TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Anna-Riikka Paavola

Integraali ja yleistetty Pythagoraan lause

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Marraskuu 2008

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Paavola, Anna-Riikka: Integraali ja yleistetty Pythagoraan lause

Pro gradu -tutkielma, 52 s.

Matematiikka

Marraskuu 2008

Tiivistelmä

Käsittelen tutkielmassani integraaleja, integraalin sovelluksia ja yleistettyä Pythagoraan lausetta. Kappaleessa 2 käydään läpi integraaliin liittyviä lauseita ja määritelmiä, sekä lasketaan esimerkkejä pinta-alasta ja tilavuuksista. Kappaleessa 3 todistetaan Pythagoraan lause, esitellään yleistyksiä Pythagoraan lauseesta, lasketaan esimerkkejä yleistetystä Pythagoraan lauseesta ja esitellään muutama yleistetystä Pythagoraan lauseesta johdettu lause.

Pääasiallisina lähteinä ovat olleet integraalilaskennassa Salaksen, Hillen ja Etgenin Calculus, yleistetyssä Pythagoraan lauseessa Fongin ja Wangin Calculus sekä artikkeleita yleistetystä Pythagoraan lauseesta.

Sisältö

1 Johdanto

Integraalilaskennasta on hyvin paljon sovelluksia. Se on kiinnostavaa siksi, että sen avulla voidaan laskea konkreettisia asioita, kuten kappaleiden tilavuuksia. Tässä tutkielmassani keskityn integraalin sovelluksista vain pieneen osaan, pinta-alan ja tilavuuden laskemiseen, sekä yleistettyyn Pythagoraan lauseeseen eli kosinilauseeseen.

Lukijan on hyvä olla perehtynyt matemaatiiseen esitystapaan, merkintöihin ja todistustekniikkaan. Tutkielman sisällön ymmärtäminen voi onnistua lukion pitkän matematiikan suorittaneelta, mutta varsinkin loppuosaa on helpompi lukea vasta matematiikan perus- tai aineopintojen jälkeen.

Kappaleessa 2 käydään läpi integraaliin liittyviä lauseita ja määritelmiä, sekä lasketaan esimerkkejä pinta-alasta ja tilavuuksista. Kappaleessa 3 todistetaan Pythagoraan lause, esitellään yleistyksiä Pythagoraan lauseesta, lasketaan esimerkkejä yleistetystä Pythagoraan lauseesta ja esitellään muutama yleistetystä Pythagoraan lauseesta johdettu lause. Esimerkit ovat lähdekirjojen tehtäviä, kirjan esimerkeistä muunneltuja esimerkkejä tai tutkielman kirjoittajan keksimiä tehtäviä.

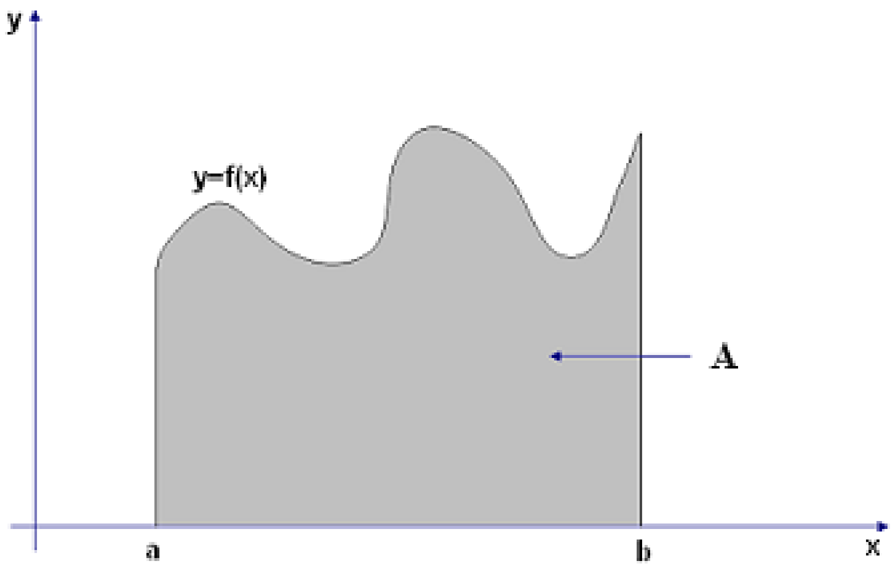
Pääasiallisena lähteenä kappaleen 2 integraalilaskennassa on ollut Salaksen, Hillen ja Etgenin Calculus ja kappaleessa 3 Fongin ja Wangin Calculus. Lisäksi tutkielman loppuosassa on käytetty lähteinä kahta artikkelia yleistetystä Pythagoraan lauseesta.

2 Integraali

Tässä koko integraalia käsittelevässä kappaleessa on käytetty lähdettä [5, s.262-343].

2.1 Pinta-ala

Pinta-alan A laskeminen voi olla hankalaa, jos jokin reunoista ei ole suora viiva vaan osa jonkin muunlaista jatkuvaa funktiota f. Kuvitellaan tilanne, jossa ala rajoittuu alhaalta x-akseliin, sivuilta kohtiin a ja b ja ylhäältä funktioon $y = f(x)$. Katso tilannetta kuvasta 1.



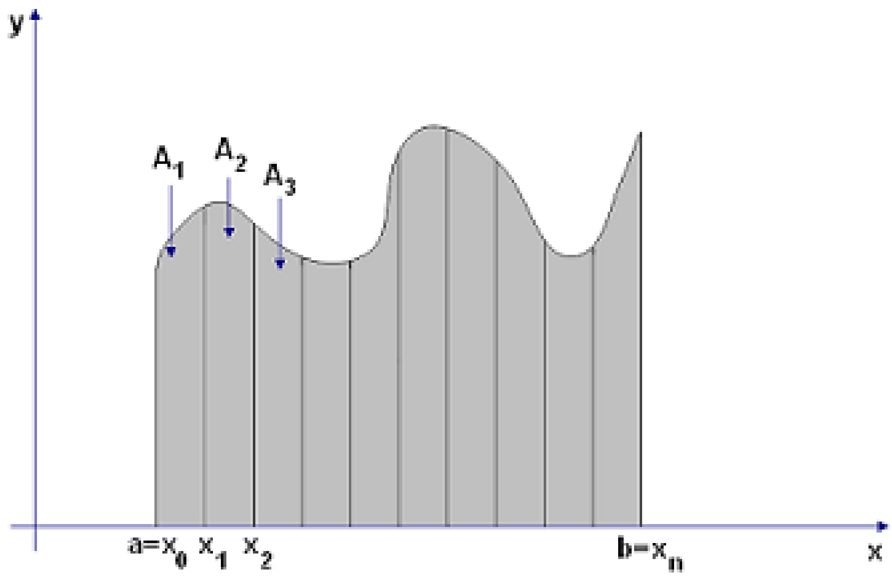
Kuva 1.

Pinta-alan määrittämistä varten jaetaan väli [a,b] äärelliseen määrään osavälejä

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n], \text{ jossa } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

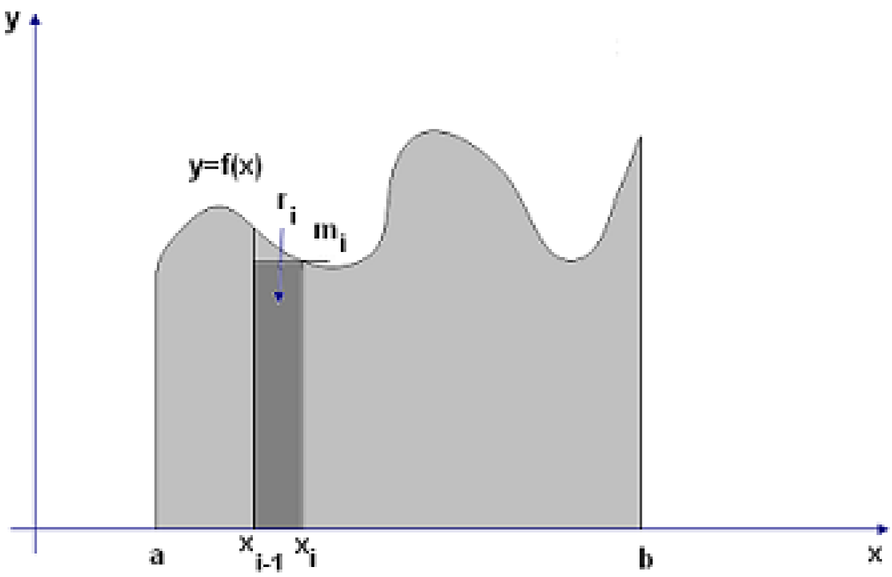
Tällöin alue A jakautuu n:ään osa-alueeseen, katso myös kuvaa 2

$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$



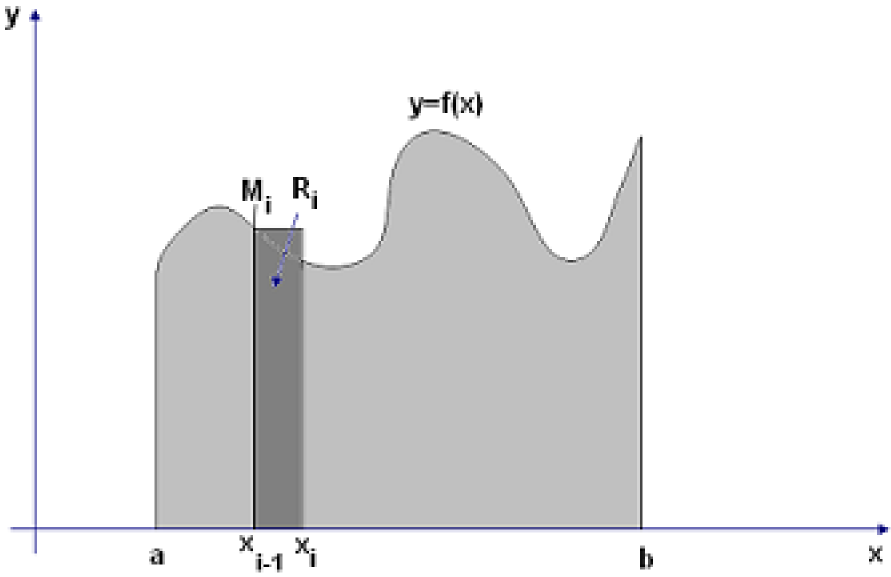
Kuva 2.

Nyt voidaan arvioida koko alueen A pinta-alaa arvioimalla osa-alueiden $A_1, \ldots, A_n$ alat ja laskemalla ne yhteen. Maksimiarvolla lasketusta pinta-alasta voi tulla suurempi kuin pinta-ala oikeasti on ja minimiarvolla lasketusta pinta-alasta voi tulla pienempi kuin oikea pinta-ala. Alueen oikean pinta-alan on oltava jossain minimi- ja maksimiarvoilla laskettujen pinta-alojen välissä. Merkitään kirjaimella M_i välin $[x_{i-1}, x_i]$ funktion maksimiarvoa ja kirjaimella m_i minimiarvoa.

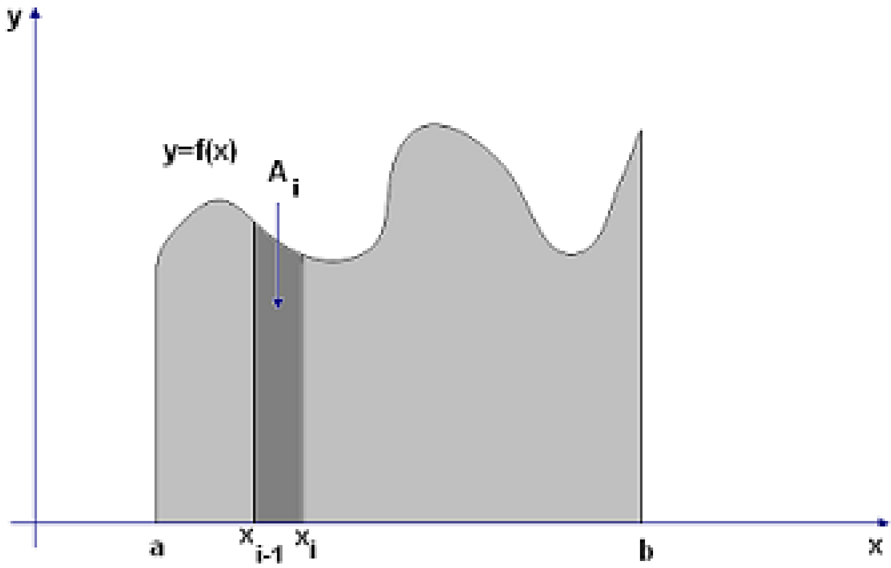


Kuva 3.

Minimiarvolla laskettu pinta-ala r_i on tummanharmaalla kuvassa 3. Maksimiarvolla laskettua pinta-alaa R_i on kuvattu tummanharmaalla kuvassa 4.



Kuva 4.



Kuva 5.

Kuvassa 5 näkyvä oikea pinta-ala A_i on maksimi- ja minimiarvolla laskettujen pinta-alojen välissä, merkitään seuraavasti

$$r_i \leq A_i \leq R_i.$$

Koska pinta-ala r_i lasketaan kaavalla $r_i = m_i(x_i - x_{i-1})$ ja pinta-ala R_i lasketaan kaavalla $R_i = M_i(x_i - x_{i-1})$, niin myös epäyhtälö

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq A_i \leq M_i(x_i - x_{i-1})$$

on voimassa. Merkitään $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, joten

$$m_i \Delta x_i \leq A_i \leq M_i \Delta x_i.$$

Tämä epäyhtälö pätee, kun $i = 1, 2, \ldots, n$. Laskemalla yhteen minimi- ja maksimiarvoilla lasketut pinta-alat i:n eri arvoilla saadaan

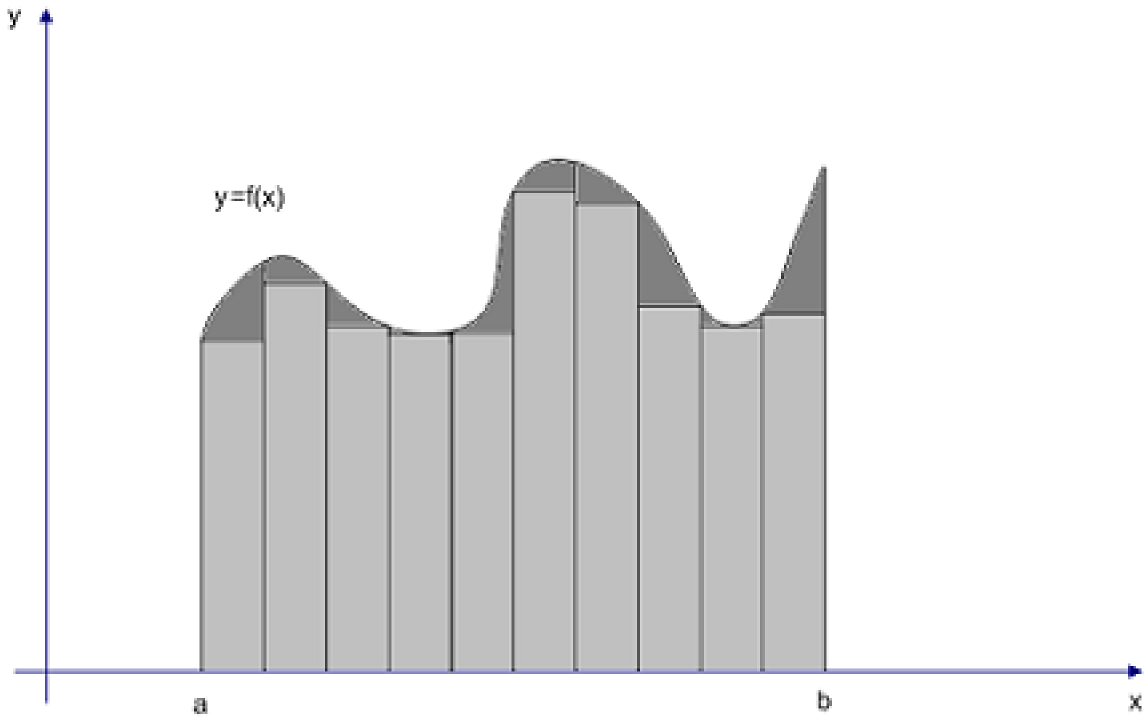
$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n \leq A \leq M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n.$$

Määritelmä 2.1. Osa-alueiden summaa

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n$$

kutsutaan funktion f *alasummaksi*.

Alasummaan kuuluva alue on merkitty vaaleanharmaalla kuvaan 6.



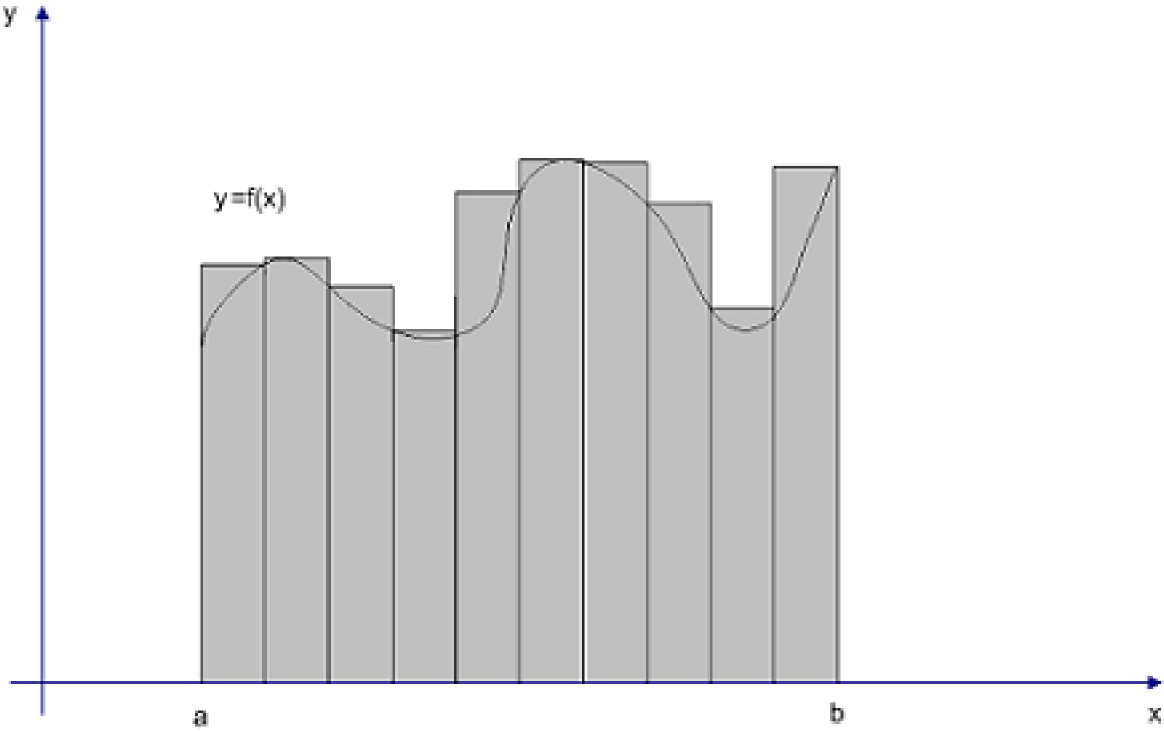
Kuva 6.

Määritelmä 2.2. Osa-alueiden summaa

$$M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n$$

kutsutaan funktion f *yläsummaksi*.

Sitä on kuvattu vaaleanharmaalla kuvassa 7.



Kuva 7.

Jatkuvalle funktiolle f on olemassa vain yksi oikea pinta-ala, se on suurempi kuin määritelmässä 2.1 määritelty alasumma ja pienempi kuin määritelmässä 2.2 määritelty yläsumma.

2.2 Jatkuvan funktion määrätty integraali

2.2.1 Määrätty integraali

Määritelmä 2.3. Välin $[a, b]$ *osituksella* tarkoitamme välin $[a, b]$ *äärellistä osajoukkoa*, johon kuuluvat alkiot a ja b.

Alkiot kirjoitetaan niiden luonnollisessa järjestyksessä, joten jos

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ on välin } [a, b] \text{ ositus,}$$

niin siitä voidaan päätellä, että

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Jos $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$ on välin $[a, b]$ ositus, niin P jakaa välin $[a, b]$ n:ään osaväliin

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

joiden pituuksia merkitään symboleilla $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Oletetaan nyt, että f on jatkuva funktio välillä $[a, b]$. Silloin jokaisella osavälillä $[x_{i-1}, x_i]$ funktion f saa maksimiarvon M_i ja minimiarvon m_i.

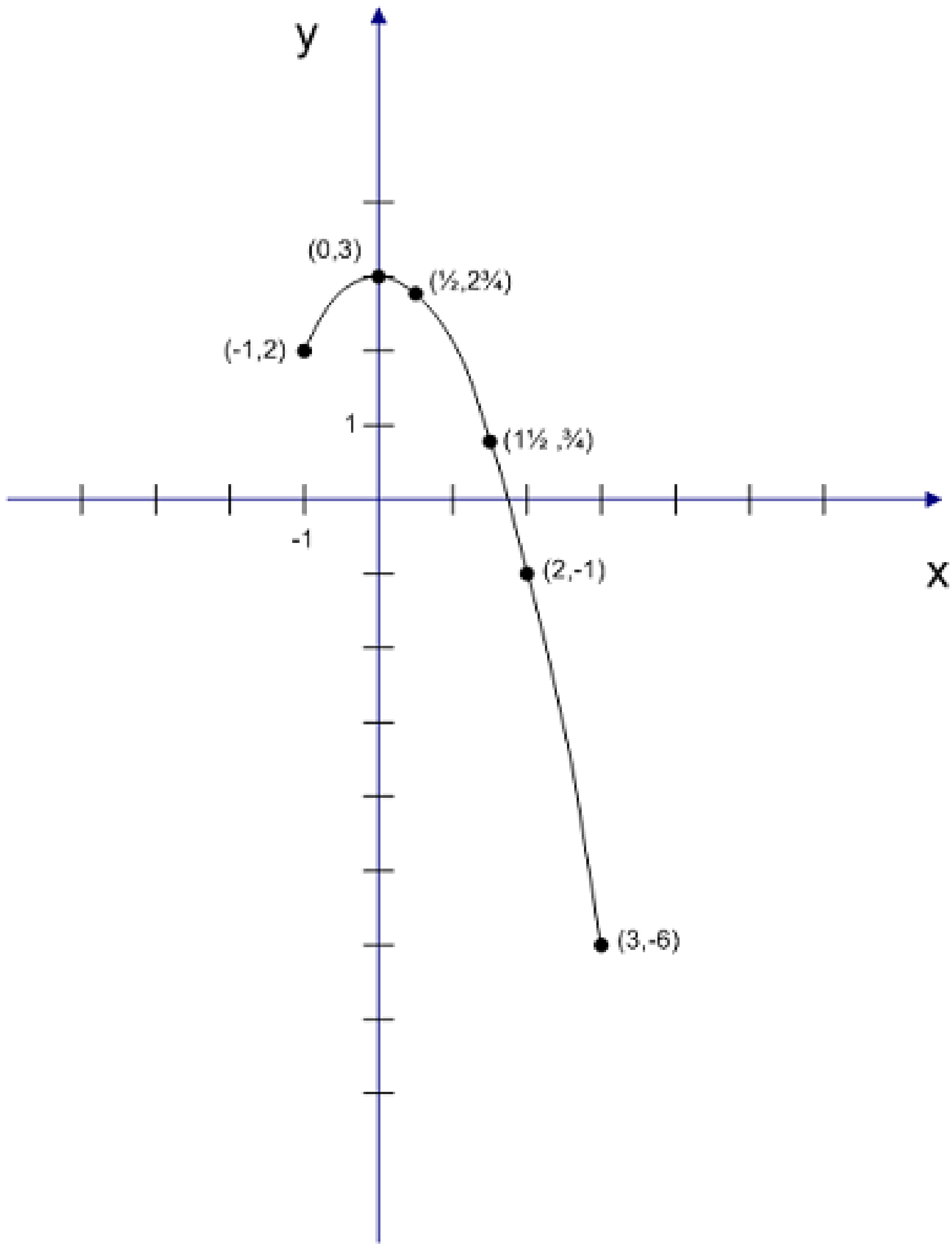
Määritelmä 2.4. Lukua $U_f(P) = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n$ kutsutaan funktion f *yläsummaksi* P, ja lukua $L_f(P) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n$ kutsutaan funktion f *alasummaksi* P.

Esimerkki 1. [5, s.267 olevan esimerkin tapaan]. Funktio $f(x) = 3 - x^2$ on jatkuva välillä $[-1, 3]$. Ositus $P = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$ jakaa välin $[-1, 3]$ neljään osaväliin

$$[x_0, x_1] = \left[-1, \frac{1}{2}\right],\ [x_1, x_2] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],\ [x_2, x_3] = \left[\frac{3}{2}, 2\right],\ [x_3, x_4] = [2, 3],$$

joiden pituudet ovat

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2},\ \Delta x_2 = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ \Delta x_3 = 2 - \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2},\ \Delta x_4 = 3 - 2 = 1$$



Kuva 8.

Kuten kuvasta 8 näkyy, maksimiarvot ovat

$$M_1 = f\,(0) = 3 \text{ välillä } \left[-1, \frac{1}{2}\right], \; M_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4} \text{ välillä } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],$$

$$M_3 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \text{ välillä } \left[\frac{3}{2}, 2\right] \text{ ja } M_4 = f\left(2\right) = -1 \text{ välillä } \left[2,3\right].$$

Minimiarvot ovat

$$m_1 = f\left(-1\right) = 2 \text{ välillä } \left[-1, \frac{1}{2}\right], \; m_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \text{ välillä } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],$$
$$m_3 = f(2) = -1 \text{ välillä } \left[\frac{3}{2}, 2\right], \text{ja } m_4 = f(3) = -6 \text{ välillä } \left[2,3\right].$$

Sijoitetaan maksimi- ja minimiarvot ala- ja yläsumman kaavaan. Saadaan yläsummaksi

$$U_f(P) = 3(\frac{3}{2}) + \frac{11}{4}(1) + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}) + (-1)(1) = 6\frac{5}{8}$$

ja alasummaksi

$$L_f(P) = 2(\frac{3}{2}) + \frac{3}{4}(1) + (-1)(\frac{1}{2}) + (-6)(1) = -2\frac{3}{4}.$$

Määritelmä 2.5. Olkoon funktio f on määritelty välillä $[a, b]$. Silloin f on *integroituva* välillä $[a, b]$, jos on olemassa vain yksi luku I, jolle pätee epäyhtälö

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P)$$

kaikilla välin $[a, b]$ osituksilla. Tätä yksikäsitteistä lukua I kutsutaan funktion *f määrätyksi integraaliksi a:sta b:hen* ja sitä merkitään

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Esimerkki 2. Tehtävä:
Osoita ylä- ja alasummia käyttäen, että

$$0.5 < \int_1^2 \frac{dx}{x} < 1.$$

Vastaus:
Otetaan ositus $P = \left[1, \frac{3}{2}, 2\right]$ ja lasketaan ala- ja yläsumma. Alasumma lasketaan kaavasta

$$L_f\left(P\right) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2.$$

Nyt Δx_1 saadaan laskemalla $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ ja Δx_2 saadaan laskemalla $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Minimikohta välillä $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ on luvun $\frac{3}{2}$ kohdalla, joten minimi välillä $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ on

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Minimikohta välillä $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ on luvun 2 kohdalla, joten minimi välillä $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ on

$$f(2) = \frac{1}{2}.$$

Nyt alasummaksi saadaan

$$L_f(P) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Yläsumma lasketaan kaavasta

$$U_f(P) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2.$$

Maksimikohta välillä $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ on kohdassa 1, joten maksimi välillä $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ on

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Maksimikohta välillä $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ on kohdassa $\frac{3}{2}$, joten maksimi välillä $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ on

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Yläsumman arvoksi tulee

$$U_f(P) = 1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$0.5 < \frac{7}{12} < \int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{5}{6} < 1.$$

Siis koska

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

ja $L_f(P) < I < U_f(P)$, niin

$$0.5 < \int_1^2 \frac{dx}{x} < 1.$$

Lause 1. *Jos $f(x) = k$ on vakio kaikilla $x : n$ arvoilla välillä $[a, b]$, niin*

$$\int_a^b f(x)\, dx = k(b - a).$$

Todistus. Otetaan välille $[a, b]$ ositus $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Koska f on vakio, se saa jatkuvasti arvon k välillä $[a, b]$, täten se saa arvon k myös jokaisella osavälillä $[x_{i-1}, x_i]$. Siten myös M_i ja m_i ovat arvoltaan k. Siitä seuraa, että

$$\begin{aligned} U_f(P) &= k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + \ldots + k\Delta x_n \\ &= k(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) \\ &= k[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + + (x_n - x_{n-1})] \\ &= k(b - a) \end{aligned}$$

ja

$$L_f(P) = k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + \ldots + k\Delta x_n = k(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = k(b - a).$$

Tällöin pätee kaksoisepäyhtälö

$$L_f(P) \leq k(b - a) \leq U_f(P).$$

Koska epäyhtälö pätee kaikille välin $[a, b]$ P osituksille, voimme päätellä, että

$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b - a).$$

□

Jos $k > 0$, niin alue joka on vakiofunktion $f(x) = k$ kuvaajan alapuolella ja x-akselin yläpuolella on nelikulmio, jonka korkeus on k ja pituus välin $[a, b]$ pituus. Tällöin integraali antaa tämän alan pinta-alan. Jos $k < 0$ niin integraalin arvo on negatiivinen ja tällöin pinta-ala on integraalin itseisarvo.

Lause 2. *Olkoon $f(x) = x$ aina, kun $x \in [a, b]$. Tällöin*

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

Todistus. Olkoon välin $[a, b]$ mielivaltainen ositus $P = x_0, x_1, \dots, x_n$. Jokaisella osavälillä $[x_{i-1}, x_i]$ funktiolla $f(x) = x$ on maksimiarvo M_i ja minimiarvo m_i. Koska $f(x) = x$ on kasvava funktio, niin maksimiarvo sijaitsee välin oikeassa päätepisteessä ja minimiarvo vasemmassa päätepisteessä. Siispä jokaisella osavälillä $M_i = x_i$ ja $m_i = x_{i-1}$. Siitä seuraa, että

$$U_f(P) = x_1\Delta x_1 + x_2\Delta x_2 + \ldots + x_n\Delta x_n$$

ja

$$L_f(P) = x_0\Delta x_1 + x_1\Delta x_2 + \ldots + x_{n-1}\Delta x_n.$$

Jokaiselle indeksille i

$$x_{i-1} \leq \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \leq x_i, \text{ koska } x_{i-1} \leq x_i.$$

Kerrotaan epäyhtälö puolittain luvulla $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, jolloin

$$x_{i-1}\Delta x_i \leq \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \leq x_i \Delta x_i,$$

joka voidaan kirjoittaa

$$x_{i-1}\Delta x_i \leq \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) \leq x_i \Delta x_i.$$

Kun summataan kaikki indeksit 1:stä n:ään, saadaan

$$x_0\Delta x_1 + \ldots + x_{n-1}\Delta x_n \leq \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + \ldots + \frac{1}{2}(x_n^2 - x_{n-1}^2) \leq x_1\Delta x_1 + \ldots + x_n \Delta x_n$$

$$\Leftrightarrow L_f(P) \leq \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + \ldots + \frac{1}{2}(x_n^2 - x_{n-1}^2) \leq U_f(P).$$

Keskellä oleva summa supistuu muotoon

$$\frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Siispä saadaan

$$L_f(P) \leq \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \leq U_f(P).$$

Koska P valittiin mielivaltaisesti, voimme päätellä, että epäyhtälö pätee kaikille osituksille P välillä $[a, b]$. Siitä seuraa, että

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

$\square$

2.2.2 Riemannin summa

Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Johdatuksessamme integraaliin huomasimme, että integraali

$$\int_a^b f(x)dx$$

on yksikäsitteinen luku, joka toteuttaa epäyhtälön

$$L_f(P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U_f(P)$$

kaikilla välin $[a, b]$ osituksilla. Tämä edellä esitetty metodi, jolla määritetään määrätty integraali haarukoimalla sitä kohti ylä- ja alasummilla on nimeltään *Darboux'n metodi*. On olemassa toinenkin usein käytetty tapa määrittää integraali, se esitetään seuraavaksi.

Otetaan ositus $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ väliltä $[a, b]$. Sitten jaetaan väli $[a, b]$ n:ään osaväliin

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, \left[x_(n-1), x_n\right]$$

joiden pituudet ovat

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n.$$

Valitaan piste x_1^* väliltä $[x_0, x_1]$ ja muodostetaan tulo $f(x_1^*)\,\Delta x_1$. Sitten valitaan piste x_2^* väliltä $[x_1, x_2]$ ja muodostetaan tulo $f(x_2^*)\,\Delta x_2$. Jatketaan näin kunnes saadaan kaikille väleille määriteltyä tulot, jotka ovat

$$f(x_1^*)\,\Delta x_1, f(x_2^*)\,\Delta x_2, \ldots, f(x_n^*)\,\Delta x_n.$$

Näiden tulojen summaa

$$S^*(P) = f(x_1^*)\,\Delta x_1 + f(x_2^*)\,\Delta x_2 + \ldots + f(x_n^*)\,\Delta x_n$$

kutsutaan *Riemannin summaksi.*

Lause 3. *[5, s.272]. Jos P on mikä tahansa välin $[a, b]$ ositus ja $S^*(P)$ on mikä tahansa sitä vastaava Riemannin summa, niin*

$$L_f(P) \leq S^*(P) \leq U_f(P).$$

Todistus. Tutkielman tekijä on itse laatinut tämän todistuksen. Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja P tämän välin jako n:ään osaväliin, jotka ovat $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$ ja joiden pituudet ovat $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Tällöin ala- ja yläsumma saadaan kaavoista

$$\begin{aligned} L_f(P) &= m_1(x_1 - a) + \ldots + m_n(b - x_{n-1}) \\ U_f(P) &= M_1(x_1 - a) + \ldots + M_n(b - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Valitaan pisteet $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ väleiltä $[a, x_1], [x_1, x_2]$ $, \ldots, [x_{n-1}, b]$. Tällöin on

$$S^*(P) = f(x_1^*)(x_1 - a) + \ldots + f(x_n^*)(b - x_{n-1}).$$

Nyt siis pitää paikkansa

$$\begin{aligned} L_f(P) &= m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_n \Delta x_n \\ U_f(P) &= M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_n \Delta x_n \\ S^*(P) &= f(x_1^*) \Delta x_1 + \ldots + f(x_n^*) \Delta x_n. \end{aligned}$$

Nyt on voimassa $m_1 \leq f(x_1^*) \leq M_1$ ja myös $m_n \leq f(x_n^*) \leq M_n$. Nyt koska Δx:t voidaan kertoa näihin kaksoisepäyhtälöihin niin saadaan

$$L_f(P) \leq S^*(P) \leq U_f(P).$$

□

Funktion f määrätty integraali voidaan esittää Riemannin summien raja-arvona. Mille tahansa välin $[a, b]$ jaolle P määritellään $||P||$, eli P:n *normi* asettamalla

$$||P|| = \max(\Delta x_i),\ 1 \leq i \leq n.$$

Jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\text{jos } \ ||P|| < \delta, \text{niin } \left| S^* (P) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \epsilon,$$

miten tahansa x_i^* valitaankin väliltä $[x_{i-1}, x_i]$. Integraali

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

voidaan nyt kirjoittaa tarkoittamaan, että

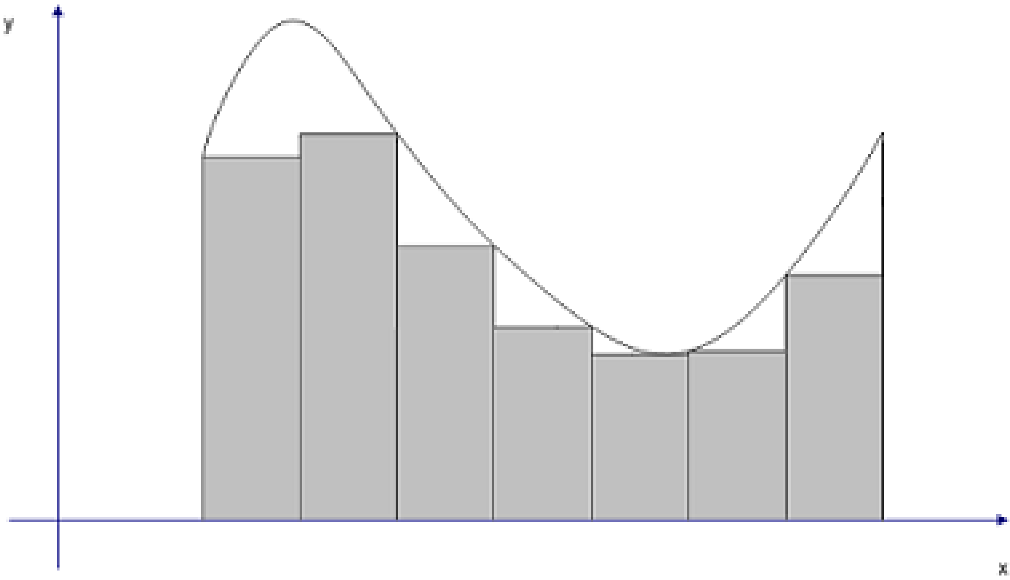
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{||P|| \to 0} \left[f(x_1^*)\, \Delta x_1 + f(x_2^*)\, \Delta x_2 + \ldots + f(x_n^*)\, \Delta x_n \right].$$

Lause 4. *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja olkoot P ja Q välin $[a, b]$ osituksia. Jos $P \subseteq Q$, niin*

$$L_f(P) \leq L_f(Q) \ \text{ ja } U_f(Q) \leq U_f(P).$$

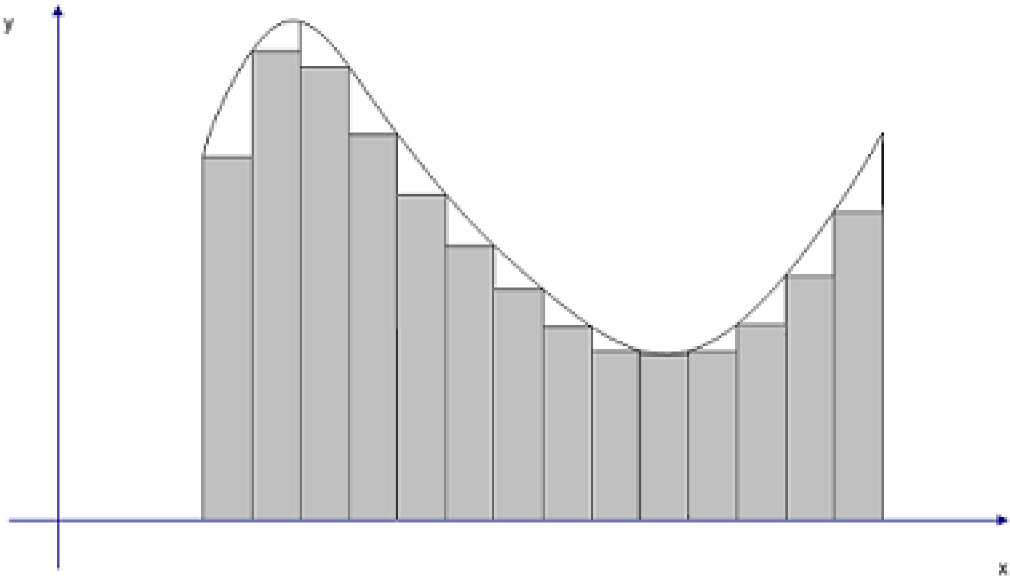
Todistus. Tutkielman tekijä on itse muotoillut todistuksen, [5, s.277] perusteella. Todistus on havainnollinen, kuviin perustuva. Täsmällinen todistus sivuutetaan.

Koska $P \subseteq Q$, niin silloin jakoon P kuuluu vähemmän tai yhtä paljon pisteitä kuin jakoon Q. Tällöin jos alasumma lasketaan jaon P mukaan, niin osavälejä on vähemmän tai yhtä paljon, kuin jaon Q mukaan tehtyjä alueita, kuten kuvista 9 ja 10 näkyy.



Kuva 9.

Jako kuvassa 9 on tehty osituksen P mukaan.



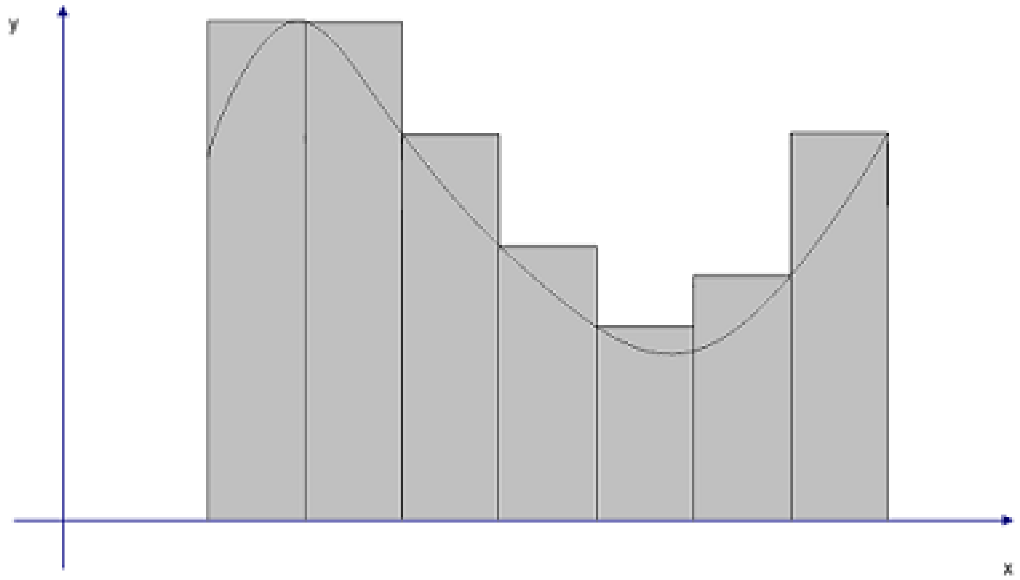
Kuva 10.

Jako kuvassa 10 on tehty osituksen Q mukaan.
Kuvista 9 ja 10 nähdään, että harmaa pinta-ala on pienempi kuvassa 9, kun jako on tehty osituksen P mukaan, kuin jos se on tehty osituksen Q mukaan, kuten kuvassa 10. Pinta-alat voivat olla yhtä suuret, jos ositukset P ja Q ovat

samat. Tällöin siis alasumma jaon P mukaan laskettuna on joko pienempi tai yhtä suuri kuin jaon Q mukaan laskettu alasumma, eli

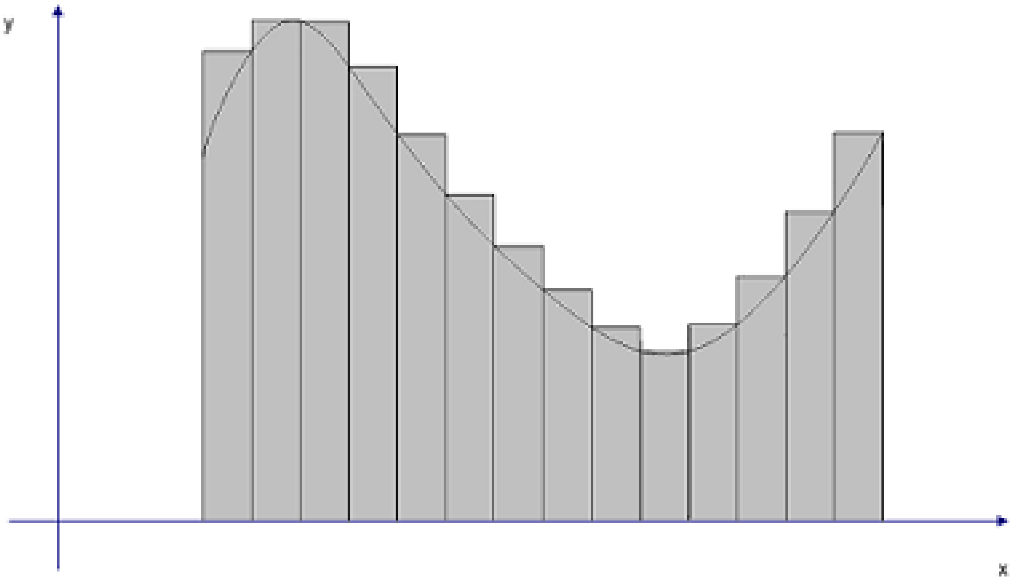
$$L_f\,(P) \leq L_f\,(Q)\,.$$

Myös jos yläsumma lasketaan jaon P mukaan, niin osavälejä on vähemmän tai yhtä paljon, kuin jaon Q mukaan tehtyjä alueita, kuten kuvista 11 ja 12 näkyy.



Kuva 11.

Jako kuvassa 11 on tehty osituksen P mukaan.



Kuva 12.

Jako kuvassa 12 on tehty osituksen Q mukaan.
Kuvista 11 ja 12 nähdään, että pinta-ala on suurempi tai yhtä suuri kuvassa 11 kuin kuvassa 12, kun kuvassa 11 pinta-ala on laskettu osituksen P mukaan ja kuvassa 12 osituksen Q mukaan. Tällöin yläsumma jaon P mukaan laskettuna on suurempi tai yhtä suuri kuin jaon Q mukaan laskettu yläsumma, eli

$$U_f(Q) \leq U_f(P).$$

□

Lause 5. *Jos funktio f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja $a < c < b$, niin*

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Todistus. Todistaaksemme tämän lauseen meidän täytyy ainoastaan näyttää, että jokaiselle välin $[a,b]$ P-ositukselle pätee kaksoisepäyhtälö

$$L_f(P) \leq \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \leq U_f(P).$$

Määrätyn integraalin määritelmän 2.5 mukaan tällöin on voimassa myös

$$L_f(P) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq U_f(P).$$

Me aloitamme välin $[a,b]$ mielivaltaisella jaolla

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}.$$

Koska jako $Q = P \cup \{c\}$ sisältää joukon P, tiedämme lauseen neljä perusteella, että

$$L_f(P) \leq L_f(Q) \text{ ja } U_f(P) \leq U_f(P).$$

Joukot

$$Q_1 = Q \cap [a, c] \text{ ja } Q_2 = Q \cap [c, b]$$

ovat välien $[a, c]$ ja $[c, b]$ osituksia. Lisäksi voidaan päätellä, että

$$L_f(Q_1) + L_f(Q_2) = L_f(Q) \text{ ja } U_f(Q_1) + U_f(Q_2) = U_f(Q). \tag{2.1}$$

Koska

$$L_f(Q_1) \leq \int_a^c f(t)\,dt \leq U_f(Q_1) \text{ ja } L_f(Q_2) \leq \int_c^b f(t)\,dt \leq U_f(Q_2),$$

niin yhdistämällä kaksoisepäyhtälöt saadaan

$$L_f(Q_1) + L_f(Q_2) \leq \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \leq U_f(Q_1) + U_f(Q_2).$$

Yhtälön (2.1) perusteella saadaan

$$L_f(Q) \leq \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \leq U_f(Q).$$

Lauseen 4 perusteella

$$L_f(P) \leq L_f(Q) \leq \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \leq U_f(Q) \leq U_f(P).$$

Siis tästä päästään lopputulokseen

$$L_f(P) \leq \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \leq U_f(P).$$

$\square$

Määritelmä 2.6. $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Määritelmä 2.7. $\int_c^c f(t)dt = 0$

Määritelmä 2.8. Olkoon $f : A \to R$ ja $x_0 \in (a, b) \subseteq A$. Funktion f derivaatta on f', jonka arvo kohdassa x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tai yhtäpitävästi

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

jossa $x = x_0 + \Delta x$. Yleisesti ottaen, derivaatan määritelmä voidaan kirjoittaa myös seuraavasti. Funktion f derivaatta missä tahansa pisteessä $x \in (a, b) \subseteq A$ on

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Jos derivaatta $f'(x_0)$ on olemassa, niin sanomme, että funktiolla f on derivaatta tai se on derivoituva pisteessä x_0. Jos funktiolla f on derivaatta jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä, sen sanotaan olevan derivoituva.

Lause 6. *Olkoon $p > 0$. Oletetaan, että kaikilla x:llä, joilla $0 < |x - c| < p$ on voimassa*

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

Jos

$$\lim_{x \to c} h(x) = L \text{ ja } \lim_{x \to c} g(x) = L,$$

niin

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon $p > 0$ siten, että

$$\text{jos } 0 < |x - c| < p, \text{ niin } h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

Valitaan δ_1 siten, että

$$\text{jos } 0 < |x - c| < \delta_1, \text{ niin } L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Valitaan δ_2 siten, että

$$\text{jos } 0 < |x - c| < \delta_2, \text{ niin } L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon.$$

Olkoon $\delta = \min\{p, \delta_1, \delta_2\}$. Kun x toteuttaa ehdon $0 < |x - c| < \delta$,niin

$$L - \epsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < L + \epsilon.$$

Siis on myös oltava

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

□

Lause 7. *Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$. Funktio F, joka on määritelty välillä $[a, b]$ kaavalla*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

on jatkuva välillä $[a, b]$, differentioituva avoimella välillä (a, b) ja sillä on derivaatta

$$F'(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in (a, b)$.

Todistus. Aloitamme niin, että x kuuluu puoliavoimelle välille $[a,b)$ ja osoitamme, että

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x).$$

Jos $x<x+h\leq b$, niin

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt.$$

Siitä seuraa, että

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h}f(t)dt \tag{2.2}$$

koska

$$\begin{aligned}&\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\\ &=F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))\\ &=F(x+h)-F(x)\\ &=\int_x^{x+h}f(t)dt.\end{aligned}$$

Nyt asetetaan

$$M_h=\text{funktion } f\text{maksimiarvo välillä } [x,x+h]$$

ja

$$m_h=\text{funktion } f\text{minimiarvo välillä } [x,x+h]\,.$$

Koska

$$M_h\left[(x+h)-x\right]=M_h\cdot h$$

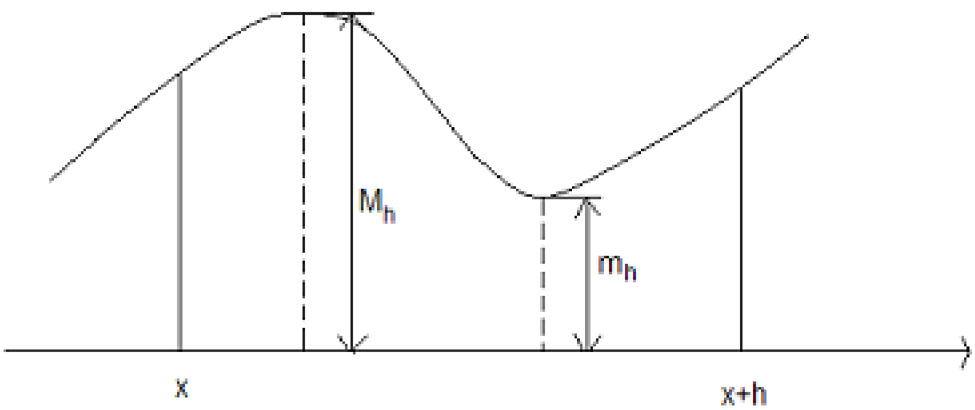
on funktion f yläsumma välillä $[x,x+h]$ ja

$$m_h\left[(x+h)-x\right]=m_h\cdot h$$

on funktion f alasumma välillä $[x,x+h]$, niin

$$m_h\cdot h\leq\int_x^{x+h}f\left(t\right)dt\leq M_h\cdot h.$$

Katso tilannetta kuvasta 13.



Kuva 13.

Nyt, käyttämällä tämän todistuksen yhtälöä (2.2) ja tietoa $h > 0$ seuraa, että

$$m_h \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_h.$$

Myös koska f on jatkuva välillä $[x, x+h]$ ja

$$\lim_{h \to 0^+} m_h = f(x) = \lim_{h \to 0^+} M_h,$$

niin

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \tag{2.3}$$

lauseen 6 perusteella. Samalla tavalla kuin todistimme puoliavoimelle välille $[a, b)$, voimme todistaa myös toiselle puoliavoimelle välille $(a, b]$, että kun $x \in (a, b]$, niin

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \tag{2.4}$$

Kun x kuuluu avoimelle välille (a, b), yhtälöt (2.3) ja (2.4) pitävät paikkansa ja

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Tämä todistaa, että F on differentioituva välillä (a, b) ja sillä on derivaatta $F'(x) = f(x)$. Kaiken tämän jälkeen tarvitsee vielä todistaa, että F on jatkuva oikealta pisteessä a ja vasemmalta pisteessä b. Raja-arvo (2.3), kohdassa $x = a$ on

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f(a).$$

Kun $h > 0$, niin

$$F(a+h) - F(a) = \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \cdot h,$$

joten

$$\lim_{h \to 0^+} [F(a+h) - F(a)] = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{F(a+h) - F(a)}{h} \cdot h \right) = f(a) \cdot \lim_{h \to 0^+} = 0.$$

Siksi

$$\lim_{h \to 0^+} F(a+h) = F(a)$$

on voimassa. Tämän perusteella F on jatkuva oikealta pisteessä a. Jatkuvuus vasemmalta pisteessä b voidaan näyttää sijoittamalla yhtälöön (2.3) x=b. $\square$

Määritelmä 2.9. Antiderivaatan määritelmä
Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$. Funktiota G kutsutaan *antiderivaataksi* funktiolle f välillä $[a, b]$ jos

$$G \text{ on jatkuva välillä } [a, b] \text{ ja } G'(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in (a, b).$$

Aiemmin on todettu, että jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

on funktion f integraalifunktio välillä $[a, b]$. Nyt siis tiedämme, että funktion f antiderivaatta saadaan integroimalla funktio f.

Lause 8. *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Jos funktio G on funktion f antiderivaatta välillä $[a, b]$ niin*

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a).$$

Todistus. Määritelmän 2.9 perusteella tiedämme, että funktio

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

on antiderivaatta funktiolle f välillä $[a, b]$. Jos G on myös antiderivaatta funktiolle f välillä $[a, b]$, niin molemmat funktiot F ja G ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja $F'(x) = G'(x)$ kaikilla $x \in (a, b)$. On olemassa sellainen vakio C, että

$$F(x) = G(x) + C \text{ kaikilla } x \in [a, b].$$

Koska $F(a) = 0$,

$$G(a) + C = 0 \text{ ja } C = -G(a).$$

Siitä seuraa, että

$$F(x) = G(x) - G(a) \text{ kaikilla } x \in [a,b].$$

Erityisesti

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = G(b) - G(a)$$

$\square$

2.3 Esimerkkejä pinta-alan laskemisesta

Esimerkki 3. Lasketaan funktion $f(x) = 5 - 3x^2$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala.
Lasketaan ensin x-akselin leikkauspisteet. Funktion f kuvaaja leikkaa x-akselin, kun $y = 0$, joten ratkaistaan $5 - 3x^2 = 0$. Ratkaistaan toisen asteen yhtälö

$$\begin{aligned}
5 - 3x^2 &= 0 \\
3x^2 &= 5 \\
x^2 &= \frac{5}{3} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{5}{3}}.
\end{aligned}$$

Leikkauskohdat ovat $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ja $-\sqrt{\frac{5}{3}}$. Pinta-ala lasketaan siis seuraavasti

$$\begin{aligned}
&\int_{-\sqrt{5/3}}^{\sqrt{5/3}} (5 - 3x^2)dx \\
&= \left[5x - x^3\right]_{-\sqrt{5/3}}^{\sqrt{5/3}} \\
&= \left[(5\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}) - (-5\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}})\right] \\
&= 10\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}
\end{aligned}$$

Jos toinen rajoittava suora ei olekaan x-akseli, vaan halutaan laskea kahden funktion väliin jäävän alueen pinta-ala, niin se voidaan laskea vähentämällä isommasta pinta-alasta pienempi pinta-ala. Jos siis funktio $f(x) = 4$ ja $g(x) = 2$, niin niiden väliin välillä $[a,b]$ jäävä pinta-ala lasketaan $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

Esimerkki 4. Lasketaan funktioiden $f(x) = -x+2$ ja $g(x) = x^2$ väliin jäävä pinta-ala. Lasketaan ensin funktioiden leikkauskohdat,

$$\begin{aligned} x^2 &= -x+2 \\ x^2+x-2 &= 0. \end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2)}}{2} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x &= \frac{-1 \pm 3}{2} \\ x &= 1 \text{ tai } x = -2. \end{aligned}$$

Pinta-ala saadaan laskettua seuraavasti

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^{1} \left[(-x+2) - x^2\right] dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} \\ &= \left[\frac{-1}{2} + 2 - \frac{1}{3} - (\frac{-2^2}{2} - 4 - \frac{-8}{3})\right] \\ &= 1\frac{1}{6} + 6 - \frac{8}{3} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Esimerkki 5. Lasketaan sellaisen alueen pinta-ala, jota rajoittaa alhaalta funktio $f(x) = \sin\, x$ ja ylhäältä funktio $g(x) = \cos\, x$, x-akselin välillä $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Se lasketaan seuraavasti

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\cos\, x - \sin\, x] \\ &= [\sin\, x + \cos\, x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - [\sin(-\frac{3\pi}{4}) + \cos(-\frac{3\pi}{4})] \\ &= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Esimerkki 6. Lasketaan pinta-ala alueelle, jota esiintyy x-akselin molemmilla puolilla. X-akselilla alue rajoittuu välille $[-1, 4]$ ja funktio joka x-akselin kanssa aluetta rajoittaa on $f(x) = 3x - x^2$. Koska x-akselin alapuolelta pinta-alaa laskettaessa se tulee integraalista negatiivisena, sen eteen täytyy laittaa miinus-merkki, jotta saadaan oikea pinta-ala. Funktio f leikkaa x-akselin kohdissa $x = 0$ ja $x = 3$, joten siis x-akselin alapuolella ovat välit $[-1, 0]$ ja $[3, 4]$. Pinta-ala saadaan siis laskemalla

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-1}^{0}(-x^2+3x)dx + \int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx - \int_{3}^{4}(-x^2+3x)dx \\
&= -\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} - \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4} \\
&= 13\frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Esimerkki 7. Lasketaan seuraavaksi pinta-ala aluelle, jossa välin päätepisteinä olevat arvot ovat y:n arvoja (aiemmissa esimerkeissä päätepisteinä on ollut vaan x-akselin arvoja) ja jossa funktiot ovat muotoa $x = F(y)$. Funktiot, jotka rajoittavat aluetta ovat $f(y) = y^2$ ja $g(y) = -y + 2$. Funktiot leikkaavat toisensa pisteissä $(1, 1)$ ja $(4, -2)$. Pinta-ala saadaan laskettua seuraavasti

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1}\left[(-y+2) - y^2\right] dy \\
&= \left[-\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{1} \\
&= -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} - \left(-2 - 4 + \frac{8}{3}\right) \\
&= -3 + 8 - \frac{1}{2} \\
&= 5 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

2.4 u-sijoitus

Jos integraali näyttää todella vaikeasti laskettavalta, sen laskemiseen voidaan käyttää apukeinoja. Näistä yksi on u-sijoittaminen. Silloin sijoitetaan integroinnin ajaksi sisäfunktion tilalle u ja derivoidaan yhtälö $u =$*(sisäfunktio)*, lopussa sijoitetaan taas u:n tilalle alkuperäinen sisäfunktio.

Esimerkki 8. Laske integraali $\int (x^3 - 5)^5 (3x^2) dx$.
Tehdään u-sijoitus $u = x^3 - 5$, joten $du = 3x^2$.

$$
\begin{aligned}
&\int (x^3-5)^5 3x^2 dx \\
&= \int u^5 du \\
&= \frac{1}{6}u^6 + C \\
&= \frac{1}{6}(x^3-5)^6 + C.
\end{aligned}
$$

2.5 Tilavuuden laskeminen integraalilla

Jos pinta-ala $A(x)$ muuttuu, kun x muuttuu, niin tilavuus voidaan laskea seuraavasti, integroimalla $A(x)$ a:sta b:hen.

$$V = \int_b^a A(x)dx.$$

Jos kappaletta rajaa funktio ja kappale on x-akselin ympärillä sen tilavuus saadaan kaavasta

$$V = \int_b^a \pi \left[f(x)\right]^2 dx.$$

Vastaavasti jos kappale on y-akselin ympärillä tilavuus saadaan kaavasta

$$V = \int_c^d \pi \left[g(y)\right]^2 dy.$$

Esimerkki 9. [5, Tehtävä 27 a, s. 341]. Kappaleen pohja on ympyrä $x^2+y^2 = r^2$. Määritä kappaleen tilavuus, kun kohtisuorat läpileikkaukset x-akselin kanssa ovat neliöitä.
Ratkaisu : Tilavuus lasketaan kaavalla $V = \int_b^a A(x)dx$. Tästä $A(x) = (2y)^2 = 4y^2 = 4(r^2 - x^2)$ ja koska alue rajoittuu välille $[-r, r]$ tilavuus saadaan laskemalla

$$
\begin{aligned}
&\int_{-r}^{r} 4(r^2 - x^2)dx \\
&= \int_{-r}^{r} 4r^2 - 4x^2 dx \\
&= [4r^2 - \frac{4}{3}x^3]_{-r}^{r} \\
&= 4r^3 - \frac{4}{3}r^3 - \left(4r^2\left(-r\right) - \frac{4}{3}\left(-r\right)^3\right) \\
&= \frac{16}{3}.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 10. Olkoon alueen A rajoina suora $y = 4$ ja funktio $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Lasketaan tilavuus kappaleelle mikä syntyy, kun tämä alue A kierretään y-akselin ympäri seuraavasti

$$\begin{aligned} V &= \int_1^5 \pi[(y-1)^2]^2 dy \\ &= \pi \int_1^5 (y-1)^4 dy \\ &= \pi[\frac{(y-1)^5}{5}]_1^5 \\ &= \pi\left(\frac{4^5}{5}\right) \\ &= 204\frac{4}{5}\pi. \end{aligned}$$

Esimerkki 11. [5, Tehtävä 45. s. 342]. Olkoon funktio f määritelty näin $f(x) = x^{-2/3}$, kun $x > 0$.
a) Osoita, että funktion ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala välillä $x = 1$ ja $x = b$ saadaan laskettua yhtälöstä $A(b) = 3(b^{1/3} - 1)$.
Ratkaisu :

$$\begin{aligned} A(b) \quad &= \int_1^b x^{-2/3} dx \\ &= [3x^{\frac{1}{3}}]_1^b \\ &= 3b^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} \\ &= 3(b^{1/3} - 1). \end{aligned}$$

b) Osoita, että kun a-kohdassa määritelty alue kierretään x-akselin ympäri saadaan tilavuus laskettua yhtälöstä $V(b) = 3\pi(1 - b^{1/3})$.
Ratkaisu :

$$\begin{aligned} V(b) \quad &= \int_1^b \pi \left[x^{-2/3}\right]^2 dx \\ &= \pi \int_1^b x^{-4/3} dx \\ &= \pi[-3x^{-1/3}]_1^b \\ &= \pi - 3b^{-1/3} + 3^{-1/3} \\ &= 3\Pi(1 - b^{-1/3}). \end{aligned}$$

Jos pyörähdyskappaletta x-akselin ympäri rajaa molemmilta puolilta funktiot, ulkopuolella $y = f(x)$ ja sisäpuolella $y = g(x)$ voidaan sen tilavuus laskea Washerin metodilla

$$V = \int_a^b \pi([F(x)]^2 - [G(x)]^2)dx.$$

Jos taas pyörähdyskappaletta y-akselin ympäri rajaa molemmilta puolilta funktiot, ulkopuolella $x = f(y)$ ja sisäpuolella $x = g(y)$ voidaan sen tilavuus laskea Washerin metodilla

$$V = \int_c^d \pi([F(y)]^2 - [G(y)]^2)dy.$$

Esimerkki 12. [5, Tehtävä 48, s. 342] Olkoon funktio $f(x) = x^3$ ja $g(x) = x$. Lasketaan a) missä nämä funktiot leikkaavat, b) niiden väliin jäävä pinta-ala, c) sekä tilavuus kun tämä alue pyöräytetään x-akselin ympäri.
a) Ratkaistaan kolmannen asteen yhtälö

$$\begin{aligned} x^3 &= x \\ x^3 - x &= 0 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x^2 = 1 \\ x &= 0 \text{ tai } x = \pm 1. \end{aligned}$$

b) Lasketaan pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 x^3 - xdx + \int_0^1 x - x^3dx \\ &= /_{-1}^0 \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + /_0^1 \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \\ &= (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \quad (2.5) \end{aligned}$$

c) Lasketaan tilavuus

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^0 \pi([x^3]^2 - x^2)dx + \int_0^1 \pi(x^2 - [x^3]^2)dx \quad (2.6) \\ &= \pi/_{-1}^0 \frac{x^7}{7} - \frac{x^3}{3} + \pi/_0^1 \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \quad (2.7) \\ &= \pi\frac{-1}{7} - \frac{-1}{3} + \pi\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \quad (2.8) \\ &= \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

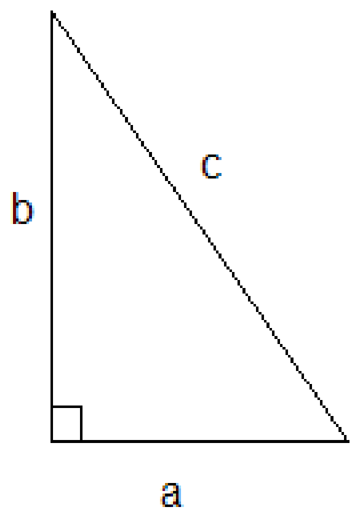
3 Yleistetty Pythagoraan lause

3.1 Pythagoraan lause

Lause 9. *Olkoon suorakulmaisen kolmion hypotenuusa c, lyhyempi kateetti a ja pidempi kateetti b, kuten kuvassa 14. Tällöin yhtälö*

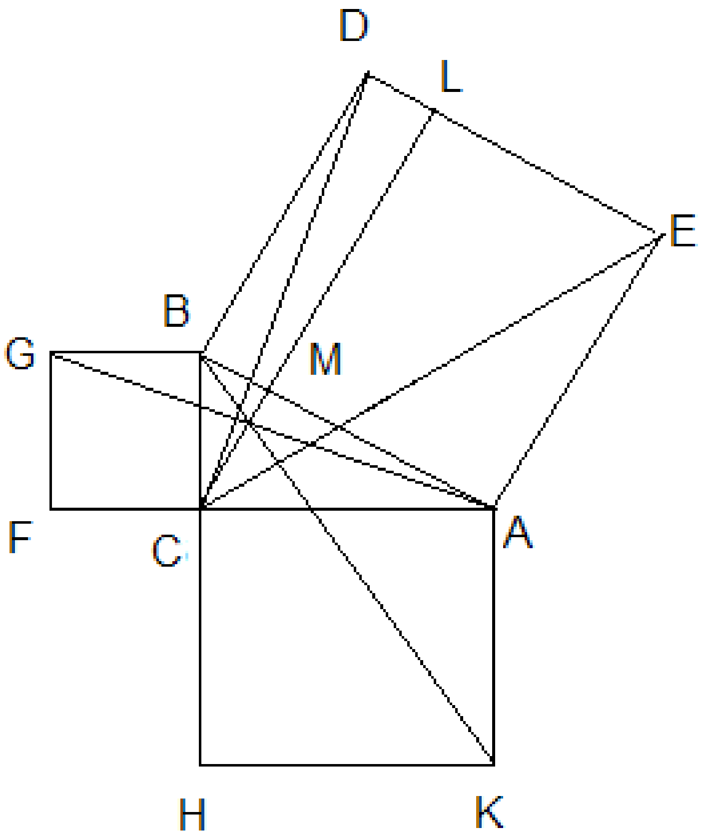
$$a^2 + b^2 = c^2$$

pitää paikkansa.



Kuva 14.

Todistus. Todistus Pythagoraan lauseelle Eukleideen ensimmäisen todistuksen tapaan, lähteenä olen käyttänyt Jim Moreyn laatimaa todistusta [3].



Kuva 15.

Todistus perustuu pinta-aloihin, isoimman neliön pinta-ala on yhtä suuri kuin kahden pienemmän neliön pinta-alojen summa. Kuvasta 15 nähdään miten neliöt rakentuvat suorakulmaisen kolmion ympärille ja miten kolmiot, joita todistuksessa käytetään sijoittuvat. Ensinnäkin $\Delta ABK = \Delta ACE$, koska $AC = AK$, $AB = AE$,

$$\angle BAK = \angle BAC + \angle CAK = \angle BAC + \angle EAB = \angle EAC$$

ja $\angle CAK = 90° = \angle EAB$. Kolmiolla ABK on kanta AK ja korkeus AC, koska $\angle BCA$ on suora kulma ja jos sivua AK jatkettaisiin, niin pisteestä B jatkeelle piirretty kohtisuora jana, olkoon se BN olisi saman pituinen kuin sivu AC. Tämän takia kolmion ABK pinta-ala

$$A_1 = \frac{AC \cdot AK}{2}$$

on puolet neliön $CAHK$

$$A_2 = AK \cdot AC$$

pinta-alasta. Toisaalta kolmiolla ACE on kanta AE ja korkeus AM, koska jos sivua EA jatkettaisiin ja siitä piirrettäisiin kohtisuora pisteestä O pisteen C

kautta, niin nämä janat OC ja AM olisivat samansuuntaiset ja yhtä pitkät. M on CL:n ja AB:n leikkauspiste, CL ja AE ovat yhdensuuntaisia. Nyt kolmion ACE pinta-ala

$$A_3 = \frac{AE \cdot AM}{2}$$

on siis puolet neliön $AMLE$

$$A_4 = AM \cdot AE$$

pinta-alasta. Se tarkoittaa, että neliöiden, jotka lähtevät sivuilta AC ja AM pinta-alat ovat samat. Samoin myös sivulta BC lähtevän neliön pinta-ala täsmää neliön $BDLM$ pinta-alan kanssa. Nyt siis neliöiden $BDLM$ ja $AMLE$ pinta-alat yhteensä vastaavat hypotenuusalta AB lähtevän neliön pinta-alaa, joten

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AM)^2 + (BM)^2 = (AB)^2.$$

□

3.2 Ensimmäinen yleistys Pythagoraan lauseesta

Tästä loppuun asti olen käyttänyt lähteenäni [2, Fongin ja Wangin tekemää Calculusta].

Pythagoraan lause on erittäin hyvin tunnettu lause. Melkein yhtä hyvin tunnetaan kuvio, jossa kateetit on nimetty a:ksi ja b:ksi, hypotenuusa c:ksi ja jonka ympärillä neliöt, jotka on piirretty kolmion sivuista, joiden sivujen pituudet ovat a,b ja c. Tätä kuviota käytetään Pythagoraan lauseen Eukleideen todistuksessa, joka esitettiin kappaleessa 3.1. Sitä tietoa, että nämä neliöt voidaan korvata ympyröillä, puoliympyröillä, samanlaisilla kolmioilla tai oikeastaan millä tahansa samankaltaisella kaksidimensioisella kuviolla, jolla kuvio saadaan "suljettua", ei kuitenkaan tunneta yhtä hyvin.

Nyt alamme tarkastelemaan yleistettyä Pythagoraan lausetta, yksi sellainen on nimeltään kosinilause.

Pythagoraan lause

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{3.1}$$

liittää yhteen suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet hypotenuusan pituuteen.

Kun kerrotaan yhtälön (3.1) molemmat puolet $\frac{\pi}{4}$:llä saadaan

$$\frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{4} = \frac{\pi c^2}{4},$$

mikä tarkoittaa samaa kuin kahden ympyrän, joiden halkaisijat ovat a ja b pinta-alojen summa yhtä kuin ympyrän, jonka halkaisija on c pinta-ala.

Jos kerrotaan Pythagoraan lause (3.1) $\frac{\pi}{8}$:lla saadaan

$$\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8},$$

mikä nyt vastaa puoliympyröiden, joiden halkaisijat ovat a, b ja c, pinta-aloja.

Ajatellaan sitten kolmiota, jossa on kulmat α, β ja γ, ja jonka kulman α vastakkaisen sivun pituus on x. Tällaisen kolmion pinta-ala on

$$K = \frac{x^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}.$$

Jos kerrotaan Pythagoraan lauseen (3.1) molemmat puolet luvulla $\frac{\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$, niin saadaan

$$\frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} + \frac{b^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{c^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha},$$

mikä liittää yhteen kolme kolmiota, joissa on yhtä suuret kulmat ja kulmaa α vastaavat sivut ovat pituudeltaan a, b ja c.

Nämä kolme viimeistä esimerkkiä ovat erityistapauksia paljon yleisemmästä tuloksesta. Nyt, että päästään siihen tarvitaan lisää huomioita ja määritelmiä.

Käytetään merkkiä $a > 0$ kuvauksessa, esimerkiksi f_a, g_a, F_a, ϕ_a, silloin funktio merkitsee reaalista jatkuvaa funktiota suljetulla välillä, määrittelyjoukkonaan $[0, a]$, esimerkiksi $f_a : [0, a] \to R$. Jos $a \neq b$, ja $f_a : [0, a] \to R$ ja $f_b : [0, b] \to R$, niin funktioista f_a, f_b ei tule päätellä niiden olevan samankaltaisia, esimerkiksi että $f_a(x) = f_b(x)$, kun $x \in [0, a] \cap [0, b]$. Voi olla, että $f_a(x) = e^x$, kun $x \in [0, a]$ ja $f_b(x) = \cos x$, kun $x \in [0, b]$, ja $a \neq b$. Siis

$$f_a : [0, a] \to R$$

tarkoittaa vain, että funktiolla f_a on määrittelyjoukkonaan $[0, a]$. Jos $a = b$, niin $f_a = f_b$.

Funktio f_a on *verrannollinen* (tai similaarinen) funktion f_b kanssa, merkitään $f_a \sim f_b$, jos ja vain jos $f_b(x) = \left(\frac{b}{a}\right) f_a\left(\left(\frac{a}{b}\right) x\right)$,
$\forall x \in [0, b]$. (Huomioidaan, että $0 \leq x \leq b$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $0 \leq \left(\frac{a}{b}\right) \cdot x \leq a$). Huomataan myös, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

Mille tahansa $a > 0$, olkoot f_a ja g_a jatkuvia reaalifunktioita, joilla on sama määrittelyjoukko $[0, a]$. Olkoon $R(f_a, g_a)$ merkintä siitä alueesta xy-tasolla, jota rajoittavat $y = f_a(x)$ ja $y = g_a(x)$, sekä $x = 0$ ja $x = a$. Koska f_a ja g_a ovat jatkuvia välillä $[0, a]$, niin voimme määritellä uuden jatkuvan funktion

$$F_a : [0, a] \to R,$$

joka toteuttaa ehdon

$$F_a(x) = (f_a - g_a)(x) = f_a(x) - g_a(x)$$

kaikilla $x \in [0, a]$. Siis alueen $R(f_a, g_a)$ pinta-ala, jota merkitään $A(F_a)$ saadaan laskemalla

$$A(F_a) = \int_0^a F_a(x)\, dx.$$

Kahdelle positiiviselle luvulle $a, b \in R$, alue $R(f_a, g_a)$ on verrannollinen alueen $R(f_b, g_b)$ kanssa, merkitään $R(f_a, g_a) \sim R(f_b, g_b)$ jos ja vain jos f_a on verrannollinen funktion f_b kanssa ja g_a funktion g_b kanssa. Edellä kerrottuja väitteitä merkitään seuraavasti

$$R(f_a, g_a) \sim R(f_b, g_b) \Leftrightarrow f_a \sim f_b \text{ ja } g_a \sim g_b.$$

Jos $f_a \sim f_b$ ja $g_a \sim g_b$, niin $(f_a - g_a) \sim (f_b - g_b)$, joten

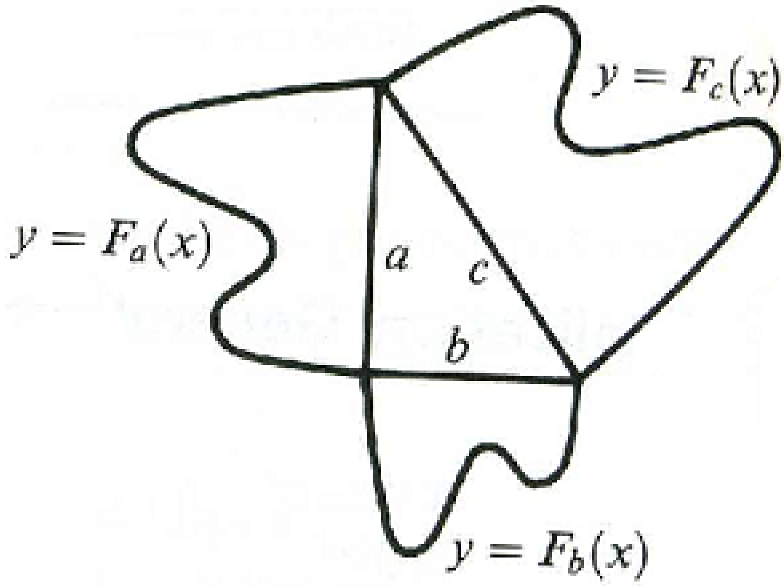
$$F_a \sim F_b.$$

Siis aiemmin tässä kappaleessa mainittujen tietojen perusteella silloin pitää paikkansa

$$F_b(x) = \frac{b}{a} F_a\left(\frac{a}{b}x\right) \quad \forall x \in [0, b].$$

Lause 10. *Pythagoraan lauseen ensimmäinen yleistys*
Olkoon a,b ja c suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan pituuksia. Oletetaan, että alueet $R(f_a, g_a), R(f_b, g_b)$ ja $R(f_c, g_c)$ ovat similaarisia. Silloin

$$A(F_c) = A(F_a) + A(F_b).$$



Kuva 16.

Kuvassa 16 nähdään lauseen 11 tilanne.

Todistus. Koska $R(f_a, g_a) \sim R(f_b, g_b) \sim R(f_c, g_c)$, niin $F_a \sim F_c$ ja $F_b \sim F_c$ mikä tarkoittaa, että

$$F_a(x) = (\frac{a}{c})F_c(\frac{c}{a}x), \forall x \in [0, a]$$

ja

$$F_b(x) = (\frac{b}{c})F_c(\frac{c}{b}x), \forall x \in [0, b]\,.$$

Laskemalla yhteen $A(F_a)$ ja $A(F_b)$ saadaan

$$\begin{aligned}
&A(F_a) + A(F_b) \\
&= \int_0^a F_a(x)dx + \int_0^b F_b(x)dx \\
&= \int_0^a \frac{a}{c}F_c(\frac{c}{a}x)dx + \int_0^b \frac{b}{c}F_c(\frac{c}{b}x)dx.
\end{aligned}$$

Tehdään u,v-sijoitukset

$$u = \frac{c}{a}x \text{ ja } v = \frac{c}{b}x.$$

Nyt siis, kun $x = 0$ niin $u = 0$ ja kun $x = a$ niin $u = c$. Ottamalla differentiaali puolittain yhtälöstä

$$u = \frac{c}{a}x,$$

saadaan

$$du = \frac{c}{a}dx, \tag{3.2}$$

joten kun kerrotaan yhtälö (3.2) puolittain luvulla $\frac{a}{c}$ saadaan

$$dx = \frac{a}{c}du.$$

Nyt saadaan myös että, kun $x = 0$ niin $v = 0$ ja kun $x = b$ niin $v = c$. Ottamalla differentiaali puolittain yhtälöstä

$$v = \frac{c}{b}x,$$

saadaan

$$dv = \frac{c}{b}dx,$$

joten kun kerrotaan puolittain luvulla $\frac{b}{c}$, saadaan

$$dx = \frac{b}{c}dv.$$

Sijoittamalla nyt saadaan

$$\begin{aligned}
A(F_a) + A(F_b) &= \int_0^c \frac{a}{c} F_c(u) \frac{a}{c} du + \int_0^c \frac{b}{c} F_c(v) \frac{b}{c} dv \\
&= \frac{a^2}{c^2} \int_0^c F_c(u) du + \frac{b^2}{c^2} \int_0^c F_c(v) dv \\
&= \frac{a^2}{c^2} \int_0^c F_c(x) dx + \frac{b^2}{c^2} \int_0^c F_c(x) dx \text{ (tekomuuttuja)} \\
&= \frac{a^2 + b^2}{c^2} \int_0^c F_c(x) dx \\
&= \int_0^c F_c(x) dx \text{ supistus Pythagoraan lauseen } a^2 + b^2 = c^2 \text{ mukaan} \\
&= A(F_c).
\end{aligned}$$

$\square$

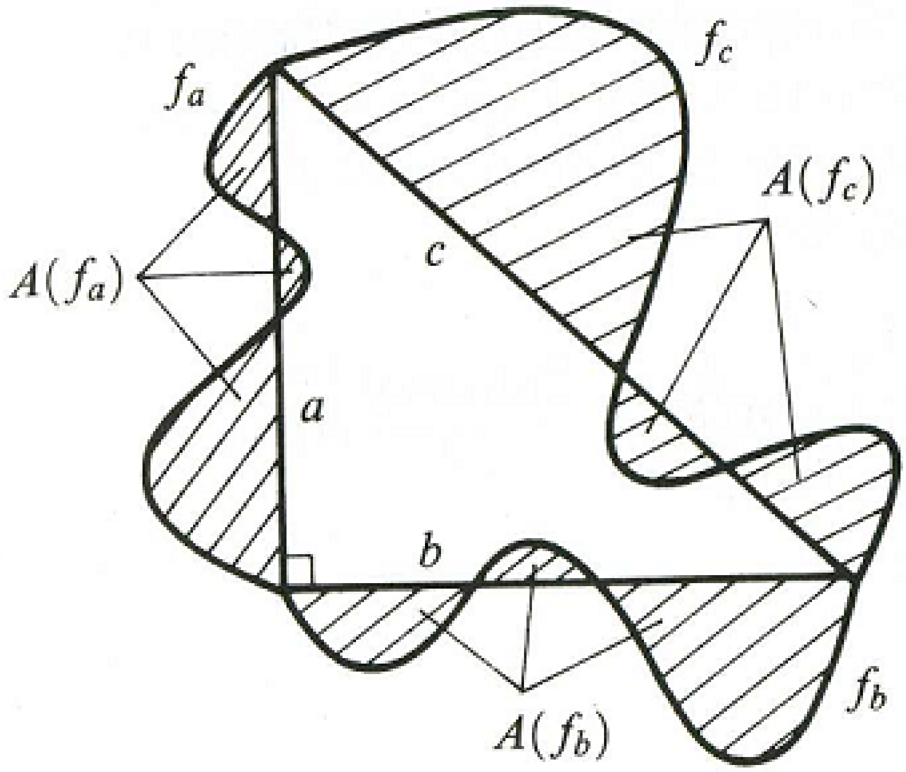
Huomautus:
Jos $g_t(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, t]$, missä $t \in \{a, b, c\}$ ja $f_t(x) = t$, $\forall x \in [0, t]$, missä $t \in \{a, b, c\}$, niin määritelmän 3.2 ja aiemmin tässä kappaleessa annettujen tietojen mukaan

$$\begin{aligned}
& A(F_c) = A(F_a) + A(F_b) \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^c F_c(x)\ dx = \int_0^a F_a(x)\ dx + \int_0^b F_b(x)\ dx \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^c (f_c(x) - g_c(x))\ dx = \int_0^a (f_a(x) - g_a(x))\ dx + \int_0^b (f_b(x) - g_b(x))\ dx \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^c (c - 0)\ dx = \int_0^a (f_a(x) - g_a(x))\ dx + \int_0^b (f_b(x) - g_b(x))\ dx \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^c c\ dx = \int_0^a a\ dx + \int_0^b b\ dx.
\end{aligned}$$

Nyt integraalit laskemalla päästään Pythagoraan lauseeseen, koska

$$[cx]_0^c = [ax]_0^a + [bx]_0^b$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$



Kuva 17.

Kuvassa 17 on voimassa:

$$
\begin{aligned}
&F_a = f_a, F_b = f_b, F_c = f_c \\
&f_a \sim f_b \sim f_c \\
&\Rightarrow A(f_a) + A(f_b) = A(f_c).
\end{aligned}
$$

Esimerkki 13. Tutkielman tekijä on itse keksinyt esimerkin.
Olkoot a,b ja c suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan pituuksia, $a = 3, b = 4$ ja $c = 5$. Olkoot $f_a(x) = \frac{5}{3}\pi x^2, f_b(x) = \frac{5}{4}\pi x^2$ ja $f_c(x) = \pi x^2$, jolloin $f_a \sim f_b \sim f_c$, koska

$$f_c(x) = \frac{c}{b} f_a(\frac{b}{c}x) = \frac{5}{4}(\frac{5}{4}\pi(\frac{4}{5}x)^2) = \pi x^2,$$

jolloin $f_c \sim f_b$, ja

$$f_b(x) = \frac{b}{a} f_a(\frac{a}{b}x) = \frac{4}{3}(\frac{5}{3}\pi(\frac{3}{4}x)^2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3^2}{4^2}\pi x^2 \frac{5}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}\pi x^2 = \frac{5}{4}\pi x^2,$$

joten $f_b \sim f_a$ ja $f_a \sim f_b \sim f_c$. Olkoot $g_a = 0, g_b = 0$ ja $g_c = 0$, jolloin $g_a \sim g_b \sim g_c$. Tällöin alueet $R(f_a, g_a) \sim R(f_b, g_b) \sim R(f_c, g_b)$ ovat verrannollisia, koska $f_a \sim f_b \sim f_c$ ja $g_a \sim g_b \sim g_c$. Tällöin lauseen 11 mukaan on voimassa yhtälö

$$A(f_a) + A(f_b) = A(f_c).$$

Koska

$$F_a(x) = (f_a - g_a)(x) = f_a(x) - g_a(x) = \frac{5}{3}\pi x^2 - 0 = \frac{5}{3}\pi x^2,$$

$$F_b(x) = (f_b - g_b)(x) = f_b(x) - g_b(x) = \frac{5}{4}\pi x^2 - 0 = \frac{5}{4}\pi x^2$$

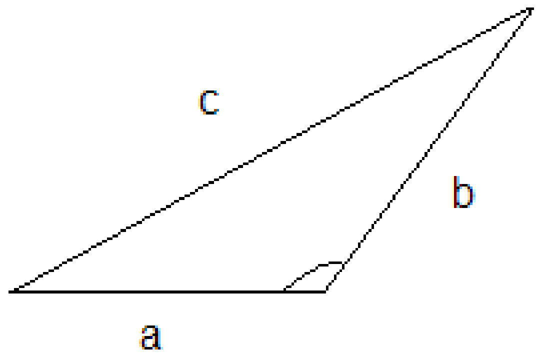
ja

$$F_c(x) = (f_c - g_c)(x) = f_c(x) - g_c(x) = \pi x^2 - 0 = \pi x^2,$$

niin tällöin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&A(f_a) + A(f_b) = \int_0^a F_a(x)dx + \int_0^b F_b(x)dx \\
&= \int_0^3 \frac{5}{3}\pi x^2 dx + \int_0^4 \frac{5}{4}\pi x^2 dx \\
&= [\frac{5}{9}\pi x^3]_0^3 + [\frac{5}{12}\pi x^3]_0^4 \\
&= \frac{5}{9}\pi 3^3 + \frac{5}{12}\pi 4^3 \\
&= \frac{125}{3}\pi = [\frac{\pi x}{3}x^3]_0^5 = \int_0^5 \pi x^2 dx \\
&= \int_0^c F_c(x)dx = A(f_c).
\end{aligned}$$

3.3 Muita Pythagoraan lauseen yleistyksiä



Kuva 18.

Otetaan sitten tarkasteluun kosinilause

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\alpha.$$

Lause 11. *Olkoon a, b ja c sellaisen kolmion sivujen pituuksia, jolla on kulma θ sivua c vastaamassa kuten kuvassa 18. Jos alueet $R(f_a, g_a), R(f_b, g_b)$ ja $R(f_c, g_c)$ ovat verrannollisia niin*

$$A(F_c) = A(F_a) + A(F_b) - \frac{2abcos\theta}{c^2} A(F_c).$$

Todistus. Johdetaan yhtälö, kuten edellisessä todistuksessa. Koska $R(f_a, g_a) \sim R(f_b, g_b) \sim R(f_c, g_c)$, niin $F_a \sim F_c$ ja $F_b \sim F_c$ mikä tarkoittaa, että

$$F_a(x) = (\frac{a}{c})F_c(\frac{c}{a}x), \forall x \in [0, a]$$

ja

$$F_b(x) = (\frac{b}{c})F_c(\frac{c}{b}x), \forall x \in [0, b].$$

Laskemalla yhteen $A(F_a)$ ja $A(F_b)$ saadaan

$$A(F_a)+A(F_b) = \int_0^a F_a(x)dx+\int_0^b F_b(x)dx = \int_0^a \frac{a}{c}F_c(\frac{c}{a}x)dx+\int_0^b \frac{b}{c}F_c(\frac{c}{b}x)dx.$$

Tehdään u,v-sijoitukset

$$u = (\frac{c}{a}x) \text{ ja } v = (\frac{c}{b}x).$$

Nyt kun $x = 0$ niin $u = 0$ ja kun $x = a$ niin $u = c$. Ottamalla puolittain differentiaali yhtälöstä

$$u = (\frac{c}{a}x),$$

saadaan

$$du = (\frac{c}{a})dx,$$

joten kun kerrotaan puolittain luvulla

$$\frac{a}{c}$$

saadaan

$$dx = \frac{a}{c}du.$$

Saadaan myös että, kun $x = 0$ niin $v = 0$ ja kun $x = b$ niin $v = c$. Ottamalla puolittain differentiaali yhtälöstä

$$v = \left(\frac{c}{b}x\right),$$

saadaan

$$dv = (\frac{c}{b})dx,$$

joten kun kerrotaan puolittain luvulla

$$\frac{b}{c},$$

saadaan

$$dx = \frac{b}{c}dv.$$

Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}
A(F_a) + A(F_b) &= \int_0^c \frac{a}{c}F_c(u)\frac{a}{c}du + \int_0^c \frac{b}{c}F_c(v)\frac{b}{c}dv \\
&= \frac{a^2}{c^2}\int_0^c F_c\left(u\right)du + \frac{b^2}{c^2}\int_0^c F_c(v)dv \\
&= \frac{a^2}{c^2}\int_0^c F_c(x)dx + \frac{b^2}{c^2}\int_0^c F_c(x)dx \\
&= \frac{a^2+b^2}{c^2}\int_0^c F_c(x)dx \\
&= \frac{a^2+b^2}{c^2}A(F_c),
\end{aligned}$$

joten siis

$$A\left(F_a\right) + A\left(F_b\right) = \frac{a^2+b^2}{c^2}A\left(F_c\right).$$

Kosinilauseesta saadaan sijoitettua

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\ \cos\theta,$$

joten saadaan

$$A(F_a) + A(F_b) = \frac{c^2 + 2ab\ \cos\theta}{c^2} A(F_c) = A(F_c) + \frac{2ab\ \cos\theta}{c^2} A(F_c),$$

josta saadaan

$$A(F_c) = A(F_a) + A(F_b) - \frac{2ab\ \cos\theta}{c^2} A(F_c).$$

□

Huomautuksia :

(i) Jos $\theta = \frac{\pi}{2}$, niin Pythagoraan lauseen ensimmäisen yleistys seuraa välittömästi lauseesta 11. Kun $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, niin on jälleen

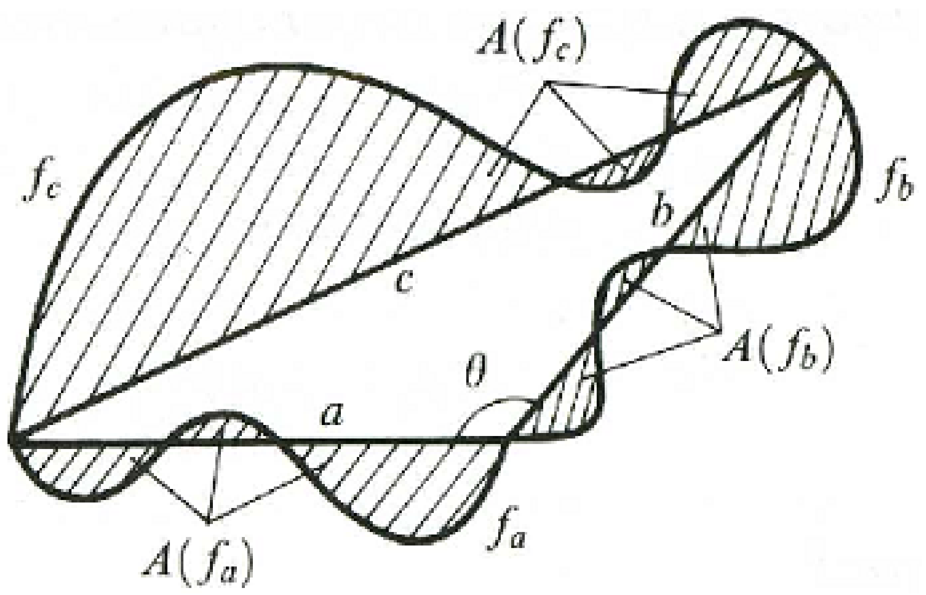
$$A(F_c) = A(F_a) + A(F_b).$$

Joten ensimmäinen yleistys Pythagoraan lauseesta on lauseen 11 erikoistapaus.

(ii) Jos $F_t(x) = t,\ \forall \in [0, t]$, ja $t \in a, b, c$, ja niin meillä on kosinilause. Silloin $A(F_t) = \int_0^t F_t(x)dx = \int_0^t t\ dt = t[x_0]_0^t = t^2$, eli

$$\begin{aligned}
& A(F_c) = A(F_a) + A(F_b) - \frac{2ab\ \cos\theta}{c^2} A(F_c) \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^c cdx = \int_0^a adx + \int_0^b bdx - \frac{2ab\ \cos\theta}{c^2} \cdot \int_0^c cdx \\
\Leftrightarrow \quad & [cx]_0^c = [ax]_0^a + [bx]_0^b - \frac{2ab\ \cos\theta}{c^2} \cdot [cx]_0^c \\
\Leftrightarrow \quad & c^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab\ \cos\theta}{c^2} \cdot c^2 \\
\Leftrightarrow \quad & c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\theta
\end{aligned}$$

Siis tunnettu kosinilause on myös erikoistapaus lauseesta 11.



Kuva 19.

Kuvassa 19 pitää paikkansa

$$
\begin{aligned}
& f_a \sim f_b \sim f_c \\
& \Rightarrow A(f_c) = A(f_a) + A(f_b) - \frac{2ab\ \cos\theta}{c^2} A(f_c)
\end{aligned}
$$

(iii) Jos $\theta = \frac{\pi}{2}, F_t(x) = t$ kaikilla $x \in [0, t]$, ja $t \in a, b, c$, niin kosinilauseesta tulee Pythagoraan lause, koska $-2ab\ \cos\frac{\pi}{2} = 0$, joten

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Esimerkki 14. Tutkielman tekijä on itse keksinyt esimerkin. Esimerkissä käytetään likiarvoja.
Olkoot $a = 2.10, b = 4.00, c = 5.27$ kolmion sivujen pituuksia ja sivun c vastaisen kulman suuruus $\theta = 116°$. Olkoot

$$f_a(x) = -2x, f_b(x) = -2x \text{ ja } f_c(x) = -2x,$$

jolloin funktiot f_a, f_b ja f_c ovat verrannollisia keskenään, koska

$$
\begin{aligned}
f_a(x) \quad & = \frac{4.00}{2.10} f_b(\frac{2.10}{4.00} x) \\
& = \frac{4.00}{2.10} \cdot -2\frac{2.10}{4.00} x \\
& = -2x
\end{aligned}
$$

ja

$$\begin{aligned} f_c(x) \quad &= \frac{4.00}{5.27} f_b(\frac{5.27}{4.00}x) \\ &= \frac{4.00}{5.27} \cdot -2\frac{5.27}{4.00}x \\ &= -2x. \end{aligned}$$

Olkoot

$$g_a(x) = -4x, g_b(x) = -4x \text{ ja } g_c(x) = -4x,$$

jolloin nekin ovat verrannolllisia keskenään. Aiemmin on todettu, että

$$F_a(x) = f_a(x) - g_a(x) = -2x - (-4x) = 2x,$$

joten myös

$$F_b(x) = 2x \text{ ja } F_c(x) = 2x.$$

Nyt lauseen 11 ehdot täyttyvät, joten

$$A(F_c) = A(F_a) + A(F_b) - \frac{2ab\ \cos\theta}{c^2} A(F_c).$$

Lasketaan siis

$$\begin{aligned} A(F_c) \quad &= \int_0^{5.27} 2x dx \\ &= [x^2]_0^{5.27} \\ &= 27.77. \end{aligned}$$

Lasketaan sitten yhtälön toinen puoli

$$\begin{aligned} &A(F_a) + A(F_b) - \frac{2ab\ \cos\theta}{c^2} \cdot A(F_c) \\ &= \int_0^{2.1} 2x dx + \int_0^{4} 2x dx - \frac{2 \cdot 2.1 \cdot 4\ \cos 116°}{(5.27)^2} \cdot (27.77) \\ &= [x^2]_0^{2.1} + [x^2]_0^4 - \frac{16.8 \cdot (-0.438)}{27.77} \cdot (27.77) \\ &= 4.41 + 16 + 7.36 = 27.77. \end{aligned}$$

Molemmista puolista tuli yhtä suuret tulokset, joten esimerkki oli havainnollistus lauseesta 11.

Tarkastellaan nyt uudestaan kosinilausetta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\theta.$$

ja positiivisten reaalilukujen a, b ja c suhdetta. Tästä näkökulmasta katsottuna olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sellaisia positiivisia lukuja, että $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ on ratkaisu annettuun yhtälöön, joka on muotoa

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 + f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3.3}$$

Yhtälö (3.3) voisi olla esimerkiksi relaatio, joka on määritelty seuraavasti

$$x^2 = y^2 + z^2 + 3xyz.$$

Sillä on kaksi ratkaisua, jotka ovat

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(3 + \sqrt{14}, 1, 2\right) \text{ ja } (a_1, a_2, a_3) = \left(9 + \sqrt{94}, 2, 3\right).$$

Tämä esimerkki takaa sen, että yhtälö (3.3) on olemassa. Siis saamme seuraavan lauseen 12.

Lause 12. *Olkoon $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ratkaisu relaatioon, joka on muotoa*

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 + f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3.4}$$

missä jokainen $a_i > 0, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Oletetaan, että $R(f_{a_1}, g_{a_1}), R(f_{a_2}, g_{a_2}), \ldots, R(f_{a_n}, g_{a_n})$ ovat kaikki similaarisia. Silloin

$$A(F_{a_1}) = A(F_{a_2}) + A(F_{a_3}) + \ldots + A(F_{a_n}) + \frac{f(a_1, \ldots, a_n)}{a_1^2} A(F_{a_1}).$$

Todistus. Käyttämällä kahden edellisen lauseen todistuksia saadaan

$$\begin{aligned}
&A(F_{a_2}) + A(F_{a_3}) + \ldots + A(F_{a_n}) \\
&= \int_0^{a_2} F_{a_2}(x)dx + \int_0^{a_3} F_{a_3}(x)dx + \ldots + \int_0^{a_n} F_{a_n}(x)dx \\
&= \int_0^{a_2} \frac{a_2}{a_1} F_{a_1}(\frac{a_1}{a_2}x)dx + \int_0^{a_3} \frac{a_3}{a_1} F_{a_1}(\frac{a_1}{a_3}x)dx + \ldots + \int_0^{a_n} \frac{a_n}{a_1} F_{a_1}(\frac{a_1}{a_n}x)dx \\
&= \frac{a_2^2}{a_1^2} \int_0^{a_1} F_{a_1}(x)dx + \frac{a_3^2}{a_1^2} \int_0^{a_1} F_{a_1}(x)dx + \ldots + \frac{a_n^2}{a_1^2} \int_0^{a_1} F_{a_1}(x)dx \\
&= \frac{a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{a_1^2} \int_0^{a_1} F_{a_1}(x)dx \\
&= \frac{a_1^2 - f(a_1, \ldots, a_n)}{a_1^2} A(F_{a_1}) \text{ (yhtälön (3.4) perusteella)} \\
&= 1 - \frac{f(a_1, ..., a_n)}{a_1^2} A(F_{a_1}).
\end{aligned}$$

□

Huomautus :

Jos $n = 3, a_1 = c, a_2 = a, a_3 = b$, ja $f(a_1, a_2, a_3) = f(c, a, b) = -2ab$ cos $\theta = -2a_2a_3$ cos θ, niin nähdään, että lause kahdeksan on erikoistapaus lauseesta yhdeksän, joka on paras Pythagoraan lauseen yleistys, kun järkeillään verrannollisia kuviota.

Loppuosassa olen käyttänyt lähdettä [1, Generalizations of Pythagors' theorem-artikkeli].

Tarkastellaan yhtälöä $z^2 = x^2 + y^2 - d^2$, jossa $f(z, x, y) = -d^2$. Tämä yhtälö on meille tutumpi, kun se ilmaistaan muodossa

$$x^2 + y^2 - z^2 = d^2. \tag{3.5}$$

Yhtälö (3.5) kuvaa yksivaippaista hyperboloidia. Kertomalla yhtälö (3.5) puolittain π:llä, saadaan

$$\pi x^2 + \pi y^2 - \pi z^2 = \pi d^2, \tag{3.6}$$

tai jos $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\pi r^2 + \pi z^2 = \pi d^2. \tag{3.7}$$

Ajatellaan yksivaippaista hyperpoloidia $x^2 + y^2 - z^2 = d^2$. Tällaisella hyperpoloidilla on vyötärö (engl. waist) W, joka on ympyrä $x^2 + y^2 = d^2$ tasolla, jossa $z = 0$. Tällä ympyrällä on pienin pinta-ala niistä hyperpoloidin leikkauksista, joilla $z = z_0$.

Olkoon (a, b, c) mikä tahansa piste hyperpoloidista, tarkastellaan myös sylinteriä $x^2+y^2 = a^2+b^2$. Tämä sylinteri leikkaa hyperpoloidin muodostaen kaksi ympyrää, toinen niistä on tasolla $z = c$ ja toinen tasolla $z = -c$. Merkitään sitä ympyrää, joka on tasolla $z = c$ kirjaimella C.

Hyperpoloidissa on myös ympyräperhe, joiden keskus on pisteessä $(a, b, 0)$ ja halkaisija segmentti pisteiden $(a, b, -c)$ ja (a, b, c) välinen jana. Valitaan mikä tahansa näistä ja merkitään sitä kirjaimella T.

Jos X on ympyrä, merkitään sen pinta-alaa $A(X)$. Yhtälö (3.7) voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$A(C) - A(T) = A(W),$$

koska ympyrän pinta-ala lasketaan kaavalla $A = \pi r^2$ ja tämä on voimassa kaikilla ympyräpareilla C ja T.

Pisteestä (a, b, c) saavutetaan myös muunlaisia ympyröitä. Esimerkiksi tasolta $y = b$ lähtee ympyrä, jonka säde on $|a|$ ja keskipiste $(0, b, c)$. Kutsutaan sitä A:ksi. Tasolla, jossa $x = a$ on ympyrä, jonka säde on $|b|$ ja keskipiste $(a, 0, c)$. Kutsutaan sitä B:ksi. Yhtälö (3.6) voidaan kirjoittaa muotoon

$$A(A) + A(B) - A(C) = A(W),$$

ja tämä pitää paikkansa kaikilla tällaisilla ympyröillä A, B ja C.

Tarkastellaan sitten kaksivaippaista hyperpoloidia, joka määritellään yhtälöllä

$$x^2 + y^2 - z^2 = -d^2. \tag{3.8}$$

Kertomalla yhtälö (3.8) π:llä saadaan

$$\pi x^2 + \pi y^2 - \pi z^2 = -\pi d^2, \tag{3.9}$$

jos $r^2 = x^2 + y^2$ niin yhtälö (3.9) on muotoa

$$\pi r^2 - \pi z^2 = -\pi d^2. \tag{3.10}$$

Olkoon W ympyrä, jonka keskipiste on $(0, 0, 0)$ ja halkaisija on segmentti pisteiden $(0, 0, -d)$ ja $(0, 0, d)$ välissä.

Sylinteri $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ leikkaa jälleen hyperpoloidin muodostaen kaksi ympyrää. Olkoon C toinen ympyröistä tasolla $z = c$. Ympyrän T keskipiste on $(a, b, 0)$ ja halkaisija segmentti välillä $(a, b, -c)$ ja (a, b, c). Yhtälö (3.10) tulee muotoon

$$A(C) - A(T) = -A(W)$$

mikä on toisin sanoen

$$A(T) - A(C) = A(W),$$

mikä pitää paikkansa ympyräparilla C ja T.

Yhtälöstä (3.9) tulee aiemmin kerrotuilla perusteilla

$$A(A) + A(B) - A(C) = -A(W)$$

tai vaihtoehtoisesti

$$A(C) - [A(A) + A(B)] = A(W)$$

ympyröille A, B, C, jotka on määritelty aiemmin.

Molemmissa tapauksissa, jos $d = 0$, niin $x^2 + y^2 = z^2$, mikä on ympyräkartio (engl. circular cone). Ympyrät A, B, C ja T on määritelty vastaavasti ja niistä saadaan

$$A(A) + A(B) = A(C) = A(T). \tag{3.11}$$

Näiden esimerkkien jälkeen katsotaan palloa

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2. \tag{3.12}$$

Kertomalla yhtälö (3.12) π:llä saadaan

$$\pi x^2 + \pi y^2 + \pi z^2 = \pi d^2. \tag{3.13}$$

Mille tahansa pisteelle (a, b, c), joka on tällä pallolla, sylinteri on $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ja ympyrä C leikkaa pallon, sylinterin ja tason $z = c$. Jälleen on olemassa ympyrä, jonka keskipiste on $(a, b, 0)$ ja halkaisija segmentti pisteiden $(a, b, -c)$ ja (a, b, c) välillä. Valitaan yksi niistä ja nimetään sitä kirjaimella T, jolloin yhtälöstä (3.13) tulee

$$A(C) + A(T) = A(W),$$

missä W on pallon, tasolla $z = 0$ iso ympyrä. Jälleen tämä pätee ympyräparilla C ja T.

Näistä tarkasteluista siirrytään positiiviisiin lukuihin, joita merkitään a_i, ja joista muodostuu ratkaisu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ yhtälöön, joka on muotoa

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3.14}$$

Yhtälöstä saadaan 4 viimeistä lausetta. Tietenkin $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ voi olla mikä tahansa reaaliarvoinen funktio, esimerkiksi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, jolloin ratkaisut yhtälöön (3.14) ovat yksikköympyrän pisteet n-dimensioisessa *Euklidisessa avaruudessa.*

Lause 13. *[2, Tehtävä 1, s.265]. Olkoon $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ ratkaisu relaatiolle, joka on muotoa $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, missä jokainen $a_i > 0, 1 \leq i \leq n$. Oletetaan, että alueet $R(f_{a_1}, g_{a_1}), \ldots, R(f_{a_n}, g_{a_n})$ ovat kaikki similaarisia. Silloin*

$$\sum_{j=1}^{n} A(F_{a_j}) = \frac{f(a_1, \ldots a_n)}{a_i^2} A(F_{a_i}) \tag{3.15}$$

kun $1 \leq i \leq n$. Ja jos

$$A(F_{a_i}) \neq 0,$$

niin

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_i^2}{A(F_{a_i})} \sum_{j=1}^{n} A(F_{a_j}). \tag{3.16}$$

Todistus. Tutkielman tekijä on itse keksinyt tämän todistuksen.
Aiemmin kerrottujen tietojen perusteella pitää paikkansa

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} A(F_{a_j}) \quad &= A(F_{a_1}) + A(F_{a_2}) + \ldots + A(F_{a_n}) \\ &= \int_0^{a_1} F_{a_1}(x)dx + \ldots + \int_0^{a_n} F_{a_n}(x)dx,\end{aligned}$$

koska kaikki alueet ovat similaarisia. Siis muun muassa F_1 ja F_n ovat similaarisia keskenään,sekä F_1 ja F_i ovat similaarisia. Kun $1 \leq i \leq n$, niin on

$$\begin{aligned}&\int_0^{a_1} F_{a_1}(x)dx + \ldots + \int_0^{a_n} F_{a_n}(x)dx \\ &= F_{a_1}(x) = \frac{a_1}{a_i} F_{a_i}(\frac{a_i}{a_1} x)dx.\end{aligned}$$

Myös kun 1:n tilalle vaihdetaan mikä tahansa luku väliltä $[1, ..., n]$, joten

$$\int_0^{a_1} F_{a_1}(x)dx + \ldots + \int_0^{a_n} F_{a_n}(x)dx = \int_0^{a_1} \frac{a_1}{a_i} F_{a_i}(\frac{a_i}{a_1}x)dx + \ldots + \int_0^{a_n} \frac{a_n}{a_i} F_{a_i}(\frac{a_i}{a_n}x)dx.$$

Olkoon

$$u_1 = (\frac{a_i}{a_1})x, u_2 = (\frac{a_i}{a_2})x, \ldots, u_n = (\frac{a_i}{a_n})x.$$

Nyt, kun $x = 0$, niin $u_1 = 0$ ja kun $x = a_1$ niin $u_1 = a_i$, sekä

$$dx = \frac{a_1}{a_i} du_1$$

Samoin myös muille $u_2, u_3, ...u_n$:lle. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} A(F_{a_j}) \quad & = A(F_{a_1}) + A(F_{a_2}) + \ldots + A(F_{a_n}) \\
& = \int_0^{a_i} \frac{a_1}{a_i} F_{a_i}(u_1) \frac{a_1}{a_i} du_1 + \ldots + \int_0^{a_i} \frac{a_n}{a_i} F_{a_i}(u_n) \frac{a_n}{a_i} du_n \\
& = \frac{a_1^2}{a_i^2} \int_0^{a_i} F_{a_i}(u_1) du_1 + \ldots + \frac{a_n^2}{a_i^2} \int_0^{a_i} F_{a_i}(u_n) du_n \\
& = \frac{a_1^2}{a_i^2} \int_0^{a_i} F_{a_i}(x) dx + \ldots + \frac{a_n^2}{a_i^2} \int_0^{a_i} F_{a_i}(x) dx \\
& = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{a_i^2} \int_0^{a_i} F_{a_i}(x) dx \\
& = \frac{f(a_1, \ldots a_n)}{a_i^2} A(F_{a_i}).
\end{aligned}$$

□

Lause 14. *Olkoon $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ratkaisu relaatioon, joka on muotoa (3.14), missä jokainen $a_i > 0$ ja $1 \leq i \leq n$. Oletetaan, että alueet $R(f_{a_k}, g_{a_k})$ ovat kaikki verrannollisia ja $1 \leq k \leq n$. Silloin $A(f_{a_k}, g_{a_k}) = 0$, missä $1 \leq k \leq n$ jos ja vain jos $\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = 0$.*

Todistus. Todistetaan ensin toiseen suuntaan, eli jos $A(f_{a_i}, g_{a_i}) = 0$, niin yhtälön (3.15) mukaan $\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = 0$.

Sitten toiseen suuntaan vastaoletuksella, eli jos $\sum_{j=1}^{n} A(f_{a_j}, g_{a_j}) = 0$ ja $A(f_{a_k}, g_{a_k}) \neq 0$, jollakin k:lla, joka kuuluu välille $1 \leq k \leq n$, niin $f(a_1, a_2, \ldots, a_n = 0$, yhtälön (3.16) perusteella. Tästä tulee ristiriita yhtälön (3.14) ja tiedon, että a_i:t ovat positiivisia kanssa, joten väite on tosi. □

Lause 15. *Olkoon $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ratkaisu relaatioon, joka on muotoa (3.14), missä jokainen $a_i > 0$ ja $1 \leq i \leq n$. Oletetaan, että alueet $R(f_{a_j}, g_{a_j})$ ovat kaikki verrannollisia ja $1 \leq j \leq n$. Silloin on voimassa*

$$\frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} = \frac{a_k^2}{A(f_{a_k}, g_{a_k})}, \textit{kun } 1 \leq i, k \leq n,$$

jos $A(f_{a_i}, g_{a_i}) \neq 0$.

Todistus. Yhtälön (3.16) perusteella,

$$\frac{a_i^2}{A(F_{a_i})}\sum_{j=1}^{n} A(F_{a_j}) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_k^2}{A(F_{a_k})}\sum_{j=1}^{n} A(F_{a_j}), 1 \leq i, k \leq n.$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} = \frac{a_k^2}{A(f_{a_k}, g_{a_k})}$$

pitää paikkansa, koska $A(f_{a_i}, g_{a_i}) \neq 0$ lauseen 13 mukaan. □

Lause 16. *Olkoon* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ratkaisu relaatioon, joka on muotoa (3.14), missä jokainen* $a_i > 0$ *ja* $1 \leq i \leq n$. *Oletetaan, että alueet* $R(f_{a_j}, g_{a_j})$ *ovat kaikki verrannollisia ja* $1 \leq j \leq n$. *Oletetaan, että alueet* $R(F_{a_j}, G_{a_j})$ *ovat kaikki verrannollisia ja* $1 \leq j \leq n$. *Silloin*

$$\frac{A(f_{a_i}, g_{a_i})}{A(F_{a_i}, G_{a_i})} = \frac{A(f_{a_k}, g_{a_k})}{A(F_{a_k}, G_{a_k})}, kun 1 \leq i, k \leq n,$$

jos $A(F_{a_i}, F_{a_i}) \neq 0$.

Todistus. Lauseen 14 perusteella on

$$\frac{a_i^2}{A(f_{a_i}, g_{a_i})} = \frac{a_k^2}{A(f_{a_k}, g_{a_k})}. \tag{3.17}$$

Yhtälö (3.17) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\frac{A(f_{a_i}, g_{a_i})}{a_i^2} = \frac{A(f_{a_k}, g_{a_k})}{a_k^2}.$$

Alueiden $R(F_{a_j}, G_{a_j})$ ollessa verrannollisia, lauseessa 14 on todistettu, että tällöin

$$\frac{a_i^2}{A(F_{a_i}, G_{a_i})} = \frac{a_k^2}{A(F_{a_k}, G_{a_k})}. \tag{3.18}$$

Jos yhtälön (3.17) molemmat puolet kerrotaan ristiin saadaan se muotoon

$$a_i^2 \cdot A(f_{a_k}, g_{a_k}) = a_k^2 \cdot A(f_{a_i}, g_{a_i}),$$

josta päästään muotoon

$$\frac{a_i^2}{a_k^2} = \frac{A(f_{a_i}, g_{a_i})}{A(f_{a_k}, g_{a_k})}$$

jakamalla a_k^2:llä ja $A(f_{a_k}, g_{a_k})$:llä. Jos taas yhtälön (3.18) molemmat puolet kerrotaan ristiin saadaan se muotoon

$$a_i^2 \cdot A(F_{a_k}, G_{a_k}) = a_k^2 \cdot A(F_{a_i}, G_{a_i}),$$

josta päästään muotoon

$$\frac{a_i^2}{a_k^2} = \frac{A(F_{a_i}, G_{a_i})}{A(F_{a_k}, G_{a_k})}$$

jakamalla a_k^2:llä ja $A(F_{a_k}, G_{a_k})$:llä. Yhdistämällä näin saadut yhtälöt saadaan

$$\frac{A(f_{a_i}, g_{a_i})}{A(f_{a_k}, g_{a_k})} = \frac{a_i^2}{a_k^2} = \frac{A(F_{a_i}, G_{a_i})}{A(F_{a_k}, G_{a_k})},$$

josta ristiin kertomalla saadaan

$$A(f_{a_i}, g_{a_i}) \cdot A(F_{a_k}, G_{a_k}) = A(f_{a_k}, g_{a_k}) \cdot A(F_{a_i}, G_{a_i}).$$

Nyt jakamalla $A(F_{a_i}, G_{a_i})$:lla ja $A(F_{a_k}, G_{a_k})$:lla saadaan todistetuksi lause. Siis

$$\frac{A(f_{a_i}, g_{a_i})}{A(F_{a_i}, G_{a_i})} = \frac{A(f_{a_k}, g_{a_k})}{A(F_{a_k}, G_{a_k})}$$

pitää paikkansa. $\square$

Viitteet

[1] Clay James R.,Fong Yuen, Ojeda-Peña Eduardo, Shum Kar Ping.
Generalizations of Pythagoras' theorem.
SEA Bull. Math. Vol.19, No.1, 1995. s.19-26.

[2] Fong Yuen, Wang Yuan. Calculus.
Springler-Verlag Singapore Pte. Ltd. 2000.

[3] Morey Jim. The proof of Pythagoras' theorem. [www]. (Viitattu 16.8.2008)
Saatavissa : http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

[4] Polya George.
Generalization, Specialization, Analogy.
The American Mathematical Monthly, Vol.55, No.4, 1948, s. 241-243.

[5] Salas Saturnino, Hille Einar, Etgen Garret. Calculus, Ninth Edition.
John Wiley Sons, Inc., USA, 2003.