

TAMPEREEN YLIOPISTO

Matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen
matemaattisen ongelman ratkaisuvälineenä

Kasvatustieteiden tiedekunta

Opettajankoulutuslaitos, Hämeenlinna

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma

JOANNA MÄCKLIN JA MARJO NIKULA

Kevät 2010

Tampereen yliopisto

Kasvatustieteiden tiedekunta

Opettajankoulutuslaitos, Hämeenlinna

JOANNA MÄCKLIN JA MARJO NIKULA: Matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen matemaattisen ongelman ratkaisuvälineenä

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma, 78 sivua, 20 liitesivua

Toukokuu 2010

Tutkimuksessa tarkasteltiin matemaattisen ajattelun ilmaisemista kirjallisen kielentämisen avulla. Tarkoituksena oli tutkia kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyden kokemista sekä oppilaan että opettajan näkökulmasta: oppilaalle hyötynä matemaattisen ongelman ratkaisuvälineenä, ja opettajalle hyötynä oppilaiden kielenntysten kautta. Tutkimuksessa selvitettiin myös, millaiset oppilaat kirjallisesta kielentämisestä mahdollisesti hyötävät, eli tutkimuksessa tarkasteltiin, miten matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyden kokeminen on yhteydessä oppilaan matematiikan osaamiseen, kirjoittamisen loogisuuteen ja mielisuuteen, hänen käsitykseensä itsestä matematiikan osaajana sekä hänen sukupuoleensa ja luokkatasoonsa.

Tutkimus toteutettiin helmi-maaliskuussa 2010. Tutkimusnäyte koostui kolmesta eri luokka-asteesta: kolmannesta, viidennestä ja seitsemännestä luokasta. Kultakin kanta-hämäläiseltä luokka-asteelta näytteessä oli mukana kaksi luokkaa. Lisäksi tutkimukseen osallistuivat luokkien opettajat, joita oli viisi. Oppilaita oli yhteensä sata, joista tyttöjä oli 43 ja poikia 57. Oppilaista 35 oli kolmasluokkalaisia, 36 viidesluokkalaisia ja 29 seitsemäsluokkalaisia. Tutkimus on empiirinen ja sijoittuu fenomenologis-hermeneuttiseen viitekehykseen. Tutkimuksessa käytettiin mixed methods -lähestymistapaa, jonka mukaisesti kvantitatiivista sekä kvalitatiivista tutkimusotetta yhdistettiin aineiston hankinnassa, analysoinnissa ja tulokinnassa. Tutkimusaineisto koostui kyselylomakkeen avulla hankitusta aineistosta, opettajien teemahaastattelusta sekä opettajien antamista arvioinneista oppilaiden matematiikan osaamisesta ja kirjoittamisen loogisuudesta. Aineistoa analysoitiin kvantitatiivisesti tilastollisin menetelmin sekä kvalitatiivisesti teemoittelun keinoin.

Tutkimustulosten mukaan monet oppilaat ja opettajat kokevat hyötävänsä oppilaiden kirjallisesta kielentämisestä matematiikassa. Tulokset antavat viitteitä siitä, että erityisesti keskitasoiset matematiikan osaajat kokisivat hyötävänsä matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä. Lisäksi kirjoittamisen mielisuus on merkitsevästi yhteydessä kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemiseen matematiikassa. Luokka-asteen mukaan tarkasteltuna kolmannen luokan oppilaat kokevat omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisemmäksi kuin viides- tai seitsemäsluokkalaiset. Muuten tutkimustulosten perusteella ei voi määrittellä, minkälaiset oppilaat tai osaajat kokevat hyötävänsä matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä.

Suurimmaksi hyödyksi kirjallisessa kielentämisessä matematiikassa nähtiin ajattelun jäsentäminen ja parempi matematiikan tehtävän ymmärtäminen. Sen kahdesta tutkimastamme osasta, omin sanoin kirjoittamisesta ja piirtämisestä, piirtäminen koettiin hyödyllisemmäksi kuin omin sanoin kirjoittaminen. Opettajien kannalta kirjallinen kielentäminen matematiikassa koettiin hyödylliseksi työvälineeksi oppilaita arvioidessa. Lisäksi tulosten mukaan se mahdollistaa opettajille muun muassa kaikkien oppilaiden matemaattisen ajattelun tarkastelun. Tutkimustulokset eivät ole yleistettävissä, sillä tarkoituksena ei ollut löytää yleispäteviä totuuksia, vaan tulokset kuvaavat koettua hyötyä kirjallisesta kielentämisestä matematiikassa. Tästä näkökulmasta ne antavat suuntaa jatkotutkimuksille. Tulosten perusteella voidaan todeta kirjallisen kielentämisen matematiikassa olevan yksi mahdollinen työtapaa, jonka käyttökelpoisuutta opettajan kannattaisi kokeilla omassa luokassaan, sillä se hyödyttää opettajien lisäksi monia oppilaita matematiikassa.

Avainsanat: matematiikka, matemaattinen ajattelu, kielentäminen, matemaattisen ajattelun kielentäminen, kirjallinen kielentäminen, kirjallisen kielentämisen hyödyllisyys

SISÄLLYS

1	JOHDANTO	4
2	TUTKIMUKSEN TAUSTAA	6
3	MATEMAATTINEN AJATTELU JA SEN KIELENTÄMINEN	9
3.1	MATEMAATTINEN AJATTELU.....	10
3.2	MATEMAATTINEN KIELI.....	12
3.2.1	<i>Matemaattisen kielen tyypit</i>	13
3.2.2	<i>Matemaattisen kielen rekisterit</i>	17
3.3	MATEMAATTISEN AJATTELUN KIELENTÄMINEN.....	21
3.3.1	<i>Kirjallinen kielentäminen</i>	23
3.3.2	<i>Sanallisten tehtävien ratkaisumallit</i>	26
3.3.3	<i>Matemaattisen ajattelun kielentäminen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa</i>	29
4	OPPILAS MATEMATIIKAN OPPIJANA	31
4.1	MATEMATIIKKAKUVA.....	31
4.2	MATEMATIIKKA JA SUKUPUOLI.....	34
5	TUTKIMUKSEN KULKU	38
5.1	TUTKIMUSONGELMAT.....	38
5.2	TUTKIMUSOTE.....	39
5.3	TUTKIMUKSEN TOTEUTUS.....	40
5.3.1	<i>Aineiston hankinta</i>	41
5.3.2	<i>Aineiston analyysi</i>	43
6	TULOKSET	46
6.1	MITEN OPPILAAT HYÖTYVÄT MATEMAATTISEN AJATTELUN KIRJALLISESTA KIELENTÄMISESTÄ?.....	48
6.2	MITEN OPETTAJAT HYÖTYVÄT OPPILAAN MATEMAATTISEN AJATTELUN KIRJALLISESTA KIELENTÄMISESTÄ?.....	59
6.3	TULOSTEN TARKASTELUA.....	60
7	LOPUKSI	67
7.1	TUTKIMUKSEN LUOTETTAVUUS.....	67
7.2	POHDINTA.....	70
	LÄHTEET	73
	LIITTEET	79

1 JOHDANTO

Sosiaalinen konstruktivismi on tällä hetkellä vallalla oleva oppimiskäsitys, joka korostaa tiedon sosiaalista ja kulttuurillista alkuperää. Siinä yksilö nähdään aktiivisena tiedon konstruoijana eli omien tietorakenteidensa muodostajana. Tietoa ei siis voida sellaisenaan välittää oppijalle, vaan oppijan on itse muokattava se osaksi aiempia tietorakenteitaan. (Rinne, Kivirauma & Lehtinen 2004, 31, 177–180.) Myös suomalainen perusopetuksen opetussuunnitelma pohjaa oppimiskäsityksensä sosiaaliselle konstruktivismille (ks. Opetushallitus 2004, 18). Muun muassa edellä mainittujen syiden johdosta opetusmenetelmien pitäisi olla sosiaalisen konstruktivismin ehtojen mukaisia; sellaisia, jotka kannustavat oppilasta pohdintaan ja tiedon rakentamiseen ulkoa oppimisen sijaan. Sen vuoksi onkin tärkeää kehittää ja tutkia uusia opetusmenetelmiä ja työskentelytapoja, jotka toteuttavat sosiaalista konstruktivismia.

Eräs sosiaalisen konstruktivismin mukainen työskentelytapa on matemaattisen ajattelun kielentäminen (ks. Joutsenlahti 2003a, 188–196). Kielentämisellä tarkoitetaan oman ajattelun ilmentämistä suullisesti ja kirjallisesti. Tällöin esityksessä käytetään matematiikan symbolikielen lisäksi myös matematiikkaan liittyvää luonnollista kieltä, luonnollista kieltä ja mahdollisesti myös kuviokieltä. Matemaattinen ajattelu tuodaan siis kielentämisen avulla näkyväksi muille oppilaille ja opettajalle, eli kielentämisen tuloksena voidaan nähdä ajattelu- ja/tai laskuprosessin eteneminen. Kielentäessään henkilö perustelee ja reflektoi kielen avulla ajatuksiaan sekä käsityksiään itselleen ja mahdollisesti myös muille, jolloin hän myös jäsentää omaa matemaattista ajatteluaan. Kielentäminen toteuttaa sosiaalista konstruktivismia, koska kielentämisen avulla oppija konstruoi ja muokkaa itse matemaattisen käsitteen tai asian sisältöä sekä yhdistää uutta tietoa aikaisemmin oppimaansa. Näin opitusta asiasta ja sen yhteydestä muihin matematiikan osa-alueisiin muodostuu kokonaisvaltainen ja looginen käsitys. Tämän johdosta myös ymmärrys sisällöstä syvenee. Matemaattisen ajattelun kielentämistä peruskoulussa perustelee myös se, että perusopetuksen opetussuunnitelmaa ohjaa siihen tavoitteillaan ja lähtökohdillaan. (Ks. Joutsenlahti 2003a.)

Vaikka kielellisen kommunikaation hyödyistä matematiikan opetuksessa on kirjoitettu (esim. Høines, Joutsenlahti, Lee, Meaney, Morgan), tutkimustuloksiin perustuva tieto on melko vähäistä. Suomessa asiaa on käsitelty kirjallisuudessa ja tutkimuksissa ainoastaan Jorma Joutsenlahti (2003a, 2009, 2010). Aiheesta on tehty myös muutama opinnäytetyö (esim. Autonen & Melartin

2004, Oinonen & Takaniemi 2005) ja lisäksi olemme itse tutkineet aikaisemmin kirjallisen kielentämisen mielekkyyttä omassa kandidaatin tutkielmassamme (ks. Mäcklin & Nikula 2009).

Koska tutkimustietous aiheesta on varsin suppeaa, on matemaattisen ajattelun kielentämistä ja sen käyttöä perusteltava vielä lisätutkimuksen keinoin. Oman tutkimuksemme kautta haluamme varmistua matemaattisen ajattelun kielentämisen hyödyistä. Verrattuna kirjalliseen kielentämiseen suullinen kielentäminen on laajalti jo käytössä kouluissa – vähintään opettajien puolesta, sillä he tuovat matemaattista ajattelua esiin opetuksessaan puheen kautta selittäessään tehtäviä, niiden ratkaisuja sekä ratkaisumalleja. Suullisen kielentämisen hyötyjä matematiikassa on myös tutkittu jonkin verran, kun taas matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen on melko uusi työskentelytapa, eikä se siten ole vielä kovinkaan laajassa käytössä. Tästä johtuen haluammekin selvittää, onko sen käyttämisestä hyötyä oppilaille ja/tai opettajille matematiikan sanallisia tehtäviä ratkottaessa. Lisäksi haluamme selvittää, hyödyttääkö kirjallinen kielentäminen tietyn tyyppisiä oppilaita tai osajia muita enemmän. Opettajien kohdalla tarkoituksenamme on tutkia, kokevatko he oppilaiden kirjallisen kielentämisen hyödyttävän heidän omaa työskentelyään. Näiden aiheiden ja näkökulmien kautta aiomme löytää vastauksen siihen, onko matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen käyttö perusteltua matematiikan sanallisia tehtäviä ratkoessa.

2 TUTKIMUKSEN TAUSTAA

Tutkimuskohteeksemme valitsemamme ilmiö matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen on kielentämisen yksi alue, jonka tutkimus on sekä Suomessa että kansainvälisesti vasta aluillaan. Suomessa aihetta on käsitellyt ja tutkinut kirjallisuudessa Jorma Joutsenlahti, ja tämän lisäksi aiheesta on tehty muutama opinnäytetyö. Kansainvälinen tutkimustietous kielentämisestä on myös melko vähäistä, vaikka kielellisestä kommunikaatiosta matematiikassa on kirjoitettukin varsin paljon (esim. Høines, Lee, Meaney, Morgan).

Kielentämiseen liittyen Suomessa on tehty muutama opinnäytetyö, joihin lukeutuvat ainakin kaksi pro gradu -tutkielmaa (Autonen & Melartin 2004, Oinonen & Takaniemi 2005). Molemmat tutkielmat käsittelevät kuitenkin pääasiassa suullista kielentämistä: Autonen ja Melartin (2004) ovat työssään tutkineet esiopetusikäisten lasten matematiikan kielentämistä, heidän valmiuksiaan kielentämiseen, opettajan roolia sekä havainto- ja toimintamateriaalia, kun Oinonen ja Takaniemi (2005) ovat tarkastelleet lähinnä suullista kielentämistä opetusharjoittelijoiden näkökulmasta. Vaikka Autosen ja Melartinin (2004) tutkimus liittyykin pääasiassa suulliseen kielentämiseen, he puhuvat myös kuvallisesta ja muilla tavoin kielentämisestä. Oinosen ja Takaniemen (2005) tutkimuksessa kielentäminen on puolestaan nähty hyödylliseksi niin yksilölle kuin koko oppimisyhteisöllekin. Kuitenkin tutkimuksessa on käynyt myös ilmi, etteivät oppilaat – etenkään matematiikassa hyvin tai kirjoittamisessa heikosti menestyvät – kokeneet kielentämistä aina mielekkääksi tai tarpeelliseksi. Forsblom (2003) puolestaan on tutkinut geometrian oppimateriaaleja. Tutkimuksen aikana oppilaat käyttivät matemaattista kielentämistä sekä suullisessa että kirjallisessa muodossa, ja vaikka tutkimus ei kielentämistä suoranaisesti tutkinutkaan, siinä kävi ilmi, että opettaja pystyy havainnoimaan oppilaan geometrisen ajattelun tasoa kielentämisen kautta.

Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksella Hämeenlinnan yksikössä toteutetaan lehtoreiden Jorma Joutsenlahden ja Pirjo Kuljun johdolla Sanan lasku -projektia, joka on matematiikan ja äidinkielen didaktiikkojen yhteinen tutkimusprojekti. Projektin tavoitteena on tutkia, mitä annettavaa matematiikalla ja äidinkielellä on toisilleen sekä löytää uudenlaisia opiskelu- ja opetuskäytänteitä kyseisiin oppiaineisiin. Tällä hetkellä projektissa tutkitaan

matemaattisen ajattelun kielentämistä ja äidinkielen kielioppisisältöjen opiskelua ongelmanratkaisuna korostaen oppilaan strategista kompetenssia. (Ks. Joutsenlahti & Kulju 2010, 77; Kulju & Joutsenlahti 2010, 163.) Keväällä 2010 valmistuu projektiin liittyen useita kandidaatin tutkielmia Tampereen opettajankoulutuslaitokselta Hämeenlinnan yksiköstä.

Joutsenlahti on tutkinut Sanan lasku -projektiin liittyen lukion ensimmäisen vuoden opiskelijoiden kokemuksia matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä (Joutsenlahti 2010). Tutkimuksen tarkoituksena oli tutkia, miten opiskelijat kokevat kielentämismallien (ks. lukua 3.3.2) käyttökelpoisuuden sanallisten tehtävien ratkaisussa sekä minkälaisia kielentämismalleja opiskelijat käyttävät. Tutkimuksessa selvisi, että opiskelijoiden mielestä kirjallinen kielentäminen jäsentää omaa ajattelua itselle sekä lukijalle, selkeyttää ratkaisun esittämistä muille, toimii muistin tukena ja helpottaa opettajan arviointityötä. Huonoina puolina opiskelijat näkivät tekstin tuottamisen työläyden, kirjallisen kielentämisen aikaa vievän prosessin ja ratkaisun liian pitkäksi koetun pituuden. Kirjallisesti kielennetyissä ratkaisuisaan opiskelijat käyttivät Joutsenlahden esittämiä kolmea kielentämismallia eli kertomus-mallia, tiekartta-mallia ja päiväkirja-mallia, joiden käyttö heille oli ohjeistettu. Näiden mallien lisäksi tutkimuksen yhteydessä löytyi myös uusi kielentämismalli, jonka Joutsenlahti nimesi kommentti-malliksi (Mt.).

Olemme myös itse tutkineet matemaattisen ajattelun kirjallista kielentämistä omassa kandidaatin tutkielmassamme. Tutkimuksessa tarkastelimme matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen onnistumista ja mielekkyyttä. Tarkemmin eriteltynä tutkimme millaisia yhteyksiä kirjallisen kielentämisen onnistumisella ja mielekkyydellä on äidinkielen ja matematiikan osaamiseen sekä kielentävän oppilaan sukupuoleen. Tutkimme myös onko matematiikan osaamisella ja sukupuolella yhteyttä siihen, miten hyödylliseksi oppilaat kokevat kirjallisen kielentämisen. (Ks. Mäcklin & Nikula 2009.)

Tutkimuksessamme selvisi, että äidinkielen osaamisella ei ole juurikaan yhteyttä kirjallisen kielentämisen mielekkyyteen eikä onnistumiseen. Kuitenkin oppilaan suhtautuminen kirjoittamiseen oli yhteydessä kirjallisen kielentämisen mielekkyyteen. Toisin sanoen oppilaat, jotka pitivät kirjoittamisesta, kokivat kirjallisen kielentämisen mielekkääksi ja päinvastoin. Matematiikan ja kirjallisen kielentämisen mielekkyyden välillä oli myös nähtävissä selkeä yhteys siten, että matematiikassa heikosti menestyvät kokivat kirjallisen kielentämisen mielekkäänä, kun taas matematiikassa hyvin menestyvät eivät nähneet kirjallista kielentämistä mielekkäänä toimintana. Matematiikan osaamisen ja kirjallisen kielentämisen onnistumisen välillä ei kuitenkaan ollut havaittavissa yhteyttä, kun taas matematiikan osaamisen ja kirjallisen kielentämisen hyödyn kokemisen välillä oli nähtävissä suuntaa antava yhteys, jonka mukaan matematiikassa heikompi

oppilas koki hyötyvänsä kirjallisesta kielentämisestä hyvin menestyvää enemmän. (Ks. Mäcklin & Nikula 2009.)

Sukupuolten välillä oli havaittavissa hiukan eroa kirjallisen kielentämisen hyödyn kokemisessa siten, että tytöt kokivat hyötyvänsä siitä enemmän. Myös kirjallisen kielentämisen onnistumisessa sukupuolten välillä oli eroa, sillä tytöt onnistuivat kirjallisessa kielentämisessä selkeästi paremmin kuin pojat. Sukupuolten välillä ei kuitenkaan ollut merkitsevää eroa kirjallisen kielentämisen mielekkyydessä, vaikka olikin nähtävissä, että tytöt kokivat kielentämisen hiukan poikia mielekkäämmäksi. (Ks. Mäcklin & Nikula 2009.) Kandidaatin tutkielmamme tulokset eivät ole yleistettävissä, sillä tutkimuskohteenamme toimi vain yksi neljäsluokka, jossa oli 22 oppilasta.

3 MATEMAATTINEN AJATTELU JA SEN KIELENTÄMINEN

Sosiaalisen konstruktivismin mukaan kieli on keskeistä oppimisessa, ymmärtämisessä sekä keskinäisessä vuorovaikutuksessa (mm. Brown 2001, 193; Vygotsky 1982, 18; Zevenbergen 2000, 201). Kieli onkin yksi tärkeä osa sosiaalista kanssakäymistämme, mistä johtuen Vygotsky (1982, 18) painottaa erityisesti sen kommunikatiivista funktiota. Lisäksi kieli on muun muassa yksi niistä tekijöistä, joka sitoo meidät osaksi omaa kulttuuriamme. Zevenbergen (2000, 202) korostaakin kielen merkitystä yhteisön jäseneksi tulemisessa: jotta voi olla oikeutettu yhteisön jäsen, pitää oppia yhteisön yhteinen kieli. Pärjätäkseen siis matemaattisessa ympäristössä – etenkin jos haluaa päästä matemaattisen yhteisön jäseneksi – on opittava kieli, jonka avulla matemaattisessa tilanteessa kommunikoidaan. Koulumaailmassa matematiikan tunti jo itsessään muodostaa matemaattisen tilanteen ja yhteisön, jossa jäsenten tulee pystyä muun muassa keskustelemaan yhdessä matematiikasta, jotta opetus ja oppiminen ovat mahdollisia. Esimerkiksi opetuksessa opettaja selventää oppilaille matemaattisten prosessien etenemistä suullisesti kielen avulla kommunikoiden eli kielentäen. Lisäksi kieli on keskeisessä asemassa myös, kun oppilaat ilmaisevat opettajalle ja/tai luokalle, miten ovat matematiikan ongelman ratkaisseet. He siis tuovat esille matemaattista ajatteluaan kielen avulla, eli kielentävät matemaattista ajatteluaan. (Ks. Brown 2001, 193; Senn-Fennell 2000, 227; Vygotsky 1982, 18.)

Työssämme tutkimme matemaattisen ajattelun kirjallista kielentämistä, joka on tiiviisti yhteydessä niin matemaattiseen ajatteluun kuin kieleen. Tästä johtuen tarkastelemme seuraavaksi matemaattista ajattelua ja matemaattista kieltä sekä niihin nojaavaa matemaattisen ajattelun kielentämistä, jossa tuodaan matemaattisen kielen avulla esille omaa matemaattista ajattelua. Kielentämisessä kieltä käytetään kuitenkin eri tavoin, minkä vuoksi onkin tarkasteltava matemaattisen kielen eri tyyppejä. Myös kielen käyttötilanteesta riippuva kielen vaihtelu eli rekisteri vaikuttaa kielentämisen tuotokseen, joten sen huomioiminen on välttämätöntä kielentämistä tarkasteltaessa.

3.1 *Matemaattinen ajattelu*

Ajattelulle on olemassa lukuisia määritelmiä, jotka ovat muuttuneet ajankuluessa (Saariluoma 1990, 24–38). Yrjönsuuren (1998b, 29) mukaan ajattelu ja myös tietäminen ovat tiiviissä yhteydessä sekä toimintaan että kokemukseen. Kyvykyys valikoida tietoa ympäröivästä tilanteesta, yhdistää uutta kokemusta aikaisempiin kokemuksiin ja muokata siten syntyneitä uutta tietoa mahdollistaa ajattelun. Sen tavoitteena on toimintatapojen tuottaminen: kun yksilö tarkkailee jonkin käsitteen käytön toiminnallisia seurauksia, hän oppii ymmärtämään sen sisällön ja alan. (Mts. 29.)

Myös matemaattinen ajattelu on laaja käsite, jonka määrittely ei ole helppoa ja yksiselitteistä. Tästä johtuen matemaattiselle ajattelulle on erilaisia, toisistaan poikkeavia määritelmiä. (Leppäaho 2007, 29–30.) Käsitys matemaattisen ajattelun luonteesta riippuukin siitä, missä yhteydessä sitä tarkastellaan, sillä matemaattinen ajattelu on yhteydessä muutoksiin ajassa ja ympäristössä sekä ihmisten muuttuviin lähtökohtiin muutoksien kokemisesta (Brown 2001, 192). Tarkastelun lähtökohtia matemaattiselle ajattelulle voivat siis olla esimerkiksi opiskelijaa ympäröivä kulttuuri, hänen ongelmanratkaisutaitonsa ja taitonsa prosessoida informaatiota sekä hänen matemaattiset kykynsä ja uskomuksensa (Joutsenlahti 2005, 51–63). Tässä luvussa käsittelemme Burtonin, Yrjönsuuren ja Joutsenlahden näkemyksiä matemaattisesta ajattelusta.

Burton (1984, 35) kuvailee matemaattista ajattelua ajattelutyyliseksi, joka on liitettävissä selkeästi matemaattiseen toimintaan. Hän ajattelee matemaattisen ajattelun koostuvan neljästä prosessista, jotka ovat täsmentäminen, otaksumien arvaileminen, yleistäminen ja vakuuttuminen (mts. 37–38). Myös Yrjönsuuri (1998b, 29, 33) ajattelee Burtonin tavoin. Lisäksi hän jaottelee matemaattisen toiminnan algoritmiseen ja reflektoiivaan ajatteluun (Yrjönsuuri 1998a, 135). Algoritmista ajattelua kuvaa taitotieto, jolloin kyse on kognitiivisen taidon käyttämisestä esimerkiksi silloin, kun puhuttua kieltä käännetään symboleiksi tai päinvastoin. (Yrjönsuuri 1998a, 135.) Algoritmista ajattelua käytetään siis esimerkiksi laskutoimituksissa ja lukujen merkitsemisessä lukujärjestelmän mukaan. Sen ominaispiirteet määräytyvät sen mukaan, millaiseen matematiikan sisältöön oppilas keskittyy. (Yrjönsuuri 1998b, 35.) Kyseisen periaatteen käyttäminen merkitsee taitoa toimia tietyllä tavalla. Algoritmisen ajattelun avulla yksilö kykenee ratkaisemaan tehtävän ja kehittämään tuloksia (Leppäaho 2007, 30), eli toisin sanoen algoritmisen ajattelu antaa työkalut matemaattisten tehtävien ratkaisemiseen ja tulosten kehittämiseen (Yrjönsuuri 1998a, 135).

Reflektoiiva ajattelu puolestaan on pohdiskelemista, joka mahdollistaa kehittämään oivalluksia deduktiivisten päätelmien tekemiseen (Yrjönsuuri 1998a, 135–136). Yrjönsuuren

(1998a, 135–136) mukaan se on älyllistä leikkiä, jota pelataan yleisesti hyväksytyjen sääntöjen mukaan. Reflektioivasti ajatteleva oppija kykenee pohtimaan valintojensa ja ratkaisujensa perusteita sekä seurauksia. Tämän lisäksi hän pyrkii ymmärtämään ja hallitsemaan kokonaistilannetta. Yhdessä algoritminen ja reflektioiva ajattelu mahdollistavat laajojen ja syväisten oppimistulosten syntymisen. (Yrjönsuuri 1998b, 35.)

Joutsenlahden (2004, 367; 2005, 103) määrittely poikkeaa edellä olevista Burtonin ja Yrjönsuuren määrittelyistä. Hän on määritellyt matemaattisen ajattelun matemaattisen tiedon avulla, sillä hänen mukaansa oppijan matemaattinen ajattelu on merkityksellisten matemaattisten tietojen prosessointia. Näitä tietoja ovat konseptuaaliset tiedot, proseduraaliset tiedot, niiden yhdistelmät sekä strategiatiedot. Matemaattisen ajattelun tarkoituksena on käsitteiden ja käsitejärjestelmien ymmärtäminen tai ongelmanratkaisuprosessista selviytyminen. Prosessiluonne onkin keskeisessä asemassa matemaattisessa ajattelussa ja tämä ajatteluprosessi on riippuvainen oppilaan kyvyistä, asenteista, uskomuksista sekä senhetkisistä tiedoista ja taidoista, sillä ne suuntaavat ja rajaavat ajattelua. (Joutsenlahti 2004, 367; 2005, 103.) Tässä tutkimuksessa matemaattisen ajattelun ymmärretään olevan Joutsenlahden määritelmän mukaista.

Joutsenlahden määrittelyssä käyttämä matemaattinen tieto jaetaan usein kahteen osaan: konseptuaaliseen ja proseduraaliseen tietoon (ks. esim. Leppäaho 2007, 30; Joutsenlahti 2005, 82–87). Näiden lisäksi myös strategiatieto voidaan lukea matemaattisen tiedon osa-alueeksi (Joutsenlahti 2005, 103). Konseptuaalisen tiedon voi ymmärtää dynaamisena tietona, jolloin siihen sisältyy käsitteen sisällön lisäksi sen kehityksen kautta muodostunut synty sekä sen osien riippuvuuksien suhteen ymmärtäminen (Haapasalo 1998, 66). Konseptuaalista tietoa voidaan kutsua myös käsitteelliseksi tiedoksi. Tätä käsitteellistä tietoa syntyy oppijalle mielekkään oppimisen kautta, jolloin oppija todella ymmärtää oppimansa eikä vain opi sitä ulkoa. (Joutsenlahti 2005, 82–83.) Se lisääntyy pääasiallisesti siten, että aikaisemman tiedon avulla yhdistellään uusia tietoja mielekkäällä tavalla. Esimerkiksi, kun oppilas hallitsee murto- ja desimaalilukuihin liittyvän konseptuaalisen tiedon, kykenee hän niiden avulla ymmärtämään myös prosenttikäsitteen. (Haapasalo 1998, 66.) Tieto on siis konseptuaalista vain siinä tapauksessa, että yksilö itse tiedostaa informaatioyksiköidensä suhteet (Joutsenlahti 2005, 82). Konseptuaalista tietoa on tällöin mahdollista ajatella oppilaan tietoverkkona, jota hänen tulee käyttää ja konstruoida tietoisesti (Leppäaho 2007, 31).

Proseduraalisen tiedon voi jakaa kahteen osaan: ensimmäiseen sisältyy symbolien ja niiden käyttöön liittyvien sääntöjen ymmärtäminen, kun toiseen lukeutuu perättäisistä, lineaarisesti etenevistä askelista muodostuva tieto. Ensimmäisessä osassa esitetty tieto voi olla symbolikielen lisäksi esitetty esimerkiksi piirrosten, taulukoiden tai konkreettisten esineiden avulla. Toisessa

osassa tieto on mahdollista kuvata prosessina, jolla on tarkoin määrätty alkutilanne. Prosessi etenee vaihe vaiheelta käyttäen seuraavan vaiheeseen siirtymisessä edellistä vaihetta. (Haapasalo 1998, 67–68.) Proseduraalinen tieto on siis oppilaan tietoa siitä, kuinka hän voi käyttää eri menetelmiä suorituksen aikana. Se ei välttämättä vaadi tietoista ymmärtämistä, etenkään silloin, kun suoritus on automatisoitunut. Merkittävin ero konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välillä onkin tietoinen ymmärtäminen. (Leppäaho 2007, 31.)

Joutsenlahti (2005, 89) esittää Hiebertin ja Lefevren mukaan, ettei kaikki tieto ole jaettavissa konseptuaaliseksi ja proseduraaliseksi tiedoksi. Näitä tietoja kutsutaan strategiatiedoiksi. Strategiat ovat henkisiä operaatioita, joiden avulla kognitiivisia prosesseja ohjaillaan ja kontrolloidaan. Kyseessä ei kuitenkaan ole vain perusoperaatiot, vaan myös metakognitiot ohjaavat strategioiden säätelyä. Matematiikkaan liittyvissä strategioissa on kyse menetelmistä, joissa käytetään matemaattisia käsitteitä, lauseita ja algoritmeja. (Joutsenlahti 2005, 89.)

Kuitenkaan tiedon jakaminen osa-alueisiin ei ole aukoton, sillä kaikki matemaattinen tieto ei ole jaoteltavissa näihin osiin. Toisaalta jokin tieto voi myös sisältää useammankin tiedon osa-alueeseen liittyviä piirteitä. (Joutsenlahti 2003b, 6.) Ymmärtävä ja pysyvä oppiminen vaatii konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon toisiinsa liittymistä ja toistensa muodostumisen tukemista (Haapasalo 1998, 68.) Esimerkiksi proseduurien mieleenpalauttaminen ja käyttäminen on helpompaa, kun ne ovat ajattelussa linkittyneet useisiin tietoyksiköihin. Tällöin on helpompaa havaita, kuinka niitä voi käyttää erilaisissakin, totutusta poikkeavissa matemaattisissa ongelmissa. (Joutsenlahti 2005, 86–87.)

3.2 Matemaattinen kieli

Konstruktivismi korostaa kielen asemaa oppimisessa. Tämä on Zevenbergenin (2000, 201) mukaan kiinnittänyt huomion myös kielen rooliin matematiikan opettamisessa ja oppimisessa. Kielen avulla me kommunikoimme oppitunneilla, ja se on näin ollen tärkeä apuväline myös matematiikan opetuksessa ja oppimisessa. Tästä huolimatta matematiikan yhteydessä käytettävää kieltä ei saa nähdä vain apuvälineenä, sillä matemaattisessa yhteydessä kielenkäyttö on tärkeä taito esimerkiksi opitun asian ymmärtämisen ja sisäistämisen mahdollistamiseksi (ks. mm. Lee 2006; Morgan 1998; 2001; Zevenbergen 2000). Kielellä on myös oleellinen rooli matemaattisten ajatusten ja ideoiden luomisessa, säilyttämisessä ja ilmaisemisessa (Brown 2001, 192). Seuraavassa tarkastelemme matemaattista kieltä ja sen eri tyyppisiä sekä lisäksi käsittelemme myös kielenkäyttötilannetta, sillä konteksti luo osaltaan myös edellytyksiä kielenkäytölle (ks. mm. Halliday 1974; Senn-Fennell 2000).

3.2.1 Matemaattisen kielen tyypit

Kommunikaatiossa kieli on vuorovaikutuksen kannalta avainasemassa silloin, kun lapset käyttävät aktiivisesti matematiikkaa, sillä kielenkäyttöä vaaditaan asioiden esittämiseen, puhumiseen, kuuntelemiseen, kirjoittamiseen ja lukemiseen. Kuitenkin matematiikassa käytetyn kielen rooli on monimutkainen muun muassa siitä syystä, että matemaattinen kieli, tai toisin sanoen matematiikan kieli, tulkitaan osittain vieraaksi kieleksi samalla tavalla kuin italia on sitä osaamattomille vieras kieli. (Rowland 1995, 54). Muun muassa myös Lee (2006, 2; ks. myös Pimm 1987) tukee edellistä Rowlandin näkemystä, sillä hänen mukaansa useille oppilaille matemaattisten ajatusten ilmaisuun oppiminen on kuin vieraan kielen oppimista: matematiikka sisältää oman erityissanastonsa ja ilmaisutapansa, jotka tekevät matemaattisten ajatusten esittämisen mahdolliseksi. Ilman sanaston, käsitteiden ja esitystapojen hallintaa sekä ymmärrystä on vaikea puhua tätä matematiikan kieltä.

Monien vuosien kuluessa matemaattinen kieli on kehittynyt nykyiseen muotoonsa (Senn-Fennell 2000, 225), vaikka keskustelua siitä edelleen käydäänkin. Usiskin (1996, 231) esittää asian yleisen keskustelun kannalta niin, että matematiikka omaa monin tavoin kielellisiä piirteitä, mutta hän ei kuitenkaan rinnasta matematiikkaa kieleksi samalla tavoin, kuin englanti on kieli. Usein matematiikasta kuullaankin puhuttavan muodollisena kielenä tai symbolisena kielenä, ja tästä syystä matematiikan oppimisen pitäisi erota kielen oppimisesta. Lisäksi matemaattinen kieli nähdään usein vain kirjallisena symbolikielenä, sillä sen ei alun perin ole ajateltu olleen puhutussa muodossa. Kuitenkin – muiden kielten lailla, myös matematiikka voidaan esittää niin kirjallisesti kuin suullisestikin, muodollisessa tai vapaamuotoisessa esitysmuodossa. Lisäksi matematiikan avulla pyritään kommunikoimaan sekä käyttämään ja ymmärtämään käsitteitä. Matematiikalla on myös kielelle ominaiset piirteet, kuten kielioppi tai yleiset säännöt, joiden mukaan matematiikka esitetään. (Usiskin 1996, 231–233; ks. myös Pimm 1987, 2.) Näin ollen voidaan sanoa, että matematiikka on kieli.

Jokaisella kielellä on oman sanastonsa lisäksi oma kielioppinsa. Myös matematiikka sisältää oman kielioppinsa, sillä muun muassa matematiikan kielessä " $3 + 4x$ " on lauseke ja " $3x = 9$ " sekä " $3 + 4x > 2$ " ovat virkkeitä (ks. Usiskin 1996, 232). Leen (2006, 18) mukaan matematiikan kieli on opittava, jotta voidaan tuoda ajatuksia esiin ja käyttää käsitteitä. Matematiikan kielen opiskelu onkin verrattavissa vieraan kielen opiskeluun, koska se vaatii sanaston, kieliopin ja muoto-opin omaksumista. Lisäksi se edellyttää niin sanotusti kielen kulttuuriin vihkiytymistä, sillä tämä kulttuuri antaa oman vaikutuksensa ajatusten ja käsitteiden ilmaisuun. (Mts. 18.) Matematiikan kielellä onkin hyvin rakennettu lauseoppi, jota käytetään myös muiden kielten yhteydessä, kun

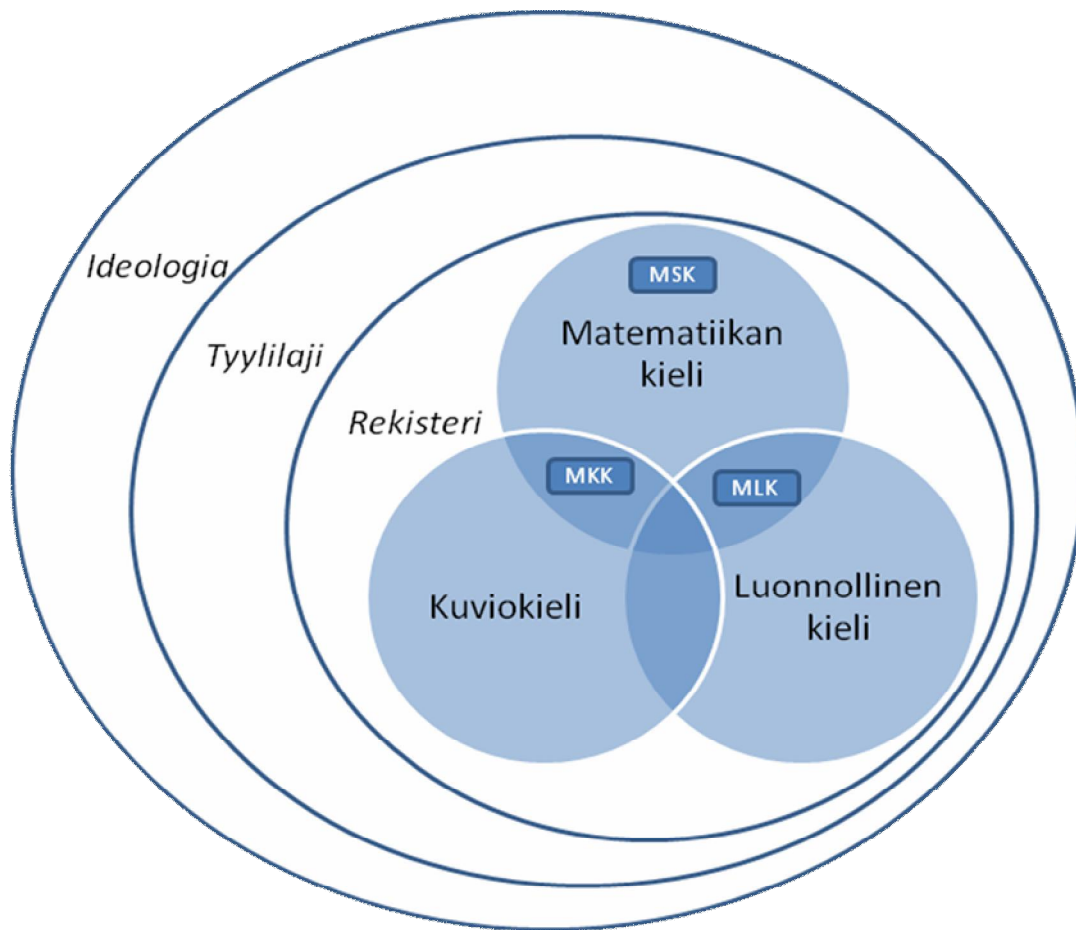
opiskellaan matematiikkaa (Usiskin 1996, 232; ks. myös Pimm 1987, 19–20, 161–178 & Lee 2006, 16–17).

Kun matematiikka kerran on kieli, se on opittava, jotta sitä voi käyttää. Rowland (1995, 60) pitää kuitenkin matemaattisen kielen oppimista vaikeampana kuin vieraan kielen oppimista, koska matemaattisessa kielessä on uusien sanojen lisäksi sanoja, joille löytyy vastine omasta jokapäiväisestä äidinkielestä. Esimerkiksi piiriä voidaan kutsua arkipäiväisessä kielessä ympärysmitaksi. Näin ollen on mahdollista ikään kuin pukea matemaattiset merkitykset ja ongelmat sekä matemaattiset ajatukset luonnollisen kielen vaatteisiin (mts. 60). Tähän liittyen Meaney (2005, 120) on käyttänyt artikkelissaan Bubbin mukailemaa Ballardin ja Mooren jaottelua kolmesta kielen tyypistä, joita käytetään matematiikassa. Nämä kielen tyypit ovat kyseisen jaottelun mukaan jokapäiväinen luonnollinen kieli, matematiikkaan liittyvä luonnollinen kieli ja matematiikan symbolikieli. Joutsenlahti ja Silfverberg (2007, 344) puolestaan ovat mukailleet samaa jakoa, mutta toisin kuin edellä mainitussa Bubbin mukaelmassa, he esittävät näiden kolmen matemaattisen kielen tyyppin menevän osittain päällekkäin.

Edellä mainittuja matemaattisen kielen tyyppisiä voidaan havainnollistaa Meaneyn (2005, 120) artikkelista löytyvän Bubbin esimerkin, jossa määritetään ämpärin yläreunan kehää, avulla. Kun luonnollisella kielellä ilmaistaan ämpärin yläreunan kehää, voitaisiin esimerkiksi sanoa: ”Käytetään nyöriä mittaamaan, kuinka pitkä on ämpärin yläreunan ympärysmitta.”. Vastaava esimerkki voisi olla matematiikkaan liittyvällä luonnollisella kielellä näin: ”Lasketaan ympyrän kehän pituus.”, kun matematiikan symbolikielellä esitettynä kyseinen esimerkki puolestaan olisi muodossa ” $p=2\pi r$ ”. (Mts. 120.) Tämän perusteella matematiikassa käytettävä luonnollinen kieli on jokapäiväistä kieltä, jonka avulla omin sanoin ilmaistaan kirjoittaen sanallisesti tai puhuen matemaattisia ongelmia. Vastaavasti matematiikkaan liittyvä luonnollinen kieli on matemaattisen ongelman esittämistä matemaattisin käsittein ja termein, kun taas matematiikan symbolikieli tarkoittaa matemaattisia lukuja, merkkejä ja symboleja, joilla on yhteisesti sovittu merkitys. (Ks. Meaney 2005, 120.)

Artikkelissaan Joutsenlahti (2009, 76) liittyy matematiikkaan liittyviin kieliin myös kuviokielen. MOT kielitoimiston sanakirja 2.0:n mukaan kuvio on hahmotettavissa oleva kokonaisuus, joka koostuu viivoista, pisteistä, pinnoista tai niiden yhdistelmästä, eikä yleensä tarkasti vastaa todellista esinettä. Joutsenlahti (2009, 76–77) käyttää tätä samaa lähdettä määrittelleessään kuviota ja kuviokieltä, eli näin ollen matemaattinen kuviokieli sisältää edellä määritellyn kaltaisia kuvioita, jotka voivat muodostaa myös kuvia. Matemaattisella kuviokielellä ei siis kuitenkaan tarkoiteta matematiikan symbolikieltä, vaan kuviokieleen kuuluvat esimerkiksi matemaattiset piirroksot ja konstruktioit kuten geometriset kuviot.

Edellä esitetty jaottelu matemaattisen kielen tyypeistä ei kuitenkaan ole aukoton, koska, kuten aikaisemmin mainitsimme, matemaattisen kielen tyypit ovat osittain päällekkäiset. Tätä Joutsenlahti ja Silfverberg (2007, 344) perustelevat monilla matematiikan ilmauksilla, kuten lukusanoilla ja -merkinnöillä, jotka kuuluvat kaikkien matemaattisten kielten tyyppien sisälle. Väitettä tukee myös Høinesin (2000, 36) ajattelu, sillä hän on sitä mieltä, että lukusanat ovat osa lasten luonnollista kieltä. Usein lapset käyttävätkin paljon luonnollisen kielen sanoja matematiikassa korvaamaan matematiikkaan liittyvän luonnollisen kielen sanat, kun eivät tiedä tai ole varmoja matemaattisten käsitteiden täsmällisestä käyttämisestä – tai kuten Rowland (1995, 60–61) asian esittää, usein lapset saattavat käyttää tiedostamattaan luonnollista kieltä niin sanotusti epäluonnolliseen, tässä tapauksessa matemaattiseen tarkoitukseen. Näin ollen onkin perusteltua käyttää lasten ja oppilaiden kanssa matemaattisen kielen eri tyyppiä, ja varsinkin Lee (2006) painottaa matemaattisen kielen tyyppien tärkeyttä oppilaan oppimisen ja ymmärtämisen kannalta. Usiskin (1996, 241–242) puolestaan korostaa kielen eri tyyppien merkitystä matematiikassa kommunikaation merkityksessä. Kuviossa 1 on esitetty Joutsenlahden ja Kuljun (2010, 81) jalostama versio matemaattisen ajattelun kirjalliseen kielentämiseen mahdollisesti käytettävistä kielistä ja niiden yhteyksistä toisiinsa. Lisäksi kuvio 1 havainnollistaa matematiikassa mahdollisesti käytettäviä kielentyyppiä sekä niiden välisiä yhteyksiä. Oman tutkimuksemme kannalta tarkastelumme keskiössä ovat kuviossa esitetyt matemaattisen kielen tyypit sekä niitä ympäröivä käyttötilanne eli rekisteri (ks. lukua 3.2.2).



KUVIO 1. Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisuisissa mahdollisesti esiintyvät kielet (MSK on matematiikan symbolikieli, MLK on matematiikkaan liittyvä luonnollinen kieli ja MKK on matematiikkaan liittyvä kuviokieli) ja systeemis-funktionaalisen kieliteorian tasoja. (Joutsenlahti & Kulju 2010, 81).

Meaney (2005, 119) näkee tärkeänä sen tavan, jolla matemaattisia objekteja nimetään (ks. myös Irons & Irons 1989, 85–86), sillä käyttämällä tarkkoja käsitteitä matemaatikot pystyvät esittämään asiansa tiiviisti. Toisaalta erityisien matemaattisten ilmausten käyttämisen sijaan voidaan kuitenkin käyttää luonnollista kieltä, koska jokapäiväisillä termeillä saavutetaan myös matemaattisia tarkoituksia (mts. 119). Näin ollen eri matemaattisen kielen tyypit eivät sulje toisiaan pois, vaan voivat täydentää toisiaan, kun yksi matemaattisen kielen tyyppi ei riitä matemaattisessa esityksessä. (Ks. myös Joutsenlahti & Silfverberg 2007, 344.) Kielenkäyttäjät saattaa siis käyttää useaa eri kielen tyyppiä samanaikaisesti eli samoista matemaattisista asioista voidaan puhua sekä luonnollisella kielellä että matematiikkaan liittyvällä luonnollisella kielellä. Luonnollisen kielen avulla siis voidaan oppia matematiikkaan liittyvää luonnollista kieltä sekä matematiikan symbolikieltä. Edellisten perusteella voidaankin siis todeta, että jokapäiväisen luonnollisen kielen käyttö matematiikan opiskelussa on välttämätöntä. Pelkästään matematiikan

symbolikielen ja matematiikkaan liittyvän luonnollisen kielen käyttö saattaa syntyä esteeksi matematiikan oppimiselle.

Matematiikan kielen ei välttämättä ajatella pärjäävän täysin itsenäisesti omana kielenä, vaan se tarvitsee muun muassa luonnollisen kielen sanoja tuekseen erityisesti, kun halutaan suullisesti tai sanoin kirjallisesti esittää matemaattisia ajatuksia. Tästä huolimatta matematiikka on kieli kielten joukossa, sillä yksi kielen ominaispiirre on sanojen lainaaminen (Usiskin 1996, 233–234). Sen lisäksi että matematiikan kieleen lainataan sanoja luonnollisesta kielestä, tilanne voi olla myös päin vastainen, sillä esimerkiksi alun perin (englanninkielinen) matematiikan sana ”triangle”, on lainattu englannin kieleen tarkoittamaan triangelisoitinta ja sen merkitys on laajentunut myös ihmissuhteisiin (”a relationship involving three persons”, kolmiodraama) (Usiskin 1996, 233–234). Matematiikan siis ollessa kieli se sisältää lainattuja sanoja muista kielistä. Matemaattisia ongelmia esittäessään kielenkäyttäjä valitsee itse sen sanaston, minkä avulla hän ajatuksiaan ilmaisee. Vastaavasti, matemaattisesta käyttötilanteesta riippuen, kielenkäyttäjä valitsee myös, mitä matemaattisen kielen tyypeistä ja miten hän käyttää tuodessaan ajatteluaan esiin. Seuraavaksi tarkastelemme kielen käyttötilannetta matemaattisessa yhteydessä.

3.2.2 Matemaattisen kielen rekisterit

Koulumatematiikassa hyödynnetään kaikkia kuviossa 1 (ks. myös lukua 3.2.1) esitettyjä matemaattisen kielen tyyppejä. Oppitunnin aikana opettaja voi esimerkiksi uutta asiaa opettaessaan ratkaista matemaattista ongelmaa käyttäen kirjallisesti matemaattisia symboleja ja samalla selittää taululle tekemiä merkintöjään käyttäen matemaattisia termejä ja käsitteitä (eli käyttäen matematiikkaan liittyvää luonnollista kieltä). Lisäksi hän voi esittää käytännön esimerkkejä käyttäen luonnollista kieltä ja mahdollisesti vielä piirtää asiaa selventäviä kuvia opetuksensa tueksi. Matemaattinen opetustilanne määrittää opettajan käyttämää kieltä, hänen käyttämiä sanoja ja sanastoa sekä tavan, jolla hän puhuu. Tätä tilannesidonnaista kielen vaihtelua, käyttötilannetta, kutsutaan kielen rekisteriksi (Halliday 1974, 32; 1978, 31–32).

Hallidayn (1974, 32; 1978, 31–32) mukaan kielen rekisteri viittaa siis puhutun tai kirjoitetun kielen vaihteluun käyttötilanteesta riippuen. Rekisteri on myös semanttinen käsite, joka voidaan määritellä merkitysten muotona, joka sisältää kieliopillisten ja fonologisten piirteiden lisäksi ilmauksia. Nämä ilmaukset ja piirteet ovat tyypillisiä kyseisille merkitysten muodoille tai käsittävät jo itsessään merkitykset. Esimerkiksi ilmaus ”Olipa kerran...” antaa kuulijalle merkin, että hänelle kerrotaan satu (Halliday & Hasan 1985, 38–39.)

Siitä huolimatta että kielen rekisteri viittaa yleisesti puhutun tai kirjoitetun kielen vaihteluun, näillä molemmilla kielen eri muodoilla on omat rekisterinsä. Lisäksi vielä kirjoitetunkin kielen eri rekisterit eroavat toisistaan aiheeltaan, kirjoituksen tavoitteeltaan sekä viestimeltään. Kirjoitetun kielen rekistereiden eroavaisuuksiin vaikuttavat myös lähettäjä, vastaanottaja ja tilanne. Näin ollen ilmaisu kirjoitetussa kielessä voikin olla käyttötilanteen mukaan joko persoonallista tai persoonatonta, tietyn mallin mukaista tai vapaamuotoista. (Koppinen, Lyytinen & Rasku-Puttonen 1989, 14–15.) Toisin sanoen kielen rekisterejä on useampia esimerkiksi kirjoitetun kielen rekisterin sisällä. Näin on myös matematiikan rekisterissä. Esimerkiksi koulumatematiikan rekisterissä käytetty kieli poikkeaa tiedematematiikan rekisterin käyttämästä kielestä (ks. Lee 2006, 7; Meaney 2005).

Kielen rekisterit siis viittaavat siihen, että erilaisissa tilanteissa ja eri konteksteissa käytettävä kieli on erilaista. Rekisteriteorian tarkoituksena onkin tuoda ilmi niitä peruseriä, jotka hallitsevat kielen vaihtelua, jotta on mahdollista ymmärtää, mitkä tilanteelliset tekijät määrittelevät kielellisiä piirteitä (Halliday 1974, 32; 1978, 32). Näin ollen eri rekistereitä on kielen rekisterin sisällä useampia, jolloin, kuten Pimm (1987, 78) esittää Hallidayn artikkelin pohjalta, rekisteri voi sisältää spesifejä sanoja, joilla ei ole merkitystä niin sanotussa tavallisessa kielessä. Lisäksi erityissanasto saattaa olla suurellekin osalle väestöstä tuntematonta, tästä hyvänä esimerkkinä toimivat tietotekniikkaan liittyvät sanat "bitti" ja "pikseli" (Pimm 1987, 78).

Molemmilla aikaisemmin mainitsemillamme matemaattisen kielen tyypeihin lukeutuvilla luonnollisella kielellä sekä matematiikkaan liittyvällä luonnollisella kielellä on myös omat rekisterinsä. Leen (2006, 12) mukaan luonnollisen kielen rekisteri viittaa kielen käyttämistä käsitteiden ilmaisuun ja luonteenomaiseen käytäntöön argumentoida. Joutsenlahti (2009, 76–77) puolestaan liittää luonnollisen kielen rekisteriin jonkun puhutun kielen kirjoitettuja sanoja sekä niihin liittyviä sääntöjä eli kielioppeja. Nämä sanat ja säännöt taasen muodostavat ilmauksille omat merkityksensä, jolloin niitä käytetään rekisterin edellyttämällä tavalla (Halliday & Hasan 1985, 38–39).

Leen (2006, 12–13) mukaan matematiikan rekisteri on kehittynyt monien vuosisatojen aikana edellytyksenä keskustelulle matemaattisista ajatuksista ja prosesseista. Se on tapa käyttää symboleja, erityissanastoa, täsmällisiä ilmauksia ja kieliopin rakenteita samalla, kun esitystapa on kaavamainen sekä persoonamuodoltaan passiivissa. (Ks. lisäksi Pimm 1987, 70, 76–77; Zevenbergen 2000, 202). Meaney (2005, 118) kuitenkin liittää matematiikan rekisteriin sisältyväksi symbolien ja lausekkeiden lisäksi myös sellaiset luonnollisen kielen sanat, jotka ohjaavat matemaattista tekstiä. Tästä esimerkkinä hän käyttää sanoja "jos ... niin sitten" ja "koska" (mts. 118). Matematiikan rekisteri on myös jatkuvasti kehittyvä ja muuttuva, sillä matemaattiseen

diskurssiin yhdistyy uusia ideoita, ja koska sillä on yhteys luonnolliseen kieleen, joka on jo itsessään muuttuvaa ja kehittyvää (Lee 2006, 12–13).

Matemaattinen kieli käyttää matematiikan rekisterin edellyttämiä spesifejä sanoja ja esitystapoja (Lee 2006, 20; Zevenbergen 2000, 202–203). Kuitenkin Morganin (1998, 9–10) mukaan matemaattisen kielen määrittelemine on vaikeaa, sillä usein yleiset keskustelut matemaattisesta kielestä yrittävät käsittää sen kokoelmana lisäyksiä luonnolliseen kieleen eikä välttämättä omana kielenään. Tästä huolimatta joitain symboleja ja termejä luetaan kuuluvaksi matemaattisen kielen erityissanaksi ja niitä käytetään joko yksinoikeudella tai epätavallisin tavoin matemaattisessa yhteydessä. Kuitenkin kun kieltä käytetään erilaisissa matemaattisissa yhteyksissä, erilaisilla muodoilla, joita matemaattinen kieli ottaa, on merkitsevä ero, eikä ole selvää, että pelkkä matematiikan rekisteri pystyy suoriutumaan niiden erilaisista käyttötarkoituksista ja merkityksistä. Esimerkiksi peruskoulun tekstikirjassa ja akateemisessa tutkimuksessa käytettävät matemaattiset kielet eroavat todennäköisesti toisistaan olennaisesti niin sisältämänsä aineiston kuin argumenttien ilmenemismuotojen perusteella. Kuitenkin mikä tahansa teksti, joka voidaan yleisesti tunnistaa matemaattiseksi, sisältää jotain kielellisesti yhteistä muiden matemaattisten tekstien kanssa. (Mts. 10.)

Matematiikan rekisteri siis sisältää matematiikan kielen käyttöön vaadittavat käsitteet ja termit, eli erityissanaston. Lee (2006, 15) luokittelee matematiikan rekisteriin lukeutuvat sanat kolmeen eri kategoriaan:

- 1) sanat, jotka kuuluvat luonnolliseen kieleen, mutta niitä käytetään myös matemaattisessa yhteydessä
- 2) sanat, joilla on merkitys vain matemaattisessa kielessä, kuten hypotenuusa
- 3) sanat, joilla on eri merkitys matemaattisessa kielessä ja luonnollisessa kielessä, kuten piiri.

Kuten ryhmittelyn ensimmäisestä kategoriasta voidaan huomata, matematiikan rekisteriin sisältyy sanoja, jotka kuuluvat myös luonnolliseen kieleen. Näin ollen voidaan ajatella, että kuten matemaattisen kielen tyypit myös rekisterit ovat osittain päällekkäisiä. Esimerkiksi lapset käyttävät apunaan jokapäiväisiä, luonnollisen kielen rekisteriin kuuluvia sanoja opiskellessaan ja käyttäessään matematiikkaa (ks. Lee 2006, 11), mikä on heille luontaista, sillä luonnollinen kieli sisältää sanoja, joita matemaattinen kieli on ottanut omakseen, ja joita käytetään matemaattisia ajatuksia esittäessä. Tästä hyvänä esimerkkinä edelleen toimivat lukusanat, jotka ovat luonnollinen osa lapsen käyttämää kieltä (ks. mm. Høines 2000, 36). Vastaavasti myös Meaney

(2005, 118) toteaa matemaattisen kielen sisältävän sekä arkipäiväisiä termejä että termejä, joita käytetään vain matemaattisessa keskustelussa.

Matematiikan rekisteriin lukeutuviin luonnollisen kielen ja matematiikkaan liittyvän luonnollisen kielen rekistereihin Joutsenlahti (2009, 76) lisää kuviokielen rekisterin, joka koostuu kuvion määrittelystä ja kuvioden muodostamiseen mahdollisesti liittyvistä säännöistä. Kuviokielen rekisteriä hän perustelee matematiikan geometrian osa-alueella, koska kuviot, erityisesti geometriset kuviot, ovat keskeisiä geometrian tehtävissä ja ne toimivat ajattelun apuna visuaalisesti hahmottaville oppilaille erilaisia matemaattisia ongelmia ratkaistessa.

Kieltä siis käytetään, jotta pystytään esittämään kunkin rekisterin sisältämiä käsitteitä, termejä sekä ilmauksia ja näin tuomaan ilmi omaa ajattelua vuorovaikutuksellisesti. Aikaisemmassa luvussa esittelemiämme matemaattisen kielen tyyppejä käytetäänkin ilmentämään matemaattista ajattelua matematiikan rekisterissä eli käyttötilanteessa. Toisin sanoen matemaattisessa kontekstissa kielenkäyttäjä valitsee matematiikan rekisterin puitteissa käyttämänsä sanaston ja esitysmuodon. Täten kielenkäyttötilanteessa voidaan käyttää joko luonnollista kieltä tai matematiikkaan liittyvää luonnollista kieltä – tai jopa molempia. Tämä ei kuitenkaan ole sama asia kuin kielen rekisteri tai tiettyyn rekisteriin sisältyvät sanat, sillä rekisteriin sisältyviä sanoja käytetään kielellisenä välineenä asian ilmaisemiseen. Sanat muodostavat siis kielen, jolla asia esitetään, ja tämä käyttötilanteessa käytettävä, toisiinsa liittyvistä sanoista muodostuva kieli voi matemaattisessa yhteydessä olla luonnollista, matematiikkaan liittyvää luonnollista tai kirjallisesti esitettynä jopa symbolista kieltä. Matematiikan rekisteri sisältää siis luonnollisen kielen, matematiikkaan liittyvän luonnollisen kielen ja symbolikielen ihan yhtä lailla kuin näihin kaikkiin liittyvät erityiset sanat, sanastot, sanonnat sekä kielioppisäännöt. Asian esittäjä vain valitsee tietoisesti tai (osittain) tiedostamatta rekisterin sisällä, mitä näistä kaikista hän käyttää voiden, näin ollen, antaa ilmauksille jopa uusia merkityksiä. Matemaattisessa kontekstissa kielenkäyttäjä ilmaiseekin itseään yleensä pääasiassa matematiikan rekisterissä sen edellyttämien sääntöjen mukaisesti, mutta voi käyttää yhtä hyvin myös muun muassa luonnollisen kielen ja kuviokielen rekistereitä.

Tarkastellessamme matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyttä, matemaattinen kieli ja sen käyttötilanteet sijoittuvat koulukontekstiin. Koulussa matematiikan tunneilla oppilaat seuraavat ja sisäistävät opetusta, oppivat kielen kautta uusia asioita, ratkaisevat mekaanisia ja sanallisia tehtäviä yksin ja ryhmissä sekä esittävät omia ratkaisujaan muille. Omassa tutkimuksessamme tutkimme matemaattisen ajattelun kirjallista kielentämistä sanallisten tehtävien ratkaisuvälineenä, joten tarkastelumme painottuu sanallisten tehtävien yhteydessä ilmeneviin matemaattisen kielen tyyppeihin ja käyttötilanteisiin. Usein matematiikan oppimateriaalit ohjaavat

oppilaita käyttämään sanallisen tehtävän ratkaisussa ainoastaan vain matematiikan symbolikieltä (Joutsenlahti 2009, 72). Toisin sanoen ne ohjaavat käyttämään tiettyä rekisteriä, jonka sisällä matemaattisen kielen tyyppisiä ei käytetä monipuolisesti. Oppilaiden tulisi kuitenkin oppia käyttämään matemaattisen kielen tyyppisiä laajemmin ja vaihtelevasti matemaattisissa yhteyksissä, sillä se lisää heidän ymmärryksensä tasoa sekä mahdollistaa matemaattisten asioiden esittämisen (ks. luku 3.1). On oletettavaa, että rikkaamman kielen käyttö sanallisen tehtävän tehtävänannossa, ohjaisi oppilaita käyttämään monipuolisemmin matemaattisen kielen eri tyyppisiä ja sitä kautta kehittämään omia matemaattisia taitojaan.

3.3 Matemaattisen ajattelun kielentäminen

Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan oman matemaattisen ajattelun ilmentämistä suullisesti ja kirjallisesti. Sen avulla voidaan jäsentää omaa ajattelua ja tehdä ajattelu näkyväksi muille. Kielen avulla kielentävä henkilö perustelee ja reflektoi ajatuksiaan ja käsityksiään itselleen tai muille. Kieli voi olla puhuttua tai kirjoitettua äidinkieltä, kuvia, ilmeitä, eleitä tai symbolikieltä. (Joutsenlahti 2003a, 188–191.)

Kielentäessä henkilö käyttää apunaan kaikkia tai osaa matemaattisen kielen tyypeistä ilmaistessaan ja jäsentäessään omaa matemaattista ajatteluaan, esimerkiksi ratkaistessaan matemaattista ongelmaa tai selittäessään jotain matematiikan käsitettä. Kuten luvussa 3.2.1 on esitetty, matemaattisen kielen tyyppisiä ovat siis luonnollinen kieli, matematiikkaan liittyvä luonnollinen kieli, matemaattinen symbolikieli ja matematiikkaan liittyvä kuviokieli. Matemaattisen ajattelun kielentämisen muotoja puolestaan ovat suullinen ja kirjallinen kielentäminen. Suullisesti kielentäessä henkilö ilmaisee omaa matemaattista ajatteluaan omin sanoin luonnollisella kielellä ja/tai matematiikkaan liittyvällä luonnollisella kielellä suullisesti. Kirjallisesti kielennettäessä henkilö käyttää apunaan kaikkia tai osaa matemaattisen kielen tyypeistä jäsentäessään omaa matemaattista ajatteluaan symbolien, sanojen ja mahdollisesti myös kuvien avulla. Se, miten kielentäjä käyttää matemaattisen kielen eri tyyppisiä, riippuu kielen käyttötilanteesta eli matemaattisen kielen rekisteristä. Kielentäessään henkilö siis käyttää kieltä joko puhutussa tai kirjoitetussa muodossa. Näillä molemmilla kielen ilmenemismuodoilla on oma rekisterinsä, jossa kieli vaihtelee vielä omanlaisekseen matemaattisesta yhteydestä riippuen. Kielentäjä käyttää kielentäessään siis matemaattista käsitteistöä ja erityissanastoa, jotka sisältyvät niin matemaattiseen kieleen kuin rekisteriinkin. Lisäksi kielentäjä voi käyttää hyväkseen matematiikan rekisterin edellyttämiä esitysmuotoja ja -tapoja, joilla hän ilmaisee ajatteluaan.

Seuraavaksi kerromme sellaisista kielentämisen hyvistä puolista, jotka koskettavat sekä suullista että kirjallista kielentämistä. Tulevissa alaluvuissa perehdymme puolestaan tarkemmin kirjallisen kielentämiseen sekä sen käytön perusteluihin ja muutamiin negatiivisiin puoliin. Käytämme muun kirjallisuuden ohella lähteinä Leen ja Morganin teoksia, vaikkei niissä käytetäkään suoranaisesti termiä kielentäminen. Sisällöllisesti he kuitenkin käsittelevät samaa aihetta, joten kielentämis-termin käyttö heidän ajatuksiinsa viitatessa on perusteltua.

Luokkatyöskentelyssä matematiikan tunnilla runsas kielentäminen ja kommunikointi ovat tärkeitä, koska niiden avulla oppilaat saavat paremmat mahdollisuudet oppia. Lisäksi se antaa opettajalle keinoja auttaa ja edistää oppilaiden oppimista. (Lee 2006, 1.) Kielentäessään oppilaan täytyy pohtia esitettävän asian tai käsitteen sisältöä, minkä vuoksi hän samanaikaisesti myös konstruoi sen sisältöä. Oppilas muokkaa opittua ainesta omien ennako-odotustensa, uskomustensa ja kokemustensa kautta sekä reflektoi omaa ajatteluaan. (Joutsenlahti 2003a, 192.) Kielentäminen saa oppilaan tietoiseksi omasta ajattelustaan ja tätä kautta sekä kehittää että uudelleen organisoii oppilaan matemaattisia tietoja ja taitoja sekä auttaa häntä paremmin muistamaan opitun aineksen (Lee 2006, 4). Kun oppilas kielentäessään jäsentää omaa matemaattista ajatteluaan, opittu tieto saattaa muuttua konseptuaaliseksi, sillä se verkottuu kielen avulla muihin tietoyksiköihin (Joutsenlahti 2003b, 10, ks. Lee 2006, 6–7).

Oppilaan lisäksi hänen kielentämisestään hyötyvät myös sitä seuraavat oppilaat, sillä seuratessaan he voivat verrata kielentäjän käsitystä omaan käsitykseensä. Lisäksi oppilaat pystyvät konstruoimaan ja muokkaamaan omaa sekä tarvittaessa myös kielentäjän käsitystä keskustelun avulla. (Joutsenlahti 2003a, 192.) Runsa kielentämisen käyttö opetuksessa kehittääkin oppilaiden argumentointi- ja kommunikointitaitoja (Joutsenlahti 2009, 75). Kielentäessään oppilaan täytyy perustella esimerkiksi ongelmanratkaisuprosessinsa kulkua sekä tekemiään valintojaan ja ratkaisujaan, kun taas kielentämistä seuraavan oppilaan on vastaväitettä esittäessään kyettävä perustelemaan oma näkemyksensä. Argumentoinnin yhteydessä oppilaan taidot arvioida itseään ja muita kehittyvätkin ja tätä kautta oppilas saa myös uusia keinoja kehittää omaa oppimistaan (Lee 2006, 61). (Ks. myös Masingila & Prus-Wisniowska 1996, 95.)

Kun oppilas löytää kielentämisen avulla uusia keinoja edetä oppimisessaan, hän pystyy myös ottamaan enemmän vastuuta omasta oppimisestaan. Näin ollen hän pystyy itse asettamaan omia tavoitteitaan ja pohtimaan keinoja niiden saavuttamiseksi. Sen seurauksena oppilas tuntee hallitsevansa oppimisprosessin kulkua ja on sen vuoksi motivoituneempi ja kiinnostuneempi oppimaan matematiikkaa ja ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. Kielentämisen myötä myös oppilaan kyky käyttää puheessaan matemaattisen kielen eri tyyppejä kehittyy ja tämän seurauksena hän voi osallistua matemaattisiin keskusteluihin. (Lee 2006, 69–70.) Lisäksi kun oppilaan ilmaisu

ja ongelmanratkaisu keinot kehittyvät, hän kykenee ratkaisemaan myös aiempaa vaativampia matemaattisia ongelmia (mts. 4).

Matemaattisen idean esittämiskeino vaikuttaa paljon oppilaan ilmaisuun. Siksi olisi tärkeää, että oppilas saisi ilmaista asiansa haluamallaan tavalla. Joutsenlahden (2003a, 192; ks. myös Lee 2006, 3, 44) mukaan, oppilaan ilmaistessa asian omalla tavallaan opettaja ja muut oppilaat saavat selkeän kuvan siitä, miten kielentävä oppilas on käsitteen tai opiskeltavan asian ymmärtänyt. Oppilaan oman ajattelun kielentämistä apuna käyttäen opettaja siis pystyy havainnoimaan tämän ajattelua sekä seuraamaan ja tukemaan oppilaan oppimista ja kehittymistä (Joutsenlahti 2003a, 192, ks. Lee 2006, 2). Tällöin opettaja tulee tietoiseksi oppilaan ajattelusta, eikä hänen tarvitse arvailla, mistä oppilaan virheet johtuvat. Väärinymmärrysten ilmaantuessa hän saa helposti selville niiden syyt ja voi näin ollen ohjata oppilasta laajentamaan matemaattista tietoaan ja/tai korjaamaan käsitystään tai ratkaisuprosessiaan. (Lee 2006, 3–4.)

Opettajan on myös hyvä kiinnittää huomiota oppilaan tuotoksesta antamaansa palautteeseen, koska tarkoituksenmukainen palaute auttaa oppilasta parhaiten. Palautteen annon seurauksena oppilaan tulee tietää, mitä hän on tehnyt hyvin ja missä hänellä on vielä korjattavaa tai parannettavaa. Hyvä palaute auttaa oppilasta etenemään oppimisessa. Jos oppilas ei ymmärrä opettajansa antamaa palautetta, ei hän myöskään voi kehittää toimintaansa sen avulla. Eräs tapa antaa palautetta ja auttaa oppilasta etenemään on kysymysten esittäminen. Tällöin on tärkeää, että kysymykset ovat oikeanlaisia eli sellaisia, jotka ohjaavat oppilasta pohtimaan ja oivaltamaan, miten hänen tulee edetä. (Lee 2006, 56–57.) Opettajan tehtävänä on myös valmistella tarkoituksenmukaiset järjestelyt tunnille (Joutsenlahti 2003a, 192), jotta oppilaiden kielentäminen olisi mahdollisimman tavoitteellista.

3.3.1 Kirjallinen kielentäminen

Usein matematiikan sanallisen tehtävän ratkaisu koostuu ainoastaan laskulausekkeesta, laskutoimituksista ja tuloksesta – tai mahdollisesti vain jostain näistä (ks. Morgan 2001, 232). Joutsenlahden (2009, 74) mukaan olisi kuitenkin tärkeää, että matemaattisen ongelman kirjallisessa ratkaisussa käytettäisiin symbolikielen lisäksi myös kuviokieltä, matematiikkaan liittyvää luonnollista kieltä ja mahdollisesti myös luonnollista kieltä. Myös Pimm (1987, 118-122) esittää, että matematiikkaa voidaan esittää kirjallisessa muodossa sanallisesti, symbolisesti tai molempia hyödyntäen.

Joutsenlahden (2009, 72) mukaan peruskoulun matematiikan oppimateriaalit eivät rohkaise oppilasta kielentämään kirjallisesti ratkaisuprosessiaan, sillä ne ohjaavat käyttämään pelkästään

matematiikan symbolikielellistä esitystapaa. Ne ohjaavat oppilasta yleisesti saman kaavan mukaan: muodostamaan lausekkeen ja laskemaan laskun. Koska symbolikieli on suppeaa, se ei tue monipuolisesti kielenkäytön etuja matemaattisen ajattelun ilmaisemiseksi. (Mts.) Kun oppikirja ei ohjaa oppilasta kielentämään, ei ole ollenkaan ihme, että sanallisen tehtävän ratkaisu sisältää vain symbolikielellä esitetyn laskun tai pahimmassa tapauksessa vain pelkän tuloksen. Tästä johtuen oppilaan ajattelu ja ratkaisuprosessi eivät tule näkyviksi ratkaisun tarkastelijoille. Siksipä pelkkää matematiikan symbolikieltä sisältävä niukka esitys voi jäädä tehtävää tuntemattomalta ikätoverilta (Joutsenlahti 2003a, 188) tai opettajalta ymmärtämättä.

Luonnollisen kielen ja kuviodien käyttö kirjallisessa ratkaisuprosessissa auttaa Joutsenlahden (2009, 74) mukaan sekä oppilasta että muita ratkaisun tarkastelijoita, vaikka toisaalta rikas kielenkäyttö kirjallisessa esityksessä työllistääkin oppilaita. Usein oppilaat näkevätkin kirjallisen kielentämisen vaikeana ja työläänä (Morgan 1998, 71). Joutsenlahti (2003b, 11) on kuitenkin sitä mieltä, että kirjallisen kielentämisen hyödyt ovat niin suuria, että sen käyttäminen on perusteltua työläydestään huolimatta (ks. Lee 2006, 61), sillä se parantaa käsitteiden ymmärtämistä ja argumentointitaitoja. Morgan (2001, 233) puolestaan perustelee kirjallisen kielentämisen välttämättömyyttä tiedon jakamisella muille oppilaille ja opettajalle sekä ajatusten jäsentämisellä itse kielentävälle oppilaalle. Koska kirjallinen kielentäminen selkiyttää oppilaan matemaattista ajattelua, se näin ollen myös kehittää oppilaan matemaattista ymmärrystä ja edistää oppimista (mts. 233; Shield & Swinson 1996, 35).

Joutsenlahti (2009, 75) ja Morgan (2001, 234) molemmat pitävät tärkeänä, että kielentämisprosessista jää jonkinlainen konkreettinen tuotos, johon voi tarvittaessa palata yhä uudelleen (ks. Lee 2006, 79). Jos ratkaisuprosessista on konkreettinen, kirjallinen esitys, kielentäjä pystyy palaamaan prosessissaan taaksepäin reflektoiden ja tarvittaessa muuttaen sitä (Morgan 2001, 234). Kielentämisen toteuttaminen kirjallisesti takaa myös opitun asian paremman muistamisen (Lee 2006, 1).

Morgan (2001, 235) esittää, että kielentämisen avulla voidaan muuttaa oppilaiden asenteita matematiikkaa kohtaan positiivisempaan suuntaan: monet ajattelevat matematiikan olevan erillään muusta ihmisen toiminnasta, mutta kielentämisen avulla se tuodaan lähemmäksi ihmisen kokemusmaailmaa. Matemaattisten taitojen ja tietojen hallitsemisen osoittaminen tärkeäksi arkielämässä saattaa motivoida ja siten myös orientoida oppilasta tavoitteellisempaan matematiikan opiskeluun. Kielentämisessä pitää Morganin (2001, 235) mukaan kuitenkin ottaa huomioon myös oppilaan kielelliset taidot sekä asenteet kirjoittamista kohtaan. Jos oppilas kokee kirjoittamisen epämieluisana tai vaikeana, matematiikan kirjallisen kielentämisen vaatimus tuskin muuttanee oppilaan asennetta matematiikasta positiivisempaan suuntaan.

Kirjallisesti kielennetyssä esityksessä ajattelu- ja ratkaisuprosessi on myös muiden, erityisesti opettajan, tarkasteltavissa. Koska opettajat käyttävät oppilaiden kirjallisia tuotoksia yhtenä tärkeänä osana matematiikan arviointia, ovat kirjallisesti kielennetyt esitykset hyvä apu oppilaan taitoja kartoittaessa. Kirjallinen esitysmuoto ei kuitenkaan ole ongelmaton: Morgan (2001, 237) muistuttaakin, että lukijan tulee ajatella tekstiä aina sen kontekstissaan ottamalla huomioon muun muassa kielentävän oppilaan omat kokemukset, koska niillä on vaikutusta niin esityksen muotoon kuin sisältöön. Kuitenkin käyttäessään useita arvioinnin eri keinoja opettaja saa Morganin (2001, 237) mukaan oppilaan taidoista kattavamman kuvan. (Ks. myös Masingila & Prus-Wisniowska 1996, 95–103.) Tämän vuoksi matemaattisten taitojen arvioinnissa kannattaakin käyttää pelkkien symboliesitysten lisäksi myös kirjallisesti kielennettyjä esityksiä.

Verrattuna suulliseen kielentämiseen kirjallisesti kielentäessään oppilaalla on enemmän aikaa pohtia ilmaisuaan sekä selkeyttää ja konstruoida omia ajatuksiaan. Toisaalta suullisesti kielennetyn esityksen aikana kielentäjä saa välittömän palautteen kuuntelijoilta sisällön järkevyydestä ja oikeellisuudesta. Lisäksi hän saa kuulijoilta tarvittaessa myös apua ja tukea esitykseensä vuorovaikutuksellisessa tilanteessa. Näin ollen, ilman niin sanottuja kuulijoita, kirjallisen esityksen ollessa kyseessä lukijoita, kirjallisesti kielennetyn ratkaisun täytyy olla selkeämpi ja ymmärrettävämpi kuin suullisen esityksen, koska sen lukijalla ei välttämättä ole mahdollisuutta kysyä kielentäjältä selventäviä kysymyksiä. (Morgan 2001, 233, Pimm 1987, 115.) Tästä johtuen kirjallinen kielentäminen osoittautuu usein suullista kielentämistä haasteellisemmaksi ja hitaammaksi. Kielentäminen kirjallisesti voi myös hidastaa joidenkin oppilaiden matemaattisia saavutuksia, sillä he saattaisivat edetä nopeammin ilman kirjoittamisen vaatimusta (Morgan 1998, 71).

Lee (2006, 81) huomauttaa, että kirjallisen kielentämisen käyttö ei ole aina tarpeellista ja perusteltua. Kirjallista kielentämistä ei pidä käyttää esimerkiksi silloin, kun lasketaan yksinkertaisia päässä laskuja tai silloin, kun olisi tärkeää keskustella vaikkapa oman käsityksensä selkiyttämiseksi. Joskus kirjoittamisen vaatimus saattaa myös keskeyttää oppilaan ajatuksen, eikä siten auta oppilasta etenemään työssään. Leen mielestä kirjallisesti kielentäminen ei myöskään ole tarpeellista ryhmätöitä tehdessä. (Mts. 81.) Toisaalta kirjallisen kielentämisen käyttö ryhmätöitä tehdessä on perusteltua esimerkiksi silloin, kun kyseistä työtapaa ja oman matemaattisen ajattelun ilmaisemista harjoitellaan. Seuratessa toisten oppilaiden ilmaisua, voi löytää uusia keinoja myös omaan ilmaisuun ja ongelmanratkaisuun. Vaikka Lee (2006, 81) löytää kirjallisesta kielentämisestä huonojakin puolia, hän kuitenkin näkee asian niin, että on olemassa runsaasti tilanteita, joissa kirjallinen kielentäminen on perusteltua. Esimerkiksi, kun tarvitaan konkreettista esitystä kielentämisestä tai oppilaan täytyy kertoa omasta prosessistaan muille, on kielentämisen

esittäminen kirjallisesti aiheellista. Kielentäminen on perusteltua myös silloin, kun oppilas työskentelee hiljaisesti yksin tai kun hän ratkaisee vaikeaa monivaiheista tehtävää. (Mts. 81.) Edellisten perusteella näyttäisi siis siltä, että kirjallista kielentämistä ei kannata välttämättä käyttää aina, vaan vain silloin, kun se on tarkoituksen mukaista oppimisen kannalta. Opettajan täytyy pohtia, milloin ja minkälaisissa oppimistilanteissa se hänen ryhmällään olisi tavoitteellista.

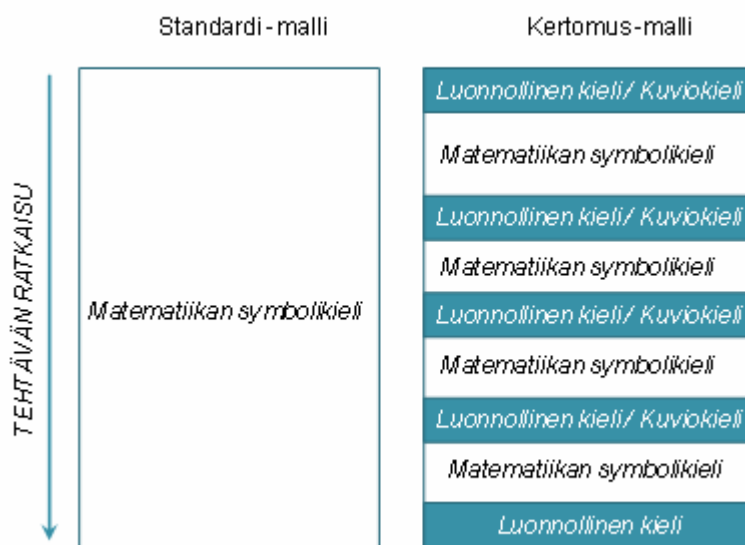
Omassa tutkimuksessamme tarkastelumme keskittyy siihen, miten oppilaat hyötyvät matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä sanallisten tehtävien ratkaisuvälineenä sekä, miten opettajat hyötyvät työssään oppilaiden kielenneityistä tuotoksista. Joutsenlahti (2009) on luonut ratkaisumalleja, joiden avulla sanallisia tehtäviä voi ratkaista kirjallista kielentämistä apuna käyttäen, ja joita olemme myös itse tutkimuksessamme hyödyntäneet. Seuraavaksi tarkastelemme kyseisiä malleja ja niiden käyttöä koulumatematiikassa.

3.3.2 Sanallisten tehtävien ratkaisumallit

Joutsenlahti (2009, 78–82) on kehittänyt neljä sanallisten tehtävien ratkaisumallia: standardi-, kertomus-, tiekartta- ja päiväkirja-mallin. Näiden lisäksi hän löysi tutkimuksessaan syksyllä 2009 vielä yhden ratkaisumallin, jonka hän nimesi kommentti-malliksi (Joutsenlahti 2010). Ratkaisumallit toimivat malliesimerkkeinä rakenteista, joiden mukaan matematiikan sanallisen tehtävän voi ratkaista. Hän kuitenkin painottaa, että esitetyt mallit ovat hypoteettisia ja siksi niiden kehittäminen vaatii kenttätutkimusta. (Joutsenlahti 2009, 82.) Nytemmin malleja on käytetty Joutsenlahden tutkimuksessa sekä omassa, aikaisemminkin mainitsemassamme kandidaatin tutkielmassamme.

Standardi-mallilla (kuvio 2, liite 1) Joutsenlahti (2009, 78) tarkoittaa perinteistä mallia, johon peruskoulun oppikirjatkin yleensä ohjaavat. Tätä mallia käyttäessä tärkeimpänä ei pidetä ratkaisijan tai esityksen tarkastelijoiden ymmärrystä, vaan esitystavan säännönmukaista noudattamista ja standardi-mallilla toteutetussa esityksessä käytetäänkin pelkästään vain matematiikan symbolikieltä. (Mts. 78.) Usein oppikirjat ohjaavat noudattamaan standardi-mallin mukaista esitystapaa, jolloin matematiikan rekisteriin liittyvät ilmaukset ja esitystavat eivät ole monipuolisesti käytössä. Näin ollen kirjallisesti matematiikassa käytettävä kieli ei juuri vaihtelee, vaan hyödyntää suurimmaksi osaksi symbolikieltä. Neljässä muussa edellä mainitussa Joutsenlahden (2009, 79–81) kehittelemässä kielentämismallissa odotetaan käytettävän monipuolisesti kaikkia matemaattisen kielen tyyppisiä. Tällöin kielen vaihtelu on sen käyttötilanteessa rikkaampaa ja tehtävien esityksissä on mahdollista hyödyntää koko matematiikan rekisteriä.

Kertomus-mallissa (kuvio 2, liite 2) ratkaisuprosessi etenee vaihe vaiheelta siten, että jokainen vaihe kuvataan sanallisesti ja mahdollisesti myös kuvio(ide)n avulla. Tyypillisesti mallissa kerrotaan väliotsikoiden avulla, mitä seuraavana aiotaan selvittää ja miksi. Tällöin matemaattinen esitys on myös lukijan ymmärrettävissä ja helposti seurattavissa, minkä johdosta hänen on helppo arvioida ratkaisua ja havaita, mistä mahdolliset puutteet tai virheet johtuvat. Laskulauseke laaditaan vasta prosessin lopussa eikä alussa kuten tavallisesti, koska sen ajatellaan tiivistävän ratkaisuprosessi symbolikielelle. (Joutsenlahti 2009, 79.)

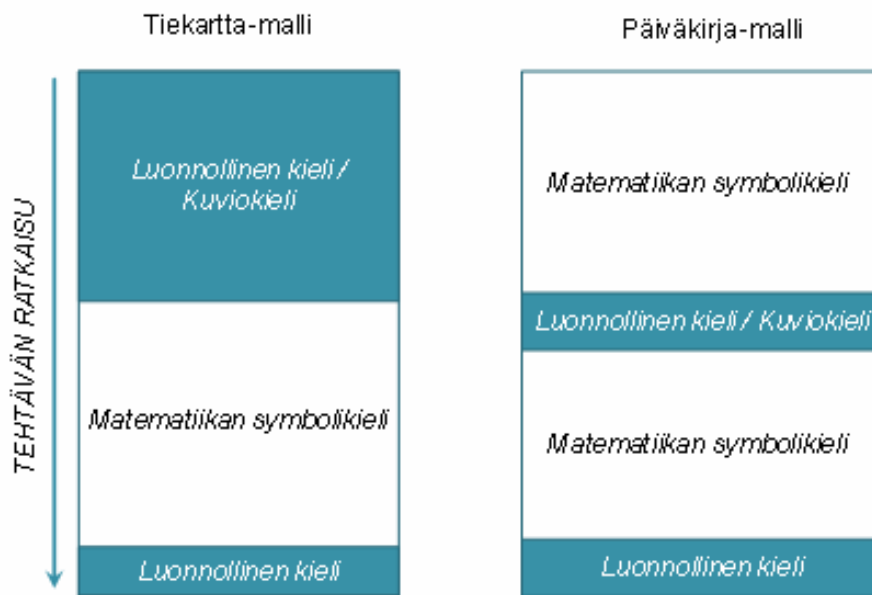


KUVIO 2. Standardi- ja kertomus-mallit (Joutsenlahti 2009, 78).

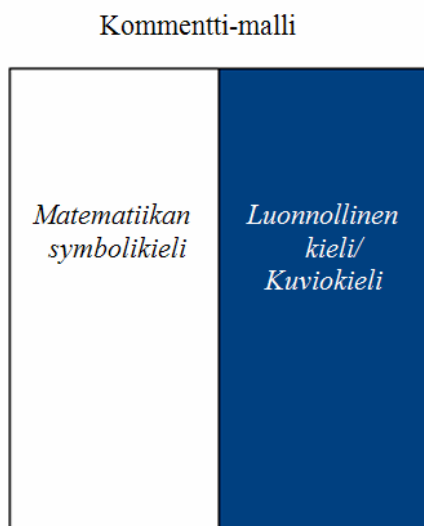
Tiekartta-mallissa (kuvio 3, liite 3) ratkaisuprosessin kulku esitetään ja perustellaan aluksi kokonaisuudessaan lausein sekä tarvittaessa myös kuvioin. Mainittuja matemaattisen kielen tyyppejä apuna käyttäen ratkaisija jäsentää itselleen koko prosessin kulun ja antaa siten lukijalle välineen, jolla esityksen etenemisen saa selville. Kun prosessin kulku on esitetty sanallisesti, muutetaan se symbolikielen laskulausekkeeksi. Tämän jälkeen ratkaistaan tehtävä edelle esitetyn reitin mukaisesti matematiikan symbolikielellä, jolloin mallin loppuosa on vastaava kuin standardi-malli. Tästä johtuen voidaan ajatella, että niin standardi- kuin tiekartta-mallissa prosessi etenee samalla tavalla, mutta tiekartta-mallissa tehdään näkyväksi ajattelu, joka standardi-mallissa jää esityksen seuraajilta piiloon. (Joutsenlahti 2009, 80.)

Päiväkirja-mallin (kuvio 3, liite 4) tarkoituksena ei niinkään ole prosessin ymmärrettäväksi tekeminen lukijoille vaan ratkaisijan oman ajattelun jäsentäminen. Ongelmanratkaisija käyttää prosessissaan pääsääntöisesti standardi-mallia, mutta tarvittaessa hän jäsentää ja selkiyttää omaa

ajatteluaan kirjallisesti kielentämällä. (Joutsenlahti 2009, 80–81.) Kommentti-mallissa (kuvio 4, liite 5) puolestaan tuotos on kahdessa sarakkeessa siten, että ensin kielentäjä ratkaisee vasemmalle puolelle laskutoimituksen matemaattisella symbolikielellä, jonka jälkeen hän kommentoi vaihetta oikeaan sarakkeeseen luonnollisella kielellä ja/tai matematiikan liittyvällä luonnollisella kielellä. (Joutsenlahti 2010.)



KUVIO 3. Tiekartta -ja Päiväkirja-mallit (Joutsenlahti 2009, 80).



KUVIO 4. Kommentti-malli (Kuvio tehty mukaillen Joutsenlahden (2009) luomia esimerkkikuvioita kielentämismalleista.)

Kaikissa kielentämismalleissa vastaus annetaan esityksen lopussa kokonaisena virkkeenä, jolloin kielentäjä tulee tarkistaneeksi alkuperäisen kysymyksen ja samalla liittäneeksi myös vastaukseensa tarvittavat yksiköt. Koska alkuperäinen ongelma on esitetty luonnollisella kielellä, on luonnollista esittää myös vastaus luonnollisella kielellä. (Joutsenlahti 2009, 81.) Näin ollen vaikka konteksti on matemaattinen, oppilas ei käytä ainoastaan matematiikan rekisteriin lukeutuvia esitystapoja ja/tai -muotoja vaan hän käyttää myös luonnollisen kielen, kuviokielen ja kirjoitetun tai puhutun kielen rekisterin sisältämiä ilmaisukeinoja niin kuin rekisterit edellyttävät. Oppilas siis käyttää kieltä sekä kielen rekisterejä monipuolisesti, mikä vahvistaa hänen kielellisiä valmiuksia niin matemaattisessa yhteydessä kuin muutenkin.

3.3.3 Matemaattisen ajattelun kielentäminen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa

Seuraavassa tarkastelemme matemaattisen ajattelun kielentämisen ilmenemistä opetussuunnitelmassa, jolla tarkoitamme opetushallituksen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita vuodelta 2004. Käsittelemme kielentämistä vuosiluokkien 3–5 sekä 6–9 tavoitteiden mukaisesti ja lisäksi tarkastelemme, miten viidennen luokan ja yhdeksännen luokan hyvän osaamisen kriteerit ottavat kielentämisen huomioon.

Yleisesti ottaen opetussuunnitelma ohjaa kehittämään muun muassa ajattelu-, ongelmanratkaisu- ja sosiaalisia taitoja ja näin ollen opetuksessa käytettävien työtapojen pitäisikin tukea oppilaiden keskinäistä, vuorovaikutteista oppimista. (Opetushallitus 2004, 19.) Myös matematiikka on perusopetuksen opetussuunnitelman (Opetushallitus 2004, 158) mukaan nähtävä sosiaalista vuorovaikutusta edistävänä. Molempien tarkastelemiemme luokka-asteryhmien tavoitteissa esitetään, että oppilaan tulisi kyetä perustelemaan toimintaansa ja päätelmiään. Vuosiluokilla 3–5 oppilaan tulisi oppia esittämään ratkaisujaan muille, kun taas ylemmillä luokilla hänen pitäisi osata ilmaista ajatuksiaan yksiselitteisesti. Lisäksi molempien ryhmien tavoitteisiin kuuluvat kysymysten kysyminen ja päätelmien esittäminen havaintojen perusteella. (Opetushallitus 2004, 161–165.)

Ylipäätään matematiikan opetuksen tulisi antaa mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen (Opetushallitus 2004, 158), ja vuosiluokkien 3–5 yhtenä olennaisena tavoitteena onkin matematiikan opetuksessa kehittää matemaattista ajattelua (Opetushallitus 2004, 160). Vuosiluokilla 6–9 painotetaan matemaattisten ajatusten esittämistä, sillä yksi keskeisimmistä perustaidoista on harjoitella täsmällistä ilmaisua (Opetushallitus 2004, 163). Tähän liittyy olennaisesti käsitteiden käyttö ja ymmärtäminen, sillä ilman matemaattisia käsitteitä, on vaikeaa

ilmaista matemaattista ajattelua tai prosessia täsmällisesti. Käsitteiden käyttäminen puolestaan on yhteydessä kielentämiseen, kuten ajatusten esille tuominenkin. Molempien luokka-asteryhmien tulisivatkin opetussuunnitelman (Opetushallitus 2004, 160–167) mukaan kyetä käyttämään käsitteitä monipuolisesti.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet vaativat oman ajattelun kielentämistä varsinkin vuosiluokilla 3–5, sillä ne asettavat tavoitteeksi, että "oppilas perustelee toimintaansa ja päätelmiään sekä esittää ratkaisujaan muille" (Opetushallitus 2004, 161). Vuosiluokilla 6–9 kehitetään loogista ajattelua vaativia toimintoja ja kyseisten toimintojen kautta harjoitellaan myös ajattelun esittämistä unohtamatta ajattelun tukemista muun muassa piirroksin (Opetushallitus 2004, 164). Lisäksi vuosiluokkien 6–9 aikana harjoitellaan matemaattisten tekstien tuottamista (Opetushallitus 2004, 164), eli kielentämistä vaaditaan ylemmillä luokilla jopa kirjallisena. Tämä ei kuitenkaan näy päättöarvioinnin kriteereissä arvosanalle kahdeksan yhdeksännen luokan jälkeen, sillä arviointiperusteiden mukaan oppilaan – saadessaan vähintään arvosanan kahdeksan – tulisi kielentää ainoastaan suullisesti: "[oppilas] osaa käyttää puheessaan loogisia elementtejä kuten ja, tai, jos niin, ei, on olemassa, ei ole olemassa" ja funktioiden yhteydessä oppilaan tulisi kyetä kertomaan sanallisesti lukujonon muodostumisen pohjalla olevan säännön (Opetushallitus 2004, 165–166). Vastaavasti viidennen luokan jälkeen hyvin matematiikkaa osaavan oppilaan pitäisi pystyä käyttämään matematiikkaan liittyviä käsitteitä ongelman ratkaisussa ja kyetä esittämään niitä muun muassa kuvin, symbolein, sanoin ja luvuin. Oppilaalta edellytetään myös taitoa kuvata reaali maailman tilanteita ja ilmiöitä matemaattisesti käyttäen apunaan esimerkiksi vertailua ja luokittelua. Tämän lisäksi oppilaan pitäisi pystyä "kommunikoimaan havainnoistaan ja ajatuksistaan monipuolisesti, toimimalla, puhumalla, kirjoittamalla ja symbolien avulla". (Opetushallitus 2004, 160–163.) Vaikka viidennen luokan hyvän osaamisen kriteerit painottavat enemmän suullista kuin kirjallista kielentämistä, on kirjallinen kielentäminen mainittu muun kielentämisen joukossa.

Kuten yllä olevasta voidaan päätellä, oppilaalta edellytetään matemaattisen kielentämisen taitoa. Taito ei ole pelkästään yhteydessä koulumatematiikkaan, vaan opetuksella pitäisi pyrkiä antamaan oppilaalle valmiuksia toimia myös matematiikkaa vaativissa jokapäiväisissä tilanteissa. Kielentäminen puolestaan on tässä avainasemassa, sillä kuten aikaisemmin olemme todenneet, kielentämisen avulla voidaan jäsentää omia ajatuksia ja reflektoida ympärillä olevaa maailmaa.

4 OPPILAS MATEMATIIKAN OPPIJANA

Aiemmassa tutkimustustassa on käynyt ilmi, että oppilaiden matematiikkakuvat poikkeavat toisistaan. Matematiikkakuvalla näyttäisi olevan vaikutusta matematiikkaan ja sen osa-alueisiin muutoinkin monin eri tavoin. Tutkimuksissa on myös havaittu, että sukupuolten välillä on eroja matematiikassa, kuten sen osaamisessa eri osa-alueilla ja matematiikkakuvissa. Myös äidinkielen eri osa-alueilla on löydetty sukupuolten välisiä eroja. (ks. esim. Huisman 2006, Lappalainen 2003, 2008, Linnakylä, Kupari, Törnroos & Reinikainen 2005, Niemi 2004, 2008.) Edellä mainittujen syiden perusteella onkin tehty oletuksia siitä, että tytöt saattaisivat kokea mieluisammaksi ja hyödyllisemmäksi oman äidinkielen käytön matemaattisia ongelmia ratkaistessa (Joutsenlahti 2010, 73; Linnakylä ym. 2005, 112). Onkin siis oleellista tutkia matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyötyjä ohella myös sitä, onko oppilaan matematiikkakuvalla, osaamisella äidinkielessä ja matematiikassa sekä sukupuolella yhteyttä kirjallisen kielentämisen hyödyn kokemiseen sanallisia tehtäviä ratkaistessa. Seuraavaksi perehdymmekin siihen, mitä matematiikkakuva tarkoittaa sekä tarkastelemme suomalaisten lasten matematiikkakuvia yleisesti ja sukupuolen kannalta aiemman tutkimuksen pohjalta. Lisäksi, aiempaan tutkimustustaan nojaten, tarkastelemme myös sukupuolten välisiä eroja matematiikan osaamisessa sekä hiukan myös äidinkielessä ja kirjoittamisessa.

4.1 Matematiikkakuva

Matematiikkakuva koostuu yksilön subjektiivisista tunteista ja tiedoista, joihin hänen asenteensa ja uskomuksensa sekä käsityksensä matematiikasta ovat liitoksissa (Pietilä 2002, 23). Kaasila, Hannula, Laine ja Pehkonen (2007, 350) jakavat matematiikkakuvan Pehkosen ja Pietilän sekä Op't Eynden, de Corten ja Verschaffelin jaottelujen pohjalta kolmeen komponenttiin:

- 1) uskomukset itsestä matematiikan oppijana ja opettajana
- 2) uskomukset matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta sekä
- 3) uskomukset sosiaalisesta kontekstista, jossa oppiminen ja opettaminen tapahtuvat.

Pietilä (2002, 24) sisällyttää ensimmäiseen, itseään koskevia uskomuksia käsittelevään komponenttiin matematiikkaan liittyvät tavoitteet ja motiivit, tunteet matematiikkaa kohtaan sekä

arvion omista kyvyistä ja taidoista matematiikan opiskelussa. Toisen, matematiikan oppimisen ja opettamisen uskomuksia käsittelevän komponentin hän ajattelee koostuvan käsityksistä ja uskomuksista matematiikan oppimisesta ja opettamisesta sekä siitä, mitä ja minkälaista matematiikka on. (Mts. 24, vrt. Pehkonen 1998, 47–48.) Kolmanteen, sosiaaliseen kontekstiin liittyviä uskomuksia koskevaan, komponenttiin sisältyy uskomukset luokan sosio-matemaattisista normeista sekä uskomukset luokan sosiaalisista normeista, joihin liittyvät oppilaiden ja opettajan roolit ja toiminta (Op 't Eynde, de Corte ja Verschaffel 2002, 28).

Pehkonen (1998, 47) mukaan matematiikkakuvan jakaminen erillisiin osa-alueisiin on keinotekoisia, sillä todellisuudessa monet uskomukset sisältyvät useisiin eri matematiikkakuvan osa-alueisiin. Kuitenkin matematiikkakuvan jakaminen komponentteihin on hänen mielestään perusteltua, sillä se selventää ja auttaa jäsentämään matematiikkakuvaa. (Mts. 47.)

Pietilän (2002, 22) mukaan matematiikkakuvan komponentit koostuvat tiedosta, tunteista, uskomuksista, käsityksistä ja asenteista. Tieto on jaoteltavissa objektiiviseen ja subjektiiviseen tietoon (mts. 20). Objektiivinen tieto on yleisesti hyväksyttyä ja usein se myös perustuu tieteellisiin tutkimuksiin (mts. 20, ks. myös Furinghetti & Pehkonen 2002, 43). Subjektiivinen tieto ei puolestaan ole objektiiviseksi hyväksyttyä, mutta yksilö pitää sitä kuitenkin totena (Furinghetti & Pehkonen 2002, 43). Objektiivinen ja subjektiivinen tieto saattavat joskus olla päällekkäisiä esimerkiksi siinä tapauksessa, että yksilön subjektiivinen tieto hyväksytään yleisesti objektiiviseksi tiedoksi (Pietilä 2002, 20).

Tunteet ovat Pietilän (2002, 21) mukaan sekä positiivisia että negatiivisia tuntemuksia, jotka ilmenevät ja katoavat yleensä suhteellisen nopeasti. Tunteet syntyvät ihmisen tulkitessa tilanteita, mistä johtuen ne saattavat vaihdella suurestikin tilanteesta riippuen. Tunteissa ja tiedoissa on nähtävissä päällekkäisyyttä, sillä yksilöllä voi olla tietoa tunteesta tai tieto saattaa synnyttää erilaisia tunteita. (Mts. 21.)

Uskomukset ovat yksilön henkilökohtaisia näkemyksiä, jotka vaikuttavat hänen toimintaansa, mutta jotka harvemmin ovat kuitenkaan yleisesti hyväksyttyjä objektiivisia tietoja (Pietilä 2002, 22). Pietilän (2002, 22) mukaan uskomukset koostuvat pelkästään subjektiivisesta tiedosta tai sekä subjektiivisesta tiedosta että tunteesta. Pehkonen (1995, 12; ks. myös Furinghetti & Pehkonen 2002, 43) kuitenkin esittää, että uskomukset ovat yksilön vakiintunutta subjektiivista tietoa, joka sisältää myös hänen tunteitaan. Tiedon ja uskomuksen erottaminen toisistaan voi joskus olla vaikeaa, sillä tieto on aina sidoksissa aikaansa ja saattaa siksi muuttua ajan kuluessa (Pehkonen 1998, 50–51). Toisin sanoen aiemmin totena pidetty asia saattaa ajan kuluessa muuttua uskomukseksi tai toisin päin. Käsityksiksi kutsutaan uskomuksia, jotka yksilö itse tiedostaa (Pietilä 2002, 22).

McLeodin mukaan yksilöllä on matematiikkaan liittyviä asenteita. Ne koostuvat melko pysyvistä vaikkakin intensiivisistä tunteista. (Pietilä 2002, 22.) Nämä asenteet ovat osittain päällekkäisiä uskomusten kanssa, sillä molempiin liittyy sekä tunteita että subjektiivista tietoa. Ne kuitenkin eroavat siten, että asenteisiin liittyy selkeästi enemmän tunnetta, kun taas uskomuksiin liittyy enemmän tietoa. Asenteet syntyvät uskomusten perusteella, kun yksilö arvioi onnistumisen tai epäonnistumisen syytä omien uskomustensa pohjalta. (Pietilä 2002, 22.)

Pehkonen (1995, 23) toteaa, että oppilaan matematiikkakuvaan vaikuttavat myös hänen lähiympäristönsä jäsenten matematiikkakuvat. Esimerkiksi se, millaisia matematiikkakuvia yksilön ystävillä, luokkatovereilla, vanhemmilla, sukulaisilla sekä matematiikan opettajalla ja muilla opettajilla on saattaa vaikuttaa oppilaan oman matematiikkakuvan muotoutumiseen (mts. 23). Opettajan onkin siis tiedostettava oma matematiikkakuvansa ja pohdittava, miten se oppilaille ilmenee.

Oppilaan oma matematiikkakuva ohjaa hänen toimintaansa matematiikan opiskelussa. Esimerkiksi oppilaan motivaatio, aiemmat matematiikkakokemukset sekä matematiikan taidot ja tarpeet oppijana vaikuttavat siihen, miten oppilas toimii matemaattisissa yhteyksissä. (Pehkonen 1995, 22). Opiskelukokemukset taasen ovat yhteydessä matematiikassa menestymiseen, itsetuntoon ja itsetyytyväisyyteen. Itsetunto puolestaan vaikuttaa matematiikan opiskeluun ja opiskelun kautta saadut kokemukset matematiikkakuvaan. (Pietilä 2002, 19.)

Suomalaislasten matematiikkakuvista kansallisia tutkimuksia ovat tehneet Opetushallituksen ohella myös yksittäiset tutkijat. Niemi (2004) on tutkinut kuudesluokkalaisten asenteita matematiikka kohtaan vuonna 2000. Tutkimuksessa oppilaat vastasivat kysymyksiin, jotka koskivat heidän käsityksiään itsestä matematiikan oppijana sekä suhtautumista matematiikan oppiainetta ja opiskelua kohtaan (mts. 147). Oppilaiden asenteet matematiikkaa kohtaan olivat jonkin verran myönteisiä. Asteikolla yhdestä viiteen arvo kolme tarkoittaa neutraalia asennetta, kun sen alittavat arvot kielteistä ja ylittävät myönteistä asennetta. Oppilaat uskoivat omaan matematiikan osaamiseensa, sillä summamuuttujan keskiarvoksi tuli 3,48. Myös omaan rooliinsa oppijana oppilaat suhtautuivat myönteisesti ($ka=3,31$), sillä useimmat näkivät olevansa lahjakkaita ja jaksavansa ponnistella oppimisen eteen. Suhtautuminen matematiikkaan oppiaineena oli myös myönteistä ($ka=3,29$). Yleisesti ottaen oppilaat siis kokivat viihtyvänsä matematiikan tunneilla ja pitävänsä matematiikan opiskelusta. Asenne matematiikan hyötymistä kohtaan oli muista poiketen neutraali ($ka=3,01$). (Mts. 147–152.)

Niemi (2008) kartoitti kuudesluokkalaisten asenteita uudelleen vuonna 2007. Hänen tutkimuksensa selvitti oppilaiden matematiikasta pitämistä, käsitystä oppiaineen hyödyllisyydestä sekä oppilaan käsitystä omasta osaamisestaan. Tällä kertaa, aiemmasta tutkimuksesta poiketen,

oppilaat kokivat matematiikan olevan oppiaineena heille hyödyllinen (ka=1,2 asteikolla -2- +2). Myös käsitys omasta osaamisesta oli myönteinen (ka=0,5). Oppiaineesta pitäminen oli kuitenkin neutraalia (ka=0,0). Asennekartoituksen keskiarvoksi tuli 0,5, minkä perusteella näyttää siltä, että oppilaat asennoituvat matematiikkaa kohtaan myönteisesti. Sukupuolten välillä oli kuitenkin hiukan eroja asennoitumisessa, sillä poikien asenneväittämien keskiarvo oli 0,6 ja tyttöjen 0,5. (Mts. 44–45.)

Huisman (2006) tutki vuonna 2006 kolmasluokkalaisten suhtautumista matematiikan opiskeluun. Tulosten mukaan oppilaat suhtautuivat matematiikan opiskeluun myönteisesti (asteikolla 1–4 keskiarvo oli 3,1). Sukupuolten välillä oli nähtävissä hiukan eroja siten, että poikien suhtautuminen oli tyttöjä myönteisempää (tytöt ka= 3,0, pojat ka= 3,1). Edellä mainittujen tutkimustulosten perusteella voimmekin siis todeta, että suomalaisten alakouluikäisten lasten asennoituminen matematiikkaa kohtaa on hiukan myönteistä. Kuitenkin siten, että pojat asennoituvat matematiikkaan jonkin verran tyttöjä myönteisemmin.

4.2 Matematiikka ja sukupuoli

Sukupuolierot matematiikassa ovat herättäneet ja herättävät edelleen kohtalaisen paljon tutkimuksellista huomiota niin kansallisesti kuin kansainvälisesti. Esimerkiksi Opetushallituksen teettämät kansalliset oppimistulosten arvioinnit ja kansainväliset PISA-tutkimukset tarkastelevat oppilaiden taitoja muun muassa sukupuolen näkökulmasta. Yleisen keskustelun perusteella voidaan todeta, että erot matematiikan osaamisessa painottuvat pääsääntöisesti poikien paremmuuteen, vaikka erot ovat kuitenkin pieniä. Lisäksi tutkimukset ovat oppilaiden saavutusten ohella painottuneet ainakin matematiikkaan liittyviin asenteisiin ja valintoihin. (Ks. mm. Meyer & Fennema 1988; Hanna 1996; Grevholm & Hanna 1995; Hannula, Kupari, Pehkonen, Räsänen & Soro 2004, 170; Leder 1992, 597–608; Walkerdine 1998.)

Sukupuolten väliseen tasa-arvoon koulutuksessa on viime vuosikymmeninä kiinnitetty erityishuomiota, ja sitä on kartoitettu kaikissa kansainvälisissä arvioinneissa kuten PISAssa (Linnakylä, Kupari, Törnroos & Reinikainen 2005, 105). Yksi kasvatustavoitteista peruskoulussa onkin sukupuolten välinen tasa-arvo, mistä johtuen opetuksen seurauksena ei sukupuolten välillä tulisi olla eroja osaamisessa eikä asenteissa (Hannula ym. 2004, 170). Kuitenkin muun muassa Meyer ja Fennema (1988, 407) korostavat sitä, että matematiikan osaamisessa ja kinnostuksessa on eroja poikien ja tyttöjen välillä. Erot ovat pieniä alakoulussa, mutta suurenevat jatkuvasti ja ovat voimakkaimmillaan aikuisiässä (Meyer & Fennema 1988, 407). Monissa tutkimuksissa sekä kansallisesti että kansainvälisesti on löydetty eroja sukupuolten välillä (Hannula ym. 2004).

Kansainvälisesti 15-vuotiaiden nuorten oppimistuloksia tarkastellaan ainakin PISA-tutkimuksen perusteella. Tutkimuksessa kartoitetaan lukutaidon, matematiikan, luonnontieteiden ja ongelmanratkaisun taitoja (OECD). Kansallisesti Suomessa oppimistulosten kartoitusta tekee puolestaan Opetushallitus. Seuraavassa tarkastelemme lyhyesti tyttöjen ja poikien välisiä eroja muun muassa oppimistuloksissa ja asenteissa erityisesti matematiikan kohdalla.

Vuoden 2003 PISA-tutkimuksessa on tyttöjen ja poikien välillä havaittu pieniä eroja matematiikan osaamisessa (Linnakylä ym. 2005, 108). Tutkimuksessa tuli ilmi poikien pieni paremmuus tyttöjen suorituspistemääriin verrattuna, sillä sukupuolten välisten keskiarvojen ero oli 7 pistettä (tytöt 541 ja pojat 548 pistettä). Tulos on kuitenkin tilastollisesti merkitsevä. Samassa, vuoden 2003 PISA-tutkimuksessa, on todettu matematiikan osaamisen olevan kaikista vahvimmin yhteydessä ongelmanratkaisuun. (Linnakylä ym. 2005, 108, 112). Näin ollen voisi ajatella poikien suoriutuvan paremmin ongelmanratkaisussa, mutta tulos olikin päinvastainen: tytöt (553 pistettä) osoittivat paremmuutensa poikiin verrattuna 9 pisteellä (Linnakylä ym. 2005, 113). Tämä on mahdollisesti selitettävissä tyttöjen paremmilla tuloksilla lukutaidossa, sillä Linnakylä ja muut (2005, 112) esittävät, että paremmuus lukutaidossa ja positiivisempi asennoituminen kouluun kohtaan saattaisivat edistää tyttöjen tekstitaitoja vaativia ongelmanratkaisukykyjä. Näin ollen voisi ajatella kirjallisen kielentämisen matematiikan sanallisten tehtävien yhteydessä hyödyttävän tyttöjä enemmän kuin poikia. Vastaavasti Niemen (2004) tutkimuksen perusteella voisi olettaa tyttöjen menestyvän paremmin matematiikassa kirjallisen kielentämisen avulla, koska tytöt suoriutuivat tuottamistehtävissä paremmin kuin pojat. Myös Joutsenlahti (2010, 73) esittää ajatuksensa siitä, että tytöt saattaisivat käyttää kirjallista kielentämistä mielellään työvälineenä, sillä se antaisi heidän käyttää luonnollista kieltä matematiikan tehtävien ratkaisussa. Hän perustaa ajattelunsa tutkimustuloksiin, joiden mukaan tytöt ovat lukutaidoltaan, kielentuntemukseltaan ja kirjoitustaidoltaan poikiin verrattuna parempia sekä suhtautuminen äidinkieleen ja sen opiskeluun on tyttöjen osalta positiivisempaa kuin poikien. Ylipäätään monissa kansallisissa tutkimuksissa tulee ilmi, että sukupuolten väliset erot äidinkieleen liittyen ovat tyttöjen hyväksi. Näin on myös kirjoitustaidon, joka on oman tutkimuksemme kannalta olennaisin osa-alue äidinkielestä ja kirjallisuudesta, kohdalla. (Ks. mm. Huisman 2006, Lappalainen 2003, 2008, Linnakylä ym. 2005, Korkeakoski 2001, Metsämuuronen 2006, Niemi 2008.)

Ylipäätään suomalaisnuorten kohdalla osaaminen matematiikassa on tasaista, varsinkin muihin maihin verrattuna, vaikka oppilaiden osaaminen vaihteli huippuosaamisesta heikkoon (Törnroos & Kupari 2005, 15, 22). Kansallisella tasolla vuonna 2007 tehdyssä tutkimuksessa pojat menestyivät tyttöjä yleisesti paremmin lukuun ottamatta geometrian osa-alueetta, jossa tytöt osoittivat paremmuutensa poikiin verrattuna (Niemi 2008, 66). Kuitenkaan tutkimustuloksiin

nojaamalla ei voida sanoa, että pojat olisivat tyttöjä parempia matematiikan taidoiltaan, sillä, poiketen edellä esitetyistä tuloksista, Niemen (2004) kuudesluokkalaisten arviointia koskevassa tutkimuksessa vuonna 2000 tytöt olivat keskimäärin poikia parempia matematiikan osa-alueilla geometriaa lukuun ottamatta. Myöskään Opetushallituksen arvioinnissa 7/2006 tyttöjen ja poikien välillä ei ole eroja matematiikan osaamisessa (Huisman 2006, 51.)

Peruskoulun opetussuunnitelman mukaan matematiikka on osa yleissivistystä ja luo mahdollisuuksia myös näin ollen myös jatkokouluttautumiselle (ks. Törnroos & Kupari 2005, 35). Tähän liittyen Törnroos ja Kupari (2005, 35) esittävät PISA-tutkimuksen tulosten olevan olennaisia, koska ne antavat tietoa matematiikan tietojen ja taitojen linkittymisestä jokapäiväiseen elämään. Monelle oppilaalle ei välttämättä ole itsestään selvyys, että matematiikka on taito, jota tarvitaan luokkahuoneen ulkopuolella. Näin ollen oppilaiden voi olla vaikeaa yhdistää matemaattista käyttötilannetta eli rekisteriä (ks. lukua 3.2.2) koulumaailman ulkopuolelle. Tämä olisikin tärkeä taito, sillä rekisteristä toiseen siirtyminen mahdollistaa tiedon ja taidon soveltamisen ja näin ollen edistää oppimista.

Vaikka päällisin puolin saattaisi vaikuttaa siltä, että poikien ajatellaan olevan parempia matematiikan osaajia kuin tytöt, ei yllä olevien tulosten perusteella kyseistä johtopäätöstä voi kuitenkaan esittää. Sukupuolten sisäiset erot vaihtelevat ja sukupuolten välillä ilmenevät erot ovat pieniä tai saattavat jopa – tutkimuksesta riippuen, osoittaa tyttöjen osaamisen paremmaksi kuin poikien. Tästä johtuen Hannula ym. (2004, 170) esittävätkin sukupuolten osaamiserojen pohtimisen ajanhukaksi. Sen sijaan merkittävämmät erot sukupuolten välillä on havaittavissa asenteissa matematiikkaa kohtaan ja matematiikan valinnoissa (Hannula ym. 2004, 177). Seitsemäsluokkalaisten poikien asenteet matematiikkaa kohtaan ovat myönteisempiä kuin samanikäisten tyttöjen asenteet (Kupari, Reinikainen, Nevanpää & Törnroos 2001, 126). Lisäksi tyttöjen luottamus omiin matemaattisiin kykyihin on heikompi kuin pojilla (Näätänen 2000, 28) ja heillä on alhaisemmat arviot kyvyistään matematiikassa (Hannula ym. 2004, 170). Tämän voidaan ajatella liittyvän Näätäsen (2000, 28) ajatukseen siitä, että matematiikasta kiinnostuneen tytön on vaikea päästä matematiikkaa harrastavaan poikavaltaiseen joukkoon ennen kuin hän on osoittanut olevansa matematiikassa vähintään yhtä hyvä kuin pojat. Myös Soro (2002, 74) on tutkimuksessaan havainnut tyttöjen olevan jossain suhteessa poikia huonommassa asemassa matematiikan suhteen. Hannula ym. (2004, 177–178) esittävät asenteiden todennäköisesti selittävän myös sukupuolten välisiä eroja matematiikan valintojen kohdalla: tyttöjen kiinnostus esimerkiksi matematiikan pitkään oppimäärään lukiossa tai suuntautuminen teknisille aloille eri koulutusasteilla on heikompaa kuin poikien (ks. myös Meyer & Fennema 1988, 407).

Vaikka opetuksen ja opettajan tulisi olla tasapuolista, välittää opettaja tiedostamattaan ennakko-odotuksiaan sekä uskomuksiaan ja toimii eri tavoin eri sukupuolia kohtaan, vaikka tietoisesti sukupuolirooleja ei tuotaisikaan esille (ks. mm. Hannula ym. 2004, 190; Leder 1992, 610–611; Meyer & Fennema 1988, 419). Näin ollen opettajat saattavat tiedostamattaan tuoda käytöksellään esiin sukupuolittuneisuutta ja vahvistaa sukupuoliin liittyviä eroja, mikä puolestaan ilmenee opetuksen kautta oppilaissa. Soron (2002) tutkimus vahvistaa tätä käsitystä, että opettajat saattavat tiedostamattaan vahvistaa sukupuoleen liittyviä eroja. Kuitenkaan opettajaa ei pidä Näätäsen (2000, 23) mukaan syyllistää, koska välitetyt asenteet heijastuvat alun perin yhteiskunnasta asti. Hän uskookin useimpien matematiikan opettajien tekevän parhaansa ollen oikeudenmukaisia ja tekevän sen, minkä näkevät oppilailleen parhaaksi (mts. 21). Opettajan on kuitenkin hyvä tiedostaa mahdollinen vaikutuksensa oppilaisiin, jotta oikeudenmukainen toiminta toteutuisi mahdollisimman hyvin esimerkiksi tarkastelemalla omaa toimintaansa tai varomalla sukupuolittumisen korostamista. Hannulan ym. (2004, 190) mukaan opettajat varovatkin sukupuolierojen esille tuontia, ja oppilaat puolestaan ovat hämmästyneitä, jos heiltä niitä kysytään.

5 TUTKIMUKSEN KULKU

5.1 Tutkimusongelmat

Tutkimuksemme tarkoituksena on selvittää matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyttä sekä oppilaan että opettajan näkökulmasta. Ensimmäisessä pääongelmassamme tutkimme kirjallisen kielentämisen hyötyä ratkaisuvälineenä oppilaan kannalta. Hyötyä tarkastelemme kahdesta näkökulmasta: kielentäjän kokema hyöty itselle ja hyöty kielennyksen seuraajalle. Tarkastelemme myös kielentämisen koettuja hyviä ja huonoja puolia. Tarkoituksenamme on lisäksi tutkia alakysymysten avulla, kokevatko jonkin tietyn tyyppiset oppilaat hyötyvänsä erityisesti kirjallisesta kielentämisestä ratkaisuvälineenä. Tutkimme siis, miten matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyden kokeminen on yhteydessä oppilaan matematiikan osaamiseen, kirjoittamisen loogisuuteen ja mieluisuuteen, hänen käsitykseen itsestä matematiikan osaajana sekä hänen sukupuoleensa ja luokkatasoonsa. Toisessa pääongelmassa tutkimme, hyötyykö opettaja oppilaan matemaattisen ajattelun kirjallisesti kielentämisestä. Tarkastelemme siis, kokevatko opettajat saavansa apua oppilaiden kielentämisestä arviointi- ja opetustyöhönsä.

Tässä tutkimuksessa kirjoittamisen loogisuus koostuu järjestelmällisestä tekstin etenemisestä ja kirjoituksen jäsentämisestä niin, että lukijan on vaivatonta seurata tekstin kulkua. Kirjoitettu teksti on loogista ja etenee johdonmukaisesti, kieli on suhteellisen virheetöntä ja tekstin rakenne, välimerkit sekä oikeinkirjoitussäännöt ovat pääkohdittain ja luokka-asteen oppisisältöjen mukaisesti oikein. Kirjoittamisen loogisuuden kuvauksen muodostimme Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus 2004) vaatimusten ja tavoitteiden pohjalta. Kirjoittamisen mieluisuutta tutkiessamme tutkimme sitä, kuinka paljon oppilaat pitävät kirjoittamisesta.

Ongelmamme on jäsennetty seuraaviksi tutkimuskysymyksiksi:

1. Miten oppilaat hyötyvät matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä?
 - 1.1. Minkälainen yhteys on matematiikan osaamisella ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisella?
 - 1.2. Minkälainen yhteys on oppilaan käsityksellä itsestään matematiikan osaajana ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisella?
 - 1.3. Minkälainen yhteys on kirjoittamisen loogisuudella ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisella?
 - 1.4. Minkälainen yhteys on kirjoittamisen mieluisuus ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisella?
 - 1.5. Minkälainen on mahdollinen ero sukupuolten välillä matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisessa?
 - 1.6. Minkälaisia ovat mahdolliset erot luokkatasojen välillä matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisessa?
2. Miten opettajat hyötyvät oppilaan matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä?

Koska valitsemamme tutkimusnäyte on suhteellisen pieni, emme pyri tutkimuksellamme löytämään yleistettäviä tuloksia vaan lähinnä ymmärtämään tutkimuskohteemme oppilaiden ja opettajien kokemaa hyötyä tutkimastamme ilmiöstä. Tarkoituksenamme on pikemminkin kuvata ja tulkita ja näin ollen selvittää, kannattaako ilmiötä tutkia tarkemmin – mahdollisesti isommalla kohderyhmällä, jolloin tulokset olisivat yleistettävämpiä. Lisäksi lähestymme ilmiötä koulutyöskentelyn näkökulmasta; kannattaako matemaattisen ajattelun kirjallista kielentämistä käyttää oppilaiden kanssa, eli onko siitä oppilaille ja/tai opettajille hyötyä.

5.2 *Tutkimusote*

Empiirinen tutkimuksemme sijoittuu fenomenologis-hermeneuttiseen viitekehykseen, sillä tutkimme ensisijaisesti oppilaiden ja opettajien kokemuksia. Fenomenologia painottaakin nimenomaan kokemuksia ja niiden tulkintaa, ja tämän tulkinnan myötä tutkimuksemme tulee mukaan hermeneuttinen ulottuvuus (ks. Laine 2007, 29, 31). Gupta (2006, 16) esittää, että empiirisessä viitekehyksessä kokemus määrittää käsitystemme, uskomustemme ja teorioittemme kelposuutta maailmasta, sillä kokemus on meidän ensisijainen epistemologinen auktoriteetti ja

opas. Muokkaamme ja parannamme käsityksiämme ja uskomuksiamme kokemustemme perusteella, ja kokemus on viime kädessä se minkä perusteella uskomme jonkin asian olevan niin kuin se on (Gupta 2006, 16). Tietomme maailmasta ja ilmiöistä rakentuu siis kokemuksen varaan.

Tutkimuksemme on kuvailevaa deskriptiivistä tutkimusta, sillä haemme pääasiassa vastausta kysymykseen *miten* apukysymyksien *millainen* avulla. Lähestymme aihettamme sekä kvalitatiivisen että kvantitatiivisen tutkimusotteen mukaisesti, ja toteutamme näin ollen mixed methods -lähestymistapaa. Kyseisessä lähestymistavassa kvantitatiivinen ja kvalitatiivinen tutkimusote tulee ilmi aineiston hankinnassa, analyysissa ja tulkinnessa tai osassa näistä (Tashakkori & Creswell 2007, 4). Omassa tutkimuksessamme mixed methods -lähestymistapa toteutui kaikissa edellä mainituissa kohdissa. Lähestymistapa toteutuu tutkimuksessamme myös triangulaation avulla. Triangulaatiolla tarkoitetaan useiden aineistojen, teorioiden, menetelmien ja/tai tutkijoiden käyttöä tutkimuksessa (Eskola & Suoranta 1998, 69). Tutkimuksessamme triangulaatio näkyy erilaisissa aineistoissa ja menetelmissä. Lisäksi triangulaatio toteutui tutkimuksessamme myös tutkijoiden kohdalla, sillä tutkimuksen toteutti kaksi tutkijaa yhteistyössä.

5.3 Tutkimuksen toteutus

Toteutimme tutkimuksen Kanta-Hämeessä. Tutkimusnäyte koostuu kuudesta luokasta: kahdesta kolmannesta luokasta, kahdesta viidennestä luokasta ja kahdesta seitsemännestä luokasta. Päädyimme näytteen kokoon perustellusti: Jos näyte olisi ollut pienempi, emme olisi saaneet tarpeeksi kattavaa aineistoa. Valitun kokoisella näytteellä saimme kattavan ja riittävän aineiston, joten emme nähneet tarpeelliseksi myöskään suuremman näytteen hankkimista. Lisäksi, koska tutkimuksemme on sekoitus sekä kvalitatiivista että kvantitatiivista tutkimusta, on näytteemme kohtalaisen suuri. Näin ollen keräämämme aineisto on tarpeeksi kattava kvantitatiiviseen analyysiin, mutta vielä analysoitavissa kvalitatiivisesti.

Näytteeseen valittiin luokkia kolmelta eri luokkatasolta, koska yhtenä tutkimuksemme tehtävänä oli vertailla kielentämisen hyödyn kokemista eri luokkatasojen välillä. Lähetimme sähköpostia (liite 6) tutkimuksestamme Kanta-Hämeen alueen kolmannen, viidennen ja seitsemännen luokan opettajille ja kysyimme heidän kiinnostustaan osallistua projektiimme. Tutkimukseemme valikoitui ensimmäisenä kiinnostuksensa ilmaisseet luokat. Pyysimme tutkimusluvan (liite 7) luokkien oppilaiden huoltajilta. Lupien perusteella tutkimukseen osallistui 100 oppilasta, joista kolmannella oli 35, viidennellä 36 ja seitsemännellä 29 oppilasta. Heistä 57

oli poikia ja 43 tyttöjä. Haastateltavia opettajia oli viisi, sillä molempia seitsemänsiä luokkia opetti sama matematiikan opettaja.

5.3.1 Aineiston hankinta

Hankimme aineistoa kvantitatiivisin ja kvalitatiivisin menetelmin: Keräsimme aineistoa suunnitelmallista kysely- ja haastattelu-, eli survey-tutkimusta toteuttaen. Kyselymme oli kontrolloitu kysely, jonka toteutimme informoidun kyselyn periaatteen mukaan (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 1997, 186–186, Uusitalo 1991, 91): olimme itse paikalla jakamassa kysymyslomaketta, jolloin kohderyhmällä oli mahdollisuus kysyä tutkimuksestamme ja lomakkeesta. Teetättämässämme tutkimuslomakkeessa oli sekä vastausvaihtoehdoiltaan suljettuja väitteitä että avoimia kysymyksiä (liite 8). Avoimissa kysymyksissä oppilailla oli mahdollisuus tuoda esiin heidän omia ajatuksiaan vastaukselle jätettyyn tilaan ilman valmista vastausmallia, kun taas väitteemme perustuivat asteikkoihin, jolloin vastausvaihtoehdot oli annettu valmiiksi. Nämä antamamme vastausvaihtoehdot noudattivat järjestysasteikollista sekä moniportaista Likertin asteikkoa, jota käytetään mielipideväittämissä (Heikkilä 1998, 53; Hirsjärvi ym. 1997, 189). Käyttämässämme asteikossa oli viisi porrasta: Täysin eri mieltä (1), Jokseenkin eri mieltä (2), En osaa sanoa (3), Jokseenkin samaa mieltä (4) ja Täysin samaa mieltä (5). Lomakkeessamme käytimme kuitenkin numeroiden tilalla plus- ja miinusmerkkejä (1=--, 2=-, 3=0, 4=+, 5=++), koska ajattelimme, että esimerkiksi kolmasluokkalaisten on näin helpompi hahmottaa vastausvaihtoehdot.

Väittämät koskivat kirjoittamisen mielisuutta, oppilaan matematiikan osaamista ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemista. Avoimet kysymykset koskivat kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemista. Osan käytetyistä väittämistä ja kysymyksistä muodostimme itse, mutta suurin osa oli kuitenkin sellaisia, joita on käytetty aiemmin myös muissa tutkimuksissa kuten Niemen (2004) perusopetuksen oppimistulosten kansallisessa arvioinnissa vuonna 2000 sekä Joutsenlahden (2005, 2010) tutkimuksissa. Olemme myös itse käyttäneet osaa väittämistä aiemmin kandidaatin tutkielmassamme.

Opettajien teemahaastatteluissa selvitettiin opettajien kokemuksia matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä tutkimusongelmien näkökulmista (liite 9). Teemahaastattelu perustuu tiettyyn tiedossa olevaan aiheeseen, vaikka kysymysten tarkka muoto ja järjestys puuttuvat (Hirsjärvi ym. 1997, 197), eli se on näin ollen puolistrukturoitu haastattelumenetelmä (Hirsjärvi & Hurme 2000, 47). Teemahaastattelu myös mahdollistaa samojen aihealueiden käsittelyn kaikkien haastateltavien kanssa, koska se kohdentaa haastattelun aiheen tiettyyn teemaan

tai teemoihin, joista haastattelutilanteessa keskustellaan (Hirsjärvi & Hurme 2000, 47–48). Haastattelun ohella saimme opettajilta heidän tekemät arvioinnit oppilaiden matematiikan osaamisesta ja kirjoittamisen loogisuudesta, eli käytimme tutkimusmateriaalina myös valmista aineistoa. Valmista aineistoa ei kerätä itse vaan sen on tuottanut joku muu, ja niitä ovat muun muassa viralliset tilastot ja tilastorekisterit, tilastotietokannat, arkistojen materiaalit, aikaisempien tutkimusten tuottamat materiaalit sekä muut dokumenttiaineistot (Hirsjärvi ym. 1997, 175–179). Tutkimuksemme valmis aineisto koostui siis opettajien antamista arvioista oppilaiden matematiikan osaamisesta ja kirjoittamisen loogisuudesta. Opettajat arvioivat oppilaansa pääasiassa antamamme neliportaisen asteikon mukaisesti. Asteikon vaihtoehdot olivat erinomainen, hyvä, tyydyttävä ja välttävä. Matematiikan arvioinnit olivat kuitenkin syyslukukauden arviointeja todistuksista. Jos arviointi oli tehty numeerisesti, muutimme sen itse sanalliseen muotoon siten, että numero 5 tarkoitti välttävää, 6–7 tyydyttävää, 8 hyvää ja 9–10 erinomaista. Kirjoittamisen loogisuutta ei arvioida todistukseen, vaan se on osa äidinkielen kokonaisuutta, minkä vuoksi opettajilla ei ollut siitä valmista arviointia. Opettajat arvioivatkin oppilaidensa kirjoittamisen loogisuuden antamamme määritelmän (ks. lukua 5.1) mukaisesti ja käyttivät arvioinnin perusteena määrittämäämme neliportaista asteikkoa. Seitsemäsluokkalaisten kirjoittamisen loogisuuden arvioinnit saimme kyseisten luokkien omilta äidinkielen opettajilta, koska yläkoulun puolella opettajat ovat aineenopettajia eikä tutkimukseemme osallistunut opettaja näin ollen opeta kyseisille luokilla äidinkieltä.

Koska matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen ei ollut oppilaille eikä myöskään opettajille ennestään tuttu työskentelytapa, täytyi meidän tutustuttaa heidät siihen, jotta he pystyivät osallistumaan tutkimukseemme. Toisaalta oli myös hyvä, että kirjallinen kielentäminen ei ollut luokilla käytössä, koska jos lapset olisivat käyttäneet sitä aiemmin, he eivät olisi luultavasti pystyneet arvioimaan sen hyödyllisyyttä verrattuna muihin työskentelytapoihin samalla tavalla kuin nyt toteuttamassamme tutkimuksessa. Lisäksi, kun oppilailla ei ollut aiemmin käsitystä matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä, he hankkivat sen opetusjaksomme aikana. Kaikilla luokilla oli käytetty aiemmin jonkin verran suullista kielentämistä. Mielestämme tämä oli hyvä, sillä oppilailla oli jo jonkinlainen käsitys matemaattisten ongelmien ilmaisemisesta oman luonnollisen kielen avulla.

Kaikki tutkimukseen osallistuneet luokat ja niiden opettajat tutustuivat kirjalliseen kielentämiseen pitämiemme kahden oppitunnin avulla. Osalle luokista pidimme kaksi erillistä oppituntia ja osalle yhden kaksoistunnin. Ensimmäisten tuntien alussa ratkaisimme oppilaiden kanssa yhdessä kaksi matematiikan sanallista tehtävää (esimerkkitehtävät liitteessä 10) kirjallisen kielentämisen avulla. Oppilaille ei kerrottu Joutsenlahden luomien mallien nimiä (ks. lukua 3.3.2),

vaan ratkaisimme heidän kanssa yhdessä tehtävät kertomusmallin ja tiekarttamallin mukaisesti. Painotimme, että ei ole olemassa yhtä tai edes kahta oikeaa tapaa ratkaista kirjallista kielentämistä apuna käyttäen vaan jokainen voi kielentää tavalla, joka itsestä tuntuu parhaalta. Esimerkkitehtävien jälkeen oppilaat ratkaisivat itsenäisesti sanallisia tehtäviä kirjallisen kielentämisen avulla. Opastimme heitä tarvittaessa. Pitämiemme oppituntien jälkeen projekti eteni siten, että oppilaat kielensivät opettajan ohjauksella muutaman tehtävän viikossa vajaan kuukauden ajan. Oppilaiden loppujakson aikana kielentämät tehtävät olivat sekä heidän oman oppikirjansa tehtäviä että meidän tekemiä tehtäviä.

Päädyimme tekemään itse tehtäviä oppilaille, koska mielestämme oppikirjan tehtävät ovat usein tarinallisesti kovin suppeita eivätkä siten ohjaa kielentämiseen. Joutsenlahtikin (2009, 72) sanoo, että oppikirjojen sanalliset tehtävät ohjaavat usein oppilaita käyttämään ratkaisuisia pelkästään matematiikan symbolikieltä. Tällöin käytössä oleva kielen rekisteri on sellainen, joka hyödyntää varsin suppeasti matemaattisen kielen eri tyyppisiä. Onkin oletettavaa, että rikas luonnollisen kielen ja matematiikkaan liittyvän luonnollisen kielen käyttö ohjaisivat oppilaita käyttämään sanallista kieltä ja kuvioita tehtävien ratkaisuisissa. Tällöin oppilas toimisi rekisterissä, jossa käytetään kattavasti kaikkia matemaattisen kielen tyyppisiä. Oppilaidenhan tulisi koulussa oppia käyttämään kaikkia matemaattisen kielen tyyppisiä, sillä niiden avulla hän voi oppia uusia asioita, ratkaista matemaattisia ongelmia sekä keskustella matematiikasta ja esittää muille omaa matemaattista ajatteluaan (ks. lukua 3.3). Edellä mainittujen asioiden perusteella uskommekin runsaan luonnollisen kielen käytön tehtävänannossa helpottavan oppilaan kielentämisprosessia ja lisäävän motivaatiota tehtävän ratkaisemista kohtaan. Tästä syystä teimme kielentämisjaksoa varten tarinamaisia sanallisia tehtäviä, jotka olivat vähintään kaksi vaiheisia. Osassa tehtävistä oli myös ylimääräistä tietoa. Liitteessä 11 on nähtävissä muutamia esimerkkejä tekemistämme tehtävistä, joita oppilaat ratkoivat matemaattisen ajattelun kirjallista kielentämistä hyödyntäen.

Kielentämisjakso ajoittui helmikuulle 2010. Toteutimme sen ennen aineiston keräämistä, jotta oppilaille ja myös opettajilla olisi käsitys ja kokemus matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä ja sen hyödyllisyydestä. Kyselyt toteutettiin helmikuussa 2010 ja haastattelut helmi- ja maaliskuun 2010 aikana.

5.3.2 Aineiston analyysi

Analysoimme aineistoa sekä kvantitatiivisin että kvalitatiivisin menetelmin: kvantitatiivisesti SPSS-ohjelman avulla ja kvalitatiivisesti teemoittelemalla saamiemme vastauksien sisältöjä sekä analysoimalla ja tulkitsemalla niitä. Perustamme kvalitatiivisen analyysimme siis teemoitteluun

tuomalla esiin teemahaastattelun ja avointen kysymysten vastauksista syitä matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemiseen. Tematisoinnin avulla nostamme esiin perustelut, miksi kirjallinen kielentäminen koetaan hyödylliseksi tai miksi sitä ei koeta hyödylliseksi, sekä ylipäättään sen hyvät ja huonot puolet. Lisäksi analysoimme opettajien näkökulmaa siitä, miten he kokevat oppilaan kirjallisen kielentämisen mahdollisesti auttavan heitä omassa työssään.

Kvantitatiivisessa analyysissä muodostimme aluksi oppilaiden kyselylomakkeiden vastauksista summamuuttujat, jotka koskivat omaa käsitystä omista matematiikan taidoista ja omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisyydestä. Jälkimmäisen summamuuttujan oli aluksi tarkoitus käsitellä matemaattisen ajattelun kirjallista kielentämistä, mutta koska oppilaat kokivat kuvan piirtämisen hyödyttävän heitä eri tavalla kuin omin sanoin kirjoittamisen, tutkimme kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisen kohdalla kuvan piirtämisen sekä omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisyyttä erillisinä. Omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisyydestä muodostettu summamuuttujan avulla tarkastelemme nimenomaan oppilaan mahdollisesti kokemaa hyötyä omin sanoin kirjoittamisesta.

Testasimme molempien summamuuttujien reliabiliteetit Cronbachin alfa -testillä, jolla varmistimme, etteivät saamamme tulokset ole sattumanvaraisia (alfa > .7). Ensimmäisen summamuuttujan minäkuva matematiikassa, alfan arvo on .89. Yhdistimme siihen kyselylomakkeemme väittämät:

- ”Mielestäni olen hyvä matematiikassa.”
- ”Minulla on usein onnistumisen kokemuksia opiskellessani matematiikkaa.”
- ”Pystyn selviytymään vaikeistakin matematiikan tehtävistä.”
- ”Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin useimmille muille.”
- ”Minä en ole kovin hyvä matematiikassa.”
- ”Epäonnistun usein matematiikassa.”

Väittämät ”Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin useimmille muille.”, ”Minä en ole kovin hyvä matematiikassa.” ja ”Epäonnistun usein matematiikassa.” käänsimme väittämiksi ”Matematiikka ei ole minulle vaikeampaa kuin useimmille muille.”, ”Minä olen melko hyvä matematiikassa.” ja ”En epäonnistu usein matematiikassa.”.

Summamuuttujaan omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisyydestä sisällytimme väittämät

- ”Minun mielestäni sanallisten tehtävien ratkaisemisessa kannattaisi kirjoittaa perusteluja näkyviin laskutoimitusten ohien.”

- ”Matematiikan tehtävän selittäminen omin sanoin auttaa minua tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa.”
- ”Ratkaisen tehtävän mieluiten siten, että kirjoitan omin sanoin, mitä lasken.”
- ”Minusta omin sanoin kirjoittaminen sanallista tehtävää ratkaistaessa on turhaa.”
- ”Aion jatkossakin kirjoittaa omin sanoin matematiikan opiskelussa.”
- ”Omin sanoin kirjoittaminen auttaa muita ymmärtämään, miten olen tehtävän tehnyt.”
- ”Pidän omin sanoin kirjoittamisesta sanallista tehtävää ratkaistessa.”,

joista väittämä ”Minusta omin sanoin kirjoittaminen sanallista tehtävää ratkaistessa on turhaa.” käännettiin muotoon ”Minusta omin sanoin kirjoittaminen sanallista tehtävää ratkaistessa ei ole turhaa.”. Myös tämä summamuuttuja on reliabeli, sillä sen Cronbachin alfan arvo on .85.

Tutkimme ensimmäistä pääongelmaamme ja osaa sen alakysymyksistä sekä kvantitatiivisesti että kvalitatiivisesti. Ensimmäisen pääongelmamme kvantitatiivista analyysia syvensimme oppilaiden ja opettajien näkemysten pohjalta. Tarkastelimme siis oppilaiden matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyn kokemista avointen kysymysten avulla. Tämän lisäksi analysoimme myös teemahaastattelussa ilmi tulleita opettajien näkemyksiä kirjallisesta kielentämisestä ja siitä, miten hyödyllisenä työtapana opettajat sen omilla oppilailtaan näkevät. Kyselylomakkeiden väittämien vastauksia käytimme myös tutkiessamme ensimmäisen pääongelman alaongelmia kvantitatiivisesti. Neljää ensimmäistä alaongelmaamme tutkimme Spearmanin korrelaation keinoin, koska sen avulla saadaan selville muuttujien välisiä yhteyksiä. Viidennessä alaongelmassamme käytimme Mann-Whitney U-testiä, koska se tuottaa tietoa kahden ryhmän välisistä eroista tutkittavassa ilmiössä. Kuudennessa alaongelmassamme käytimme taasen Kruskal-Wallis testin, koska sitä käytetään tutkittaessa useamman kuin kahden ryhmän välisiä eroja tutkittavassa muuttujassa. Käyttämämme kvantitatiiviset testit ovat epäparametrisia, sillä aineistomme ei noudata normaalijakaumaa. Ensimmäistä, kolmatta ja viidettä alaongelmaamme tarkastelimme myös kvalitatiivisesti opettajien haastatteluiden perusteella. Toista pääongelmaamme tutkimme vain kvalitatiivisesti opettajien haastatteluiden pohjalta.

6 TULOKSET

Näytteemme koostuu yhteensä kuudesta luokasta. Kolmelta eri luokka-asteelta tutkimukseemme osallistui siis kultakin kaksi luokkaa: kaksi kolmatta, kaksi viidettä ja kaksi seitsemättä luokkaa. Yhteensä oppilaita on kaikilla luokilla 100 ja heistä 43 on tyttöjä ja 57 poikia. Kolmansilla luokilla oppilaita on yhteensä 35, viidensillä luokilla 36 ja seitsemänsillä luokilla 29. Taulukossa 1 on havainnollistettu jakautuma vielä tarkemmin.

TAULUKKO 1. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden jakautuminen sukupuolittain ja luokittain (n=100).

		Sukupuoli		Yhteensä
		Tyttö	Poika	
Luokka	3. luokka	19%	16%	35%
	5. luokka	13%	23%	36%
	7. luokka	11%	18%	29%
	Yhteensä	43%	57%	100%

Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden matematiikan osaaminen (taulukko 2) näyttäisi yleisesti ottaen olevan vähintään hyvän tasoista, sillä matematiikan osaamisen keskiarvo arviointiasteikolla 1–4 on 3,03, mediaani 3. Yleisimmät arvosanat ovat hyvä (3) ja erinomainen (4), joita molempia on 35 prosenttia eli yhteensä 70 prosenttia oppilaista on saanut hyvän tai erinomaisen arvosanan. Tyydyttävien arvosanojen osuus on 28 prosenttia ja välttäviä on vain 2 prosenttia. Matematiikan osaamisen jakauma on kallellaan hyvän osaamisen suuntaan. Tulosten perusteella näyttäisi myös siltä, että pojat ovat hiukan tyttöjä parempia, sillä 72 prosenttia pojista ja 67 prosenttia tytöistä ovat matematiikan taidoissa hyvän tai erinomaisen tasoisia.

TAULUKKO 2. Matematiikan osaaminen (n=100).

		Sukupuoli		Yhteensä
		Tyttö	Poika	
Matematiikan osaaminen (n=100)	Välttävä	1%	1%	2%
	Tyydyttävä	13%	15%	28%
	Hyvä	15%	20%	35%
	Erinomainen	14%	21%	35%
Yhteensä		43%	57%	100%

Matematiikan osaaminen näkyy oppilaiden käsityksissä itsestään matematiikan osaajana, sillä nämä kaksi muuttujaa korreloivat tilastollisesti merkitsevästi keskenään ($p=.000$). Niiden varianssista on yhteistä 33,6 prosenttia eli niillä on yhteistä vaihtelua 33,6 prosenttia. Hyvillä matematiikan osaajilla on todenmukainen käsitys itsestään matematiikan osaajana, sillä mitä parempi oppilas on matematiikassa, sen positiivisempi minäkuva hänellä on matematiikan osaajana ($r=.580$). Vaikka 23 prosenttia vastaajista ovat epätietoisia omasta osaamisestaan matematiikassa, pääsääntöisesti näytteemme oppilaiden käsitykset itsestään matematiikan osaajana ovat positiivisia: 67 prosenttia omaa positiivisen minäkuvan matematiikan osaajana, kun vain kymmenesosa ei näe itseään hyvänä matematiikan osaajana. On kuitenkin havaittavissa, että käsitykset itsestä matematiikan osaajana poikkeavat tyttöjen ja poikien välillä. Kun tytöistä 47 prosenttia ajattelee olevansa vähintään hyvän tasoisia osaajia ja 23 prosenttia heikkoja osaajia, pojista 82 prosenttia ajattelee olevansa vähintään hyvän tasoisia osaajia, eikä yksikään pojista näe itseään heikkona osaajana. 30 prosenttia tytöistä ja 18 prosenttia pojista eivät osaa kuvata omaa matemaattista minäkäsitystään.

Myös kirjoittamisen loogisuus on yleisesti ottaen näytteemme oppilaiden joukossa hyvää. Arviointiasteikolla 1–4 keskiarvo on 2,90, mediaani 3 ja moodi 3. Yksi neljäsosa oppilaista on saanut erinomaisen kirjoittamisen loogisuudesta, kun hyvän tason omaa 43 prosenttia oppilaista. 29 prosenttia on tyydyttävällä tasolla ja välttäviä on vain 3 prosenttia. Kuitenkin myös kirjoittamisen loogisuudessa on nähtävissä selkeitä eroja sukupuolten välillä siten, että tytöt ovat siinä poikia parempia. Vähintään hyvälle tasolle ylittää loogisessa kirjoittamisessa 91 prosenttia tytöistä ja 51 prosenttia pojista. Tyydyttävän tasoisia kirjoittajia tytöistä on 9 prosenttia, kun tyydyttävän arvion on saanut 44 prosenttia pojista. Välttäviä kirjoittajia tytöissä ei ole ollenkaan, kun pojista heitä on 5 prosenttia.

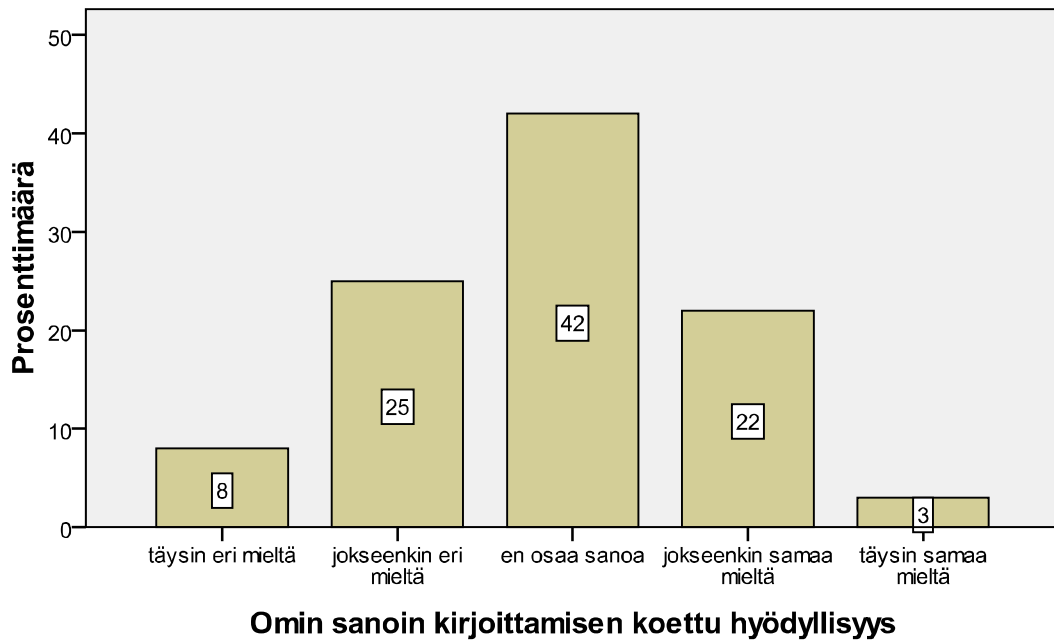
Kirjoittamisen mielisuutta tarkastelimme väittämän: ”Pidän kirjoittamisesta.” mukaan. Vastausvaihtoehdot noudattivat aikaisemmin esittelemäämme Likertin asteikkoa ja tällä asteikolla 1–5, keskiarvo on 3,47, mediaani 4 ja moodi 4. Viidesosa vastaajista ei osannut ilmaista kantaansa, pitääkö vai eikö pidä kirjoittamisesta. Yhteensä 57 prosenttia kuitenkin pitää kirjoittamisesta vähintään jonkin verran, kun 17 prosenttia vastaajista ei juuri pidä kirjoittamisesta, ja vain 6 prosenttia oppilaista suhtautuu kirjoittamiseen kielteisesti. Kuten kirjoittamisen loogisuudessa myös kirjoittamisen mielisuudessa on eroja sukupuolten välillä. Tytöistä 70 kokee kirjoittamisen mielekkääksi, kun pojista näin kokee vain 47 prosenttia. Kirjoittamista ei koe mieluisaksi 12 prosenttia tytöistä eikä 32 prosenttia pojista pidä kirjoittamisesta.

Tutkimusnäytteessämme sukupuolten väliset erot oppilaiden matematiikan osaamisessa, käsityksessä itsestä matematiikan osaajana, kirjoittamisen loogisuudessa ja kirjoittamisen mielisuudessa ovat pitkälti samanlaisia, kuin mitä aiemmissa kansallisissa ja kansainvälisissä tutkimuksissa on kartoitettu (Ks. mm. Huisman 2006; Lappalainen 2003; 2008; Linnakylä ym. 2005; Korkeakoski 2001; Metsämuuronen 2006; Niemi 2004, 2008).

6.1 Miten oppilaat hyötyvät matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä?

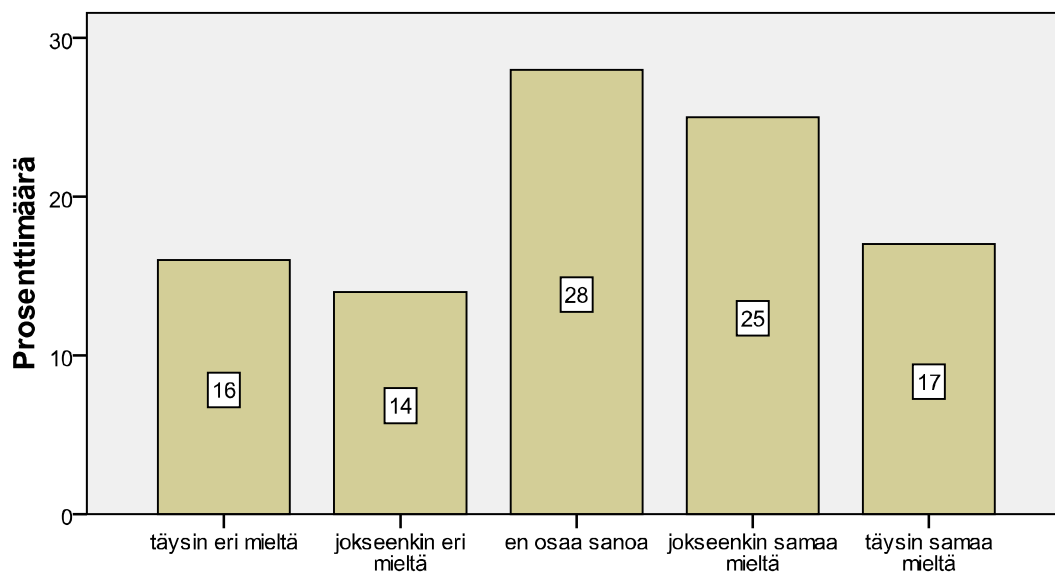
Tarkastelimme matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyttä sen kahden eri osa-alueen avulla: omin sanoin kirjoittamisen ja kuvan piirtämisen. Toisin sanoen tutkimme, hyötyvätkö oppilaat luonnollisen kielen, matematiikkaan liittyvän luonnollisen kielen ja/tai kuviokielen käyttämisestä matematiikan sanallisia tehtäviä ratkaistessaan (esimerkki tehtäviä oppilaiden kielennyksistä liitteissä 2, 3, 4, 5 ja 12 sekä tehtävistä liitteissä 10, 11 ja 12). Tarkastelemme ongelmaa ensin oppilaiden kokemuksen näkökulmasta ja sitten kielennyksen seuraajan näkökulmasta.

Omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisyydestä tekemämme summamuuttujan mukaan neljännes oppilaista kokee hyötyvänsä siitä ratkaistessaan sanallisia tehtäviä. Yhtä iso osa oppilaista ei juuri koe hyötyvänsä omin sanoin kirjoittamisesta, ja oppilaita, jotka eivät koe hyötyvänsä kirjoittamisesta ollenkaan on 8 prosenttia. Muuttujaan on yleisimmin vastattu vaihtoehto 3, sillä 42 prosenttia oppilaista ei osannut ilmaista mielipidettään. Kuvio 5 havainnollistaa vastausten jakautumista omin sanoin kirjoittamisessa koetun hyödyllisyyden kohdalla. Omin sanoin kirjoittamisen hyödylliseksi kokemisen summamuuttujan keskiarvo on 2,87 ja mediaani 3.



KUVIO 5. Omin sanoin kirjoittamisen koettu hyödyllisyys (n=100)

Kuvan piirtämisen hyödyllisyyttä ratkaisuvälineenä tarkastelimme väittämän ”Kuvan piirtäminen auttaa minua tehtävän ratkaisemisessa.” mukaan. Vastausten jakautuminen on esitetty pylväsdiagrammina kuviossa 6. Tulosten perusteella voimme sanoa, että kuvan piirtäminen auttaa oppilaita enemmän kuin omin sanoin kirjoittaminen, sillä 42 prosenttia kokee hyötyvänsä kuvan piirtämisestä ainakin jonkin verran. 14 prosenttia oli väittämän kanssa jokseenkin eri mieltä, kun 16 prosenttia ei koe hyötyvänsä kuvan piirtämisestä yhtään. Vastausten keskiarvoksi muodostui 3,13 ja yleisin vastaus on 3, mikä näkyy siinä, että 28 prosenttia oppilaista ei osannut sanoa, auttaako kuvan piirtäminen heitä. Myös mediaani oli 3.



Kuvan piirtäminen auttaa minua tehtävän ratkaisemisessa.

KUVIO 6. Kuvan piirtämisen koettu hyödyllisyys (n=100)

Tarkastelimme omin sanoin kirjoittamisen ja kuvan piirtämisen hyötyjä ratkaisuvälineenä myös kyselylomakkeemme avointen kysymysten pohjalta. Kysyimme oppilaita, auttaako omin sanoin kirjoittaminen heitä. Tulokset poikkesivat hieman väittämien perusteella saamastamme tiedosta. Ensinnäkin vain 3 prosenttia oppilaista ei ole osannut vastata, auttoiko kirjoittaminen heitä. Muut vastaukset ryhmittelimme kahteen kategoriaan: auttoi ja ei auttanut. Ensimmäinen ryhmä sisältää myös vastaukset, joiden mukaan omin sanoin kirjoittaminen auttaa vastaajaa joskus. Yhteensä 56 prosenttia oppilaista kokee omin sanoin kirjoittamisen auttavan heitä, kun 41 prosenttia näkee, ettei omin sanoin kirjoittamisesta ole heille hyötyä. Myös piirtämisen osalta tulokset ovat poikkeavia. Jälleen oppilaita, jotka eivät tiedä kantaansa on vähän (4 %). Oppilaita, jotka kokevat piirtämisen auttavan heitä, oli 77 prosenttia. 19 prosenttia oppilaista piirtäminen ei näytä tuloksemme mukaan auttavan.

Tarkastelemme hyötyä kielennyksen seuraajalle väitteen ”Omin sanoin kirjoittaminen auttaa muita ymmärtämään, miten olen tehtävän tehnyt.” avulla. 32 prosenttia vastaajista ei osaa ilmaista kantaansa väittämään. 21 prosenttia oppilaista ei näe kirjallisesti kielennetyn esityksen juuri tai ollenkaan hyödyttävän ratkaisuprosessin tarkastelijoita. Heidän mielestään siis luonnollisella, matematiikkaan liittyvällä luonnollisella tai kuviokielellä esitetty sanallisen tehtävän ratkaisu ei auta toisia ymmärtämään ratkaisua ja sen etenemistä juurikaan paremmin kuin pelkällä symbolikielellä esitetty ratkaisu. Kuitenkin lähes puolet, 47 prosenttia oppilaista on sitä mieltä, että

kielennetty esitys auttaa heitä ymmärtämään toisen tekemää ratkaisuprosessia paremmin kuin pelkkä symbolikielinen esitys.

Tarkastelemme laatimiemme avointen kysymysten avulla niitä tekijöitä, jotka vaikuttavat matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyteen ratkaisuvälineenä. Tarkastelemme tässä yhteydessä myös osittain hyödyllisyyteen liittyviä kirjallisen kielentämisen hyviä ja huonoja puolia. Oppilaat, jotka kokevat omin sanoin kirjoittamisen hyödyttävän heitä edes joskus, perustelivat kokemaansa hyödyllisyyttä eri tavoin. Suurimmaksi syyksi nousi, että omin sanoin kirjoittaminen auttaa heitä ymmärtämään paremmin sanallista tehtävää ja sen ratkaisuprosessin etenemistä. Lähes puolet vastaajista on tätä mieltä. Muita harvemmin mainittuja syitä omin sanoin kirjoittamisen hyödyille ovat matemaattisten taitojen kehittyminen ja omien virheiden huomaaminen helpommin. Eräs poika kolmannelta luokalta toteaa: *”Omin sanoin kirjoittaminen auttaa esim. jos on pistänyt plussan, mutta ensin on pistänyt sen omin sanoin ylös. Tarkistan huomaamatta, että olen pistänyt plussan vaikka on pitänyt pistää miinus.”* Monet oppilaat kokevat, että omin sanoin kirjoittaminen auttaa heitä nimenomaan vaikeiden tehtävien kohdalla: *”Kyllä ja ei joissakin tehtävissä auttoi ja joissakin ei. Yleensä auttoi vaikeissa laskuissa, mutta kun tuli helppo tehtävä, se oli turhauttavaa.”* (Poika 5. luokka). Lisäksi omin sanoin kirjoittamisen koetaan auttavan päättelmissä: vaikean tehtävän kohdalla ratkaisuprosessin hahmottaminen voi olla hankalaa, jolloin kirjallinen kielentäminen auttaa oivaltamaan prosessin kulkua.

Kirjallisen kielentämisen hyödyn lisäksi tehtävän parempi ymmärtäminen nähdään myös yhtenä työtavan hyvänä puolena: *”Omin sanoin kirjoittamisessa on se hyvä puoli että tajuan itse paremmin.”* (Poika 3. lk, eri kuin aiemmin) Muina hyvinä puolina omin sanoin kirjoittamisessa oppilaat näkevät sen, että pysyvä omin sanoin kielennetty esitys auttaa muita oppilaita ja opettajaa ymmärtämään, mitä oppilas on tehnyt: *”Se että muut ymmärtää tehtävän [tehtävän] miten sen on tehnyt.”* (Poika 3. luokka, eri kuin aiemmin). Myös oppilas itse voi myöhemmin palata tarkastelemaan ratkaisuaan ja ymmärtää, mitä on laskenut. Tällä työtavalla oppilas oppii myös kertomaan paremmin omasta ratkaisuprosessistaan, ja ymmärtämisen lisäksi muistamaan opitun asian. Esiin nousi hyvänä puolena myös kirjoitustaitojen paraneminen. Osa oppilaista pitää työtappaa myös hauskana menetelmänä, osittain esimerkiksi sen takia, että ei ole yhtä ainoaa tapaa ratkaista tehtävää, kun käytetään luonnollista kieltä. Lähes kaksi kolmasosaa kokee kirjallisen kielentämisen hyvänä puolena tehtävän paremman ymmärtämisen ja työtavan antavan avun laskemiseen. Muita edellä kerrottuja hyviä puolia ei ole mainittu yhtä usein, vaikka ne vastauksista ilmi tulivatkin.

Suurin syy, miksi omin sanoin kirjoittamisen ei koettu auttavan, on sen tarpeettomuus. Näin vastasi lähes yksi viidesosa oppilaista ja monet tähän oppilasryhmään kuuluvat vastaajat kertovat olevansa niin hyviä matematiikassa tai osaavansa muutenkin ratkaista matematiikan tehtäviä, että eivät siksi sitä tarvitse. Toiset taas kokevat olevansa matematiikassa niin heikkoja, että eivät näe omin sanoin kirjoittamisen auttavan heitä nimenomaan sen vuoksi, että he kokevat matematiikan muutenkin niin vaikeana: *”Ei auta, koska harvemmin edes tajuan mitä tehtävässä pitäisi tehdä, enkä osaisi omin sanoin kertoa miten se tehtävä lasketaan.”* (Tyttö 7. luokka). Osa oppilaista sanoo omin sanoin kirjoittamisen vievän keskittymisen pois laskemisesta ja näin ollen sekoittavan heitä. Lisäksi toisille omin sanoin kirjoittaminen on vaikeaa, koska he eivät keksi, mitä heidän pitäisi kirjoittaa. Näin ollen ratkaisuprosessin pääpaino on tällöin laskemisen sijaan kirjoittamisessa. Myös työtavan työläys ja aikaa vievyys nähdään sen huonoina puolina.

Oppilaat, jotka kokevat piirtämisen auttavan heitä matematiikan sanallisen tehtävän ratkaisussa, näkevät useita perusteita sen käyttämisessä. Suurimmaksi syyksi nousee jälleen tehtävän ymmärtäminen, ja näin onkin vastannut yli puolet. Oppilaat siis kokevat ymmärtävänsä tehtävän ja sen kulun paremmin, kun voivat käyttää kuvaa apuna. Osa oppilaista on kuitenkin sitä mieltä, että piirtäminen auttaa heitä vain vaikeissa tehtävissä, ja jotkut kokevat kuvan selkeyttävän laskemista. Joidenkin oppilaiden mielestä kuvan piirtäminen matematiikan tehtävää ratkaistessa kehittää heidän matemaattisia taitojaan sekä auttaa oppimaan ja muistamaan opitun paremmin. Lisäksi kuva auttaa tehtävän tarkistamisessa, sillä se auttaa havaitsemaan mahdollisia virheitä omasta laskusta helpommin.

Vaikka noin viidesosa oppilaista ilmoittaa, ettei kuvan piirtäminen auta heitä matematiikassa, syitä tähän oli verrattain niukasti. Suurin osa näistä oppilaista pitää piirtämistä turhana, koska he kokevat osaavansa ratkaista matematiikan tehtäviä muutenkin. Muutama on sitä mieltä, että kuvan piirtäminen vain sekoittaa heidän laskemistaan. Lisäksi usea oppilas näkee, että kuvan piirtäminen on työlästä ja vie paljon aikaa. Moni oppilas ei kuitenkaan ollut eritellyt syitä, vaikka olivatkin vastanneet, ettei kuvan piirtäminen auta heitä.

Matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen ja sen sanallinen sekä kuvallinen muoto jakavat oppilaiden mielipiteitä. Yleisesti ottaen voimme todeta, että piirtäminen koetaan hyödyllisemmäksi kuin kirjoittaminen. Vaikka jotkut oppilaat kokevat hyötyvänsä vain toisesta kirjallisen kielentämisen muodosta, osa oppilaista kuitenkin hyötyy molemmista. Joitain oppilaita taasen ei kumpikaan muoto näytä auttavan. Osasta vastauksista käy siitä huolimatta ilmi, että oppilaat, jotka eivät koe matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyttävän heitä itseään, näkevät että siitä saattaa olla apua joillekin muille.

Haastatellessamme opettajia emme erotelleet matemaattisen ajattelun kirjallista kielentämistä piirtämiseen ja omin sanoin kirjoittamiseen, vaan puhuimme ainoastaan kirjallisesta kielentämisestä. Jotkut opettajat saattoivat ottaa piirtämisen erikseen esiin, mutta siinä tapauksessa he viittasivat sen hyödyllisyyteen työskentelyn apuvälineenä. Heidän kokemansa huonot puolet kirjallisessa kielentämisessä tuntuivatkin koskevan vain omin sanoin kirjoittamista, sillä he näkevät omin sanoin kirjoittamisen ja tehtävän vaiheistamisen olevan joskus turhaa, sillä oppilaat osaavat usein tehdä tehtävät muutenkin. Lisäksi työtapana on hidas ja sanallisen esityksen tekemiseen menee aikaa. Näin ollen sen käyttäminen ei aina opettajien mielestä ole perusteltua. Joillekin oppilaille kirjoittaminen saattaa myös tuottaa vaikeuksia, jolloin kirjoittaminen ja sanallinen muotoilu vievät oppilaan huomion ratkaisuprosessista kirjoittamiseen.

Yleisesti opettajat näkevät matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisenä työskentelymuotona. Se antaa oppilaalle monipuolista harjoitusta ja jäsentää sekä kehittää ajattelua, ja näin ollen antaa uusia keinoja lähestyä matemaattisia ongelmia sekä tuo esille uusia ratkaisutapoja. Vaiheittain eteneminen voi myös madaltaa kynnystä lähteä liikkeelle ongelmanratkaisuprosessissa silloin, kun oppilas ei välttämättä heti hahmotakaan laskun etenemistä. Tällöin oppilas voi siis edetä tehtävässä vaihe kerrallaan, ja mahdollisesti oivaltaa matkan varrella, mitä seuraavaksi pitää tehdä. Kirjallisen kielentämisen kanssa pääpaino onkin ratkaisuprosessissa ja sen vaiheittaisuudessa, jolloin vastauksella ei ole niin suurta merkitystä. Toisin sanoen kun oppilaan täytyy edetä prosessissa vaiheittain, eikä ole väliä, tietääkö oppilas tehtävän vastauksen laskua aloittaessaan. Tehtävän osiin jakaminen ja vaiheistaminen auttavat myös hahmottamaan tehtävää kokonaisuutena. Näin asiaan pystyy paneutumaan paremmin ja tehtävää voi pohtia syvällisemmin. Tämän ansioista huolimattomuusvirheet vähenevät, kun täytyy pysähtyä tarkastelemaan tehtävänantoa ja ratkaisuprosessia. Eräs opettaja kuvailee kirjallisen kielentämisen hyviä ja huonoja puolia näin:

Mun mielestä se [matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen] oli hyvän tuntunen tapa niinkun ohjata oppilaita siihen, että mietitään vaiheittain, koska hirveen useinhan ne lähtee liikkeelle siitä, että ne aattelee, että niiden pitää heti löytää se täydellinen laskukaava, millä ne laskee koko laskun viiden eri vaiheen kautta. Ja kun ne ei sitä pysty keksimään, niin sit ne ei pääse liikkeelle ollenkaan. Eli tavallaan toi, mitä teen ensin, lasken sen, mitä teen sitten, niin vois olla semmonen tapa, jolla ne niinku pääsee liikkeelle siihen laskuun. Hirveen työläs, sen näki, että joillekin oppilaille oli hirveän hidasta se kirjoittaminen, että ne jotenkin niinkun tuskailisi sen kanssa, että miten tähän laitetaan ja mitä mä tänne kirjotan. Mutta et että jollain lailla niinku kuitenkin hyvä idea se, et se vähän jäsentää.

Toinen viidennen luokan opettajista myös pitää matemaattisen ajattelun kirjallista kielentämistä hyvänä työskentelytapana myös siksi, ettei siinä ole yhtä ainoaa tapaa kielentää. Sanallinen tai kuvallinen muoto toimii oppilaalle apuvälineenä eikä näin ollen ole olennaista, onko kielentämisessä noudatettu tiettyä kaavaa tai mallia. Hän harmittelikin, ettei päässyt kokeilemaan kirjallista kielentämistä nuorempien oppilaiden kanssa, jolloin oppilaat olisivat helpommin saattaneet lähteä kehittämään omia ratkaisutapojaan. Opettajat näkevätkin, että kirjallinen kielentäminen sopii työskentelytavaksi oppilaille heti monivaiheisten sanallisten tehtävien alettua eli kolmannelta luokasta eteenpäin koko peruskoulun ajan. Alkuluokille kirjallinen omin sanoin kielentäminen ei heidän mielestään sovellu, sillä alkuluokkien oppilaiden luku- ja kirjoitustaidot eivät anna heille siihen valmiuksia. Lisäksi alkuluokkien matematiikan sanalliset tehtävät ovat usein yksivaiheisia ja liian yksinkertaisia työskentelytapaa nähden.

Seuraavaksi tarkastelemme lähemmin oppilaan matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen koettua hyötyä tutkimusongelmaamme liittyvien alakysymysten avulla.

1.1 Minkälainen yhteys on matematiikan osaamisella ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisella?

Matematiikan osaamisen ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisen välinen yhteys on heikko. Yhteys ei ole merkitsevä, sillä matematiikan osaamisen ja omin sanoin kirjoittamisen p-arvo on .092 ja matematiikan osaamisen ja kuvan piirtämisen p-arvo on .055. Molempien korrelaatiokertoimet ovat negatiivisia ($r=-.169$ ja $r=-.192$). Näin ollen tulos antaa viitteitä siitä, että hyvät matematiikan osaajat eivät koe hyötyvänsä kirjallisesta kielentämisestä niin paljon kuin heikommat matematiikan osaajat. Tässä on hyvä kuitenkin huomioda, että matematiikan osaamisen jakauma on vino, sillä yhteensä 70 prosenttia oppilaista on osaamisen tasoltaan hyvä tai erinomainen.

Yleisesti erinomaiset matematiikan osaajat kokevat, että omin sanoin kirjoittaminen matematiikan yhteydessä ei auta heitä juuri yhtään tai ei auta ollenkaan (45,7 %). Vain 11,4 prosenttia heistä kokee, että he hyötyvät omin sanoin kirjoittamisesta melko paljon. Hyvistä osaajista isohko osa kokee hyötyvänsä omin sanoin kirjoittamisesta, sillä 34,3 prosenttia kokee sen hyödylliseksi, kun vain 17,2 prosenttia ei koe hyötyvänsä juurikaan tai ei hyödy ollenkaan.

Oppilaat, joiden matematiikan osaaminen on tyydyttävää, jakautuvat varsin tasaisesti niihin, jotka kokevat hyötyvänsä (32,2 %) omin sanoin kirjoittamisesta ja niihin, jotka eivät koe hyötyvänsä (35,7 %). Osaamiseltaan välttäviä oppilaita näytteessämme on vain kaksi, joista toisen vastaukset ovat selkeästi ristiriitaisia keskenään omin sanoin kirjoittamisen osalta ja toisen puolestaan piirtämisen kohdalla. Näin ollen emme pidä aineistoa tältä osin edes viitteitä antavana.

Yleisesti ottaen oppilaat kokevat hyötyvänsä piirtämisestä. Hyvistä osajista 37,1 prosenttia kokee piirtämisen auttavan heitä matematiikassa, kun vain 28,5 prosenttia on sitä mieltä, ettei piirtäminen auta heitä. Myös tyydyttävän tasoista matematiikan osajista isompi osa koki piirtämisen hyödylliseksi. Heistä puolet pitää piirtämistä hyödyllisenä, kun ainoastaan 10,7 prosenttia ei koe piirtämisen auttavan heitä. Erinomaisten osalta tulokset olivat hieman poikkeavia. Heistäkin jopa 40 prosenttia kokee hyötyvänsä piirtämisestä, mutta kuitenkin 45,7 prosenttia on sitä mieltä, ettei piirtäminen auta heitä juuri yhtään tai ollenkaan.

Myöskään opettajat eivät näe selkeitä eroja kirjallisen kielentämisen hyödyllisyydessä oppilaiden matematiikan osaamiseen nähden. Opettajat kokevat, että hyvillä osajilla kirjallinen kielentäminen on tarpeetonta, koska he osaavat laskea muutenkin. Yleisesti opettajien kommentteista päätellen voimme kuitenkin sanoa, että keskitason osajat näyttäisivät hyötyvän työtavasta eniten. Tulostemme mukaan sen käyttö on perusteltua heille varsinkin vaikeiden tehtävien kohdalla. Opettajien mukaan työtappaa kannattaakin hyödyntää lähinnä oppilaille vaikeammassa tehtävissä, sillä kirjallinen kielentäminen vie paljon aikaa, eikä sen käyttö ole perusteltua helpoissa tehtävissä. Heidän mukaansa hyvätkin osajat hyötyisivät kirjallisesta kielentämisestä erittäin haastavien tehtävien kohdalla silloin, kun he eivät välttämättä näe heti tehtävänannosta ratkaisuprosessin etenemistä. Moni opettaja uskoo heikkojen kohdalla huonon osaamisen tulevan niin voimakkaasti vastaan, ettei kielentämisestäkään ole apua sanallisen tehtävän ratkaisemisessa.

1.2 Minkälainen yhteys on oppilaan käsityksellä itsestään matematiikan osajana ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisella?

Omin sanoin kirjoittamisella, yhtenä kirjallisen kielentämisen osa-alueena, ei ole merkitsevää yhteyttä oppilaan käsitykseen itsestään matematiikan osajana ($p=.699$ ja $r=-.039$). Piirtämisellä sen sijaan on tilastollisesti merkitsevä yhteys oppilaan käsitykseen itsestään matematiikan osajana ($p=.015$). Negatiivisen korrelaatiokertoimen ($r=-.242$) perusteella muuttujien varianssista 5,9 prosenttia on selitettävissä toistensa avulla. Näin ollen yhteys, vaikka onkin tilastollisesti merkitsevä, on melko heikko.

Tuloksemme perusteella siis näyttäisi siltä, että itsestään heikomman käsityksen omaavat oppilaat hyötyvät piirtämisestä jokseenkin enemmän kuin paremman käsityksen omaavat oppilaat. Taulukosta 3 näemme, että kukaan itsestään heikon käsityksen omaava oppilas ei koe, ettei hyötyisi kuvan piirtämisestä. Myös paremman minäkäsityksen omaavat oppilaat kokevat kuvan piirtämisen auttavan heitä, mutta heidän joukossaan on myös oppilaita, jotka eivät koe hyötyvänsä piirtämisestä.

TAULUKKO 3. Taulukko oppilaan käsityksestä itsestään matematiikan osaajana ja kuvan piirtämisen hyödyllisyydestä (n=100).

		Kuvan piirtäminen auttaa minua tehtävän ratkaisemisessa.			
		Ei auta	Ei osaa sanoa	Auttaa	Yhteensä
Oppilaan käsitys itsestä matematiikan osaajana	Negatiivinen käsitys	0%	4%	6%	10%
	Ei osaa sanoa	4%	7%	12%	23%
	Positiivinen käsitys	26%	17%	24%	67%
Yhteensä		30%	28%	42%	100%

1.3 Minkälainen yhteys on kirjoittamisen loogisuudella ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisella?

Kirjoittamisen loogisuudella ja omin sanoin kirjoittamisella on tilastollisesti merkitsevä ($p=.020$), vaikkakin heikko yhteys ($r=-.231$). Muuttujien varianssista on yhteistä 5,3 prosenttia. Saamamme tuloksen mukaan näyttäisi siis siltä, että mitä loogisemmin oppilas osaa kirjoittaa, sitä vähemmän hän hyötyy omin sanoin kirjoittamisesta.

Kirjoittamisen loogisuus ja matematiikan osaaminen korreloivat keskenään tilastollisesti merkitsevästi ($p=.000$). Positiivinen korrelaatiokerroin ($r=.454$) osoittaa, että hyvät matematiikan osaajat kirjoittavat loogista tekstiä. Näin ollen, kun hyvät matematiikan osaajat eivät koe hyötyvänsä omin sanoin kirjoittamisesta (ks. tutkimusongelma 1), ja nämä samat oppilaat kirjoittavat loogista tekstiä, on saamamme tulos johdonmukainen. Muuttujien varianssista on selitettävissä toistensa avulla 20,6 prosenttia. Piirtämisen hyödyllisyydellä ja kirjoittamisen loogisuudella ei puolestaan ole yhteyttä ($p=.324$ ja $r=-.100$).

Havaitsemamme korrelaatio matematiikan osaamisen ja kirjoittamisen loogisuuden välillä tukee opettajien käsitystä siitä, että hyvä matematiikan osaaminen on yhteydessä kirjoittamisen loogisuuteen. Heidän mukaansa siis loogista tekstiä kirjoittavat oppilaat ovat yleensä hyviä myös matematiikassa, eivätkä siten tarvitse kirjallisen kielentämisen apua, kuten myös tutkimusongelmamme 1.1 tulos osoittaa. Opettajat kokevat, etteivät kirjoittamiseltaan ja lukutaidoltaan heikot oppilaat hyödy kirjallisesta kielentämisestä, sillä he eivät välttämättä edes ymmärrä, mitä heidän tulisi laskea, ja näin ollen heidän voi olla mahdotonta ilmaista kirjallisesti laskuprosessia.

1.4 Minkälainen yhteys on kirjoittamisen mielisuudella ja matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisella?

Kirjoittamisen mielisuus on yhteydessä matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisen kanssa, sillä kirjoittamisesta pitäminen korreloi tilastollisesti merkitsevästi sekä omin sanoin kirjoittamisen ($p=.000$) että kuvan piirtämisen hyödyllisyyden kanssa ($p=.008$). Kirjoittamisen mielisuudella on yhteistä varianssia omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisyyden kanssa 21,3 prosenttia, ja piirtämisen hyödyllisyyden kanssa 7,0 prosenttia. Tuloksemme mukaan, jos oppilas pitää kirjoittamisesta hän kokee hyötyvänsä omin sanoin kirjoittamisesta ($r=.461$) sekä piirtämisestä ($r=.265$). Näin ollen voimme siis sanoa, että jos oppilas kokee kirjoittamisen mieluisaksi, hän kokee myös matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi. Tämä tulos ei ole yllättävä verrattuna edellisten tutkimusongelmiamme tuloksiin, sillä kirjoittamisen loogisuus ja mielisuus eivät ole yhteydessä toisiinsa ($p=.303$ ja $r=.104$).

1.5 Minkälainen on mahdollinen ero sukupuolten välillä matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisessa?

Sukupuolten välillä ei ole merkitsevää eroa matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyn kokemisessa: Sukupuolten välillä ei ilmene eroja siinä, kokevatko he omin sanoin kirjoittamisen auttavan heitä ($p=.676$). Myöskään kuvan piirtämisen hyödyllisyys ei eroa tilastollisesti merkitsevästi tyttöjen ja poikien välillä ($p=.058$). Vaikka tytöt näyttäisivät järjestyslukujen keskiarvojen mukaan kokevan omin sanoin kirjoittamisen sekä kuvan piirtämisen hyödyllisemmäksi kuin pojat, ero on kuitenkin niin pieni, että ne ovat voineet hyvinkin johtua sattumasta (taulukko 4). Myöskään opettajat eivät havaitse eroa sukupuolten välillä kirjallisen kielentämisen hyödyllisyydessä. Taulukosta 5 on kuitenkin nähtävissä, että eroa sukupuolten välillä on hiukan, vaikkei se tilastollisesti merkitsevää olekaan.

TAULUKKO 4. Järjestyslukujen keskiarvot omin sanoin kirjoittamisen ja piirtämisen hyödyllisyyden kohdalla sukupuolittain tarkasteltuina.

	Tytöt	Pojat
Kirjoittamisen hyödyllisyys	51,90	49,45
Piirtämisen hyödyllisyys	56,66	45,85

TAULUKKO 5. Kirjallisen kielentämisen koetun hyödyllisyyden jakautuminen sukupuolittain (tytöt n=43, pojat n=57).

Kirjallisen kielentämisen koettu hyödyllisyys	Omin sanoin kirjoittamisessa		Piirtämisessä	
	Tytöt	Pojat	Tytöt	Pojat
Hyötty	32,5 %	19 %	51 %	35 %
Hyötty vähän	21 %	28 %	7 %	19 %
Ei hyödy	14 %	4 %	9 %	21 %
Ei osaa sanoa	32,5 %	49 %	33 %	25 %
Yhteensä	100 %	100 %	100 %	100 %

1.6 Minkälaisia ovat mahdolliset erot luokkatasojen välillä matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemisessa?

Erot luokkatasojen välillä ovat tilastollisesti merkitseviä omin sanoin kirjoittamisen suhteen ($p=.012$), mutta eivät kuvan piirtämisen suhteen ($p=.218$). Järjestyslukujen keskiarvojen perusteella kolmasluokkalaisten kokevat hyötyvänsä omin sanoin kirjoittamisesta viides- ja seitsemäsluokkalaisten enemmän (taulukko 6), kun jälkimmäisten luokkatasojen välillä ei juuri ole eroa. Kuvan piirtämisen hyödyn kokemisen suhteen luokkatasojen erot ovat niin pieniä, että ne voivat johtua sattumasta (3.luokka: 56,93, 5.luokka: 45,42, 7.luokka: 49,05).

TAULUKKO 6. Omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisyyden järjestyslukujen keskiarvo Kruskal-Wallis testin mukaan.

	Luokka-aste	Lukumäärä	Järjestyslukujen keskiarvo
Omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisyys	3. luokka	35	62,19
	5. luokka	36	43,99
	7. luokka	29	44,48
	Yhteensä	100	

Yhteenvedo matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödystä oppilaalle

Tulostemme valossa voimme todeta, että matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä on hyötyä monille oppilaille. Suoraan emme voi sanoa, minkä tyyppiset oppilaat hyötyvät siitä, eikä kirjallisesta kielentämisestä hyötyminen näyttäisi olevan selvästi yhteydessä oppilaiden taitoihin tai muihin ominaisuuksiin. Analyysimme antaa kuitenkin viitteitä siitä, että näytteemme oppilaista keskitason osaajat matematiikassa hyötyvät kirjallisesta kielentämisestä eniten. Myös kirjoittamisesta pitävät oppilaat tuntuvat hyötävän matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä. Lisäksi voimme sanoa, että kolmannen luokan oppilaat kokevat omin sanoin kirjoittamisen hyödyllisemmäksi kuin viides- tai seitsemäsluokkalaiset. Yleisesti matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen kahdesta tarkastelemastamme muodosta piirtäminen hyödyttää oppilaita enemmän kuin omin sanoin kirjoittaminen, vaikkakin – oppilaasta riippuen – molemmat saatetaan kokea hyödylliseksi.

Sen lisäksi että moni oppilas kokee hyötävänsä itse matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä, osa vastaajista näkee työtavasta olevan hyötyä myös kielennyksen tarkastelijalle. Tämän ohella kirjallisen kielentämisen hyödyksi nähtiin sen oman ajattelun jäsentämisen, matemaattisen ongelman ymmärtämisen ja asian muistamisen edistäminen. Näin ollen kirjallinen kielentäminen matematiikassa edesauttaa myös oppimista.

Vaikka monille oppilaille matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä on heidän mukaansa hyötyä, osa näytteemme oppilaista ei koe hyötävänsä siitä. Suurin syy tähän on sen tarpeettomuus: joko kirjallisesta kielentämisestä hyötymättömät oppilaat kokevat olevansa niin hyviä laskijoita, että pärjäävät ilman kielentämistä tai sitten he eivät kykene muutenkaan selviytymään matemaattisista ongelmista ja kirjallisen kielentämisen vaatimus sekoittaa heitä entisestään. Lisäksi se vie enemmän aikaa ja hidastaa näin ollen ratkaisuprosessia. Osa oppilaista, jotka eivät koe hyötävänsä matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä, näkevät että siitä saattaa kuitenkin olla apua muille oppilaille heidän työskentelynsä matematiikan parissa. Näin ollen voimme todeta, että kirjallisen kielentämisen käyttäminen matematiikassa ei aina ole perusteltavissa, mutta se on kuitenkin hyvä työskentelymuoto oppilaille, jotka kokevat siitä hyötävänsä.

6.2 Miten opettajat hyötyvät oppilaan matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä?

Suurin osa haastattelemistamme opettajista kokee hyötävänsä oppilaan matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä. He kokevat saavansa apua omaan arviointityöhönsä, kun pystyvät

kirjallisesti kielennetystä esityksestä seuraamaan oppilaan ajattelua. Näin ollen he kokevat, että heidän on helpompi huomata, missä vaiheessa ratkaisuprosessia mahdollinen virhe on tapahtunut, ja minkä tasoisesta ajatusvirheestä on kyse. Liitteistä 2, 3, 4 ja 5 on havaittavissa, kuinka matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen auttaa oppilaan ajatuksen seuraamisessa. Lisäksi liitteestä 12 voi katsoa, kuinka virheiden syyt ovat helposti nähtävissä, kun ratkaisuprosessi on kielennetty kirjallisesti. Toinen viidennen luokan opettajista kommentoi oppilaiden kirjallisista kielennyksistä saamaansa hyötyä:

Siis kyllähän se nimenomaan sitä ajattelua, oppilaan ajattelua avaa minullekin. Sen sijaan, että mä nään epämääräiset numerot peräkkäin ja mietin, et mitä se on ajatellu, niin mä nyt oikeesti nään, että miks se on tehny näin. Ai tossa kohtaan se on menny virheellisesti ajattelemaan sen juttunsa. Koska enhän mä ehdi kaikkien kahdenkymmenenviiden kanssa tai yhdeksäntoistakaan kanssa niinku jutella, että miksi olet laskenut tehtävän näin. Mut et jos tommosia pääsis aina välillä tekemään, niin niistä niinku aika helpolla näkee sen, että millä tasolla se ajattelu liikkuu. Et arviointiin ja just siihen niinku ongelmien huomaamiseen, että pystyy jo näkemään, että kellä on perustavaa laatua olevia ymmärtämisiongelmiä siellä.

Useampi opettaja tuo esiin kirjallisen kielentämisen edun suulliseen kielentämiseen verrattuna, koska he pystyvät tarkastelemaan kaikkien oppilaiden matemaattista ajattelua kirjallisesti kielennetyistä esityksistä. Opetustilanteessa vain muutamalla oppilaalla on mahdollisuus tuoda ilmi omaa ajatteluaan suullisesti, koska aika on rajallinen. Monen oppilaan ajattelu jää käymättä läpi, eivätkä kaikkien ratkaisustrategiat tule näin ollen ilmi opettajalle tai muille oppilaille. Kirjallisesta esityksestä opettajan on mahdollista huomata, että ajattelutapoja on monia. Ratkaisuprosessi ei siis välttämättä ole väärä, vaan se on saatettu ajatella oletettua eri tavalla. Liittessä 4(2) oleva oppilaan kirjallisesti kielennetty ratkaisuprosessi on hyvä esimerkki tästä. Jos oppilas olisi esittänyt ratkaisunsa vain matematiikan symbolikielellä, olisi ratkaisun seuraaja voinut arvella ratkaisuprosessin olevan virheellinen. Kuitenkin kun oppilas on kielentänyt ratkaisunsa, hänen omalaatuinen ja myös oikea päättelyketju tulee seuraajalle ilmi. Kirjallisesta kielentämisestä on hyötyä myös koetehtävien ratkaisuja arvioitaessa, kun opettajan on mahdollista nähdä, millä tasolla oppilaan ajatus liikkuu. Vain yläkoulun matematiikan opettaja ei koe saavansa oppilaiden kielentämisestä apua omaan työhönsä, sillä hän on oppinut havaitsemaan, missä mahdollinen virhe on tapahtunut.

6.3 Tulosten tarkastelua

Kuten olemme aikaisemmin tulosten yhteenvedossa todenneet, moni oppilas hyötyy matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä, vaikka suoraan emme voikaan määritellä, minkälaiset

oppilaat (esimerkiksi tietyn tasoiset laskijat) siitä hyötyvät. Sen lisäksi, että moni oppilas hyötyy kirjallisesta kielentämisestä, myös opettajat kokevat pääsääntöisesti hyötyvänsä siitä, kun oppilas on käyttänyt luonnollista, matematiikkaan liittyvää luonnollista ja/tai kuviokieltä sanallista tehtävää ratkaistessaan. He myös näkevät, että pääsevät kirjallisesti kielennetyn esityksen kautta paremmin tarkastelemaan oppilaiden ratkaisuprosessia, matemaattista ajattelua ja heidän tekemiään valintoja. Seuraavassa käymme läpi saamiamme tutkimustuloksia ja niihin vaikuttavia tekijöitä. Lisäksi tarkastelemme niitä muiden tutkijoiden saaman tiedon valossa.

Oppilaiden mielipiteet kirjallisesta kielentämisestä vaihtelivat niin tapauksittain kuin tutkimuslomakkeemme väitteiden ja avointen kysymysten kohdalla. Tarkastellessamme avoimia kysymyksiä, tulimme siihen tulokseen, että erot avointen kysymysten vastausten ja väitteiden vastausten välillä saattavat johtua siitä, että oppilaat, jotka olivat hiukan epävarmoja vastauksistaan, valitsivat helposti vastausvaihtoehdon ”en osaa sanoa”. Toisin sanoen silloin kun oppilas koki esimerkiksi kuvan auttavan häntä vain joskus, hän ei ehkä osannut valita vaihtoehtojen ”jokseenkin samaa mieltä” ja ”jokseenkin eri mieltä” välillä ja päätyi siten valitsemaan vaihtoehdon ”en osaa sanoa”. Avoimissa kysymyksissä oppilailla oli kuitenkin mahdollisuus kirjoittaa vastauksensa itse ilman annettuja vaihtoehtoja, jolloin he saivat ilmaista kantansa vapaasti ja perustellen. Näin ollen he pystyivät halutessaan tuomaan epäröintinsä esiin kertomalla kirjallisen kielentämisen auttavan heitä joskus ja mahdollisesti eri tavoin. Myös Joutsenlahden (2010) tutkimuksessa on tullut ilmi, että vastausjakauma oli painottunut vaihtoehtoon ”En osaa sanoa.”. Hän on tulkinnut jakauman painottumisen syyksi sen, etteivät tutkimukseen osallistuneet olleet vielä muodostaneet mielipidettään matemaattisen ajattelun kirjalliseen kielentämiseen vaan pohtivat asiaa vielä. Kyseisessä tutkimuksessa on tosin tutkittu aiemmin esittelemiemme kielentämismallien (ks. lukua 3.3.2) käyttökelpoisuutta. Omassa tutkimuksessamme jakauman painottumisen ”En osaa sanoa.” -vaihtoehtoon voi myös ajatella johtuvan lyhyestä tutkimusjaksostamme ja siitä, ettei työskentelytapa ollut oppilaille ennestään tuttu. Näin ollen lyhyen ajan puitteissa oppilaat eivät välttämättä pystyneet muodostamaan kokonaisvaltaista käsitystä matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisyydestä.

Joutsenlahti (2010) on tutkinut, miten lukiolaisopiskelijat kokevat kielentämismallien käyttökelpoisuuden sanallisten tehtävien ratkaisussa. Meidän ensimmäinen pääongelmamme, jossa selvitämme oppilaiden kokemaa kirjallisen kielentämisen hyötyä, on siis pitkälti samankaltainen kuin Joutsenlahden tutkimusongelma. Omassa näytteessämme 56 prosenttia oppilaista koki hyötyvänsä omin sanoin kirjoittamisesta ja jopa 77 prosenttia koki hyötyvänsä piirtämisestä sanallisen tehtävän ratkaisussa. Oppilaita, jotka eivät kokeneet hyötyvänsä omin sanoin kirjoittamisesta oli 41 prosenttia ja heitä, jotka eivät kokeneet hyötyvänsä piirtämisestä on

19 prosenttia. Joutsenlahden (2010) tutkimuksen näytteestä 53 prosenttia oppilaista koki, että omin sanoin kirjoittaminen auttaa heitä tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa. 75 prosenttia vastaajista koki saavansa apua kuvan piirtämisestä. Oppilaita, jotka eivät kokeneet hyötyvänsä omin sanoin kirjoittamisesta oli 13 prosenttia ja heitä, joiden mielestä kuvan piirtäminen ei auttanut, oli 3 prosenttia. (Joutsenlahti 2010.) Koska Joutsenlahden (2010) tutkimuksessa saadut tulokset ovat pitkälti samankaltaisia kuin omamme, ne tukevat saamiamme tuloksia. Samoin tuloksiamme tukevat Withinin ja Withinin (1998, 168) tutkimuksessa ilme tulleet seikat kirjoittamisesta matematiikan yhteydessä, sillä se voi avata oppilaalle itselleen hänen ajatteluaan ja selkeyttää sitä. Heidän tutkimuksessaan lapset olivatkin kommentoineet omin sanoin kirjoittamisesta lähes samaan tyyliin kuin omaan tutkimukseemme vastanneet oppilaat (ks. lukua 6.1), ja vastauksista välittyi lasten arvostus kirjoittamisen antamista mahdollisuuksista kehittää uusia ajatuksia ja saada ajatuksensa kuuluviin (Within & Within 1998, 168).

Joutsenlahti (2010) on tutkinut myös kirjallisen kielentämisen hyviä ja huonoja puolia. Useimmin mainituksi hyväksi puoleksi nousi se, että kirjallinen kielentäminen jäsentää kielentäjän omaa ajattelua. Muita esille tulleita syitä olivat muistin tukeminen ja esityksen jäsentyminen lukijalle. (Joutsenlahti 2010.) Myös omassa tutkimuksessamme kyseiset syyt nousivat selkeästi esille. Muita löytämiämme hyviä puolia olivat matemaattisten taitojen kehittyminen sekä apu tarkistuksessa ja päättelyssä. Näitä syitä puolestaan tulee esiin aihetta koskevassa kirjallisuudessa: Esimerkiksi Lee (2006) näkee kielentämisen edistävän oppimista ja lisäksi hän on sitä mieltä, että se auttaa opitun asian muistamisessa. Myös Morgan (2001) sekä Shield ja Swinson (1996) ovat samaa mieltä ja Selter (2009, 321) nostaa esiin mahdollisuuden ratkaista matemaattisia ongelmia omien strategioiden kautta sekä löytää ja selittää uusia ratkaisumalleja. Tämän näkökulma tuli esiin myös opettajia haastatellessa: kielentäminen edistää lapsia kehittämään omia ratkaisustrategioita Irons & Irons (1989, 86) esittävätkin, että kielenkäyttö matematiikassa mahdollistaa strategioiden laajentamisen ja uusien ratkaisutapojen kehittämisen. Lisäksi heidän mukaansa kieli auttaa rakentamaan matemaattista ymmärtämistä nimenomaan käsitteiden kohdalla. Matematiikan sanalliset tehtävät on kuitenkin esitetty matemaattisten käsitteiden avulla, ja ymmärtääkseen tehtävän, oppilaan täytyy ymmärtää siihen liittyvät käsitteet. Näin he voivat muodostaa selkeämmän käsityksen tehtävästä ja sen ratkaisemisesta. (Irons & Irons 1989, 85–86.) Myös aikaisemmin esittelemässämme kirjallisuudessa nostetaan esiin tutkimuksessammekin saatu tulos, jonka mukaan kirjallinen kielentäminen jäsentää kielentäjän ajattelua (ks. lukua 3).

Morganin (1998, 71) mukaan kirjallinen esitystapa on usein oppilaille vaikea ja työläs. Tähän liittyviksi syiksi voidaan nähdä Joutsenlahden (2010) tutkimuksessa esiin nousseet haittapuolet matemaattisen ajattelun kirjallisessa kielentämisessä: tekstin tuottamisen työläys,

työtavan aikaa vievyys ja ratkaisun tilanvievyys. Omassa tutkimuksessamme ratkaisun tilanvievyys ei noussut esille, vaikka muut Joutsenlahdenkin (2010) löytämät syyt tulivatkin ilmi. Tutkimuksessamme suurimmaksi syyksi matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyttömäksi kokemiseen nousi sen tarpeettomuus, kun moni oppilas koki turhaksi kielentää ratkaisuaan kirjallisesti luonnollisella kielellä, matematiikkaan liittyvällä luonnollisella kielellä ja/tai kuviokielellä. Suurin osa näin vastanneista koki kirjallisen kielentämisen turhana, koska tunsivat osaavansa muutenkin matematiikkaa niin hyvin. Toisen ääripään oppilaat puolestaan kokivat kirjallisen esitystavan sekoittavan heitä entisestään, mistä johtuen he kokivat kirjallisen kielentämisen vaikeuttavan laskemista. Myös opettajat näkivät, että kirjallinen kielentäminen on osittain turhaa. Heidän mielestään hyvät laskijat eivät tarvitse kirjallista kielentämistä ja heikkojen laskijoiden kohdalla sanallinen esitystapa saattaa aiheuttaa vaikeuksia entisestään. Luvussa 3 olemme esitelleet Leen (2006) ja Morganin (1998, 2001) samansuuntaisia ajatuksia: Varsinkin helppojen tehtävien kohdalla kirjallinen kielentäminen on tarpeetonta, koska se saattaa turhauttaa muutenkin osaavaa oppilasta. Molemmat ovatkin sitä mieltä, että kirjallinen kielentäminen on hyvä työtapana, kun sitä käytetään tavoitteellisesti. Toisin sanoen he näkevät, että sen käyttö ei aina ole välttämätöntä, vaan sitä pitäisi käyttää, silloin kun siitä on hyötyä oppilaalle itselleen. (Lee 2006, Morgan 1998, 2001)

Emme pysty tulostemme valossa määrittelemään, minkälaiset oppilaat kokevat matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi. Tuloksemme kuitenkin antavat viitteitä siitä, että keskitason matematiikan osaajat kokevat hyötyvänsä kirjallisesti kielentämisestä enemmän kuin heikot tai huippuosaajat. Hyvät osaajat ymmärtävät tehtävät ja osaavat ratkaista ne nopeasti ilman ajatustensa jäsentelyä, kun taas heikkojen matematiikan osaajien kohdalla ajatusten kirjoittamiseen paneutuminen vie ajatukset ja keskittymisen pois kyseessä olevasta tehtävästä pois ja näin ollen sekoittaa meneillään olevan prosessin. Nämä syyt ilmenivät myös oppilaiden avointen kysymysten vastauksista, jolloin saamamme tulos keskitason matematiikan osaajien hyötymisestä matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä voi hyvinkin olla suuntaa antava. Kuitenkin, tuloksemme vaikuttaa varmasti se, että näytteemme oppilaiden jakautuminen matematiikan osaamisessa on vino siten, että matematiikan taidoissa hyviä ja erinomaisia osaajia on selkeästi enemmän kuin tyydyttäviä ja välttäviä osaajia. Jos oppilaiden jakautuminen matematiikan osaamiseen nähden olisi tasaisempaa, olisi matematiikan osaamisen ja kirjallisen kielentämisen hyödyn kokemisen väliltä mahdollisesti löytynyt vahvempi korrelaatio.

Koska tutkimustieto siitä, ketkä erityisesti voisivat hyötyä matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä, on melko vähäistä, emme juurikaan voi tarkastella aihetta muiden tutkimusten valossa. Kuitenkin muita tutkimuksissa tarkastelemiamme oppilaiden ominaisuuksia,

kuten matemaattista osaamista, sukupuolten välisiä eroja ja käsitystä itsestä matematiikan osajana, on tarkasteltu niin kansallisesti kuin kansainvälisestikin. Joutsenlahti (2009, 73) esittää, että tutkimustulosten valossa voi olettaa, että tytöille kirjallisen kielentämisen käyttö olisi mieluisa työväline matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisuun. Lisäksi hän näkee, että taitavien luonnollisen kielenkäyttäjien, joilla tässä tapauksessa tarkoitetaan nimenomaan tyttöjä, matematiikan minäkuva saattaisi parantua, kun oppilas voisi ilmaista itseään osaamallaan tavalla (2009, 73). Omat tutkimustuloksemme eivät kuitenkaan tue Joutsenlahden (2009) olettamuksia, sillä tulostemme mukaan tyttöjen ja poikien välillä ei ollut eroja. Myöskään loogiset kirjoittajat eivät kokeneet sanallisen esitysmuodon hyödyttävän heitä sen enempää kuin heikommat kirjoittajat kokivat. Uskomme kuitenkin havaitsemamme positiivisen korrelaation kirjoittamisen loogisuuden ja matematiikan osaamisen välillä vaikuttavan tähän. Myös opettajien kokemukset oppilaistaan tukevat johtopäätöstämme korreloivista matematiikan ja kirjoittamisen taidoista.

Sen sijaan kirjoittamisen mieluisuus on merkitsevästi yhteydessä kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemiseen matematiikassa. Varsinkin omin sanoin kirjoittaminen on yhteydessä kirjoittamisen mieluisuuteen. Tulos ei kuitenkaan ole kovin yllättävä, sillä kirjallisesta kielentämisestä toteutettaessa sanallisesti kielentäjä käyttää luonnollista kieltä ja kirjoittaa laskujen joukkoon ajatuksiaan ja perustelujaan. Morgan (2001, 234) esittää muiden saaman tutkimustiedon valossa, että matematiikka ja kirjoittaminen ovat samankaltaisia toimintoja, mikä saattaisi osittain selittää kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyden ja kirjoittamisen mieluisuuden yhteyttä.

Päinvastaisesti kirjoittaminen matematiikan yhteydessä on joidenkin oppilaiden osalta koettu hyvinkin turhaksi. Monille luonnollisen kielen käyttö matemaattisessa yhteydessä on jaksomme aikana ollut uusi käytäntö, eli he ovat tutussa kielenkäyttötilanteessa joutuneetkin käyttämään aiemmasta poikkeavaa kieltä. Koska matematiikan tunti muodostaa oman kielenkäyttötilanteen, sen aikana käytetään käyttötilanteen vaatimia sanoja ja ilmauksia. Oppilaat olivat kuitenkin tottuneet käyttämään vain tiettyjä matematiikan rekisterin sisältämiä ja edellyttämiä esitysmuotoja ja -tapoja nimenomaan kirjoitetun kielen rekisterin yhteydessä. Koska tutkimuksessamme oli olennaista, että oppilaat käyttivät kirjoitetun kielen rekisterissä luonnollista kieltä tavallisen symbolikielen sijaan, on kirjallisen kielentämisen käyttö saattanut vaikeuttaa oppilaiden työskentelyä. Oppilaiden omat kommentitkin ilmensivät tätä, sillä osan mielestä oli vaikeaa ymmärtää, miksi heidän piti kirjoittaa luonnollisella kielellä laskujen lomaan.

Luokka-asteittain tarkasteltuna kolmasluokkalaiset kokivat hyötyvänsä matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen toisesta tarkastelemastamme osa-alueesta, omin sanoin kirjoittamisesta enemmän kuin viides- tai seitsemäsluokkalaiset. Tulokseen on saattanut vaikuttaa se, että kolmasluokkalaiset tekivät tehtäviä ja näin ollen käyttivät kirjallista kielentämistä

enemmän kuin viidensien tai seitsemänsien luokkien oppilaat. Tästä johtuen kolmansien luokkien oppilaiden on ollut ehkä mahdollista muodostaa mielipiteensä esittelemämme työtavan hyödyistä vähän paremmin kuin kahden muun luokka-asteen oppilaiden.

Alakoulun puolella monivaiheiset sanalliset tehtävät alkavat esiintyä pääasiassa vasta kolmannella luokalla, ja tällöin kirjallinen kielentäminen työtapana ei oikeastaan sovellu nuoremmille oppilaille. Kolmannen luokan oppilaat myös vasta hakevat työskentelytottumuksia ja totuttelevat itselleen sopiviin toimintatapoihin, jolloin heidän on helpompi omaksua uusia työskentelymenetelmiä kuin vanhempien, jo tottuneiden työskentelijöiden. Lisäksi laatimamme tarinamuotoiset ja jonkin verran erikoisemmat tehtävät ovat saattaneet motivoida nuorempia oppilaita tarttumaan innokkaammin uuteen työtapaan, jolloin sen hyödyllisyys ja tehtävien kivuus ovat mahdollisesti kulkeneet käsi kädessä. Myös osa opettajista kertoi huomioitaan lapsia innostaneista tehtävistä. Vastaavasti ylempien luokkien oppilaat olivat opettajien mukaan saattaneet kommentoida tehtäviä aika helpoiksikin, jolloin he eivät kokeneet kirjallisen kielentämisen auttavat heitä niiden ratkaisemisessa. Tähän liittyen Lee (2006, 4) esittääkin, että oppilaille tulisi antaa sopivan haastavia tehtäviä niin, että ne ovat vaikeita, mutta oppilaiden taitojen puitteissa ratkottavia. Vaikeustason tulisi siis olla oppilaan tasoon nähden mahdollisimman korkea, jotta he tietävät oppivansa tehokkaasti (Lee 2006, 4).

Opettajien kannalta olennaiseksi nousi arvioinnin näkökulma oppilaan kielentäessä matemaattista ajatteluaan kirjallisesti. Sanallisesti kielenntäystä esityksestä on mahdollista tarkastella oppilaan ajattelun kulkua ja mahdollisia virheitä (ks. liite 2,3,4,5 ja 12). Within ja Within (1998, 161) tuovat esiin ajatuksensa siitä, että opettajat voivat hyödyntää kirjoittamista matematiikassa muun muassa oppilaan arviointiin, heidän ajattelunsa seuraamiseen ja numeerisen ymmärtämisen kehittämiseen. Myös Lee (2006) ja Joutsenlahti (2003a) näkevät molemmat, että oppilaan kirjallisesta kielenntäyksestä on apua opettajalle arviointiin ja ajattelun seuraamiseen. Opettaja saa kuvan muun muassa siitä, miten oppilas on opetetun asian tai käsitteen ymmärtänyt (Joutsenlahti 2003a, Lee 2006), eli kuten Selter (2009, 321) asian ilmaisee, lasten tuotokset antavat opettajalle autenttista tietoa oppilaasta. Myös väärinymmärrysten kohdalla opettaja saa luonnollisella kielellä esitetystä ratkaisusta poimittua virheellisen ajatuksenkulun (Lee 2006). (Ks. myös Masingila & Prus-Wisniowska 1996, 95.) Olemme poimineet erään näytteemme oppilaan tekemän tehtävän, josta käy ilmi kuinka kielentäminen tuo esiin virheellisen ajatuksenkulun (liite 12). Opettajat toivat haastatteluissa esiin erään kirjallisen kielentämisen edun suulliseen kielentämiseen verrattuna. Heidän on mahdollista tarkastella kirjallisesta esityksestä kaikkien oppilaiden ajatuksia, kun taas oppitunnilla ei ajan rajallisuuden vuoksi ole mahdollista kuulla kaikkien oppilaiden matemaattisia ajatuksia (ks. myös Joutsenlahti 2003a, 193). Pysyvä tuotos

myös mahdollistaa oppilaan matemaattisen taitojen perusteellisemmän arvioinnin. Kirjallinen kielentäminen ei kuitenkaan rajaa suullisen kielentämisen käyttöä pois: Morgan (2001) sanoo, että eri arvioinnin keinoja käyttäessään opettaja pystyy muodostamaan kattavamman kuvan oppilaan osaamisesta, ja Selter (2009, 322) korostaa nimenomaan oppilaiden kirjallisten tuotosten tukea autenttiselle ja avoimelle arvioinnille.

Tutkimuksemme tarkoituksena ei ole löytää yleistettäviä tuloksia. Pyrimmekin tutkimusnäytteemme puitteissa löytämään oppilaiden ja opettajien mahdollisesti kokemaa hyötyä oppilaiden kirjallisesta kielentämisestä matematiikassa. Tutkimuksemme perusteella voimme todeta, että matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä on hyötyä molemmille, niin oppilaille kuin opettajillekin. Opettajille kirjallinen kielentäminen antaa apua oppilaan arvioimiseen, kun taas oppilaat pystyvät paremmin jäsentämään ajatteluaan. Työtavan käyttö ei kuitenkaan ole aina perusteltua eikä välttämättä sovi kaikille. Emme voikaan nimetä tietyn tyyppisiä osajia tai oppijia, jotka erityisesti hyötyvät kirjallisesta kielentämisestä. Hyödyn kokeminen voi myös olla sidoksissa tilanteeseen tai tehtävään, sillä moni oppilaista oli sitä mieltä, että omin sanoin kirjoittaminen tai piirtäminen auttaa heitä vain joskus, etenkin vaikeiden tehtävien kohdalla. Näin ollen voimme tutkimuksemme valossa todeta, että kirjallinen kielentäminen matematiikassa on yksi mahdollinen työtapa, jonka käyttökelpoisuutta opettajan kannattaisi kokeilla omassa luokassaan, sillä se hyödyttää opettajan itsensä lisäksi monia oppilaita matematiikassa.

7 LOPUKSI

7.1 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksen luotettavuuden tarkastelu perustuu reliaabeliuden eli tutkimuksen ja mittaustulosten toistettavuuteen sekä validiuden eli pätevyyden kriittiseen arvioimiseen. Toistettavuutta ja pätevyyttä on mahdollista parantaa eri tavoin. Tässä tutkimuksessa luotettavuutta lisää muun muassa triangulaation käyttö. Triangulaatiolla tarkoitetaan useiden aineistojen, menetelmien, teorioiden ja/tai tutkijoiden käyttöä tutkimuksessa (Eskola & Suoranta 1998, 68). Sen tavoitteena on hankkia kokonaisvaltaisempi näkemys tutkittavasta ilmiöstä, mistä johtuen sen avulla saadaan usein luotettavampia tuloksia kuin vain yhtä menetelmää, teoriaa, aineistoa ja/tai tutkijaa käytettäessä (mts. 68). Vaikka Eskola ja Suoranta (1998, 70–71) ovat sitä mieltä, että triangulaation käyttö tuottaa parhaimmillaan mielenkiintoisia tutkimuksia, se voidaan kuitenkin kyseenalaistaa, sillä erilaisten aineistojen käyttö samanaikaisesti ei välttämättä ole sopivaa. Tutkimusmenetelmien taustalla saattaa olla erilaiset ihmiskäsitykset, eikä tutkimusmenetelmien yhteensovittaminen sen vuoksi välttämättä onnistu (mts. 71). Itse olemme kuitenkin sitä mieltä, että triangulaation käyttö omassa tutkimuksessamme ei ole ongelmallista: Tutkimuksemme pohjautuu viitekehyksemme mukaisesti fenomenologis-hermeneuttiseen ihmiskäsitykseen, minkä pohjalta olemme myös valinneet menetelmät, jotka siihen soveltuvat. Menetelmien yhtäaikainen käyttö onnistuu myös moitteetta, koska ne täydentävät toisiaan ja tuovat tutkittavaan ilmiöön erilaisia näkökulmia.

Omassa tutkimuksessamme toteutuu tutkijatriangulaatio, aineistotriangulaatio ja menetelmätriangulaatio. Tutkijatriangulaation mukaisesti tutkimuksemme toteuttaa kaksi tutkijaa. Sen ajatellaan lisäävän tutkimuksen luotettavuutta, sillä tutkijoiden on keskusteltava näkemyksistään ja päästävä tutkimuksen kannalta olennaisista valinnoista yksimielisyyteen (Eskola & Suoranta 1998, 69). Useampi tutkija tuo tutkimukseen laajempia ja useampia näkökulmia käytettäväksi. Menetelmätriangulaatio toteutuu, kun tutkimuskohdetta tutkitaan eri aineistonhankinta- ja tutkimusmenetelmillä. Useat tutkimusmenetelmät voivat tutkia kohdetta useammista näkökulmista, mikä parantaa sen luotettavuutta. (Mts. 69–70.) Hankimme aineistoa sekä kvalitatiivisin että kvantitatiivisin menetelmin puolistrukturoitujen temahaastattelujen sekä

kyselylomakkeen Likert-asteikollisten ja avoimien kysymysten keinoin. Aineistoa analysoimme kvantitatiivisesti SPSS-ohjelman avulla ja kvalitatiivisesti teemoittelun keinoin. Aineistotriangulaatiota käytettäessä tutkimuksessa käytetään ja yhdistellään erilaisia aineistoja keskenään (mts. 69). Omassa tutkimuksessamme, kuten juuri kävi ilmi, käyttämämme aineisto koostui haastatteluista ja kyselylomakkeiden määrällisistä ja laadullisista vastauksista.

Seuraavaksi tarkastelemme tutkimuksemme reliabiliutta ja validiutta sekä kvantitatiivisen että kvalitatiivisen tutkimusotteen kannalta. Reliabiliudella tarkoitetaan mittaustulosten ja tutkimuksen toistettavuutta, mistä johtuen reliabelin tutkimuksen tulisi tuottaa ei-sattumanvaraisia tuloksia (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 1997, 216). Tutkimuksen validiudella eli pätevyydellä tarkoitetaan mittarin kykyä mitata sitä, mitä pitäisikin (mts. 216).

Keräsimme kvantitatiivisen aineistomme itse laatimamme kyselylomakkeen avulla. Ihmistieteissä kyselylomakkeen validiuden tarkastelu voi olla vaikeaa, sillä koskaan ei voi olla täysin varma siitä, miten tutkittava henkilö on esitetyn kysymyksen tai väittämän ymmärtänyt. Osaa väittämistämme oli kuitenkin käytetty aiemmin Niemen (2004) perusopetuksen oppimistulosten kansallisessa arvioinnissa vuonna 2000 tai Joutsenlahden (2005, 2010) tutkimuksissa. Niiden toimivuutta on siis testattu aiemmin, ja voimme olettaa niiden mittaavan sitä, mitä pitäisikin. Kyselylomakkeen vastausten lisäksi käytimme kvantitatiivisissa analyysissä myös opettajien tekemiä arviointeja oppilaiden matematiikan osaamisesta ja kirjoittamisen loogisuudesta. Arviointien pitäisi olla valideja, koska opettajat ovat muodostaneet matematiikan arvosanat perusopetuksen opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisesti. Kirjoittamisen loogisuuden he puolestaan ovat arvioineet antamamme, perusopetuksen opetussuunnitelman vaatimusten pohjalta tehdyn määritelmän mukaisesti. Tutkimuksen validiuteen vaikuttaa myös tilanne, jossa aineisto kerätään. Toteutimme kvantitatiivisen aineiston keräämisen informoituna lomakekyselynä. Olimme siis itse paikalla oppilaiden täyttäessä lomakkeet, jolloin heillä oli mahdollisuus kysyä tarkentavia kysymyksiä väittämistämme tai pyytää apua, jos eivät jotain väittämää olleet ymmärtäneet. Tutkijoiden paikalla olo takasi myös sen, että kaikki oppilaat saivat lomakkeen täyttöönsä samanlaiset ohjeet. Lisäksi voimme todeta, että lomakkeentäyttötilanteet olivat rauhallisia. Näin ollen oppilailla oli mahdollisuus vastata lomakkeeseen rauhassa keskittyen ja itsenäisesti. Lisäksi varmistimme, että kaikilla oli käytettävissä tarpeeksi aikaa lomakkeen täyttämiseen.

Kvantitatiivisen analyysimme reliabiliutta olemme selvittäneet tutkimalla tutkimuksessamme käytettyjen summamuuttujien luotettavuudet Cronbachin alfan avulla. Saamamme reliabiliteetit olivat korkeita ja siten vahvistivat kvantitatiivisen analyysimme reliabiliutta. Mitä suurempia reliabiliteetit ovat, sitä vähemmän tuloksissa on

sattumanvaraisuutta. Tutkimuksemme kvantitatiivinen osuus on myös toistettavissa, koska olemme esitelleet tarkasti tutkimuksen kulun. Lisäksi laadittua kyselylomaketta voi käyttää sellaisenaan, jolloin voi olla varma, että se tutkii samaa asiaa kuin omassa tutkimuksessammekin.

Kvalitatiivinen tutkimus ei samalla tavalla pyri objektiivisuuteen kuin kvantitatiivinen tutkimus. Tutkijan onkin myönnettävä ja tiedostettava, että hän toimii tutkimuksessa keskeisenä tutkimusvälineenä. (Eskola & Suoranta 1998, 210.) Tutkimuksemme reliabiliutta lisää kuitenkin tutkijatriangulaatio, sillä kaikki tutkimuksessamme tehdyt valinnat ja päätökset ovat kahden tutkijan välisen keskustelun tuloksia. Niissä on siis otettu huomioon useampia näkökulmia. Hirsjärvi ja Hurme (2001, 186) ehdottavatkin, että kvalitatiivisessa tutkimuksessa yksi reliabiliuden määritelmä voisi olla se, että kaksi tai useampi arvioija päätyy tuloksista yksimielisyyteen keskustelun avulla.

Tutkimuksemme reliabiliutta lisää myös se, että olemme saaneet tutkimuksestamme samansuuntaisia tuloksia kuin aiemmassa kirjallisuudessa on esitetty (ks. Hirsjärvi ym. 216). Toisin sanoen toiset tutkijat ovat päätyneet samankaltaisiin tuloksiin kuin me. Lisäksi tutkimuksen reliabiliuteen vaikuttaa myös sen toistettavuus. Siksi olemmekin kuvailleet tarkasti tutkimuksemme kulun ja vaiheet. Laadullisen tutkimuksen toistaminen on usein kuitenkin vaikeaa, koska, kuten jo mainitsimme, tutkija on suuressa roolissa sekä aineiston keruussa että analyysissa.

Kvalitatiivisesti keräsimme ja analysoimme teemahaastattelut ja kyselylomakkeen avoimet kysymykset. Avointen kysymysten kohdalla täytyy pohtia samaa validiusongelmaa kuin Likert-asteikollisten väittämienkin: Ovatko oppilaat ymmärtäneet kysymykset tarkoitetulla tavalla? Avoimissa kysymyksissä vaadittiin kuitenkin myös perustelut omalle vastaukselle, joten uskomme, että niistä olisi käynyt ilmi, jos oppilas olisi ymmärtänyt kysymyksen väärin. Samoin kuin avointen kysymysten kohdalla, myös teemahaastattelun kohdalla voidaan miettiä, ovatko haastateltavat ymmärtäneet haastattelijoiden kysymykset oikein. Kuitenkin haastattelijoiden ollessa haastattelutilanteessa, heidän on mahdollista arvioida keskustelun aikana haastateltavien vastauksia, joista hyvin pitkälti tulee ilmi, onko kysymys ymmärretty vai ei.

Teemahaastattelun rungon muodostimme itse, joten emme nojanneet siinä aiempiin tutkimuksiin. Uskomme kuitenkin sen validiuteen, koska olemme muodostaneet sen hankkimamme tietämyksen pohjalta ja saimme haastattelujen avulla vastaukset tutkimusongelmiimme. Teemahaastattelun avulla tutkija voi lisäksi varmistaa tutkimuksen kannalta olennaisten asioiden käsittelyn. Se antaa tutkijalle myös mahdollisuuden ottaa esille omaan tietämykseensä perustuvia näkökulmia. Teemahaastattelun validiutta lisää myös se, että se antaa kohteelle mahdollisuuden nostaa esiin asioita, joita tutkija ei strukturoidussa haastattelussa

huomaisi kysyä. Tällöin teemahaastattelun myötä saattaa nousta esiin uusia, jopa oleellisia, näkökulmia.

Tutkimuksemme tulosten kannalta olennaista on myös ennen aineiston keruuta toteutettu kielentämisjakso, jonka aikana oppilaat harjoittelivat ja kokeilivat kielentämistä meidän ja opettajien ohjauksessa. Olemme kuvanneet kielentämisjakson toteutuksen tarkasti menetelmäosiossa. Luulemme kuitenkin, ettei sen toteuttaminen välttämättä onnistuisi juuri samalla tavalla uudestaan. Toteutukseen on nimittäin vaikuttanut, kuten laadullisessa tutkimuksessa yleensäkin, tutkijat ja myös tutkimuskohteet eli opettajat ja oppilaat. Myös kielennettävillä oppikirjan tehtävillä on ollut vaikutusta jaksoon.

Tutkimuksen luotettavuutta tarkastellessa on hyvä kiinnittää huomiota myös yleistettävyyteen. Aineiston koon ja luonteen vuoksi tuloksemme eivät ole yleistettävissä. Tutkimuksemme tarkoituksena ei kuitenkaan ollut yleistäminen, vaan oppilaiden ja opettajien matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyn kokemisen kuvaaminen ja ymmärtäminen. Tätä kautta tarkoituksenamme oli löytää mahdollisia perusteita kirjallisen kielentämisen kokeiluun ja käyttöön peruskoulussa sekä selvittää, miten aiheen tutkimusta kannattaisi tulevaisuudessa jatkaa.

7.2 Pohdinta

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyttä sekä oppilaan että opettajan näkökulmasta. Aiheemme oli jaettu kahteen pääongelmaan. Ensimmäisessä tutkimme kirjallisen kielentämisen hyötyä oppilaalle oppilaiden kokemusten ja opettajien näkemysten pohjalta. Tämän tutkimusongelmamme kohdalla tarkastelimme alakysymysten avulla, minkälaiset oppilaat voisivat hyötyä kirjallisesta kielentämisestä matematiikassa. Tähän liittyviä ominaisuuksia olivat matematiikan osaamisen ja kirjoittamisen loogisuuden taso, kirjoittamisen mielekkyys, oppilaan käsitys itsestään matematiikan osaajana, sukupuoli sekä luokkataso. Tarkastelimme ensimmäistä ongelmaamme kahdelta kannalta: oppilaan oman kokeman hyödyn sekä kielennyksen seuraajan kannalta. Toinen pääongelmamme keskittyi tarkastelemaan opettajan hyötymistä, kun oppilas kielentää kirjallisesti matemaattista ajatteluaan.

Onnistuimme aineistomme avulla saamaan vastaukset kaikkiin tutkimuskysymyksiimme. Vaikka kaikki tulokset eivät olekaan tilastollisesti merkitseviä, saimme kuitenkin käyttökelpoista tietoa kirjallisen kielentämisen hyödyllisyyteen liittyen: Tulostemme mukaan moni oppilas ja opettaja kokivat hyötyvänsä kirjallisesta kielentämisestä matematiikassa. Oppilaat kokivat

kirjallisen kielentämisen jäsentävän heidän ajatuksiaan ja auttavan heitä ymmärtämään matematiikan tehtävän paremmin. Kirjallisen kielentämisen kahdesta tutkimastamme osa-alueesta oppilaat kokivat piirtämisen auttavan heitä enemmän kuin omin sanoin kirjoittamisen, vaikka poikkeuksiakin löytyi. Tutkimuksemme antaa viitteitä siitä, että keskitason matematiikan osaajat kokevat hyötyvänsä matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä enemmän kuin hyvät tai heikot osaajat. Lisäksi kirjoittamisen mieluisuus oli yhteydessä kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi kokemiseen matematiikassa: mitä enemmän oppilas piti kirjoittamisesta, sen hyödyllisemmäksi hän koki kirjallisen kielentämisen.

Luokkatasoja tarkastellessa tuloksemme mukaan kolmasluokkalaiset näyttivät hyötyvän matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen toisesta osasta, omin sanoin kirjoittamisesta enemmän kuin viides- tai seitsemäsluokkalaiset. Muiden tarkastelemiemme ominaisuuksien suhteen emme voi tulosten perusteella tehdä johtopäätöksiä kirjallisen kielentämisen koetuista hyödyistä matematiikassa.

Opettajien kohdalla kielentäminen kirjallisesti matematiikassa näytti koetun hyödyn painottuvan oppilaan arviointiin ja hänen ajattelunsa tarkasteluun: kirjallisesti kielennetty esitys antoi suurimman osan opettajien mielestä mahdollisuuden seurata kaikkien oppilaiden matemaattista ajattelua ja ratkaisustrategioita. Näin ollen kirjallinen kielentäminen nähtiin apuna oppilaan arviointiin, kun tuotoksista oli mahdollista huomata mahdolliset virheet paremmin.

Tutkimusnäytteemme suhteellisen pienen koon vuoksi, tuloksemme eivät ole yleistettävissä. Tutkimuksen tarkoituksena ei ollutkaan yleistäminen vaan lähinnä tutkimuskohteemme oppilaiden ja opettajien kokeman matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyn ymmärtäminen ja kuvaaminen. Tavoitteenamme olikin siis tutkia ilmiötä koulutyöskentelyn näkökulmasta; kannattaako matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen käyttöä kokeilla oppilaiden kanssa. Lisäksi tarkoituksenamme oli tulosten kautta pohtia, kannattaako ilmiötä tutkia tarkemmin ja, jos kannattaa, niin miten.

Koska tutkimuksessamme kävi ilmi, että monet oppilaat ja opettajat kokivat matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödylliseksi, voimme todeta, että sen käyttö sanallisia tehtäviä ratkoessa on perusteltua. Opettajien kannattaisi ainakin esitellä kirjallinen kielentäminen yhtenä sanallisten tehtävien ratkaisun työvälineenä oppilaille, jotta he saisivat tutustua siihen. Kuten tuloksemmekin osoittivat, kaikki eivät hyödy kirjallisesta kielentämisestä, mutta on erittäin oletettavaa, että ainakin osa oppilaista löytäisi siitä itselleen hyvän työskentelymuodon. Lisäksi he, jotka kokisivat siitä hyötyvänsä, voisivat käyttää sitä apuna aina tarvittaessa, sillä kuten tuloksemmekin osoittivat, kielentämisen käyttö ei kuitenkaan ole aina perusteltua ja tarpeellista.

Olemme tyytyväisiä käyttämiimme menetelmiin, sillä saimme niiden avulla kattavat vastaukset tutkimusongelmiimme. Olemme kuitenkin sitä mieltä, että olisimme voineet käyttää menetelmiä vielä paremmin. Jos tekisimme tutkimuksen uudelleen muokkaisimme kyselylomaketta tarkoituksenmukaisemmaksi. Lisäisimme siihen muutaman väittämän, jotta saisimme vielä kattavamman kuvan piirtämisen hyödyllisyydestä ja kirjoittamisen mieluisuudesta. Tällaisia väittämiä voisivat olla esimerkiksi: ”Piirtäminen sanallista tehtävää ratkaistessa auttaa minua ymmärtämään tehtävää paremmin.” ja ”Kirjoittaminen on minusta tylsää.”. Olisi myös aiheellista muokata avoimia kysymyksiä siten, että ne vastaisivat kattavammin piirtämisestä koettuun hyötyyn. Tuloksemme nimittäin olivat hiukan kattavampia omin sanoin kirjoittamisen osalta. Teemahaastatteluun ja analysointimenetelmiimme olemme tyytyväisiä.

Menetelmien lisäksi olemme pohtineet kielentämisjakson onnistumista. Toteutimme jakson suhteellisen lyhyenä, mistä johtuen kaikki oppilaat eivät ehkä saaneet täysin kokonaisvaltaista käsitystä matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä työskentelymuotona. Pitempi jakso olisi voinut olla tarkoituksen mukaisempi, kun oppilailla olisi ollut aikaa tutustua työtapaan paremmin. Lisäksi useat oppilaat sanoivat, että koska tehtävät olivat heille helppoja, he eivät hyötäneet matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä. Olisikin varmasti ollut hyvä, jos tehtävien joukossa olisi ollut niin vaativia tehtäviä, että ne olisivat olleet lahjakkaimmillekin oppilaille vaikeita. Tällöin he olisivat saattaneet kokea kirjallisen kielentämisen hyödyn eri tavalla, mihin opettajatkin olivat kiinnittäneet huomiota. Myös Lee (2006, 4, 81) näkee tehtävien haastavuuden tärkeänä: Tehtävien ollessa riittävän haastavia, oppilaat voivat oppia uusia asioita tehokkaammin. Ja etenkin kielentämisen yhteydessä tehtävien tulee olla haastavia, sillä kirjallisesti kielentäminen ei ole perusteltua helppojen tehtävien kohdalla (mts. 4, 81).

Oman tutkimuksemme myötä esiin nousi uusia tutkimusideoita. Koska tutkimuksestamme saamat tulokset eivät näytteemme pienuuden takia ole yleistettävissä, matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyötyjä olisi oleellista tarkastella suuremmalla tutkimusnäytteellä. Näin ollen hyödyistä saatava kuva olisi kattavampi ja yleistettävämpi. Tutkimuksemme avulla saimme tietoa siitä, että kirjallisesta kielentämisestä on hyötyä. Jatkossa olisi mielenkiintoista tietää, missä tilanteissa tai minkälaisien tehtävien yhteydessä matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen olisi hyödyn kannalta perusteltua. Lisäksi voisi tutkia myös kirjallisesti kielennetyn esityksen esittämisen hyödyllisyyttä sekä esittäjän että seuraajan näkökulmasta. Kielentämisen avulla oppilas voi tuoda esille oman ajattelunsa myötä ratkaisustrategioitaan. Jatkotutkimusaiheena voisi taten olla oppilaan ongelmanratkaisutaidot ja se, miten matemaattisen ajattelun kielentäminen kehittää niitä. Lisäksi opettajien kannalta kirjallista kielentämistä voisi tutkia arviointimenetelmänä ja työvälineenä opetuksessa.

LÄHTEET

Autonen, P. & Melartin, A. 2004. "Hei, kielennetään matematiikkaa". Toiminta tutkimus matematiikan kielentämisestä esiopetusryhmässä. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos, Hämeenlinnan toimipaikka. Pro gradu -tutkielma.

Burton, L. 1984. Mathematical thinking: The struggle for meaning. Journal for research for mathematics education. Volume 15. Number 1. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 35–49.

Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Vastapaino.

Forsblom, K. 2003. "Jee! Meillä on geometriaa!" Oppimateriaali geometrisen ajattelun kehittämiseen. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos, Hämeenlinnan toimipaikka. Pro gradu -tutkielma.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. 2002. Rethinking characterizations of beliefs. Teoksessa G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (toim.) Beliefs: a hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 39–57.

Grevholm, B. & Hanna, G. (toim.) 1995. Gender and mathematics education. An ICMI study in Stiftsgården Åkersberg, Höör, Sweden 1993. Lund: Lund University Press.

Gupta, A. 2006. Empiricism and experience. New York, NY: Oxford University Press. E-kirja. Viitattu 27.5.2010 <http://helios.uta.fi:2065/lib/tampere/docDetail.action?docID=10160603>

Irons, R. R. & Irons, C. J. 1989. Language experiences. A base for problem solving. Teoksessa P. R. Trafton & A. P. Shulte (toim.) 1989 Yearbook. New directions for elementary school mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 85–98.

Haapasalo, L. 1998. Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. -Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 52–79.

Halliday, M. A. K. 1974. Language and social man. Schools council programme in linguistics and english teaching: Papers series II. Volume 3. London: Longman.

Halliday, M. A. K. 1978. Language as social semiotic. The social interpretation of language and meaning. London: Edward Arnold.

Halliday, M. A. K. & Hasan, R. 1985. Language, context, and text: aspects of language in a social-semiotic perspective. Oxford: Oxford University Press.

Hanna, G. (toim.) 1996. Towards gender equity in mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hannula, M. S., Kupari, P., Pehkonen, L., Räsänen, P. & Soro, R. 2004. Matematiikka ja sukupuoli. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti, 170–197.

- Heikkilä, T. 1998. Tilastollinen tutkimus. Helsinki: Edita Publishing Oy.
- Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 2000. Tutkimushaastattelu. Teemahaastattelun teoria ja käytäntö. Helsinki: Yliopistopaino.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 1997. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.
- Huisman, T. 2006. Luen, kirjoitan ja ratkaisen. Peruskoulun kolmasluokkalaisten oppimistulokset äidinkielessä ja kirjallisuudessa sekä matematiikassa. Oppimistulosten arviointi 7/2006. Helsinki: Opetushallitus.
- Høines, M. J. 2000. Matematik som språk. Verksamhetsteoretiska perspektiv. Malmö: Liber AB.
- Joutsenlahti, J. 2003a. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B:72, 188–196.
- Joutsenlahti, J. 2003b. Matemaattinen ajattelu ja kieli – mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetussuunnitelmassa. Teoksessa Projekteja ja prosesseja - opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 8. Hämeenlinna: Hämeenlinnan normaalikoulu, 3–12.
- Joutsenlahti, J. 2004. Matemaattinen ajattelun lukiossa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 363–380.
- Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Acta Universitatis Tamperensis 1061. Tampere: Tampereen yliopistopaino Oy.
- Joutsenlahti, J. 2009. Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9. Rovaniemi: Lapin yliopistopaino, 71–86.
- Joutsenlahti, J. 2010. Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. (Matematiikan ja luonnontieteiden tutkimuspäivät Joensuussa 2009.) (Käsikirjoitus hyväksytty tutkimuspäiväjulkaisuun.)
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2010. Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktikat. Ainedidaktinen symposiumi 13.2.2009 Tampereella. Tampere: Tampereen yliopistopaino, 77–89.
- Joutsenlahti, J. & Silfverberg, H. 2007. Case-analyysi kulman käsitteen tulkinnasta. Teoksessa J. Lavonen (toim.) Tutkimusperustainen opettajankoulutus ja kestävä kehitys. Ainedidaktinen symposiumi Helsingissä 3.2.2006 osa 1. Helsingin yliopisto. Tutkimuksia 285, 341–348.

- Kaasila, R., Hannula, M. S., Laine, A. & Pehkonen, E. 2007. Millä tavalla luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuvan muutosta voidaan edistää? Teoksessa J. Lavonen (toim.) Tutkimusperustainen opettajankoulutus ja kestävä kehitys. Ainedidaktinen symposiumi Helsingissä 3.2.2006 osa 1. Helsingin yliopisto. Tutkimuksia 285, 349–359.
- Koppinen, M-L., Lyytinen, P. & Rasku-Puttonen, H.1989. Lapsen kieli ja vuorovaikutustaidot. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Korkeakoski, E. 2001. Perusopetuksen äidinkielen oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla keväällä 2000. Kirjoituskokeiden tulokset, asenteet äidinkieltä kohtaan ja yhteydet taustamuuttujiin. Oppimistulosten arviointi 1/2001. Helsinki: Opetushallitus.
- Kulju, P. & Joutsenlahti, J. 2010. Mitä annettavaa äidinkielellä ja matematiikalla oppiaineina voisi olla toisilleen? Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktikat. Ainedidaktinen symposiumi 13.2.2009 Tampereella. Tampere: Tampereen yliopistopaino, 163–178.
- Kupari, P., Reinikainen, P., Nevanpää, T. & Törnroos, J. 2001. Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Kolmas kansainvälinen matematiikka- ja luonnontiedetutkimus TIMSS 1999 Suomessa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos.
- Laine, T. 2007. Miten kokemusta voidaan tutkia? Fenomenologinen näkökulma. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin II. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin. 2. korjattu ja täydennetty painos. Jyväskylä: PS-kustannus, 28–45.
- Lappalainen, H-P. 2003. Osaat lukea – miten osaat kirjoittaa? Perusopetuksen 6. vuosiluokan suorittaneiden äidinkielen ja kirjallisuuden oppimistulosten arviointi 2002. Oppimistulosten arviointi 4/2003. Helsinki: Opetushallitus.
- Lappalainen, H-P. 2008. On annettu hyviä numeroita. Perusopetuksen 6. vuosiluokan suorittaneiden äidinkielen ja kirjallisuuden oppimistulosten arviointi 2007. Oppimistulosten arviointi 3/2008. Helsinki: Opetushallitus.
- Leder, G. C. 1992. Mathematics and gender: changing perspectives. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan Publishing Company. 597–622.
- Lee, C. 2006. Language for learning mathematics. Assessment for learning in practise. Maidenhead: Open University Press.
- Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmaratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 298. Jyväskylän yliopisto.
- Linnakylä, P., Kupari, P., Törnroos, J., & Reinikainen, P. 2005. Sukupuolierot lukutaidossa, matematiikan ja luonnontieteiden osaamisessa sekä ongelmanratkaisussa. Teoksessa P., Kupari & J., Välijärvi (toim.) Osaaminen kestäväällä pohjalla. PISA 2003 Suomessa. Jyväskylä: Gummerus Oy, 105–114.

- Masingila, J. O. & Prus-Wisniowska, E. 1996. Developing and assessing mathematical understanding in calculus through writing. Teoksessa P.C. Elliot & M. J. Kenney (toim.) 1996 Yearbook. Communication in mathematics, K-12 and beyond. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 95-103.
- Meaney, T. 2005. Mathematics as text. Teoksessa A. Chronaki & I. M. Christiansen (toim.) Challenging perspectives on mathematics classroom communication. A volume in international perspectives on mathematics education. Greenwich, CT: Information Age Publishing, 109-141.
- Metsämuuronen, J. 2006. Äidinkielen ja kirjallisuuden oppimistulosten ja asenteiden muuttuminen perusopetuksen ylempien vuosiluokkien aikana. Oppimistulosten arviointi 3/2006. Helsinki: Opetushallitus.
- Meyer, M. R. & Fennema, E. 1988. Girls, boys, and mathematics. Teoksessa T. R. Post (toim.) Teaching Mathematics in Grades K-8. Research Based Methods. Newton, MA: Allyn and Bacon, Inc., 406-425.
- Morgan, C. 1998. Writing mathematically. The discourse of investigation. Studies in mathematics education series 9. London: RoutledgeFalmer.
- Morgan, C. 2001. The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. Teoksessa P. Gates (toim.) Issues in mathematics teaching. London: RoutledgeFalmer, 232-244.
- MOT kielitoimiston sanakirja 2.0. Tulostettu 3.5.2010
<http://mot.kielikone.fi/mot/uta/netmot.exe?motportal=80>
- Mäcklin, J. & Nikula, M. 2009. Kirjallinen kielentäminen matematiikassa. Kirjallisen kielentämisen yhteys äidinkielen ja matematiikan osaamiseen sekä sukupuoleen alakoulussa. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos, Hämeenlinnan toimipaikka. Kandidaatin tutkielma.
- Niemi, E. K. 2004. Perusopetuksen oppitulosten kansallinen arviointi ja tulosten hyödyntäminen koulutuspoliittisissa kontekstissa. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000. Turun yliopiston julkaisuja. C 216.
- Niemi, E. K. 2008. Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2007. Oppimistulosten arviointi 1/2008. Helsinki: Opetushallitus.
- Näätänen, M. 2000. Matematiikka, naiset ja osaamisyhteiskunta. Vantaa: Tummavuoren Kirjapaino Oy.
- Oinonen, L. & Takaniemi, J. 2005. "Kesken selityksen tulee ahaa-elämys". Tutkimus perusopetuksen 3.-5. -luokkalaisten matematiikkakuvista ja kielentämisestä. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos, Hämeenlinnan toimipaikka. Pro gradu -tutkielma.
- Opetushallitus. 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Tulostettu 12.4.2010
http://www.oph.fi/ops/perusopetus/pops_web.pdf
- Op't Eynde, P., de Corte, E. & Verschaffel, L. 2002. Framing students' mathematics-related beliefs. A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorizations. Teoksessa G.C. Leder, E.

Pehkonen & G. Törner (toim.) Beliefs: a hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 13–38.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). N.d. OECD Programme for International Student Assessment (PISA). Viitattu 17.5.2010
http://www.pisa.oecd.org/pages/0,3417,en_32252351_32235731_1_1_1_1_1,00.html

Pehkonen, E. 1995. Pupils' view of mathematics. Initial report for an international comparison project. Department of teacher education. University of Helsinki. Research report 152.

Pehkonen, E. 1998. On the concept "mathematical belief". Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.) The state-of-art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities. University of Helsinki. Department of teacher education. Research report 195, 37–72.

Pietilä, A. 2002. Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva. Matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 23.

Pimm, D. 1987. Speaking mathematically. Communication in classrooms. London: Routledge & Kegan Paul.

Rinne, R., Kivirauma, J. & Lehtinen, E. 2004. Johdatus kasvatustieteisiin. Helsinki: WSOY.

Rowland, T. 1995. Between the lines: The languages of mathematics. Teoksessa J. Anghileri (toim.) Children's mathematical thinking in the primary years. Perspectives on children's learning. Children, teachers and learning series. London: Cassell, 54–73.

Saariluoma, P. 1990. Taitavan ajattelun psykologia. Helsinki: Otava.

Selter, C. 2009. Stimulating reflection on word problems by means of students' own productions. Teoksessa L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Múkhopadhyäy (toim.) Words and worlds. Modelling verbal descriptions of situations. Rotterdam: Sense Publishers, 315–331.

Senn-Fennell, C. 2000. Oral and written communication for promoting mathematical understanding: Teaching examples from grade 3. Teoksessa I. Westbury, S. Hopmann & K. Riquart. Teaching as a reflective practise. The German didaktik tradition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 223–266.

Shield, M. & Swinson, K. 1996. The link sheet: A communication aid for clarifyin and developing mathematical ideas and processes. Teoksessa P.C. Elliot & M. J. Kenney (toim.) 1996 Yearbook. Communication in mathematics, K–12 and beyond. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 35–39.

Soro, R. 2002. Opettajien uskomukset tytöistä, pojista ja tasa-arvosta matematiikassa. Turun yliopiston julkaisuja. C 191.

Tashakkori, A. & Creswell, J. W. 2007. The new era of mixed methods. Journal of mixed methods research. 1/07, 3–7. Tulostettu 3.5.2010 <http://mmr.sagepub.com/cgi/reprint/1/1/3>

Törnroos, J. & Kupari, P. 2005. Suomalaisnuorten matematiikan osaaminen. Teoksessa P. Kupari & J. Välijärvi (toim.) Osaaminen kestäväällä pohjalla. PISA 2003 Suomessa. Jyväskylä: Gummerus Oy, 7–36.

Usiskin, Z. 1996. Mathematics as a language. Teoksessa P.C. Elliot & M. J. Kenney (toim.) 1996 Yearbook. Communication in mathematics, K–12 and beyond. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 231–243.

Uusitalo, H. 1991. Tiede, tutkimus ja tutkielma. Johdatus tutkielman maailmaan. 1.–7. painos. Helsinki: WSOY.

Vygotsky, L. S. 1982. Ajattelu ja kieli. Suom. K. Helkama & A. Koski-Jännes. Espoo: Weilin+Göös.

Walkerdine, V. 1998. Counting girls out. Girls and mathematics (new edition). London: Falmer Press.

Within, D. J. & Within, P. E. 1998. The “write” way to mathematical understanding. Teoksessa L. J. Morrow & M. J. Kenney (toim.) The teaching and learning of algorithms in school mathematics. 1998 Yearbook. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 161–169.

Yrjönsuuri, R. 1998a. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 128–141.

Yrjönsuuri, R. 1998b. Opiskelun taidon ja matematiikan osaamisen arvioiminen. Helsingin kaupungin opetusviraston julkaisusarja A12:1998.

Zevenbergen, R. 2000. ”Cracking the code” of mathematics classrooms: School success as a function on linguistic, social, and cultural background. Teoksessa J. Boaler (toim.) Multiple perspectives on mathematics teaching and learning. Westport, CT: Ablex Publishing, 201–223.

LIITTEET

Liite 1: Esimerkki standardi-mallista

Liite 1

5. Kapteeni Mustaparta järjesteeleee aarrearkkuaan. Hän laittaa kultakolikot 20 kolikon pinoihin ja hopearahat 10 kolikon pinoihin. Kuinka paljon kolikoita on yhteensä, kun kultakolikkopinoja on 6 ja hopearahapinoja 9?

120 60 90 210

$$9 \cdot 10 = 90$$
$$20 \cdot 6 = 120$$
$$90 + 120 = 210$$

Tulos: 210 kolikoa

4. Itku-livari itkeä pillitti seitsemän minuuttia aina, kun joku nimitteli häntä, ja kolme kertaa kauemmin, jos hän jäi ilman paria liikuntatunnilla – niin herkkä hän oli. Aina kun hän sai joltain tytöltä rakkauskirjeen, Itku-livari vollotti kolme kertaa kauemmin kuin ilman paria jäätyään. Eräänä päivänä hän sai neljä eri rakkauskirjettä. Kuinka kauan Itku-livari oli itkemättä koulussa, kun koulua oli tuona päivänä tasan viisi tuntia?

Kun hän jäi ilman paria, hän itki

$$7 \text{ min} \cdot 3 = 21 \text{ min}$$

Kun hän sai rakkauskirjeen hän itki

$$21 \text{ min} \cdot 3 = 63 \text{ min}$$

Kun hän sai 4 rakkauskirjettä hän itki

$$4 \cdot 63 \text{ min} = 252 \text{ min} = 4 \text{ h } 12 \text{ min}$$

Silloin hän oli itkemättä

$$48 \text{ min}$$

Vastaus: Itku-livari oli itkemättä 48 minuuttia.

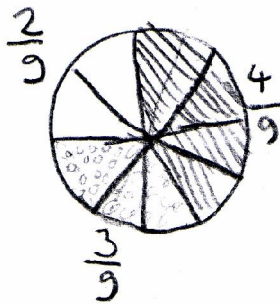
1. Pelle Hermanni järjestää kakunheittokilpailun ja jakoi kakun yhdeksään osaan. Kakusta saa siis heittää kerralla vain $\frac{1}{9}$. Maila heittää 4 kertaa ja Uolevi 3 kertaa. Kuinka monta kertaa Salme saa heittää, kun hän heittää kaikki jäljellä olevat kakkupalat?

Ensin lasken kuinka paljon Maila ja Uolevi heittivät yhteensä. Sitten vähennän sen kokonaisuudesta, jolloin saan tietää kuinka monta kertaa Salme heitti.

$$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{9}{9} - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

Vi: Salme saa heittää 2 kertaa.



17. Peppi oli menossa Tommin syntymäpäiville ja kävi matkalla ostamassa lahjan. Hän astui kaupan ovesta sisään klo 13.00. Lahjanvalinta oli vaikeaa, joten Pepin kauppareissussa kului 20 minuuttia ja Tommin kotiin ratsastamisessa vielä 15 minuuttia.

a) Ehtikö Peppi ajoissa syntymäpäiväkutsuille, kun ne alkoivat klo 13.30?

b) Kuinka paljon nopeammin Pepin olisi täytynyt suoriutua kauppareissusta, jotta hän olisi ehtinyt ajoissa kutsuille?

17. Tommin syntymäpäivät alkavat 13.30

Pepin kauppareissu kesti 20 minuuttia, ja Peppi meni kauppaan klo 13.00. Kun Peppi meni

Tommin luo, siinä kesti 15 minuuttia.

20 + 15 = 35 minuuttia lisä 15 minuuttia, niin siitä tulee 35 min. Kun Peppi meni kauppaan klo: 13.00, ja Tommin syntymäpäivät alkoivat

klo: 13.30 niin Peppi myöhästyi syntymäpäivästä viisi minuuttia.

Kauppakeskuksen aulassa on kolme hissiä. 42 mummoa kiirehtivät alennusmyynneille ja säntäävät hisseihin. Ensimmäiseen hissiin tunkeutuu 14 mummoa. Toiseen puolestaan ehtii 3 mummoa vähemmän kuin ensimmäiseen hissiin. Loput mummot änkeävät väkisin kolmanteen hissiin. Lähtekö hissi liikkeelle, kun seinässä olevan kyltin mukaan hissien sallittu kuormitus on 15 henkilöä?

Lasketaan kuinka monta mummoa menee keskimäärin
 $42 : 3 = 14$ yhteensä
 hissiin

Jos seuraavaan hissiin menee 3 vähemmän
 keskimäärin viimeiseen menee liika

Vastaus: Kolmas hissi ei nouse

1. Kahden viikon Interrail-lippu maksaa aikuiselta 430 € ja lapselta puolet siitä. Reissulla on mukana 8 lasta ja 47 aikuista. Kuinka paljon matkustajat ovat kuluttaneet lippuihin yhteensä rahaa, kun tiedetään, että kaksi aikuista matkustaa ilman lippua?

$$430\text{€} : 2 = 215\text{€} \text{ ensin lasketaan lasten lippu hinta}$$

$$8 \cdot 215\text{€} = 1720\text{€} \text{ sitten lasketaan lasten oman kulutus}$$

$$430\text{€} \cdot 47 = 20210 \text{ sitten aikuisten rahankulutus}$$

$$1720 + 20210 = 21930 \text{ sitten saadaan lippujen yhteistulos}$$

$$21930 - 430 \cdot 2 = 21070 \text{ sitten otetaan lippuottomien rahat pois}$$

Vastaus: rahaa kulutetaan yhteensä 21070€

Hei!

Olemme kaksi luokanopettajaopiskelijaa Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitokselta. Opiskelemme neljännellä vuosikurssilla ja työstämme tällä hetkellä pro gradu -tutkielmaamme. Tutkielmamme koskee matemaattisen ajattelun kirjallista kielentämistä. Etsimme tutkimukseemme ensisijaisesti 3., 5. ja 7. luokkia, jotka olisivat kiinnostuneita oppimaan uuden, mielekkään ja omaa ratkaisuprosessia kehittävän työskentely- ja esitystavan matematiikan ongelmanratkaisuun. Kielentämisen avulla opettaja saa myös oppilaiden ohjaamiseen ja arviointiin uusia keinoja.

Kielentämisellä tarkoitetaan matemaattiseen prosessiin liittyvää oman ajattelun ilmentämistä luonnollisen kielen avulla suullisesti ja kirjallisesti. Sen avulla voidaan jäsentää omaa ajattelua ja tehdä prosessi näkyväksi muille, sillä kielen avulla kielentävä henkilö perustelee ja reflektoi ajatuksiaan sekä käsityksiään itselleen tai muille. Tämän tutkimuksen kannalta oleellinen käsite on kirjallinen kielentäminen, jolla tarkoitamme matematiikan yhteydessä kirjallisesti tuotettua ratkaisuprosessia. Ratkaisuprosessissa kielentäjä tuo omin sanoin kirjoittaen tai piirtäen esille sen, mitä on ajatellut matematiikan tehtävää ratkaistessaan.

Tutkimustehtävänä on selvittää, ketkä hyötyvät matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä. Selvitämme esimerkiksi, millaiset matematiikan ja kirjoittamisen osaajat hyötyvät kielentämisestä sekä löytyykö sukupuolten tai ikäryhmien välillä eroa kielentämisen hyödylliseksi kokemisessa. Olemme tutkineet kielentämisen hyötyä jo viime vuonna tekemässämme kandidaatin tutkielmassa, jossa havaitsimme osan oppilaista kokevan kielentämisen hyödylliseksi. Kohdeluokassamme esimerkiksi heikommin matematiikassa menestyvät oppilaat kokivat hyötyvänsä kirjallisesta kielentämisestä enemmän kuin hyvin menestyvät oppilaat.

Tarkoituksenamme olisi tavata kunkin tutkimukseen osallistuvan opettajan kanssa ennen joulua, jotta voimme suunnitella kielentämisjakson toteutusta. Aikomuksenamme olisi toteuttaa tutkimuksen käytännön osa helmikuun 2010 aikana. Tuolloin keräisimme tutkimukseen tarvittavan aineiston, johon tarvitsemme opettajien tekemiä arvioita oppilaiden matematiikan osaamisesta ja kirjoittamisen sujuvuudesta. Tämän lisäksi tarvitsemme oppilaiden kielentämisjakson aikana tekemiä tehtäviä. Osan tehtävistä laatisimme itse ja osan saisimme luokassa käytettävien oppimateriaalien tehtävistä.

Tarkoituksenamme olisi opettaa jokaisessa luokassa yhdestä kahteen tuntiin matematiikan kirjallista kielentämistä, jonka jälkeen kielentämistä käytettäisiin helmikuun aikana yhtenä työskentelymuotona, osana normaalia matematiikan luokkatyöskentelyä. Kielentämisjakson päätyttyä keräämme oppilaiden kokemuksia kyselylomakkeella, joka sisältää monivalintakysymyksiä sekä avoimia kysymyksiä. Syvennämme kyselylomakkeen vastauksia opettajien haastatteluilla.

Toivomme, että saamme projektiimme mukaan innostuneita ja sitoutuvia luokkia. Ilmoittaisitteko meille 13.11.2009 mennessä, haluatteko te osallistua tutkimukseemme? Toivomme myös, että otatte meihin yhteyttä, jos kiinnostutte tutkimuksestamme ja/tai haluatte lisätietoa projektistamme.

Yhteistyöterveisin

Joanna Mäcklin ja Marjo Nikula

joanna.macklin@uta.fi, 041-5467224

marjo.nikula@uta.fi, 040-7581267

Hyvät vanhemmat!

25.11.2009

Opiskelemme Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitoksella ja teemme tällä hetkellä pro gradu -tutkielmaa matemaattisen ajattelun kirjallisesta kielentämisestä. Tarkemmin sanottuna tutkimme, ketkä kokevat hyötyvänsä matematiikan ratkaisuprosessin esittämisestä omin sanoin kirjoittaen tavallisen numeerisen esityksen ohella.

Tutkimuskohteemme muodostuu kuudesta luokasta. Lapsenne opettaja on kiinnostunut osallistumaan luokkansa kanssa pro gradu –tutkielmaamme. Kysymmekin nyt lupaa, saako lapsenne osallistua tutkimukseemme. Oppilaiden nimiä tai koulua ei julkaista raportoinnin yhteydessä.

Meihin voi ottaa yhteyttä sähköpostitse, jos asiasta ilmaantuu kysymyksiä.

Yhteistyöterveisin,
Joanna Mäcklin ja Marjo Nikula

joanna.macklin@uta.fi, 040 5467224

marjo.nikula@uta.fi, 040 7581267

Palautus _____ mennessä

Lapseni _____

___ saa osallistua tutkimukseen

___ ei saa osallistua tutkimukseen.

Huoltajan allekirjoitus ja nimenselvennys:

Liite 8: Tutkimuslomake**Liite 8(1)**

Nimi: _____

Sukupuoli: ___ tyttö ___ poika

Luokka: _____

Koulu: _____

Vastaa seuraaviin väittämiin laittamalla rasti (x) ruutuun.

+ + TÄYSIN SAMAA MIELTÄ

+ JOKSEENKIN SAMAA MIELTÄ

0 EN OSAA SANOA

- JOKSEENKIN ERI MIELTÄ

- - TÄYSIN ERI MIELTÄ

VÄITTÄMÄT	++	+	0	-	--
Pidän kirjoittamisesta.					
Kirjoittaminen on mielestäni helppoa.					
Mielestäni olen hyvä matematiikassa.					
Minulla on usein onnistumisen kokemuksia opiskellessani matematiikkaa.					
Pystyn selviytymään vaikeistakin matematiikan tehtävistä.					
Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin useimmille muille.					
Minä en ole kovin hyvä matematiikassa.					
Epäonnistun usein matematiikassa.					
Minun mielestäni sanallisten tehtävien ratkaisemisessa kannattaisi kirjoittaa perusteluja näkyviin laskutoimitusten oheen.					
Matematiikan tehtävän selittäminen omin sanoin auttaa minua tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemisessä.					
Ratkaisen tehtävän mieluiten siten, että kirjoitan omin sanoin, mitä lasken.					
Kuvan piirtäminen auttaa minua tehtävän ratkaisemisessä.					
Minusta omin sanoin kirjoittaminen sanallista tehtävää ratkaistaessa on turhaa.					
Aion jatkossakin kirjoittaa omin sanoin matematiikan opiskelussa.					
Omin sanoin kirjoittaminen auttaa muita ymmärtämään, miten olen tehtävän tehnyt.					
Pidän omin sanoin kirjoittamisesta sanallista tehtävää ratkaistessa.					

TEEMAHAASTATTELUN RUNKO

AIHE: Matemaattisen ajattelun kirjallisen kielentämisen hyödyllisyys oppilaan ja opettajan näkökulmasta

1. Kirjallinen kielentäminen yleisesti työtapana
2. Kirjallisen kielentämisen hyviä ja huonot puolet
3. Kirjallisen kielentämisen apu tai haitta
4. Hyödyn kokeminen eri ominaisuuksien suhteen:
 - matematiikan osaaminen
 - oppilaan käsitys itsestään matematiikan oppijana
 - kirjoittamisen loogisuus
 - kirjoittamisen mieluisuus
 - sukupuoli
5. Työtavan soveltuminen eri luokkatasoille
6. Opettajan kokema hyöty oman työn kannalta
7. Muuta kommentoitavaa

3. luokan esimerkkitehtävät

1. Vernerillä on 78 € ja Lyyllä 36 € rahaa. He yhdistävät rahansa ja ostavat kepposta varten valejuput. Juput maksavat yhteensä 98 €. Kuinka paljon heille jää rahaa jäljelle?

Rahat yhteensä

$$78+36=114\text{€}(\text{lasketaan allekkain})$$

Rahaa jää

$$114-98=16\text{ €}(\text{lasketaan allekkain})$$

Vastaus: Heille jää rahaa 16 euroa.

2. Isoäiti leipoi metsästäjälle kiitokseksi kakun. Metsästäjä söi kakusta $\frac{3}{8}$ ja isoäiti $\frac{2}{8}$. Punahilkka söi kakun loppuun. Kuinka paljon kakkua hän söi?

Isoäiti ja metsästäjä söi

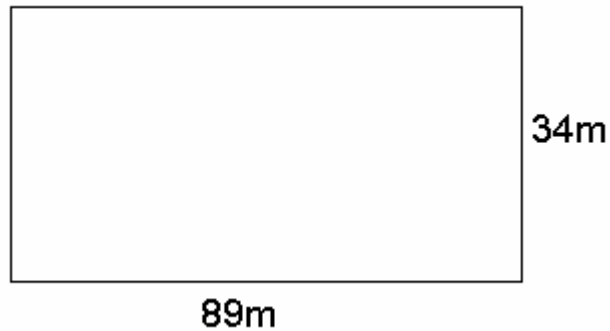
$$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$$

Punahilkalle jäi

$$\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

Vastaus: Punahilkka söi kakusta $\frac{3}{8}$.

3. Kalle söi rehtorin suklaakakun salaa aamupäivän välitunnilla. Rehtori saapui huoneeseensa juuri, kun Kalle oli nielaisemassa viimeistä kakkupalaa. Kalle lähti pinkomaan rehtoria karkuun. Rehtori säntäsi perään ja Kalle alkoi kiertää koulua tarkoituksenaan väsyttää rehtori. Kallen huonoksi onneksi rehtorin kunto oli kuitenkin parempi kuin hänen omansa. Rehtori sai hänet kiinni 4 kierroksen jälkeen. Kuinka pitkän matkan he juoksivat, kun tiedetään, että koulun pituus on 89 m ja leveys 34 m?



Koulun piiri

$$89\text{m}+89\text{m}+34\text{m}+34\text{m}=246\text{m} \text{ (lasketaan allekkain)}$$

Juoksumatka

$$246\text{m} \times 4 = 984\text{m} \text{ (lasketaan allekkain)}$$

Vastaus: He juoksivat 984 metriä.

5. luokan esimerkkitehtävät

1. Vernerillä on 78 € ja Lyyllillä 36 € rahaa. He yhdistävät rahansa ja ostavat kepposta varten valepuvut. Puvut maksavat yhteensä 98 €. Kuinka paljon heille jää rahaa jäljelle?

Rahat yhteensä

$$78+36=114\text{€} \text{ (lasketaan allekkain)}$$

Rahaa jää

$$114-98=16 \text{ €} \text{ (lasketaan allekkain)}$$

Vastaus: Heille jää rahaa 16 euroa.

2. Vernerillä on 78 € ja Lyyllillä 36 € rahaa. He yhdistävät rahansa ja ostavat kepposta varten valepuvut. Puvut maksavat yhteensä 98 €. Kuinka paljon heille jää rahaa jäljelle?

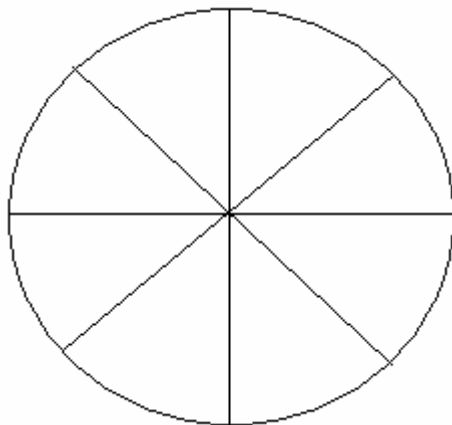
Selvitän ensin, kuinka paljon rahaa Vernerillä ja Lyyllillä on yhteensä. Tämän jälkeen lasken, kuinka paljon heille jää rahaa ostosten jälkeen.

$$78 + 36 = 114 \text{€ (lasketaan allekkain)}$$

$$114 - 98 = 16 \text{€ (lasketaan allekkain)}$$

Vastaus: Heille jää rahaa 16 euroa.

3. Punahilkkan Isoäiti leipoi suden kukistaneelle metsästäjälle kiitokseksi kakun. Metsästäjä söi kakusta $\frac{3}{8}$ ja tarjosi palkinnostaan myös isoäidille, joka söi kakusta $\frac{1}{4}$. Punahilkka sai kunnian syödä makean mansikkakakun loppuun. Kuinka paljon kakkua hän söi?



Murtolukujen lavennus

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

Metsästäjän ja isoäidin syömä kakkumäärä

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

Punahilkkan syömä kakkumäärä

$$\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Vastaus: Punahilkka söi kakusta $\frac{3}{8}$.

4. Kuningatar halusi selvittää, oliko hänen ovelleen tullut, yösijaa hakenut tyttö oikeasti prinsessa. Hän petasi tytölle pehmeän vuoteen, jossa oli 20 patjaa päällekkäin. Hän laittoi patjojen alle herneen, sillä jos tyttö oli oikea prinsessa, hänen pitäisi tuntea herne patjojen alta. Tyttö nukkuikin yönsä huonosti ja löysi aamulla patjojen alta litistyneen herneen. Kuinka paljon pienen herneen päällä oli ollut yöllä painoa, kun yksi patja painoi 1,3kg, tyttö painoi 46,4kg ja lisäksi vuoteessa oli 0,8 kg painoinen peitto ja 0,3 kg painoinen tyyny?

Patjojen paino

$$1,3 \times 2 = 2,6$$

eli patjat painavat 26kg

Patjojen, tytön, peiton ja tyynyn yhteispaino

$$\begin{array}{r} 11 \\ 26,0 \\ 46,4 \\ 0,8 \\ + 0,3 \\ \hline 73,5 \end{array}$$

Vastaus: Herneen päälle oli painoa 73,5 kg.

5. Kuningatar halusi selvittää, oliko hänen ovelleen tullut, yösijaa hakenut tyttö oikeasti prinsessa. Hän petasi tytölle pehmeän vuoteen, jossa oli 20 patjaa päällekkäin. Hän laittoi patjojen alle herneen, sillä jos tyttö oli oikea prinsessa, hänen pitäisi tuntea herne patjojen alta. Tyttö nukkuikin yönsä huonosti ja löysi aamulla patjojen alta litistyneen herneen. Kuinka paljon pienen herneen päällä oli ollut yöllä painoa, kun yksi patja painoi 1,3kg, tyttö painoi 46,4kg ja lisäksi vuoteessa oli 0,8 kg painoinen peitto ja 0,3 kg painoinen tyyny?

Aluksi lasken kuinka paljon patjat painavat yhteensä. Seuraavana selvitän, kuinka paljon patjat, tyttö, peitto ja tyyny painavat yhteensä.

$$1,3 \times 2 = 2,6$$

eli patjat painavat 26kg

$$26,0 + 46,4 + 0,8 + 0,3 = 73,5$$

Vastaus: Herneen päälle oli painoa 73,5 kg.

7. luokan esimerkkitehtävät

1. Martta ja Markku valmistelevat Martan 11-vuotissyntymäpäiviä. Hurjassa tohinassa he kuitenkin vahingossa kaatoivat aukinaisen mehukanisterin olohuoneen uudelle parketille. Kuivatessaan lattiaa he kuluttivat yhteensä neljä rullaa talouspaperia. Martta kulutti 34 m talouspaperia ja Markku 8 m enemmän. Kuinka paljon paperia oli yhdessä talouspaperirullassa, kun tiedetään, että kaikki neljä talouspaperirullaa olivat samankokoisia?

Markku kulutti paperia

$$34\text{m}+8\text{m}=42\text{m}$$

Markku ja Martta kuluttivat yhteensä

$$34\text{m}+42\text{m}=76\text{m}$$

Yhdessä paperirullassa on

$$76\text{m}:4=19\text{m}$$

Vastaus: Yhdessä talouspaperirullassa on 19m paperia.

2. Martta ja Markku valmistelevat Martan 11-vuotissyntymäpäiviä. Hurjassa tohinassa he kuitenkin vahingossa kaatoivat aukinaisen mehukanisterin olohuoneen uudelle parketille. Kuivatessaan lattiaa he kuluttivat yhteensä neljä rullaa talouspaperia. Martta kulutti 34 m talouspaperia ja Markku 8 m enemmän. Kuinka paljon paperia oli yhdessä talouspaperirullassa, kun tiedetään, että kaikki neljä talouspaperirullaa olivat samankokoisia?

Ensin lasketaan, kuinka paljon Markku kulutti paperia. Sitten lasketaan, kuinka paljon paperia kului yhteensä, jonka jälkeen selvitetään, kuinka paljon on yhdessä rullassa.

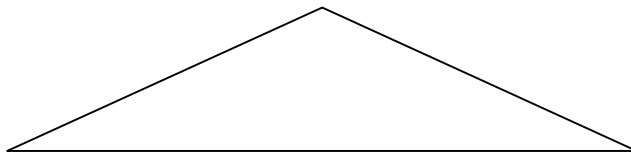
$$34\text{m}+8\text{m}=42\text{m}$$

$$34\text{m}+42\text{m}=76\text{m}$$

$$76\text{m}:4=19\text{m}$$

Vastaus: Yhdessä talouspaperirullassa on 19m paperia.

3. Tasakylkisen kolmion kantakulma on 37° . Kuinka suuri on huippukulma?



Kantakulmat yhteensä

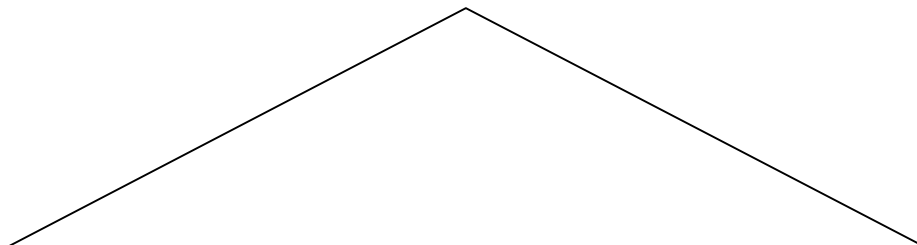
$$37^\circ \cdot 2 = 74^\circ$$

Huippukulma

$$180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$$

Vastaus: Tasakylkisen kolmion huippukulma on 106°

4. Tasakylkisen kolmion kantakulma on 37° . Kuinka suuri on huippukulma?



Ensin lasken kantakulmien summan. Seuraavana selvitän huippukulman suuruuden.

$$37^\circ \cdot 2 = 74^\circ$$

$$180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$$

Vastaus: Tasakylkisen kolmion huippukulma on 106°

Liite 11: Esimerkkejä tehtävistä, joita oppilaat ratkaisivat kielenjaksosjakson aikana

Susi vietti syntymäpäiviään ja hotkaisi alkupalaksi 1,6 kg painoisen jäniksen. Sitten se marssi juhlimaan Punahilkkan isoäidin taloon ja söi pääruuaksi isoäidin, joka painoi 67,3 kg. Jälkiruokana seurasi Punahilkka. Kun metsästäjä löysi suden, se painoi 134,2 kg. Kuinka paljon Punahilkka painoi, kun susi painoi ennen ruokailua 36,3 kg?

Mömmilän koulussa juhlietaan laskiaista, jonka kunniaksi ruokailun yhteydessä jaetaan laskiaispullia. 2/9pullista sisältää mantelimassaa ja kermavaahtoa. Loppuihin oli tarkoitus laittaa sekä vadelmahilloa että kermavaahtoa, mutta keittäjä vaahdotti osan kermasta käyttökelvottomaksi voiksi. Siksipä pullista vain 8/12:ssa oli sekä hilloa että kermavaahtoa ja lopuissa pelkkää hilloa. Kuinka suuressa osassa pullia oli vain hilloa välissä?

Kalervo ja Fanni lähtevät juhlistamaan talviloman alkua läheiseen pitseriaan. Heillä on rahaa yhteensä 26€ joista Fannilla on 1/3. Molemmat ovat kovin nälkäisiä, joten he tilaavat kokonaisen perhepitsan. Kalervo syö pitsasta 4/12 ja Fanni 3/6. Kuinka paljon pitsasta jäi jäljelle?

Kaksoset Anni ja Jasper saivat syntymäpäivälahjaksi leikkimökin. Leikkimökki oli kirkkaan keltainen ja siinä oli tumman violetti ovi. Suorakulmaisen mökin oven puoleinen seinä oli 3,7 m ja viereinen seinä kaksi kertaa niin pitkä kuin oven puoleinen seinä.

Naapurin Jukka oli Annin ja Jasperin kanssa leikkimässä mökissä. Seuraavana yönä hän kateuksissaan kietoi uuden leikkimökin spagettiin, sillä hänellä oli käytössään taikaspagettia. Kun keitetyn spagetin päät laitto yhteen, ne tarroutuivat toisiinsa. Kuinka paljon keitettyä taikaspagettia Jukka tarvitsi, kun hän kiersi spagettinarua kolme kertaa mökin ympäri?

Salla pesee poniansa. Hänellä on pihassa iso saavi, johon mahtuu vettä yhteensä 90 litraa. Hän kantaa saaviin vettä ämpärillä, jonka pohjaympyrän halkaisija on 32 cm. Ämpäriin mahtuu 6 litraa vettä ja Salla kantaa saaviin 12 ämpärillistä. Ponin pesuun kuluu 53 litraa vettä. Kun Salla on kuivaamassa ponia, poni potkaisee saavin kumoon ja vesi läiskyy Sallan päälle. Kuinka paljon vettä Salla saa niskaansa

Itku-Iivari itkeä pillitti seitsemän minuuttia aina, kun joku nimitteli häntä, ja kolme kertaa kauemmin, jos hän jäi ilman paria liikuntatunnilla – niin herkkä hän oli. Aina kun hän sai joltain tytöltä rakkauskirjeen, Itku-Iivari vollotti kolme kertaa kauemmin kuin ilman paria jäätyään. Eräänä päivänä hän sai neljä eri rakkauskirjettä. Kuinka kauan Itku-Iivari vollotti koulussa kyseisenä päivänä?

Kati näkee painajaista, jossa hän kulkee armottomassa lumimyrskyssä. Myrskyn keskeltä ilmestyy hirviöjoukko. Joukossa on mölhejä ja valneja. Mölheillä on kullakin kaksi päätä ja molemmissa päissä yksi sarvi. Lisäksi niillä on seitsemän jalkaa, kolme häntää sekä kaksi suuta. Valneilla puolestaan on vain yksi pää, jossa on kolme sarvea sekä viisi silmää. Hirviöjoukkiolla on yhteensä 10 päätä ja 14 sarvea. Kuinka monta hirviötä Kati kohtaa? Kuinka monta on mölhejä? Entä valneja?

Kauppakeskuksen aulassa on kolme hissiä. 42 mummoa kiirehtivät alennusmyynneille ja säntäävät hisseihin. Ensimmäiseen hissiin tunkeutuu 14 mummoa. Toiseen puolestaan ehtii 3 mummoa vähemmän kuin ensimmäiseen hissiin. Loput mummot änkeävät väkisin kolmanteen hissiin. Lähtekö hissi liikkeelle, kun seinässä olevan kyltin mukaan hissin sallittu kuormitus on 15 henkilöä?

Liite 12: Esimerkki virheellisen ajattelun havaitsemisesta kirjallisen kielentämisen avulla

6. Karkkilaatikossa on tietty määrä karkkeja. Jos sen jakaa tasapuolisesti kuuden kaveruksen kesken, jokainen saa 72 karkkia. Päivi oli kuitenkin itsekäs ja karkasi ullakolle syömään niitä itsekseen. Kun hän oli syönyt 330 karkkia, hänelle tuli huono olo ja hän joutui keskeyttämään syömisen. Kuinka monta karkkia jäi syömättä?

Jokainen saa 72 karkkia ja lapsia on kuusi.

$$72 \cdot 6 = 432$$

Päivi syö 330 karkkia ja sitten tuli paha

olo

$$\begin{array}{r} 330 \\ + 432 \\ \hline 762 \end{array}$$

Tulos: Laatikossa on 762 karkkia