TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Riikka Sjögren

Toisen ja korkeamman kertaluvun lineaarisista differentiaaliyhtälöistä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Toukokuu 2010

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

SJÖGREN, RIIKKA: Toisen ja korkeamman kertaluvun lineaarisista differentiaaliyhtälöistä

Pro gradu -tutkielma, 32 s.

Matematiikka

Toukokuu 2010

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa esitellään toisen ja korkeamman kertaluvun lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoriaa ja yleisimpiä ratkaisutekniikoita. Aluksi käydään läpi differentiaaliyhtälöiden määrittelyä yleisesti kertauksenomaisesti. Tämän jälkeen keskitytään toisen ja korkeamman kertaluvun lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin.

Tutkielmassa tutkitaan ensin toisen kertaluvun lineaaristen differentiaaliyhtälöiden lineaarisesti riippuvia ja riippumattomia ratkaisuja sekä tutustutaan samalla Wronskin determinanttiin. Tämän jälkeen yleistetään teoriaa koskemaan myös korkeamman kertaluvun lineaarisia yhtälöitä. Sitten esitellään vielä erilaisia tapoja ratkaista korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöitä. Jokaisen ratkaisutekniikan kohdalla esitetään myös ainakin yksi esmerkki.

Tutkielman lukijalta oletetaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöiden teorian tuntemista ja muutenkin riittävää matemaattista kypsyyttä. Tutkielman päälähdeteos on Larry C. Andrewsin kirja Ordinary Differential Equations.

Asiasanat: lineaariset differentiaaliyhtälöt, Wronskin determinantti

Sisältö

1 Johdanto

Differentiaaliyhtälöt ovat tärkeässä roolissa tekniikan ja matematiiikan aloilla sekä luonnontieteissä. Niitä voidaan käyttää mm. monien fysikaalisten lainalaisuuksien muotoilussa. Differentiaaliyhtälöiden teorian synty ja kehitys ovat nivoutuneet tiukasti yhteen matematiikan yleisen kehittymisen kanssa. Oikeastaan useimmilla Newtonin ja Leibnizin ajan kuuluisilla matemaatikoilla on ollut oma osansa tämän aiheen kehittämistyössä.

Tässä tutkielmassa käsittelemme toisen ja korkeamman kertaluvun lineaarisia differentiaaliyhtälöitä. Korkeamman kuin ensimmäisen kertaluvun lineaarisilla differentiaaliyhtälöillä on monia sovelluskohteita eri tieteen alueilla. Näistä yhtälöistä tärkeimpiä sovellusten kannalta ovat toisen kertaluvun yhtälöt, ja siksi pääpainomme onkin niiden käsittelyssä.

Kappaleessa kaksi tarkastelemme differentiaaliyhtälöihin liittyviä asioita yleisesti, kertauksenomaisesti. Määrittelemme differentiaaliyhtälön täsmällisesti ja käymme läpi joitakin mahdollisia sovelluskohteita. Pohdimme myös differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja.

Kolmannessa kappaleessa keskitymme toisen ja korkeamman kertaluvun lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin. Aluksi tutkimme differentiaaliyhtälöiden ratkaisuiden lineaarista riippuvuutta ja riippumattomuutta sekä tutustumme Wronskin determinanttiin. Sitten esittelemme erilaisia tekniikoita ratkaista korkeamman kertaluvun lineaarisia differentiaaliyhtälöitä.

Oletamme lukijan tuntevan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden teoriaa sekä differentiaali- ja integraalilaskentaa. Myös riittävä matemaattinen kypsyys auttaa seuraamaan tutkielman kulkua. Päälähdeteoksena käytämme Larry C. Andrewsin kirjaa Ordinary Differential Equations. Tutkielman toisessa kappaleessa olemme käyttäneet sivuja 1-17 ja kappaleessa kolme sivuja 82-125. Lauseessa 3.5 ja lauseen 3.6 todistamisesssa olemme käyttäneet Salaksen Hillen ja Etgenin Calculusta (s. 1115) ja apulauseen 3.3 ja lauseen 3.6 todistamisessa Jorma Merikosken luentomonistetta (s. 58-64).

2 Valmistelevia tarkasteluja

2.1 Differentiaaliyhtälö

Differentiaaliaaliyhtälöllä tarkoitamme yhtälöä, joka muodostuu yhdestä tuntemattomasta funktiosta ja sen äärellisestä määrästä derivaattoja. Ratkaistessamme differentiaaliyhtälöitä on tärkeää osata luokitella niitä, koska tietyntyyppiset yhtälöt voidaan usein ratkaista samalla tekniikalla. Jos differentiaaliyhtälön tuntemattomalla funktiolla on vain yksi riippumaton muuttuja, sanomme yhtälön olevan *tavallinen differentiaaliyhtälö*. Jos tuntematon funktio on riippuvainen enemmän kuin yhdestä riippumattomasta muuttujasta, derivaatat tulevat olemaan *osittaisderivaattoja* ja tällöin kutsumme yhtälöä *osittaisdifferentiaaliyhtälöksi*. Tässä tutkielmassa käsittelemme vain tavallisia differentiaaliyhtälöitä. Yksi differentiaaliyhtälöiden luokittelutapa liittyy kertalukuun, seuraavan määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 2.1. Differentiaaliyhtälön *kertaluku* on sama kuin yhtälössä esiintyvän korkeimman derivaatan kertaluku.

Seuraavassa määritelmässä jaamme vielä differentiaaliyhtälöt neljään luokkaan, *lineaarisiin* ja *ei-lineaarisiin* sekä *homogeenisiin* ja *ei-homogeenisiin*.

Määritelmä 2.2. Kertalukua n olevaa differentiaaliyhtälöä sanomme lineaariseksi, jos se voidaan esittää muodossa

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_1(x)y^{'} + A_0(x)y = F(x),$$

missä funktioita $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x)$ kutsutaan differentiaaliyhtälön kertoimiksi. Jos $F(x) = 0$, niin sanomme differentiaaliyhtälön olevan homogeeninen.

2.2 Differentiaaliyhtälöiden soveltamisesta

Differentiaaliyhtälöt saivat alkunsa, kun mekaniikkaan liittyviä ongelmia alettiin tutkia. Nykyään niiden käyttö on kuitenkin ulottautunut jo hyvin paljon laajemmalle alueelle. Differentiaaliyhtälöitä esiintyy laajalti paitsi tekniikan aloilla, myös matematiikassa sekä muissa luonnontieteissä. Myös biologiassa ja kauppatieteissä käytetään differentiaaliyhtälöitä erilaisten ongelmien tutkimisessa, liittyen esim. populaation kasvuun ja korkotasoihin. Lisäesimerkkeinä differentiaaliyhtälöiden sovelluskohteissa voimme mainita vielä virtapiireihin liittyvät tarkastelut ja hiukkasen liikkeeseen liittyvän tutkimustyön.

Yllä mainittujen ongelmien matemaattinen muotoilu tuottaa differentiaaliyhtälön. Näin tapahtuu, koska kyseessä olevat onglemat sisältävät yhden tai useamman suureen muutosnopeuden suhteessa muihin suureisiin. Ja kuten tiedämmme, tällaiset muutosnopeudet ilmaistaan matemaattisesti juuri derivaatioilla.

Kun differentiaaliyhtälöitä muotoillaan, pitää yleensä tehdä tiettyjä yksinkertaistavia oletuksia, jotta tuloksena saatu differentiaaliyhtälö olisi helpommin käsiteltävä. Kriittisin osa muotoilussa on määrittää juuri ne oletukset, jotka ovat annetun tehtävän kannalta sopivia.

Vaikka yksinkertaistavia oletuksia tehtäisiinkin paljon, matemaattinen muotoilu saattaa silti johtaa differentiaaliyhtälöön, joka on erittäin hankala ratkaista. Näin tapahtuu erityisesti silloin, kun tuloksena syntyvä differentiaaliyhtälö ei ole lineaarinen. Lineaariset differentiaaliyhtälöt ovat paljon helpompia käsitellä monilla eri tavoin, erityisesti sen vuoksi, että tavanomaiset ratkaisutekniikat on kehitetty monenlaisia lineaarisia differentiaaliyhtälöitä varten.

2.3 Differentiaaliyhtälöiden ratkaisut

Differentiaaliyhtälön ratkaisufunktiolle yksi varmin edellytys on se, että sen pitää olla derivoituva. Seuraavaksi määrittelemme ratkaisun täsmällisesti.

Määritelmä 2.3. Differentiaaliyhtälön ratkaisu tietyllä välillä $x_1 < x < x_2$ on sellainen jatkuva funktio, joka on yhtä monta kertaa derivoituva kuin differentiaaliyhtälön kertaluku on. Kun ratkaisu sijoitetaan differentiaaliyhtälöön, se supistuu yhtäpitäväksi differentiaaliyhtälön kanssa kaikilla kyseessä olevan välin arvoilla x.

On hyvä huomata, että annetulla differentiaaliyhtälöllä on usein monia ratkaisuja. Esimerkiksi on helppo todeta, että yhtälö $y = Ce^{-x}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $y' + y = 0$ millä tahansa vakion C arvoilla.

On siis selvää, että differentiaaliyhtälöillä on tavallisesti enemmän kuin yksi ratkaisu, oikeastaan äärettömän monta ratkaisua. Tämän vuoksi usein etsimmekin sellaista ratkaisufunktiota, joka sisältää mielivaltaisia vakioita siten, että kaikki yksityisratkaisut voidaan saada tästä yhdestä ratkaisufunktiosta joillakin sopivilla mielivaltaisilla alkioilla. Tällaista ratkaisufunktiota sanomme *yleiseksi ratkaisuksi.* Yleisen ratkaisun pitää sisältää yhtä monta erillistä mielivaltaista vakiota, kuin differentiaaliyhtälön kertaluku on. Vakioiden määrä ei voi olla supistettavissa vähempään määrään millään algebrallisella käsittelyllä.

2.4 Alku- ja reuna-arvoprobleemat

Monissa sovelluksissa tuntemattoman funktion y pitää toteuttaa lisäksi vielä tietyt ehdot tai jotkin lisävaatimukset toteuttaakseen differentiaaliyhtälön. Tällaiset vaatimukset määrittävät mitkä äärettömästä määrästä ratkaisuja ovat ominaisia juuri annetun tehtävän kannalta. Tällaisten ehtojen lukumäärä on usein yhtäpitävä differentiaaliyhtälön kertaluvun kanssa.

Esimerkki 2.1. Ratkaisemme differentiaaliyhtälön $y'' - 2y' + 2y = 0$, kun $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 0$, ja lisäksi yleisen ratkaisun tiedetään olevan $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Siis

$$y(0) = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = C_1 = 0$$

ja

$$y'(0) = e^0(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) + e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = C_1 + C_2 = 0,$$

ja edelleen $C_1 = 1$ ja $C_2 = -C_1 = -1$. Joten ratkaisuksi saamme

$$y = e^x(\cos x - \sin x).$$

Esimerkki 2.2. Ratkaisemme differentiaaliyhtälön $y'' = 0$, kun $y(0) = 0$ ja $y(1) = 1$, ja lisäksi yleisen ratkaisun tiedetään olevan $y = C_1 + C_2 x$. Siis

$$y(0) = C_1 = 0,$$

ja

$$y(1) = C_1 + C_2 = 1,$$

ja edelleen $C_1 = 0$ ja $C_2 = 1$. Joten ratkaisuksi saamme

$$y = x.$$

Kun differentiaaliyhtälön ratkaisuun liittyvät lisävaatimukset ovat kaikki määritelty tietyllä arvolla x, kuten esimerkeissä 2.1, kutsumme probleemaa *alkuarvoprobleemaksi*. Vaikka voisimme valita yksittäisen arvon x minä tahansa arvona, se on usein totuttu antamaan muodossa $x = 0$. Jos lisävaatimukset on määritelty useammalle kuin yhdelle pisteelle tarkasteltavalla välillä, päädymme tilanteeseen, jota kutsumme *reuna-arvoprobleemaksi*, kuten esimerkissä 2.2. Reunaehdot on usein määritelty vain kahdessa välin pisteessä. Tällaiset tehtävät sisältävät differentiaaliyhtälöitä, jotka ovat vähintään toista astetta. Tämä seuraa siitä, että ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöillä voi olla ainoastaan yksi ainoa lisävaatimus, joka puolestaan johtaa siihen, että kyseessa on oltava juuri alkuarvoprobleema.

Yleisemmin voimme todeta, että alkuarvoprobleemat johtavat melkein aina yksikäsitteisiin ratkaisuihin. Valitettavasti sama asia ei kuitenkaan päde reuna-arvoprobleemien kohdalla, ja siksi niihin liittyvä yleinen teoria onkin monimutkaisempi.

3 Korkeamman kertaluvun lineaarisista differentiaaliyhtälöistä

Monet sellaiset toisen ja korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöt, jotka eivät ole lineaarisia, ovat todella hankalia ratkaista. Tämä johtuu siitä, että ei ole olemassa yleistä teoriaa liittyen tällaisten yhtälöiden ratkaisemiseen. Tämän vuoksi rajoitumme käsittelemään jatkossa ainoastaan lineaarisia differentiaaliyhtälöitä.

Lause 3.1. *Jos $y = y_1(x)$ on homogeenisen differentiaaliyhtälön*

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0 \tag{3.1}$$

ratkaisu, silloin myös $y = C_1y_1(x)$ on yhtälön (3.1) ratkaisu millä tahansa vakion C_1 arvolla. Yleisemmin, jos $y_1, y_2, \ldots, y_k$ ovat kaikki homogeenisen differentiaaliyhtälön (3.1) ratkaisuja jollakin tietyllä välillä, silloin

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ky_k(x)$$

on myös yksi ratkaisu tällä välillä, millä tahansa vakioiden $C_1, C_2, \ldots, C_k$ arvoilla.

Todistus. Jotta merkinnät olisivat selkeämmät, todistamme vain tapauksen, jossa $n = k = 2$. Olkoot y_1 ja y_2 yhtälön

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0$$

ratkaisuja. Kun sijoitamme tähän differentiaaliyhtälöön $y = C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ saamme

$$\begin{aligned}
&A_2(x)(C_1y_1'' + C_2y'') + A_1(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + A_0(x)(C_1y_1 + C_2y_2)\\
&= C_1[A_2(x)y_1'' + A_1(x)y_1' + A_0(x)y_1] + C_2[A_2(x)y_2'' + A_1(x)y_2' + A_0(x)y_2]\\
&= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoriaa kehittäessämme tulemme esittämään ensin teoriaa toisen kertaluvun yhtälöille ja sitten yleistämään saamamme tulokset n. kertaluvun yhtälöille. Valitettavasti toisen asteen lineaarisille differentiaaliyhtälöille ei ole olemassa yleisiä ratkaisutekniikoita, kuten ensimmäisen asteen lineaarisille yhtälöille. Vain pienelle osalle tietynlaisia yhtälöitä voimme löytää malleja yleisiä ratkaisuja varten.

Kehittääksemme teoriaa toisen asteen differentiaaliyhtälöille, on helpompi käsitellä yhtälöitä *normaalimuodossa*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

joka on saatu yleisestä lineaarisesta muodosta

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = F(x)$$

jakamalla se termillä $A_2(x)$, ja edelleen merkitsemällä $\frac{A_1(x)}{A_2(x)} = a_1$, $\frac{A_0(x)}{A_2(x)} = a_0(x)$ ja $\frac{F(x)}{A_2(x)} = f(x)$.

3.1 Lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus

Luvussa 2.3 määrittelimme n. asteen differentiaaliyhtälölle yleisen ratkaisun, joka sisältää n olennaista vakiota. Lineaarisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön tapauksessa, yleinen ratkaisu osoittautuu yhtälön kahden lineaarisesti riippumattomien ratkaisujen y_1 ja y_2 kombinaatioksi.

Kahta nollasta eroavaa funktiota, y_1 ja y_2 sanotaan *lineaarisesti riippuviksi jollakin välillä* I, jos ne ovat verrannollisia välillä I; eli jos

$$y_2(x) = ky_1(x)$$

tai yhtäpitävästi jos

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = k$$

(joissa k on vakio) kaikilla $x \in I$. Jos y_1 ja y_2 eivät ole verrannollisia, niitä sanotaan *lineaarisesti riippumattomiksi välillä* I.

Kun käsittelemme useampaa kuin kahta funktiota, lineaarisen riippuvuuden ja riippumattomuuden määritelmämme eivät ole voimassa. Siispä pyrimme löytämään yleisemmän määritelmän näille termeille, jotta voimme käyttää niitä myös tapauksissa, jotka koskevat useampaa kuin kahta funktiota.

Aluksi teemme havainnon, että jos voidaan löytää vakiot C_1 ja C_2 (ainakin toinen erisuuri kuin nolla) siten, että

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 \tag{3.2}$$

kaikilla $x \in I$, silloin y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvaisia välillä I. Toisin sanoen, jos yhtälö (3.2) pätee, niin ($C_1 \neq 0$)

$$y_1(x) = -\frac{C_2}{C_1}y_2(x),$$

josta näemme, että y_1 ja y_2 ovat verrannollisia ja näin ollen myös lineaarisesti riippuvia.

Nyt pohdimme lauseketta

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 \tag{3.3}$$

ja sen derivaattaa

$$C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) = 0. \tag{3.4}$$

Jos oletamme C_1:n ja C_2:n olevan tuntemattomia yhtälöissä (3.3) ja (3.4), niin käyttämällä Cramerin sääntöä (käänteismatriisin lausekkeen muodostaminen) huomaamme, että nollasta eroavat arvot C_1 ja C_2 ovat mahdollisia vain silloin, kun näiden molempien yhtälöiden determinantti on nolla eli kun

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Tätä determinanttia kutsutaan *Wronskin determinantiksi*, puolalaisen matemaatikon mukaan. Wronskin determinatti määritellään seuraavasti:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Lause 3.2. *Jos funktiot y_1 ja y_2 derivoituvat jollakin välillä I ja*

1. *jos $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ ainakin yhdessä välin I pisteessä, niin y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia,*
2. *jos y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvia välillä I, niin $W(y_1, y_2)(x) = 0$ kaikilla $x \in I$.*

Todistus. 1. Oletamme, että on olemassa sellainen $x_0 \in I$, että $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Lisäksi oletamme, että C_1 ja C_2 ovat sellaisia vakioita, että $C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0$. Derivoimalla saamme

$$C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0.$$

Nyt kahdesta edellisestä yhtälöstä muodostuvalla yhtälöryhmällä on ainoa ratkaisu $C_1 = C_2 = 0$, koska kerroinmatriisin determinantti on $W(y_1, y_2)(x_0)$, joka oletuksen mukaan on erisuuri kuin nolla. Siis funktiot y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia.

2. Oletuksen mukaan y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvia välillä I. Siis voimme merkitä $y_2(x) = ky_1(x)$ kaikilla $x \in I$. Nyt saamme, että

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \\ &= y_1(x)ky_1'(x) - y_1'(x)ky_1(x) \\ &= ky_1(x)y_1'(x) - ky_1(x)y_1'(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Apulause 3.3. *(Abelin kaava) Jos y_1 ja y_2 ovat yhtälön*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja jollakin välillä I, missä $a_1(x)$ ja $a_0(x)$ ovat jatkuvia, niin Wronskin determinantti funktioille y_1 ja y_2 on

$$W(y_1, y_2)(x) = C \exp\bigg(- \int a_1(x)dx \bigg)$$

sopivalla vakion C arvolla.

Todistus. Kun otamme derivaatan Wronskin determinantista, saamme

$$\frac{d}{dx}W(y_1, y_2) = \frac{d}{dx}(y_1y_2' - y_1'y_2) = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2,$$

ja koska $y'' = -a_1(x)y' - a_{0(x)(y)}$, voimme kirjoittaa tämän uudelleen muotoon

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}W(y_1, y_2) &= y_1[-a_1(x)y_2' - a_0(x)y_2] - y_2[-a_1(x)y_1' - a_0(x)y_1] \\ &= -a_1(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) \\ &= -a_1(x)W(y_1, y_2).\end{aligned}$$

Näin ollen Wronskin determinantti toteuttaa ensimmäisen asteen lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$W' + a_1(x)W = 0$$

yleisellä ratkaisulla

$$W(y_1y_2)(x) = C \exp\bigg(- \int a_1(x)dx \bigg).$$

□

Lause 3.4. *Jos y_1 ja y_2 ovat yhtälön*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

ratkaisuja jollakin välillä I, missä $a_1(x)$ ja $a_0(x)$ ovat jatkuvia, niin y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia välillä I, jos ja vain jos $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$.

Todistus. Oletamme aluksi, että $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$. Tästä seuraa lauseen 3.3 nojalla, että y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. Vastaavasti, jos oletamme, että y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, niin apulauseen 3.4 nojalla saamme

$$W(y_1, y_2)(x) = C \exp\left(- \int a_1(x)dx \right),$$

joka on selvästi $\neq 0$ vakiolla $C \neq 0$.

$\square$

Lauseen 3.3 nojalla voimme olla varmoja, että kun y_1 ja y_2 ovat toisen asteen homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja jollakin välillä I, niiden Wronskin determinantti on joko identtisesti nolla tai ei ole koskaan nolla välillä I. Yleisemmin voimme todeta, että jos Wronskin determinantti on identtisesti nolla välillä I, siitä seuraa, että y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvia.

Apulause 3.5. *Olkoot x_0, α_0 ja α_1 mielivaltaisia reaalilukuja. Yhtälöllä*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

missä $a_1(x)$ ja $a_0(x)$ ovat jatkuvia, on yksikäsitteinen ratkaisu $y = y(x)$, joka toteuttaa alkuehdot $y(x_0) = \alpha_0$ ja $y'(x_0) = \alpha_1$.

Todistus. Ks.[2] s. 105.

$\square$

Lause 3.6. *Jos y_1 ja y_2 ovat homogeenisen lineaarisen yhtälön*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.5}$$

lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja jollakin välillä I, missä $a_1(x)$ ja $a_0(x)$ ovat jatkuvia, silloin tämän yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

missä C_1 ja C_2 ovat mitä tahansa vakioita.

Todistus. Olkoot y_1 ja y_2 yhtälön

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja jollakin välillä I. Kun sijoitamme tähän differentiaaliyhtälöön $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ saamme

$$
\begin{aligned}
&(C_1y_1'' + C_2y_2'') + a_1(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + a_0(C_1y_1 + C_2y_2) \\
&= C_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0C_1y_1) + C_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) \\
&= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Siis yleinen ratkaisu $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ toteuttaa yhtälön (3.5). Osoitamme vielä, että kaikki yhtälön (3.5) ratkaisut ovat muotoa
$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, joillakin vakioilla C_1 ja C_2.

Oletuksen mukaan ratkaisut y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. Oletamme, että y_0 on yhtälön (3.5) mielivaltainen ratkaisu. Oletamme myös, että $x_0 \in I$ ja tarkastelemme yhtälöryhmää

$$
\begin{aligned}
C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) &= y_0(x_0) \\
C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) &= y_0'(x_0).
\end{aligned}
$$

Nyt oletuksen ja lauseen 3.4 mukaan $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Siis on olemassa sellaiset yksikäsitteiset vakiot C_1 ja C_2 että ylläoleva yhtälöryhmä toteutuu. Muodostamme näillä vakioilla funktion $g = C_1y_1 + C_2y_2$. Nyt g on alkuarvoprobleeman

$$
\begin{aligned}
&y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\
&y(x_0) = y_0(x_0) \\
&y'(x_0) = y_0'(x_0)
\end{aligned}
$$

ratkaisu. Nyt apulauseen 3.5 mukaan $g = y_0$. Siis

$$y_0 = C_1y_1 + C_2y_2.$$

$\square$

Esimerkki 3.1. Funktiot $y_1 = e^{3x}$ ja $y_2 = xe^{3x}$ ovat differentiaaliyhtälön

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

ratkaisuja. Osoitetaan, että y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. Muodostetaan Wronsin determinantti ratkaisuille y_1 ja y_2.

$$
\begin{aligned}
W(y_1, y_2)(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \\
&= e^{3x} \cdot (3xe^{3x} + e^3x) - 3e^{3x} \cdot xe^{3x} \\
&= 3xe^{6x} + e^{6x} - 3xe^{6x} \\
&= e^{6x}.
\end{aligned}
$$

Nyt siis lauseen 3.2 mukaan y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, koska y_1 ja y_2 ovat kerran derivoituvia ja esimerkiksi kun $x = 1$, niin $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$. Yleiseksi ratkaisuksi saamme

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

3.2 Toisen ratkaisun konstruoiminen jo tiedetystä ratkaisusta

Jos meillä on tiedossa jokin ei-triviaali toisen asteen lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisu, voimme muodostaa siitä toisen lineaarisesti riippumattoman ratkaisun.

Lause 3.7. *Jos $y = y_1(x)$ on homogeenisen toisen asteen differentiaaliyhtälön*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

ei-triviaali ratkaisu, niin

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{\exp\left(-\int a_1(x)dx \right)}{y_1^2(x)} dx.$$

Todistus. Jos y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia differentiaaliyhtälön ratkaisuja, niin

$$y_1(x)y_2' - y_1'(x)y_2 = W(y_1, y_2)(x),$$

missä oikea puoli on $\neq 0$. Tulkitsemme tätä yhtälöä ratkaisun y_2 ei-homogeenisenä ensimäisen asteen lineaarisena differentiaaliyhtälönä. Kun nyt jaamme yhtälön termillä $y_1(x)$ saadaksemme sen normaalimuotoon, muistammekin, että ratkaisu annetaan muodossa

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{W(y_1, y_2)(x)}{y_1^2(x)} dx.$$

Nyt apulauseesta 3.3 seuraa, että

$$y_2 = Cy_1(x) \int \frac{\exp\left(-\int a_1(x)dx \right)}{y_1^2(x)} dx.$$

Huolimatta vakion C arvosta, tämä viimeinen lauseke on toisen hakemamme toisen asteen differentiaaliyhtälön ratkaisu lauseessa, ja olettamalla, että $C = 1$, saamme halutun tuloksen.

$\square$

Esimerkki 3.2. Olkoon $y_1 = e^{3x}$ differentiaaliyhtälön

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

ratkaisu. Ratkaisemme toisen lineaarisesti riippumattoman ratkaisun lauseen 3.6 mukaan. Siis

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{3x} \int \frac{\exp(-6 \int dx)}{e^{6x}} dx \\ &= e^{3x} \int dx \\ &= xe^{3x}. \end{aligned}$$

Lauseen 3.6 hyöty on tietenkin rajoittunut tilanteisiin, joissa meillä on jo tiedossa yksi differentiaaliyhtälön ratkaisu. Monissa tilanteissa on kuitenkin vaikea tuottaa jo pelkästään tätä ensimmäista tarvittavaa ratkaisua. Kuitenkin joskus on mahdollista, että yksi ratkaisu saadaan jollakin tavalla ja silloin kyseessä oleva lause voi olla hyvinkin tarpeellinen yleisen ratkaisun konstruoimisessa.

3.3 Homogeeniset toisen asteen vakiokertoimiset yhtälöt

Differentiaaliyhtälöt, joissa on vakiokerroin, kuuluvat helpoiten ratkaistavien lineaaristen yhtälöiden joukkoon. Tällaiset yhtälöt voidaan ratkaista millä tahansa yleisellä tekniikalla. Tämä erityinen tieto yhdistettynä siihen, että tällaiset yhtälöt esiintyvät hyvin laajalti esimerkiksi fysikaalisissa sovelluksissa, selittävät sen erityisen aseman, jonka näillä yhtälöillä on yleisessä lineaarisia yhtälöitä koskevassa teoriassa. Aikaisemmissa opinnoissamme olemme todenneet, että ensimmäisen asteen vakiokertoimisella lineaarisella differentiaaliyhtälöllä

$$y' + ay = 0$$

on eksponentiaalinen ratkaisu $y = C_1 e^{-ax}$, joka on voimassa välillä $-\infty < x < \infty$. Eksponentiaalisten funktioiden derivaattoihin liittyvän erityisen ominaisuuden vuoksi, saattaa tuntua luonnolliselta tutkia, olisiko myös korkeamman asteisilla vakiokertoimisilla lineaarisilla differentiaaliyhtälöillä eksponentiaalisia ratkaisuja.

Esimerkkinä voimme pohtia toisen asteen yhtälöä

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.6}$$

missä a, b ja c ovat vakioita. Oletetaan, että yhtälöllä (3.6) on eksponentiaalinen ratkaisu, joka on muotoa

$$y = e^{mx}$$

jollakin parametrin m arvolla tai arvoilla. Kun sijoitamme tämän funktion suoraan yhtälön (3.6) vasemmalle puolelle, saamme

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} \\ &= (am^2 + bm + c)e^{mx}. \end{aligned}$$

Nyt $ay'' + by' + cy = 0$, jos ja vain jos (koska $e^{mx} \neq 0$)

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3.7}$$

Tätä yhtälöä kutsumme yhtälön (3.6) *karakteristiseksi yhtälöksi*, ja sillä on juuret

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ja } m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.8}$$

Nyt huomaamme selvästi, että on kolme erillistä tapausta, jotka meidän tulee ottaa huomioon: joko m_1 ja m_2 ovat reaalisia ja erisuuria juuria ($b^2 - 4ac > 0$), reaalisia mutta yhtäsuuria juuria ($b^2 = 4ac$) tai kompleksisia konjugaattijuuria ($b^2 - 4ac < 0$).

Tapaus I - Erisuuret reaalijuuret: Kun yhtälön (3.7) juuret m_1 ja m_2 ovat reaalisia ja erisuuria, yhtälön (3.6) ratkaisut ovat

$$y_1 = e^{m_1 x} \text{ ja } y_2 = e^{m_2 x}.$$

Selvästi nämä funktiot ovat lineaarisesti riippumattomia ja siksi saamme tässä tapauksessa yleiseksi ratkaisuksi

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}. \tag{3.9}$$

Esimerkki 3.3. Etsitään differentiaaliyhtälön $y'' + 2y' - 3y = 0$ yleinen ratkaisu. Tämän yhtälön karakteristinen yhtälö on $m^2 + 2m - 3 = 0$, jonka edelleen saamme muotoon $(m - 1)(m + 3) = 0$. Siis apuyhtälön juuret ovat $m_1 = 1$ ja $m_2 = -3$. Koska juuret ovat reaaliset ja erisuuret, saamme yleiseksi ratkaisuksi

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}.$$

Tapaus II - Yhtäsuuret reaalijuuret: Kun apuyhtälön kaksi juurta ovat yhtäsuuret, eli $m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a}$, saamme aluksi vain yhden ratkaisun

$$y_1 = e^{-\frac{bx}{2a}}.$$

Toisen lineaarisesti riippumattoman ratkaisun saamme käyttämällä hyväksi lausetta 3.6:

$$y_2 = e^{-\frac{bx}{2a}} \int e^{\frac{bx}{a}} e^{-\frac{bx}{a}} \, dx = x e^{-\frac{bx}{2a}}.$$

Siis yleinen ratkaisu tässä tapauksessa on

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{bx}{2a}}. \tag{3.10}$$

Esimerkki 3.4. Etsitään differentiaaliyhtälön $9y'' + 6y' + y = 0$ yleinen ratkaisu. Tämän yhtälön karakteristinen yhtälö on $9m^2 + 6m + 1 = 0$, jonka kaksinkertainen juuri on $m_1 = m_2 = -\frac{1}{3}$. Koska juuret ovat nyt reaaliset mutta yhtäsuuret, saamme yleiseksi ratkaisuksi

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Tapaus III - Kompleksiset konjugaattijuuret: Jos juuret m_1 ja m_2 ovat kompleksisia, niin ne ovat kompleksikonjugaattijuuria ja voimme siis kirjottaa ne muotoon

$$m_1 = p + iq \text{ ja } m_2 = p - iq.$$

Tässä tapauksesa yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(p+iq)x} + C_2 e^{(p-iq)x} \\ &= e^{px(C_1 e^{iqx} + C_2 e^{-iqx})}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Esimerkiksi fysikaalisissa tarkasteluissa, reaalisia ratkaisuja pidetään luonnollisesti mielekkäämpinä kuin ratkaisua (3.11).Saadaksemme reaalisen ratkaisun, käytämme hyväksi *Eulerin kaavaa*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta, \; e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta. \tag{3.12}$$

Kirjoitamme sitten yhtälön (3.11) uudelleen muotoon

$$\begin{aligned} y &= e^{px}[C_1(\cos qx + i \sin qx) + C_2 \sin qx] \\ &= e^{px}[(C_1 + C_2)\cos qx + i(C_1 - C_2)\sin qx] \\ &= e^{px}(C_3 \cos qx + C_4 \sin qx), \end{aligned}$$

missä C_3 ja C_4 ovat mitä tahansa vakioita. Nimeämme vakiot C_3 ja C_4 usein vielä uudelleen, jolloin saamme yleiseksi ratkaisuksi

$$y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx). \tag{3.13}$$

Todetkaamme vielä, että on helppo todistaa, että $y_1 = e^{px} \cos qx$ ja $y_2 = e^{px} \sin qx$ ovat lineaarisesti riippumattomia yhtälön 3.6 ratkaisuja.

Esimerkki 3.5. Etsitään yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle $y'' - 6y' + 25y = 0$. Apuyhtälö tälle yhtälölle on $m^2 - 6m + 25 = 0$, jonka juuriksi saamme $m_1 = 3 + i4$ ja $m_2 = 3 - i4$. Nyt siis juuret ovat kompleksisia konjugaattijuuria, joten yleiseksi ratkaisuksi saamme

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

3.4 Korkeamman kertaluvun lineaariset differentiaaliyhtälöt

Vaikka toisen asteen lineaariset differentiaaliyhtälöt ovat paljon yleisempiä käytännön kannalta kuin korkeamman asteiset, on kuitenkin myös sovelluksia, joissa matemaattinen malli vaatii korkeamman asteisen differentiaaliyhtälön. Esimerkiksi tutkittaessa pieniä valonsäteen poikkeamia määräävä differentiaaliyhtälö on neljättä astetta. Neljättä astetta ovat myös sellaiset differentiaaliyhtälöt, jotka kuvaavat pitkän ohuen pilarin taipumista pitkittäisen puristusvoiman alla.

Seuraavaksi pyrimme laajentamaan aikaisemmin kehittämäämme toisen asteen lineaaristen yhtälöiden teoriaa koskemaan myös korkeamman asteisia lineaarisia yhtälöitä. Suuri osa teoriasta on yksinkertaisesti luonnollinen yleistys sille, jonka olemme jo aikaisemmin kehittäneet toisen asteen differentiaaliyhtälöille, joten tulemme lähinnä vain toteamaan asiaankuuluvat lauseet ilman todistuksia. Tarkastellessamme tällaisten korkeamman asteisten yhtälöiden tuloksia, havaitsemme käteväksi tavaksi saattaa differentiaaliyhtälö normaalimuotoon, mutta tällä kertaa esittelemme myös *differentiaalioperaattorin* käsitteen. Jos oletamme, että $A_n(x) \neq 0$ tutkitulla välillä I, voimme jakaa yhtälön

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_1(x)y' + A_0(x)y = F(x) \tag{3.14}$$

termillä $A_n(x)$ päästäksemme normaalimuotoon

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{3.15}$$

Nyt jos kertoimet $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ ovat jatkuvia funktioita välillä I, niin sanomme operaattorin M, joka määritellään

$$M = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x), \tag{3.16}$$

missä $D = \frac{d}{dx}$, olevan *normaali differentiaalioperaattori* välillä I. Operaattorin M mielessä voimme ilmaista yhtälön (3.15) yksinkertaisesti muodossa

$$M[y] = f(x). \tag{3.17}$$

Kun $f(x) = 0$ kaikkialla välillä I, sanomme yhtälön (3.17) olevan *homogeeninen* ja kirjoitamme siis

$$M[y] = 0. \tag{3.18}$$

Muussa tapauksessa sanomme, että yhtälö (3.17) on *ei-homogeeninen* differentiaaliyhtälö.

3.4.1 Lineaarinen riippumattomuus

Laajentamalla aikaisempia käsityksiämme lineaarisesta riippuvuudesta ja riippumattomuudesta, saamme seuraavan määritelmän.

Määritelmä 3.1. Joukon, jossa on n funktiota, $y_1, y_2, ..., y_n$, sanotaan olevaan *lineaarisesti riippuva* välillä I, jos on olemassa n vakiota, $C_1, C_2, ..., C_n$, niin, etteivät kaikki ole nollia ja että

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) = 0$$

kaikilla $x \in I$. Jos tämä joukko funktioita ei ole lineaarisesti riippuva, sanotaan sen olevan *lineaarisesti riippumaton*.

Jos oletamme, että joukko funktioita $y_1, y_2, ..., y_n$ on lineaarisesti riippumaton ja

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) = 0, \tag{3.19}$$

niin määritelmän 3.1 nojalla $C_1 = C_2 = \cdots C_n = 0$. Kuitenkin, jos funktiot ovat lineaarisesti riippuvia, niin silloin ainakin yksi niistä voidaan ilmaista muiden lineaarisena kombinaationa. Esimerkiksi jos oletetaan, että yhtälö (3.19), missä ainakin yksi vakioista C, vaikkapa C_1, on erisuuri kuin nolla, pitää paikkansa, voimme ratkaista funktion y_1. Ratkaisuksi saamme

$$y_1 = -\frac{C_2}{C_1}y_2 - \frac{C_3}{C_1}y_3 - \cdots - \frac{C_n}{C_1}y_n. \tag{3.20}$$

Lause 3.8. *Jos M on astetta n oleva normaali differentiaalioperaattori välillä I ja jos $y_1, y_2, ..., y_n$ muodostavat joukon lineaarisesti riippumattomia yhtälön $M[y] = 0$ ratkaisuja välillä I, niin silloin tämän homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu välillä I on*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

missä $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ovat mitä tahansa vakioita. Yleisemmin voimme todeta, että joukko lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja on aina olemassa.

Seuraavaksi yleistämme käsitteen Wronskin determinantille, kun kyseessä on joukko, jossa on n funktiota. Saamme

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{3.21}$$

Lause 3.9. *Jos joukolla funktioita $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on vähintään $n-1$ derivaattaa jollakin välillä I ja*

1. *jos $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ ainakin yhdessä välin I pisteessä, niin joukko funktioita on lineaarisesti riippumaton,*

2. *jos joukko funktioita on lineaarisesti riippuva, niin siitä seuraa, että $W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0$ kaikilla $x \in I$.*

Abelin kaava (apulause 3.4) voidaan myös ulottaa n. asteen yhtälöille, mitä taas voidaan käyttää todistettaessa tuonnempana olevaa lausetta 3.10.

Apulause 3.10. *(Abelin kaava) Jos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia yhtälön $M[y] = 0$ ratkaisuja välillä I, missä M on normaali lineaarinen operaattori*

$$M = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x),$$

siihen liittyvä Wronskin determinantti on

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = C \exp[-\int a_{n-1}(x)dx]$$

sopivalla vakion C arvolla.

Lause 3.11. *Jos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ovat yhtälön $M[y] = 0$ ratkaisuja välillä I, missä M on n. asteen normaali lineaarinen operaattori, niin joukko ratkaisuja on lineaarisesti riippumaton välillä I, jos ja vain jos*

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$$

kaikilla $x \in I$.

3.4.2 Homogeeniset vakiokertoimiset yhtälöt

Jos haluamme ratkaista lineaarisen n. kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)y = 0, \tag{3.22}$$

missä kertoimet $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ovat kaikki vakioita, on välttämätöntä löytää juuret n. kertaluvun yhtälölle

$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0 = 0, \tag{3.23}$$

joka on yhtälöön (3.22) liittyvä karakteristinen yhtälö. Saamme yhtälön (3.23) asettamalla $y = e^{mx}$ yhtälöön (3.22) ja sieventämällä vielä näin saatu yhtälö. Yhtälön (3.23) monista mahdollisista kertaluvusta n riippuvista juurien yhdistelmistä johtuen, on vaikea tunnistaa kaikkia tapauksia, joissa $n > 2$. Kuitenkin seuraavat yleistykset ovat varsin helppoja osoittaa todeksi:

1. Jos m_1 on karakteristisen yhtälön yksinkertainen reaalijuuri, niin on olemassa yksittäinen ratkaisu

$$y_1 = e^{m_1x}.$$

2. Jos m_1 on k-kertainen k reaalijuuri, niin on olemassa k lineaarisesti riippumatonta ratkaisua

$$y_1 = e^{m_1x}, y_2 = xe^{m_1x}, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{m_1x}.$$

3. Jos $p \pm iq$ ovat karakteristisen yhtälön erillisiä kompleksijuuria, niin on olemassa lineaarisesti riippumattomat ratkaisut

$$y_1 = e^{px}\cos qx, y_2 = e^{px}\sin qx.$$

4. Jos $p \pm iq$ ovat k-kertaisia kompleksijuuria, niin on olemassa $2k$ lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja

$$y_1 = e^{px}\cos qx, y_2 = xe^{px}\cos qx, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{px}\cos qx$$

$$y_{k+1} = e^{px}\sin qx, y_{k+2} = xe^{px}\sin qx, \ldots, y_{2k} = x^{k-1}e^{px}\sin qx.$$

Esimerkki 3.6. Etsitään yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle $(D-4)^3(D+2)^2y = 0$, kun oletamme, että x on riippumaton muuttuja. Karakteristinen yhtälö tälle yhtälölle on $(m-4)^3(m+2)^2 = 0$. Apuyhtälön ratkaisuksi saamme kolminkertaisen juuren $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, josta saamme varsinaisen yhtälön ratkaisut

$$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x \text{ ja } y_3 = x^2e^x.$$

Nyt siis yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y &= C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x \\ &= (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.7. Etsitään yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle $(D^3 + 1)y = 0$, kun oletamme, että x on riippumaton muuttuja. Apuyhtälö tälle yhtälölle on $m^3 + 1 = 0$. Apuyhtälön ratkaisuksi saamme $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $m_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, joista saamme varsinaisen yhtälön ratkaisut

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ja } y_3 = e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nyt siis yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \\ &= C_1e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x). \end{aligned}$$

3.5 Ei-homogeeninen yhtälö

Aikaisempien opintojemme perusteella tiedämme, että jokainen ensimmäisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$y' + a_0(x)y = f(x)$$

ratkaisu on saatu muodosta $y = y_P + y_H$, missä y_P on mikä tahansa homogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu ja y_H on homogeenisen yhtälön

$$y' + a_0(x)y = 0$$

yleinen ratkaisu. Tämä tilanne voidaan yleistää koskemaan myös n. kertaluvun lineaarisia yhtälöitä, kuten seuraavasta lauseesta nähdään.

Lause 3.12. *Jos y_P on mikä tahansa ei-homogeenisen yhtälön*

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

yksittäisratkaisu ja jos $y_H = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ on termin $f(x)$ poistamisella saadun homogeenisen yhtälön ratkaisu, niin $y = y_P + y_H$ on silloin ei-homogeenisen yhtälön ratkaisu

Todistus. Yksinkertaistaaksemme merkintöjä, todistamme vain tapauksen $n = 2$. Oletamme, että y_P on toisen kertaluvun yhtälön

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

ratkaisu ja Y on mikä tahansa saman yhtälön ratkaisu. Nyt yhtälö $y = Y - y_P$ toteuttaa

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= Y'' + a_1(x)Y' + a_0(x)Y - y_P'' - a_1(x)y_P' - a_0(x)y_P \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Joten, koska $Y - y_P$ toteuttaa homogeenisen differentiaaliyhtälön, se pitää olla ilmaistavissa muodossa

$$Y - y_P = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Termiä y_P siirtämällä saamme

$$Y = y_P + C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

mistä näemme, että kaikki ei-homogeenisen yhtälön ratkaisut sisältävät summan $y_P + y_H$.

$\square$

Monissa tapauksissa ei-homogeenisen differentiaaliyhtälön termi $f(x)$ on muodostunut joko päättyviä tai jaksollisia derivaattoja sisältävistä funktioista. Kun näin käy, yksittäisratkaisu y_P voidaan konstruoida suhteellisen yksinkertaisella tekniikalla, jota kutsumme *määräämättömien kertoimien menetelmäksi.* Sen käyttö on kuitenkin rajoittunut melkolailla vakiokertoimisiin yhtälöihin, ja näistä vain niihin, joille $f(x)$ on joko

1. muuttujan x polynomi (joka sisältää vakioita),
2. eksponenttifunktio e^{px},
3. $\cos qx$ tai $\sin qx$, tai
4. näiden funktioiden äärellinen summa ja/tai tulo.

Havainnollistaaksemme menetelmän ideaa, etsimme yhtälön

$$y'' + y = 7e^x \tag{3.24}$$

yksittäisratkaisua. Koska eksponentiaalifunktion derivointi vain toistaa funktion uudelleen, enintään kerroinvakion kanssa, tuntuu luonnolliselta "arvata", että yksittäisratkaisu on muotoa

$$y_P = Ae^x,$$

missä A on "määräämätön kerroin". Sijoitamme termin y_P yhtälöön (3.24), jolloin saamme

$$Ae^x + Ae^x = 7e^x \text{ tai } 2Ae^x = 7e^x,$$

jonka ratkaisu on $A = \frac{7}{2}$. Näin ollen

$$y_P = \frac{7}{2}e^x$$

on yhtälön (3.24) yksittäisratkaisu.

Oletettakaamme seuraavaksi, että $f(x)$ muutetaan muotoon $7x^2$, niin että yhtälö, jota alamme ratkaista on nyt muodossa

$$y'' + y = 7x^2. \tag{3.25}$$

Jatkaessamme kuten aiemmin, voisimme arvata, että

$$y_P = Ax^2.$$

Tällä kertaa termin y_P sijoitus yhtälöön (3.24) antaa

$$2A + Ax^2 = 7x^2,$$

mikä ei voi toteutua millään vakion A valinnalla. Ongelma on siinä, että termin Ax^2 derivaatat tuottavat uusia funktioita, jotka ovat lineaarisesti riippumattomia siitä. Saadaksemme käsityksen mitä meidän tuli tällaisessa tilanteessa tehdä, tutkimme sitä, että yhtälö (3.25) voidaan muuttaa homogeeniseksi differentiaaliyhtälöksi ottamalla kolme derivaattaa molemmilta puolilta. Toisin sanoen, saamme yhtälön (3.25) muotoon

$$y^{(5)} + y''' = 0, \tag{3.26}$$

koska $\frac{d^3}{dx^3}(7x^2) = 0$. Nyt yhtälöön (3.26) liittyvä apuyhtälö on $m^5 + m^3 = 0$, jonka juuret ovat $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, $m_4 = i$ ja $m_5 = -i$. Siis yhtälön (3.26) yleinen ratkaisu on muotoa

$$y = \underbrace{C_1 + C_2x + C_3x^2}_{y_P} + \underbrace{C_4 \cos x + C_5 \sin x}_{y_H}. \tag{3.27}$$

Voidaan myös perustellusti sanoa, että yhtälön (3.25) jokainen ratkaisu on myös yhtälön (3.26) ratkaisu, ja koska

$$y_H = C_4 \cos x + C_5 \sin x$$

on yhtälön (3.25) homogeeninen ratkaisu, niin silloin sen yksittäisratkaisu on

$$y_P = Ax^2 + Bx + C$$

joillakin vakioilla A, B ja C. Nyt kun sijoitamme tämän y_P yhtälöön (3.25) saamme

$$2A + Ax^2 + Bx + C = 7x^2$$

eli

$$(2A + C) + Bx + Ax^2 = 7x^2.$$

Tästä saamme edelleen, että

$$\begin{aligned} 2A + C &= 0 \\ B &= 0 \\ A &= 7, \end{aligned}$$

mikä puolestaan antaa ratkaisun

$$A = 7,\ B = 0 \text{ ja } C = -14.$$

Joten yksittäisratkaisu tällä kertaa on

$$y_P = 7x^2 - 14.$$

Yleinen sääntö, jota tässä olemme havainnollistaneet on se, että termillä y_P pitäisi olla termin $f(x)$ perusrakenne sekä kaikki lineaarisesti riippumattomat funktion f derivaatat.

Toinen hankaluus tässä menetelmässä tulee, kun $f(x)$ muodostuu funktiosta joka esiintyy homogeenisessa ratkaisussa. Esimerkiksi, jos ratkaisemme yhtälöä

$$y'' + y = 4\cos x, \tag{3.28}$$

olettaen että

$$y_P = A\cos x + B\sin x,$$

niin huomaamme tämän lausekkeen sijoitus yhtälöön (3.28) tuottaa

$$-A\cos x - B\sin x + A\cos x + B\sin x = 0 = 4\cos x,$$

mikä on mahdotonta. Oikaistaaksemme tämän tilanteen, meidän pitää olettaa, että y_P on lineaarisesti riippumaton funktio kaikkien homogeenisessa ratkaisussa esiintyvien funktioiden suhteen. Siksi kirjoitamme (koska $y_H = C_1\cos x + C_2\sin x$)

$$y_P = x(A\cos x + B\sin x),$$

josta seuraa, että

$$y_P' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$

$$y_P'' = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x),$$

ja kun nämä lausekkeet y_P, y'_P ja y''_P sijoitetaan differentiaaliyhtälöön, saadaan

$$-2A \sin x + 2B \cos x = 4 \cos x.$$

Tästä saamme edelleen

$$-2A = 0 \text{ ja } 2B = 4,$$

eli $A = 0$ ja $B = 2$, ja näin ollen

$$y_P = 2x \sin x.$$

Ratkaisumenetelmä on esitetty tiivistettynä taulukossa 1. Taulukon käyttö perustuu seuraaviin kohtiin.

Kohta 1: Jos differentiaaliyhtälö on muotoa

$$M[y] = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x),$$

missä jokainen $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, on jonkinlainen funktio kuudesta eri kategoriasta taulukossa 1 (I-VI), niin korvaamme differentiaaliyhtälön seuraavasti:

$$\begin{aligned} M[y] &= f_1(x), \\ M[y] &= f_2(x), \\ &\vdots \\ M[y] &= f_r(x). \end{aligned}$$

Kohta 2: "Lokeroimme"jokaisen funktion $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, kuuluvaksi yhteen taulukon kuudesta kategoriasta (I-VI).

Kohta 3: Kullekin funktiolle $f_i(x)$ oletamme tilassa (a) tai (b) annetun yksittäisratkaisun y_P.

Kohta 4: Laskemme yhteen kaikki kohdassa 3 löydetyt yksityisratkaisut y_P, jolloin saamme alkuperäisen differentiaaliyhtälön varsinainen yksityisratkaisu y_P.

Esimerkki 3.8. Määritämme differentiaaliyhtälön $y'' - 6y' + 9y = e^x$ yleisen ratkaisun käyttämällä määräämättömien kertoimien menetelmää. Asetetaan ensin karakteristinen yhtälö $m^2 - 6m + 9 = 0$, jonka ratkaisut ovat $m_1 = m_2 = 3$. Nyt siis homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_H = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

Termi e^x esiintyy kategoriassa II ja koska $m \neq c$, niin

$$y_P = Ae^x.$$

Kun sitten sijoitamme ratkaisufunktion y_P derivaatat alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön, saamme

Taulukko 1: Määräämättömien kertoimien menetelmä.

$DE: a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ *Apuyhtälö*: $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$	
I. $f(x) = b_j x^j + \cdots + b_1 x + b_0$, j =0,1,2, ...	
a. $m \neq 0$ $y_P = A_j x^j + \cdots + A_1 x + A_0$	b. $m = 0$, k kertaa $y_P = x^k(A_j x^j + \cdots + A_1 x + A_0)$
II. $f(x) = be^{cx}$	
a. $m \neq c$ $y_P = Ae^{cx}$	b. $m = c$, k kertaa $y_P = Ax^k e^{cx}$
III. $f(x) = (b_j x^j + \cdots + b_1 x + b_0)e^{cx}$, j =0,1,2, ...	
a. $m \neq c$ $y_P = (A_j x^j + \cdots + A_1 x + A_0)e^{cx}$	b. $m = c$, k kertaa $y_P = x^k(A_j x^j + \cdots + A_0)e^{cx}$
IV. $f(x) = a \cos qx + b \sin qx$	
a. $m \neq \pm iq$ $y_P = A \cos qx + B \sin qx$	b. $m = \pm iq$, k kertaa $y_P = x^k(A \cos qx + B \sin qx)$
V. $f(x) = (b_i x^i + \cdots + b_1 x + b_0) \cos qx$ $+(c_j x^j + \cdots + c_0) \sin qx$	
a. $m \neq \pm iq$ $y_P = (A_r x^r + \cdots + A_0) \cos qx$ $+(B_r x^r + \cdots + B_0) \sin qx$, $r = \max(i, j)$	b. $m = \pm iq$, k kertaa Kerro y_P (a):ssa termillä x^k.
VI. $f(x) = ae^{px} \cos qx + be^{px} \sin qx$	
a. $m \neq \pm iq$ $y_P = Ae^{px} \cos qx + Be^{px} \sin qx$	b. $m = \pm iq$, k kertaa Kerro y_P (a):ssa termillä x^k.

$$
\begin{aligned}
y'' - 6y' + 9y &= Ae^x - 6Ae^x + 9Ae^x \\
&= 4Ae^x \\
&= e^x.
\end{aligned}
$$

Eli nyt siis pitää olla, että $A = \frac{1}{4}$. Siis hakemamme ratkaisu on

$$
\begin{aligned}
y &= y_P + y_H \\
&= \frac{1}{4}e^x + (C_1 + C_2 x)e^{3x}.
\end{aligned}
$$

3.6 Parametrien variointi

Kun ei-homogeenisen differentiaaliyhtälön termi $f(x)$ ei ole kappaleessa 3.5.1 oletettua muotoa tai kun differentiaaliyhtälöllä on muuttuvia kertoimia, niin vaaditaan yleisempi menetelmä, jolla y_P muodostetaan. Tämä yleisempi menetelmä, jota kutsumme parametrien varioinniksi, on analoginen ensimmäisen asteen lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen käytetyn menetelmän kanssa. Yksinkertaistaaksemme merkintöjä rajoitamme yleistyksemme koskemaan normaalimuodossa olevia toisen asteen yhtälöitä

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{3.29}$$

vaikka voisimmekin yhtä hyvin laajentaa kyseessä olevaa tekniikkaa myös korkeamman asteisille yhtälöille.

Olettakaamme, että tiedämme yhdistetyn homogeenisen differentiaaliyhtälön

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.30}$$

yleisen ratkaisun olevan

$$y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{3.31}$$

missä y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia välillä $a \leq x \leq b$. Seuraavaksi pyrimme löytämään yksittäisratkaisun y_P, joka on muotoa

$$y_P = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x), \tag{3.32}$$

missä yritämme ratkaista termit $u(x)$ ja $v(x)$ siten, että yhtälö (3.32) toteuttaa yhtälön (3.29). Huomatkaamme, että yhtälöllä (3.32) on sama muoto kuin yhtälöllä (3.31), missä mielivaltaiset vakiot C_1 ja C_2 on korvattu funktioilla $u(x)$ ja $v(x)$.

Määrittääksemme funktiot u ja v tarvitsemme kaksi relaatiota, jotka ne toteuttavat. Vain yksi sellainen relaatio löytyy edellyttäen, että yhtälö (3.32) toteuttaa yhtälön (3.29), ja siksi meidän pitää keksiä toinen relaatio, joka johtaa näiden funktioiden helppoon ratkaisemiseen. Erityisesti meidän tulee pakottaa funktiot u ja v toteuttamaan kaksi ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöä, koska sellaiset yhtälöt ovat melko yksinkertaisia ratkaista.

Yhtälöstä (3.32) saamme

$$y_P' = u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x) + u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x).$$

Seuraavaksi eliminoimme termit, jotka sisältävät funktioiden u ja v derivaatat, asettamalla ne yhtäsuuriksi nollan kanssa:

$$u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0.$$

Nyt siis saamme

$$y_P' = u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x), \tag{3.33}$$

ja edelleen derivoimalla saamme

$$y_P'' = u(x)y_1'' + v(x)y_2'' + u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x). \tag{3.34}$$

Kun sijoitamme yhtälöissä (3.32), (3.33) ja (3.34) olevat y_P, y_P' ja y_P'' yhtälöön (3.29) saamme

$$\begin{aligned} y_P'' + a_1(x)y_P' + a_0(x)y_P &= u(x)\underbrace{[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]}_{=0} \\ &+ v(x)\underbrace{[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]}_{=0} \\ &+ u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) \\ &= u(x)\cdot 0 + v(x)\cdot 0 + u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siksi

$$u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) = f(x),$$

ja nyt näemme, että kaksi funktiota u' ja v' toteuttavat yhtälöt

$$u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0 \tag{3.35}$$

$$u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{3.36}$$

Ei-triviaalit yhtälöiden (3.35) (3.36) ratkaisut ovat olemassa, jos kertoimien determinantti

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

ei ole nolla. Mutta koska tämä determinantti on juuri lineaarisesti riippumattomien ratkaisuiden y_1 ja y_2 Wronskin determinantti, se ei voi olla koskaan olla nolla välillä $a \leq x \leq b$. Siispä ratkaisut (3.35) ja (3.36) tuottavat

$$u'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1,y_2)(x)} \text{ ja } v'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1,y_2)(x)}. \tag{3.37}$$

Kun vielä integroimme nämä ja sijoitamme ne yhtälöön (3.32), päädymme yksittäisratkaisuun

$$y_P = -y_1(x) \int \frac{y_2(x) f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx. \tag{3.38}$$

Tietyissä tapauksissa näitä integraaleja ei voida määrittää, joten meidän pitää jättää y_P integraalimuotoon, kuten yhtälössä (3.38).

Esimerkki 3.9. Ratkaisemme differentiaaliyhtälön $y'' - y = e^x$ yleisen ratkaisun käyttämällä parametrien muuntelua. Asetamme ensin apuyhtälön $m^2 - 1 = 0$, jonka ratkaisut ovat $m_1 = 1$ ja $m_2 = -1$. Tästä saamme homogeenisen ratkaisun

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e{-}x,$$

josta edelleen yksittäisratkaisut $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$. Seuraavaksi muodostamme näistä ratkaisuista Wronskin determinantin.

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^x = -2.$$

Kun $f(x) = e^x$, niin

$$u'(x) = -\frac{e^{-x} e^x}{-2} = \frac{1}{2}$$

ja

$$v'(x) = \frac{e^x e^x}{-2} = -\frac{1}{2} e^{2x},$$

ja edelleen $u(x) = \frac{1}{2}x$ ja $v(x) = -\frac{1}{4}e^{2x}$. Koska

$$y_P = u(x)e^x + v(x)e^{-x} = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x$$

ja yleinen ratkaisu on $y = y_P + y_H$, saadaan

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x.$$

3.7 Cauchy-Eulerin yhtälö

Tähän asti olemme ratkaisseet vain vakiokertoimisia yhtälöitä, vaikka isoin osa aikaisemmin kehittämästämme teoriasta pätee yhtälailla yleisiin lineaarisiin yhtälöihin, joissa on muuttuvia vakioita. Valitettavasti emme usein kuitenkaan pysty ratkaisemaan tällaisia yleisiä lineaarisia yhtälöitä yhtä helposti kuin vakiotermisiä yhtälöitä. Apua tällaisiin tilanteisiin saamme kuitenkin *Cauchy-Eulerin yhtälöstä*

$$ax^2y'' + bxy' + cy = F(x), \tag{3.39}$$

missä a, b ja c ovat kaikki vakioita. Erityinen ominaisuus tässä on se, että termin x potenssi jokaisessa kertoimessa vastaa termin y derivaatan kertalukua. Tämäntyyppiset yhtälöt voidaan muuttaa vakiokertoimisiksi yhtälöiksi riippumattoman muuttujan muunnoksen avulla.

Tehkäämme muuttujan muunnos $x = e^t$ (kun $x > 0$) tai $x = -e^t$ (kun $x < 0$). Ketjusäännön mukaan saamme (kun $x > 0$)

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

ja

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

josta edelleen (käyttämällä merkintää $D = \frac{d}{dt}$)

$$xy' = Dy, \text{ ja } x^2y'' = D(D-1)y.$$

Tämän muunnoksen vuoksi alkuperäisestä differentiaaliyhtälöstämme (3.39) tulee vakiokertoiminen yhtälö

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = F(e^t). \tag{3.40}$$

Esimerkki 3.10. Ratkaisemme differentiaaliyhtälön $3x^2y'' + 2y' = 0$, kun $x > 0$. Tehdään ensin ratkaistavaan yhtälöön sijoitus $x = e^t$, eli saamme yhtälön muotoon

$$3\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = 0.$$

Edellisen yhtälön apuyhtälöksi saamme $3m^2 - m = 0$, jonka juuret ovat $m_1 = 0$ ja $m_2 = \frac{1}{3}$. Edelleen saamme yleisen ratkaisun

$$y(t) = C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}t},$$

ja tästä yleisen ratkaisun alkuperäisen muuttujan x suhteen

$$y(x) = C_1 + C_2x^{\frac{1}{3}}.$$

Viitteet

[1] Andrews, Larry C., *Ordinary Differential Equations*, Scott, Foresman and Company, 1982.

[2] Merikoski, Jorma, *Differentiaali- ja differenssiyhtälöt*, luentomoniste, Tampereen yliopisto.

[3] Salas, S.; Hille, E.; Etgen, G. *Calculus*. 9. painos, John Wiley & Sons, Inc., 2003.