TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Anni Surma-Aho

Tutkimus peruskoulun 7. - 9. luokkalaisten sijoittumisesta van Hielen tasoille

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Toukokuu 2010

Tiivistelmä

Geometria on matematiikan osa-alueena hyvin vanha ja se tutkii pisteitä, suoria, tasoja ja kappaleita. Sen ovat kehittäneet muinaiset egyptiläiset ja kreikkalaiset maanmittauksen avuksi. Sana geometria onkin kreikkaa ja tarkoittaa maanmittausta. Kreikkalaisista matemaatikoista Eukleides (n. 300 eaa) on vaikuttanut eniten geometrian kehitykseen ja hänen teostaan *Alkeet* käytettiin pitkään geometrian oppikirjana myös suomalaisissa oppikouluissa.

Suomalaisessa koulujärjestelmässä matematiikan opetus oli pitkään aritmetiikan ja algebran sekä geometrian ja trigonometrian opetusta. Geometriaa opiskeltiin laaja-alaisemmin ja syvällisemmin kuin nykypäivän kouluissa. Nykyisessä peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa annetaan geometrian opetuksen tavoitteiksi vuosiluokilla 6 - 9 mm. geometristen muotojen tunnistaminen, niiden ominaisuuksien tunteminen sekä yhdenmuotoisuuden tunnistaminen.

Tämä tutkimus pohjautuu kahden hollantilaisen opettajan, Pierre M. van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin, 1950-luvulla esittämään teoriaan geometrisen ajattelun kehityksestä. Alkunsa teoria sai van Hielen ja van Hiele-Geldofin käytännön opetustyössä tehdyistä havainnoista geometrian oppimisen vaiheittaisesta luonteesta. He havaitsivat geometrisen ajattelun kehittyvän vaiheittain ja alkoivat tutkia vaiheiden luonnetta ja keskenäistä järjestystä. Teorian mukaan geometrisen ajattelun kehittyessä oppilas käy lävitse viisi tasoa, joilla jokaisella on oma kielensä ja symbolinsa. Nämä viisi tasoa ilmenevät geometrisessa ajattelussa tapahtuvina muutoksina, jotka esiintyvät eri yksilöillä samantapaisina ja myös samassa järjestyksessä, mutta kuitenkin jokaiselle henkilökohtaisessa tahdissa. Van Hielet kehittivät myös viisiportaisen opetusmenetelmän, jota käyttämällä oppilaiden geometrisen ajattelun tasoa voitaisiin nostaa tasolta toiselle.

Tämä tutkimuksen kokeellinen osuus suoritettiin Kokkolalaisessa Kiviniityn koulussa huhtikuussa 2010 ja tutkimukseen osallistui yhteensä 61 7. - 9. luokkalaista oppilasta. Tutkimuksen tarkoituksena oli testata van Hielen teoriaa käytännössä ja tutkia, miten tutkimukseen osallistuneet oppilaat sijoittuvat van Hielen teoriassa esitetyille geometrisen ajattelun tasoille.

Sisältö

1 Johdanto

Kiinnostuin tutkimaan peruskoululaisten geometrian osaamisen tasoja, kun pedagogisia opintoja opiskellessani tein vastaavan, mutta huomattavasti suppeamman tutkimuksen aiheesta. Halusin laajentaa tietämystäni asiasta ja testata olemassaolevia teorioita. Kiinnostuin erityisesti van Hielen teoriasta ja siinä esitetyistä geometrisen ajattelun tasoista.

Tämän tutkielman aluksi tutustutaan geometrian kouluopetuksen vaiheisiin Suomessa ja esitellään, mitä uusin Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet (2004) antaa tavoitteiksi geometrian opetuksessa. Tutkielman matemaattisessa osuudessa esitellään geometrian peruskäsitteitä sekä muutamia keskeisiä määritelmiä, aksioomia ja lauseita.

Itse tutkimus pohjautuu van Hielen teoriaan, joka on syntynyt kahden opettajan, Pierre M. van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin, käytännön opetustyössä tehdyistä havainnoista geometrian oppimisen vaiheista. Näiden havaintojen pohjalta van Hielet kehittivät teoriansa geometrisen ajattelun tasoista ja siitä, miten käytännön opetustyössä oppilaiden geometristä ajattelua voidaan kehittää.

Tutkimuksen tarkoituksena on testata van Hielen teoriaa suhteelliseen pieneen oppilasryhmään ja katsoa, miten oppilaat sijoittuvan van Hielen teoriassa esitetyille geometrisen ajattelun tasoille. Tarkoituksena on myös vertailla saatuja tuloksia aikaisempiin aiheista tehtyihin tutkimuksiin, jotta nähdään sijoittuvatko oppilaat tasoille suunnilleen samalla tavalla kuin muissa tutkimuksissa.

2 Geometria peruskoulun opetuksessa

2.1 Geometrian opetuksen historiaa

1970-luvulle asti suomalaiset aloittivat koulunsa nelivuotisella kansakoululla, jonka jälkeen osa oppilaista siirtyi oppikouluun, joka koostui viisivuotisesta keskikoulusta ja kolmi- tai nelivuotisesta lukiosta. Ne oppilaat, jotka eivät siirtyneet oppikouluun, jatkoivat kansakoulussa vielä kaksi vuotta, minkä jälkeen he siirtyivät kaksivuotiseen kansalaiskouluun. [2]

Matematiikka kansa- ja kansalaiskoulussa oli alkeiden opettelua, oppikoulussa taas käsiteltiin aritmetiikkaa ja algebraa sekä geometriaa ja trigonometriaa. [2] Vaikka nykyisin opiskellaan useampien eri alojen matematiikkaa, oli varsinkin geometrian opiskelu tuohon aikaan nykyistä laajempaa ja syvällisempää. Geometrian oppitunnit käsittivätkin noin puolet matematiikan oppituntien määrästä [6]. 1900-luvun alussa geometrian opetus noudatti Eukleideen oppeja. Opetus oli keskinkertaiselle oppilaalle melkein mahdotonta ymmärtää, sillä sen taso oli selvästi oppilaiden ymmärryksen tason yläpuolella. Oppikirjana käytettiin kouluhallituksen ylitarkastajan Lauri Neovius-Nevanlinnan oppikirjaa *Alkeisgeometrian oppikirja lyseoita, yhteiskouluja ja tyttökouluja varten* (1923), missä todistukset olivat hyvin muotoiltuja, mutta keskinkertaisen oppilaan, ja joskus myös opettajan, ymmärryksen ylittäviä. [2]

1930-luvulla geometrian kouluopetuksessa tapahtui muutoksia. Kouluneuvos Niilo Kallio sekä yliopettaja Bruno Malmio kirjoittivat helpommat oppikirjat ja vuonna 1936 professori Kalle Väisälä esitti Suomen matematiikan ja fysiikan opettajien liiton kokouksessa Turussa ajatuksensa geometrian opetuksen uudistamisesta. Hänen mielestään geometrian opetus olisi muutettava, niin paljon kuin mahdollista, oppilaan omaan havaintokykyyn perustuvaksi ja todistuksista olisi poistettava kaikki sellaiset, jotka olivat jo pelkän havainnon perusteella selviä. Professori, sittemmin akateemikko Rolf Nevanlinna oli asiasta tiukasti eri mieltä ja hänen kerrotaan jopa olleen sitä mieltä, että jos geometria täytyy tehdä helpoksi, voidaan se saman tien poistaa kokonaan kouluista. [2]

Väisälä toteutti suunnitelmansa koulugeometrian uudistuksesta sotien jälkeen, jolloin hän myös julkaisi geometrian kirjansa. Tätä seurasi koulugeometrian ja koulumatematiikan rauhallisen kehityksen kausi, joka kesti aina 1960-luvulle asti, jolloin uudistuksia alkoi taas tapahtua. Uusi kausi alkoi nk. ”uudella matematiikalla”, joka ei kuitenkaan ollut sisällöllisesti uutta, vaan siinä sovellettiin koulumatematiikkaan huippumatemaatikoista koostuvan nk. Bourbaki-ryhmän laatiman kirjasarjan *Élements de mathématique* oppeja. Näihin oppeihin kuuluivat täydellisen ankara täsmällisyys (*la rigeur parfaite*), algebrallinen näkökulma ja pyrkimys rakentaa matematiikka joukko-opin perustalle. Näin ollen peruskoulun ensimmäisellä luokalla aloitettiin matematiikan opiskelu joukko-opilla ja klassisen geometrian tilalle tulivat kuvaukset, vektorit sekä analyyttinen geometria jo peruskoulussa. [2] Geometrian opetuksen määrä väheni ja erityisesti 1970-luvulla geometrian osuus matematiikan oppisisällöstä oli vähäinen [6].

”Uusi matematiikka” ei peruskoulun opetuksessa ollut paras mahdollinen vaihtoehto ja sen epäonnistuminen myös huomattiin varsin pian. Kun opetussuunnitelmaa seuraavan kerran uudistettiin 1970- ja 1980-lukujen vaihteessa, ”uudesta matematiikasta” luovuttiin. Nykyisin joukko-oppia esiintyy lähinnä vain todennäköisyyslaskennan yhteydessä ja geometriakin on vahvistanut asemiaan. [2] Seuraavaksi esitellään nykyajan peruskouluissa opetettavan geometrian keskeisiä sisältöjä.

2.2 Geometria peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa

Vuoden 2004 peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa annetaan matematiikan opetuksen tehtäväksi tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen sekä matemaattisten käsitteiden ja yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen. Geometria aloitetaan vuosiluokilla 1 - 2 ympäristöstä löytyvien geometristen muotojen havainnoinnilla, kuvailulla ja nimeämisellä. Tavoitteena on tuntea tasokuvioiden ja kappaleiden kuten nelikulmion, kolmion, ympyrän, pallon ja kuution perusmuodot sekä tietää geometrian peruskäsitteet: piste, jana, murtoviiva, puolisuora, suora ja kulma. Lisäksi oppilaan tulisi osata käyttää yksinkertaisia peilauksia ja suurennoksia. [4]

Vuosiluokilla 3 - 5 perehdytään puolestaan suurennoksiin ja pienennöksiin, yhdenmuotoisuuteen ja mittakaavaan. Tavoitteena on, että oppilas pystyy havaitsemaan yksinkertaisten geometristen kuvioiden ominaisuuksia, tunnistamaan yhdenmuotoisuuden sekä ymmärtämään mittaamisen periaatteen ja laskemaan suunnikkaiden ja kolmioiden pinta-aloja ja piirejä. [4]

Vuosiluokilla 6 - 9 on matematiikan opetuksen tehtävänä syventää käsitteiden ymmärtämistä sekä tarjota valmiudet mm. matemaattisten ajattelumallien oppimiseen ja täsmällisen ilmaisun harjoittelemiseen. Keskeisiä tavoitteita ovat geometristen muotojen tunnistaminen ja niiden ominaisuuksien tunteminen sekä yhdenmuotoisten, yhtenevien ja symmetristen kuvioiden löytäminen ja tämän taidon soveltaminen kolmioiden ja nelikulmioiden ominaisuuksien tutkimisessa. Lisäksi tavoitteena on, että oppilas osaisi soveltaa kahden kulman välisiä yhteyksiä sekä käyttää Pythagoraan lausetta ja trigonometriaa suorakulmaisen kolmion osien ratkaisussa. Myös geometristen konstrutkioiden tekeminen harpilla ja viivoittimella, mittausten suorittaminen ja mittayksiköiden muuntaminen kuuluvat tavoitteisiin. [4]

3 Van Hielen teoria

3.1 Yleistä

Hollantilaiset tutkijat ja montessorikoulun opettajat Pierre M. van Hiele ja Dina van Hiele-Geldof esittivät väitöskirjoissaan vuonna 1957 teorian henkisen kehityksen tasoista geometrian oppimisessa, siirtymisestä tasolta toiselle sekä siirtymistä edesauttavista opetusjärjestelyistä. Teorian perustana olivat Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin tutkimukset ja julkaisut, ja virikkeen teorian syntyyn he saivat käytännön opetustyöstä kertyneistä havainnoistaan geometrian oppimisen edistymisestä. [5] Työskennellessään montessorikoulussa he havaitsivat yläkoulu- ja lukiotasoisen geometrian vaativan suhteellisen korkeaa ajattelun tasoa, mille oppilaat eivät kuitenkaan ajattelussaan yltäneet. He alkoivat tutkia geometrisen ajattelun tasoja ja kuinka oikein ohjeistamalla oppilaat saataisiin siirtymään tasolta toiselle. Väitöskirjoissaan esitetyssä teoriassa kuvataan minkälaisten vaiheiden kautta geometrian oppiminen etenee ja missä järjestyksessä vaiheet toisiaan seuraavat. Dina van Hiele-Geldofin osuus käsitteli didaktista kokeilua, jossa tarkoituksena oli nostaa oppilaan ajattelun tasoa. Pierre van Hiele puolestaan muotoili geometrisen ajattelun tasojen rakenteen ja perusteet siitä, miten oppilas voisi lisätä ymmärrystään geometriassa. [1] Nämä tasot ilmentävät geometrisessa ajattelussa tapahtuvia muutoksia, jotka esiintyvät eri yksilöiden geometrisen ajattelun kehityksessä samantapaisina ja samassa järjestyksessä, mutta eivät välttämättä samassa tahdissa. [6]

3.2 Van Hielen tasot

Van Hielen teorian mukaan oppilas käy lävitse seuraavat viisi tasoa, joita jatkossa nimitetään lyhyesti van Hielen tasoiksi. Tasojen karakterisointi perustuu Fuysin ja Silfverbergin teoksiin [1] [5] ja niiden numeroinnissa käytetään van Hielen alkuperäisen numeroinnin $0, 1, \ldots, 4$ sijaan yleisemmin käytettyä järjestystä korostavaa numerointia $1, 2, \ldots, 5$. Tasojen suomenkieliset nimet vastaavat Silfverbergin käyttämiä [5].

1. Tunnistamisen taso

   Tällä tasolla oppilas osaa nimetä ja tunnistaa tavanomaiset geometriset kuviot. Kuvion tunnistaminen, nimeäminen, lajittelu, vertailu ja kuvailu perustuu sen visuaaliseen hahmoon, ei sen ominaisuuksiin. Kuviota käsitellään kokonaisuutena eikä kokonaisuuden ja osien väliseen suhteeseen kiinnitetä huomiota. Oppilaan ajattelu on tällä tasolla konkreettista ts. geometriset käsitteet edustavat kuvioiden nimiä eivätkä ole varsinaisia matemaattisia konstruktioita.

2. Analysoinnin taso

   Tällä tasolla visuaaliset struktuurit muuttuvat varsinaisiksi geometrisiksi struktuureiksi. Ajattelun abstraktiotaso nousee ja konkreettisilla objekteilla operointi muuttuu vähitellen geometrisilla symboleilla operoinniksi. Oppilas pystyy lajittelemaan kuvioita ominaisuuksien avulla ja vertailemaan kuvioita niiden osien välisten suhteiden perusteella. Myös kuvajoukkoja pystytään vertailemaan toisiinsa niiden ominaisuuksiin vedoten. Oppilas osaa siis tietoisesti kiinnittää huomiota kuvion ominaisuuksiin, mutta keskinäiset suhteet jäävät yhä tiedostamatta, eikä oppilas osaa selittää miten tietyn kuviojoukon ominaisuudet riippuvat toisistaan. Kuvioiden analysointi niiden osien ja osien suhteiden mukaan tapahtuu kokeellisesti.

3. Järjestämisen taso

   Oppilas pystyy loogisesti yhdistämään toisiinsa aikaisemmin havaittuja ominaisuuksia ja säännönmukaisuuksia käyttämällä epätäsmällisiä argumentteja. Määritelmiä pystytään muodostamaan ja käyttämään, ja deduktiivisen päättelyn seuraaminen on mahdollista. Geometrisen kuvion määrittelevistä ominaisuuksista pystytään tunnistamaan riittävät ja välttämättömät ominaisuudet. Oppilas kykenee ymmärtämään ominaisuuksien välisiä suhteita ja osaa käyttää kuvioiden ominaisuuksia hyväksi tutkittaessa kuvioluokkien sisältymistä toisiinsa. Laajempien teoreemajoukkojen välisiä yhteyksiä ei kuitenkaan hallita eikä geometriaa ymmärretä aksiomaattisena tieteenä.

4. Päättelyn taso

   Oppilas pystyy todistamaan väitteitä deduktiivisesti ja havaitsemaan teoreemajoukkojen välisiä yhteyksiä. Oppilas ymmärtää määritelmän, aksiooman ja lauseen välisen eron ja osaa tunnistaa, mitä probleemassa on annettu ja mitä vaaditaan.

5. Aksioomasysteemin ymmärtämisen taso

   Tällä tasolla osataan esittää abstrakteja systeemejä ja kuvailla tällaisten mallien avulla eri ilmiöitä. Oletusten ja aksioomien rajoitukset ja mahdollisuudet ymmärretään ja erilaisia aksiomaattisia systeemejä pystytään vertailemaan keskenään.

Van Hielet havaitsivat, että geometrisen ajattelun kehitys on epäjatkuva prosessi ja että ajattelun kehityskaaressa tapahtuu hyppäyksiä, jotka paljastavat van Hielen tasojen olemassaolon. He huomasivat myös, että tietyissä opetuksen vaiheissa oppimisprosessi saattaa pysähtyä ja jatkua myöhemmin kuin itsestään. Lisäksi opettaja ei onnistu uuden asian opettamisessa mikäli oppilaat eivät ole saavuttaneet uutta tasoa; on kuin opettaja puhuisi eri kieltä kuin oppilaat. Oppilaat saattavat hyväksyä opettajan esittämät väittämät ja pystyvät imitoimaan tiettyjä toimenpiteitä, mutta eivät opi niitä eivätkä pysty ymmärtämään niitä ennen kuin ovat saavuttaneet uuden tason. [1] Tästä johtuen on tärkeää, että opettaja tietää millä tasolla hänen oppilaidensa ajattelu on ja osaa käyttää tälle tasolle ominaisia kielellisiä symboleja, eikä käytä opetuksessaan ylemmän tason kieltä. Myös ns. tason reduktio eli oppisisällön opettaminen todellista tasoa alempaan ajatteluun kuuluvin metodein on mahdollista, mutta ei johda todelliseen ymmärrykseen eikä täten nosta oppilaan geometrisen ajattelun tasoa [6]. Esimerkiksi asian ulkoa opettelu ilman todellista ymmärrystä on tällainen menetelmä.

Van Hielen tasoista tehdyissä tutkimuksissa on havaittu, että osa oppilaista ei yllä edes alimmalle van Hielen tasolle. Tällaisia oppilaita varten on joissain julkaisuissa haluttu lisätä ns. nollataso, joka olisi tason yksi alataso. Tämän tason tarpeellisuus on tullut esille varsinkin tutkittaessa alle kouluikäisten lasten geometrista ajattelua. Tutkimukset ovat osoittaneet, että ensimmäistä van Hielen tasoa edeltää ns. esipresentationaalinen taso, jolla geometrisia muotoja ei välttämättä eroteta virheettömästi toisistaan, mutta kuvioita koskeva päättely perustuu visuaalisiin malleihin. [6]

3.3 Siirtyminen tasolta toiselle

Geometrisen ajattelun kehitys tasolta toiselle riippuu enemmänkin opetuksesta kuin oppilaan iästä tai biologisesta kypsyydestä. Lisäksi oppilas ei voi saavuttaa tiettyä tasoa ilman edellisten tasojen toimintojen hallintaa. [1] Korkeamman tason saavuttaminen edellyttää aina edeltävillä tasoilla kehittynyttä ymmärrystä, sillä edeltävän tason toiminta on aina seuraavan tason analysoinnin kohteena. Kehityskulku on siis implisiittisestä eksplisiittiseen ts. se, mikä edeltävän tason ajattelussa on implisiittistä, muuttuu seuraavalla tasolla eksplisiittiseksi. [6]

Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin mukaan oppilaan geometrisen ajattelun nostaminen tasolta toiselle tapahtuu viisivaiheisen opetusmenetelmän avulla, missä oppilaan itsenäisen toiminnan osuus kasvaa vaihe vaiheelta. Tämän opetusmetodin käytännön kehitystyöstä ja kokeilusta vastasi lähinnä Dina van Hiele-Geldof. [5] [6] Opetusmenetelmän viisi vaihetta ovat Fuysin ja Silfverbergin teoksia [1] [5] mukaillen seuraavat:

1. Tutkiva kysely

   Ensimmäisessä vaiheessa opiskeltavasta aihepiiristä keskustellaan opettajajohtoisesti. Oppilaat tutustuvat aiheeseen ja luovat itselleen alustavan näkemyksen opiskeltavasta asiakokonaisuudesta. Opettaja pyrkii selvittämään oppilaiden käsityksiä keskeisistä käsitteistä.

2. Suunnattu orientoituminen

   Oppilaat perehtyvät opiskeltavan aihepiirin rakenteeseen ja suorittavat huolellisesti suunniteltuja tehtäväsarjoja, joiden tarkoituksena on saadan oppilas ymmärtämään mihin opetuksessa pyritään.

3. Tarkentaminen

   Oppilas tulee tietoiseksi asioiden välisistä yhteyksistä ja yrittää ilmaista niitä sanallisesti. Opettaja pyrkii saamaan oppilaat mahdollisimman itsenäisesti tarkentamaan käyttämäänsä sanastoa ja ilmaisemaan ajatuksensa opiskeltavan aihepiirin rakenteesta. Tutkittavien asioiden väliset suhteet alkavat muotoutua oppilaiden ajatuksissa.

4. Vapaa orientoituminen

   Oppilas totuttelee etsimään omia ratkaisumallejaan suorittamalla yhä monimutkaisempia tehtäviä, jotka ovat joko monivaiheisia tai ratkaistavissa monella tavalla. Opiskeltavien asioiden väliset suhteet saavat eksplisiittisen merkityksen.

5. Kokoaminen

   Opettaja tekee yhteenvedon opiskellusta kokonaisuudesta ja pyrkii näin muodostamaan oppilaille kokonaisnäkemyksen aiheesta. Tässä vaiheessa on huolellisesti vältettävä käyttämästä opiskeltuun aihepiiriin kuulumattomia käsitteitä. Oppilas itse summaa kaiken mitä on asiasta oppinut ja pohtii omia toimiaan oppimisen eri vaiheissa.

Dina van Hiele-Geldofin tekemien tutkimusten mukaan kaksitoistavuotiaiden oppilaiden siirtäminen tasolta 1 tasolle 2 vaatii noin 20 oppituntia opetusta. Siirtäminen tasolta 2 tasolle 3 vaatii puolestaan noin 50 oppituntia. [5]

4 Matemaattinen teoria

Geometria on matematiikan osa-alue, joka tutkii pisteitä, suoria, tasoja ja kappaleita. Sana geometria on kreikkaa ja tarkoittaa maanmittausta. Geometria onkin kehittynyt juuri maanmittauksen ansiosta ja varsinaiseksi tieteeksi sen ovat kehittäneet egyptiläiset ja kreikkalaiset. [8] Kreikkalaisista matemaatikoista eniten geometrian sekä myös matematiikan aksiomaattisen järjestelmän kehitykseen on vaikuttanut Eukleides (n. 300 eaa.), jonka teosta *Alkeet* käytettiin vielä 1800-luvulla geometrian oppikirjana myös suomalaisissa oppikouluissa.

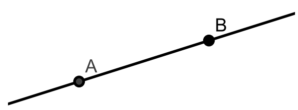
4.1 Piste, suora ja taso

Esitellään ensimmäiseksi geometrian kolme peruskäsitettä, joille ei ole annettu täsmällisiä määritelmiä.

1. *Piste* esittää objektia, jolla on paikka, mutta ei ulottuvuutta. Muita geometrisia kuvioita (suoria, ympyröitä, monikulmioita, jne.) voidaan pitää pisteiden kokoelmina. [7] Pisteitä merkitään isoilla kirjaimilla $A, B, C, \ldots$

2. Viivat geometriassa ajatellaan äärettömän ohuiksi. Voidaan ajatella, että viiva on äärettömän tiheässä olevien peräkkäisten pisteiden muodostama. Molempiin suuntiin rajattomasti jatkettua suoraa viivaa kutsutaan *suoraksi.* Suora nimetään joko kahden sillä olevan pisteen mukaan (suora AB) tai sille merkityn pienen kirjaimen mukaan (suora s). [8]

3. *Tasoksi* kutsutaan kaikkiin suuntiin rajoittamaksi ajateltua tasaista pintaa. Taso sisältää kokonaan kaikki ne suorat, joiden kanssa sillä on kaksi yhteistä pistettä. [8]



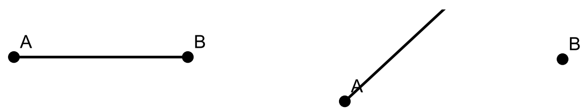
Kuva 1: Suora AB

Mikäli suora l kulkee pisteen A kautta, sanotaan, että piste A on suoralla l tai on suoran l piste ja merkitään $A \in l$. Jos taas piste A ei ole suoralla l, niin sanotaan, että piste A on suoran l ulkopuolella ja merkitään $A \notin l$.

Määritellään jana ja puolisuora edellä esitettyjen peruskäsitteiden avulla.

Määritelmä 4.1. Kahden pisteen välistä suoran osaa kutsutaan *janaksi.* Kyseisiä pisteitä kutsutaan janan *päätepisteiksi.* Jana nimetään päätepisteidensä tai janalle merkityn pienen kirjaimen mukaan. [8]

Määritelmä 4.2. Vain toiseen suuntaan äärettömästi jatkuvaa, tietystä pisteestä alkavaa suoraa viivaa kutsutaan *puolisuoraksi.* Kyseinen piste on puolisuoran *alkupiste.* Puolisuora nimetään alkupisteensä ja puolisuoralle merkityn kirjaimen mukaan. [8]



(a) Jana AB (b) Puolisuora AB

Kuva 2

Esitellään seuraavaksi kaksi aksioomaa, joita kutsutaan liittymisaksioomiksi ja jotka käsittelevät pisteen, suoran ja tason välisiä suhteita.

Aksiooma 4.1. Jokaista kahta pistettä A ja B kohti on olemassa täsmälleen yksi suora l niin, että molemmat pisteistä A ja B ovat tällä suoralla. [2]

Aksiooma 4.2. Jokaisella suoralla on vähintään kaksi pistettä A ja B niin, että $A \neq B$. Tasossa on olemassa vähintään kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. [2]

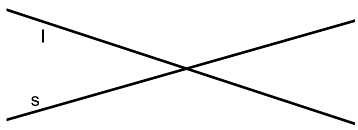
Aksiooman 4.1 perusteella voidaan todeta, että kahdella eri suoralla ja voi olla korkeintaan yksi yhteinen piste. Tätä pistettä kutsutaan tällöin kyseisten suorien leikkauspisteeksi.

Lause 4.1. *Jos suorat l ja m, $l \neq m$, leikkaavat toisensa, niin leikkauspisteitä on korkeintaan yksi.[2]*

Todistus. Oletetaan, että suorat l ja m, $l \neq m$ leikkaavat toisensa. Tehdään vastaoletus, että leikkauspisteitä on ainakin kaksi ja olkoon A ja B nämä pisteet. Koska pisteet A ja B ovat suorien l ja m yhteisiä pisteitä, niin $A, B \in l$ ja $A, B \in m$. Tällöin aksiooman 4.1 perusteella $l = m$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Lause 4.1 on näin todistettu.

Seuraava lause on seurausta aksioomasta 4.2.

Lause 4.2. *Jokaisen suoran ulkopuolella on olemassa vähintään yksi piste. [3]*

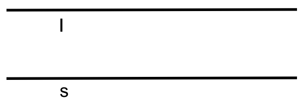


Kuva 3: Suorat l ja s leikkaavat toisensa

Todistus. Valitaan mielivaltainen suora l. Aksiooman 4.2 perusteella on olemassa pisteet P_1 ja P_2, $P_1 \neq P_2$, jotka ovat suoralla l. Olkoon s suora, joka kulkee pisteen P_1 kautta ja $s \neq l$. Tällöin aksiooman 4.2 perusteella on olemassa piste $P_3 \in s$ niin, että $P_3 \neq P_1$. Nyt $P_3 \notin l$, joten on löydetty piste suoran l ulkopuolelta. Lause 4.2 on näin todistettu.

Kaikki suorat eivät kuitenkaan välttämättä leikkaa toisiaan, vaan ne voivat olla myös yhdensuuntaisia. Määritelläänkin seuraavaksi suorien yhdensuuntaisuus.

Määritelmä 4.3. Kahden suoran sanotaan olevan *yhdensuuntaisia*, mikäli ne ovat samat tai niillä ei ole yhteisiä pisteitä. [3]



Kuva 4: Yhdensuuntaiset suorat l ja s

Mikäli suorat l ja s ovat yhdensuuntaiset, merkitään $l||s$. Jos suorat eivät ole yhdensuuntaiset, sanotaan niiden olevan erisuuntaiset. Jos suorat ovat keskenään samat, sanotaan, että ne *yhtyvät*.

Yhdensuuntaisten suorien olemassaolo on yksi euklidisen geometrian määräävä ominaisuus. Eukleideen paralleeliaksioomaa yritettiin pitkään todistaa lauseena siinä kuitenkaan onnistumatta. Nämä yritykset loppuivat, kun löydettiin sellaisia geometrisia järjestelmiä, eli epäeuklidisia geometrioita, joissa paralleeliaksiooma ei ole voimassa. Seuraava aksiooma on paralleeliaksiooman tasolle sopiva muotoilu.

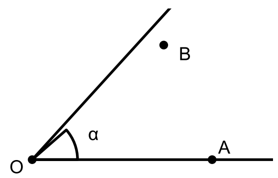
Aksiooma 4.3. Suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi tämän suoran suuntainen suora. [3]

4.2 Kulma

Määritelmä 4.4. Kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajoittamaa tason osaa sanotaan *kulmaksi*. Kyseisiä puolisuoria kutsutaan kulman *kyljiksi* ja puolisuorien alkupistettä kulman *kärjeksi*. [8]

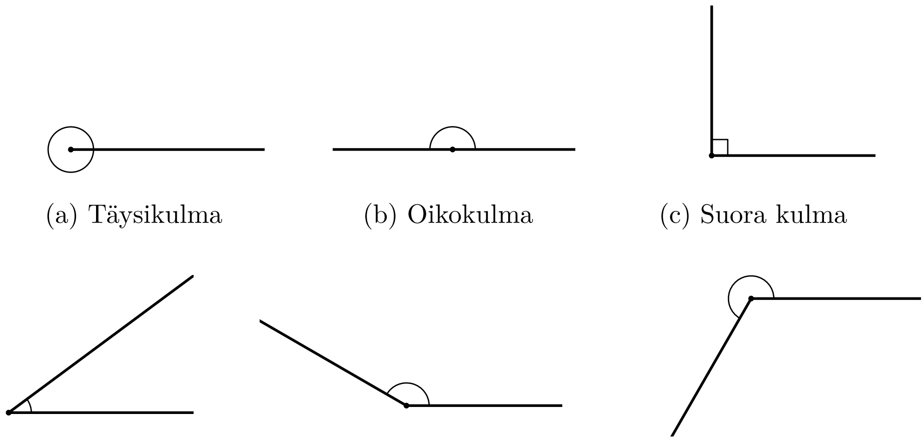
Kulmat nimetään joko kolmella isolla kirjaimella kulman kylkien ja kärkien mukaan, kulman kärjen mukaan isolla kirjaimella tai kreikkalaisten aakkosten pienillä kirjaimilla. Kulma-sanan sijasta voidaan käyttää merkkiä $\angle$. Kulman kärjestä katsottuna vasemmalla puolella olevaa kylkeä kutsutaan kulman *vasemmaksi kyljeksi* ja oikealla puolella olevaa kylkeä *oikeaksi kyljeksi*. Kahden kulman vasempien kylkien sanotaan olevan keskenään *samannimisiä* ja samoin oikeiden. Vastaavasti kahden kulman eri puoleisia kylkiä kutsutaan *erinimisiksi*.

Esimerkki 4.1. Kuvan 5 kulmaa voidaan merkitä millä tahansa seuraavista merkinnöistä: $\angle AOB, \angle O$ tai $\angle\alpha$. Kylki OB on kulman vasen kylki ja OA oikea kylki.



Kuva 5: Esimerkki 4.1

Kulmien mittaamiseen käytetään joko asteita, °, tai radiaaneja, rad. Mikäli kulman suuruus on 360°, kutsutaan sitä *täydeksi kulmaksi*, *nollakulman* suuruus puolestaan on 0°. *Oikokulman* suuruus on 180° ja *suoran kulman* 90°. Mikäli kulman suuruus on $0° \leq \alpha < 90°$, on kyseessä *terävä kulma* kun taas suurudeltaan $90° < \alpha < 180°$ oleva kulma on *tylppä kulma*. Jos kulman suuruus on $180° < \alpha < 360°$ kutsutaan sitä *kuperaksi kulmaksi*. *Kulman puolittajaksi* kutsutaan puolisuoraa, jonka alkupiste on kulman kärjessä ja joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan.



(a) Täysikulma (b) Oikokulma (c) Suora kulma

(d) Terävä kulma (e) Tylppä kulma (f) Kupera kulma

Kuva 6

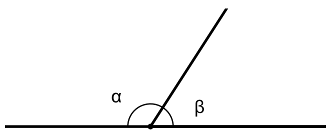
Määritelmä 4.5. Kulmia α ja β kutsutaan toistensa

1) *komplementtikulmiksi*, jos $\alpha + \beta = 90°$

2) *suplementtikulmiksi*, jos $\alpha + \beta = 180°$

3) *eksplementtikulmiksi*, jos $\alpha + \beta = 360°$

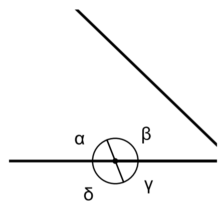
Määritelmä 4.6. Jos kaksi kulmaa on vierekkäin siten, että niiden kärjet ovat samassa pisteessä, kaksi erinimistä kylkeä yhtyvät ja toiset kaksi erinimistä kylkeä muodostavat suoran, sanotaan kulmien olevan toistensa *vieruskulmia*. Vieruskulmien summa on 180°.



Kuva 7: Vieruskulmat α ja β

Määritelmä 4.7. Kun kaksi suoraa leikkaa toisensa, muodostuu neljä kulmaa. Näistä vierekkäiset ovat toistensa vieruskulmia ja vastakkaiset toistensa *ristikulmia*.

Esimerkki 4.2. Kuvassa 8 kulmat β ja δ ovat kulman α vieruskulmia ja kulma γ on kulman α ristikulma.



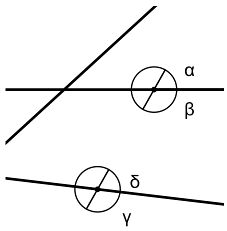
Kuva 8: Esimerkki 4.2

Lause 4.3. *Ristikulmat ovat keskenään yhtä suuret. [8]*

Todistus. Olkoot kulmat α ja γ toistensa ristikulmia ja olkoon kulma β kulman α vieruskulma. Tällöin vieruskulman määritelmän mukaan $\alpha + \beta = 180°$. Määritelmän 4.7 mukaan kulma β on myös kulman γ vieruskulma, joten myös $\gamma + \beta = 180°$. Tällöin $\alpha + \beta = \gamma + \beta$, joten $\alpha = \gamma$. Lause 4.3 on näin todistettu.

Määritelmä 4.8. Jos suora s leikka kahta muuta suoraa l ja m, muodostuu molempien leikkauspisteeseen neljä kulmaa. Niitä kulmia, joilla suora s on samannimisenä kylkenä, kutsutaan *samankohtaisiksi*. *Erikohtaisiksi* kulmiksi kutsutaan puolestaan niitä kulmia, joilla suora s on erinimisenä kylkenä. [8]

Esimerkki 4.3. Kuvassa 9 keskenään samankohtaisia kulmia ovat α ja δ sekä β ja γ. Keskenään erikohtaisia kulmia puolestaan ovat α ja β, α ja γ, β ja δ sekä δ ja γ.

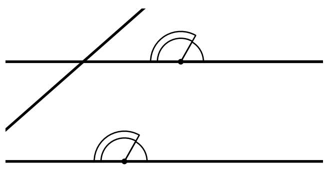


Kuva 9: Esimerkki 4.3

Mikäli määritelmässä 4.8 esitetyn suoran s leikkaamat suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, saadaan seuraava lause, joka on jo aikaisemmin esitetyn paralleeliaksiooman (aksiooma 4.3) seuraus.

Lause 4.4. *Mikäli suora leikkaa kahta suoraa siten, että samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria, niin leikatut suorat ovat yhdensuuntaiset. [2]*

Todistus. Sivuutetaan.



Kuva 10

Seuraava lause on edellä esitetyn lauseen käänteistulos.

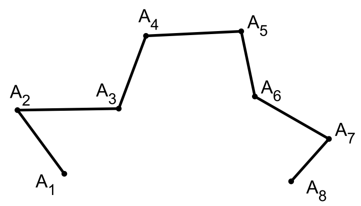
Lause 4.5. *Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret. [8]*

Todistus. Sivuutetaan.

4.3 Monikulmiot

Aloitetaan monikulmioiden käsitteleminen määrittelemällä murtoviivan käsite.

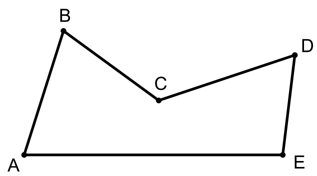
Määritelmä 4.9. Yhtenäistä käyrää, joka koostuu pisteet $A_1, A_2 \ldots, A_n$ yhdistävistä janoista $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, joista mitkään kaksi peräkkäistä eivät ole samalla suoralla, kutsutaan *murtoviivaksi*. Jos murtoviivan alkupiste yhtyy loppupisteeseen, murtoviiva on suljettu. Muutoin se on avoin. [7]



Kuva 11: Murtoviiva

Määritelmä 4.10. Itseään leikkaamattoman, suljetun murtoviivan rajaamaa tason osaa kutsutaan *monikulmioksi*. Pisteet $A_1, A_2 \ldots, A_n$ ovat monikulmion *kärjet* ja janat $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ sen *sivut*. Monikulmion kärjet ovat eri pisteitä, eikä sen sivuilla ole muita yhteisiä pisteitä kuin kärjet. [2]

Monikulmiossa on aina yhtä monta kärkeä kuin sivua ja niiden luvun mukaan monikulmiota nimitetään joko *kolmikulmioksi* eli *kolmioksi*, *nelikulmioksi*, *viisikulmioksi*, jne. Monikulmiot nimetään niiden kärkien kirjainten mukaan. Monikulmion *lävistäjäksi* kutsutaan sellaista kahden kärjen yhdistävää janaa, joka ei ole monikulmion sivu. Mikäli monikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, kutsutaan monikulmiota *säännölliseksi monikulmioksi*.



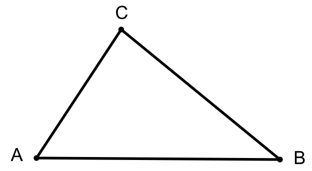
Kuva 12: Viisikulmio $ABCDE$

4.3.1 Kolmio

Määritelmä 4.11. Monikulmio, jossa on kolme kulmaa on kolmio. Kolmio on monikulmio, jolla on pienin määrä sivuja. Jokainen monikulmio voidaan jakaa kolmioiksi. [7]

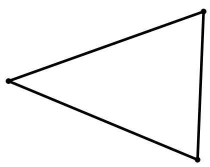
Kolmion alinta sivua kutsutaan kolmion *kannaksi* ja kahta muuta sivua kolmion *kyljiksi.*

Esimerkki 4.4. Kuvassa 13 on kolmio ABC. Jana AB on sen kanta ja janat AC ja BC sen kylkiä.

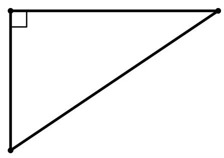


Kuva 13: Esimerkki 4.4

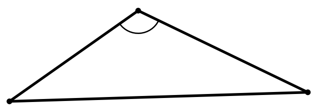
Kolmiot voidaan jakaa kolmeen ryhmään. *Teräväkulmaisissa kolmioissa* kaikki kulmat ovat teräviä, *suorakulmaisissa kolmioissa* on yksi suora kulma ja *tylppäkulmaisissa kolmioissa* on yksi tylppä kulma. Suorakulmaisen kolmion suoran kulman viereisiä sivuja kutsutaan *kateeteiksi* ja suoran kulman vastaista sivua *hypotenuusaksi.* Hypotenuusa on aina kateetteja pidempi.



(a) Teräväkulmainen kolmio



(b) Suorakulmainen kolmio

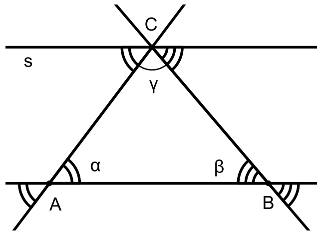


(c) Tylppäkulmainen kolmio

Kuva 14

Lause 4.6. *Komion kulmien summa on* $180°$.

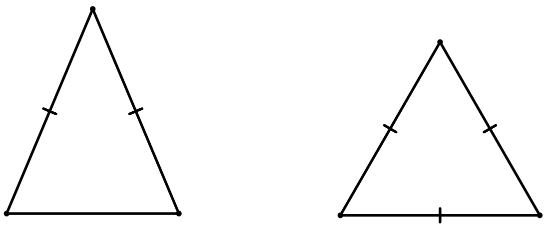
Todistus. Piirretään kolmion ABC (kuva 15) kärjen C kautta sivun AB kanssa yhdensuuntainen suora s ja jatketaan sivua AB suoraksi. Jatketaan myös sivut AC ja BC suoriksi.Nyt suorien AB ja AC leikkauspisteeseen muodostuu kulman α ristikulma, jolloin suorien s ja AB leikkauspisteessä on tämän kulman kanssa samankohtainen kulma, joka lauseen 4.5 perusteella on



Kuva 15: Kolmio ABC

yhtä suurin kuin kulman α ristikulma ja täten myös yhtä suuri kuin kulma α. Vastaavasti syntyy kulman β kanssa yhtäsuuri kulma suoran s ja suoran BC leikkaupisteeseeen. Nyt piste C on kolmen kulman α, β ja γ kärkenä ja yhdessä nämä kulmat muodostavat oikokulman, joten $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Lause 4.6 on näin todistettu.

Määritelmä 4.12. Kolmio on *tasakylkinen*, mikäli sen kaksi sivua ovat yhtä pitkiä. Tasakylkisen kolmion kahta keskenään yhtä pitkää sivua kutsutaan kolmion *kyljiksi* ja kolmatta sivua *kannaksi.* Kannan ja kylkien välisiä kulmia kutsutaan *kantakulmiksi* ja kylkien välistä kulmaa *huippukulmaksi.* Mikäli kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, kutsutaan sitä *tasasivuiseksi* kolmioksi.



(a) Tasakylkinen kolmio

(b) Tasasivuinen kolmio

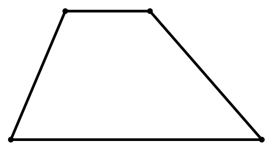
Kuva 16

Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60° ja tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat keskenään yhtä suuret.

4.3.2 Nelikulmiot

Monikulmioita, joilla on neljä sivua, kutsutaan *nelikulmioiksi.* Esitellään seuraavaksi erilaisia nelikulmioita.

Määritelmä 4.13. Nelikulmiota, jonka kaksi sivua ovat keskenään yhdensuuntaiset, kutsutaan *puolisuunnikkaaksi.* Yhdensuuntaisia sivuja kutsutaan puolisuunnikkaan *kannoiksi.* Mikäli puolisuunnikkaassa toiset kaksi sivua ovat keskenään yhtä pitkät, sanotaan puolisuunnikasta *tasakylkiseksi.* [7]



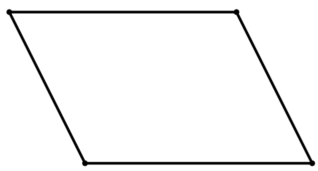
Kuva 17: Puolisuunnikas

Määritelmä 4.14. Nelikulmiota, jonka vastakkaiset sivut ovat keskenään yhtä pitkiä, kutsutaan *suunnikkaaksi*. Suunnikkaalla on mm. seuraavat ominaisuudet

1) lävistäjät puolittavat toisensa,

2) vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset,

3) vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. [7]



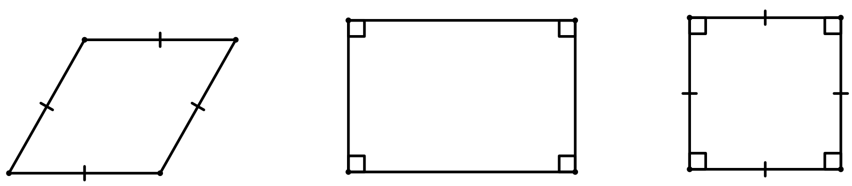
Kuva 18: Suunnikas

Suunnikkaan erikoistapauksia ovat neljäkäs, suorakulmio ja neliö.

Määritelmä 4.15. Suunnikasta, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä kutsutaan *neljäkkääksi*. [7]

Määritelmä 4.16. *Suorakulmio* on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria kulmia.

Määritelmä 4.17. *Neliö* on suorakulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.

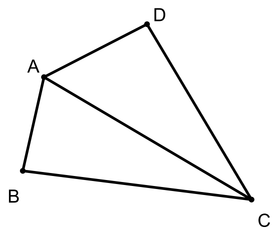


(a) Neljäkäs (b) Suorakulmio (c) Neliö

Kuva 19

Lause 4.7. *Nelikulmion kulmien summa on* $360°$.

Todistus. Jaetaan nelikulmio $ABCD$ (kuva 20) lävistäjällä kahteen kolmioon. Koska kolmion kulmien summa on $180°$, on nelikulmion kulmien summa $2 \cdot 180° = 360°$. Lause 4.7 on näin todistettu.



Kuva 20: Nelikulmio $ABCD$

5 Tutkimus

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on mitata miten peruskoulun 7. - 9. luokkalaiset sijoittuvat van Hielen tasoille 1 - 3. Tasoja 4 ja 5 ei tässä tutkimuksessa oteta huomioon, sillä näiden tasojen saavuttaminen vaatisi korkeamman matematiikan ymmärrystä, joten voidaan olettaa, etteivät peruskoululaiset näille tasoille yllä. Lisäksi haluttiin tutkia sijoittuvatko 9. luokkalaiset korkeammalle tasolle kuin 7. luokkalaiset, eli voidaanko ajatella geometrisen ajattelun kehittyvän yläkoulun aikana.

Tutkimus suoritettiin huhtikuussa 2010 Kiviniityn koulussa Kokkolassa ja se suoritettiin tehtävälomakkeella oppitunnin alussa. Tutkimukseen osallistui 61 oppilasta, joista 7. luokkalaisia oli 28, 8. luokkalaisia 14 ja 9. luokkalaisia 19. Tutkittavien oppilaiden määrä on niin pieni, että mitään yleistyksiä yläkoululaisten geometrian osaamisen tasoista ei kuitenkaan voida tehdä.

5.1 Tutkimuslomakkeen kuvaus

Tutkimuksen suorittamiseen käytettiin tehtävälomaketta, joka sisälsi kuusi geometriaan liittyvää tehtävää. Tehtävien määrä pidettiin pienenä, jotta oppilaat jaksaisivat keskittyä vastaamaan kysymyksiin kunnolla ja jotta heidän motivaationsa tehtävien huolelliseen tekemiseen ei laskisi suorituksen aikana. Tehtävät laadittiin tutkimusongelmien pohjalta ja laadinnassa käytettiin apuna Silfverbergin tutkimuksessaan käyttämiä tehtävälomakkeita [5]. Tehtävistä pyrittiin tekemään mahdollisimman yksiselitteisiä, jotta tutkimustulokset olisivat mahdollisimman luotettavia. Lisäksi tehtävänannot pyrittiin muotoilemaan mahdollisimman tarkasti, ettei väärinkäsityksille jäisi tilaa. Tehtävälomake on liitetty tämän tutkielman loppuun liitteeksi 1.

Tehtävälomakkeen ensimmäisessä tehtävässä oppilaan oli piirrettävä kolme erilaista kolmiota ja kerrottava miten nämä kolmiot eroavat toisistaan. Tehtävän tarkoituksena oli tutkia, osaako oppilas ylipäätään piirtää keskenään erilaisia kolmioita ja osaako hän perustella minkä takia piirretyt kolmiot ovat erilaisia. Toisessa tehtävässä pyydettiin oppilasta nimeämään mahdollisimman tarkasti annetut monikulmiot. Kysytyt monikulmiot ovat suorakulmio, suorakulmainen kolmio, neliö, tasasivuinen kolmio sekä suunnikas. Tehtävänannossa käytettiin mainintaa ”mahdollisimman tarkasti”, jotta oppilas huomaisi miettiä kuvioiden täsmällisiä nimiä eikä esimerkiksi nimeäisi suorakulmaista kolmiota pelkästään kolmioksi.

Kolmannessa tehtävässä oppilaan oli poimittava annetuista kuvioista kaikki neliöt, kolmiot, suunnikkaat ja suorakulmiot. Kuvioiden joukossa oli myös sellaisia, jotka eivät kuuluneet mihinkään näistä luokista. Kuvioista kolmioita ovat kuviot B, C ja I, neliöitä kuvioista ei ole yksikään, suunnikkaita ovat kuviot E, G, H ja K sekä suorakulmioita kuvio E.

Neljännessä tehtävässä oppilaalle annettiin neljä nelikulmiota (A - D) ja pyydettiin selvittämään mitä yhteistä kolmella ensimmäisellä nelikulmiolla (A - C) on ja miten neljäs nelikulmio (D) eroaa näistä kolmesta. Kolme ensimmäistä nelikulmiota ovat kaikki suunnikkaita, joten yhteistä niillä on se, että jokaisessa niistä vastakkaiset sivut ovat keskenään yhdensuuntaisia. Neljäs nelikulmio (D) on puolisuunnikas, joten se eroaa muista siten, että sillä ainoastaan kaksi vastakkaista sivua ovat keskenään yhdensuuntaiset.

Viidennessä tehtävässä annettiin viisi väittämää, jotka oppilaan oli merkattava joko todeksi (T) tai epätodeksi (E). Väittämistä c) ja e) ovat tosia ja loput epätosia.

Kuudennessa tehtävässä pyydettiin oppilasta esittämään määritelmä suorakulmiolle. Luvussa 4.3.2 määritellään suorakulmio nelikulmioksi, jonka kaikki kulmat ovat suoria kulmia (määritelmä 4.16).

5.2 Van Hielen tasojen mittaaminen

Jotta voitaisiin määrittää mille van Hielen tasolle kukin oppilas asettuu, on määriteltävä mitä tehtävälomakkeessa on osattava saavuttaakseen kunkin tason. Seuraavat kriteerit kunkin tason saavuttamiseksi on laadittu van Hielen tasojen määrittelyn pohjalta käyttäen apuna Silferbergin käyttämiä kriteerejä [5].

Van Hielen tason 1 saavuttamiseksi on oppilaan pystyttävä vähintään neljään seuraavista kuudesta suorituksesta:

- osaa tehtävässä 1 piirtää kolme keskenään erilaista kolmioita
- pystyy tehtävässä 2 nimeämään vähintään kolme seuraavista: kolmio, neliö, suorakulmion ja suunnikas
- tehtävän 3 kohdassa a) huomaa, ettei neliöitä ole tai rajaa valinnan kuvioihin G ja H
- tehtävän 3 kohdassa b) tunnistaa vähintään yhden kuvioista B, C, I kolmioksi ja rajaa valinnan kolmioihin
- tehtävän 3 kohdassa c) tunnistaa vähintään yhden suunnikaista E, G, H, K ja rajaa valinnan suunnikkaisiin
- tehtävän 3 kohdassa d) valitsee ainoastaan nelikulmioita, mutta ei kuviota J

Van Hielen tason 2 saavuttamiseksi edellytetään oppilaalta vähintään kuusi seuraavista kahdeksasta suorituksesta:

- osaa tehtävässä 1 vertailla piirtämiään kolmioita toisiinsa niiden ominaisuuksiin perustuen, eikä perustele erilaisuutta kolmioiden kokoon vedoten

- osaa tehtävässä 2 nimetä täsmällisesti kuvioista vähintään neljä
- tehtävän 3 kohdassa a) huomaa, ettei neliöitä ole tai rajaa valinnan kuvioon G
- tehtävän 3 kohdassa b) tunnistaa kaikki kolmiot
- tehtävän 3 kohdassa c) tunnistaa suunnikkaiksi vähintään kolme kuvioista E, G, H ja K, ja rajaa valinnan suunnikkaisiin
- tehtävän 3 kohdassa d) tunnistaa kuvioista ainoan suorakulmion
- tehtävässä 4 pystyy joko kertomaan mitä samaa nelikulmioissa A - C on tai kertomaan miksi nelikulmio D eroaa tehtävän muista nelikulmioista
- tehtävässä 6 luettelee suorakulmion ominaisuuksia, mutta ei osaa rakentaa niistä täsmällistä määritelmää

Van Hielen tason 3 saavuttamiseksi vaaditaan vähintään neljä suoritusta seuraavista kuudesta suorituksesta:

- nimeää tehtävässä 2 kaikki kuviot täsmällisesti
- tunnistaa tehtävässä 3 täsmällisesti kaikki kolmiot, suorakulmiot ja suunnikkaat
- huomaa tehtävässä 3, ettei yksikään kuvioista ole neliö
- tehtävässä 4 osaa täsmällisesti kertoa, mitä yhteistä kuvioilla A - C on ja miksi kuvio D eroaa muista kuvioista
- tunnistaa tehtävässä 5 kaikki todet ja epätodet väittämät
- tehtävässä 6 osaa antaa määritelmän suorakulmiolle

5.3 Vastausten analysointi

Tämän kaltaista tutkimusta tehdessä on todettava se, etteivät kaikki tutkimukseen osallistuvat oppilaat välttämättä ole motivoituneita vastaamaan tehtäviin huolellisesti. Tämä on tutkimuksen kannalta valitettavaa, mutta täysin odotettavissa ja ymmärrettävää, varsinkin kun otetaan huomioon tutkittavien ikä ja kiinnostuneisuus käsiteltävästä aiheesta. Tämän tutkimuksen tehtävälomakkeiden perusteella voidaan sanoa, että huolellisimmin tehtävään vastasivat yhdeksäsluokkalaiset. Kahdeksasluokkalaisten vastauksissa oli eniten huolimattomasti tehtyjä vastauksia. Vastausprosentti oli kuitenkin kiitettävä, kuhunkin tehtävään vastanneiden oppilaiden määrät luokka-asteittain on esitetty taulukossa 1. Tarkastellaan seuraavaksi kutakin tehtävää erikseen.

Taulukko 1: Tehtäviin vastanneiden oppilaiden lukumäärät luokka-asteittain.

Tehtävä	Luokka-aste						yhteensä	
	7		8		9			
	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]
1	27	$96,4$	14	$100,0$	19	$100,0$	60	$98,4$
2	28	$100,0$	14	$100,0$	19	$100,0$	61	$100,0$
3	28	$100,0$	14	$100,0$	19	$100,0$	61	$100,0$
4	21	$75,0$	12	$85,7$	18	$94,7$	51	$83,6$
5	28	$100,0$	13	$92,9$	19	$100,0$	60	$98,4$
6	25	$89,3$	8	$57,1$	17	$89,5$	50	$82,0$

Tehtävässä 1 oppilaan tehtävänä oli piirtää kolme keskenään erilaista kolmiota ja kertoa miten nämä kolmiot eroavat toisistaan. Oletuksena oli, että suurin osa oppilaista osaisi piirtää keskenään erilaisia kolmioita, mikä pitikin paikkansa, sillä $85,2$ % tutkimukseen osallistuneista oppilaista onnistui tässä tehtävässä. Huomattavaa oli, että suorakulmaisen kolmion piirsi jopa $63,9$ %, mistä voisi päätellä sen olevan kolmioista tutuin. Yhdeksäsluokkalaisista keskenään erilaisia kolmioita osasi piirtää $94,7$ %, kahdeksasluokkalaisista $64,3$ % ja seitsemäsluokkalaisista $89,3$ %. Suurin osa niistä oppilaista, jotka eivät onnistuneen piirtämään kolmea erilaista kolmiota piirsivät joko kolme täsmälleen samanlaista kolmiota, jotka olivat eri kokoisia tai kaksi täsmälleen samanlaista mutta eri kokoista kolmiota ja yhden erilaisen kolmion. Lisäksi joukossa oli kuvioita, jotka eivät olleet kolmioita.

Täsmällisen perustelun kolmioiden erilaisuudelle osasi antaa $23,0$ % oppilaista. Yleisin täsmällinen perustelu oli kulmien suuruus sekä luokittelu teräväkulmaisiin, tylppäkulmaisiin ja suorakulmaisiin kolmioihin. Epätäsmällisistä perusteluista suurin osa liittyi kolmioiden kokoon. $27,9$ % ei antanut minkäänlaisia perusteluja.

Tehtävässä 2 oppilasta pyydettiin nimeämään monikulmiot A - E mahdollisimman tarkasti. Vaikka edellisessä tehtävässä suorakulmaisen kolmion oli piirtänyt reilusti yli puolet oppilaista, tämän tehtävän suorakulmaisen kolmion (kuvio B) osasi nimetä täsmällisesti ainoastaan $29,5$ % vastanneista, vaikka suurin osa tunnisti sen kolmioksi. Suorakulmaisen kolmion vähäinen tunnistaminen saattaa johtua siitä, ettei suoraa kulmaa oltu merkitty tavalliseen tapaan. Olisi kiinnostavaa saada tietää, kuinka moni olisi sen tunnistanut, mikäli suora kulma olisi kuvioon merkitty.

Kuvio C, eli neliö, oli selvästi tutuin, jopa $88,5$ % tunnisti sen ja osasi nimetä oikein. Hieman yllättävää oli, että suunnikas osottautui suorakulmiota hieman tutummaksi: $73,8$ % osasi nimetä suunnikkaan oikein kun taas suorakulmion kohdalla tässä onnistui $68,9$ %. Kuvio D, eli tasasivuinen kolmio, osoittautui selvästi vaikeimmaksi nimetä. Valtaosa oli kyllä tunnistanut sen kolmioksi, mutta ainoastaan $19,7$ % pystyi antamaan sille täsmällisen nimen. Mielenkiintoista oli se, että seitsemäsluokkalaiset tunnistivat kuvion D tasasivuiseksi kolmioksi huomattavasti paremmin kuin kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaiset. Syynä voi tietysti olla se, että monikulmioita opetellaan juuri seitsemännellä luokalla. Taulukossa 2 esitetään luokka-asteittain kunkin kuvion täsmällisesti nimenneiden oppilaiden määrät.

Taulukko 2: Täsmällisesti tehtävän 2 kuviot nimenneiden oppilaiden määrät luokka-asteittain.

	Luokka-aste					
Kuvio	7		8		9	
	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]
A	21	$75,0$	8	$57,1$	13	$68,4$
B	3	$10,7$	4	$28,6$	11	$57,9$
C	27	$96,4$	13	$92,9$	14	$73,7$
D	10	$35,7$	1	$7,1$	1	$5,3$
E	25	$89,3$	7	$50,0$	13	$68,4$

Tehtävässä 3 oppilaiden oli luokiteltava annetut kuviot neliöihin, kolmioihin, suunnikkaisiin ja suorakulmioihin. Mukana oli myös kuvioita, jotka eivät kuuluneet mihinkään edellä mainittuun ryhmään. Tehtävä osoittautui oletettua hankalammaksi eikä yksikään oppilaista saanut luokiteltua kaikkia täysin oikein. Vaikeimmaksi kohdaksi osottautui kohta a), missä pyydettiin antamaan kaikki neliöt. Tämä oli vaikein kohta, koska yhtään neliötä ei kuvioiden joukossa ollut, vaikkakin kuvio G muistutti suuresti neliötä. Kuviota G ehdotettiinkin usein neliöksi, samoin kuvioita H ja E.

Lähes puolet oppilaista ($49,2$ %) osasi kuitenkin kohdassa b) antaa kaikki kolme kolmiota. Sama tilanne oli kohdassa d), missä $47,5$ % oppilaista tunnisti kuvion E ainoaksi suorakulmioksi. Suunnikkaiksi moni hyväksyi ainoastaan kuviot K ja H, vaikka myös E ja G niitä ovat.

Tehtävässä 4 annettiin neljä nelikulmiota (A - D) ja pyydettiin kertomaan mitä yhteistä nelikulmiolla A, B ja C on ja miten nelikulmio D eroaa muista. Tehtävään vastanneista $23,0$ % osasi kertoa mitä yhteistä nelikulmioilla A - C on ja $27,9$ % osasi kertoa miksi nelikulmio D eroaa näistä. Huomattavaa on, että ainoastaan seitsemäs- ja yhdeksäsluokkalaiset osasivat antaa oikeita perusteluja tähän tehtävään.

Täsmällisesti tehtävän molempiin kysymyksiin osasi vastata $19,7$ % vastanneista. Perustelut olivat joko, että A - C ovat suunnikkaita ja D on puolisuunnikas tai että nelikulmioissa A - C vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä ja samansuuntaisia, mutta nelikulmiossa D ainoastaan kaksi sivua on samansuuntaisia ja muut kaksi eivät. Virheellisistä perusteluista yleisimmissä sanottiin nelikulmioiden A - C kaikkien sivujen olevan samansuuntaisia, mikä on tietenkin mahdotonta, sekä väitettiin nelikulmioiden A - C olevan samansuuntaisia. Periaatteessa ajatus näissä perusteluissa voi hyvinkin olla oikea, mutta koska ilmaisu on väärin, ei näitä voi hyväksyä oikeiden perustelujen joukkoon.

Tehtävässä 5 oppilaita pyydettiin merkitsemään mitkä väittämistä a) - e) ovat tosia ja mitkä epätosia. Koska tällaisissa tehtävissä pystyy arvaamalla saamaan kohtalaisen monta oikein oli erittäin vaikea arvioida kuinka moni todella tiesi oikean vastauksen kussakin kohdassa. Ainoastaan yksi oppilas osasi vastata jokaiseen kohtaan oikein ja ainoastaan yksi oppilas ei saanut yhtään oikein. Suurin osa, $36,1$ % vastasi oikein kolmeen kohtaan, $24,6$ % vastasi oikein kahteen kohtaan, neljä oikein sai $19,7$ % oppilaista ja yhden oikein sai $16,4$ %. Taulukossa 3 esitetään nämä osuudet luokka-asteittain.

Taulukko 3: Oppilaiden oikein vastaamien väittämien lukumäärä luokka-asteittain.

	Luokka-aste					
Oikein vastattujen	7		8		9	
väittämien lukumäärä	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]
0/5	0	$0,0$	1	$7,1$	0	$0,0$
1/5	5	$17,9$	1	$7,1$	4	$21,1$
2/5	9	$32,1$	3	$21,4$	3	$15,8$
3/5	6	$21,4$	8	$57,1$	8	$42,1$
4/5	7	$25,0$	1	$7,1$	4	$21,1$
5/5	1	$3,6$	0	$0,0$	0	$0,0$
yhteensä	28	100	14	100	19	100

Viimeisessä tehtävässä oli annettava määritelmä suorakulmiolle. Täsmällisen määritelmän osasi antaa ainoastaan kaksi yhdeksäsluokkalaista. Suorakulmion täsmällisiä ominaisuuksia luetteli 14 oppilasta ($23,0$ %). Loput eivät joko vastanneet ollenkaan, luettelivat ominaisuuksia epätäsmällisesti tai antoivat määritelmiä kuten ”suorakulmion kaikki sivut ovat suoria”.

5.4 Tulosten tarkastelu

Ensimmäinen tutkimusongelma käsitteli oppilaiden sijoittumista van Hielen tasoille 1 - 3. Luvussa 5.2 annettiin kriteerit, joiden mukaan oppilaat voitiin sijoittaa van Hielen tasoille. Kriteereitä voidaan pitää onnistuineina, sillä yksikään oppilas ei saavuttanut tasoja 2 tai 3 täyttämättä ensin aikaisempien tasojen kriteerejä. Mikäli oppilas ei täyttänyt tason 1 kriteereitä, sijoitettiin hänet tasolle 0, mikä on ainoastaan merkinnällinen taso ja tarkoittaa sitä, ettei oppilaan suoritus täyttänyt edes alimman van Hielen tason kriteerejä.

Jokaisella luokka-asteella suurin osa tutkituista oppilaista sijoittui van Hielen tasolle 1. Seitsemäsluokkalaisista pieni osa, $7,1$ %, sijoittui tasolle 2 kun taas kahdeksasluokkalaisista tälle tasolle ei yltänyt yksikään. Yhdeksäsluokkalaisista tasolle kaksi ylsi $21,1$ %. Huomiota herättävää on se, että puolet tutkituista kahdeksasluokkalaisista ei yltänyt yhdellekään van Hielen tasoista. Vastaavat osuudet seitsemäs- ja yhdeksäsluokkalaisista ovat $21,4$ % ja $26,3$ %.

Mikäli tarkastellaan tutkittavia oppilaita kokonaisuudessaan, van Hielen tasojen ulkopuolelle jäi $29,5$ %, tason 1 saavutti $60,7$ %, tasolle 2 pääsi $9,8$ % ja tasoa 3 ei saavuttanut yksikään oppilas. Kiinnostava ajatus on miten oppilaat sijottuisivan van Hielen tasoille, jos kyseessä olisi ollut oppilaan matematiikan numeroon vaikuttava koe. Silloin todennäköisesti oppilaat olisivat keskittyneet tehtäviin tarkemmin ja vastanneet huolellisemmin, jolloin tuloksetkin saattaisivat olla erilaisia.

Toinen tutkimusongelma käsitteli seitsemäs- ja yhdeksäsluokkalaisten eroja van Hielen tasoille sijoittumisessa ja sitä, sijoittuvatko yhdeksäsluokkalaiset pääasiassa ylemmälle tasolle kuin seitsemäsluokkalaiset. Tutkimukseen osallistuneista yhdeksäsluokkalaisista noin viidesosa sijoittui van Hielen tasolle 2 kun taas seitsemäsluokkalaisista alle kymmenesosa. Tutkimukseen osallistui kuitenkin niin pieni määrä oppilaita, ettei mitään päteviä johtopäätöksiä voida tästä vetää.

Taulukko 4: Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden sijoittuminen van Hielen tasoille luokka-asteittain.

van Hielen taso	Luokka-aste 7		8		9		kaikki	
	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]
0	6	$21,4$	7	$50,0$	5	$26,3$	18	$29,5$
1	20	$71,4$	7	$50,0$	10	$52,6$	37	$60,7$
2	2	$7,1$	0	$0,0$	4	$21,1$	6	$9,8$
3	0	$0,0$	0	$0,0$	0	$0,0$	0	$0,0$
yhteensä	28	100	14	100	19	100	61	100

Van Hielen tasolle 1 sijoittuneiden oppilaiden vastauksissa oli nähtävissä tiettyjä yhdenmukaisuuksia. Tehtävässä 1 suurin osa heistä tulkitsi kolmioiden eroavaisuudet koon, muodon tai asennon perusteella. Tehtävässä 2 he eivät yleisesti antaneet täsmällisiä nimiä suorakulmaiselle ja tasasivuiselle kolmiolle, vaan nimesivät nämä yksinkertaisesti kolmioiksi. Tehtävän 3 kuvioista neljäkäs (kuvio G) miellettiin herkästi neliöksi eikä suunnikkaiksi hyväksytty suorakulmiota tai neljäkästä.

Tasolla 2 tyypillistä oli erotella tehtävän 1 kolmiot sivujen pituuksien tai kulmien suuruksien mukaan. Hyvin moni piirsi teräväkulmaisen, tylppäkulmaisen ja suorakulmaisen kolmion. Tehtävässä 2 osattiin jo nimetä joko suorakulmainen kolmio tai tasasivuinen kolmio täsmällisesti ja tehtävän 3 luokitteluissa pystyttiin jo hyväksymään suorakulmio suunnikkaisiin.

6 Lopuksi

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, miten peruskoulun 7. - 9. luokkalaiset sijoittuvat van Hielen tasoille. Kokonaisuudessaan tutkimus onnistui hyvin, vaikka mitään suuria johtopäätöksiä tuloksista ei voitu vetää. Tutkimukseen osallistuneet oppilaat pystyttiin kuitenkin sijoittamaan van Hielen tasoille odotusten mukaisesti. Tulokset vastasivat aikaisempia aiheesta tehtyjä tutkimuksia siinä, että suurin osa oppilaista sijoittui van Hielen tasolle 1 ja että iso osa oppilaista jäi tason 1 alapuolelle. Esimerkiksi Silfverbergin vuonna 1986 julkaistussa tutkimuksessa seitsemäsluokkalaisista 50, 0 % oli tasolla 1 ja 33, 3 % tasolla 0. Yhdeksäsluokkalaisista 22, 2 % jäi nollatasolle ja 38, 9 % sijoittui tasolle 1. [5] Vastaavasti Silfverbergin toisessa tutkimuksessa vuonna 1992 tutkituista 7. - 9. luokkalaisista 14, 4 % jäi ensimmäisen tason alapuolelle ja ensimmäisen tason saavutti 23, 3 %. Silfverberg oli kuitenkin tässä tutkimuksessaan lisännyt tasojen 1 ja 2 väliin välitason 1 - 2, jolle 27, 2 % oppilaista sijoittui. Välitason käyttö perusteltiin sillä, että useammissa aiheeseen liittyvissä tutkimuksissa oli huomattu, että osa testatuista henkilöistä oli vaikea sijoittaa millekään yksittäiselle van Hielen tasolle. Näiden tutkittavien tapauksessa oli kuin he olisivat olleet tasojen välillä, ehkä vasta saavuttamaisillaan ylempää tasoa. Välillä heidän geometrinen ajattelunsa oli osoittanut ylemmän tason piirteitä, mutta tehtävien vaikeustason kohotessa he siirtyivät käyttämään alemman tason ajattelumalleja. [6] Huomasin saman myös tässä tutkimuksessa. Osa van Hielen tasolle 1 sijoitetuista oppilaista saavutti vaadituista kuudesta tason 2 kriteeristä jopa neljä tai viisi, mutta esimerkiksi neljännen tehtävän nelikulmion vertailussa käyttivät virheellisiä ilmaisuja kuten ”A, B ja C ovat neliöitä”. Nämä oppilaat olivat kuitenkin geometrisessä ajattelussaan selvästi korkeammalla tasolla kuin ne, jotka saavuttivat tason 1 juuri ja juuri.

Tämä tutkimus oli kuitenkin varsin suppea niin otannan kuin tehtävienkin kannalta ja tarkoituksena olikin vain testata van Hielen teoriaa pieneen oppilasjoukkoon. Mikäli haluttaisiin vahvempia tuloksia, olisivat lisätutkimukset suuremmalla otannalla ja laajemmalla tehtävämäärällä tarpeen. Tällöin pystyttäisiin myös arvoimaan tutkimuksessa käytettyjen tehtävien ja kriteerien luotettavuutta.

Viitteet

[1] Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. 1988. *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Journal for research in mathematics education. Monograph number 3. The national council of teachers of mathematics, Inc. Reston, VA.

[2] Lehtinen, M., Merikoski, J. & Tossavainen, T. 2007. *Johdatus tasogeometriaan.* WSOY Oppimateriaalit Oy. Helsinki.

[3] Nevanlinna, R. 1973. *Geometrian perusteet.* Werner Söderström Osakeyhtiö. Porvoo.

[4] *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet.* 2004. Opetushallitus. Helsinki.
Saatavissa osoittesta http://www02.oph.fi/ops/perusopetus/pops_web.pdf [viitattu 2.5.2010]

[5] Silfverberg, H. 1986. *Van Hielen teoria geometrian oppimisessa ilmenevistä tasoista: Tasojen teoreettinen tarkastelu ja mittausmenetelmien kokeilu.* Tampereen yliopiston kasvatustieteen laitos. Julkaisusarja A: Tutkimusraportti n:o 39. Tampereen yliopisto.

[6] Silfverberg, H. 1999. *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto.* Acta Electronica Universitansis Tamperensis 6. Tampereen yliopisto. Saatavissa osoitteesta http://acta.uta.fi/pdf/951-44-4718-2.pdf [viitattu 2.5.2010]

[7] Thompson, J. (toim.) 1994. *Matematiikan käsikirja.* Tammi. Helsinki.

[8] Väisälä, K. 1961. *Geometria.* Seitsemäs painos. Werner Söderström Osakeyhtiö. Porvoo.

LIITE 1

Tutkimuslomake

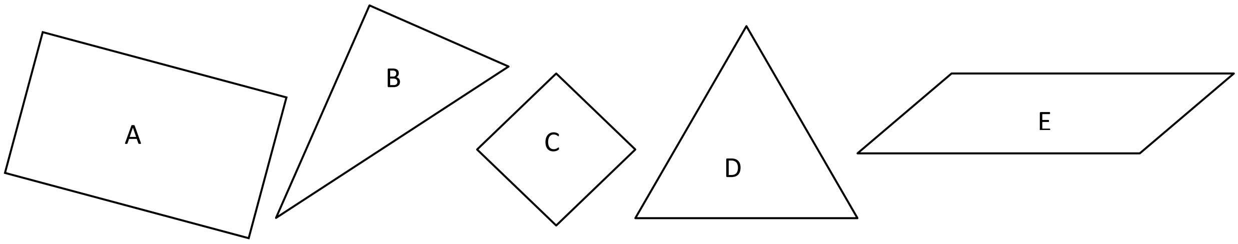
Luokka-asteeni on (_) 7. luokka (_) 8. luokka (_) 9. luokka

Tehtävä 1.

Piirrä kolme keskenään erilaista kolmiota. Miten piirtämäsi kolmiot eroavat toisistaan?

Tehtävä 2.

Nimeä alla olevat kuviot mahdollisimman tarkasti.



A:____

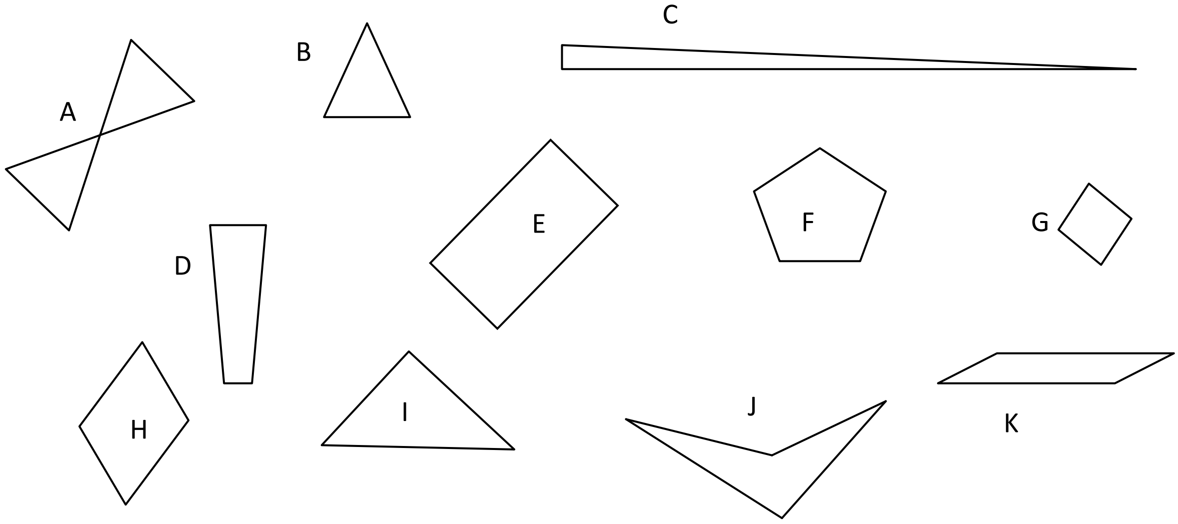
B:____

C:____

D:____

E:____

Tehtävä 3.



Mitkä yllä olevista kuvioista ovat

a) neliöitä____________________________________

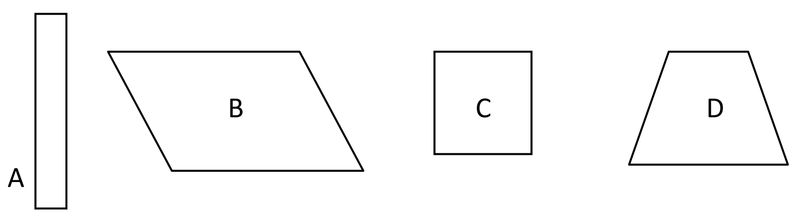
b) kolmioita__________________________________

c) suunnikkaita________________________________

d) suorakulmioita______________________________

Tehtävä 4.

Alla näet neljä nelikulmiota. Mitä yhteistä on nelikulmioilla A, B ja C? Miten nelikulmio D eroaa nelikulmioista A, B ja C?



Tehtävä 5.

Merkitse viivalle onko väittämä tosi (T) vai epätosi (E)?

a) Jos nelikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, niin kyseessä on neliö.______
b) Jos nelikulmion kaikki kulmat ovat suoria kulmia, niin kyseessä on neliö.______
c) Suorakulmaisen kolmion kaikki sivut eivät voi olla yhtä pitkiä.______
d) Suorakulmaisessa kolmiossa ei voi olla kahta keskenään yhtä pitkää sivua.______
e) Kaikki suunnikkaiden ominaisuudet ovat kaikkien suorakulmioiden ominaisuuksia.______

Tehtävä 6.

Kirjoita määritelmä suorakulmiolle.