TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Lassi Kiviniemi

Fibonaccin lukujen jaollisuusominaisuuksista

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Toukokuu 2010

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KIVINIEMI, LASSI: Fibonaccin lukujen jaollisuusominaisuuksista

Pro gradu -tutkielma, 26 s.

Matematiikka

Toukokuu 2010

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa esitellään Fibonaccin lukujen jaollisuusominaisuuksia. Aluksi esitellään jaollisuuteen liittyviä määritelmiä ja lauseita. Ennen jaollisuusominaisuuksiin uppoutumista tutkitaan joitakin Fibonaccin lukujen yleisiä ominaisuuksia. Tutkielman lopussa katsahdetaan koulukursseihin ja esitellään koulukursseille soveltuvia esimerkkejä.

Tutkielman keskeisimpinä lähteinä on käytetty Thomas Koshyn teosta *Fibonacci and Lucas numbers with applications* ja Steven Vajdan teosta *Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section.*

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa tutkitaan Fibonaccin lukujen jaollisuusominaisuuksia.

Tutkielma seuraa laajaa Koshyn 47 lukua käsittävää teosta *Fibonacci and Lucas numbers with applications* sen lukujen 1, 2, 5, 9, 16 ja 32 osalta. Vajdan teos *Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section* on hyvin nopeasti syventyvä ja näin ollen tämän teoksen sisällöstä tutkielmaan on ammennettu vain yksinkertaisimpia parhaita paloja luvuista 1, 2, 3 ja 6.

Tutkielman luvussa 1 kerrotaan matemaatikosta nimeltä Leonardo Fibonacci. Hänen nimeään kantaa yksi tunnetuimmista rekursiivisista lukujonoista, jonka esittelemme tarkemmin luvussa 2.

Luvussa 2 esitellään muutamia tarvittavia määritelmiä ja lauseita, joiden esitteleminen on tarpeellista luvussa 4 käsiteltävää tutkielman pääaihetta varten.

Joitakin Fibonaccin lukujen ominaisuuksia esitellään luvussa 3. Luku 4 etenee pitkälti Koshyn teoksen mukaan. Luvun loppuosan sisältöön kuuluu kuitenkin kauneimpia paloja myös Vajdan teoksesta.

Luvussa 5 katsahdetaan, miten Fibonaccin luvut ja lukujonot sisältyvät koulukursseihin. Tässä luvussa esitellään myös joitakin esimerkkejä, joita opettaja voi koulukurssillaan käyttää.

Tutkielman ymmärtämiseksi lukijan oletetaan tuntevan käytetyimpien matemaattisten merkintöjen lisäksi joitakin yksinkertaisia algebrallisia laskutoimituksia kuten esimerkiksi matriisien laskusäännöt.

1 Leonardo Fibonacci 1170-1250

Fibonacci syntyi 1170 Bonaccin perheeseen Pisassa, Italiassa. Hänen isänsä Guglielmo (William) työskenteli kauppiaana Algeriassa Bugiassa Pohjois-Afrikassa. Bugia eli Bejaia on tärkeä satamakaupunki Pohjois-Algeriassa. Tuossa kaupungissa myös Filius Bonacci eli Fibonacci sai koulutuksensa. Siellä myös eräs arabimatemaatikko opetti Fibonaccille matematiikkaa. Fibonacci oppi arabialaiset (hindulaiset) numerot ja lukujärjestelmän.

Kuva 1: Fibonacci

Fibonacci matkusteli laajalti isänsä kanssa. Matkoillaan hän havaitsi, kuinka valtavia etuja matemaattiset järjestelmät näissä maissa toivat.

Aikuisena Fibonacci teki useita liikematkoja Egyptiin, Syyriaan, Kreikkaan, Ranskaan ja Konstantinopoliin, missä hän opiskeli erilaisia aritmeettisia järjestelmiä ja vaihtoi näkökulmia paikallisten oppineiden kanssa. Hän eli jonkin aikaa Rooman keisarin Fredrik II hovissa. Keisari oli oppinut mies ja kiinnostunut tieteistä ja matematiikasta. Vuoden 1200 tietämillä palasi Fibonacci ollessaan noin 30-vuotias takaisin Pisaan. Hän oli vakuuttunut arabialaisesen numerojärjestelmän ylivoimaisuudesta laskemisessa, jota käytettiin Italiassa.

Vuonna 1202 Fibonacci julkaisi pääteoksensa *Liber abaci*. (Sana *abaci* ei viittaa taskulaskimeen vaan laskemiseen yleensä.) Tässä kirjassa hän osoitti, kuinka paljon helpompaa laskeminen arabialaisilla numeroilla oli kuin roomalaisilla numeroilla. Teoksen 15 lukua selittävät myös persialaisten matemaatikkojen al-Khowarizmin ja Abu Kamilin julkaisemaa algebraa. *Liber abacin* jälkeen Fibonacci kirjoitti kolme muuta vaikuttavaa kirjaa. *Practica Geometriae*, 1220, on jaettu kahdeksaan lukuun. Tässä kirjassa taitavasti esitellään euklidista geometriaa ja trigonometriaa. Hänen kaksi seuraavaa kirjaansa, *Flos* ja *Liber Quadratorum*, julkaistiin vuonna 1225. Vaikka molemmat teokset sisältävät lukuteoriaa, jälkimmäisellä Fibonacci ansaitsi maineensa suurimpien lukuteoreetikkojen joukossa. Molemmat teokset ilmentävät Fibonaccin neroutta ja ajattelun omaperäisyyttä.

Fibonacci eli ennen kirjapainotaidon keksimistä, joten hänen kirjansa olivat käsintehtyjä ja ainoa tapa tehdä kopio oli kirjoittaa käsin uusi kopio. Hänen kirjoistaan käsintehtyjä kopioita on yhä jäljellä, mutta valitettavasti jotkut hänen kirjoittamansa asiakirjat ovat kadonneet. Hänen kirjansa ammattimaisesta aritmetiikasta *Di minor guisa* on kadonnut kuten myös hänen huomautuksensa *Eukleideen Alkeet* -kirjasta. Viimeksi mainittu sisälsi monia pohdintoja irrationaaliluvuista, joita Eukleides oli lähestynyt geometrisesta näkökulmasta.

Vuonna 1225 Fredrik II halusi arvioida Fibonaccin lahjakkuutta. Hovissa järjestettiin matematiikkakilpailut, joihin myös Fibonacci kutsuttiin. Kilpailussa esitettiin haasteena useita matemaattisia ongelmia. Fibonacci ratkaisi näistä kolme.

Ensimmäisessä ongelmassa hän etsi rationaaliluvun x siten, että sekä $x^2 - 5$ ja $x^2 + 5$ ovat rationaalilukujen neliöitä.

Toinen Fibonaccin ratkaisema ongelma oli löytää ratkaisu kolmannen asteen yhtälöön $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Fibonacci osoitti geometrisesti, että yhtälöllä ei ole ratkaisua muodossa $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, mutta ratkaisi likiarvon.

Kolmannessa ongelmassa kasa rahaa jaetaan kolmelle siten, että ensimmäinen saa puolet, toinen kolmasosan ja kolmas kuudesosan. Seuraavaksi ensimmäinen palauttaa puolet ottamastaan, toinen kolmasosan ja kolmas kuudesosan. Uudestaan muodostunut kasa jaetaan tasan näille kolmelle. Kuinka paljon rahaa oli alkuperäisessä kasassa? Kuinka paljon kukin sai? Fibonacci kirjoitti ratkaisut *Flos*-kirjaansa, jonka hän lähetti Fredrik II:lle.

Keisari arvosti Fibonaccin saavutuksia Pisan kaupungissa niin opettajana kuin kaupunkilaisena. Siksi Fibonaccille on pystytetty patsas Arno-joen varteen lähelle Pisan kaltevaa tornia.

Fibonaccista ei ole tehty muotokuvaa, mutta hänestä on kuitenkin olemassa piirros, jossa on sille ajalle tyypillisiin vaatteisiin puettu mies.

Ironista on, että Fibonaccin lukuisista matemaattisista saavutuksista huolimatta hänestä pääasiassa muistetaan lukujono, joka kantaa hänen nimeään.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä luvussa esitellään joitakin määritelmiä ja lauseita tutkielman varsinaisen pääluvun pohjaksi.

2.1 Suurin yhteinen tekijä

Määritelmä 2.1 (Suurin yhteinen tekijä)**.** Olkoot a ja b kokonaislukuja, joista ainakin toinen on $\neq 0$. Silloin c on lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä, jos

1. $c|a$, $c|b$ ja
2. $d|a$, $d|b \Rightarrow d \leq c$.

Lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää merkitään symbolilla (a, b), $\mathrm{syt}(a, b)$ tai $\gcd(a, b)$.

Esimerkki 2.1. Määritettävä $(68, 344)$.

Muodostetaan aluksi lukujen alkulukuhajotelmat. Valitaan sitten hajotelmista yhteiset tekijät. Luvut 68 ja 344 jaettuna alkutekijöihin ovat

$$\begin{aligned} 68 &= 2^2 \cdot 17 \\ 344 &= 2^3 \cdot 43. \end{aligned}$$

Suurin yhteinen tekijä on $(68, 344) = 2^2 = 4$.

2.2 Jakoalgoritmi

Lause 2.1 (Jakoalgoritmi). *Jokaista lukua a ja b $(\neq 0)$ kohti on olemassa sellaiset yksikäsitteiset luvut q ja r, että*

$$a = bq + r, \ \textit{missä } 0 \leq r \leq |b|.$$

Todistus. Ks. [3, s.6]. □

Lause 2.2 (Eukleideen algoritmi). *Olkoot a ja b sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $b \nmid a$. Silloin voidaan kirjoittaa*

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \ \textit{missä } 0 \leq r_1 \leq b, \\ b &= r_1 q_2 + r_2, \ \textit{missä } 0 \leq r_2 \leq r_1, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \ \textit{missä } 0 \leq r_3 \leq r_2, \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k, \ \textit{missä } 0 \leq r_k \leq r_{k-1}, \\ r_{k-1} &= r_k q_{k+1}, \end{aligned}$$

ts. prosessi päättyy, niin, että jokin jakojäännös r_{k+1} $(k \geq 1)$ on $= 0$. Viimeinen nollasta poikkeava jakojäännös r_k on $= (a, b)$. (Jos $b|a$, niin $r_1 = 0$ ja $(a, b) = b$.)

Todistus. Ks. [3, s.7]. □

Esimerkki 2.2. Määritettävä $(234, 63)$ Eukleideen algoritmilla.

Muodostetaan jakoyhtälö luvuille 234 ja 63 ja jatketaan sitä kunnes saadaan jakojäännökseksi nolla. Eukleideen algoritmilla saadaan

$$\begin{aligned} 234 &= 3 \cdot 63 + 45 \\ 63 &= 1 \cdot 45 + 18 \\ 45 &= 2 \cdot 18 + 9 \\ 18 &= 2 \cdot 9. \end{aligned}$$

Viimeinen nollasta poikkeava jakojäännös saadaan toiseksi viimeiseltä riviltä. Suurin yhteinen tekijä on $(234, 63) = 9$.

2.3 Pienin yhteinen jaettava

Määritelmä 2.2 (Pienin yhteinen jaettava)**.** Olkoot a ja b kokonaislukuja, joista molemmat ovat $\neq 0$. Silloin c on lukujen a ja b pienin yhteinen jaettava, jos

1. $c > 0$,
2. $a|c$, $b|c$ ja
3. $a|d$, $b|d$, $d > 0 \Rightarrow c \leq d$.

Lukujen a ja b pienintä yhteistä jaettavaa merkitään symbolilla $[a, b]$, pyj$[a, b]$ tai lcm$[a, b]$.

Esimerkki 2.3. Määritettävä [21,45].

Muodostetaan aluksi lukujen alkulukuhajotelmat. Valitaan sitten hajotelmista alkulukujen korkeimmat potenssit. Luvut 21 ja 45 jaettuna alkutekijöihin ovat

$$21 = 3 \cdot 7$$
$$45 = 5 \cdot 3^2.$$

Pienimmäksi yhteiseksi jaettavaksi saadaan $[21, 45] = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$.

2.4 Kongruenssi

Määritelmä 2.3. Olkoon $m \in Z^+$. Silloin sanotaan, että luku a on *kongruentti* luvun b kanssa *modulo* m, jos

$$m|(a - b).$$

Jos luku a on kongruentti luvun b kanssa modulo m, niin merkitään

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Esimerkki 2.4. Selvästi $7 \equiv 10 \pmod{3}$, mutta $8 \not\equiv 10 \pmod{3}$.

2.5 Fibonaccin lukujono

Kirjassaan Liber Abaci Fibonacci esitteli ongelman, joka koski kaniparien lisääntymistä. Seuraavasta yksinkertaisesta ongelmasta on Fibonaccin lukujen käsittely varsinaisesti alkoi.

Yksi kanipari käsittää täsmälleen yhden uros- ja yhden naaraskanin. Sukukypsä kanipari synnyttää yhden uuden kaniparin joka kuukausi. Sukukypsäksi kanipari kasvaa yhdessä kuukaudessa. Kuinka monta kaniparia yhden tuoreen kaniparin eristäminen vuodessa tuottaa?

Taulukko 1: Kaniparien lisääntyminen ensimmäisen vuoden aikana.

n. kuukauden lopussa	Vanhat parit	Uudet parit	Summa
0.	0	1	1
1.	1	0	1
2.	1	1	2
3.	2	1	3
4.	3	2	5
5.	5	3	8
6.	8	5	13
7.	13	8	21
8.	21	13	34
9.	34	21	55
10.	55	34	89
11.	89	55	144
12.	144	89	233

Ensimmäisen kuukauden jälkeen tuore kanipari on tullut sukukypsäksi. Toisen kuukauden jälkeen ensimmäinen kanipari on synnyttänyt kaniparin, jolloin kanipareja on yhteensä kaksi. Kolmannen kuukauden jälkeen aikaisemmin synnyttänyt kanipari synnyttää uuden kaniparin ja edellisenä kuukautena syntynyt kanipari tulee sukukypsäksi. Taulukossa 1 seurataan kaniparien lukumäärän kehitystä. 12. kuukauden jälkeen kanipareja on yhteensä 233.

Taulukon oikeanpuoleisimpaan sarakkeeseen muodostuu Fibonaccin luvut. Lukujonoa 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... sanotaan *Fibonaccin lukujonoksi.* Lukujonolle tämän nimen antoi ranskalainen matemaatikko François-Edouard-Anatole-Lucas toukokuussa 1876.

Määritelmä 2.4 (Fibonaccin lukujono)**.** Fibonaccin lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$. Seuraavat Fibonaccin luvut F_n saadaan rekursiivisesti eli edellisten avulla. Fibonaccin luku on kahden edellisen luvun summa. Fibonaccin lukujen määrittelyehdot ovat siis

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ kun } n \geq 2. \end{cases}$$

Fibonaccin luvut muodostavat Fibonaccin lukujonon $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$.

Kirjallisuudessa esitellään lukujonon ensimmäiset jäsenet eri tavoin. Esimerkiksi Koshy [1, s.6] jättää indeksillä 0 olevan Fibonaccin luvun esittelemättä, mutta esittelee kahtena ensimmäisenä jäsenenä indekseillä 1 ja 2 olevat Fibonaccin luvut $F_1 = F_2 = 1$. Kirjallisuus ei ole ristiriidassa, sillä

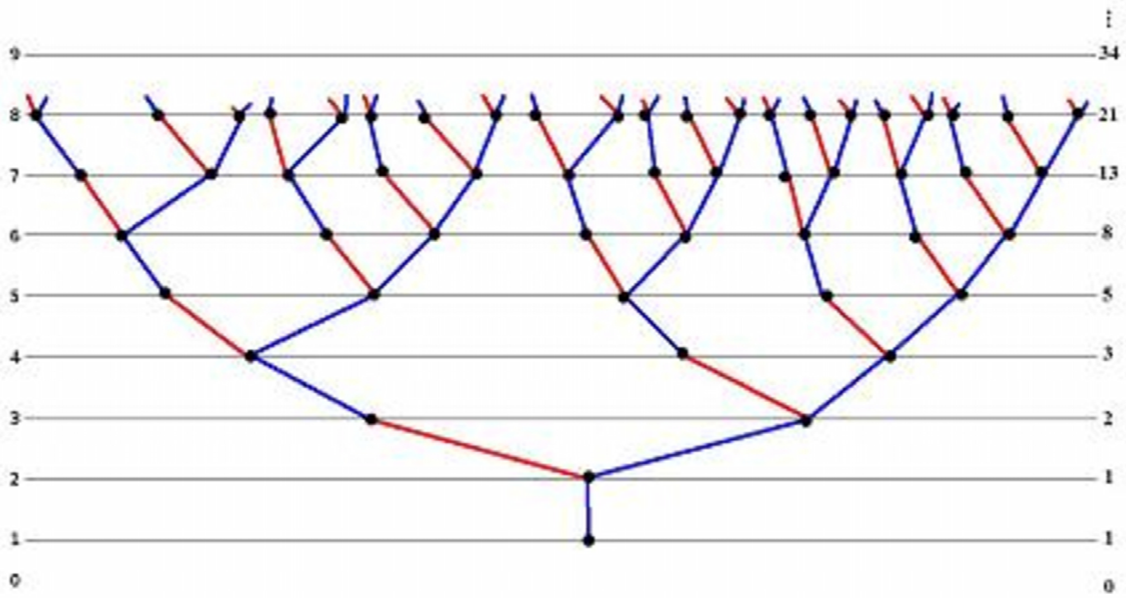
$$F_2 = F_1 + F_0.$$

Ratkaistaan tästä F_0, jolloin saadaan

$$F_0 = F_2 - F_1 = 1 - 1 = 0.$$

Fibonaccin luvut voidaan esittää myös (binääri)puuna. Alussa on vain juuri, joka kasvaa seuraavalle tasolle. Tästä juuresta haarautuu uusi juuri, joka haarautuu kasvettuaan kaksi tasoa. Vanha juuri haarautuu jo seuraavalla tasolla. Kullakin tasolla luetaan haarojen lukumäärä, jolloin saadaan jokaisella kerralla Fibonaccin luku.

Kuvassa 2 on tällainen puu. Alkuoletuksena on, että tasolla 0 ei ole puuta. Tasolla 1 puussa on yksi sininen alkio. Puu jatkuu seuraavasti: sinisen alkion jälkeläisiä ovat vasemmalla punainen ja oikealla sininen. Punaisella alkiolla on sininen jälkeläinen. Puuta voidaan jatkaa loputtomiin.



Kuva 2: Fibonaccin luvut puun tasoilla

3 Joitakin Fibonaccin lukujen ominaisuuksia

3.1 Fibonaccin lukujen summa

Lause 3.1. $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$, *kun* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Todistus. (vrt. [1, s. 69]) Lasketaan aluksi esimerkinomaisesti muutamia ensimmäisiä lauseen mukaan saatuja summia. Sijoittamalla eri n:n arvoja lauseeseen todetaan, että

$$
\begin{aligned}
&F_2 - 1 = 1 - 1 = 0 = F_0 \\
&F_3 - 1 = 2 - 1 = 1 = F_1 \\
&F_4 - 1 = 3 - 1 = 2 = 1 + 1 = F_1 + F_2 \\
&F_5 - 1 = 5 - 1 = 4 = 1 + 1 + 2 = F_1 + F_2 + F_3 \\
&F_6 - 1 = 8 - 1 = 7 = 1 + 1 + 2 + 3 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4. \\
&F_7 - 1 = 13 - 1 = 12 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5.
\end{aligned}
$$

Lause on siis tosi ainakin näillä esitetyillä. Yleiseksi todistukseksi tämä ei kuitenkaan riitä.

Fibonaccin luku $(F_{n+2} = F_n + F_{n+1})$ määriteltiin aikaisemmin kahden edellisen avulla. Ratkaistaan tästä yhtälöstä F_n ja kirjoitetaan yhtälö (kahden seuraavan avulla) $(F_n = F_{n+2} - F_{n+1})$.

Fibonaccin luvut $F_0, F_1, \ldots, F_n$ ovat

$$
\begin{aligned}
F_0 &= F_2 - F_1 \\
F_1 &= F_3 - F_2 \\
F_2 &= F_4 - F_3 \\
&\vdots \\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Laskemalla yhteen saadaan

$$
F_0 + F_1 + \ldots + F_n = (F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + \ldots + F_{n+2} - F_{n+1}.
$$

Kirjoitetaan yhtälön vasen puoli yksinkertaisemmin. Havaitaan lisäksi, että yhtälön oikealta puolelta löytyy lukuja vastalukuineen. Nämä luvut yhteenlaskemalla saadaan

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} F_k &= -F_1 + (F_2 - F_2) + (F_3 - F_3) + \ldots + (F_{n+1} - F_{n+1}) + F_{n+2} \\
&= F_{n+2} - F_2.
\end{aligned}
$$

Koska $F_1 = 1$, on osoitettu, että

$$
\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1.
$$

$\square$

Lauseen 3.1 todistus induktiolla.

Todistus. (vrt. [1, s. 70])
Alkuaskel ($n = 0$): Sijoitetaan lauseeseen, jolloin $0 = F_0 = F_2 - 1 = 1 - 1 = 0$.
Induktio-oletus: Oletetaan väitteen olevan tosi, kun $n = k$. Siis $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$, kun $k \geq 1$ on tosi.
Induktioväite: On osoitettava, että väite on tosi, kun $n = k + 1$.

Erotetaan aluksi summasta viimeinen termi F_{k+1}, jolloin

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^{k} F_i + F_{k+1}.$$

Nyt voidaan käyttää induktio-oletusta termiin $\sum_{i=1}^{k} F_i$. Saadaan

$$\sum_{i=1}^{k} F_i + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1}.$$

Saadaan kaksi peräkkäistä Fibonaccin lukua F_{k+2} ja F_{k+1}. Fibonaccin lukujen määritelmän mukaan saadaan

$$F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+3} - 1.$$

Lopuksi kirjoitetaan väite lauseen muotoon $F_{k+3} - 1 = F_{(k+1)+2} - 1$.

On osoitettu, että väite pätee myös kokonaisluvulle $n = k + 1$. Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikille positiivisille kokonaisluvuille n. □

Esimerkki 3.1. Laskettava Fibonaccin lukujen $F_7, F_8, \ldots, F_{15}$ summa.

Summa kahden summan erotuksena kirjoitettuna on

$$\sum_{i=7}^{15} F_i = \sum_{i=1}^{15} F_i - \sum_{i=1}^{6} F_i.$$

Lauseen 3.1 mukaan saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{15} F_i - \sum_{i=1}^{6} F_i &= (F_{15+2} - 1) - (F_{6+2} - 1) \\
&= 1597 - 1 - (21 - 1) \\
&= 1596 - 20 \\
&= 1576.
\end{aligned}$$

3.2 Cassinin lause

Lause 3.2 (Cassinin lause)**.** $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, *missä* $n \geq 1$.

Todistus. (vrt. [1, s. 74]) Todistus etenee induktiolla.
Alkuaskel ($n = 1$): $F_0 F_2 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1^1 = -1 = (-1)^1$.
Induktio-oletus: Oletetaan väitteen olevan tosi, kun $n = k$ (ja $k \geq 1$). Siis $F_{k-1}\ F_{k+1}\ -\ F_k^2\ =\ (-1)^k$ on tosi.
Induktioväite: On osoitettava, että väite on tosi, kun $n = k+1$. Induktioväite on siis $F_{(k+1)-1} F_{(k+1)+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$.
Sievennettynä induktioväitteen vasen puoli on

$$F_{(k+1)-1} F_{(k+1)+1} - F_{(k+1)}^2 = F_k F_{k+2} - F_{(k+1)}^2.$$

Kirjoitetaan $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$ ja $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} F_k F_{k+2} - F_{(k+1)}^2 &= (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} F_k - F_{k-1} F_k - F_{k-1} F_{k+1} + F_{k+1}^2 - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} F_k - F_{k-1} F_k - F_{k-1} F_{k+1}. \end{aligned}$$

Induktio-oletuksen mukaan $F_{k-1} F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$. Ratkaistaan yhtälöstä $F_{k-1} F_{k+1}$. Sijoitetaan tämä väitteeseen, jolloin

$$F_{k+1} F_k - F_{k-1} F_k - F_{k-1} F_{k+1} = F_{k+1} F_k - F_{k-1} F_k - (F_k^2 + (-1)^k).$$

Kirjoitetaan $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, jolloin saadaan

$$F_{k+1} F_k - F_{k-1} F_k - (F_k^2 + (-1)^k) = (F_k + F_{k-1}) F_k - F_{k-1} F_k - F_k^2 - (-1)^k.$$

Otetaan F_k yhteiseksi tekijäksi, jolloin voidaan yhteenlaskea toistensa vastaluvut. Saadaan

$$\begin{aligned} (F_k + F_{k-1}) F_k - F_{k-1} F_k - F_k^2 - (-1)^k &= (F_k + F_{k-1} - F_{k-1}) F_k - F_k^2 - (-1)^k \\ &= F_k F_k - F_k^2 - (-1)^k \\ &= -1 \cdot (-1)^k \\ &= (-1)^{k+1}, \end{aligned}$$

joka on induktioväitteen oikea puoli.

Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikille kokonaisluvuille $n \geq 1$. □

Seuraus 3.1. Mitkä tahansa kaksi peräkkäistä Fibonaccin lukua ovat suhteellisia alkulukuja.

Todistus. (vrt. [1, s. 75]) Olkoon p sekä luvun F_n että luvun F_{n+1} alkulukutekijä. Nyt p jakaa Cassinin lauseen (lauseen 3.2) vasemman puolen molemmat termit. Näin ollen p jakaa lauseen oikean puolen eli $p | \pm 1$, mikä on ristiriita. Siispä $(F_n, F_{n+1}) = 1$, joten kaksi peräkkäistä Fibonaccin lukua ovat suhteellisia alkulukuja. □

Lause 3.3. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$, *kun* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Todistus. (vrt. [1, s. 77]) Todistus etenee induktiolla.
Alkuaskel: Sijoitetaan $n = 1$, jolloin $\sum_{i=1}^{1} F_i^2 = F_1^2 = 1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1 F_2$.
Induktio-oletus: Oletetaan, että $\sum_{i=1}^{k} F_i^2 = F_k F_{k+1}$ on tosi, kun $n = k$ (ja $k \geq 1$).
Induktioväite: On osoitettava, että väite on tosi, kun $n = k + 1$. Erotetaan summasta viimeinen termi F_{k+1}^2, jolloin saadaan

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2.$$

Induktio-oletuksen mukaan

$$\sum_{i=1}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2 = F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2.$$

Otetaan F_{k+1} yhteiseksi tekijäksi, jolloin

$$F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}).$$

Fibonaccin lukujen määritelmän mukaan $F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) &= F_{k+1} F_{k+2} \\ &= F_{k+1} F_{(k+1)+1}, \end{aligned}$$

mikä on induktioväitteen oikea puoli. Siis väite on tosi kun $n = k + 1$.

Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikille positiivisille kokonaisluvuille n. □

Esimerkki 3.2. Laskettava summa $\sum_{i=1}^{4} F_i^2$. Lauseen 3.3 mukaan summa $\sum_{i=1}^{4} F_i^2$ saadaan tulosta $F_4 F_5 = 3 \cdot 5 = 15$. Tarkistetaan tulos kuitenkin mekaanisesti. Kirjoitetaan siis

$$\sum_{i=1}^{4} F_i^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 1 + 4 + 9 = 15.$$

Lause 3.4. *Olkoon* $G_1, G_2, \ldots$ *sellainen lukujono, missä* $G_n = G_{n-2} + G_{n-1}$ *kaikilla* $n \in Z$. *Tällöin* $G_{m+n} = F_{m-1} G_n + F_m G_{n+1}$, *missä* $m, n \geq 0$.

Todistus. (vrt. [2, s. 24]) Todistus etenee induktiolla.
Alkuaskel ($m = 0$): Lause kuuluu siis

$$G_n = F_{-1} G_n + F_0 G_{n+1}.$$

Fibonaccin lukujen määritelmän mukaan $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$. Ratkaisemalla rekursiokaavasta F_{i-2} saadaan $F_{i-2} = F_i - F_{i-1}$. Sijoittamalla tähän $i = 1$

saadaan $F_{-1} = F_1 - F_0 = 1 - 0 = 1$. Tästä seuraa, että alkuaskel on tosi.
Induktio-oletus: Oletetaan, että väite on tosi, kun $m = k$ (ja $k \geq 0$). Tällöin lause kuuluu

$$G_{n+k} = F_{k-1}G_n + F_kG_{n+1}.$$

Induktioväite: On osoitettava, että väite on tosi, kun $m = k + 1$. Nyt väite kuuluu

$$G_{n+k+1} = F_{k+1-1}G_n + F_{k+1}G_{n+1}.$$

Fibonaccin lukujen määritelmän perusteella voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} F_{k+1-1}G_n + F_{k+1}G_{n+1} &= (F_{k-1} + F_{k-1-1})G_n + (F_{k-1} + F_k)G_{n+1} \\ &= F_{k-1}G_n + F_kG_{n+1} + F_{k-1-1}G_n + F_{k-1}G_{n+1}. \end{aligned}$$

Induktio-oletuksesta saadaan

$$F_{k-1}G_n + F_kG_{n+1} + F_{k-1-1}G_n + F_{k-1}G_{n+1} = G_{n+k} + G_{n+k-1}.$$

Koska $G_1, G_2, \ldots$ toteuttaa Fibonaccin lukujonon rekursion, voidaan Fibonaccin lukujonon määritelmän perusteella kirjoittaa

$$G_{n+k} + G_{n+k-1} = G_{n+k+1}.$$

Induktioperiaatteen mukaan lause on voimassa kaikille positiivisille kokonaisluvuille m.

□

Seuraus 3.2. $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$, missä $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Väite on lauseen 3.4 sellainen erikoistapaus, missä $m = n + 1$ ja $G_i = F_i$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots$. Väitteen oikea puoli saadaan muotoon

$$F_{2n+1} = F_{n+n+1}.$$

Erikoistapauksessa sovittiin, että $m = n + 1$ ja toisaalta $G_i = F_i$. Sijoitetaan nyt $n + 1 = m$ ja $F_i = G_i$, jolloin

$$F_{n+n+1} = G_{n+m}.$$

Nyt lauseen 3.4 mukaan voidaan kirjoittaa

$$G_{n+m} = F_{m-1}G_n + F_mG_{n+1}.$$

Sijoitetaan nyt $G_i = F_i$ ja $m = n + 1$, jolloin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} F_{m-1}G_n + F_mG_{n+1} &= F_{n+1-1}F_n + F_{n+1}F_{n+1} \\ &= F_n^2 + F_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Lauseen 3.6 todistusta varten todistetaan Fibonaccin lukujen ja pian esitettävän matriisin $\boldsymbol{Q}$ välinen yhteys.

Lause 3.5. *Olkoon $n \geq 1$. Kun*

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

niin tällöin

$$\boldsymbol{Q}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Todistus. (vrt. [1, s. 363]) Todistus etenee induktiolla.
Alkuaskel: Nyt $n = 1$, jolloin

$$\boldsymbol{Q}^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}.$$

Induktio-oletus: Oletetaan väitteen olevan tosi, kun $n = k$. Induktio-oletus on siis

$$\boldsymbol{Q}^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Induktioväite: On osoitettava, että väite on tosi, kun $n = k + 1$. Matriisien kertolaskun mukaan kirjoitetaan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^{k+1} = \boldsymbol{Q}^k \boldsymbol{Q}^1 &= \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{(k+1)+1} & F_{k+1} \\ F_{(k+1)} & F_{(k+1)-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Induktioperiaatteen mukaan on todistettu lauseen voimassaolo kaikille kokonaisluvuille $n \geq 1$. □

Lause 3.6. *$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$, missä $n, m \geq 0$. (vrt. Lause 3.4).*

Todistus. (vrt. [1, s. 197])
Koska $\boldsymbol{Q}^m \boldsymbol{Q}^n = \boldsymbol{Q}^{m+n}$, saadaan

$$\begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}.$$

Kun suoritetaan matriisien kertolasku, saadaan

$$\begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n & F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} \\ F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}.$$

Matriisit ovat yhtäsuuret, kun toisiaan vastaavat alkiot ovat. Vastinalkioista saadaan

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} &= F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n \\ F_{m+n} &= F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_{m+n} &= F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \\ F_{m+n-1} &= F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}. \end{aligned}$$

Jokaisen yhtälön sisältö on sama. (Esimerkiksi sijoittamalla ylimpään yhtälöön indeksin n paikalle $n-1$ saadaan toinen yhtälö.)

On osoitettu, että $F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$. □

Seuraus 3.3. $F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1}$.

Todistus. (vrt. [1, s. 364]) Kirjoitetaan yhtälön vasen puoli lauseen 3.6 muotoon, jolloin

$$F_{2n} = F_{n+n}.$$

Lauseen 3.6 mukaan

$$F_{n+n} = F_nF_{n-1} + F_{n+1}F_n,$$

joka on väite. □

4 Jaollisuusominaisuuksia

Lause 4.1. *Jos $i|j$, niin $F_i|F_j$.*

Todistus. (vrt. [1, s. 196])

Selvästi $i|j$ silloin ja vain silloin, kun $i = m$ ja $j = mn$. Väite on siis $F_m|F_{mn}$.

Todistus etenee induktiolla.

Alkuaskel: Lause selvästi tosi, kun $n = 1$.

Induktio-oletus: Oletetaan väitteen olevan tosi, kun $n = k$. Oletetaan siis, että $F_m|F_{mk}$.

Induktio-väite: On osoitettava, että väite pätee, kun $n = k+1$. On siis osoitettava, että $F_m|F_{m(k+1)}$.

Lauseen 3.6 mukaan

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}.$$

Selvästi $F_m|F_{mk-1}F_m$. Induktio-oletuksen mukaan $F_m|F_{mk}$, joten $F_m|F_{mk}F_{m+1}$. Siis $F_m|F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$ eli $F_m|F_{m(k+1)}$.

□

Esimerkki 4.1. $F_6|F_{24}$.

Koska $6|24$, seuraa lauseesta 4.1, että $F_6|F_{24}$.

Siis $8|46368$, mikä on tosi sillä $46368 = 8 \cdot 5796$.

Seuraus 4.1. Joka m:s Fibonaccin luku on jaollinen luvulla F_m. Esimerkiksi joka kolmas Fibonaccin luku on parillinen, sillä lauseen 4.1 mukaan $F_3|F_{3m}$, eli $2|F_{3m}$.

Lause 4.2. *Jos $F_m|F_n$, niin $m|n$.*

Todistus. (vrt. [1, s. 197]) Asetetaan jakoalgoritmin mukaan $n = qm + r$, missä $r < m$. Oletetaan, että $F_m|F_n$. Sijoitetaan lauseeseen 3.6 indeksin m paikalle $n - m$ ja indeksin n paikalle m. Saadaan $F_n = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1}$. Ja sijoitetaan oletukseen, jolloin

$$F_m|F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1}.$$

Selvästi $F_m|F_{n-m+1}F_m$. Siis $F_m|F_{n-m}F_{m-1}$. Seurauksen 3.1 mukaan $(F_m, F_{m-1}) = 1$, joten on oltava $F_m|F_{n-m}$.

Samalla tavoin $F_m|F_{n-2m}$. Näin etenemällä saadaan $F_m|F_{n-qm}$, eli $F_m|F_r$. Mutta oletuksen mukaan $r < m$. Siis täytyy olla $r = 0$, (koska $F_m|F_0$ eli $F_m|0$, mutta $F_m \nmid F_r$, kun $0 < r < m$). Koska $r = n - qm = 0$, niin $n = qm$. Siispä $m|n$. □

Seuraus 4.2. $F_m|F_n$, jos ja vain jos $m|n$.

Seuraa suoraan lauseista 4.1 ja 4.2.

Apulause 4.1. $(F_{qn-1}, F_n) = 1$, *kun* $q \geq 1$, $n \geq 1$.

Todistus. (vrt. [1, s. 198]) Olkoon $d = (F_{qn-1}, F_n)$. Silloin $d|F_{qn-1}$ ja $d|F_n$. Lauseen 4.1 mukaan $F_n|F_{qn}$. Siis $d|F_{qn}$. Nythän $d|F_{qn-1}$ ja $d|F_{qn}$. Mutta seurauksen 3.1 mukaan peräkkäiset Fibonaccin luvut ovat suhteellisia alkulukuja, eli $(F_{qn-1}, F_{qn}) = 1$. On siis oltava $d|1$, joten $d = 1$. Näin ollen $(F_{qn-1}, F_n) = 1$. □

Apulause 4.2. *Olkoon $m = qn + r$. Silloin $(F_m, F_n) = (F_n, F_r)$.*

Todistus. (vrt. [1, s. 198]) Asetetaan $F_m = F_{qn+r}$, jolloin

$$(F_m, F_n) = (F_{qn+r}, F_n).$$

Lauseen 3.6 mukaan $F_{qn+r} = F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}$. Tällöin

$$(F_{qn+r}, F_n) = (F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n).$$

Lauseen 4.1 mukaan $F_n|F_{qn}$, joten $F_n|F_{qn}F_{r+1}$. Siispä

$$(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n) = (F_{qn-1}F_r, F_n).$$

Apulauseen 4.1 mukaan $(F_{qn-1}, F_n) = 1$. Siispä

$$(F_{qn-1}F_r, F_n) = (F_r, F_n).$$

□

Lause 4.3. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

Todistus. (vrt. [1, s. 197]) Todistetaan väite Eukleideen algoritmin, lauseen 4.1 ja apulauseen 4.2 avulla. Oletetaan, että $m \geq n$. Käyttämällä Eukleideen algoritmia saadaan

$$\begin{aligned}
m &= q_0 n + r_1 && 0 \leq r_1 < n \\
n &= q_1 r_1 + r_2 && 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3 && 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n && 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_n r_n + 0.
\end{aligned}$$

Apulauseen 4.2 mukaan $(F_m, F_n) = (F_n, F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2}) = \ldots = (F_{r_{n-1}}, F_{r_n})$. Alimmalta riviltä nähdään, että $r_n | r_{n-1}$, joten lauseen 4.1 mukaan $F_{r_n} | F_{r_{n-1}}$. Siispä $F_{r_n} = (F_{r_n}, F_{r_{n-1}}) = (F_m, F_n)$. Eukleideen algoritmilla saatiin suurin yhteinen tekijä $(m, n) = r_n$. Siispä $F_{r_n} = F_{(m,n)}$, joten $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

On osoitettu, että kahden Fibonaccin luvun suurin yhteinen tekijä on myöskin Fibonaccin luku. □

Esimerkki 4.2. Totea, että $(F_6, F_9) = F_{(6,9)}$.

Esimerkin Fibonaccin luvut ovat $F_6 = 8$ ja $F_9 = 34$. Lukujen 8 ja 34 suurin yhteinen tekijä on $(8, 34) = 2$. Esimerkin vasen puoli on siis yhtä kuin 2.

Lukujen 6 ja 9 suurin yhteinen tekijä on $(6, 9) = 3$. Fibonaccin luku $F_3 = 2$. Esimerkin oikea puoli on siis yhtä kuin 2.

Vasen ja oikea puoli ovat samat, joten yhtälö on tosi.

Esimerkki 4.3. Etsittävä (F_{144}, F_{1925}).

Etsitään lukujen F_{144} ja F_{1925} etsimisen sijaan lukujen 144 ja 1925 suurin yhteinen tekijä, mikä on $(144, 1925) = 1$. Lauseen 4.3 mukaan $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, mistä saadaan, että $(F_{144}, F_{1925}) = F_1 = 1$.

Esimerkki 4.4. Etsittävä (F_{134}, F_{256}).

Käytetään jälleen lausetta 4.3 hyväksi. Etsitään lukujen 134 ja 256 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
256 &= 1 \cdot 134 + 122 \\
134 &= 1 \cdot 122 + 12 \\
122 &= 10 \cdot 12 + 2 \\
12 &= 6 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

Saadaan lukujen 134 ja 256 suurimmaksi yhteiseksi tekijäksi $(134, 256) = 2$, joka on viimeinen nollasta poikkeava jakojäännös. Siispä $(F_{134}, F_{256}) = F_2 = 1$.

Esimerkki 4.5. Osoitettava, että $[F_m, F_n] \neq F_{[m,n]}$.

Lause 4.3 sanoo, että $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$. Osoitetaan, että samaa yhtälö ei ole voimassa pienimmän yhteisen jaettavan tapauksessa.

Todistus. Todistetaan väite vastaesimerkillä. Olkoon tässä vastaesimerkissä $m = 2$ ja $n = 3$. Indeksejä vastaavat Fibonaccin luvut ovat $F_2 = 1$ ja $F_3 = 2$, joiden pienin yhteinen jaettava on $[F_2, F_3] = 2$, mikä on samalla yhtälön vasen puoli.

Lukujen 2 ja 3 pienin yhteinen jaettava on $[2, 3] = 6$. Indeksiä 6 vastaava Fibonaccin luku on $F_6 = 8$, mikä on yhtälön oikea puoli.

Yhtälön $[F_m, F_n] = F_{[m,n]}$ paikkansapitävyys on mitätöity, sillä $2 \neq 8$. Näin ollen on todistettu vastaesimerkillä, että $[F_m, F_n] \neq F_{[m,n]}$. □

Seuraus 4.3. Jos $(m, n) = 1$, niin $F_m F_n | F_{mn}$.

Todistus. (vrt. [1, s. 197]) Lauseen 4.1 perusteella $F_m | F_{mn}$ ja $F_n | F_{mn}$. Tästä saadaan, että $[F_m, F_n] | F_{mn}$. Mutta koska $(F_m, F_n) = F_{(m,n)} = F_1 = 1$, niin $[F_m, F_n] = F_m F_n$. Väite $F_m F_n | F_{mn}$ on siis tosi. □

Esimerkki 4.6. $F_3 F_5 | F_{15}$.

Esimerkin Fibonaccin luvut ovat $F_3 = 2$ ja $F_5 = 5$. Nyt saadaan lukujen 3 ja 5 suurin yhteinen tekijä $(3, 5) = 1$ ja Fibonaccin luku $F_{3 \cdot 5} = F_{15} = 610$. Koska $(3, 5) = 1$, saadaan edellisen seurauksen mukaan $F_3 F_5 | F_{15}$. Eli $2 \cdot 5 | 610$, mikä on tosi, sillä $610 = 10 \cdot 61$.

Esimerkki 4.7. Osoitettava vääräksi: $F_m F_n | F_{mn}$, kun $m, n \geq 3$

Todistus. Tässä vastaesimerkissä $m = 3$ ja $n = 6$. Lukuja 3, 6 sekä näiden tuloa 18 vastaavat Fibonaccin luvut ovat $F_3 = 3$, $F_6 = 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ ja $F_{18} = 2584$. $2584 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 19$. Selvästi $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \nmid 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 19$. □

Esimerkki on lauseen 4.3 näköinen, mutta alkuoletusta $(m, n) = 1$ ei tehdä, mikä onkin oleellinen osa lausetta 4.3. Tässä esimerkissä $(3, 6) = 3$.

Lauseen 4.3 todistus toisella tavalla.
Väite kuuluu $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

Todistus. (vrt. [1, s. 199]) Merkitään aluksi $d = (m, n)$ ja $d' = (F_m, F_n)$. On siis osoitettava, että $F_d = d'$.

Lauseen 4.1 mukaan $F_d | F_m$ ja $F_d | F_n$. Nythän $F_d | d'$. Koska $d = (m, n)$, niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut a ja b, että $d = am + bn$. Koska $d, m, n > 0$, niin joko $a \geq 0$ tai $b \geq 0$. Oletetaan nyt, että $a \geq 0$. Asetetaan luku $k = -a$. Kirjoitetaan yhtälö $d = am + bn$ muotoon $bn = d - am = d + km$. Nyt lauseen 3.6 mukaan saadaan

$$F_{bn} = F_{d+km} = F_{d-1} F_{km} + F_d F_{km+1}.$$

Koska $d'|F_m$, niin lauseesta 4.1 (, joka sanoo, että $F_m|F_{mn}$) saadaan $d'|F_{km}$. Nyt $d'|F_n$ ja $F_n|F_{bn}$, joten varmasti $d'|F_{bn}$. Samalla tavalla $d'|F_m$ ja $F_m|F_{km}$, joten $d'|F_{km}$. Yllä olevan yhtälön mukaan $d'|F_dF_{km+1}$. Koska oletuksen mukaan $d'|F_{km}$, niin $(d', F_{km+1}) = 1$, sillä $(F_{km}, F_{km+1}) = 1$. Tästä seuraa, että $d'|F_d$.

Koska $F_d|d'$ ja $d'|F_d$, niin $F_d = d'$. Tämä alkuperäiseen muotoon kirjoitettuna tuottaa väitteen. □

Seuraus 4.4. Jos m ja n ovat suhteellisia alkulukuja, niin F_m ja F_n ovat myös.

Esimerkiksi luvut 9 ja 14 ovat suhteellisia alkulukuja, sillä $(9, 14) = 1$. $(F_9, F_{14}) = (34, 377) = 1$, joten lukuja 9 ja 14 vastaavat Fibonaccin luvutkin ovat suhteellisia alkulukuja.

Seuraus 4.5. Alkulukuja on ääretön määrä.

Todistus. (vrt. [1, s. 199]) Tehdään vastaoletus, että alkulukuja on äärellinen määrä. Numeroidaan alkuluvut: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$. Muodostetaan näitä lukuja vastaavat Fibonaccin luvut $F_{p_1}, F_{p_2}, F_{p_3}, \ldots, F_{p_k}$. Selvästi luvut ovat pareittain suhteellisia alkulukuja. Koska alkulukuja ja niitä vastaavia Fibonaccin lukuja on kumpiakin täsmälleen k kappaletta, täytyy jokaisella mainitulla Fibonaccin luvulla olla täsmälleen yksi alkulukutekijä, mikä on kullakin (eri) alkuluku. Tästä saadaan ristiriita, sillä esimerkiksi alkulukua 51 vastaava Fibonaccin luku $F_{51} = 20365011074 = 2 \cdot 10182505537$, eikä siten ole alkuluku.

Näin ollen vastaoletus on väärä ja alkuperäinen väite pätee. □

Lause 4.4. *$F_n^2|F_{kn-1} - F_{n-1}^k$, kun $n = 1, 2, \ldots$ ja $k = 1, 2, \ldots$.*

Todistus. (vrt. [2, s. 76]) Todistus etenee induktiolla luvun k suhteen.
Alkuaskel: Sijoitetaan $k = 1$, jolloin saadaan $Fn^2|F_{n-1} - F_{n-1}^1$, mikä on tosi sillä $F_n^2|0$. Sijoitetaan $k = 2$, jolloin saadaan $F_n^2|F_{2n-1} - F_{n-1}^2$, joka on myös tosi, sillä $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$ (Seuraus 3.2).
Induktio-oletus: Oletetaan väitteen olevan tosi, kun $k = i$. Oletetaan siis, että $F_n^2|F_{in-1} - F_{n-1}^i$.
Induktioväite: On osoitettava, että väite on tosi, kun $k = i + 1$. Väite on siis

$$F_n^2|F_{(i+1)n-1} - F_{n-1}^{i+1}.$$

Lauseen 3.6 mukaan $F_{(i+1)n-1} = F_{in}F_n + F_{in-1}F_{n-1}$. Nyt väite kuuluu

$$F_n^2|F_{in}F_n + F_{in-1}F_{n-1} - F_{n-1}^{i+1}.$$

Lauseen 4.1 mukaan $F_n|F_{in}$, joten $F_n^2|F_{in}F_n$. Induktio-oletuksesta saadaan, että $F_n^2|F_{in-1} - F_{n-1}^i$, joten $F_n^2|(F_{in-1} - F_{n-1}^i)F_{n-1}$.

Induktioperiaatteen mukaan on osoitettu, että $F_n^2|F_{kn-1} - F_{n-1}^k$, kun $n = 1, 2, \ldots$ ja $k = 1, 2, \ldots$.

□

Lause 4.5. *$F_n^2 | F_{kn-2} - (-1)^{k+1} F_{n-2}^k$, kun $n = 2, 3, \ldots$ ja $k = 1, 2, \ldots$.*

Todistus. (vrt. [2, s. 76]) Todistus etenee induktiolla luvun k suhteen.
Alkuaskel: Sijoitetaan $k = 1$, jolloin saadaan $F_n^2 | F_{n-2} - (-1)^{1+1} F_{n-2}^1$, mikä on tosi, sillä $F_n^2 | 0$.
Induktio-oletus: Oletetaan väitteen olevan tosi, kun $k = i$. Oletetaan siis, että $F_n^2 | F_{in-2} - (-1)^{i+1} F_{n-2}^i$.
Induktioväite: On osoitettava, että väite on tosi, kun $k = i + 1$. Väite on siis

$$F_n^2 | F_{(i+1)n-2} - (-1)^{(i+1)+1} F_{n-2}^{i+1}.$$

Lauseen 3.6 mukaan $F_{(i+1)n-2} = F_{in-1} F_n + F_{in-2} F_{n-1}$. Tällöin väite on

$$F_n^2 | F_{in-1} F_n + F_{in-2} F_{n-1} - (-1)^{i+2} F_{n-2}^{i+1}.$$

Induktio-oletuksen mukaan $F_n^2 | F_{in-2} - (-1)^{i+1} F_{n-2}^i$. Määritelmän 2.3 mukaan $F_{in-2} \equiv (-1)^{i+1} F_{n-2}^i \pmod{F_n^2}$. Tällöin $F_{in-2} F_{n-2} \equiv (-1)^{i+1} F_{n-2}^{i+1} \pmod{F_n^2}$. Kirjoittamalla tämä väitteeseen saadaan

$$\begin{aligned}
&F_n^2 | F_{in-1} F_n + F_{in-2} F_{n-1} - (-1)^{i+2} F_{n-2}^{i+1} \\
\Leftrightarrow &F_n^2 | F_{in-1} F_n + F_{in-2} F_{n-1} + (-1)^{i+1} F_{n-2}^{i+1} \\
\Leftrightarrow &F_n^2 | F_{in-1} F_n + F_{in-2} F_{n-1} + F_{in-2} F_{n-2}.
\end{aligned}$$

Nyt voidaan Fibonaccin lukujen määritelmän mukaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&F_n^2 | F_{in-1} F_n + F_{in-2} F_{n-1} + F_{in-2} F_{n-2} \\
\Leftrightarrow &F_n^2 | F_{in-1} F_n + F_{in-2} (F_{n-1} + F_{n-2}) \\
\Leftrightarrow &F_n^2 | F_{in-1} F_n + F_{in-2} F_n \\
\Leftrightarrow &F_n^2 | (F_{in-1} + F_{in-2}) F_n \\
\Leftrightarrow &F_n^2 | F_{in} F_n,
\end{aligned}$$

mikä on tosi, sillä lauseen 4.1 mukaan $F_n | F_{in}$, joten $F_n^2 | F_{in} F_n$.

Induktioperiaatteen mukaan on osoitettu, että $F_n^2 | F_{kn-2} - (-1)^{k+1} F_{n-2}^k$, kun $n = 2, 3, \ldots$ ja $k = 1, 2, \ldots$.

□

Seuraus 4.6. $F_n^2 | F_{nF_n}$, kun $n = 1, 2, \ldots$.

Todistus. (vrt. [2, s. 77]) Olkoon $k = F_n$. Väite on tällöin $k^2 | F_{nk}$. Kirjoitetaan Fibonaccin lukujen määritelmän perusteella

$$F_{nk} = F_{nk-1} + F_{nk-2}.$$

Määritelmän 2.3 nojalla ja lauseen 4.4 mukaan $F_{kn-1} \equiv F_{n-1}^k \pmod{F_n^2}$ sekä lauseen 4.5 mukaan $F_{kn-2} \equiv (-1)^{k+1} F_{n-2}^k \pmod{F_n^2}$, kun $k = 1, 2, \ldots$ ja $n = 1, 2, \ldots$. Väite voidaan kirjoittaa

$$F_{nk} \equiv F_{n-1}^k + (-1)^{k+1} F_{n-2}^k \pmod{k}.$$

Nyt kirjoitetaan Fibonaccin lukujen määritelmän perusteella $F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$, jolloin voidaan kirjoittaa $F_{n-1}^k = (F_n - F_{n-2})^k$. Tämä taas voidaan kirjoittaa summana $(F_n - F_{n-2})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i F_n^{k-i} F_{n-2}^i$. Väite kuuluu

$$F_{nk} \equiv \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i F_n^{k-i} F_{n-2}^i + (-1)^{k+1} F_{n-2}^k \pmod{k}.$$

Summan $k-1$ ensimmäisessä termissä ovat tekijöinä järjestyksessä F_n^k, F_n^{k-1}, $\ldots$, F_n^2, jotka kaikki ovat selvästi jaollisia luvulla F_n^2. Toiseksi viimeinen eli k:s termi on $\binom{k}{k-1}(-1)^{k-1} F_n^{k-(k-1)} F_{n-2}^{k-1} = k(-1)^{k-1} F_n^1 F_{n-2}^{k-1}$. Koska $k = F_n$, niin $k(-1)^{k-1} F_n F_{n-2}^{k-1}$ on jaollinen luvulla F_n^2. Viimeinen eli $(k+1)$:s termi on $\binom{k}{k}(-1)^k F_n^{k-k} F_{n-2}^k = (-1)^k F_{n-2}^k$. Tämän termin ja alkuperäisen väitteen lauseesta 4.5 seuranneen termin summaksi saadaan

$$(-1)^k F_{n-2}^k + (-1)^{k+1} F_{n-2}^k = 0.$$

Nämä termit siis ovat myös jaollisia luvulla F_n^2. Näin ollen luvusta F_{nk} saadun summan jokainen termi on jaollinen luvulla F_n^2. Muistetaan, että $k = F_n$. On siis todistettu, että

$$F_n^2 | F_{nF_n}, \text{ kun } n = 1, 2, \ldots.$$

$\square$

Esimerkki 4.8. Tutkittava seurauksen 4.6 mukaan, onko luku 75025 jaollinen luvulla 25.

Havaitaan ensin, että luku $25 = 5^2 = F_5^2$. Seurauksen 4.6 mukaan $F_n^2 | F_{nF_n}$. Tässä esimerkissä $F_{nF_n} = F_{5\cdot 5} = F_{25}$. Mekaanisestikin voidaan tarkistaa, että $F_{25} = 75025$. Seurauksen 4.6 mukaan on tutkittu, että $25 | 75025$.

5 Fibonaccin luvut ja lukujonot koulukursseissa

5.1 Yleistä

Fibonaccin lukujonon käsite tulee tutuksi lukiossa pitkän ja lyhyen matematiikan kurssilla. Koulukursseilla aritmeettiset ja geometriset lukujonot ovat keskeisempiä kuin rekursiiviset lukujonot. Fibonaccin lukujono on yksi rekursiivinen lukujono ja siksi Fibonaccin lukujonon käsittely kursseilla jää usein mainitsemisen tasolle.

Peruskoulussa kosketusta Fibonaccin lukuihin tai lukujonoon ei suoranaisesti ole. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa keskeisiin sisältöihin kuuluu lukujonojen tutkiminen ja muodostaminen [5, s.164]. Tässä yhteydessä peruskoulussa voi olla tehtävänä jatkaa lukujonoa annetun alun mukaan. Tällaisessa tehtävässä Fibonaccin lukujono voi esiintyä. Lisäksi joillekin lukujono voi olla tuttu yhdysvaltalaisen Dan Brownin kirjoittamasta valtavan suosion maailmanlaajuisesti saaneesta *Da Vinci -koodista.*

Lyhyen matematiikan kurssin 6 (MAB6: Matemaattisia malleja II) keskeisissä sisällöissä mainitaan aritmeettinen ja geometrinen jono ja summa, mutta rekursiivinen lukujono ei keskeiseen sisältöön kuulu [4, s. 127].

Pitkän matematiikan kurssin 9 (MAA9: Trigonometriset funktiot ja lukujonot) keskeisiin sisältöihin kuuluvat aritmeettisen ja geometrisen lukujonon ja summan lisäksi rekursiivinen lukujono [4, s. 123]. Koska rekursiivisten lukujonojen osuus jää yhdessä koulukurssissa kohtuullisen pieneksi, tyydytään esittelemään vain muutama esimerkki Fibonaccin lukuja käsittelevistä tehtävistä.

Ensimmäinen esimerkki on helppo ja sopii sovellettuna myös lyhyen matematiikan opiskelijoille (etsittävä jäsen voidaan muuttaa esimerkiksi kuudenneksi).

Toinen tehtävä liittyy Fibonaccin lukujonon summaan. Aluksi on laskettava konkreettinen esimerkki ja lopuksi todistettava aiemmin tutkielmassa todistettu lause 3.1. Tässä todistuksen oletetaan noudattavan induktiota. Tehtävä soveltuu opitun syventämiseen ja todistustekniikan harjoitteluun.

Rekursiivisen lukujonon summa ei kuulu keskeisimpiin sisältöihin pitkän matematiikan kurssilla, joten viimeinen tehtävä soveltuu lukiossa lahjakkaimpien oppilaiden pohdittavaksi tehtävän haastavuuden vuoksi. Ratkaisun luonne on kuitenkin mekaaninen.

5.2 Esimerkkejä koulukursseille

Esimerkki 5.1. Laskettava Fibonaccin lukujonon kymmenes jäsen.

Lasketaan kymmenes jäsen rekursiivisesti edellisten mukaan, kun $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$. Fibonaccin lukujonon määritelmän mukaan etenemällä saadaan

$$\begin{aligned}
F_2 &= F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1\\
F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2\\
F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3\\
F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5\\
F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8\\
F_7 &= F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13\\
F_8 &= F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21\\
F_9 &= F_8 + F_7 = 21 + 13 = 34\\
F_{10} &= F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55.
\end{aligned}$$

Ratkaisu: Fibonaccin lukujonon kymmenes jäsen on luku 55.

Esimerkki 5.2. Laske Fibonaccin lukujonon kuuden ensimmäisen luvun summa. Saitko Fibonaccin kahdeksannen luvun vähennettynä luvulla 1? Osoita, että $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{k+2} - 1$.

Kirjoitetaan summa

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20 = 21 - 1 = F_8 - 1.$$

Todistus noudattaa lauseen 3.1 todistusta induktiolla.

Esimerkki 5.3. Osoita, että rekursiivisesti määritellyn lukujonon kymmenen ensimmäisen termin summa on $11 \cdot a_7$, kun $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Avataan summa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} a_k &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + a_7 + (a_8) + (a_9) + (a_{10}) \\
&= (a_3) + (a_5) + (a_7) + a_7 + (a_6 + a_7) + (a_7 + a_8) + (a_8 + a_9) \\
&= 4 \cdot a_7 + a_3 + a_5 + a_6 + a_8 + a_8 + a_9 \\
&= 4 \cdot a_7 + (a_5 - a_4) + a_7 + (a_6 + a_7) + (a_6 + a_7) + (a_7 + a_8) \\
&= 8 \cdot a_7 + a_5 + a_6 - a_4 + a_6 + a_8 \\
&= 8 \cdot a_7 + a_5 + a_6 - (a_6 - a_5) + a_6 + (a_6 + a_7) \\
&= 9 \cdot a_7 + a_5 + a_6 + a_5 + a_6 \\
&= 9 \cdot a_7 + a_7 + a_7 \\
&= 11 \cdot a_7.
\end{aligned}$$

Viitteet

[1] Koshy T. *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* New York: John Wiley & Sons Inc., 2001.

[2] Vajda S. *Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section.* New York: John Wiley & Sons Inc., 1989.

[3] Haukkanen P. *Algebra I.* 2004.

[4] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003.*

[5] Opetushallitus. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004.*