty}(x_n - x_m) = 0$, eli

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}) : n, m \geq n_\epsilon \Longrightarrow |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Geometrisesti ajateltuna määritelmässä 3.7 annettua ehtoa voidaan tulkita seuraavasti. Kun positiivinen luku ϵ on annettu, koordinaatistoon voidaan piirtää kaksi n-akselin (eli x-akselin) suuntaista, toisistaan ϵ:n etäisyydellä olevaa suoraa siten, että kaikki ne pisteet (n, x_n), joilla $n \geq n_\epsilon$, ovat näiden suorien välissä.



Kuva 2: Määritelmän 3.7 geometrinen tulkinta.

Esimerkki 3.10. Osoitetaan, että esimerkin 3.1 lukujono $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, missä

$$z_n = \frac{n+1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

on Cauchy-jono. Valitaan $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ja $n, m \in \mathbb{N}$ mielivaltaisesti. Merkitään

$m = n + k$, missä $k \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\begin{aligned}
|z_n - z_m| &= \left| \frac{n+1}{n} - \frac{n+k+1}{n+k} \right| \\
&= \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n+k} \right| \\
&= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right| \\
&= \left| \frac{n+k-n}{n(n+k)} \right| \\
&= \left| \frac{k}{n(n+k)} \right| \\
&= \frac{k}{n(n+k)} \\
&< \frac{n+k}{n(n+k)} \\
&= \frac{1}{n} \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

kun $n > n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$, missä $n_\epsilon \in \mathbb{N}$. Määritelmän 3.7 nojalla lukujono $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono.

Lause 3.9. *Jokainen suppeneva lukujono on Cauchy-jono.*

Todistus. Väite siis sanoo, että jos lukujonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on raja-arvo x, niin jokaista positiivista lukua ϵ kohden on olemassa luonnollinen luku n_ϵ siten, että $n, m \geq n_\epsilon \implies |x_n - x_m| < \epsilon$. Olkoon $\epsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $n_\epsilon > 0$ siten, että $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ kaikilla $n \geq n_\epsilon$. Jos siis $n, m \geq n_\epsilon$, niin kolmioepäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \big|(x_n - x) + (x - x_m)\big| \\
&\leq |x_n - x| + |x - x_m| \\
&= |x_n - x| + |x_m - x| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Tarkastellaan seuraavaksi lukujonon hajaantumista. Luonnollisesti hajaantumista voitaisiin tarkastella kääntämällä raja-arvon määritelmä negaatioksi. Lauseen 3.9 ehto on kuitenkin tehokkaampi. Lauseen 3.9 ϵ-ehto ei päde, jos on olemassa positiivinen luku ϵ siten, että jokaista lukua $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ vastaa $n, m \in \mathbb{N}$, joille $|x_n - x_m| \geq \epsilon$. Lauseen 3.9 perusteella siis tiedetään, että jos lukujono ei ole Cauchy-jono, se ei myöskään suppene.

Esimerkki 3.11. Tarkastellaan lukujonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $x_n = n$. Valitaan $\epsilon = 1 \in \mathbb{R}^+$. Nyt kaikilla $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ on $|x_{n_\epsilon} - x_{n_\epsilon+1}| = 1 = \epsilon$, joten lauseen 3.9 nojalla raja-arvoa ei ole.

Tarkastellaan seuraavaksi lukujonoa $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $y_n = (-1)^n$. Valitaan $\epsilon = 1 \in \mathbb{R}^+$. Nyt kaikilla $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ pätee, että $|x_{n_\epsilon} - x_{n_\epsilon+1}| = 2 > \epsilon$. Lauseen 3.9 ehto ei päde, joten raja-arvoa ei ole.

Lauseessa 3.10 todistetaan, että kaikki Cauchy-jonot on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettuja.

Lause 3.10. *Jokainen Cauchy-jono on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-jono. Valitaan $\epsilon = 1 \in \mathbb{R}^+$. Oletuksen mukaan on olemassa sellainen $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, että $|x_n - x_m| < 1$ aina, kun $n, m \geq n_\epsilon$. Valitsemalla $M = \max\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_\epsilon - 1}, x + 1\}$ ja $m = \min\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_\epsilon - 1}, x - 1\}$ saadaan, että $m \leq x_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu. □

Määritelmä 3.8. Piste $x \in \mathbb{R}$ on joukon $S \subset \mathbb{R}$ *kasautumispiste*, jos jokainen x-keskinen pallo sisältää S:n pisteen, joka on erisuuri kuin x.

Joukon S kasautumispiste x ei välttämättä kuulu joukkoon S. Lisäksi kaikki joukon S pisteet eivät välttämättä ole S:n kasautumispisteitä. Toisaalta, jos x ei ole joukon S kasautumispiste, niin jokin luvun x ympäristö sisältää vain äärellisen määrän joukon S alkioita. Tällöin on mahdollista löytää vielä pienempi luvun x ympäristö, joka ei sisällä ainuttakaan joukon S alkiota lukua x lukuunottamatta.

Lause 3.11. *Jos lukujono $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ on lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ osajono ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, niin $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.*

Todistus. Sivuutetaan. □

Lause 3.11 sanoo, että jos lukujono suppenee, niin myös sen jokainen osajono suppenee samaan raja-arvoon kuin alkuperäinen lukujono. Toisinpäin tulos ei päde. Osajonon suppenemisen avulla ei voida välttämättä sanoa mitään lukujonon suppenemisesta. Toisaalta, jos lukujonolla on hajaantuva osajono tai useampia osajonoja, jotka suppenevat kohti erisuuria raja-arvoja, niin lukujonon täytyy hajaantua. Kuitenkin, jos lukujonon jokainen osajono suppenee, niin myös alkuperäinen lukujono suppenee.

Lause 3.12. *Jos Cauchy-jonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on suppeneva osajono $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, niin Cauchy-jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee.*

Todistus. Valitaan $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nyt poimitaan sellainen suppenevan osajonon alkio, että se on sopivalla indeksillä korkeintaan etäisyydellä $\frac{\epsilon}{2}$ osajonon raja-arvosta ja lukujonon hännän alkioista. Sen jälkeen sovelletaan kolmioepäyhtälöä. Oletuksien perusteella on olemassa sellaiset luvut n_ϵ ja k_ϵ, että

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{kun} \quad n, m > n_\epsilon$$

ja

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{kun} \quad n_k > k_\epsilon,$$

missä x on osajonon $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ raja-arvo. Valitaan luku n_l siten, että $l > \max\{n_\epsilon, k_\epsilon\}$. Koska $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ on osajono, niin $n_l > k_\epsilon$ ja $n_l > n_\epsilon$. Kolmioepäyhtälön perusteella saadaan, että jos $n > n_\epsilon$, niin

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_l} + x_{n_l} - x| \leq |x_n - x_{n_l}| + |x_{n_l} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Siis lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti lukua x. □

Cauchyn kriteerin todistamiseen tarvitaan vielä niin sanottua Bolzano-Weierstrassin lausetta. Bolzano-Weierstrassin lauseen perusteella jokaisella rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono. Koska Cauchy-jono on rajoitettu, niin sillä on suppeneva osajono ja siten lukujono itsekin suppenee lauseen 3.12 nojalla.

Lause 3.13 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Rajoitetulla reaalilukujonolla on suppeneva osajono. Toisin sanoen, jos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu lukujono, niin on olemassa sellaiset luonnolliset luvut $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, että lukujono $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ suppenee.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. [7, s. 65]. □

Bolzano-Weierstrassin lauseesta seuraa, että rajoitetulla reaalilukujoukolla, jossa on äärettömän monta pistettä, on kasautumispiste.

Lause 3.14 (Cauchyn kriteeri)**.** *Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ suppenee, jos ja vain jos se on Cauchy-jono.*

Todistus. Ensimmäinen suunta on selvä, sillä lauseen 3.9 perusteella tiedetään, että jokainen suppeneva lukujono on Cauchy-jono. Toinen suunta seuraa jo edellä esitetyistä lauseista: Bolzano-Weierstrassin lauseen perusteella jokaisella rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono. Koska Cauchy-jono on rajoitettu lauseen 3.10 perusteella, niin sillä on suppeneva osajono ja siten lukujono itsekin suppenee lauseen 3.12 nojalla. Siis lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ suppenee jos ja vain jos se on Cauchy-jono. □

Lauseen 3.14 tulos on tärkeä, koska nyt voidaan osoittaa lukujonon suppenevan ilman, että lukujonon raja-arvo tunnetaan. Suoraan määritelmään perustuvaa todistustahan varten lukujonon raja-arvo on tunnettava ennen kuin todistus voidaan suorittaa. Esimerkiksi joidenkin lukujonojen raja-arvon laskeminen on huomattavan vaikeaa, mutta lukujonon osoittaminen Cauchy-jonoksi on helpompaa.

Cauchy-jonot eivät kuitenkaan suppene kaikissa avaruuksissa, sillä voidaan konstruoida avaruuksia, joissa Cauchy-jono ei välttämättä suppene. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan Cauchy-jonoa, joka ei suppene.

Esimerkki 3.12. Tarkastellaan lukujonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, missä lukujono on muotoa $\big(3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots\big)$. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ koostuu rationaaliluvuista, mutta se suppenee kohti irrationaalista lukua π. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on siis Cauchy-jono, joka ei suppene rationaalilukujen joukossa $\mathbb{Q}$.

Järjestetty kunta, jossa Cauchyn kriteeri on voimassa, eli sen Cauchy-jonot suppenevat, kutsutaan *täydellisiksi*. Yksi tapa määritellä reaaliluvut rationaalilukujen avulla on "täydellistää" rationaaliluvut eli luoda rationaalilukujen pohjalta uusi avaruus, jossa Cauchy-jonot suppenevat.

3.3 Muita lukujonoja

Luvussa 3 käsiteltiin jo monotonisia lukujonoja sekä osajonoja. Tässä luvussa esitellään menetelmä, jolla lukujonon suppenemista ja raja-arvoja voidaan tarkastella myös lukujonon alkioiden supremumin ja infimumin avulla. Tämän jälkeen käsitellään lyhyesti rajatta kasvavia ja väheneviä lukujonoja.

3.3.1 Raja-arvo ylhäältä ja alhaalta

Lukujonon suppenemista ja raja-arvoja on mahdollista tarkastella myös lukujonon alkioiden supremumin ja infimumin avulla. Kun $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu lukujono, niin silloin sen alkioiden joukolla on pienin yläraja ja suurin alaraja, joille annettiin tarkka määritelmä luvussa 2.

Määritelmä 3.9. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen rajoitettu reaalilukujono. Muodostetaan uudet lukujonot

$$s_n = \sup_{k \geq n} x_k \qquad \text{ja} \qquad i_n = \inf_{k \geq n} x_k.$$

Tällöin lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *raja-arvo ylhäältä (limes superior)* on

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

ja *raja-arvo alhaalta (limes inferior)* on

$$i = \lim_{n \to \infty} i_n.$$

Rajoitusehto on tärkeä, sillä jos lukujonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole ylhäältä rajoitettu, niin uutta lukujonoa $s_n = \sup_{k \geq n} x_k$ ei voida muodostaa, koska sen jokainen alkio olisi ääretön. Määritelmä 3.9 voidaan kirjoittaa myös muodossa:

$$s = \limsup_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right)$$

ja

$$i = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right).$$

Jos lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole ylhäältä rajoitettu, niin merkitään

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Jos lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole alhaalta rajoitettu, niin merkitään

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Esimerkki 3.13. Tarkastellaan lukujonoa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $x_n = (-1)^n$ ja $n \in \mathbb{N}$. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ saa parillisilla n:n arvoilla arvon 1 ja parittomilla n:n arvoilla arvon -1. Tällöin

$$s = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = 1$$

$$i = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right) = -1.$$

Limes superior ja limes inferior antavat toisenlaisen tavan tarkastella lukujonojen ominaisuuksia ja näiden avulla voidaan esimerkiksi todistaa Cauchyn kriteeri ja muita lukujonoihin liittyviä tärkeitä tuloksia. Lisäksi ne antavat näppärän suppenemiskriteerin, joka esitetään seuraavassa lauseessa.

Lause 3.15. *Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee, jos ja vain jos $s = i$.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. [2, s. 202-203]. □

Lauseen 3.15 tulos on hyödyllinen, sillä joskus on helpompaa todistaa, että s ja i ovat erisuuret kuin näyttää suoraan, ettei lukujono suppene. Koska kaikki suppenevat lukujonot ovat rajoitettuja, niin jokainen rajoittamaton lukujono hajaantuu. Täten edellinen lause on mielekäs myös rajoittamattomille lukujonoille, koska silloin joko lukua s tai i ei ole olemassa.

Esimerkki 3.14. Lauseen 3.15 perusteella esimerkin 3.13 lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ei suppene.

3.3.2 Rajatta kasvavat ja vähenevät lukujonot

Jos lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jäsenet x_n saadaan mielivaltaisen suureksi (pieneksi) aina, kun n valitaan riittävän suureksi, lukujono kasvaa (vähenee) rajatta. Seuraavassa annetaan tarkka määritelmä lukujonon rajatta kasvamiselle ja vähenemiselle.

Määritelmä 3.10. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *kasvaa rajatta*, jos jokaisella $M \in \mathbb{R}$ on olemassa $n_M \in \mathbb{N}$ siten, että $n > n_M \implies x_n > M$. Tällöin merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *vähenee rajatta*, jos jokaisella $m \in \mathbb{R}$ on olemassa $n_m \in \mathbb{N}$ siten, että $n > n_m \implies x_n < m$. Tällöin merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Määritelmä 3.10 tarkoittaa havainnollisesti sitä, että lukujonon jäsenet x_n tulevat ennen pitkää mitä tahansa positiivista (negatiivista) lukua suuremmiksi (pienemmiksi). Määritelmässä 3.10 annettu raja-arvo ei ole erityistapaus tavallisesta raja-arvosta, sillä $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$. Merkintä $n \to \infty$ ($n \to -\infty$) tulisikin näin ollen lukea mielummin "kun n kasvaa rajatta" ("kun n vähenee rajatta") kuin "n:n lähestyessä ääretöntä" ("n:n lähestyessä miinus ääretöntä"). Voidaan myös sanoa, että lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *hajaantuu kohti ääretöntä* (*hajaantuu kohti miinus ääretöntä*). Rajatta kasvava tai vähenevä lukujono ei siis suppene vaan hajaantuu.

Lause 3.16. *Jos* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ *ja* $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{R}$, *niin*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty, \tag{3.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm z_n) = \infty, \tag{3.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \infty, \tag{3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{x_n} = 0. \tag{3.11}$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Huomautus. Lauseen 3.16 oletuksin ei ole tietoa esimerkiksi seuraavien raja-arvoista: $(x_n - y_n)$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ ja $\dfrac{x_n}{z_n}$.

Esimerkki 3.15. Lukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $x_n = n + \sqrt{n^2 - 3}$, kasvaa rajatta.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \left(n + \sqrt{n^2 - 3}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n + n\sqrt{1 - \frac{3}{n^2}}\right) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Lukujono $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $z_n = n - \sqrt{n^2 - 3}$, suppenee.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2-3}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \left(\sqrt{n^2-3}\right)^2}{n + \sqrt{n^2-3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n^2 + 3}{n + \sqrt{n^2\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n + n\sqrt{1 - \frac{3}{n^2}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lauseen 3.16 perusteella $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm z_n) = \infty$ ja $\lim_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{x_n} = 0$.

4 Reaalilukujonot kouluopetuksessa

Tämän tutkielman aihe liittyy lähinnä laajempana pohjatietona peruskoulun ja lukion matematiikkaan. Se luo teoreettisen pohjan koulussa, erityisesti lukiossa, opetettavaan asiaan reaalilukujonoista ja raja-arvoista.

Lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan *”Matematiikan asema aikamme kulttuurissa edellyttää valmiutta ymmärtää, hyödyntää ja tuottaa matemaattisesti esitettyä tietoa. Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja... Erityisesti opiskelijaa ohjataan hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin... Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta...”*

Reaalilukujonojen opetus lukion pitkän matematiikan pakollisessa oppimäärässä sijoittuu toisen vuosikurssin kevään opetusohjelmaan. Lukujonot ovat osa pitkän matematiikan kurssia 9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9). Lukujonot käsittävät kurssin jälkimmäisen puolikkaan keskeisimpänä sisältönään lukujono, rekursiivinen lukujono, aritmeettinen jono ja summa sekä geometrinen jono ja summa. Vielä 2000-luvun alussa lukion pitkän matematiikan oppimäärä sisälsi kokonaisen kurssin Lukujonot ja sarjat.

Pitkän matematiikan syveltävällä kurssilla 13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13) tutkitaan lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia. Keskeisimpänä sisältönä ovat muun muassa lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä.

Lukion lyhyen matematiikan oppimäärässä tavoitteita kurssilla 6 Matemaattisia malleja II (MAB6) ovat muun muassa, että opiskelija ymmärtää lukujonon käsitteen ja osaa ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jono ja summan avulla. Lukion lyhyen matematiikan opetuksen tehtävänä onkin tarjota valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa.

4.1 Opetettavat lukujonot ja lukujonon raja-arvon havainnollinen esittäminen

Lukujonoissa peräkkäiset luvut noudattavat tiettyä matemaattista logiikkaan. Lukion matematiikan opetuksessa keskeisimmät käsiteltävät lukujonot ovat aritmeettinen- ja geometrinen lukujono sekä rekursiivinen lukujono. Lisäksi lahjakkaille ja erityisen kiinnostuneille pitkän matematiikan opiskelijoille on mahdollista esittää lukujonon raja-arvon tarkka matemaattinen määritelmä.

Aritmeettiseksi lukujonoksi kutsutaan lukujonoa, jossa kahden peräkkäisen jäsenen väli on aina yhtä suuri. Tällaisia lukujonoja muodostavat esimerkiksi luonnolliset luvut, parilliset luvut ja parittomat luvut. Aritmeettiselle lukujonolle on sovittu tietyt yleisesti käytetyt merkintätavat. Lukujonon jäseniä merkitään $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja kahden peräkkäisen jäsenen väliä luvulla d. Yleisesti aritmeettiselle lukujonolle pätee:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Aritmeettisen lukujonon toisesta jäsenestä alkaen jokainen lukujonon jäsen on edellisen ja seuraavan jäsenen tavallinen eli aritmeettinen keskiarvo. Nimitys aritmeettinen lukujono tulee tästä lukujonon ominaisuudesta.

Geometriseksi lukujonoksi kutsutaan lukujonoa, jossa kahden peräkkäisen jäsenen suhden on aina sama. Geometrinen lukujono kuvaa hyvin esimerkiksi tilannetta, jossa talletus kasvaa korkoa korolle. Lukujonon jäseniä merkitään $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja kahden peräkkäisen jäsenen suhdetta luvulla q. Yleisesti geometriselle lukujonolle pätee:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Jos geometrisen lukujonon jäsenet ovat positiivisia, niin toisesta jäsenestä alkaen jokainen lukujonon jäsen on edellisen ja seuraavan jäsenen geometrinen keskiarvo eli kahden positiivisen luvun tulon neliöjuuri. Nimitys geometrinen lukujono tulee tästä lukujonon ominaisuudesta.

Sekä aritmeettisen lukujonon että geometrisen lukujonon osalta yksinkertaisimmat harjoitustehtävät koostuvat tietyn lukujonon jäsenen määrittämisestä, kun ensimmäinen jäsen ja kahden peräkkäisen jäsenen väli tai suhde on annettu. Kun taas useampi lukujonon jäsen on annettu, voidaan pyytää määrittämään joko kahden peräkkäisen jäsenen väli tai suhde riippuen, onko tarkastellaanko aritmeettista- vai geometrista lukujonoa. Voidaan pyytää määrittämään myös lukujonon yleinen jäsen, kun lukujono on annettu.

Seuraavissa esimerkeissä esitellään lukion pitkän matematiikan oppikirjan mahdollisia harjoitustehtäviä.

Esimerkki 4.1. Tontin tiehen rajoittuvalle 42 metrin pituiselle sivulle pystytetään aita, jota tukemaan maahan upotetaan tasavälein 12 aitatolppaa. Kuinka suuri on tolppien väli? Huomataan, että kyseessä on aritmeettinen lukujono. Pyydetään määrittämään peräkkäisten jäsenten väli eli luku d. Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 0$ ja viimeinen jäsen $a_{12} = 42$. Näin ollen

$$d = \frac{a_{12} - a_1}{12 - 1} = \frac{42 - 0}{11} = \frac{42}{11} = 3,81\ldots$$

Tolppien väli on $3,8$ metriä.

Esimerkki 4.2. Jos perheen elinkustannukset kasvavat $4,7$ % vuodessa, niin kuinka monta prosenttia suuremmat ne ovat vuonna 2001 kuin vuonna 1995? Merkitään perheen elinkustannuksia vuonna 1995 luvulla a. Vuonna 2001 elinkustannukset ovat $1,047^6 \cdot a$. Näin ollen perheen elinkustannukset ovat

$$\frac{1,047^6 \cdot a}{a} = 1,317\ldots$$

eli 32 % suuremmat vuonna 2001 kuin vuonna 1995.

Esimerkki 4.3. Olkoon aritmeettisen lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus d ja olkoon k positiivinen luku. Osoita, että lukujono $k^{a_1}, k^{a_2}, k^{a_3}, \ldots$ on geometrinen. Mikä on tämän lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde? Oletuksen mukaan $a_{n+1} - a_n = d$. Koska $k > 0$, niin

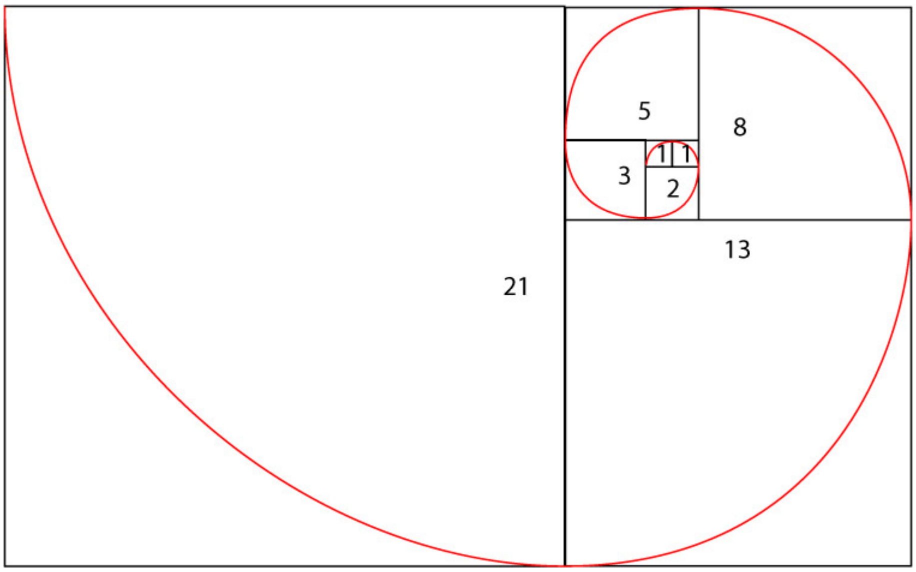
$$\frac{k^{a_2}}{k^{a_1}} = \frac{k^{a_3}}{k^{a_2}} = \cdots = \frac{k^{a_{n+1}}}{k^{a_n}} = k^{a_{n+1} - a_n} = k^d,$$

mikä on vakio. Lukujono on siis geometrinen ja sen peräkkäisten jäsenten suhde on k^d.

Jos lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ alkio x_n on määritelty lukujonon edellisten jäsenten avulla, kyseessä on *rekursiivinen lukujono*. Tällöin annetaan lukujonon ensimmäinen alkio x_1 ja rekursiofunktio $f\colon \{x_n\} \to \mathbb{R}$, jonka avulla rekursiivisen lukujonon muut alkiot saadaan määrättyä. Eli

$$x_{k+1} = f(x_k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lukion matematiikan opetuksessa lähinnä harjoitustehtävien tai lisämateriaalien mukana esille tuleva *Fibonaccin lukujono* on yksi tunnetuimmista lukujonoista. Taiteessa se toistuu kiinnostavien ominaisuuksiensa vuoksi ja esimerkiksi luonnossa päivänkakkaran pienet kukat ovat kukinnossa järjestäytyneet myötä- ja vastapäivään kulkeviksi spiraaleiksi niin, että kummassakin suunnassa spiraalien määrä on Fibonaccin luku. 1200-luvulla Fibonacci alkoi tutkia muun muassa kanien lisääntymistä. Fibonaccin lukujonon $\big(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\big)$ kahden peräkkäisen lukujonon jäsenen suhde muodostaa likiarvon kultaisesta leikkauksesta ja ennen pitkää kukin lukujonon jäsen on $61,8$ % lukujonon seuraavasta jäsenestä.



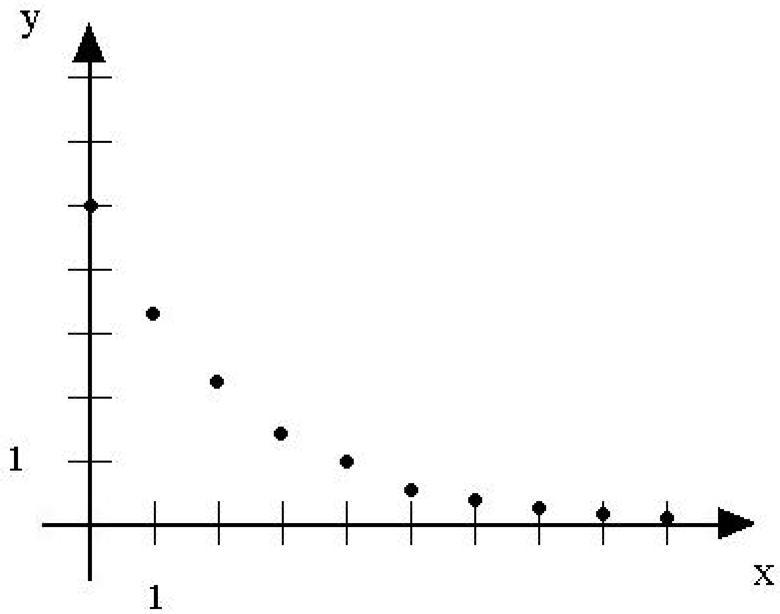
Kuva 3: Kultainen spiraali.

Ennen lukujonon raja-arvon opettamista opetuksessa perehdytään *lukujonon kasvamiseen ja vähenemiseen* sekä tutkitaan *lukujonon (aitoa) monotonisuutta.*

Lukion pitkän matematiikan oppimäärä sisältää *lukujonon raja-arvon* käsittelemisen, mutta täysin tarkkaa matemaattista määritelmää lukujonon raja-arvolle ei opetuksessa anneta. Pääpaino on lukujonon raja-arvon havainnollisella esittämisellä ja ymmärtämisellä. Esimerkiksi tutkitaan kuvaajaa ja lasketaan lukujonon raja-arvoja. Harjoitustehtävät koostuvat lukujonon raja-arvon määrittämistä ja lukujonon suppenemisen tutkimisesta.

Esimerkki 4.4. Määritä $\lim_{n\to\infty} a_n$, kun $a_n = \dfrac{5 \cdot 2^n}{3^n}$. Laskemalla saadaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(5 \cdot \frac{2^n}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 5 \cdot 0 = 0.$$



Kuva 4: Esimerkin 4.4 geometrinen tulkinta.

Esimerkki 4.5. Tutki lukujonon $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ suppenemista. Koska

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{3}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 2,$$

niin lukujonolla on raja-arvo ja täten se suppenee.

Lukion pitkän matematiikan syventävillä kursseilla on myös mahdollista esittää *lukujonon raja-arvon tarkka matemaattinen määritelmä.*

Raja-arvon tarkka määritelmä ja siihen liittyvä ϵ-tekniikka eivät ole koskaan kuuluneet lukion oppimäärään. Kokemus on kuitenkin osoittanut, että matematiikasta todella kiinnostuneilla lukiolaisilla ei ole mitään ikään liittyvää kehityspsykologista estettä raja-arvon tarkan määritelmän omaksumiseen. [1, s. 1]

Opetettaessa raja-arvon tarkkaa määritelmää lahjakkaille lukiolaisille määritellään raja-arvo ensin havainnollisesti ja kuvailevasti. Tämän jälkeen tarkennetaan määritelmää asteittain, kunnes määritelmä saadaan matemaattisesti tarkaksi. Kun määritelmiä annetaan havainnollisesti ja kuvailevana, kohdataan kielellisiä ongelmia. Mitä tarkoitetaan rajattomalla lähestymisellä eli mielivaltaisen lähelle tulemista ja luvun n rajattomalla kasvamisella? Rajaton lähestyminen ja kasvaminen eivät siis sellaisenaan kelpaa matemaattisesti tarkkaan määritelmään. Ne on siis voitava määritellä yksinomaan reaalilukujen ominaisuuksia käyttäen. Kun tarkastellaan n:n kasvamista, välttämättä mikään äärellinen arvo ei riitä, sillä esimerkiksi lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $x_n = \frac{1}{n}$, alkiot lähestyvät nollaa n:n kasvaessa, mutta raja-arvoa 0 ei saavuteta millään n:n äärellisellä arvolla. Luku n on siis valittava suuremmaksi kuin mikään ennalta asetettu äärellinen rajakohta. Luvun n on siis lähestyttävä ääretöntä.

Kun edellä mainitut asiat on otettu huomioon, voidaan vasta muotoilla raja-arvon tarkka määritelmä.

Lukion pitkän matematiikan oppimäärään kuuluu myös perehtyminen *rajatta kasvaviin ja väheneviin lukujonoihin*, joita käsiteltiin luvussa 3.3.2. Oppikirjoissa puhutaan kuitenkin lukujonon ”rajattomasta suurenemisesta” ja ”rajattomasta pienenemisestä”. Sanontaa ”lukujono kasvaa rajatta” (”lukujono vähenee rajatta”) pidetään hieman harhaanjohtavana, sillä rajatta kasvava (vähenevä) lukujono ei välttämättä ole kasvava (vähenevä).

Esimerkki 4.6. Lukujono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $a_n = n + (-1)^n$ kasvaa rajatta, mutta lukujono ei ole kasvava.

Esimerkin 4.6 perusteella on varsin perusteltua puhua kouluopetuksessa lukujonon rajattomasta suurenemisesta ja pienenemisestä hämmennyksen ja väärinkäsitysten välttämiseksi.

Oppikirjan harjoitustehtävät koostuvat tehtävistä, joissa pitää selvittää, suurenevatko lukujonon jäsenet rajatta vai pienenevätkö ne rajatta vai suppeneeko lukujono. Lisäksi muodostetaan lukujonoja, jotka suurenevat rajatta tai pienenevät rajatta.

Esimerkki 4.7. Milloin aritmeettisen lukujonon jäsenet suurenevat rajatta ja milloin ne pienenevät rajatta? Milloin aritmeettinen lukujono suppenee? Aritmeettisen lukujonon jäsenet suurenevat rajatta, kun $d > 0$, ja pienenevät rajatta, kun $d < 0$. Aritmeettinen lukujono suppenee, kun $d = 0$.

Esimerkki 4.8. Suppeneeko lukujono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $a_n = \dfrac{6-n^2}{3+n}$? Jos lukujono ei suppene, niin suurenevatko lukujonon jäsenet rajatta tai pienenevätkö ne rajatta? Lausekkeen a_n osoittaja ja nimittäjä jaetaan ensin nimittäjän korkeimmalla potenssilla n.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6-n^2}{3+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n} - \frac{n^2}{n}}{\frac{3}{n} + \frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n} - n}{\frac{3}{n} + 1} = -\infty.$$

Osoittaja $\dfrac{6}{n} - n$ pienenee rajatta. Nimittäjä $\dfrac{3}{n} + 1$ suppenee kohti raja-arvoa 1. Lukujono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ei suppene, vaan hajaantuu. Lukujonon jäsenet pienenevät rajatta.

Lukion pitkän matematiikan oppimäärässä sivutaan tai käsitellään lyhyesti myös *rajoitettuja lukujonoja*. Tämä tapahtuu lähinnä soveltavien harjoitustehtävien ja lisämateriaalien muodossa. Sen sijaan *Cauchy-jonoja* ei lukio-opetuksessa käsitellä.

4.2 Matematiikan oppimisesta ja opetuksesta

Matematiikka on eräs niin sanotuista eksakteista menetelmätieteistä, joihin kuuluu myös logiikka, tietojenkäsittelytiede ja tilastotiede. Matematiikka on deduktiivinen tiede eli sen totuudet eivät perustu mittauksiin tai mihinkään aistihavaintoihin. Matematiikan tulokset, joita kutsutaan yleensä lauseiksi, ovat joko itse aksioomeja eli peruslauseita tai aksioomista todistettuja eli loogisesti johdettuja. Matemaattisen teorian rakentamiseen tarvittavat käsitteet ovat periaatteessa lyhenteitä pitkistä perusteluista ja ne määritellään aikaisempien käsitteiden avulla. Päättelyn pohjana on yleensä klassinen logiikka. Todistusmenetelmänä on joko suora todistus (suora päättely lähtien oletuksesta tai induktiotodistus) tai epäsuora todistus (lähtökohtana väitteen vastakohta eli vastaoletus).

Joidenkin tutkijoiden mielestä kouluissa pitäisi opettaa entistä syvällisempää matematiikkaa, koska aikaisempaa useampi oppilas tarvitsee sitä myöhemmissä opinnoissaan. Toisaalta pitäisi opettaa matematiikkaa, joka miellyttää oppilaita, koska yhä useamman oppilaan toivotaan hakeutuvan aloille, joilla tarvitaan ainakin jonkin verran matemaattisia taitoja ja asenteita. Pitäisikö opetettavia aiheita ja opetusta siis lisätä vai vähentää? Vai pitäisikö opetuksen lisäämisen tai vähentämisen sijasta muuttaa oppisisältöjä uusilla aiheilla ja uudistamalla opetusmenetelmiä? Uusien sisältöjen tulisi mahdollisesti olla aikaisempaa monikäyttöisempiä, siis abstraktimpia. Matematiikan eri aloja yhdistäviä suuria periaatteita pitäisi ehkä korostaa ja matemaattisia taitoja pitäisi painottaa pinnallisten tietojen sijaan. Myönteisten asenteiden ja ongelmanratkaisutaitojen kehittymistä kuuluisi edistää.

Kuten oppimisessa yleensä, myös matematiikassa opittavan asian laaja käyttäminen on tärkeä lähtökohta. Kun jotakin uutta matemaattista rakennetta käytetään mahdollisimman monipuolisesti erilaisissa yhteyksissä, sen idea selviää vähitellen. Teoria ja käytäntö eivät hyvässä opetuksessa itse asiassa ole kaukana toisistaan. Käytännön ja teorian yhdistäminen vaatii opettajalta paljon. On osattava teoria, johon kaikki perustuu, ja myös hallittava käytännön sovelluksia, joissa teoriaa hyödynnetään. Käytännön esimerkkien soveltaminen opetukseen ei aina ole helppoa. Matematiikkaa tulee helposti katsottua pala kerrallaan näkemättä kokonaisuutta. Vaikka tavoitteena olevat käsitteet ovat abstrakteja, niihin tutustuminen voidaan kuitenkin aloittaa jo varhain konkreettisten tilanteiden kautta ja havainnollistamiseen käytettävien apuvälineiden avulla. Voidaan ajatella, etteivät oikeat matematiikan käsitteet ole liian vaikeita pienillekään oppilaille, kunhan asia esitetään oppilaan kehitysvaiheeseen sopivalla tavalla. Ei ole järkevääå miettiä, milloin oppilaalle tulisi opettaa lukujonoja tai raja-arvoa. Sen sijaan tulisi päättää, mitä asioita lukujonoista ja raja-arvosta tulisi opettaa missäkin vaiheessa. Oppilaalle tulisi antaa kokemuksia asioista, joille hän vasta paljon myöhemmin osaa antaa matemaattisen nimen. Opettajan sen sijaan olisi hyvä paitsi aavistaa myös suoraan tietää riittävästi siitä ajatusmaailmasta, jonka omaksumiseen hän oppilaitaan valmentaa.

Suomalaista kouluopetusta arvostellaan toisinaan siitä, että oppilaille opetetaan ulkolukua, mekaanista laskemista ja kaavojen pyörittämistä ajattelun sijasta. Käsitteiden ja päättelyjen ymmärtäminen ja kattavan kokonaiskäsityksen luominen ovatkin varmasti ensisijaisen tärkeitä, muttei pidä unohtaa sitä, että matematiikan osaamisessa on hallittava myös rutiineja. Käytännössähän matematiikan tekeminen on mahdotonta, jos kaikki asiat on aina ajateltava uudelleen alusta asti, eivätkä juuri mitkään toiminnot ole automaattisia.

Aika on oppimisen tärkeä laatutekijä kaikissa ikäryhmissä. Oppilas tarvitsee aikaa ennenkaikkea ajattelemiseen. Tehtävien miettiminen, ratkaisujen kirjoittaminen ja esimerkkien lukeminen sekä kertaaminen ovat oppimistyöhön sisältyviä ajattelun apuvälineitä. Oppimisen tutkijat ovat todenneet, että yleisemminkin uusia asioita opittaessa kannattaa jakaa opiskelu useisiin harjoittelujaksoihin, joiden välissä pidetään tauot sen sijaan, että kaikki harjoittelu tehtäisiin yhdellä kertaa. Tärkeää on alusta asti kysyä ja tarkistaa heti, kun on jotain epäselvää, sillä matematiikan tieto rakentuu lähes poikkeuksetta aiemmin opitun varaan. Matematiikan opiskelussa on tärkeää erottaa olennainen epäolennaisesta, koska muistiin tallentuu se, johon tarkkaavaisuus kiinnitetään ja mikä kyetään hahmottamaan. Tärkeää on myös kiinnittää huomio siihen sanomaan, jonka teksti pyrkii välittämään, eikä tekstiin itseensä esimerkiksi ulkoa oppiskellen. Teksi on vain väline, joka välittää tietoa matematiikan todellisuudesta. Tavoitteena on tuon todellisuuden logiikan ja rakenteen ymmärtäminen. Matematiikkaan, kuten moneen muuhunkin, pätee, että siitä ei kiinnostu ellei siihen perehdy kunnolla. Matematiikan ymmärtämiseksi ja matemaattisten taitojen oppimiseksi pitää nähdä vaivaa. Vaivannäkö palkitaan ymmärryksenä ja oivalluksista saatavana ilona. Matematiikan osaaminen on enemmän taitoa (perustelutaitoa) kuin tietoa. Ainoa tapa oppia on runsas harjoittelu. Tässä pätee sama kuin vaikkapa pianon soiton oppimisessa: pelkkä opettajan soiton seuraaminen tai nuottien ymmärtäminen ei riitä - on itse soitettava ja paljon.

Yliopistomatematiikan oppimisessa keskeistä on opiskelijan mahdollisimman suuri oma aktiivisuus. Lukion matematiikkaan verrattuna oppiaines on abstraktimpaa, laskemisen sijasta päättely ja perusteleminen ovat korostetummin esillä ja täsmällisyyteen kiinnitetään paljon huomiota. Siksi kynnys koulumatematiikan ja yliopistomatematiikan välillä on monille uusille opiskelijoille korkea. Lukion pitkän matematiikan hyvää osaamista voisi verrata vaikkapa kuntosalilla saatuun peruskuntoon. Yliopistomatematiikan perus- tai aineopintotason ensimmäisten kurssien läpäisyä voisi verrata vastaavasti esimerkiksi maratonin juoksemiseen.

Opetusta suunnitellessa on tarpeellista ajatella, mitä haluaa opettaa, kenelle ja miksi. Jo ensimmäisiä tunteja pidettäessä tulisi tähtäin olla paljon kauempana kuin vain saman tunnin tai lukuvuoden asioissa. Jotta opettaja pystyisi opettamaan kaukonäköisesti, on hänellä oltava itsellään kuva matematiikan peruskäsitteistä ja matematiikan rakenteesta. Opettajat eivät kuitenkaan voi oppia oppilaiden puolesta, mutta heidän tavoitteenaan on auttaa oppilaita kaikin tavoin pääsemään opiskeluunsa kiinni. Käytännössä matematiikan perusopetuksen tavoitteena ovat aina olleet laskutaidon ja päättelytaidon kehittäminen. Matematiikan osaaminen on sen lisäksi paljon muutakin, kuten taitoa tehdä järkeviä arvauksia, jakaa suuria tehtäviä mielekkäisiin osiin ja luoda uusia ideoita. Matematiikka kehittää ajattelua monin tavoin ja luo pohjaa loogiselle ajattelulle kaikilla elämän osa-alueilla. Matematiikka onkin hyvin laaja tieteenala, jonka yhä useammilla eri haaroilla on alkanut olla kosketusta ihmiselämän toimintoihin. Sopivassa suhteessa matemaattisia taitoja tarvitsevat kaikki, vaikka eivät kouluttautuisikaan insinööreiksi, fyysikoiksi tai muiksi matematiikan suurkuluttajiksi, sen tuottajista puhumattakaan. Aiheesta lisää: Kahanpää L., Kangas O. *Taustakuvia - Matematiikkaa alkuopettajille.*

Viitteet

[1] Halmetoja, M. *Lukujonon raja-arvo.* Matematiikkalehti Solmu 1/2006. 2006.

[2] Hämäläinen, T. *Matemaattinen analyysi.* Opetusmoniste. Tampereen teknillinen yliopisto. 2008.

[3] Kahanpää L., Kangas O. *Taustakuvia - Matematiikkaa alkuopettajille.* Oppimateriaali. Jyväskylän yliopisto. 2001.

[4] Kangasmäki, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. *Pitkä matematiikka: Lukujonot ja sarjat.* WSOY. 1996.

[5] Kangasmäki, M. *Analyysin teoria A ja B.* Opetusmoniste. Tampereen yliopisto. 2006.

[6] *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* http://www.oph.fi/. 2003.

[7] Merikoski, J., Halmetoja, M., Tossavainen, T. *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan.* 1. painos. Werner Söderström Osakeyhtiö. 2004.

[8] Salas, S., Hille, E., Etgen, G. *Calculus: One and several variables.* Ninth edition. John Wiley & Sons, Inc. 2003.