TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Taina Saari

Funktiojonon tasainen suppeneminen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Elokuu 2009

Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
SAARI, TAINA: Funktiojonon tasainen suppeneminen
Pro gradu -tutkielma, 27 s.
Matematiikka
Elokuu 2009

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa käsitellään funktiojonon tasaista suppenemista. Ensin tutustutaan funktiojonon pisteittäiseen suppenemiseen, mutta huomataan sitten esimerkkien avulla, ettei funktiojonon pisteittäinen suppeneminen ole riittävän vahva ominaisuus funktiojonojen rajafunktioiden tutkimiseen. Tämän jälkeen määritellään funktiojonon tasainen suppeneminen.

Tutkielmassa todistetaan neljä lausetta, jotka koskevat tasaisesti suppenevaa funktiojonoa. Ensin todistamme, että tasaisesti suppenevalla funktiojonolla, jonka kaikki funktiot ovat jatkuvia jossain tarkasteltavan välin pisteessä, on tässä pisteessä jatkuva rajafunktio. Toiseksi todistamme tärkeän lauseen, joka koskee integraalin ja rajaprosessin järjestyksen vaihtamista. Kolmanneksi todistamme lauseen, jota kutsutaan yleisesti tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteeriksi. Se kertoo, että tasaisesti suppenevan funktiojonon termit saadaan äärettömän lähelle toisiaan, kun ollaan tarpeeksi kaukana jonossa. Viimeisenä todistamme tärkeän lauseen koskien derivaatan ja raja-arvoprosessin järjestyksen vaihtamista.

Lähdeteoksina tässä tutkielmassa käytetään Tom M. Apostolin kirjaa Mathematical analysis, Patrick M. Fitzpatrickin kirjaa Advanced calculus, Kenneth A. Rossin kirjaa Elementary analysis: The theory of calculus ja William R. Waden kirjaa An introduction to analysis.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman kolmannessa luvussa käsittelemme funktiojonon tasaista suppenemista. Tarkastelemme neljää lausetta, jotka koskevat tasaisesti suppenevaa funktiojonoa.

Tutustumme ensin pykälässä 3.1 funktiojonon pisteittäiseen suppenemiseen, mutta huomaamme esimerkkien avulla, ettei pisteittäinen suppeneminen ole riittävän vahva ominaisuus funktiojonojen rajafunktioiden tutkimiseen. Tämän jälkeen on luontevaa määritellä funktiojonon tasainen suppeneminen. Sen teemme pykälässä 3.2.1.

Seuraavaksi todistamme jatkuvuutta koskevan lauseen. Todistamme, että tasaisesti suppenevalla funktiojonolla, jonka kaikki funktiot ovat jatkuvia jossain tarkasteltavan välin pisteessä, on tässä pisteessä jatkuva rajafunktio. Tämän todistamme pykälässä 3.2.2. Aikaisemmin olemme huomanneet, että näin ei välttämättä ole, jos kyseessä on pisteittäin suppeneva funktiojono.

Sitten todistamme pykälässä 3.2.3 tärkeän lauseen, joka koskee integraalin ja rajaprosessin järjestyksen vaihtamista. Todistamme, että kun funktiojono suppenee tasaisesti suljetulla välillä ja kun jokainen funktiojonon funktio on integroituva kyseisellä välillä, niin rajafunktio on integroituva tällä välillä ja integraalin ja rajaprosessin järjestyksen voi todella vaihtaa.

Kolmanneksi todistamme lauseen, jota kutsutaan yleisesti tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteeriksi. Se kertoo, että tasaisesti suppenevan funktiojonon termit saadaan äärettömän lähelle toisiaan, kun ollaan tarpeeksi kaukana jonossa. Tämän todistamme pykälässä 3.2.4.

Viimeisenä pykälässä 3.2.5 todistamme vielä tärkeän tuloksen koskien derivaatan ja raja-arvoprosessin järjestyksen vaihtamista. Todistamme, että jos funktiojono suppenee pisteittäin avoimella välillä, jokainen funktiojonon funktio on derivoituva samalla välillä ja funktiojonon derivaattafunktioista koostuva jono suppenee tasaisesti tällä välillä, niin funktiojono itse suppenee tasaisesti kyseisellä välillä ja derivaatan ja rajaprosesssin järjestyksen voi vaihtaa.

Esitämme muutamia esimerkkejä koskien määritelmiä tai todistamiamme lauseita. Toivomme näiden, sekä piirtämiemme kuvien havainnollistavan ja selkiyttävän käsiteltäviä asioita.

Aivan tutkielmamme alussa esitämme luettelonomaisesti jatkon ymmärtämisen kannalta olennaisia määritelmiä ja lauseita. Tämän teemme luvussa 2. Lukijalta edellytämme kuitenkin, että hän ymmärtää ja tuntee äärettömän jonon käsitteen, kolmioepäyhtälön sekä integraalilaskentaan liittyen jaon käsitteen ja jakoon liittyvät ominaisuudet. On myös hyvä tuntea joitain perusasioita tavallisimpien funktioiden ominaisuuksista.

Lähdeteoksina käytämme tässä tutkielmassa Tom M. Apostolin kirjaa Mathematical Analysis, Patrick M. Fitzpatrickin kirjaa Advanced Calculus, Kenneth A. Rossin kirjaa Elementary analysis: The theory of calculus ja

William R. Waden kirjaa An introduction to analysis.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä kappaleessa käymme lyhyesti läpi pääaiheemme käsittelyssä tarvitsemiamme käsitteitä ja tuloksia.

2.1 Lukujonoista

Pykälässä 2.1 esitämme lukujonojen suppenemista koskevan määritelmän ja tutustumme Cauchyn jonoihin.

2.1.1 Lukujonon suppeneminen

Määritelmä 2.1. Reaalilukujonon $\{x_n\}$ sanotaan *suppenevan kohti reaalilukua* a, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luonnollinen luku N, että

$$\text{kun} \quad n \geq N, \quad \text{niin } |x_n - a| < \epsilon.$$

(Ks. [4, s. 34].)

2.1.2 Cauchyn jonoista

Cauchyn jonon käsite on hyvin laajasti käytetty. Tarvitsemme sitä tutkielmamme luvussa 3.

Määritelmän 2.1 mukaan, jos $\{x_n\}$ on suppeneva lukujono, on olemassa sellainen reaaliluku a, että kun luku n on tarpeeksi suuri, luvut x_n ovat lähellä lukua a. Ymmärrämme, että tällöin luvut x_n ovat lähellä myös toisiaan. Tämä havainto johtaa seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 2.2. Reaalilukujonoa $\{x_n\}$ sanotaan *Cauchyn jonoksi*, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luonnollinen luku N, että

$$\text{kun} \quad n, m \geq N, \quad \text{niin } |x_n - x_m| < \epsilon.$$

(Ks. [4, s. 48–49].)

Kaksi seuraavaa tulosta osoittavat, kuinka Cauchyn jonon käsite liittyy suppenemiseen.

Apulause 2.3. *Jos reaalilukujono $\{x_n\}$ suppenee, se on Cauchyn jono.*

Todistus. Ks. [4, s. 49]. □

Seuraava lause kertoo, että apulause 2.3 on voimassa reaalilukujonoille myös toiseen suuntaan.

Lause 2.4. *Olkoon $\{x_n\}$ reaalilukujono. Tällöin $\{x_n\}$ on Cauchyn jono, jos ja vain jos $\{x_n\}$ suppenee kohti jotain reaalilukua a.*

Todistus. Ks.[4, s. 49]. $\square$

2.2 Jatkuvuudesta

Tässä luvussa käymme läpi funktion jatkuvuuden käsitettä. Aluksi pykälässä 2.2.1 esitämme määritelmän funktion raja-arvolle. Sitten esitämme tuloksen, joka palauttaa funktion raja-arvon lukujonon raja-arvoon. Pykälässä 2.2.2 esitämme funktion jatkuvuuden täsmällisen määritelmän.

2.2.1 Funktion raja-arvosta

Määritelmä 2.5. Oletetaan, että a on reaaliluku. Olkoon I avoin väli, joka sisältää luvun a. Olkoon vielä f reaalifunktio, joka on määritelty kaikkialla välillä I, paitsi mahdollisesti pisteessä a. Tällöin funktion $f(x)$ sanotaan *suppenevan kohti raja-arvoa L, kun x lähestyy lukua a*, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$\text{kun} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{niin} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(Tässä δ yleensä riippuu luvusta ϵ, funktiosta f ja luvusta a). Tällöin voimme kirjoittaa, että

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

Kutsumme reaalilukua L funktion $f(x)$ *raja-arvoksi*, kun muuttuja x lähestyy lukua a rajattomasti. (Ks.[4, s. 57].)

Lause 2.6. *Oletetaan, että a on reaaliluku ja I on avoin väli, joka sisältää luvun a. Olkoon $\{x_n\}$ mielivaltainen joukon $I \setminus \{a\}$ reaalilukujono, joka suppenee kohti raja-arvoa a. Oletetaan vielä, että f on reaalifunktio, joka on määritelty kaikkialla joukossa I, paitsi mahdollisesti pisteessä a.*

Tällöin raja-arvo $L = \lim_{x \to a} f(x)$ on olemassa, jos ja vain jos lukujono $\{f(x_n)\}$ suppenee kohti raja-arvoa L aina, kun $\{x_n\}$ suppenee kohti raja-arvoa a.

Todistus. Ks. [4, s. 59]. $\square$

2.2.2 Funktion jatkuvuuden määritelmä

Määritelmä 2.7. Olkoon joukko E reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko ja olkoon f funktio joukolta E joukkoon $\mathbb{R}$. Tällöin

(i) funktion f sanotaan olevan *jatkuva joukon E pisteessä a*, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen (yleensä luvusta ϵ, funktiosta f ja luvusta a riippuva) luku $\delta > 0$, että

$$\text{kun} \quad |x-a| < \delta \quad \text{ja} \quad x \in E, \quad \text{niin} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon,$$

(ii) funktion f sanotaan olevan *jatkuva joukossa E*, jos funktio f on jatkuva jokaisessa joukon E pisteessä x,

(iii) funktion f sanotaan olevan *jatkuva*, jos se on jatkuva koko määrittelyjoukossaan $\mathrm{Dom}(f)$.

(Vrt. [4, s. 71].)

2.3 Derivoituvuudesta

Tarkastelemme derivoituvuutta joukossa $\mathbb{R}$. Esitämme tässä pykälässä derivoituvan funktion ja derivaatan määritelmät. Lopuksi esitämme derivoituvia funktioita koskevan tuloksen, jota kutsutaan väliarvolauseeksi.

2.3.1 Derivaatta

Aikaisempien matematiikan opintojemme perusteella meillä on mielikuva, että derivaatta on funktion kuvaajan tangentin kulmakerroin jossain pisteessä. Tässä esitämme täsmällisen määritelmän derivoituvalle funktiolle ja derivaatalle.

Määritelmä 2.8. Oletetaan, että f on reaalifunktio.

(i) Funktion f sanotaan olevan *derivoituva pisteessä a*, jos funktio f on määritelty jollain pisteen a sisältävällä avoimella välillä ja jos seuraava raja-arvo on olemassa:

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Tässä $f'(a)$ on funktion f *derivaatta pisteessä a*.

(ii) Funktion f sanotaan olevan *derivoituva*, jos se on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä a.

(Ks. [4, s. 84].)

Seuraavassa lauseessa 2.9 esitämme vielä toisen karakterisoinnin derivoituvuudelle.

Lause 2.9. *Olkoon f reaalifunktio ja a reaaliluku. Funktio f on derivoituva pisteessä a, jos ja vain jos*

(i) *on olemassa sellainen avoin väli I, että funktio f on määritelty koko välillä I ja $a \in I$,*

(ii) *on olemassa sellainen pisteessä a jatkuva funktio f^* joukolta I joukkoon $\mathbb{R}$, että yhtälö*

$$f(x) = f^*(x)(x - a) + f(a)$$

on voimassa aina, kun $x \in I$. Tässä yhtälössä $f^*(x) = f'(a)$.

Todistus. Ks. [4, s. 86]. □

2.3.2 Väliarvolause

Myös väliarvolausetta tarvitsemme luvussa 3. Tarkastelemme aluksi erityistapausta (apulause 2.10), joka tunnetaan yleisesti Rollen lauseen nimellä.

Apulause 2.10. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva suljetulla, rajoitetulla ja epätyhjällä välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a, b).*
Jos $f(a) = f(b)$, $\quad$ niin$f'(x_0) = 0$ jossain avoimen välin (a, b) pisteessä x_0.

Todistus. Ks. [4, s. 93–94]. □

Lausetta 2.11 kutsutaan yleistetyksi väliarvolauseeksi tai Cauchyn väliarvolauseeksi, lause 2.12 on nimeltään väliarvolause.

Lause 2.11. *Oletetaan, että väli $[a, b]$ on suljettu, rajoitettu ja epätyhjä. Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia avoimella välillä (a, b), niin on olemassa sellainen piste x_0 avoimella välillä (a, b), että*

$$f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a)).$$

Todistus. Ks. [4, s. 95]. □

Lause 2.12. *Oletetaan, että väli $[a, b]$ on suljettu, rajoitettu ja epätyhjä. Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a,b), niin on olemassa sellainen piste x_0 avoimella välillä (a, b), että*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Todistus. Ks.[4, s. 95]. □

2.4 Integroituvuudesta

2.4.1 Riemann-integraalista

Tässä pykälässä esitämme Riemannin ylä- ja alasumman määritelmät, Riemann-integroituvuuden määritelmän sekä lauseen, joka koskee integroituvaa funktiota.

Määritelmä 2.13. Olkoon väli $[a, b]$ suljettu ja rajoitettu, ja olkoon välin $[a, b]$ jako $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Olkoon vielä funktio f väliltä $[a, b]$ joukkoon $\mathbb{R}$ rajoitettu. Tällöin

(i) funktion f jakoa P vastaava *Riemannin yläsumma* on luku

$$U(f, P) := \sum_{j=1}^{n} M_j(f)(x_j - x_{j-1}),$$

missä

$$M_j(f) := \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x),$$

(ii) funktion f jakoa P vastaava *Riemannin alasumma* on luku

$$L(f, P) := \sum_{j=1}^{n} m_j(f)(x_j - x_{j-1}),$$

missä

$$m_j(f) := \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x).$$

(Ks. [4, s. 107].)

Huomautus 2.14. Oletimme edellä, että funktio f on rajoitettu. Siispä luvut $M_j(f)$ ja $m_j(f)$ ovat olemassa äärellisinä. (Ks. [4, s. 107].)

Määritelmä 2.15. Olkoon väli $[a, b]$ suljettu, rajoitettu ja epätyhjä. Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sanotaan olevan *Riemann-integroituva* välillä $[a, b]$, jos funktio f on rajoitettu kyseisellä välillä ja jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen välin $[a, b]$ jako P, että

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

(Vrt. [4, s.109].)

Lause 2.16. *Jos funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, niin myös funktio $|f|$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Todistus. Ks. [4, s. 120]. □

3 Funktiojonon tasainen suppeneminen

Tässä luvussa tutustumme funktiojonon tasaiseen suppenemiseen. Tämän kappaleen lopussa tarkastelemme muutamaa merkittävää lausetta, jotka koskevat tasaisesti suppenevaa funktiojonoa.

3.1 Funktiojonon pisteittäinen suppeneminen

Ennen kuin tutkimme funktiojonon tasaista suppenemista, tarkastelemme funktiojonon pisteittäistä suppenemista. Pisteittäinen suppeneminen on helpompi tapa ymmärtää ja määritellä funktiojonon suppeneminen, joten aloitamme siitä.

Määritelmä 3.1. Oletetaan, että joukko E on reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko. Sanotaan, että funktiojono $\{f_n\}$ joukolta E joukkoon $\mathbb{R}$ *suppenee pisteittäin* joukossa E, jos jokaista joukon E alkiota x kohti on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

(Ks. [4, s. 182].)

Huomautus 3.2. Kun funktiojono $\{f_n\}$ suppenee pisteittäin joukossa E kohti rajafunktiota f, merkitsemme: $f_n \to f$ joukossa E, kun $n \to \infty$.

Ymmärrämme, että kun $\{f_n\}$ on funktiojono, niin $\{f_n(x)\}$ on tällöin reaalilukujono. Funktiojono $\{f_n\}$ siis suppenee pisteittäin joukossa E, jos ja vain jos reaalilukujono $\{f_n(x)\}$ suppenee aina, kun $x \in E$. Tämän vuoksi kaikki reaalilukujonojen suppenemista koskevat tulokset koskevat myös funktiojonon pisteittäistä suppenemista. Seuraava lause koskee tätä havaintoa.

Lause 3.3. *Oletetaan, että joukko E on joukon $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko ja että $\{f_n\}$ on funktiojono joukolta E joukkoon $\mathbb{R}$. Funktiojono $f_n \to f$ pisteittäin joukossa E, jos ja vain jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ ja joukon E alkiota x kohti on olemassa sellainen luonnollinen luku N, että*

$$\textit{jos} \quad n \geq N, \quad \textit{niin} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

(Tässä luonnollinen luku N voi riippua yhtä hyvin muuttujasta x kuin myös luvusta ϵ.)

Todistus. (Vrt. [4, s. 182].) Määritelmän 3.1 mukaan pisteittäin suppenevalla funktiojonolla $\{f_n\}$ on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ aina, kun $x \in E$. Tämän perusteella voimme päätellä, että funktiojono $\{f_n\}$ suppenee pisteittäin joukossa E, jos ja vain jos reaalilukujono $\{f_n(x)\}$ suppenee kohti reaalilukua $f(x)$ aina, kun $x \in E$.

Nyt koska $\{f_n(x)\}$ on reaalilukujono ja $f(x)$ on reaaliluku, määritelmän 2.1 nojalla reaalilukujono $\{f_n(x)\}$ suppenee kohti reaalilukua $f(x)$, jos ja vain jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ ja joukon E alkiota x kohti on olemassa sellainen luonnollinen luku N, että

$$\text{jos} \quad n \geq N, \quad \text{niin} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Näin lause on todistettu. □

Neljä seuraavaa huomautusta esimerkkeineen (vrt. [4, s. 73–74]) kertovat meille, mitä ominaisuuksia rajafunktio perii pisteittäin suppenevalta funktiojonolta. Saamme huomata, että monikaan pisteittäin suppenevan funktiojonon ominaisuus ei siirry sen rajafunktiolle.

Huomautus 3.4. Jono jatkuvia (vastaavasti derivoituvia) funktioita voi supeta pisteittäin kohti rajafunktiota, joka ei välttämättä ole jatkuva (derivoituva).

Esimerkki 3.1. Esimerkiksi olkoon jono funktioita $f_n(x) = x^n$ määritelty puoliavoimella välillä $(-1, 1]$. Tällöin $\{f_n(1)\}$ on vakiojono ja $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.

Toisaalta kun $-1 < x < 1$, on selvää, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Tällöin siis funktiojono $\{f_n\}$, joka koostuu jatkuvista funktioista x^n, suppenee pisteittäin kohti epäjatkuvaa rajafunktiota

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 1, \\ 0, & \text{kun } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Katso kuva 1. Vastaavasti funktiojonon $f_n(x) = x^n$ funktiot ovat derivoituvia, mutta rajafunktio f ei ole derivoituva pisteessä $x = 1$.

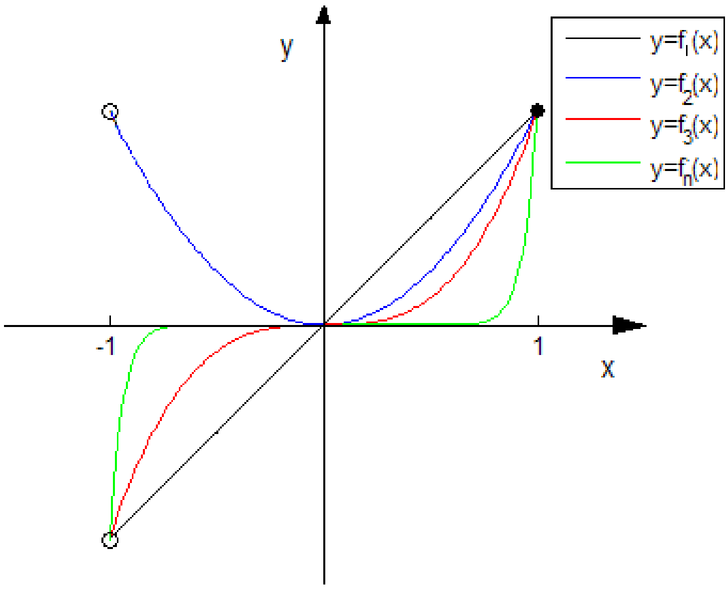
Huomautus 3.5. Jono integroituvia funktioita voi supeta pisteittäin kohti rajafunktiota, joka ei ole integroituva.

Esimerkki 3.2. Esimerkiksi olkoon $f_n(x) = e^{-nx^2}$, missä n on luonnollinen luku ja x reaaliluku. Nyt $\{f_n(0)\}$ on vakiojono ja $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.

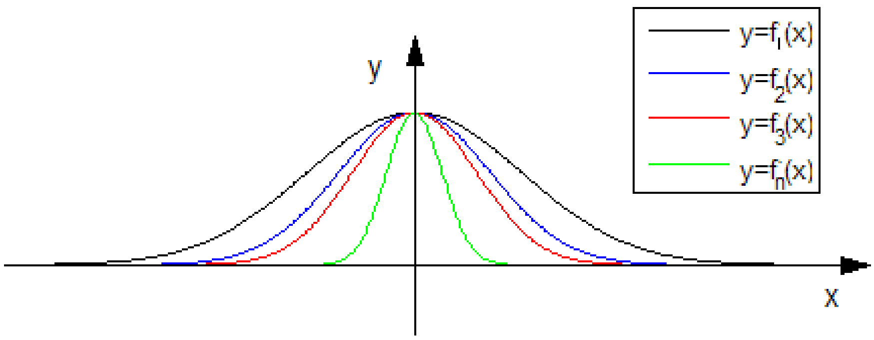
Kun $x \neq 0$, pätee $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. (Tämä johtuu siitä, että voimme arvioida $0 < f_n(x) < \frac{1}{1+nx^2}$). Näin ollen funktiojono $f_n(x) = e^{-nx^2}$, joka koostuu integroituvista funktioista e^{-nx^2}, suppenee pisteittäin kohti eiintegroituvaa rajafunktiota

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Katso kuva 2.



Kuva 1: Esimerkin 3.1 jono funktioita $f_n(x) = x^n$ suppenee kohti paloittain määriteltyä rajafunktiota välillä $(-1, 1]$.

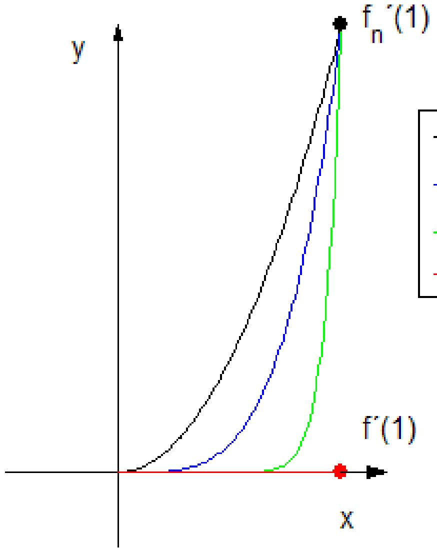


Kuva 2: Esimerkin 3.2 jono funktioita $f_n(x) = e^{-nx^2}$ suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota, joka ei ole integroituva.

Huomautus 3.6. On olemassa jono derivoituvia funktioita $\{f_n\}$ ja derivoituva funktio f siten, että $\{f_n\}$ suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota f välillä $E \subset \mathbb{R}$, mutta

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) \neq (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'. \tag{3.1}$$

Esimerkki 3.3. Voimme tutkia esimerkiksi jonoa funktiota $f_n(x) = 2x^n/n$ ja rajafunktiota $f(x) = 0$. Funktiojono $\{f_n\}$ suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota f välillä $[0,1]$. Jokainen funktio f_n on myös derivoituva, sillä $f'_n(x) = 2x^{n-1}$. Nyt pisteessä $x = 1$ saamme $\lim_{n\to\infty} f'_n(1) = \lim_{n\to\infty} 2 \times 1^{n-1} = 2$, mutta $(\lim_{n\to\infty} f_n(1))' = (\lim_{n\to\infty} \frac{2\times 1^n}{n})' = 0' = 0$. Katso kuva 3. Siis yhtälö (3.1) on voimassa.



Kuva 3: Esimerkin 3.3 funktiojonolla $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) \neq (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$, kun $x \in [0,1]$.

Huomautus 3.7. On olemassa jono integroituvia funktioita $\{f_n\}$ ja funktio f siten, että $\{f_n\}$ suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota f välillä $[a,b]$, mutta

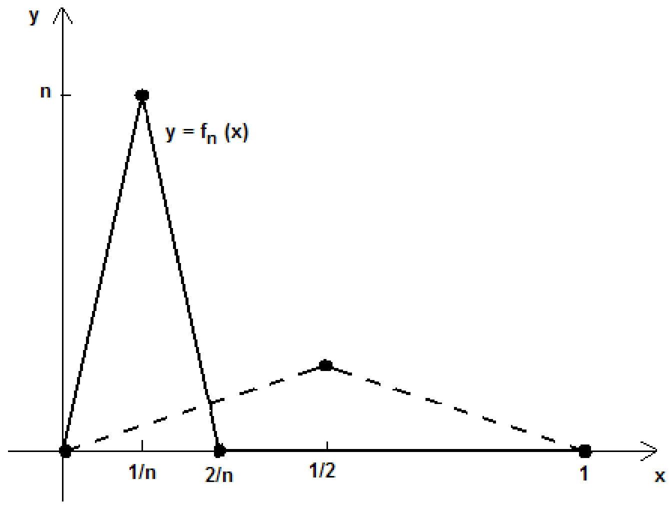
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx. \tag{3.2}$$

Esimerkki 3.4. Olkoon funktiojono $\{f_n\}$ väliltä $[0,1]$ joukkoon $\mathbb{R}$ sellainen, että $f_1(x) = 1$ ja

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 < x < 1/n, \\ 2n - n^2x, & 1/n \leq x < 2/n, \\ 0, & 2/n \leq x \leq 1, \end{cases}$$

kun $n = 2, 3, \ldots$ (Katso kuva 4.) Tällöin $\{f_n(0)\}$ on vakiojono, jonka vakioarvo on 0. Siispä $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

Toisaalta aina, kun $x \in (0, 1]$, raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Funktiojono $\{f_n\}$ suppenee siis pisteittäin kohti rajafunktiota $f(x) = 0$. Nyt saamme yhtälön (3.2) oikealta puolelta arvon $\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = 0$. Vasemmalta puolelta taas saamme arvon $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$ aina, kun $n \in \mathbb{N}$, sillä kolmion pinta-alaksi saadaan tässä aina arvo 1.



Kuva 4: Esimerkin 3.4 funktiojonoa havainnollistava kuva. Ks.[4, s. 184, kuva 7.1]

.

3.2 Funktiojonon tasainen suppeneminen

Tarkastellessamme edellisiä huomautuksia, vakuutumme siitä, että pisteittäinen suppeneminen on riittämätön ominaisuus funktiojonojen rajojen tutkimisessa. Nyt olemme motivoituneita tutustumaan tasaisen suppenemisen käsitteeseen, joka osoittautuu tässä yhteydessä paljon hyödyllisemmäksi.

3.2.1 Määritelmä

Tässä pykälässä tutustumme tasaisen suppenemisen määritelmään.

Määritelmä 3.8. Olkoon joukko E joukon $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko. Funktiojonon $\{f_n(x)\} : E \to \mathbb{R}$ sanotaan *suppenevan tasaisesti* joukossa E kohti rajafunktiota f, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luonnollinen luku N, että

$$\text{jos} \quad n \geq N, \quad \text{niin} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

aina, kun $x \in E$. (Ks. [4, s. 184].)

Huomautus 3.9. Voimme merkitä suppenemista lyhyemmin seuraavasti: $f_n \to f$ tasaisesti joukossa E, kun $n \to \infty$.

Kun vertaamme pisteittäisen suppenemisen määritelmää 3.1 ja tasaisen suppenemisen määritelmää 3.8, huomaamme, että ainut ero tasaisen suppenemisen ja pisteittäisen suppenemisen välillä on, että tasaisessa suppenemisessa kokonaisluku N ei saa riippua muuttujasta x. Tilannetta on helpompi hahmottaa, kun kirjoitamme sekä pisteittäistä suppenemista että tasaista suppenemista koskevat formalisoidut lausekkeet.

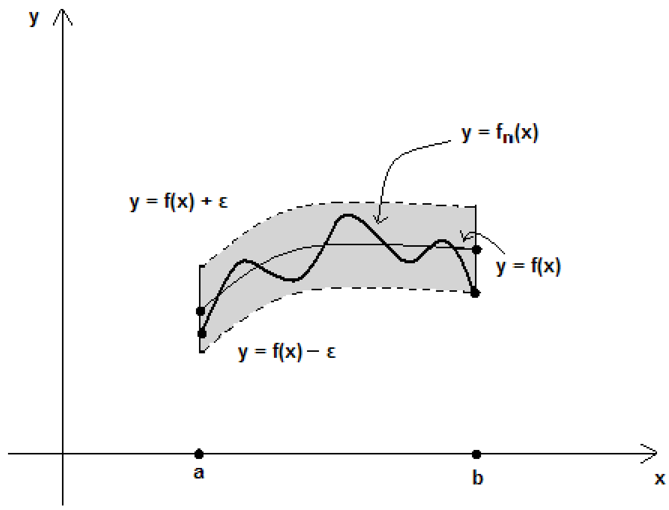
Huomautus 3.10. Funktiojonon pisteittäisen suppenemisen määritelmä formalisoituna on

$$\forall \epsilon > 0 : \forall x \in E : \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Tasaisen suppenemisen määritelmä vastaavasti formalisoituna on seuraava:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in E : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Seuraava kuva 5 havainnollistaa määritelmää 3.8.



Kuva 5: Tasaisen suppenemisen määritelmää havainnollistava kuva, vrt. [2, s. 246, kuva 9.5].

Tasaisen suppenemisen määritelmästä seuraa, että jos funktiojono $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti reaalilukuvälillä E, se suppenee myös pisteittäisesti samalla välillä. Seuraava esimerkki osoittaa, että sen sijaan funktiojonon pisteittäisestä suppenemisesta jollain välillä ei seuraa funktiojonon tasaista suppenemista kyseisellä välillä (vrt. [4, s. 185]).

Esimerkki 3.5. Tarkastellaan uudestaan esimerkin 3.1 jonoa funktioita $f_n(x) = x^n$ avoimella välillä $(-1, 1)$. Päättelimme aikaisemmin, että funktiojono $f_n(x) = x^n$ suppenee pisteittäin avoimella välillä $(-1, 1)$ kohti rajafunktiota $f(x) = 0$.

Oletetaan, että funktiojono $\{f_n\}$ suppenee myös tasaisesti kohti rajafunktiota $f(x) = 0$ samalla välillä $(-1, 1)$. Valitaan luku $\epsilon > 0$ siten, että $\epsilon < 1/2$. Tällöin määritelmän 3.8 perusteella on olemassa luonnollinen luku N siten, että

$$|f_N(x) - f(x)| = |x^N - 0| = |x^N| < \epsilon, \tag{3.3}$$

kaikilla välin $(-1, 1)$ alkioilla x.

Toisaalta riippumatta indeksin N arvosta, valitsemalla $x_0 = (4/5)^{1/N}$ väliltä $(0, 1)$, saamme

$$|f_N(x_0) - 0| = |x_0^N - 0| = |((4/5)^{1/N})^N| = 4/5 > \epsilon. \tag{3.4}$$

Nyt yhtälöiden (3.3) ja (3.4) perusteella saamme ristiriidan

$$\epsilon < x_0^N < \epsilon.$$

Näin ollen jono funktioita $f_n(x) = x^n$ ei siis suppene tasaisesti kohti rajafunktiota $f(x) = 0$ välillä $(-1, 1)$.

Seuraavat neljä tulosta pykälissä 3.2.2–3.2.5 osoittavat, että jos funktiojono suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota, rajafunktio perii paljon ominaisuuksia funktiojonon funktioilta.

3.2.2 Lause jatkuvuudesta

Tässä pykälässä tarkastelemme jatkuvuus-ominaisuuden periytymistä funktiojonolta rajafunktiolle, kun funktiojono suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota.

Lause 3.11. *Oletetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti avoimella välillä (a,b), kun $n \to \infty$. Jos jokainen funktio f_n on jatkuva jossain välin (a,b) pisteessä x_0, niin rajafunktio f on jatkuva pisteessä $x_0 \in (a, b)$.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 185].) Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan sellainen luonnollinen luku N, että kun

$$n \geq N \text{ ja } x \in (a, b), \text{ niin } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3. \tag{3.5}$$

Voimme tehdä valinnan, koska oletamme funktiojonon suppenevan tasaisesti kohti rajafunktiota välillä (a, b).

Koska funktio f_N on jatkuva pisteessä $x_0 \in (a, b)$, jatkuvuuden määritelmän 2.7 perusteella voimme valita sellaisen luvun $\delta > 0$, että kun $|x - x_0| < \delta$ ja $x \in (a, b)$,

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon/3. \tag{3.6}$$

Oletetaan nyt, että $|x - x_0| < \delta$ ja että $x \in (a, b)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&\overset{(1)}{\leq} |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&\overset{(2)}{<} \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Kohdassa (1) päättelyssä käytetään kolmioepäyhtälöä, kohdassa (2) yhtälöitä (3.5) ja (3.6).

Siis rajafunktio f on jatkuva pisteessä $x_0 \in (a, b)$ jatkuvuuden määritelmän 2.7 perusteella. □

Seuraavassa esimerkissä huomaamme, että funktiojono ei välttämättä suppene tasaisesti, vaikka rajafunktio olisikin jatkuva.

Esimerkki 3.6. Tarkastellaan funktioiden $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n}$ jonoa. Huomaamme, että jokainen funktiojonon funktio f_n on jatkuva, kun $x \in \mathbb{R}$.

Kun indeksi $n \to \infty$, funktiojono $\{f_n\}$ suppenee kohti jatkuvaa rajafunktiota $f(x) = x$. Suppeneminen ei kuitenkaan ole tasaista. Valitaan luku $\epsilon = 1$, ja osoitetaan, että jokaista indeksiä n kohti on olemassa luku $x \in \mathbb{R}$ siten, että

$$|f_n(x) - f(x)| = 1.$$

Valitaan indeksi $n \in \mathbb{N}$ mielivaltaisesti, ja merkitään reaaliluku $x = \sqrt{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan sitten erotusta $|f_n(x) - f(x)|$. Nyt

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |\frac{x^2 + nx}{n} - x| = |\frac{x^2 + nx - nx}{n}| \\
&= |\frac{x^2}{n}| = \frac{x^2}{n} \\
&= \frac{(\sqrt{n}^2)}{n} = 1 = \epsilon.
\end{aligned}$$

Näin ollen tasaisen suppenemisen määritelmän 3.8 perusteella funktiojono $\{f_n(x)\}$ ei voi supeta tasaisesti.

3.2.3 Lause integraalin ja raja-arvon järjestyksen vaihtamisesta

Tässä pykälässä esitämme tärkeän lauseen koskien integraalin ja raja-arvon järjestyksen vaihtamista.

Lause 3.12. *Oletetaan, että funktiojono $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota f suljetulla välillä $[a, b]$. Jos jokainen funktio f_n on integroituva välillä $[a, b]$, niin*

(i) *rajafunktio f on integroituva välillä $[a, b]$,*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$.

Itse asiassa funktio $\int_a^x f_n(t)dt$ suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota $\int_a^x (\lim_{n\to\infty} f_n(t))dt$, kun $x \in [a, b]$ ja $n \to \infty$.

Todistus. (Vrt. [4, s. 186–187].) Todistetaan aluksi väitteen kohta (i).

Olkoon luku $\epsilon > 0$. Valitaan sellainen indeksi $N \in \mathbb{N}$, että

$$\text{jos} \quad n \geq N, \quad \text{niin} \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)} \tag{3.7}$$

aina, kun $x \in [a, b]$. Voimme tehdä valinnan, sillä oletamme funktiojonon suppenevan tasaisesti.

Kun tarkastelemme yhtälöä (3.7) indeksin n arvolla N, saamme Riemannin yläsumman määritelmän 2.13 mukaan kirjoitettua

$$\begin{aligned} U(f - f_N, P) &= \sum_{j=1}^{n} M_j(f - f_N)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} [(f - f_N)(x)](x_j - x_{j-1}) \right\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nyt voimme arvioida lauseketta $\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]}[(f - f_N)(x)]$ ylöspäin epäyhtälön (3.7) avulla seuraavasti

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} [(f - f_N)(x)](x_j - x_{j-1}) \right\} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{3(b-a)}(x_j - x_{j-1}).$$

Tarvitaan merkki $\leq$, sillä $\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]}[(f - f_N)(x)]$ voi olla myös täsmälleen yhtä suuri kuin $\frac{\epsilon}{3(b-a)}$. Edelleen

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{3(b-a)}(x_j - x_{j-1}) = \frac{\epsilon}{3(b-a)}(b-a) = \epsilon/3.$$

Siispä

$$U(f - f_N, P) \leq \epsilon/3. \tag{3.9}$$

Tämä toteutuu kaikilla välin $[a, b]$ jaoilla P.

Vastaavasti arvioimme Riemannin alasumman määritelmän 2.13 ja yhtälön (3.7) avulla

$$\begin{aligned}
(3.10) \qquad L(f-f_N,P) &= \sum_{j=1}^{n} m_j(f-f_N)(x_j-x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} [(f-f_N)(x)](x_j-x_{j-1}) \right\} \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} -\frac{\epsilon}{3(b-a)}(x_j-x_{j-1}) \\
&= -\frac{\epsilon}{3(b-a)}(b-a) = -\epsilon/3.
\end{aligned}$$

Myös tämä toteutuu kaikilla välin $[a,b]$ jaoilla P.

Oletuksen mukaan funktio f_N on integroituva, joten voimme valita määritelmän 2.15 nojalla sellaisen välin $[a,b]$ jaon P, että

$$(3.11) \qquad U(f_N,P) - L(f_N,P) < \epsilon/3.$$

Nyt saamme

$$\begin{aligned}
U(f,P)-L(f,P) &= U(f,P)-U(f_N,P)+U(f_N,P)-L(f_N,P)-L(f,P)+L(f_N,P) \\
&\overset{(1)}{\leq} U(f-f_N,P)+U(f_N,P)-L(f_N,P)-L(f-f_N,P) \\
&\overset{(2)}{<} \epsilon/3+\epsilon/3+\epsilon/3 = \epsilon.
\end{aligned}$$

Kohdassa (1) tarvitaan merkki $\leq$, sillä funktioiden erotuksen supremum voi olla suurempi kuin funktioiden supremumien erotus. Vastaavasti funktioiden erotuksen infimum voi olla pienempi kuin funktioiden infimumien erotus. Kohdan (2) päättelyssä käytetään hyödyksi yhtälöitä (3.8)–(3.11). Nyt koska $U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$, on funktio f integroituva välillä $[a,b]$ määritelmän 2.15 mukaisesti.

Todistamme sitten väitteen loppuosan. Nyt

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| &= \left|\int_a^x [f_n(t)-f(t)]dt\right| \\
&\overset{(3)}{\leq} \int_a^x |f_n(t)-f(t)|dt \\
&\overset{(4)}{\leq} \frac{\epsilon(x-a)}{3(b-a)} < \epsilon,
\end{aligned}$$

aina, kun $x\in[a,b]$ ja $n\geq N$. Kohdassa (3) arviointi tapahtuu lauseen 2.16 perusteella, sillä funktiot f_n ja f ovat integroituvia funktioita. Kohdan (4) arvioinnissa käytetään oletusta tasaisesta suppenemisesta (ks. edellä yhtälö (3.7)). Näin tasaisen suppenemisen määritelmän (määritelmä 3.8) nojalla väite on todistettu. □

Esitämme vielä esimerkin, joka selventää edellistä lausetta 3.12.

Esimerkki 3.7. Tutkitaan tasaisesti suppenevaa jonoa funktioita $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ välillä $[0,1]$. Meitä kiinnostaa nyt, kuinka lauseen 3.12 väite

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx \tag{3.12}$$

käyttäytyy esimerkkifunktiomme tapauksessa.

Funktiojonon $\{f_n(x)\}$ rajafunktio on nollafunktio $f(x) = 0$. Nyt siis yhtälön (3.12) oikealta puolelta saadaan

$$\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Toisaalta $\int_0^1 f_n(x)dx$ saadaan laskettua seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+nx^2}dx &= \frac{1}{2n}\int_0^1 2nx(1+nx^2)^{-1}dx \\ &= \frac{1}{2n}\left[\ln(1+n) - \ln(1)\right] = \frac{\ln(1+n)}{2n}.\end{aligned}$$

Kun tästä laskemme raja-arvon, kun $n \to \infty$, saamme yhtälön (3.12) vasemmalta puolelta

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{2n} = 0.$$

Yhtälö (3.12) siis toteutuu.

3.2.4 Tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteeri

Seuraavaa lausetta, jota kutsutaan tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteeriksi, tarvitsemme pykälässä 3.2.5.

Apulause 3.13. *Olkoon joukko E joukon $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko ja $\{f_n\}$ funktiojono joukolta E joukkoon $\mathbb{R}$. Tällöin $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti joukossa E, jos ja vain jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen indeksi $N \in \mathbb{N}$, että*

$$\textit{jos}\quad n,m \geq N, \quad \textit{niin}\quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

aina, kun $x \in E$.

Todistus. (Vrt. [4, s. 187] ja [3, s. 140-141]. Jaamme todistuksen kahteen vaiheeseen.

Oletetaan ensin, että $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti joukossa E, kun $n \to \infty$. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan indeksi $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\text{kun}\quad n \geq N, \quad \text{niin}\quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2 \tag{3.13}$$

aina, kun $x \in E$. Olkoon $m \geq N$. Tarkastellaan erotusta $|f_n(x) - f_m(x)|$. Nyt

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\overset{(1)}{\leq} |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\ &\overset{(2)}{<} \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Kohdassa (1) hyödynnetään kolmioepäyhtälöä, kohdassa (2) yhtälöä (3.13). Siis $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ kaikilla $x \in E$.

Sitten todistamme väitteen toisen suunnan. Oletetaan, että jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen indeksi $N \in \mathbb{N}$, että

$$\text{jos} \quad n, m \geq N, \quad \text{niin} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

aina, kun $x \in E$. Tällöin jono $f_n(x)_{n \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono kaikilla $x \in E$ määritelmän 2.2 mukaisesti. Nyt lauseen 2.4 nojalla raja-arvo

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \tag{3.14}$$

on olemassa jokaista alkiota $x \in E$ kohti.
Olkoon luku $\epsilon > 0$. Tällöin oletuksen mukaan on olemassa sellainen luku N, että

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2 \tag{3.15}$$

aina, kun $m, n \geq N$ ja $x \in E$. Oletetaan, että indeksi $m \geq N$ ja että muuttuja $x \in E$. Yhtälön (3.15) perusteella funktion arvo $f_n(x)$ kuuluu avoimelle välille $(f_m(x) - \epsilon/2, f_m(x) + \epsilon/2)$ aina, kun indeksi $n \geq N$. Näin ollen raja-arvo $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ kuuluu suljetulle välille $[f_m(x) - \epsilon/2, f_m(x) + \epsilon/2]$. Siis

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon/2$$

aina, kun $x \in E$ ja $m \geq N$. Tällöin myös

$$|f(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

aina, kun $x \in E$ ja $m \geq N$.

Näin tasaisen suppenemisen määritelmän 3.8 mukaisesti funktiojono $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti joukossa E kohti rajafunktiota f. □

Esitämme vielä esimerkin edelliseen apulauseeseen 3.13 liittyen.

Esimerkki 3.8. Tarkastellaan funktiojonoa $\{f_n\} : (0, 1) \to \mathbb{R}$, kun $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. Olkoon luku $\epsilon > 0$, luonnollinen luku $N > 1/\epsilon$ ja indeksit $n, m \geq N$, $m > n$.

Tutkitaan erotusta $|f_n(x) - f_m(x)|$. Nythän

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &= |\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+mx}| = |\frac{1}{1/x+n} - \frac{1}{1/x+m}| \\ &= |\frac{m-n}{1/x^2 + m/x + n/x + nm}|\end{aligned}$$

Koska luvut $1/x^2$, m/x, n/x, n ja m ovat positiivisia, voimme arvioida

$$|\frac{m-n}{1/x^2 + m/x + n/x + nm}| < |\frac{m-n}{mn}|.$$

Tästä edelleen saamme

$$|\frac{m-n}{mn}| = |1/n - 1/m| < 1/n \leq 1/N < \epsilon.$$

Näin ollen lauseen 3.13 perusteella jono funktioita $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ suppenee tasaisesti avoimella välillä $(0,1)$, kun $n \to \infty$.

3.2.5 Lause derivaatan ja raja-arvon järjestyksen vaihtamisesta

Seuraava tulos koskee raja-arvon ja derivaatan järjestyksen vaihtamista.

Lause 3.14. *Olkoon avoin väli (a,b) rajoitettu. Olkoon $\{f_n\}$ funktiojono, joka suppenee jollain muuttujan x arvolla $x_0 \in (a,b)$. Jos jokainen funktio f_n on derivoituva välillä (a,b) ja funktiojono $\{f'_n\}$ suppenee tasaisesti välillä (a,b), kun $n \to \infty$, niin*

(i) *funktiojono $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti välillä (a,b),*

(ii) *jokaiselle alkiolle $x \in (a,b)$, $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 402–403] ja [4, s. 187–188])
Todistetaan ensin väitteen kohta (i).

Kiinnitetään luku $c \in (a,b)$. Olkoon n luonnollinen luku. Määritellään uusi funktiojono $\{g_n\}$ seuraavasti:

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}, & \text{kun} \quad x \neq c, \\ f'_n(c), & \text{kun} \quad x = c. \end{cases} \tag{3.16}$$

Huomataan, että

$$f_n(x) = f_n(c) + (x-c)g_n(x), \quad \text{kun} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad x \in (a,b). \tag{3.17}$$

Todistetaan seuraavaksi, että funktiojono $\{g_n\}$ suppenee tasaisesti välillä (a,b).

Olkoon luku $\epsilon > 0$, olkoot n ja m luonnollisia lukuja ja olkoon luku $x \in (a, b)$. Tarkastellaan erotusta $g_n(x) - g_m(x)$, kun $x \neq c$. Funktiojonon $\{g_n\}$ määritelmän mukaan voimme kirjoittaa

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - \frac{f_m(c) - f_m(c)}{x - c}. \tag{3.18}$$

Väliarvolauseen 2.12 perusteella on olemassa luku ξ lukujen x ja c välissä siten, että voimme kirjoittaa yhtälön (3.18) muotoon

$$\begin{aligned} g_n(x) - g_m(x) &= \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - \frac{f_m(c) - f_m(c)}{x - c} \\ &= \frac{f_n'(\xi)(x - c)}{x - c} - \frac{f_m'(\xi)(x - c)}{x - c} \\ &= f_n'(\xi) - f_m'(\xi). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Yhtälön (3.19) avulla voimme kirjoittaa

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|,$$

ja edelleen koska jono $\{f_n'\}$ suppenee tasaisesti oletuksen mukaan välillä (a, b), on olemassa sellainen indeksi $N_1 \in \mathbb{N}$, että kun $n, m \geq N_1$, saamme

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \overset{(1)}{<} \frac{\epsilon}{2(b - a)}. \tag{3.20}$$

Tässä muuttuja $x \in (a, b)$ ja $x \neq c$. Erotus $(b - a) < \infty$, sillä väli (a, b) on rajoitettu. Kohdassa (1) hyödynnämme apulausetta 3.13. Funktiojono $\{g_n\}$ suppenee siis tasaisesti välillä (a, b), kun $x \neq c$. Yhtälö (3.20) on voimassa myös silloin, kun $x = c$. Tämä seuraa siitä, että $g_n(c) = f_n'(c)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis funktiojono $\{g_n\}$ suppenee tasaisesti välillä (a,b) aina, kun $c \in (a, b)$. Näin olemme todistaneet väitteen.

Nyt osoitamme lopulta, että funktiojono $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti välillä (a, b). Funktiojono $\{g_n\}$ suppenee tasaisesti, kun $n \to \infty$, kuten edellä todistimme. Oletuksen perusteella jono $f_n(x_0)$ suppenee. Siis on olemassa sellainen indeksi $N_2 \in \mathbb{N}$, että kun $n, m \geq N_2$, niin

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon/2. \tag{3.21}$$

Toisaalta, kun $c = x_0$, yhtälö (3.17) on voimassa, ja kuuluu seuraavasti

$$f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)g_n(x). \tag{3.22}$$

Edellinen yhtälö on voimassa kaikilla $x \in (a, b)$. Nyt tutkimme itseisarvoa $|f_n(x) - f_m(x)|$. Saamme kirjoitettua edellisen itseisarvon yhtälön (3.22) avulla muotoon

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)[g_n(x) - g_m(x_0)]|.$$

Nyt voimme arvioida edellistä lauseketta ylöspäin käyttäen ensin kolmioepäyhtälöä kohdassa (2), ja sitten yhtälöitä (3.20) ja (3.21) kohdassa (3). Siis

$$\begin{aligned}
&|f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)[g_n(x) - g_m(x_0)]| \\
\overset{(2)}{\leq}\ &|f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |(x - x_0)[g_n(x) - g_m(x_0)])| \\
&\overset{(3)}{<} \epsilon/2 + (b-a)\frac{\epsilon}{2(b-a)} = \epsilon,
\end{aligned}$$

kun $n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$. Apulauseen 3.13 perusteella funktiojono $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti välillä (a, b). Näin on kohta (i) todistettu.

Nyt todistamme väitteen kohdan (ii). Kiinnitetään luku c avoimelta väliltä (a, b). Määritellään funktiot f ja g avoimella välillä (a, b) seuraavasti:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{ja}$$

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Siis $(\lim_{n\to\infty} f_n(c))' = f'(c)$.

Meidän tulee nyt osoittaa, että

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} f_n'(c). \tag{3.23}$$

Koska jokainen funktio g_n on jatkuva pisteessä c ja funktiojono $\{g_n\}$ suppenee tasaisesti välillä (a, b), lauseen 3.11 perusteella funktio g on jatkuva pisteessä c. Koska $g_n(c) = f_n'(c)$ funktiojonon $\{g_n\}$ määritelmän, yhtälön (3.16) mukaan, yhtälön (3.23) oikea puoli voidaan kirjoittaa muotoon

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(c) = \lim_{n\to\infty} g_n(c) = g(c) \overset{(4)}{=} \lim_{x\to c} g(x). \tag{3.24}$$

Kohdassa (4) hyödynnetään tietoa funktion g jatkuvuudesta.

Toisaalta jos $x \neq c$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \overset{(5)}{=} \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x).$$

Kohta (5) seuraa funktiojonon $\{g_n\}$ määritelmästä (3.16). Näin ollen yhtälön (3.23) vasen puoli voidaan saattaa muotoon

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} g(x). \tag{3.25}$$

Näin ollen yhtälöistä (3.24) ja (3.25) seuraa, että yhtälön (3.23) vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret. Koska piste c oli valittu mielivaltaisesti, väite (ii) on todistettu.

Koska väitteet (i) ja (ii) on todistettu, lause on todistettu. □

Esitämme vielä edelliseen lauseeseen 3.14 liittyvän esimerkin.

Esimerkki 3.9. Ks. [2, s. 254, tehtävä 1]. Olkoon luku $n \in \mathbb{N}$ ja luku $x \in (-1, 1)$. Määritellään funktiojono $\{f_n(x)\}$ seuraavasti:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Osoitetaan, että funktiojono $\{f_n(x)\}$ suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota $f(x) = |x|$ avoimella välillä $(-1, 1)$, kun $n \to \infty$.

Olkoon luku $\epsilon > 0$ ja $x \in (-1, 1)$. Määritellään luku $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N > (\frac{1}{\epsilon})^2$. Olkoon vielä luku $n \geq N$. Tarkastellaan nyt erotusta

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x||.$$

Koska kyseinen neliöjuurilauseke ei ole negatiivinen, voimme kirjoittaa

$$|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|| = ||\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}| - |x||.$$

Nyt voimme edelleen arvioida

$$\begin{aligned} ||\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}| - |x|| &\overset{(1)}{\leq} |\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}| \\ &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \\ &\overset{(2)}{\leq} \sqrt{1/n} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Kohdassa (1) hyödynnetään tietoa siitä, että kyseinen neliöjuurilauseke on suurempi kuin muuttujan x itseisarvo. Kohdassa (2) hyödynnetään havaintoa siitä, että luku x^2 on ei-negatiivinen. Koska oletuksen mukaan luku $n \geq N$ ja luku $N > (\frac{1}{\epsilon})^2$, voimme arvioida edelleen

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \frac{1}{\sqrt{1/\epsilon^2}} = \epsilon.$$

Siispä

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{aina, kun} \quad x \in (-1, 1), n \geq N$$

Näin ollen määritelmän 3.8 mukaisesti funktiojono $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota f.

Lisäksi jokainen funktio f_n on jatkuvasti derivoituva välillä $(-1, 1)$, sillä

$$f_n'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}},$$

mutta rajafunktio f ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$. Nyt hätäisesti ajatellen näyttäisi siltä, että esimerkkimme olisi ristiriidassa lauseen 3.2.5 kanssa. Tämän esimerkin tapauksessa

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} = 1,$$

joka on jatkuvasti derivoituva funktio. Kuitenkaan tämä suppeneminen ei ole tasaista, eivätkä lauseen 3.2.5 oletukset täyty. Kun valitsemme $\epsilon = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, ja luvun $n \in \mathbb{N}$, sekä merkitsemme $x = \sqrt{1/n}$, saamme

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1| = |\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1| \\
&= |\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1/n}{x^2}} - 1}| = |\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{nx^2}}} - 1| \\
&= |\frac{1}{\sqrt{2}} - 1| = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Siis funktiojono $\{f_n'(x)\}$ ei voi supeta tasaisesti määritelmän 3.8 perusteella.

Viitteet

[1] Apostol, Tom M., *Mathematival Analysis*. 5th ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.

[2] Fitzpatrick, Patrick M., *Advanced Calculus*. 2nd ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2006.

[3] Ross, Kenneth A., *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*. 4th ed. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1986.

[4] Wade, William R. *An Introduction to Analysis*. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 2000.