TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Johanna Harju

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaava

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Heinäkuu 2008

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HARJU, JOHANNA: Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaava

Pro gradu -tutkielma, 22 s.

Matematiikka

Heinäkuu 2008

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa kerrotaan kompleksilukujen perusteista sekä tutustutaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisuihin ratkaisukaavan johtamisen ja esimerkkien avulla. Oletuksena on, että lukija tuntee reaalilukujen ominaisuudet. Luvussa 2 käsitellään kompleksilukujen määritelmä ja perusominaisuuksia sekä tutustutaan binomiyhtälöiden ratkaisuun. Kompleksilukujen tuntemuksesta on hyötyä kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan johtamisessa sekä aiheeseen liittyvien esimerkkien seuraamisessa. Luvussa 3 tutustutaan hieman kolmannen asteen yhtälöön liittyvään historiaan, johdetaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaava sekä syvennytään ratkaisukaavaan reaalisuustarkastelujen ja esimerkkien myötä.

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa kerrotaan kompleksilukujen perusteista sekä tutustutaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisuihin ratkaisukaavan johtamisen ja esimerkkien avulla. Oletuksena on, että lukija tuntee reaalilukujen ominaisuudet.

Luvussa 2 käsitellään kompleksilukujen määritelmä ja perusominaisuuksia sekä tutustutaan binomiyhtälöiden ratkaisuun. Kompleksilukujen tuntemuksesta on hyötyä kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan johtamisessa sekä aiheeseen liittyvien esimerkkien seuraamisessa.

Luvussa 3 tutustutaan hieman kolmannen asteen yhtälöön liittyvään historiaan, johdetaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaava sekä syvennytään ratkaisukaavaan reaalisuustarkastelujen ja esimerkkien myötä. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisu oli merkittävä saavutus matematiikalle jo 1500-luvulla ja se antoi sysäyksen myös kompleksilukujen keksimiselle.

Kompleksilukujen osalta lähteinä on käytetty useita kirjoja ja internetlähteitä, joihin on viitattu jokaisen luvun alussa tai tekstin seassa. Kolmannen asteen yhtälön päälähteinä ovat olleet Kalle Väisälän teos *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet* sekä Eric W. Weissteinin internetlähde *Cubic Formula*.

Esimerkit ovat pääasiassa käytettyjen lähdeteoksien harjoitustehtäviä, joihin tutkielman tekijä on itse laatinut ratkaisut.

2 Kompleksiluvut

Luvussa 2 kerrotaan kompleksilukujen tarpeellisuudesta sekä esitetään kompleksilukujen määritelmä ja perusominaisuuksia. Luvussa perehdytään myös yleisen binomiyhtälön juuriin sekä esitetään esimerkkejä.

2.1 Kompleksilukujen määritelmä

Kompleksiluvut ovat syntyneet tarpeesta löytää ratkaisut yhä uusille yhtälötyypeille. Esimerkiksi yhtälö $x^2 + 1 = 0$ ei ratkea luonnollisten lukujen eikä kokonais-, rationaali- tai reaalilukujen joukossa, joten lukujoukkoa on laajennettu kompleksiluvuilla siten, että yhtälölle löytyy ratkaisut. Suoraviivaisesti ajateltuna voidaan ottaa käyttöön "luku" i, jolla on ominaisuus $i^2 = -1$, joten yhtälö $x^2 + 1 = 0$ saa kaksi ratkaisua, i ja $-i$.

Edellä kuvattu suoraviivainen ajattelu kuitenkin jättää avoimeksi, mikä i oikeastaan on. Tämän vuoksi kompleksiluvut määritellään tarkemmin määritelmässä 2.1, jossa otetaan lähtökohdaksi xy-taso $\mathbb{R}^2$, jota aloitetaan kutsumaan *kompleksitasoksi*.

Kompleksiluvut ovat tärkeitä muissakin kuin polynomiyhtälöiden ratkaisemisessa. Kompleksiluvut ovat merkityksellisiä monilla matematiikan osa-alueilla sekä matematiikkaa soveltavissa muissa tieteissä. (Ks. [5]).

Määritelmä 2.1. (Vrt. [2, s. 2]). Tarkastellaan joukkoa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}$. Joukkoa $\mathbb{R}^2$ varustettuna yhteenlaskulla

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

ja kertolaskulla

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2$$

sanotaan *kompleksilukujen joukoksi* $\mathbb{C}$. Jokaista alkiota $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ sanotaan *kompleksiluvuksi.*

Kaksi lukuparia (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat yhtäsuuria joukossa $\mathbb{R}^2$, jos ja vain jos $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$ (Ks. [2, s. 1]). Osoittautuu, että kompleksiluvuilla voidaan laskea samoilla laskusäännöillä kuin reaaliluvuilla. Kompleksiluvut *nolla* $(0, 0)$ ja *ykkönen*$(1, 0)$ käyttäytyvät kuten reaaliluvut 0 ja 1. Erikoisasemassa on kompleksiluku $(0, 1)$, jolle annetaan nimeksi *imaginaariyksikkö* ja jota merkitään symbolilla i. (Ks. [5]). Jos merkitään $i = (0, 1)$ ja samaistetaan $(x, 0)$ ja x, nähdään yhteenlasku- ja kertolaskusäännön perusteella, että

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi$$

sekä toisaalta

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Koska $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, niin $i^2 = -1$ pätee. Tällä tavalla määriteltynä kompleksilukujen joukko voidaan kirjoittaa lähteen [2, s. 5] mukaan muodossa

$$\mathbb{C} = \{\, x + yi \mid x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R},\, i^2 = -1 \,\}.$$

2.2 Kompleksilukujen perusominaisuuksia

Yhteen- ja kertolaskulla varustettu kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ on algebralliselta struktuuriltaan *kunta* (todistus sivuutetaan tutkielman lyhyyden säilyttämiseksi). Jokaisella kompleksiluvulla $z = (x, y)$ on tällöin *vastaluku* $-z = (-x, -y)$. Jokaisella nollasta poikkevalla kompleksiluvulla $z = (x, y)$ on tällöin myös *käänteisluku*

$$z^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}).$$

(Ks. [5]).

Esimerkki 2.1. (Vrt. [2, s. 9]). Lasketaan lauseke

$$\frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}.$$

Lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} z &= \frac{(5 + 5i)(3 + 4i)}{9 - 16i^2} + \frac{20(4 - 3i)}{16 - 9i^2} \\ &= \frac{-5 + 35i}{25} + \frac{80 - 60i}{25} \\ &= \frac{75 - 25i}{25} \\ &= 3 - i. \end{aligned}$$

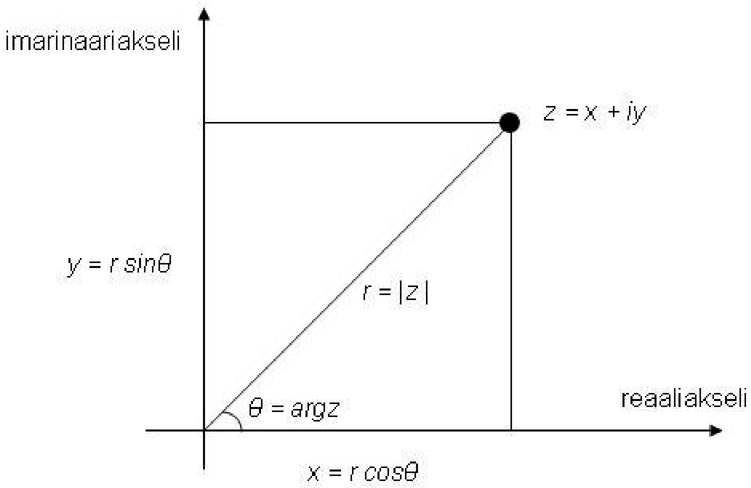
Algebrallisessa esityksessä $z = x + iy$ kompleksiluvun z *reaaliosaksi* sanotaan lukua $x = \mathrm{Re}(z)$ ja *imaginaariosaksi* lukua $y = \mathrm{Im}(z)$. Huomaa, että imaginaariosa on reaaliluku. Lukua $\overline{z} = x - iy$ sanotaan luvun z *liittoluvuksi* eli *konjugaatiksi*. (Ks. [2, s. 5]).

Kompleksiluku $z = x + iy$ voidaan esittää tason *pisteenä* (x, y). Tällöin y-akselia sanotaan *imaginaariakseliksi* ja x-akselia *reaaliakseliksi*, mitä havainnollistetaan kuvalla 1. (Ks. [3, s. 21]).

Määritelmä 2.2. (Vrt. [3, s. 22]). Kompleksiluvun *itseisarvo* eli *moduli* on

$$\mid z \mid = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

joka kertoo pisteen (x, y) etäisyyden origosta.



Kuva 1: Kompleksilukujen esittäminen koordinaatistossa.

Piste (x, y) sijaitsee ympyrällä $x^2 + y^2 = r^2$, missä $r =\mid z \mid= \sqrt{x^2 + y^2}$. Nollasta poikkeavan kompleksiluvun *vaihekulma* θ on välillä $]-\pi, \pi]$ yksikäsitteinen. Yleisesti se on yksikäsitteinen 2π:n monikerran lisäämistä vaille. Tällöin

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ ja } \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

joten voidaan kirjoittaa

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Muotoa $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ kutsutaan kompleksiluvun z *polaariesitykseksi*, koska se on esitetty napakoordinaattien avulla. Positiivinen r on moduli $\mid z \mid$ ja θ on kompleksiluvun *argumentti*, josta käytetään merkintää arg z. (Ks. [3, s. 24]).

Esimerkki 2.2. Lasketaan luvun $z = 2 - i\sqrt{12}$ itseisarvo ja vaihekulma. Saadaan

$$\mid z \mid= r = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{12})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

ja

$$\tan\theta = -\frac{\sqrt{12}}{2} = -\frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

Saadun tangenttiarvon perusteella saadaan

$$\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Reaali- ja imaginaariosan etumerkeistä havaitaan, että z on kompleksitason neljännessä neljänneksessä, siis saatu kulma θ kelpaa ratkaisuksi sellaisenaan, koska sekin on samassa neljänneksessä.

Kaikilla reaalisilla vaihekulman θ arvoilla voidaan hyödyntää eksponenttifunktioiden sarjakehitelmää kompleksiluvuille (vrt. [10])

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\
&= 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \Big(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots\Big) + i\Big(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\Big) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta.
\end{aligned}$$

Muotoa $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ olevaa kaavaa sanotaan keksijänsä mukaan *Eulerin kaavaksi.*

Eulerin kaavasta seuraa kompleksiluvun *eksponenttiesitys*

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

(Ks. [8]).

Esimerkki 2.3. Lasketaan lukujen $z_1 = 2e^{i\frac{3}{4}\pi}$ ja $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ summa. Muunnetaan eksponenttiesitykset ensin polaariesitysmuotoihin

$$z_1 = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi) = 2(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i$$

ja

$$z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}} = 3\big(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\big) = 3(0 - i) = -3i.$$

Polaariesitysmuotoiset luvut voidaan nyt laskea yhteen

$$2e^{i\frac{3}{4}\pi} + 3e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i - 3i = -\frac{2}{\sqrt{2}} + (\frac{2}{\sqrt{2}} - 3)i.$$

2.3 Kompleksilukujen tulo ja potenssi

Olkoot kaksi kompleksilukua polaariesitysmuodossa

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ ja } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Tällä tavalla määriteltynä kompleksilukujen itseisarvot ovat r_1 ja r_2 sekä niiden argumentit θ_1 ja θ_2. (Ks. [5]). Tällöin tulo z_1z_2 saadaan trigonometristen funktioiden summakaavojen avulla muotoon

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2) \\
&= r_1r_2\big[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big] \\
&= r_1r_2\big[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big].
\end{aligned}$$

Kompleksilukujen tulon itseisarvo on siis $r_1 r_2$ ja vaihekulma $\theta_1+\theta_2+2\pi n(z_1, z_2)$, missä lähteen [1, s. 21] mukaan

$$n(z_1, z_2) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq \pi, \\ 1, & \text{kun } -2\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq -\pi, \\ -1, & \text{kun } \quad \pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq 2\pi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Jokaiselle nollasta poikkeavalle kompleksiluvun käänteisluvulle saadaan vastaavasti

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{\mid z^2 \mid} = \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2} = \frac{1}{r}\big[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big].$$

Käänteisluvun tapauksessa itseisarvo muuttuu käänteisluvuksi. Vaihekulma muuttuu vastaluvuksi, joten kun $z_1 z_2 \neq 0$, niin

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2) \text{ ja } \arg(\frac{1}{z}) = -\arg z,$$

missä $n(z_1, z_2)$ on yhtälön (2.1) mukainen.

Jos kompeksiluvun itseisarvo $\mid z \mid = 1$, niin luku voidaan kirjoittaa muotoon $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Tällöin seuraa, että

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

ja yleisemmin *de Moivren* kaava

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

missä n on mikä tahansa kokonaisluku. (Ks. [5]).

2.4 Binomiyhtälön juuret

Binomiyhtälön

$$z^n = 1$$

n juurta ovat juuren $\sqrt[n]{1}$ eri arvot. Ne ovat

$$z_\nu = \cos\nu\frac{2\pi}{n} + i\sin\nu\frac{2\pi}{n},$$

missä $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, ja jaksotermi $\nu\frac{2\pi}{n}$ rajoittuu välille $[0, 2\pi[$. Luvut toteuttavat kyseessä olevan binomiyhtälön, koska kaikki n lukua ovat erisuuria ja de Moivren kaavan mukaan

$$z_\nu^n = \cos\nu 2\pi + i\sin\nu 2\pi = 1.$$

(Ks. [7, s. 194] ja [5]).

Yleisen binomiyhtälön

$$z^n = \alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

n juurta ovat juuren $\sqrt[n]{\alpha}$ eri arvot. Ne voidaan esittää trigonometrisessa muodossa

$$z_\nu = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \nu\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \nu\frac{2\pi}{n}\right)\right], \tag{2.2}$$

missä $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$. Luvut toteuttavat kyseessä olevan binomiyhtälön, koska kaikki n lukua ovat erisuuria ja de Moivren kaavan mukaan

$$z_\nu^n = r\big[\cos\big(\theta + \nu 2\pi\big) + i\sin\big(\theta + \nu 2\pi\big)\big] = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \alpha.$$

(Ks. [7, s. 195]).

3 Kolmannen asteen yhtälö

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisuun liittyy kiehtova tarina. Muotoa $x^3 + px + q = 0$ olevan kolmannen asteen yhtälön ratkaisun löysi suunnilleen vuonna 1515 Bolognan yliopiston matematiikan professori Scipione del Ferro. Ferro ei paljastanut järisyttävää tulostaan, mutta paljasti tämän suuren salaisuutensa oppilaalleen Antonio Maria Fiorille. Vuoden 1535 aikoihin itsenäisen ratkaisun kolmannen asteen yhtälön muodolle $x^3 + px^2 + q = 0$ löysi Niccolo Fontana, joka tunnetaan paremmin nimellä Tartaglia. Fior haastoi Tartaglian kaksintaisteluun aseenaan Ferron ratkaisukaava. Kumpikin tekivät toisilleen annettuja tehtäviä ja taistelu päättyi Tartaglian voittoon, koska hän ratkaisi kaikki Fiorin antamat tehtävät sekä keksi ratkaisun myös Fiorin edustamalle yhtälötyypille.

Monitieteilijä Geronimo Cardano houkutteli Tartaglian kertomaan ratkaisukaavan itselleen, vaikka Tartaglian tarkoitus oli julkaista kirja ratkaisustaan. Cardano julkaisi Tartaglian tuloksen suuressa teoksessaan *Ars Magna*, vaikka salaisuuden kertomiseen liittyi vakuutus olla paljastamatta sitä. Paljastuksen myötä Tartaglia katkeroitui Cardanolle ja tilanteesta syntyi matematiikan historian ensimmäisiä tunnettuja prioriteettikiistoja. Cardano julkaisi myös oppilaansa Ludovico Ferrarin keksimän neljännen asteen yhtälön ratkaisukaavan samassa kirjassa. Cardano ei väittänyt keksineensä kaavoja, vaan tunnusti muiden ansiot.

Kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen toi tekijöilleen kuuluisuutta ja se tunnetaan suurena läpimurtona algebrassa. Merkittävää on myös se, että Cardanon kaavojen löytäminen johti kompleksilukujen keksimiseen. (Ks. [6]).

Luku 3.1 seuraa lähdettä [9].

3.1 Yhtälön ratkaisukaava

Määritelmä 3.1. Yhtälöä, joka on muotoa

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \tag{3.1}$$

sanotaan kolmannen asteen yhtälöksi.

Lause 3.1. *Yhtälön (3.1) juuret ovat*

$$z_1 = -\frac{1}{3}a_2 + (S + T) \tag{3.2}$$

$$z_2 = -\frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{2}(S + T) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \tag{3.3}$$

ja

$$z_3 = -\frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T), \tag{3.4}$$

missä

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} \ \textit{ja} \ T = \sqrt[3]{R - \sqrt{D}}$$

ja edelleen

$$D = Q^3 + R^2, \quad R = \frac{9a_2a_1 - 27a_0 - 2a_2^3}{54} \ \textit{ja} \quad Q = \frac{3a_1 - a_2^2}{9}.$$

Seuraavaksi esitetään kaksi vaihtoehtoista päättelyä.

Todistus. Yhtälön (3.1) ratkaisemiseksi eliminoidaan aluksi termi a_2 tekemällä sijoitus $z \equiv x - \lambda$. Tällöin

$$(x - \lambda)^3 + a_2(x - \lambda)^2 + a_1(x - \lambda) + a_0 = 0,$$

joten

$$(x^3 - 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x - \lambda^3) + a_2(x^2 - 2\lambda x + \lambda^2) + a_1(x - \lambda) + a_0 = 0$$

eli

$$x^3 + (a_2 - 3\lambda)x^2 + (a_1 - 2a_2\lambda + 3\lambda^2)x + (a_0 - a_1\lambda + a_2\lambda^2 - \lambda^3) = 0.$$

Seuraavaksi eliminoidaan termi x^2 olettamalla, että $\lambda = \frac{a_2}{3}$, jolloin $z \equiv x - \frac{1}{3}\,a_2$. Tällöin

$$x^3 + (a_2 - a_2)x^2 + (a_1 - \frac{2}{3}\,a_2^2 + \frac{1}{3}\,a_2^2)x + (a_0 - \frac{1}{3}\,a_1a_2 + \frac{1}{9}\,a_2^2 - \frac{1}{27}\,a_2^3) = 0,$$

joten

$$x^3 + (a_1 - \frac{1}{3}\,a_2^2)x - (\frac{1}{3}\,a_1a_2 - \frac{2}{27}\,a_2^3 - a_0) = 0.$$

Yhtälö voidaan esittää muodossa

$$x^3 + 3\frac{3a_1 - a_2^2}{9}\,x - 2\frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{54} = 0. \tag{3.5}$$

Ensimmäisessä vaihtoehdossa määritellään

$$p \equiv \frac{3a_1 - a_2^2}{3}$$

ja

$$q \equiv \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{27}.$$

Tällöin yhtälö (3.5) voidaan kirjoittaa muodossa

$$x^3 + px = q. \tag{3.6}$$

Merkitään

$$x = w - \frac{p}{3w},$$

jolloin yhtälö (3.6) voidaan kirjoittaa muodossa

$$(w - \frac{p}{3w})^3 + p(w - \frac{p}{3w}) = q.$$

Laskemalla sulut auki saadaan

$$w^3 - pw + \frac{p^2}{3w} - \frac{p^3}{27w^2} + pw - \frac{p^2}{3w} = q,$$

josta sieventämällä saadaan

$$w^3 - \frac{p^3}{27w^3} - q = 0. \tag{3.7}$$

Kertomalla edellinen yhtälö termillä w^3 saadaan yhtälö muotoon

$$(w^3)^2 - q(w^3) - \frac{1}{27}p^3 = 0.$$

Nyt yhtälö on ratkaistavissa toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla, jolloin

$$w^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3},$$

missä $R = \frac{1}{2}q$ ja $Q = \frac{1}{3}p$. Tällöin termillä w on olemassa kuusi ratkaisua. Sijoittamalla w takaisin yhtälöön (3.7) saadaan kolme paria, joista jokainen pari on identtinen, joten kolmannen asteen yhtälöllä on kolme ratkaisua. (Ks. [9]).

Vaihtoehtoisesti yhtälö (3.5) voidaan ratkaista erottamalla muotoa $x - B$ oleva termi kolmannen asteen yhtälöstä. Aluksi määritellään vakiot

$$R = \frac{9a_2a_1 - 27a_0 - 2a_2^3}{54}$$

ja

$$Q = \frac{3a_1 - a_2^2}{9}.$$

Tällöin yleinen kolmannen asteen yhtälö (3.5) tulee muotoon

$$x^3 + 3Qx - 2R = 0. \tag{3.8}$$

Olkoot B ja C mielivaltaisia vakioita. Polynomin tekijöihin jaossa samankorkuisten potenssien erotuksen laskusäännön nojalla

$$x^3 - B^3 = (x - B)(x^2 + Bx + B^2). \tag{3.9}$$

Yleinen kolmannen asteen yhtälö voitaisiin jakaa tekijöihin, mikäli siinä ei olisi termiä x. Koska yleisesti Q on nollasta poikkeava, lisätään yhtälöön (3.9) puolittain termi $C(x-B)$, jolloin saadaan identiteetti

$$(x^3-B^3)+C(x-B)=(x-B)(x^2+Bx+B^2+C)=0,$$

joka saadaan termien uudelleen järjestelyillä muotoon

$$x^3+Cx-(B^3+BC)=(x-B)[x^2+Bx+(B^2+C)]=0. \tag{3.10}$$

Seuraavaksi etsitään vastaavuudet termeille C ja $-(B^3+BC)$ yhtälöistä (3.8) ja (3.10), jolloin nähdään, että $C=3Q$ ja $B^3+BC=2R$. Sijoittamalla ensimmäinen jälkimmäiseen, saadaan

$$B^3+3QB=2R. \tag{3.11}$$

Seuraavaksi osoitetaan, että

$$B=\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{1}{3}}+\big[R-\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{1}{3}}$$

toteuttaa yhtälön (3.11). Korottamalla edellinen yhtälö neliöön, saadaan binomin neliökaavan avulla muoto

$$\begin{aligned}
B^2&=\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{2}{3}}+2\big[(R+\sqrt{Q^3+R^2})(R-\sqrt{Q^3+R^2})\big]^{\frac{1}{3}}\\
&\qquad\qquad+\big[R-\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{2}{3}}\\
&=\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{2}{3}}+2\big[(R^2-(Q^3+R^2)\big]^{\frac{1}{3}}+\big[R-\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{2}{3}}\\
&=\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{2}{3}}+\big[R-\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{2}{3}}-2Q.
\end{aligned}$$

Korotetaan B kolmanteen, jolloin

$$\begin{aligned}
B^3&=-2QB+\Big\{\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{1}{3}}+\big[(R-\sqrt{Q^3+R^2})\big]^{\frac{1}{3}}\Big\}\\
&\qquad\cdot\Big\{\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]^{\frac{2}{3}}+\big[(R-\sqrt{Q^3+R^2})\big]^{\frac{2}{3}}\Big\}\\
&=\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\,\big]+\big[(R-\sqrt{Q^3+R^2})\big]+\big[(R+\sqrt{Q^3+R^2})\big]^{\frac{1}{3}}\\
&\qquad\cdot\big[(R-\sqrt{Q^3+R^2})\big]^{\frac{2}{3}}+\big[(R+\sqrt{Q^3+R^2})\big]^{\frac{2}{3}}\\
&\qquad\cdot\big[(R-\sqrt{Q^3+R^2})\big]^{\frac{1}{3}}-2QB\\
&=-2QB+2R+\Big\{\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\big]\big[R-\sqrt{Q^3+R^2}\big]\Big\}^{\frac{1}{3}}\\
&\qquad\cdot\big[R-\sqrt{Q^3+R^2}\big]^{\frac{1}{3}}+\Big\{\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\big]\big[R-\sqrt{Q^3+R^2}\big]\Big\}^{\frac{1}{3}}\\
&\qquad\cdot\big[R+\sqrt{Q^3+R^2}\big]^{\frac{1}{3}}\\
&=-2QB+2R+\big[R^2-(Q^3+R^2)\big]^{\frac{1}{3}}\\
&\qquad\cdot\big[(R+\sqrt{Q^3+R^2})^{\frac{1}{3}}+(R-\sqrt{Q^3+R^2})^{\frac{1}{3}}\big]\\
&=-2QB+2R-QB\\
&=-3QB+2R.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla B^3 ja B yhtälön (3.11) vasemmalle puolelle, saadaan

$$(-3QB + 2R) + 3QB = 2R,$$

joten on löydetty ratkaisu $x = B$ yhtälölle (3.8). Seuraavaksi jaetaan tekijöihin toisen asteen tekijä yhtälöstä (3.10). Sijoitetaan $C = 3Q$ yhtälöön $x^2 + Bx + (B^2 + C)$, jolloin saadaan

$$x^2 + Bx + (B^2 + 3Q) = 0. \tag{3.12}$$

Yllä olevasta yhtälöstä x saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla ja kompleksilukujen laskusäännöillä

$$\begin{aligned} x &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4(B^2 + 3Q)}}{2} = -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3B^2 - 12Q} \\ &= -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3(B^2 + 4Q)} = -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i\sqrt{B^2 + 4Q}. \end{aligned}$$

Edellinen yhtälö voidaan sieventää määrittelemällä

$$A \equiv \left[R + \sqrt{Q^3 + R^2}\,\right]^{\frac{1}{3}} - \left[R - \sqrt{Q^3 + R^2}\,\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A^2 &= \left[R + \sqrt{Q^3 + R^2}\,\right]^{\frac{2}{3}} - 2\left[(R^2 - (Q^3 + R^2)\right]^{\frac{1}{3}} + \left[R - \sqrt{Q^3 + R^2}\,\right]^{\frac{2}{3}} \\ &= \left[R + \sqrt{Q^3 + R^2}\,\right]^{\frac{2}{3}} + \left[R - \sqrt{Q^3 + R^2}\,\right]^{\frac{2}{3}} + 2Q \\ &= B^2 + 4Q, \end{aligned}$$

joten yhtälön (3.12) ratkaisut voidaan kirjoittaa muodossa

$$x = -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\, iA.$$

Määritellään

$$\begin{aligned} D &\equiv Q^3 + R^2 \\ S &\equiv \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} \\ T &\equiv \sqrt[3]{R - \sqrt{D}}, \end{aligned}$$

missä D on *diskriminantti*. Tällöin saadaan yksinkertaiset esitysmuodot termeille A ja B

$$\begin{aligned} A &= S - T \\ B &= S + T. \end{aligned}$$

Lopulta saadaan alkuperäisen yhtälön juuret esitettyä muodossa

$$z_1 = -\frac{1}{3}\,a_2 + (S+T)$$

$$z_2 = -\frac{1}{3}\,a_2 - \frac{1}{2}\,(S+T) + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T)$$

ja

$$z_3 = -\frac{1}{3}\,a_2 - \frac{1}{2}\,(S+T) - \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T),$$

missä a_2 on termin z^2 kerroin sekä S ja T kuten edellä on määritelty. □

Yhtälöt (3.2), (3.3) ja (3.4) tunnetaan *Cardanon* yhtälöinä. Mikäli yhtälö on muotoa

$$x^3 + px + q = 0,$$

missä x on muuttujana ja $a_2 = 0$, $a_1 = p$ ja $a_0 = q$, niin vakioilla on yksinkertainen muoto

$$Q = \frac{1}{3}p$$
$$R = -\frac{1}{2}q$$
$$D = Q^3 + R^2 = (\frac{p}{3})^3 + (-\frac{q}{2})^2.$$

Lisäksi saadaan (Ks. [7, s. 199]), että

$$ST = -\frac{p}{3}. \tag{3.13}$$

3.2 Reaalisuustarkasteluja

Reaalisuustarkastelut seuraavat Väisälän teosta [7, s. 199].

Lause 3.2. *Olkoon yhtälön*

$$x^3 + px + q = 0 \tag{3.14}$$

kertoimet reaaliset. Diskriminanttia merkitään $D = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$.

(i) *Jos* $D > 0$*, niin yksi juurista on reaalinen ja kaksi muuta ovat kompleksisia liittolukuja.*

(ii) *Jos* $D < 0$*, niin kaikki juuret ovat reaalisia ja erisuuria.*

(iii) *Jos* $D = 0$*, niin kaikki juuret ovat reaalisia ja ainakin kaksi juurta ovat samoja.*

Todistus. Olkoon $D > 0$. Yhtälön (3.2) perusteella ensimmäinen juuri on reaalinen. Yhtälöissä (3.3) ja (3.4) S ja T ovat erisuuria, koska $D > 0$. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$x_1 = S + T,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)$$

ja

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T),$$

missä $S \neq T$. Nähdään, että x_2 ja x_3 ovat imaginaarisia liittolukuja.

Olkoon $D < 0$. Tämä on mahdollista vain, kun $p < 0$. Kirjoitetaan S ja T muotoon

$$S^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{(-\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \tag{3.15}$$

ja

$$T^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{(-\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}. \tag{3.16}$$

Koska $D = (-\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$, niin S^3 ja T^3 ovat imaginaarisia liittolukuja. Kompleksilukujen ominaisuuksien perusteella $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$, kun $D < 0$, joten yhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon

$$S^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{3.17}$$

ja

$$T^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D} = r(\cos\theta - i\sin\theta). \tag{3.18}$$

Tällöin r saadaan suoraan määritelmästä 2.2

$$r = \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-\left[\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}\right)^2} = \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3$$

ja vastaavasti θ

$$\cos\theta = \frac{-\frac{q}{2}}{r} = -\frac{q}{2r}.$$

Yhtälöiden (3.17) ja (3.18) ratkaisut voidaan kirjoittaa yhtälön (2.2) nojalla muotoon

$$\begin{aligned} S_\nu &= \sqrt[3]{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3} + \nu\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \nu\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3} + \nu\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \nu\frac{2\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
T_\nu &= \sqrt[3]{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}+\nu\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{3}+\nu\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}+\nu\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{3}+\nu\frac{2\pi}{3}\right)\right],
\end{aligned}
$$

missä $\nu = 0, 1, 2$. Nyt yhtälön (3.14) ratkaisu on muuttujien S_ν ja T_ν summa, koska samaa vakion ν arvoa vastaava S_ν ja T_ν toteuttavat yhtälön (3.13). Ratkaisut voidaan kirjoittaa muotoon

$$
\begin{aligned}
x_1 &= S_0 + T_0 \qquad (3.19)\\
&= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] \\
&+ \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right] \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= S_1 + T_1 \qquad (3.21)\\
&= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&+ \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
x_3 &= S_2 + T_2 \qquad (3.23)\\
&= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right] \\
&+ \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right] \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right). \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Koska $p < 0$, nähdään, että kaikki juuret ovat reaalisia ja erisuuria.

Olkoon $D = 0$. Tämä tapaus on mahdollinen vain silloin, kun $p < 0$ tai $p = 0$ ja $q = 0$. Jos $p < 0$, niin yhtälöiden (3.15) ja (3.16) oikeat puolet kutistuvat luvuksi $-\frac{q}{2}$. Jos $p = 0$ ja $q = 0$, niin kaikki juuret ovat $x_1 =$

$x_2 = x_3 = 0$. Yhtälö (3.13) toteutuu, kun vakioiksi S ja T valitaan tämän reaalinen kolmas juuri. Koska toisen asteen termin kerroin $a_2 = 0$, ratkaisut supistuvat Cardanon yhtälöiden (3.2), (3.3) ja (3.4) avulla muotoon

$$x_1 = -\frac{1}{3}\,a_2 + (S+T) = S+T = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{3}\,a_2 - \frac{1}{2}\,(S+T) + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) = -\frac{1}{2}\,(S+T) + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) \\ &= -\frac{1}{2}\,(-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}) + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(-\frac{q}{2} - (-\frac{q}{2})) = -\frac{1}{2}\,(-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}) = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{1}{3}\,a_2 - \frac{1}{2}\,(S+T) - \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) = -\frac{1}{2}\,(S+T) - \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) \\ &= -\frac{1}{2}\,(-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}) - \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(-\frac{q}{2} - (-\frac{q}{2})) = -\frac{1}{2}\,(-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}) = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \end{aligned}$$

Huomataan, että nyt $x_2 = x_3$. Saadut tulokset pätevät myös yleiselle kolmannen asteen yhtälölle (3.1), sillä $z_n = x_n - \frac{1}{3}a_2$, missä $n = 1, 2, 3$. Tällöin $D = Q^3 + R^2$. □

3.3 Casus irreducibilis

Cardanon kaavoja (3.2), (3.3) ja (3.4) voidaan käyttää sellaisenaan kolmannen asteen yhtälöä ratkaistaessa, mikäli $D \geq 0$. Kuten reaalisuustarkasteluissa nähtiin, niin ratkaisukaavat saavat uuden muodon, kun $D < 0$. Tässä tapauksessa ratkaisut saadaan kaavoista (3.19), (3.21) ja (3.23).

Cardanon kaavojen (3.2), (3.3) ja (3.4) keksijät ja heidän aikalaisensa joutuivat ongelmallisten tilanteiden eteen aina, kun $D < 0$, koska kaavat menettivät tällöin merkityksensä imaginaarisuutensa takia. Kompleksiluvut eivät olleet tällöin vielä tuttuja, mutta hieman myöhemmin kompleksiluvut hyväksyttiin käyttöön ja kaavat tulivat käyttökelpoisiksi. Tällöin kuitenkin jouduttiin luopumaan puhtaasta algebrallisuudesta, koska trigonometriset funktiot tulivat mukaan. Kun $D < 0$, yhtälön juuria ei siis voida lausua pelkästään reaalisten juurilausekkeiden avulla, joten tapaus on saanut nimen *casus irreducibilis*. (Ks. [7, s. 201]).

3.4 Esimerkkejä

Esimerkki 3.1. (Vrt. [4, Harjoitus 10.9, s. 150]).
Ratkaistaan yhtälö $x^3 - 2x + 4 = 0$. Yhtälö on vaillinainen kolmannen asteen yhtälö, koska siitä puuttuu toisen asteen termi. Yhtälö on siis muotoa $x^3 +$

$px + q = 0$, missä x on muuttujana ja $a_2 = 0$, $a_1 = p = -2$ ja $a_0 = q = 4$, joten voidaan käyttää lausekkeita

$$Q = \frac{1}{3}\,p = \frac{1}{3}\,(-2) = -\frac{2}{3},$$
$$R = -\frac{1}{2}\,q = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$$

ja

$$D = Q^3 + R^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^3 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = \left(\frac{-8}{27}\right)^3 + 4 = \frac{100}{27}.$$

Koska $D > 0$, yhtälöllä on yksi reaalinen ja kaksi kompleksista ratkaisua. Sijoitetaan yllä saadut luvut Cardanon yhtälöihin

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{3}\,a_2 + (S+T) = S + T = \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} \\
&= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{\frac{100}{27}}} = -2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= -\frac{1}{3}\,a_2 - \frac{1}{2}\,(S+T) + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) = -\frac{1}{2}\,(S+T) + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{R+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{R-\sqrt{D}}\right) + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{R+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{R-\sqrt{D}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\,(-2) + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-2+\sqrt{\frac{100}{27}}} - \sqrt[3]{-2-\sqrt{\frac{100}{27}}}\right) \\
&= 1 + i
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
x_3 &= -\frac{1}{3}\,a_2 - \frac{1}{2}\,(S+T) - \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) = -\frac{1}{2}\,(S+T) - \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{R+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{R-\sqrt{D}}\right) - \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{R+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{R-\sqrt{D}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\,(-2) - \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-2+\sqrt{\frac{100}{27}}} - \sqrt[3]{-2-\sqrt{\frac{100}{27}}}\right) \\
&= 1 - i.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.2. (Ks. [6, Harjoitus 5]).
Ratkaistaan yhtälön $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ juuret. Yhtälö on kolmannen asteen yhtälö, jossa $a_2 = -4$, $a_1 = 6$ ja $a_0 = -4$. Saadaan

$$Q = \frac{3a_1 - a_2^2}{9} = \frac{3 \cdot 6 - a(-4)^2}{9} = \frac{2}{9},$$

$$R = \frac{9a_2a_1 - 27a_0 - 2a_2^3}{54} = \frac{9\cdot(-4) - 27\cdot(-4) - 2(-4)^3}{54} = \frac{20}{54} = \frac{10}{27}$$

ja

$$D = Q^3 + R^2 = \Big(\frac{2}{9}\Big)^3 + \Big(\frac{10}{27}\Big)^2 = \frac{4}{27}.$$

Koska $D > 0$, yhtälöllä on yksi reaalinen ja kaksi kompleksista ratkaisua. Sijoitetaan yllä saadut luvut Cardanon yhtälöihin

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{3}\,a_2 + (S+T) = -\frac{1}{3}\,a_2 + \sqrt[3]{R+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{R-\sqrt{D}} \\ &= -\frac{1}{3}\,(-4) + \sqrt[3]{\frac{10}{27} + \sqrt{\frac{4}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{10}{27} - \sqrt{\frac{4}{27}}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{3}\,a_2 - \frac{1}{2}\,(S+T) + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\Big(\sqrt[3]{R+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{R-\sqrt{D}}\Big) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{\frac{10}{27} + \sqrt{\frac{4}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{10}{27} - \sqrt{\frac{4}{27}}}\right) \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{1}{3}\,a_2 - \frac{1}{2}\,(S+T) - \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}(S-T) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - i \\ &= 1 - i. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.3. (Vrt. [6]).
Ratkaistaan yhtälö $x^3 - 4x - 2 = 0$. Yhtälö on vaillinainen kolmannen asteen yhtälö ja on siis muotoa $x^3 + px + q = 0$, missä x on muuttujana ja $a_2 = 0$, $a_1 = p = -4$ ja $a_0 = q = -2$, joten voidaan käyttää lausekkeita

$$Q = \frac{1}{3}\,p = \frac{1}{3}\,(-4) = -\frac{4}{3},$$
$$R = -\frac{1}{2}\,q = -\frac{1}{2}\,(-2) = 1$$

ja

$$D = Q^3 + R^2 = \Big(-\frac{4}{3}\Big)^3 + 1^2 = -\frac{64}{27} + 1 = -\frac{37}{27} = -1,37\ldots.$$

Koska $D < 0$, yhtälöllä on kolme erisuurta reaalista juurta. Yhtälön ensimmäinen juuri ratkaistaan kaavan (3.19) mukaan seuraavasti

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\arccos(-\frac{q}{2r})}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\arccos\left(-\frac{q}{2(-\frac{p}{3})^{\frac{3}{2}}}\right)}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{-\frac{(-4)}{3}}\cos\left(\frac{\arccos\left(-\frac{(-2)}{2(-\frac{(-4)}{3})^{\frac{3}{2}}}\right)}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{4}{3}}\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{2}{2(\frac{4}{3})^{\frac{3}{2}}}\right)}{3}\right) \\
&\approx 2,214.
\end{aligned}$$

Vastaavasti kaksi muuta juurta saadaan kaavoista (3.21) ja (3.23)

$$\begin{aligned}
x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{4}{3}}\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{2}{2(\frac{4}{3})^{\frac{3}{2}}}\right)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&\approx -1,675
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
x_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{4}{3}}\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{2}{2(\frac{4}{3})^{\frac{3}{2}}}\right)}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&\approx -0,539.
\end{aligned}$$

Viitteet

[1] Apostol, Tom M. *Mathematical Analysis, second edition.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., California Institute of Technology, 1974.

[2] Andreescu, Titu & Andrica, Dorin *Complex Numbers from A to...Z.* Birkhäuser, Boston, 2006.

[3] Howie, John M. *Complex Analysis.* Springer-Verlag, London, 2003.

[4] Irving, Ronald S. *Integers, polynomials, and rings.* Springer-Verlag, USA, 2004.

[5] Kivelä, Simo K.: *Kompleksiluvut.* http://matta.hut.fi/mattafi/cluvut/komplluvut.html (10.4.2008).

[6] Saksman, E.: *Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa.* http://solmu.math.helsinki.fi/2000/2/saksman/ (10.4.2008).

[7] Väisälä, K. *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet.* Otava, Helsinki, 1950.

[8] Weisstein, Eric W.: *Complex Number.* MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ComplexNumber.html (10.4.2008).

[9] Weisstein, Eric W.: *Cubic Formula.* MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html (10.4.2008).

[10] Weisstein, Eric W.: *Euler Formula.* MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/EulerFormula.html (20.5.2008).