TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Saana Isoaho

Propositionaalinen dynaaminen logiikka

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Kesäkuu 2010

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

ISOAHO, SAANA: Propositionaalinen dynaaminen logiikka

Pro gradu -tutkielma, 31 s.

Matematiikka

Kesäkuu 2010

Tiivistelmä

Tämän pro gardu -tutkielman aiheena on propositionaalinen dynaaminen logiikka (PDL). PDL on modaalilogiikan laajennus, joka tarkastelee tietokoneohjelmia. Luvussa 2 annetaan propositio- ja modaalilogiikkaa koskevia määritelmiä, jotka tukevat varsinaista aihetta. Luvussa 3 käsitellään PDL:n peruskäsitteitä. PDL:n ohjelmat ilmaistaan kaksipaikkaisina relaatioina tilojen välillä ja ne tulkitaan siirroiksi, jotka muuttavat tilan toiseksi. Ohjelmia muodostetaan muun muassa operaatioiden valinnan $\cup$, komposition ; ja iteraation * avulla. PDL:ään liitetään ääretön määrä mahdollisuusoperaattoreita modaalilogiikan yhden mahdollisuusoperaattorin sijaan. Jokaiseen ohjelmaan α liitetään oma operaattorinsa $\langle\alpha\rangle$. PDL:ssä joka ohjelmalla on oma vastaava relaationsa, joita voidaan muodostaa annettujen relaatioiden avulla. PDL-semantiikka on modaalilogiikan semantiikan kaltaista. Kaavojen totuutta tarkastellaan malleissa. PDL-malli on tilojen joukon W, relaation R ja valuaation V muodostama kolmikko. Kaava voi olla tosi jokaisessa PDL-mallissa, jolloin kyseessä oleva kaava on PDL-validi. Luvun 3 lopussa esitetään PDL:n aksiomatisointi. Viimeisessä luvussa 4 määritellään bisimulaation käsite.

Kahtena päälähdeteoksena toimivat kirjat *Modal logic* (Blackburn, de Rijke, Venema) ja *Dynamic logic* (Harel, Kozen, Tiuryn). Lähteinä on käytetty myös kirjaa *Johdatus modaalilogiikkaan* (Rantala, Virtanen), Stanford encyclopedia of philosophy -verkkosivuston julkaisua *Propositional dynamic logic* ja verkkojulkaisuja *Game constructions that are safe for bisimulation* (Pauly) ja *On definability in multimodal logics* (Halpern, Samet, Segev).

Sisältö

1 Johdanto

Tämän työn aiheena on propositionaalinen dynaaminen logiikka (PDL). Propositionaalisella dynaamisella logiikalla on sama rooli dynaamisessa logiikassa kuin propositiologiikalla on predikaattilogiikassa. PDL pohjautuu ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaan ja modaalilogiikkaan. PDL:ssä selitetään ja tarkastellaan tietokoneohjelmia. Ohjelmat tulkitaan siirtymiksi, joiden avulla siirrytään tilasta toiseen.

Ohjelmien logiikan esittelivät Thiele ja Engeler töissään 1960-luvun lopulla. Ideana oli liittää jokaiseen ohjelmaan oma modaalioperaattorinsa. Thielen ja Engelerin jälkeen aihetta tutkineita olivat muun muassa Floyd (vuonna 1967) ja Hoare (vuonna 1969). Ensimmäisen tarkan dynaamisen logiikan kaltaisen logiikan, algoritmisen logiikan (AL), kehitti Salwicki vuonna 1970 julkaistussa työssään. Dynaamisen logiikan (DL) esitteli puolestaan Pratt vuonna 1976.

Luvussa 2 tarkastelemme propositio- ja modaalilogiikkaa, mikä tukee varsinaisen aiheen käsittelyä. Lisäksi edellytämme lukijalta logiikan perusasioiden tuntemista. Luvussa 3 tarkastelemme PDL:n peruskäsitteitä. Käsittelemme aluksi PDL:n syntaksia (luku 3.1). Seuraavaksi määrittelemme PDL-kehyksen ja -mallin (luku 3.2), minkä jälkeen tarkastelemme totuutta mallissa ja PDL-validisuutta (luvut 3.3 ja 3.4). Luvussa 3.5 esittelemme PDL:n erään aksiomatisoinnin. Luvussa 3.4 lauseen 3.2 ja luvussa 3.5 lauseiden 3.3 ja 3.4 todistuksissa emme ole esittäneet viitteitä, mikä ei kuitenkaan tarkoita, etteikö lauseita olisi aiemmin todistettu. Viimeisessä luvussa 4 määrittelemme bisimulaation käsitteen.

Päälähdeteoksina toimivat kirja *Modal logic* (Blackburn, de Rijke, Venema) ja verkossa rajoitettuna luettavissa oleva kirja *Dynamic logic* (Harel, Kozen, Tiuryn). Lähteinä ovat olleet myös kirja *Johdatus modaalilogiikkaan* (Rantala, Virtanen), Stanford encyclopedia of philosophy -verkkosivuston julkaisu *Propositional dynamic logic* ja verkkojulkaisut *Game constructions that are safe for bisimulation* (Pauly) ja *On definability in multimodal logics* (Halpern, Samet, Segev).

2 Esitietoja

Tässä luvussa annamme muutamia esitietoja, jotka tukevat varsinaisen aiheen käsittelyä. Käsittelemme aluksi propositiologiikkaa, minkä jälkeen tarkastelemme modaalilogiikkaa.

2.1 Propositiologiikkaa

Määritelmä 2.1. (Vrt. [3, s. 71–72]) Propositiologiikan kielen aakkoston muodostavat seuraavat perussymbolit:

- propositiomuuttujat eli lausemuuttujat $p_1, p_2, p_3, \ldots$
- konnektiivit $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$
- sulut (,).

Määritelmä 2.2. (Vrt. [3, s. 72]) Perussymboleista muodostetaan propositioita eli kaavoja seuraavien kaavanmuodostussääntöjen avulla:

1. propositiomuuttujat $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ovat kaavoja
2. jos A ja B ovat kaavoja, niin $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ ja $A \leftrightarrow B$ ovat kaavoja
3. muita kaavoja ei ole.

Kaavoissa esiintyvät *kaksoisnegaatiot* voidaan sieventää, sillä $A \Leftrightarrow \neg\neg A$.

Määritelmä 2.3. (Vrt. [1, s. 10]) Olkoot A ja B propositiologiikan kaavoja. Tällöin kaavat $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ ja $A \leftrightarrow B$ määritellään konnektiiveja $\neg$ ja $\vee$ käyttäen seuraavasti:

- $A \wedge B \overset{def}{=} \neg(\neg A \vee \neg B)$ (konjunktio)
- $A \rightarrow B \overset{def}{=} \neg A \vee B$ (implikaatio)
- $A \leftrightarrow B \overset{def}{=} \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$ (ekvivalenssi)

Määritelmä 2.4. (Vrt. [3, s. 74]) Totuusjakauma v on kuvaus

$$v : \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{t, e\},$$

missä $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on propositiomuuttujien joukko, t on totuusarvo tosi ja e on totuusarvo epätosi.

Määritelmä 2.5. (Vrt. [3, s. 74]) Olkoon A kaava ja v totuusjakauma. Lauseen A totuusarvo totuusjakaumalla $v(A)$ määritellään seuraavasti:

1. jos $A = p_i$, niin $v(A) = v(p_i)$, missä p_i on propositiomuuttuja
2. jos $A = \neg B$ ja $v(B)$ on määritelty, niin

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{jos } v(B) = e \\ e, & \text{jos } v(B) = t \end{cases}$$

3. jos $A = B \vee C$ ja $v(B)$ ja $v(C)$ on määritelty, niin $v(A) = t$, jos ja vain jos $v(B) = t$ tai $v(C) = t$.

Määritelmien 2.3 ja 2.5 perusteella saadaan määritettyä kaavojen $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ ja $A \leftrightarrow B$ totuusarvot.

2.2 Modaalilogiikkaa

Modaalilogiikka on logiikan alue, jossa tarkastellaan modaliteettien eli modaalikäsitteiden loogisia piirteitä. Tässä tarkastelemme modaalilogiikkaa, jonka modaliteetit ilmaisevat mahdollisuutta ja välttämättömyyttä (aleettinen modaalilogiikka). Modaliteetit voivat kuvata myös esimerkiksi tietämistä (episteeminen logiikka), uskomista (doksastinen logiikka) tai täytymistä ja sallimista (deonttinen logiikka) (ks. [5, s. 15–16]).

Modaalilogiikan kieli saadaan propositiologiikan kielestä lisäämällä siihen yksipaikkainen modaalioperaattori $\Diamond$. Operaattori $\Diamond$ ilmaisee mahdollisuutta. Operaattorin *duaalioperaattori* $\Box$ ilmaisee välttämättömyyttä ja se saadaan määrittelemällä $\Box \overset{def}{=} \neg\Diamond\neg$. Yleisesti, operaattorin $\triangledown$ duaalioperaattori on muotoa $\neg\triangledown\neg$.

Määritelmä 2.6. (Vrt. [5, s. 44]) Modaalilogiikan kielen aakkoston muodostavat seuraavat perussymbolit:

- lausemuuttujat eli atomikaavat $p_1, p_2, p_3, \ldots$
- konnektiivit $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$
- mahdollisuusoperaattori $\Diamond$
- välttämättömyysoperaattori $\Box$
- sulut $(,)$.

Määritelmä 2.7. (Vrt. [5, s. 44]) Perussymboleista muodostetaan kaavoja seuraavia kaavanmuodostussääntöjä käyttäen:

1. atomikaavat $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ovat kaavoja
2. jos A ja B ovat kaavoja, niin $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ ja $A \leftrightarrow B$ ovat kaavoja
3. jos A on kaava, niin $\Diamond A$ ja $\Box A$ ovat kaavoja
4. muita kaavoja ei ole.

Mahdollisuusoperaattorin sisältävä kaava $\Diamond A$ ilmaisee sanallisesti, että kaava A on mahdollisesti tosi. Vastaavasti välttämättömyysoperaattorin sisältävä kaava $\Box A$ sanallisesti tulkittuna ilmaisee, että kaava A on välttämättä tosi.

Määritelmän 2.3 perusteella konnektiivit $\wedge$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ voidaan määritellä konnektiivien $\neg$ ja $\vee$ avulla. Samoin välttämättömyysoperaattori $\Box$ voidaan määritellä sen duaalioperaatorin $\Diamond$ avulla. Täten perussymboleiksi riittäisi valita vain konnektiivit $\neg$ ja $\vee$ sekä mahdollisuusoperaattori $\Diamond$.

Sulkeiden käyttö auttaa jäsentämään kaavoja, mutta sulkuja voi jättää merkitsemättä kahta seuraavaa sääntöä käyttäen (vrt. [5, s. 45]): kaavojen uloimpia sulkuja ei tarvitse merkitä ja konnektiivien vaikutusalan ulkopuolella olevat sulut voi jättää pois. Lisäksi konnektiivien vahvuudet määräävät niiden suorittamisjärjestyksen suluttomissa kaavoissa. Vaikutusalat ja vahvuudet määräytyvät seuraavasti:

- negaation $\neg$ sekä operattorien $\Diamond$ ja $\Box$ vaikutusala on niitä välittömästi seuraava kaava
- implikaatio $\rightarrow$ ja ekvivalenssi $\leftrightarrow$ ovat vahvempia kuin disjunktio $\vee$ ja konjunktio $\wedge$.

Konnektiivit $\vee$ ja $\wedge$ ovat liitännäisiä, joten vain joko konnektiiveja $\vee$ tai $\wedge$ sisältävissä kaavoissa sulut voi jättää merkitsemättä.

Esimerkki 2.1. Olkoon $A = (\neg p \wedge q) \rightarrow \Box r$. Havaitaan, että A on kaava, sillä kaavanmuodostussääntöjen perusteella

- koska p on kaava, niin $\neg p$ on kaava
- koska $\neg p$ ja q ovat kaavoja, niin $\neg p \wedge q$ on kaava
- koska r on kaava, niin $\Box r$ on kaava
- koska $\neg p \wedge q$ ja $\Box r$ ovat kaavoja, niin $(\neg p \wedge q) \rightarrow \Box r$ on kaava.

Jos kaavasta $A = (\neg p \wedge q) \rightarrow \Box r$ jättää sulut kirjoittamatta, se saadaan muotoon $A' = \neg p \wedge q \rightarrow \Box r$. Huomataan, että kaavat A ja A' eivät ole samat, sillä kaavassa A tulee suorittaa konjunktio ennen implikaatiota. Suluttomassa kaavassa A' puolestaan suoritetaan ensin implikaatio, koska implikaatio on vahvempi kuin konjunktio.

Esimerkki 2.2. Esitetään kaava $\Box \neg p \rightarrow \neg \Box (q \wedge \neg r)$ muodossa, jossa esiintyy vain konnektiiveja $\neg$ ja $\vee$ sekä mahdollisuusoperaattoreita $\Diamond$. Kaava saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\Box \neg p \rightarrow \neg \Box (q \wedge \neg r) &= \neg \Box \neg p \vee \neg \Box (q \wedge \neg r) \\
&\text{(määritelmän 2.3 implikaation perusteella)} \\
&= \Diamond p \vee \neg\neg \Diamond \neg\neg (\neg q \vee r) \\
&\text{(duaalioperaattorin ja määritelmän 2.3 konjunktion} \\
&\text{perusteella)} \\
&= \Diamond p \vee \Diamond (\neg q \vee r) \\
&\text{(kaksoisnegaation perusteella).}
\end{aligned}$$

Kaavaa $\Diamond p \vee \Diamond (\neg q \vee r)$ ei voida esittää ilman sulkuja muodossa $\Diamond p \vee \Diamond \neg q \vee r$, sillä tällöin jälkimmäinen mahdollisuusoperaattori $\Diamond$ koskisi vain kaavaa $\neg q$ disjunktion $\neg q \vee r$ sijaan.

Seuraavaksi käsittelemme modaalilogiikan semantiikkaa. Modaalilogiikassa kaavojen totuuksia tarkastellaan kehysten ja mallien avulla. Tarkasteltavat kehykset muodostuvat maailmojen joukosta W ja relaatiosta R. Malleihin liitetään maailmojen joukon ja relaation lisäksi valuaatio V.

Maailmojen joukon W maailmoilla $w_1, w_2, w_3, \ldots$ tarkoitetaan niitä maailmoja, jotka ovat mahdollisia tarkasteltavassa tilanteessa. Relaatio R on kaksipaikkainen relaatio maailmojen joukossa W. Relaatio R ilmaisee, mitkä maailmat ovat mahdollisia maailman w suhteen. Valuaatio V on kuvaus atomikaavojen joukolta maailmojen potenssijoukolle $P(W)$. Valuaatio V kertoo propositioiden totuusarvot kaikissa maailmoissa, jotka kuuluvat maailmojen joukkoon W. Valuaation avulla siis tiedetään, onko esimerkiksi propositio p tosi vai epätosi maailmassa w. Täten monimutkaisten kaavojen totuusarvoja eri maailmoissa voidaan selvittää valuaation ja relaation avulla. Määrittelemme seuraavaksi Kripke-kehyksen ja -mallin.

Määritelmä 2.8. (Vrt. [1, s. 16]) *Kripke-kehys* on pari $\langle W, R\rangle$, missä W on maailmojen joukko, $W \neq \emptyset$, ja relaatio $R \subseteq W \times W$.

Lisäämällä Kripke-kehykseen valuaatio V saadaan muodostettua Kripke-malli, mikä antaa aiheen seuraavalle määritelmälle.

Määritelmä 2.9. (Vrt. [1, s. 17]) *Kripke-malli* on kolmikko $\langle W, R, V\rangle$, missä W on maailmojen joukko, $W \neq \emptyset$, relaatio $R \subseteq W \times W$ ja valuaatio $V : \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to P(W)$.

Kripke-kehykset ja Kirpke-malllit on nimetty niiden kehittäjän Saul Kripken mukaan ja niitä voidaan merkitä lyhemmin K-kehyksiksi ja -malleiksi.

Määrittelemme vielä erikseen multimodaalilogiikan mallin, koska sillä on samanlaisia piirteitä PDL-mallin kanssa. Modaalilogiikan kieleen liitetään yksi mahdollisuusoperaattori $\Diamond$ ja malliin yksi relaatio R. Multimodaalilogiikan kieleen puolestaan kuuluvat mahdollisuusoperaattorit $\Diamond_1, \Diamond_2, \ldots, \Diamond_n$ ja malliin relaatiot $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Luvun lopussa annamme esimerkin multimodaalilogiikan mallista.

Määritelmä 2.10. (Vrt. [2, s. 4]) *Multimodaalilogiikan* malli on $M = \langle W, R_1, R_2, \ldots, R_n, V\rangle$, missä W on maailmojen joukko, $W \neq \emptyset$, relaatio $R_i \subseteq W \times W$, $i = 1 \ldots n$, ja valuaatio $V : \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to P(W)$.

Modaalilogiikassa ollaan kinnostuneita kaavojen totuuksista eri malleissa. Kun tarkastelemme kaavojen totuusarvoja malleissa, otamme käyttöön merkintätavan, joka kuvaa kaavan totuutta mallissa. Merkitsemme $M, w \vDash A$, jos kaava A on *tosi* mallin M maailmassa $w \in W$. Jos kaava A on *epätosi* mallin M maailmassa w, niin merkitsemme $M, w \nvDash A$. Jos $M, w \vDash A$ kaikilla $w \in W$, niin sanotaan, että kaava A on *validi* mallissa M.Tällöin merkitsemme $M \vDash A$. Vastaavasti, jos kaava A *ei ole validi* mallissa M, niin merkitsemme $M \nvDash A$.

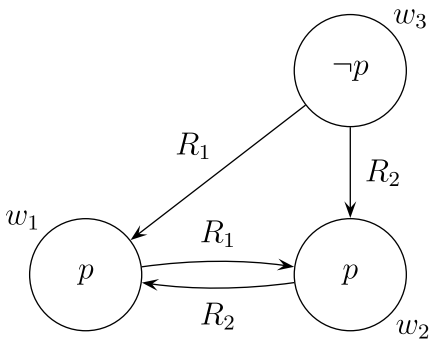
Määritelmä 2.11. (Vrt. [1, s. 17–18]) Oletetaan, että $M = \langle W, R, V \rangle$ on K-malli ja $w \in W$. Kaava A on tosi mallin M maailmassa w seuraavien totuusehtojen mukaisesti:

1. $M, w \vDash p_i \Leftrightarrow w \in V(p_i)$, missä p_i on atomikaava
2. $M, w \vDash \neg A \Leftrightarrow M, w \nvDash A$
3. $M, w \vDash A \vee B \Leftrightarrow M, w \vDash A$ tai $M, w \vDash B$
4. $M, w \vDash A \wedge B \Leftrightarrow M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash B$
5. $M, w \vDash A \to B \Leftrightarrow M, w \nvDash A$ tai $M, w \vDash B$
6. $M, w \vDash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow$ joko $M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash B$ tai $M, w \nvDash A$ ja $M, w \nvDash B$
7. $M, w \vDash \Diamond A \Leftrightarrow \exists v \in W : wRv \;\text{ ja }\; M, v \vDash A$
8. $M, w \vDash \Box A \Leftrightarrow \forall v \in W :\;\text{ jos }\; wRv, \;\text{ niin }\; M, v \vDash A.$

Esimerkki 2.3. Olkoon malli $M = \langle W, R_1, R_2, V \rangle$ multimodaalilogiikan malli, missä

$W = \{w_1, w_2, w_3\}, R_1 = \{(w_1, w_2), (w_3, w_1)\}, R_2 = \{(w_2, w_1), (w_3, w_2)\}$ ja $V(p) = \{w_1, w_2\}$.

Havainnoillistetaan mallia M kuvan avulla.



Kuvasta huomataan, että relaatiot muodostavat niin sanottuja polkuja tilojen välille. Polut osoittavat, kuinka tilat ovat yhteydessä toisiinsa. Kuvasta näkyy proposition p totuusarvot eri maailmoissa. Näiden totuusarvojen ja relaation avulla voidaan päätellä esimerkiksi kaavan $\Box_2 \Diamond_1 p$ totuusarvot eri maailmoissa, missä operaattorien alaindeksit ilmoittavat, mistä relaatiosta on kyse.

Kaavojen totuusehdot määräytyvät multimodaalilogiikan malleissa samoin kuin K-malleissa. Täten määritelmän 2.11 totuusehtojen perusteella $M, w_1 \vDash \Diamond_1 p$, $M, w_2 \nvDash \Diamond_1 p$ ja $M, w_3 \vDash \Diamond_1 p$ ja edelleen $M, w_1 \vDash \Box_2\Diamond_1 p$, $M, w_2 \vDash \Box_2\Diamond_1 p$ ja $M, w_3 \nvDash \Box_2\Diamond_1 p$.

Annamme vielä kaksi relaatiota koskevaa määritelmää.

Määritelmä 2.12. (Vrt. [1, s. 2–3]) Olkoon relaatio $R \subseteq W \times W$. Tällöin relaatio R on

- *refleksiivinen*, jos wRw kaikilla $w \in W$
- *transitiivinen*, jos wRu ja uRv, niin wRv, kun $w, v, u \in W$.

Määritelmä 2.13. (Vrt. [1, s. 5–6]) Olkoon relaatio $R \subseteq W \times W$. Relaation R *refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma* R^* on pienin sellainen relaation R sisältävä relaatio, joka on refleksiivinen ja transitiivinen. Täten $R^* = \bigcap\{R' \mid R'$ refleksiivinen ja transitiivinen, $R' \subseteq W \times W$ ja $R \subseteq R'\}$.

Relaation refleksiivin ja transitiivinen sulkeuma voidaan esittää myös muodossa $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, missä $R^1 = R$ ja $R^{n+1} = R \circ R^n$.

3 Peruskäsitteitä

Propositionaalinen dynaaminen logiikka (PDL) on modaalilogiikan laajennus, minkä vuoksi PDL on samankaltaista modaalilogiikan kanssa. Ohjelmien esiintyminen ja relaation muodostaminen PDL:ssä aiheuttavat eroja PDL:n ja modaalilogiikan välillä.

PDL:ssä tarkastellaan ohjelmia, jotka ovat yleensä epädeterministisiä eli annettuun ohjelmaan ja annettuun alkutilaan liitetään yhden sijasta useita mahdollisia lopputiloja. Ohjelmat ovat siirtymiä, jotka muuttavat tilan toiseksi. Ohjelmat esitetään kaksipaikkaisina relaatioina tilojen välillä.

Modaalilogiikan tavoin PDL:ään liitetään mahdollisuusoperaattori, mutta PDL:ssä on ääretön määrä mahdollisuusoperaattoreita. Jokaiseen ohjelmaan liitetään oma operaattorinsa. Eri ohjelmien operaattorit erotetaan toisistaan merkitsemällä kyseessä oleva ohjelma operaattorin sisälle. Esimerkiksi ohjelmaan α liitettävä mahdollisuusoperaattori on $\langle\alpha\rangle$. Vastaavasti joka ohjelmalla on oma välttämättömyysoperaattorinsa ja sille käytetään merkintää $[\alpha]$, kun kyseessä on ohjelman α operaattori.

3.1 Syntaksi

Tässä luvussa käsitellään PDL:n syntaksia. PDL:n syntaksin muodostaa kaksi eri symbolijoukkoa, propositioiden eli kaavojen joukko $\Phi = \{A, B, C, \dots\}$ ja ohjelmien joukko $\Pi = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$. Kaavojen joukkoon kuuluu äärellinen määrä atomikaavoja $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ja niiden muodostamaa joukkoa merkitään symbolilla Φ_0. Vastaavasti ohjelmien joukkoon kuuluu äärellinen määrä atomiohjelmia $a_1, a_2, \ldots a_n$ ja niiden muodostamaa joukkoa merkitään symbolilla Π_0. Monimutkaisemmat kaavat ja ohjelmat muodostetaan atomikaavoista ja -ohjelmista.

Kaavojen joukkoon kuuluvat myös kaavat 0 ja 1. Kaavat 0 ja 1 voidaan määritellä konnektiivien $\vee$ ja $\wedge$ ja atomikaavan p_1 avulla seuraavasti: $0 \overset{def}{=} p_1 \wedge \neg p_1$ ja $1 \overset{def}{=} p_1 \vee \neg p_1$. Täten määritelmän 2.3 perusteella $0 \overset{def}{=} \neg 1$. Määritellään seuraavaksi säännöt kaavojen ja ohjelmien muodostamiseen.

Määritelmä 3.1. (Vrt. [6, s. 2–3]) PDL:n kaavat muodostetaan seuraavia kaavanmuodostussääntöjä käyttäen:

1. atomikaavat $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ovat kaavoja
2. 0 ja 1 ovat kaavoja
3. jos A ja B ovat kaavoja, niin $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ ja $A \leftrightarrow B$ ovat kaavoja
4. jos A on kaava ja α on ohjelma, niin $\langle\alpha\rangle A$ ja $[\alpha]A$ ovat kaavoja.
5. muita kaavoja ei ole.

Täten joukko Φ on pienin sääntöjen 1- 5 avulla muodostettu kaavojen joukko.

Konnektiivit $\wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ määritellään konnektiivien $\vee$ ja $\neg$ avulla määritelmän 2.3 tapaan. Samoin modaalioperaattorin $\langle\alpha\rangle$ duaalioperaattori $[\alpha]$ määritellään kuten luvussa 2.2: $\langle\alpha\rangle \overset{def}{=} \neg[\alpha]\neg$.

Määritelmä 3.2. (Vrt. [1, s. 12–13]) *Tavallinen PDL* sisältää operaatiot valinta $\cup$, kompositio ; ja iteraatio *. Tavallisen PDL:n ohjelmat muodostetaan seuraavia sääntöjä käyttäen:

1. atomiohjelmat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat ohjelmia
2. jos α ja β ovat ohjelmia, niin $\alpha \cup \beta$ on ohjelma
3. jos α ja β ovat ohjelmia, niin $\alpha; \beta$ on ohjelma
4. jos α on ohjelma, niin α^* on ohjelma.

Täten joukko Π on pienin sääntöjen 1- 4 avulla muodostettu tavallisen PDL:n ohjelmien joukko.

Tavallisen PDL:n operaatioiden lisäksi operaatioita ovat myös käänteisoperaatio $^-$, leikkaus $\cap$ ja toisto ?. Tällöin ohjelmia voidaan myös muodostaa seuraavasti (vrt. [1, s. 23] ja [3, s. 177]):

- jos α on ohjelma, niin α^- on ohjelma
- jos α ja β ovat ohjelmia, niin $\alpha \cap \beta$ on ohjelma
- jos A on kaava, niin $A?$ on ohjelma.

Määritelmän 3.2 perusteella voidaan todeta, että $\langle \alpha \cup \beta \rangle$, $\langle \alpha; \beta \rangle$ ja $\langle \alpha^* \rangle$ ovat modaalioperaattoreita, sillä $\alpha \cup \beta$, $\alpha; \beta$ ja α^* ovat ohjelmia, kun α ja β ovat ohjelmia.

Esimerkki 3.1. Merkkijono $(\alpha \cup (\alpha; \beta))^*$ on ohjelma, sillä määritelmän 3.2 perusteella

- koska α ja β ovat ohjelmia, niin $\alpha; \beta$ on ohjelma
- koska α ja $\alpha; \beta$ ovat ohjelmia, niin $\alpha \cup (\alpha; \beta)$ on ohjelma
- koska $\alpha \cup (\alpha; \beta)$ on ohjelma, niin $(\alpha \cup (\alpha; \beta))^*$ on ohjelma.

Ohjelmia voidaan selventää sanallisesti. Esimerkiksi seuraavat ohjelmat sanallisessa muodossa saavat seuraavat merkitykset (vrt. [3, s. 166]):

- $\alpha \cup \beta$: tee α tai β
- $\alpha \cap \beta$: tee α ja β samanaikaisesti
- $\alpha; \beta$: tee ensin α sitten β
- α^*: toista α äärellisen monta kertaa
- $A?$: jatka, jos kaava A on tosi, muuten lopeta
- $\langle \alpha \rangle A$: on mahdollista, että kaava A on tosi ohjelman α suorittamisen jälkeen
- $[\alpha] A$: on välttämätöntä, että kaava A on aina tosi ohjelman α suorittamisen jälkeen.

Sulkeiden käytössä pätevät samat säännöt kuin modaalilogiikassa (ks. luku 2.2). Operaatiot $\cup$, $\cap$ ja ; ovat liitännäisiä. Täten sulut voi jättää kirjoittamatta, kun ohjelma sisältää vain yhtä kyseisistä operaatioista. Lisäksi määrittelemme, että operaatiot ; ja * ovat vahvempia kuin operaatiot $\cup$ ja $\cap$ (vrt. [3, s. 166]).

Esimerkki 3.2. Ohjelman $(A?; \alpha) \cup (\neg A?; \beta; \alpha)$ sanallinen merkitys on: jos A on tosi, tee α, muuten tee ensin β, sitten α.

Esimerkki 3.3. Esimerkin 3.1 ohjelma $(\alpha \cup (\alpha; \beta))^*$ voidaan kirjoittaa ilman toisia sulkuja muodossa $(\alpha \cup \alpha; \beta)^*$, koska operaatio ; on vahvempi kuin operaatio $\cup$. Tällöin siis ohjelman merkitys ei muutu.

3.2 Kehys ja malli

PDL-kehykset ja -mallit ovat modaalilogiikan Kripke-kehysten ja -mallien muotoisia, joihin liitetään maailmojen joukko W, relaatio R ja valuaatio V (ks. luku 2.2).

PDL:ssä puhutaan kuitenkin tilojen joukosta modaalilogiikassa käytetyn maailmojen joukko -nimityksen sijaan. PDL:ssä ohjelmat määrittävät siirtymiä tilojen välillä ja siten muuntavat tiloja toisiksi. Täten on mielekkäämpää puhua tiloista sen sijaan, että maailma muuttuisi toiseksi maailmaksi.

PDL:ssä relaatio poikkeaa modaalilogiikan relaatiosta siten, että jokaisella ohjelmalla on oma relaationsa. Täten relaatioita on useita, kuten multimodaalilogiikassakin (ks. määritelmä 2.10). Merkitsemme PDL-mallin relaatiota symbolilla $R(\alpha)$, missä α on ohjelma. Täten esimerkiksi atomiohjelmiin a ja b liitettävät relaatiot ovat $R(a)$ ja $R(b)$.

Määritelmä 3.3. (Vrt. [1, s. 22]) *PDL-kehys* on pari $\langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha$ on ohjelma$\}\rangle$, missä W on tilojen joukko, $W \neq \emptyset$ ja relaatio $R(\alpha) \subseteq W \times W$.

Määritelmä 3.4. (Vrt. [1, s. 22]) *PDL-malli* on $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha$ on ohjelma$\}, V\rangle$, missä W on tilojen joukko, $W \neq \emptyset$, relaatio $R(\alpha) \subseteq W \times W$ ja valuaatio $V : \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to P(W)$.

Tavallisen PDL:n kehykset ja mallit ovat vastaavia kuin määritelmien 3.3 ja 3.4 kehykset ja mallit, mutta relaatiota R rajoitetaan. Tavallisen PDL:n operaatioita ovat $\cup$, ; ja *, joten tavallisen PDL:n ohjelmien joukkoon Π kuuluvat atomiohjelmat ja operaatioilla $\cup$, ; , ja * muodostetut ohjelmat. Täten tavallisen PDL:n kehykset ja mallit ovat muotoa $\langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}\rangle$ ja $\langle M, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$, missä W ja V ovat kuten määritelmissä 3.3 ja 3.4 ja $R(\alpha) \subseteq W \times W$ (ks. [1, s. 23]).

Esitämme seuraavaksi relaatiota R ja valuaatiota V koskevia määritelmiä.

Määritelmä 3.5. Olkoot R relaatio ja α ja β ohjelmia. Tällöin

- $R(\alpha^-) = R(\alpha)^- = \{(w, v) \mid vR(\alpha)w\}$ (käänteisrelaatio)
- $R(\alpha \cup \beta) = R(\alpha) \cup R(\beta)$ (yhdiste)
- $R(\alpha \cap \beta) = R(\alpha) \cap R(\beta)$ (leikkaus)
- $R(\alpha; \beta) = R(\alpha) \circ R(\beta) = \{(w, v) \mid \exists u(wR(\alpha)u \wedge uR(\alpha)v)\}$ (yhdistetty relaatio)
- $R(\alpha^*) = R(\alpha)^*$ (refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma).

Määritelmä 3.6. (Vrt. [3, s. 168, 177]) Oletetaan, että w ja v ovat tiloja, R on relaatio ja α ja β ovat ohjelmia. Tällöin

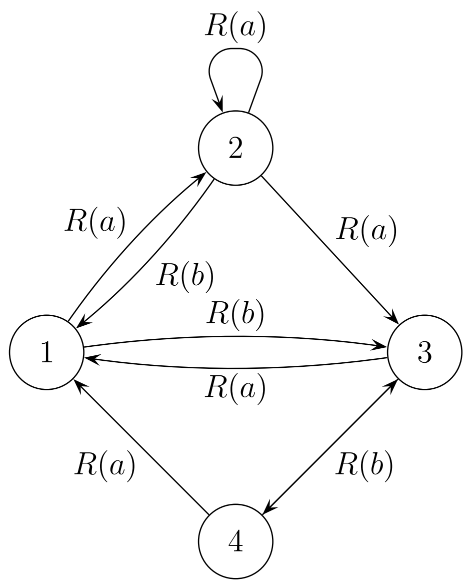
- $wR(\alpha^-)v \Leftrightarrow vR(\alpha)w$

- $wR(\alpha \cup \beta)v \Leftrightarrow wR(\alpha)v \vee wR(\beta)v$
- $wR(\alpha \cap \beta)v \Leftrightarrow wR(\alpha)v \wedge wR(\beta)v$
- $wR(\alpha; \beta)v \Leftrightarrow \{(w, v) \mid \exists u \in W : wR(\alpha)u \wedge uR(\beta)v\}$
- $wR(\alpha^*)v \Leftrightarrow \{(w, v) \mid \exists n \geq 0 : \exists u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n : u_0 = w,\ u_n = v$ ja $\forall k = 1, 2, \ldots, n : u_{k-1}R(\alpha)u_k\}$
- $wR(A?)v \Leftrightarrow \{(w, v) \mid w = v$ ja $w \in V(A)\}$

Määritelmä 3.7. (Vrt. [6, s. 4]) Olkoon V valuaatio. Tällöin

- $V(0) = \emptyset$
- $V(1) = W$
- $V(\neg A) = W \setminus V(A)$
- $V(A \vee B) = V(A) \cup V(B)$
- $V(A \wedge B) = V(A) \cap V(B)$
- $V(\langle\alpha\rangle A) = \{w \mid \exists v \in W$ siten, että $wR(\alpha)v$ ja $v \in V(A)\}$
- $V([\alpha]A) = \{w \mid \forall v \in W$, jos $wR(\alpha)v,\ v \in V(A)\}$

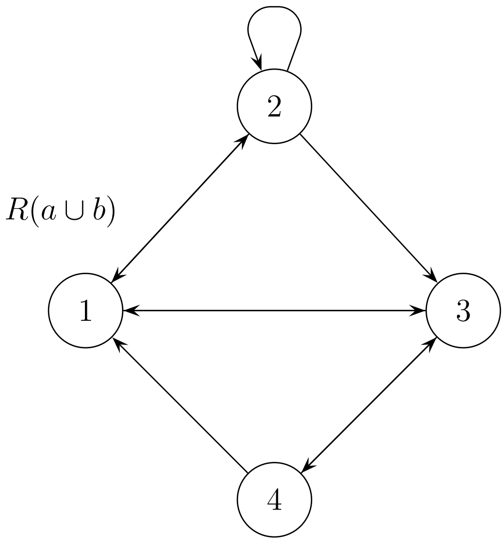
Esimerkki 3.4. Olkoon $W = \{1, 2, 3, 4\}, R(a) = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$ ja $R(b) = \{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Selvennetään tilannetta kuvan avulla:



Muodostetaan relaatiot $R(a \cup b), R(a; b), R(a^*)$ ja $R(b^*)$ ja havainnoillistetaan muodostuneita relaatioita kuvien avulla.

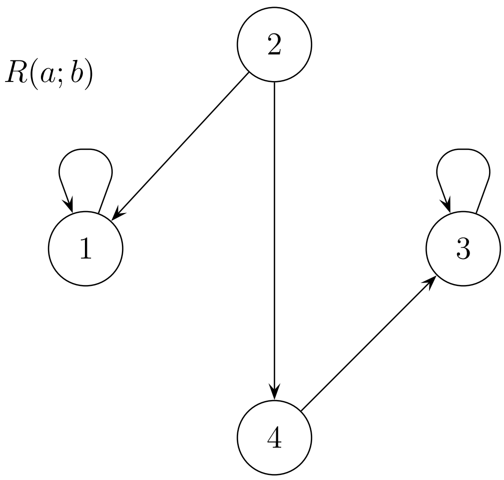
- Relaatio $R(a \cup b)$ on relaatioiden $R(a)$ ja $R(b)$ yhdiste. Täten

$$
\begin{aligned}
&R(a \cup b) \\
&= R(a) \cup R(b) \\
&= \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(4,1)\} \cup \{(1,3),(2,1),(3,4),(4,3)\} \\
&= \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,4),(4,1),(4,3)\}.
\end{aligned}
$$



- Relaatio $R(a;b)$ on relaatioiden $R(a)$ ja $R(b)$ yhdistetty relaatio. Täten

$$R(a;b) = R(a) \circ R(b) = \{(1,1),(2,1),(2,4),(3,3),(4,3)\}.$$

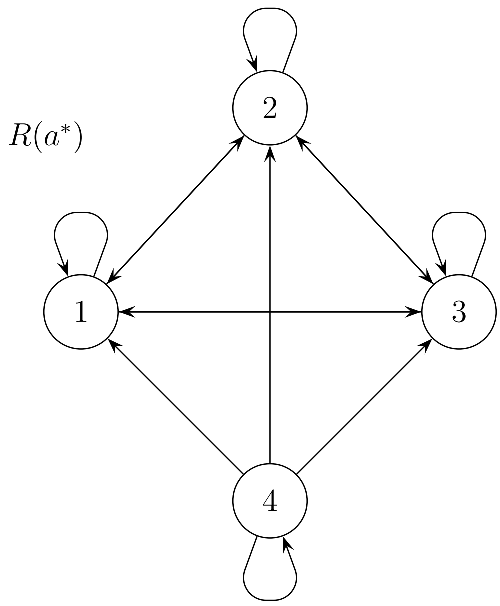


- Relaatio $R(a^*)$ on relaation $R(a)$ refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma eli pienin sellainen refleksiivinen ja transitiivinen relaatio, joka sisältää relaation $R(a)$ (ks. määritelmä 2.13). Täten relaatio $R(a^*)$ sisältää relaation $R(a)$ parit $(1,2),(2,2),(2,3),(3,1)$ ja $(4,1)$. Tarkastellaan näitä relaatiossa jo olevia pareja ja lisätään pareja niin, että relaatiosta tulee transitiivinen.

  Koska $(1,2) \in R(a^*)$ ja $(2,3) \in R(a^*)$, niin täytyy olla $(1,3) \in R(a^*)$.
  Koska $(2,3) \in R(a^*)$ ja $(3,1) \in R(a^*)$, niin täytyy olla $(2,1) \in R(a^*)$.
  Koska $(3,1) \in R(a^*)$ ja $(1,2) \in R(a^*)$, niin täytyy olla $(3,2) \in R(a^*)$.
  Koska $(4,1) \in R(a^*)$ ja $(1,2) \in R(a^*)$, niin täytyy olla $(4,2) \in R(a^*)$.
  Koska $(4,1) \in R(a^*)$ ja $(1,3) \in R(a^*)$, niin täytyy olla $(4,3) \in R(a^*)$.

  Lisätään relaatioon $R(a^*)$ vielä parit $(1,1),(3,3)$ ja $(4,4)$, jolloin relaatiosta tulee refleksiivinen. Täten relaatioksi $R(a^*)$ saadaan

  $$R(a^*) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),\\ (4,2),(4,3),(4,4)\}.$$

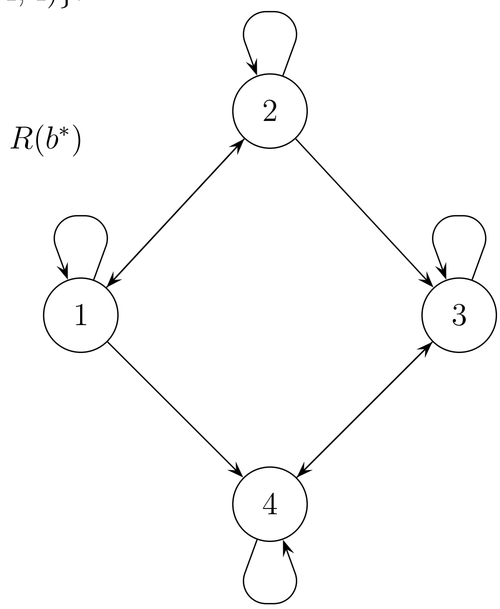
  

- Relaatio $R(b^*)$ määritetään samoin kuin relaatio $R(a^*)$. Ensin tarkastellaan relaatioon $R(b^*)$ sisältyviä relaation $R(b)$ pareja ja lisätään pareja niin, että relaatiosta tulee transitiivinen:

  Koska $(1,3) \in R(b^*)$ ja $(3,4) \in R(b^*)$, niin täytyy olla $(1,4) \in R(b^*)$.
  Koska $(2,1) \in R(b^*)$ ja $(1,3) \in R(b^*)$, niin täytyy olla $(2,3) \in R(b^*)$.
  Koska edellisen kohdan mukaan täytyy olla $(2,3) \in R(b^*)$ ja
  $(3,4) \in R(b^*)$, niin täytyy olla $(2,4) \in R(b^*)$.

Lisäämällä relaatioon $R(b^*)$ vielä parit $(1,1), (2,2), (3,3)$ ja $(4,4)$ relaatiosta saadaan refleksiivinen. Täten relaation $R(b)$ refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma on

$$R(b^*) = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}.$$



3.3 Totuus

Tässä luvussa käsittelemme kaavojen totuuksia malleissa. Merkitsemme $M, w \vDash A$, jos kaava A on *tosi* mallin M tilassa $w \in W$. Jos kaava A on *epätosi* mallin M tilassa w merkitsemme $M, w \nvDash A$.

Määritelmä 3.8. (Vrt. [1, s. 17–18]) Oletetaan, että $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ on PDL-malli ja $w \in W$. Kaava A on tosi mallin M tilassa w seuraavien totuusehtojen mukaisesti:

1. $M, w \vDash p_i \Leftrightarrow w \in V(p_i)$, missä $p_i \in \Phi_0$
2. $M, w \vDash \neg A \Leftrightarrow M, w \nvDash A$
3. $M, w \vDash A \vee B \Leftrightarrow M, w \vDash A$ tai $M, w \vDash B$
4. $M, w \vDash A \wedge B \Leftrightarrow M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash B$
5. $M, w \vDash A \to B \Leftrightarrow M, w \nvDash A$ tai $M, w \vDash B$
6. $M, w \vDash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow$ joko $M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash B$ tai $M, w \nvDash A$ ja $M, w \nvDash B$

7. $M, w \vDash \langle\alpha\rangle A \Leftrightarrow \exists v \in W : wR(\alpha)v$ ja $M, v \vDash A$

8. $M, w \vDash [\alpha]A \Leftrightarrow \forall v \in W :$ jos $wR(\alpha)v$, niin $M, v \vDash A$.

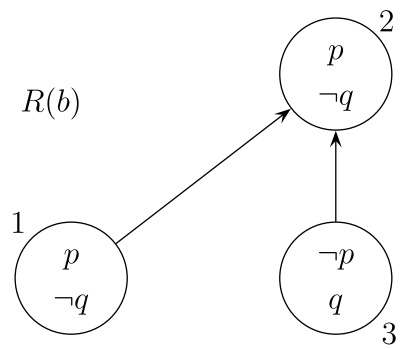
Kaavan A *totuusjoukoksi* mallissa $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ sanotaan niiden tilojen joukkoa, joissa kaava A on tosi. Kaavan A totuusjoukkoa merkitään notaatiolla $\|A\|^M$, ja täten $\|A\|^M = \{w \in W | M, w \vDash A\}$.

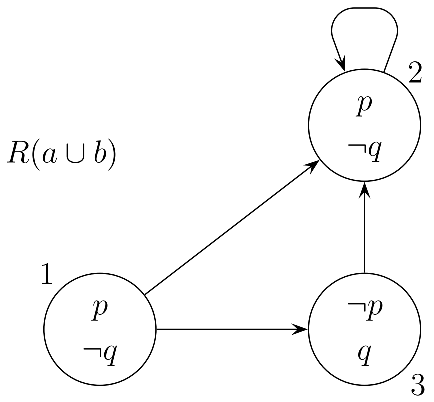
Määritelmä 3.9. (Vrt. [5, s. 71]) Oletetaan, että $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ on PDL-malli ja $w \in W$. Tällöin

- $\|p_i\|^M = V(p_i)$, missä $p_i \in \Phi_0$
- $\|\neg A\|^M = W \setminus \|A\|^M$
- $\|A \vee B\|^M = \|A\|^M \cup \|B\|^M$
- $\|A \wedge B\|^M = \|A\|^M \cap \|B\|^M$

Esimerkki 3.5. Olkoon $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ PDL-malli, missä $W = \{1, 2, 3\}$, $R(a) = \{(1, 3), (2, 2)\}$, $R(b) = \{(1, 2), (3, 2)\}$, $V(p) = \{1, 2\}$ ja $V(q) = \{3\}$. Muodostetaan relaatio $R(a \cup b)$. Saadaan, että

$$R(a \cup b) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}.$$



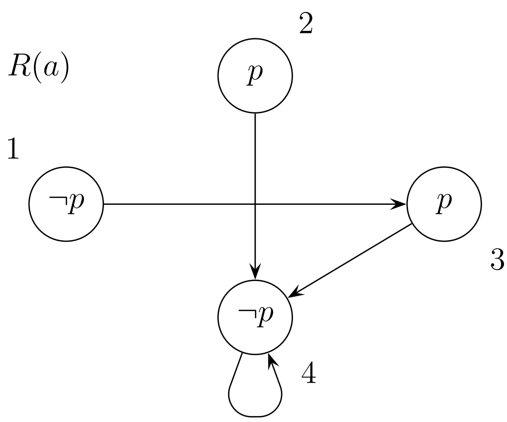


Täten määritelmän 3.8 operaattorien totuusehtojen perusteella

$$M, 1 \vDash \langle a \cup b \rangle q,\ M, 2 \vDash \neg\langle a \cup b \rangle q,\ M, 3 \vDash \neg\langle a \cup b \rangle q,$$
$$M, 1 \vDash [b]p,\ M, 2 \vDash [b]p \text{ ja } M, 3 \vDash [b]p.$$

Tällöin määritelmän 3.8 konjunktion totuusehdon perusteella
$M, 1 \vDash \langle a \cup b \rangle q \wedge [b]p$, $M, 2 \vDash \neg\langle a \cup b \rangle q \wedge [b]p$ ja $M, 3 \vDash \neg\langle a \cup b \rangle q \wedge [b]p$.
Täten $\|\langle a \cup b \rangle q \wedge [b]p\|^M = \{1\}$ ja $\|\langle \neg a \cup b \rangle q \wedge [b]p\|^M = \{2, 3\}$.

Esimerkki 3.6. Olkoon malli $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V \rangle$, missä $W = \{1, 2, 3, 4\}$, $R(a) = \{(1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$ ja $V(p) = \{2, 3\}$.

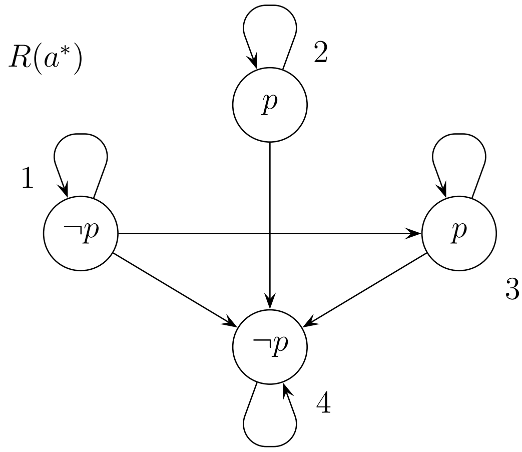


Tarkastellaan kaavojen $\langle a^* \rangle p \to [a]p$ ja $\langle a^* \rangle \langle (a; a)^* \rangle p \wedge [a; a] \neg p$ totuusjoukkoja mallissa M.

Muodostetaan aluksi relaatio $R(a^*)$. Relaatio $R(a^*)$ on relaation $R(a)$ refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma, siis pienin sellainen refleksiivinen ja

transitiivien relaatio, joka sisältää relaation $R(a)$.
Täten

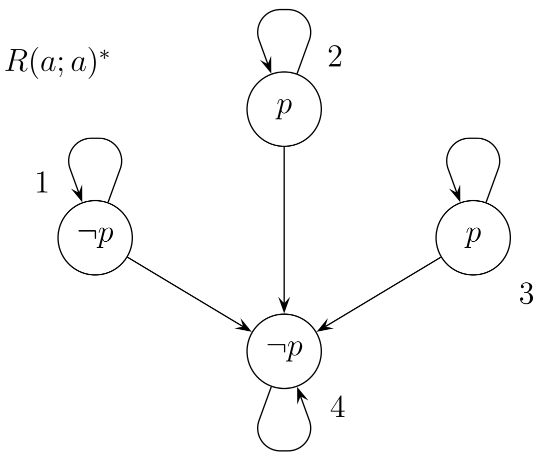
$$R(a^*) = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}.$$



Määritelmän 3.8 mahdollisuusoperaattorin totuusehdon mukaan $M,1 \vDash \langle a^*\rangle p$, $M,2 \vDash \langle a^*\rangle p$, $M,3 \vDash \langle a^*\rangle p$ ja $M,4 \nvDash \langle a^*\rangle p$. Kaava $[a]p$ on tosi vain tilassa 1, joten $M,1 \vDash [a]p$. Täten implikaation totuusehdon perusteella $M,1 \vDash \langle a^*\rangle p \to [a]p$ ja $M,4 \vDash \langle a^*\rangle p \to [a]p$. Siis kaavan $\langle a^*\rangle p \to [a]p$ totuusjoukko on $\|\langle a^*\rangle p \to [a]p\|^M = \{1,4\}$.

Seuraavaksi muodostetaan relaatio $R(a;a)^*$. Relaatioksi $R(a;a)$ saadaan $R(a;a) = R(a) \circ R(a) = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\}$. Relaatio $R(a;a)^*$ on relaation $R(a;a)$ refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma.
Täten

$$R(a;a)^* = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}.$$



Määritelmän 3.8 perusteella kaava $\langle (a;a)^* \rangle p$ on tosi tiloissa 2 ja 3, siis $M,2 \vDash \langle (a;a)^* \rangle p$ ja $M,3 \vDash \langle (a;a)^* \rangle p$. Edelleen $M,1 \vDash \langle a^* \rangle \langle (a;a)^* \rangle p$, $M,2 \vDash \langle a^* \rangle \langle (a;a)^* \rangle p$ ja $M,3 \vDash \langle a^* \rangle \langle (a;a)^* \rangle p$. Kaava $[a;a]\neg p$ on tosi tilossa $1,2,3$ ja 4.

Täten $M,1 \vDash \langle a^* \rangle \langle (a;a)^* \rangle p \wedge [a;a]\neg p$, $M,2 \vDash \langle a^* \rangle \langle (a;a)^* \rangle p \wedge [a;a]\neg p$ ja $M,3 \vDash \langle a^* \rangle \langle (a;a)^* \rangle p \wedge [a;a]\neg p$. Siis $\|\langle a^* \rangle \langle (a;a)^* \rangle p \wedge [a;a]\neg p\|^M = \{1,2,3\}$.

3.4 Validisuus

Määritelmä 3.10. (Vrt. [6, s. 4]) Oletetaan, että $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V \rangle$ on PDL-malli, $w \in W$ ja A on kaava. Jos $M, w \vDash A$ kaikilla $w \in W$, niin kaava A on *validi mallissa* M. Tällöin merkitsemme $M \vDash A$. Vastaavasti, jos kaava A *ei ole validi* mallissa M, niin merkitsemme $M \nvDash A$.

Jos kaavan A totuusjoukko $\|A\|^M = W$, niin määritelmän 3.10 perusteella kaava A on validi mallissa M. Jos kaava A on validi jokaisessa PDL-mallissa M, niin kaavan A sanotaan olevan *PDL-validi* ja tällöin merkitsemme validisuutta notaatiolla $\vDash_{\text{PDL}} A$.

Määritelmä 3.11. (Vrt. [1, s. 24]) Kaava A on *validi kehyksessä* $\langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\} \rangle$, jos se on validi jokaisessa mallissa $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V \rangle$. Tällöin merkitsemme $\langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\} \rangle \vDash A$.

PDL-valideja kaavoja ovat lauselogiikan tautologiat ja modaalilogiikan validit kaavat. Todistamme seuraavissa lauseissa kaksi PDL-validia kaavaa.

Lause 3.1. *Kaava* $\langle \alpha \rangle (A \vee B) \leftrightarrow \langle \alpha \rangle A \vee \langle \alpha \rangle B$ *on PDL-validi.*

Todistus (vrt. [1, s. 25]). Olkoon $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V \rangle$ mielivaltainen PDL-malli. Osoitetaan, että $M \vDash \langle \alpha \rangle (A \vee B) \leftrightarrow \langle \alpha \rangle A \vee \langle \alpha \rangle B$. Todistetaan väite kahdessa osassa: $M \vDash \langle \alpha \rangle (A \vee B) \rightarrow \langle \alpha \rangle A \vee \langle \alpha \rangle B$ ja $M \vDash \langle \alpha \rangle A \vee \langle \alpha \rangle B \rightarrow \langle \alpha \rangle (A \vee B)$.

Olkoon $w \in W$ mielivaltainen tila.

1. Oletetaan, että $M, w \vDash \langle \alpha \rangle (A \vee B)$. Tällöin määritelmän 3.8 mahdollisuusoperaattorin totuusehdon perusteella $\exists v \in W$ siten, että wRv ja $M, v \vDash A \vee B$. Täten $M, v \vDash A$ tai $M, v \vDash B$. Siis mahdollisuusoperaattorin totuusehdon perusteella $M, w \vDash \langle \alpha \rangle A$ tai $M, w \vDash \langle \alpha \rangle B$, joten $M, w \vDash \langle \alpha \rangle A \vee \langle \alpha \rangle B$. Täten $M, w \vDash \langle \alpha \rangle (A \vee B) \rightarrow \langle \alpha \rangle A \vee \langle \alpha \rangle B$.

2. Oletetaan, että $M, w \vDash \langle \alpha \rangle A \vee \langle \alpha \rangle B$. Siis $M, w \vDash \langle \alpha \rangle A$ tai $M, w \vDash \langle \alpha \rangle B$. Täten määritelmän 3.8 mahdollisuusoperaattorin totuusehdon perusteella $\exists w' \in W$ siten, että wRw' ja $M, w' \vDash A$, tai $\exists w'' \in W$ siten, että wRw'' ja $M, w'' \vDash B$. Joka tapauksessa $\exists v \in W$ siten, että wRv ja $M, v \vDash A \vee B$, joten $M, w \vDash \langle \alpha \rangle (A \vee B)$. Täten $M, w \vDash \langle \alpha \rangle A \vee \langle \alpha \rangle B \rightarrow \langle \alpha \rangle (A \vee B)$.

Kohtien 1 ja 2 perusteella $M \vDash \langle\alpha\rangle(A \vee B) \leftrightarrow \langle\alpha\rangle A \vee \langle\alpha\rangle B$, sillä $w \in W$ on mielivaltainen. Myös malli M on mielivaltaisesti valittu. Täten $\vDash_{\mathrm{PDL}} \langle\alpha\rangle(A \vee B) \leftrightarrow \langle\alpha\rangle A \vee \langle\alpha\rangle B$. □

Lause 3.2. *Kaava* $[\alpha \cup \beta]A \leftrightarrow [\alpha]A \wedge [\beta]A$ *on PDL-validi.*

Todistus. Olkoon $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ mielivaltainen PDL-malli. Osoitetaan, että $M \vDash [\alpha \cup \beta]A \leftrightarrow [\alpha]A \wedge [\beta]A$. Todistetaan väite kahdessa osassa: $M \vDash [\alpha \cup \beta]A \to [\alpha]A \wedge [\beta]A$ ja $M \vDash [\alpha]A \wedge [\beta]A \to [\alpha \cup \beta]A$.

Olkoon $w \in W$ mielivaltainen tila.

1. Oletetaan, että $M, w \vDash [\alpha \cup \beta]A$. Täten määritelmän 3.8 välttämättömyysoperaattorin totuusehdon perusteella $\forall v \in W$ pätee, että jos $wR(\alpha \cup \beta)v$, niin $M, v \vDash A$. Tällöin relaation määritelmän nojalla $\forall v \in W$ pätee, että jos $wR(\alpha)v$ tai $wR(\beta)v$, niin $M, v \vDash A$. Siis edellä olevan täytyy olla voimassa kaikilla $v \in W$ ja w on mielivaltainen, niin täytyy olla, että

   $$\begin{aligned}&\forall v \in W \text{pätee, että jos } wR(\alpha)v, \text{ niin } M, v \vDash A \text{ ja}\\&\forall v \in W \text{pätee, että jos } wR(\beta)v, \text{niin } M, v \vDash A.\end{aligned}$$

   Täten $M, w \vDash [\alpha]A$ ja $M, w \vDash [\beta]A$. Siis $M, w \vDash [\alpha]A \wedge [\beta]A$. Täten $M, w \vDash [\alpha \cup \beta]A \to [\alpha]A \wedge [\beta]A$.

2. Oletetaan, että $M, w \vDash [\alpha]A \wedge [\beta]A$. Siis $M, w \vDash [\alpha]A$ ja $M, w \vDash [\beta]A$. Tällöin määritelmän 3.8 välttämättömyysoperaattorin totuusehdon perusteella

   $$\begin{aligned}&\forall w' \in W \text{ pätee, että jos } wR(\alpha)w', \text{ niin } M, w' \vDash A, \text{ ja}\\&\forall w'' \in W \text{ pätee, että jos } wR(\beta)w'', \text{ niin } M, w'' \vDash A.\end{aligned}$$

   Joka tapauksessa $\forall v \in W$ pätee, että jos $wR(\alpha)v$ tai $wR(\beta)v$, niin $M, v \vDash A$. Täten relaation määritelmän perusteella $\forall v \in W$ pätee, että jos $wR(\alpha \cup \beta)v$, niin $M, v \vDash A$. Siis $M, w \vDash [\alpha \cup \beta]A$. Täten $M, w \vDash [\alpha]A \wedge [\beta]A \to [\alpha \cup \beta]A$.

Kohtien 1 ja 2 nojalla $M \vDash [\alpha \cup \beta]A \leftrightarrow [\alpha]A \wedge [\beta]A$, sillä $w \in W$ on mielivaltainen. Myös malli M on mielivaltaisesti valittu. Täten $\vDash_{\mathrm{PDL}} [\alpha \cup \beta]A \leftrightarrow [\alpha]A \wedge [\beta]A$. □

3.5 Aksiomatisointi

Tässä luvussa esitämme tavallisen PDL:n erään aksiomatisoinnin. Aksioomasysteemi sisältää joukon aksioomaskeemoja ja päättelysääntöjä. Aksioomat ovat loogisesti tosia kaavoja ja aksioomaskeemasta saadaan aksiooma, kun korvataan atomikaavat jollain PDL:n kaavalla. Annetuista skeemoista voidaan päätellä päättelysääntöjen avulla uusia skeemoja.

Kaavan B sanotaan olevan pääteltävissä aksioomasysteemissä Λ, jos on olemassa kaavojen jono $B_1, B_2, \ldots, B_n$ siten, että $B_n = B$ ja B_i on aksiooma tai on olemassa systeemin sellainen päättelysääntö, että B_i voidaan päätellä kaavoista $B_1, B_2, \ldots B_j$, kun $j \leq i$. Tällöin merkitään $\vdash_\Lambda B$ ja sanotaan, että kaava B on systeemin Λ *teoreema* (ks. [6, s. 6]).

Tavallisen PDL:n aksioomasysteemiin kuuluvat päättelysäännöt *modus ponens (MP), välttämättömyyssääntö (RN)* ja *universaali substituutio (US).* Oletetaan, että Λ on aksioomasysteemi. Tällöin päättelysäännöt modus ponens, välttämättömyyssääntö ja universaali substituutio ovat seuraavat (ks. [1, s. 33]):

(MP) jos $A \in \Lambda$ ja $A \to B \in \Lambda$, niin $B \in \Lambda$

(RN) jos $A \in \Lambda$, niin $[\alpha]A \in \Lambda$, missä α on ohjelma ja A on teoreema

(US) jos $A \in \Lambda$, niin $A[p/B] \in \Lambda$, missä A on teoreema ja kaava $A[p/B]$ on saatu kaavasta A korvaamalla kaavan A atomikaava p kaavalla B.

Määritelmä 3.12. (Vrt. [1, s. 240]) PDL:n kielen sisältävä logiikka Λ on tavallinen PDL, jos se sisältää seuraavat aksioomaskeemat

1. $[\alpha](p \to q) \to ([\alpha]p \to [\alpha]q)$
2. $\langle\alpha\rangle p \leftrightarrow \neg[\alpha]\neg p$
3. $\langle\alpha \cup \beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p$
4. $\langle\alpha;\beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p$
5. $\langle\alpha^*\rangle p \leftrightarrow (p \vee \langle\alpha\rangle\langle\alpha^*\rangle p)$
6. $[\alpha^*](p \to [\alpha]p) \to (p \to [\alpha^*]p)$

ja on suljettu modus ponensin, välttämättömyyssäännön ja universaalin substituution suhteen.

Todistamme seuraavissa lauseissa, että määritelmän 3.12 aksioomaskeemat 3 ja 4 ovat PDL-valideja.

Lause 3.3. *Kaava $\langle\alpha \cup \beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p$ on PDL-validi.*

Todistus. Olkoon $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ mielivaltainen PDL-malli. Osoitetaan, että $M \vDash \langle\alpha \cup \beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p$. Todistetaan väite kahdessa osassa: $M \vDash \langle\alpha \cup \beta\rangle p \to \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p$ ja $M \vDash \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p \to \langle\alpha \cup \beta\rangle p$.

Olkoon $w \in W$ mielivaltainen tila.

1. Oletetaan, että $M, w \vDash \langle\alpha \cup \beta\rangle p$. Tällöin määritelmän 3.8 mahdollisuusoperaattorin totuusehdon perusteella $\exists v \in W$ siten, että $wR(\alpha \cup \beta)v$ ja $M, v \vDash p$. Relaation määritelmän nojalla $wR(\alpha)v$ tai $wR(\beta)v$. Siis $\exists v \in W$ siten, että $wR(\alpha)v$ ja $M, v \vDash p$ tai $wR(\beta)v$ ja $M, v \vDash p$.

   Täten $M, w \vDash \langle\alpha\rangle p$ tai $M, w \vDash \langle\beta\rangle p$. Siis $M, w \vDash \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p$. Täten $M, w \vDash \langle\alpha \cup \beta\rangle p \to \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p$.

2. Oletetaan, että $M, w \vDash \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p$. Siis $M, w \vDash \langle\alpha\rangle p$ tai $M, w \vDash \langle\beta\rangle p$. Tällöin määritelmän 3.8 mahdollisuusoperaattorin totuusehdon perusteella

$$\exists w' \in W \text{ siten, että } wR(\alpha)w' \text{ ja } M, w' \vDash p \text{ tai}$$
$$\exists w'' \in W \text{ siten, että } wR(\beta)w' \text{ ja } M, w'' \vDash p.$$

Joka tapauksessa $\exists v \in W$ siten, että $wR(\alpha)v$ tai $wR(\beta)v$ ja $M, v \vDash p$. Relaation määritelmän nojalla $\exists v \in W$ siten, että $wR(\alpha \cup \beta)v$ ja $M, v \vDash p$. Täten $M, w \vDash \langle\alpha \cup \beta\rangle p$. Siis $M, w \vDash \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p \rightarrow \langle\alpha \cup \beta\rangle p$.

Kohtien 1 ja 2 nojalla $M \vDash \langle\alpha \cup \beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p$, sillä $w \in W$ on mielivaltainen. Myös malli M on mielivaltaisesti valittu. Täten $\vDash_{\text{PDL}} \langle\alpha \cup \beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle p \vee \langle\beta\rangle p$.

□

Lause 3.4. *Kaava $\langle\alpha;\beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p$ on PDL-validi.*

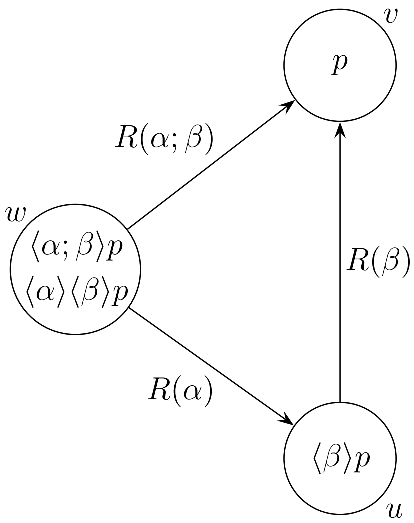
Todistus. Olkoon $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ mielivaltainen PDL-malli. Osoitetaan, että $M \vDash \langle\alpha;\beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p$. Todistetaan väite kahdessa osassa: $M \vDash \langle\alpha;\beta\rangle p \rightarrow \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p$ ja $M \vDash \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p \rightarrow \langle\alpha;\beta\rangle p$.

Olkoon $w \in W$ mielivaltainen tila.

1. Oletetaan, että $M, w \vDash \langle\alpha;\beta\rangle p$. Täten määritelmän 3.8 mahdollisuusoperaattorin totuusehdon perusteella $\exists v \in W$ siten, että $wR(\alpha;\beta)v$ ja $M, v \vDash p$. Tällöin relaation määritelmän nojalla $\exists u \in W$ siten, että niin $wR(\alpha)u$ ja $uR(\beta)v$ ja $M, v \vDash p$. Siis $\exists u \in W$ siten, että $wR(\alpha)u$ ja $M, u \vDash \langle\beta\rangle p$. Siis $M, w \vDash \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p$. Täten $M, w \vDash \langle\alpha;\beta\rangle p \rightarrow \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p$.

2. Oletetaan, että $M, w \vDash \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p$. Tällöin määritelmän 3.8 mahdollisuusoperaattorin perusteella $\exists u \in W$ siten, että $wR(\alpha)u$ ja $M, u \vDash \langle\beta\rangle p$. Edelleen $\exists v \in W$ siten, että $uR(\beta)v$ ja $M, v \vDash p$. Täten $\exists u \in W$ ja $\exists v \in W$ siten, että $wR(\alpha)u$ ja $uR(\beta)v$ ja $M, v \vDash p$. Relaation määritelmän perusteella $\exists v \in W$ siten, että $wR(\alpha;\beta)v$ ja $M, v \vDash p$. Siis $M, w \vDash \langle\alpha;\beta\rangle p$. Täten $M, w \vDash \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle A \rightarrow \langle\alpha;\beta\rangle p$.

Kohtien 1 ja 2 nojalla $M \vDash \langle\alpha;\beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p$, sillä $w \in W$ on mielivaltainen. Myös malli M on mielivaltaisesti valittu. Täten $\vDash_{\text{PDL}} \langle\alpha;\beta\rangle p \leftrightarrow \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle p$. Havainnoillistetaan tilannetta kuvalla.



□

4 Bisimulaatio

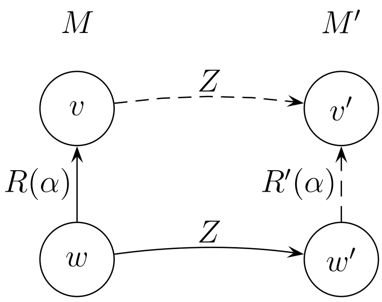
Olemme aiemmissa luvuissa käsitelleet relaatioita ja kaavojen totuusarvoja yhdessä mallissa kerrallaan. Tässä luvussa tarkastelemme kahden eri mallin sisäisten olosuhteiden lisäksi mallien välisiä relaatioita. Otamme tarkasteluun kahden eri mallin relaatiossa olevat tilat, joissa atomikaavat edellytetään saavan samat totuusarvot. Lisäksi mallin sisäisillä siirtymillä tilasta toiseen tulisi olla ominaisuuksiltaan vastaava siirtymä toisessa tarkasteltavassa mallissa. Tällaista mallien välistä relaatiota sanotaan bisimulaatioksi.

Määritelmä 4.1. (Vrt. [1, s. 70–71]) Oletetaan, että $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ ja $M' = \langle W', \{R'(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V'\rangle$ ovat PDL-malleja. Tällöin epätyhjä relaatio $Z \subseteq W \times W'$ on mallien M ja M' välinen *bisimulaatio*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

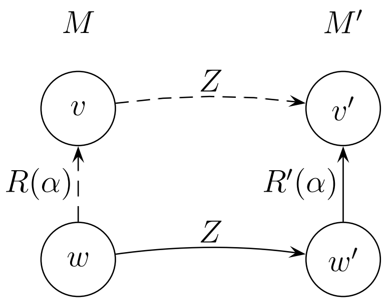
1. jos wZw', niin $w \in V(p_i) \Leftrightarrow w' \in V'(p_i)$ kaikilla $p_i \in \Phi_0$
2. jos wZw' ja $wR(\alpha)v$, niin on olemassa $v' \in W'$ siten, että $w'R'(\alpha)v'$ ja vZv'
3. jos wZw' ja $w'R'(\alpha)v'$, niin on olemassa $v \in W$ siten, että $wR(\alpha)v$ ja vZv'.

Jos on olemassa bisimulaatio Z siten, että wZw', niin sanotaan, että tilat w ja w' ovat *bisimilaariset*. Havainnoillistetaan bisimulaation määritelmän kohtia 2 ja 3 kuvien avulla:

Kohta 2



Kohta 3



Lause 4.1. *Oletetaan , että* $Z \subseteq W \times W'$ *on mallien* $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ *ja* $M' = \langle W', \{R'(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V'\rangle$ *välinen bisimulaatio. Olkoot* $w \in W$ *ja* $w' \in W'$*. Jos* w *ja* w' *ovat bisimilaariset, niin* $M, w \vDash A \Leftrightarrow M', w' \vDash A$*, kun* A *on kaava.*

Todistus (vrt. [1, s. 67]). Todistetaan lause induktiolla kaavan A pituuden suhteen. Konnektiivit $\wedge$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ sekä operaattori $[\alpha]$ voidaan ilmaista konnektiivien $\neg$ ja $\vee$ ja operaattorin $\langle\alpha\rangle$ avulla (ks. luku 2). Täten riittää, että todistetaan tapaukset, joissa kaava A on atomikaava, $A = \neg B$, $A = B \vee C$ ja $A = \langle\alpha\rangle B$, kun B ja C ovat kaavoja.

1. Olkoon $A = p$, missä p on atomikaava. Oletuksen perusteella w ja w' ovat bisimulaariset, joten bisimulaatioon määritelmän 4.1 kohdan 1 perusteella $w \in V(p) \Leftrightarrow w' \in V'(p)$. Totuuden määritelmän 3.8 kohdan 1 perusteella $w \in V(p) \Leftrightarrow M, w \vDash p$ ja $w' \in V'(p) \Leftrightarrow M', w' \vDash p$. Täten $M, w \vDash p \Leftrightarrow M', w' \vDash p$. Siis väite pätee, kun A on atomikaava.

2. Olkoon $A = \neg B$. Oletetaan, että väite pätee kaavalle B. Siis $M, w \vDash B \Leftrightarrow M', w' \vDash B$. Oletetaan, että $M, w \vDash \neg B$. Tällöin

$$\begin{aligned} M, w \vDash \neg B &\Leftrightarrow M, w \nvDash B \text{ (määritelmän 3.8 kohdan 2 perusteella)} \\ &\Leftrightarrow M', w' \nvDash B \text{ (oletuksen perusteella)} \\ &\Leftrightarrow M', w' \vDash \neg B \text{ (määritelmän 3.8 kohdan 2 perusteella).} \end{aligned}$$

3. Olkoon $A = B \vee C$. Oletetaan, että väite pätee kaavoille B ja C. Siis

$$M, w \vDash B \Leftrightarrow M', w' \vDash B \text{ ja } M, w \vDash C \Leftrightarrow M', w' \vDash C.$$

Oletetaan, että $M, w \vDash B \vee C$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
M, w \vDash B \vee C &\Leftrightarrow M, w \vDash B \text{ tai } M, w \vDash C \\
&\text{(määritelmän 3.8 kohdan 3 perusteella)} \\
&\Leftrightarrow M', w' \vDash B \text{ tai } M', w' \vDash C \\
&\text{(oletuksen perusteella)} \\
&\Leftrightarrow M', w' \vDash B \vee C \\
&\text{(määritelmän 3.8 kohdan 3 perusteella).}
\end{aligned}
$$

4. Olkoon $A = \langle\alpha\rangle B$. Oletetaan, että väite pätee kaavalle B.

   (a) Oletetaan, että wZw' ja $M, w \vDash \langle\alpha\rangle B$. Tällöin on olemassa $v \in W$ siten, että wRv ja $M, v \vDash B$. Koska w ja w' ovat bisimulaariset, niin on olemassa $v' \in W'$ siten, että vZv' ja $w'Rv'$. Täten oletuksen perusteella $M', v' \vDash B$ ja $M', w' \vDash \langle\alpha\rangle B$.

   (b) Oletetaan, että wZw' ja $M', w' \vDash \langle\alpha\rangle B$. Tällöin on olemassa $v' \in W'$ siten, että $w'R'v'$ ja $M', v' \vDash B$. Koska w ja w' ovat bisimulaariset, niin on olemassa $v \in W$ siten, että vZv' ja wRv. Täten $M, v \vDash B$ ja edelleen $M, w \vDash \langle\alpha\rangle B$.

   Täten kohtien 4a ja 4b perusteella väite pätee, kun $A = \langle\alpha\rangle B$.

Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kohtien 1, 2, 3 ja 4 perusteella. □

Tarkastellaan bisimulaatiota tavallisessa PDL-mallissa, jolloin operaatioina ovat $\cup, ;$ ja *. Bisimulaation määritelmän 4.1 mukaan bisimulaarisuuden täytyy olla voimassa kaikilla tavallisen mallin relaatioilla. Kuitenkin riittää, että tarkistetaan, päteekö bisimulaarisuus atomiohjelmiin liitettävien relaatioiden osalta (vrt. [1, s. 70–71]). Tällöin myös operaatioita $\cup, ;$ ja * sisältäviä ohjelmia vastaavat relaatiot toteuttavat bisimulaation ehdot. Tämä antaa aiheen seuraavalle määritelmälle.

Määritelmä 4.2. (Vrt. [1, s. 112–113]) Olkoon $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \text{ on ohjelma}\}, V\rangle$ ja $M' = \langle W', \{R'(\alpha) \mid \alpha \text{ on ohjelma}\}, V'\rangle$ malleja ja $Z \subseteq W \times W'$ mallien M ja M' välinen bisimulaatio. Olkoon $\alpha(*)\beta$ operaation $*$ avulla ohjelmista α ja β muodostettu ohjelma. Operaatio $*$ on turvallinen bisimulaation suhteen, jos sillä pätee

> jos wZw' ja $wR(\alpha * \beta)v$ jollain $v \in W$, niin on olemassa $v' \in W'$ siten, että $w'R'(\alpha * \beta)v'$ ja vZv'.

Lause 4.2. *Tavallisen PDL:n operaatiot $\cup$, ; ja * ovat turvallisia bisimulaation suhteen.*

Todistus (vrt. [4, s. 6]). Olkoon $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ ja $M' = \langle W', \{R'(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V'\rangle$ PDL-malleja ja $Z \subseteq W \times W'$ mallien M ja M' välinen bisimulaatio. Todistetaan turvallisuus kunkin operaation $\cup$, ; ja * kohdalla.

- Oletetaan, että wZw' ja $wR(\alpha \cup \beta)v$. Tällöin relaation määritelmän 3.6 perusteella $wR(\alpha)v$ tai $wR(\beta)v$. Täten bisimulaation määritelmän 4.1 perusteella on olemassa $v' \in W'$ siten, että vZv' ja $w'R'(\alpha)v'$ tai vZv' ja $w'R'(\beta)v'$. Joka tapauksessa on olemassa $v' \in W'$ ja $w'R'(\alpha \cup \beta)v'$.

- Oletetaan, että wZw' ja $wR(\alpha;\beta)v$. Tällöin relaation määritelmän 3.6 perusteella on olemassa $u \in W$ siten, että $wR(\alpha)u$ ja $uR(\beta)v$. Täten bisimulaation määritelmän 4.1 perusteella on olemassa $u' \in W'$ ja $v' \in W'$ siten, että uZu' ja $w'R'(\alpha)u'$ sekä vZv' ja $u'R'(\beta)v'$. Tällöin $v' \in W'$ ja $w'R'(\alpha;\beta)v'$.

- Oletetaan, että wZw' ja $wR(\alpha^*)v$. Tällöin relaation määritelmän 3.6 perusteella

  $$\begin{aligned} wR(\alpha^*)v = &\{(w,v) | \exists n \geq 0 : \exists u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n : u_0 = w, \\ &u_n = v \text{ ja } \forall k = 1, 2, \ldots, n : u_{k-1}R(\alpha)u_k\}. \end{aligned}$$

  Täten bisimulaation määritelmän 4.1 perusteella on olemassa

  $u'_0, u'_1, u'_2, \ldots, u'_{n-1}, u'_n \in W'$, missä $u'_0 = w'$ ja $u'_n = v'$, siten, että $u_k Z u'_k$ ja $u'_{k-1}R'(\alpha)u'_k$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots n$.

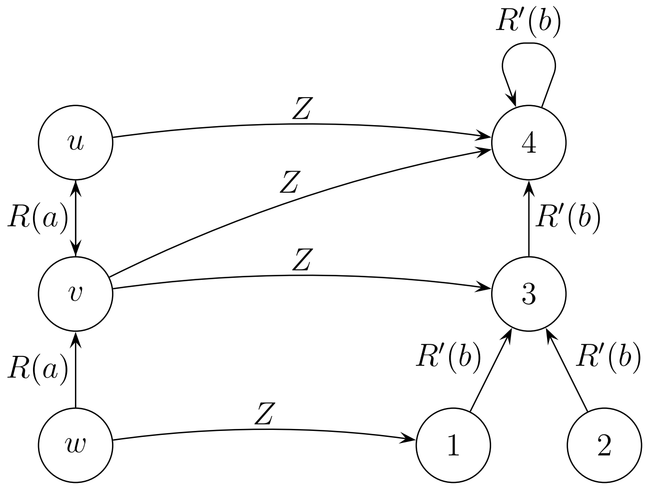
  Täten vZv' ja $w'R'(\alpha^*)v'$.

$\square$

Esimerkki 4.1. Olkoon $M = \langle W, \{R(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V\rangle$ ja $M' = \langle W', \{R'(\alpha) \mid \alpha \in \Pi\}, V'\rangle$ malleja, missä

$$\begin{aligned} &W = \{w, v, u\}, R(a) = \{(w, v), (v, u), (u, v)\}, V(p) = \{v, u\}, \\ &W' = \{1, 2, 3, 4\}, R'(b) = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\} \text{ ja } V'(p) = \{3, 4\}. \end{aligned}$$

Olkoon relaatio $Z = (w, 1), (v, 3), (v, 4), (u, 4)$. Havainnoillistetaan tilannetta kuvalla:



Osoitetaan, että relaatio Z on mallien M ja M' välinen bisimulaatio. Osoitetaan bisimulaation määritelmän 4.1 kohdat yksitellen.

1. Olkoon relaatio Z kuten edellä, joten $(w, 1), (v, 3), (v, 4), (u, 4) \in Z$. Mallien M ja M' valuaatioiden V ja V' perusteella

$$\begin{aligned} &w \notin V(p) \text{ ja } 1 \notin V'(p) \\ &v \in V(p) \text{ ja } 3 \in V'(p) \\ &v \in V(p) \text{ ja } 4 \in V'(p) \\ &u \in V(p) \text{ ja } 4 \in V'(p) \end{aligned}$$

   Täten bisimulaation määritelmän kohta 1 on voimassa.

2. Koska $(w, 1) \in Z$ ja $(w, v) \in R$, niin on olemassa $x' \in W'$ siten, että $(1, x') \in R'$ ja $(v, x') \in Z$. Tällöin on oltava $x' = 3$. Siis $(1, 3) \in R'$ ja $(v, 3) \in Z$.
   Koska $(v, 3) \in Z$ ja $(v, u) \in R$, niin on olemassa $x' \in W'$ siten, että $(3, x') \in R'$ ja $(u, x') \in Z$. Tällöin on oltava $x' = 4$. Siis $(3, 4) \in R'$ ja $(u, 4) \in Z$.
   Koska $(u, 4) \in Z$ ja $(u, v) \in R$, niin on olemassa $x' \in W'$ siten, että $(4, x') \in R'$ ja $(v, x') \in Z$. Tällöin on oltava $x' = 4$. Siis $(4, 4) \in R'$ ja $(v, 4) \in Z$.
   Koska $(v, 4) \in Z$ ja $(v, u) \in R$, niin on olemassa $x' \in W'$ siten, että $(4, x') \in R'$ ja $(u, x') \in Z$. Tällöin on oltava $x' = 4$. Siis $(4, 4) \in R'$ ja $(u, 4) \in Z$.
   Tilasta 4 ei pääse muihin tiloihin kuin itseensä relaatiolla R' ja tiloista v ja u pääsee vain toisiinsa relaatiolla R, joten siirtyminen jatkuu näiden tilojen välillä samanlaisena. Täten uusia pareja ei muodostu relaatioon Z. Siis bisimulaation määritelmän kohdan 2 ehto on voimassa.

3. Koska $(w, 1) \in Z$ ja $(1, 3) \in R'$, niin on olemassa $x \in W$ siten, että $(w, x) \in R$ ja $(x, 3) \in Z$. Tällöin on oltava $x = v$. Siis $(w, v) \in R$ ja $(v, 3) \in Z$.
   Koska $(v, 3) \in Z$ ja $(3, 4) \in R'$, niin on olemassa $x \in W$ siten, että $(v, x) \in R$ ja $(x, 4) \in Z$. Tällöin on oltava $x = u$. Siis $(v, u) \in R$ ja $(u, 4) \in Z$.
   Koska $(u, 4) \in Z$ ja $(4, 4) \in R'$, niin on olemassa $x \in W$ siten, että $(u, x) \in R$ ja $(x, 4) \in Z$. Tällöin on oltava $x = 2$. Siis $(u, v) \in R'$ ja $(v, 4) \in Z$.
   Koska $(v, 4) \in Z$ ja $(4, 4) \in R'$, niin on olemassa $x \in W$ siten, että $(v, x) \in R$ ja $(x, 4) \in Z$. Tällöin on oltava $x = 3$. Siis $(v, u) \in R$ ja $(u, 4) \in Z$.
   Tilasta 4 ei pääse muihin tiloihin kuin itseensä relaatiolla R' ja tiloista v ja u pääsee vain toisiinsa relaatiolla R, joten siirtyminen jatkuu näiden tilojen välillä samanlaisena. Täten uusia pareja ei muodostu relaatioon Z. Siis bisimulaation määritelmän kohdan 3 ehto on voimassa.

Kohtien 1, 2 ja 3 perusteella relaatio Z on mallien M ja M' välinen bisimulaatio.

Viitteet

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic.* 1th ed., Cambridge University Press, Cambridge UK, 2001.

[2] J. Y. Halpern, D. Samet, E. Segev *On definability in multimodal logics.* 2009
http://www.tau.ac.il/ samet/papers/definability1.pdf

[3] D. Harel, D. Kozen, J. Tiuryn, *Dynamic Logic.* Massachusetts Institute of Technology, 2000.

[4] M. Pauly, *Game Constructions that Are Safe for Bisimulation.* 31.3.1999.
http://www.illc.uva.nl/j50/contribs/pauly/pauly.pdf

[5] V. Rantala, A. Virtanen, *Johdatus modaalilogiikkaan.* 1. painos, Gaudeamus, Helsinki, 2004.

[6] Stanford encyclopedia of philosophy, *Propositional dynamic logic.* 3.7.2007.
http://plato.stanford.edu/entries/logic-dynamic/