TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Veikka Pirhonen

Derivaatasta, konveksisuudesta ja väliarvolauseesta sekä niiden historiasta

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Heinäkuu 2008

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pirhonen, Veikka: Derivaatasta, konveksisuudesta ja väliarvolauseesta sekä niiden historiasta

Pro gradu -tutkielma, 40 s.

Matematiikka

Heinäkuu 2008

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa käsitellään derivaattaa, funktion konveksisuutta sekä väliarvolausetta. Ensimmäiseksi tutustutaan historiaan ja käydään läpi työssä tarkasteltavien aiheiden kehittymistä, minkä jälkeen esitelleen varsinaisessa aiheessa tarvittavia määritelmiä ja apulauseita. Tämän jälkeen tarkastellaan derivaatan käsitettä, derivaatan ja jatkuvuuden yhteyttä sekä derivoimiskaavoja. Seuraavaksi perehdytään funktion konveksisuuteen, konveksisuuden ja jatkuvuuden yhteyteen sekä konveksin funktion derivaattaan. Lopuksi tarkastellaan differentiaalilaskennan väliarvolausetta ja L'Hospitalin sääntöä.

Sisältö

1 Johdanto. Historiallinen katsaus

Matematiikan historiaan tutustuminen antaa pienellä vaivalla paljon perspektiiviä matematiikan kehityksen vaatimasta työstä ja matematiikan haasteellisuudesta. Matematiikan tutkijat ovat aina mahdollisuuksien mukaan perehtyneet ensin olemassa oleviin tuloksiin ja tutkineet niiden paikkansapitävyyttä. Matemaattisen historian lisäksi kiinnostavaa on myös tarkastella henkilöitä tulosten takana. Tässä luvussa käydään läpi differentiaalilaskennan kehitystä. Tarkoitus on keskittyä tässä tutkielmassa käsiteltäviin aiheisiin ja merkittäviin henkilöihin. Lähteinä on käytetty [1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

1.1 Integraali- ja differentiaalilaskennan syntyminen

Ensimmäisiä merkkejä integraalilaskennan kehityksen alkamisesta voidaan löytää Egyptistä jo 1800 vuotta ennen ajanlaskun alkua. *Moscow Mathematical Papyrus* -papyruksessa on merkintöjä onnistuneesta pinta-alan ja tilavuuden määrittämisestä. Egyptiläisten käyttämät menetelmät eivät kuitenkaan olleet nykyisten integraalilaskennan menetelmien kaltaisia. Siihen aikaan matematiikka oli enemmänkin työkalu eikä teoreettisen pohdinnan kohde. 1500 vuotta myöhemmin antiikin Kreikan matemaatikko Eudoxus Knidoslainen (403-355 eKr.) käytti ekshaustio- eli tyhjennysmenetelmää, jolla hän laski ympyrän pinta-alan piirtämällä ympyrän sisään säännöllisiä monikulmioita. Tässä menetelmässä monikulmio jaetaan tasakylkisiksi kolmioiksi, joiden kantana on monikulmion sivu ja huippu ympyrän keskipisteessä. Kun piirretään n-kulmainen monikulmio, niin lähestyy monikulmion muoto ympyrää. Tällöin tasakylkisen kolmion kanta lyhenee, mutta lähestyy n:llä kerrottuna ympyrän kehän pituutta. Lisäksi kolmion korkeus lähestyy ympyrän sädettä. Monikulmion pinta-ala saadaan siis lausekkeesta

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot \text{kanta} \cdot \text{korkeus},$$

joten ympyrän pinta-alaksi saadaan

$$\frac{1}{2} \cdot \text{kehän pituus} \cdot \text{säde}.$$

Tällöin Eudoxus käsitteli hiukan teoreettisempaa raja-arvon käsitettä. 150 vuotta myöhemmin Arkhimedes Syrakusalainen (287-212 eKr.) jalosti hänen ajatuksiaan ja kehitti ensimmäisenä määrätyn integraalin teoriaa. Vuonna 1906 löydettiin Arkhimedeen kirjoittama kirje, josta käy ilmi miten hän on itse asiassa pystynyt nopeasti laskemaan esim. paraabelin kaaren rajoittamien alueiden pinta-aloja. Menetelmässä Arkhimedes laski ”äärettömän monen äärettömän pienen” suureen summat, mutta tämä ei loogisesti ollut hänestä tyydyttävää. Tämä on ehkä selitys sille miksi hänen integraalilaskennalle tekemänsä tutkimukset eivät hänen elinaikanaan tulleet selvästi julki.

Differentiaalilaskennan syntyminen ajatellaan alkaneeksi, kun fyysikot ja tähtitieteilijät tutkivat kappaleen nopeutta ja päätyivät siitä derivaatan käsitteeseen. Joidenkin lähteiden mukaan pinta-alojen optimointiin liittyneet ongelmat voidaan tulkita differentiaalilaskennan kehityksen alulle panijaksi. Vanhimmat muutoksen suuruuteen liittyvät kirjoitukset ovat peräisin Intiasta matemaatikko Aryabhatan (476 - 550) tutkimuksista. Hän tutki eritysesti Kuun liikkeitä. Merkittävä kehitysaskel differentiaalilaskennassa löytyy 1100-luvulta intialaisen matemaatikon Bhâskara II:n (1114 - 1185) töistä. Hän liitti Arkhimedeen luoman infinitesimaalin käsitteen ilmeisesti ensimmäisenä diffrentiaalilaskentaan. Arkhimedes oli käyttänyt tätä käsitettä "erittäin pieni" tai tarkemmin: "luku, jonka itseisarvo on pienempi kuin mikä tahansa nollasta eroava positiivinen luku" algebrallisissa päättelyissään. Bhâskara II aloitti merkittävän aikakauden differentiaalilaskennan kehityksessä, ja monet muut matemaatikot Intian Keralassa jatkoivat hänen tutkimustaan. Bhâskara II ymmärsi esimerkiksi derivaatan käsitteen ja määritti alkeellisten funktioiden derivaattoja. Hänen tutkimuksistaan löytyi myös väliarvolauseen hahmottelua. Toinen nimeltä mainittava Keralan matemaatikko on kaksi sataa vuotta myöhemmin elänyt Vatasseri Parameshvara (1360-1425). Hän jatkoi muun muassa Bhâskara II:n tutkimuksia derivaatan antamasta informaatiosta alkuperäisestä funktiosta ja kehitti ensimmäistä muotoa väliarvolauseesta pidemmälle. Tästä kesti kuitenkin melkein 400 vuotta ennen kuin Augustin Cauchy (1789-1857) teki nykyaikaisen muotoilun väliarvolauseesta, joten kovin täsmällisestä muotoilusta ei vielä ollut kysymys.

Mielenkiintoista edellä olevassa on integraali- ja differentiaalilaskennan kehitysjärjestys. Toisin kuin nykyajan kouluopetuksen esitysjärjetstys, määrätty integraali syntyi siis ensimmäiseksi, seuraavaksi derivaatta ja viimeisenä integraalilaskennan toinen osa eli integraalifunktio.

1.2 Infinitesimaalilaskennan vuosisata

1600-luvulla tapahtunutta matematiikan tutkimusta voidaan pitää eräänä matematiikan historian suurista käännekohdista. Tuolloin infinitesimaalilaskenta, eli nykymatematiikan keskeiset metodit: differentiaali- ja integraalilaskenta kehittyivät nopeasti. Ensimmäisiä moderneja infinitesimaalisten päättelyjen esittäjiä oli Simon Stevin (1548-1620), joka vuonna 1586 ilmestyneessä teoksessaan *De Beghinselen der Weeghconst* käsitteli kolmion muotoisen kappaleen painopisteen sijaintia mediaanilla ajattelemalla kolmion sisään piirrettyjä pieniä suunnikkaita, joiden pitemmät sivuparit olivat kolmion sivujen suuntaisia. Kunkin tällaisen painopiste oli suunnikkaan keskikohdassa, joten kolmiokin tuli tasapainottumaan pitkin kutakin mediaaniaan.

Stevinin jälkeen infinitesimaalisia pinta-alan- ja tilavuudenmääritysmenetelmiä käytti huomattavalla menestyksellä tähtitieteestä paremmin tunnettu Johannes Kepler (1571-1630). Ympyrän ja ellipsin alat hän laski täyttämällä kuviot pienillä kolmioilla, joiden kantojen annettiin kutistua "äärettömän pieniksi". Tarinan mukaan vuosi 1612 oli hyvä viinivuosi ja tämä inspiroi Keplerin käyttämään samoja menetelmiä viinitynnyrien tilavuuksien laskemiseksi. Tulokset ja avoimiksi jääneet kysymykset hän julkaisi vuonna 1615 teoksessa *Nova stereometria doliorum vinariorum*. Samoihin aikoihin toinen tähtitieteilijä Galileo Galilei (1564-1642) teki varteenotettavia havaintoja "äärettömän pienistä" ja "äärettömän suurista" suureista. Hän muun muassa kiinnitti huomiota "eri kertalukua" oleviin äärettömän pieniin suureisiin. Galilein oppilas, Bolognan professori Bonaventura Cavalieri (1598-1647) tutki muun muassa infinitesimaalilaskentaa. Cavalierin "integrointimenetelmät" olivat Keplerin käyttämiä menetelmiä täsmällisempiä ja johtivat tulokseen useammin. Toinenkin Galilein oppilas Evangelista Torricelli (1608-1647) teki merkittävää tutkimusta infinitesimaalilaskennan parissa. Hän kuoli kuitenkin nuorena, jonka jälkeen matematiikan kehityksen kärki siirtyi Italiasta Ranskaan.

Analyyttisen geometrian kehittäjä René Descartes (1596-1650) teki ensimmäisiä infinitesimaalisia tangentinmäärityksiä noin vuoden 1630 paikkeilla, vaikka derivaatan ajatus oli ymmärretty jo 1100-luvulla. Descartes oli yksi 1600-luvun keskeisimpiä matemaatikoita, vaikka hän käyttikin yli kymmenen vuotta elämästään seikkailuihin uhkapelien ja muiden huvitusten maailmassa. Hänen suuri intohimonsa oli filosofia ja ehkä tunnetuin päätelmänsä onkin filosofinen: "ajattelen, siis olen". Toinen analyyttistä geometriaa kehittänyt tiedemies oli Pierre de Fermat (1601-1665). Ammatiltaan Fermat oli juristi ja teki pitäkn uran valtion virkamiehenä, mutta hän oli monipuolinen ja aktiivinen matematiikan harrastaja. Vaikka matematiikka oli hänelle vain harrastus, saavutti hän hyvin merkittäviä tuloksia. Hänen kirjeenvaihtonsa Blaise Pascalin (1625-1662) kanssa aloitti modernin todennäköisyyslaskennan ja hänen lukuteoriaa koskevien lauseiden uudelleen todistamiseen on mennyt jopa satoja vuosia. Erittäin menestynyt matemaatikko Pierre-Simon Laplace (1749-1827) on sanonut, että Fermat oli differentiaalilaskennan todellinen keksijä. Fermat'n maksimiperiaate oli ensimmäisiä analyyttisiä tangentinmäärityksiä. Funktion f maksimikohdan määrittämiseksi Fermat tarkasteli yhtälöä

$$f(x+E) = f(x).$$

Tämä yhtälö jaettiin puolittain E:llä, sijoitettiin $E = 0$ ja ratkaistiin x. Havainnollistetaan tätä menetelmää ja määritetään funktion

$$f(x) = x - x^2$$

maksimikohta. Tarkastellaan siis yhtälöä

$$f(x+E) = f(x)$$

eli

$$x + E - (x+E)^2 = x - x^2.$$

Yhtäpitävä yhtälö on

$$x + E - x^2 - 2xE - E^2 = x - x^2$$

eli

$$E - 2xE - E^2 = 0.$$

Jakamalla E:llä saadaan

$$1 - 2x - E = 0.$$

Sijoitetaan $E = 0$ ja ratkaistaan x, jolloin saadaan

$$x = \frac{1}{2}.$$

Raja-arvon käsitettä Fermat ei tuntenut, mutta menettelyllä on selvästi yhtymäkohtia erotusosamäärän raja-arvon määritykseen. Fermat'n ja muun muassa Descartes'n tutkimia tangentinmääritysmenetelmiä jatkoivat Johann Hudde (1628-1704) ja René François de Sluse (1622-1685). He tutkivat laskennallisempia tapoja tangentinmääritykseen ja yksinkertaistivat Fermat'n ja Descartesin monimutkaisempia menetelmiä.

Isaac Barrow (1630-1677) tulkitsi tangentin 1660-luvulla pitämissä luennoissaan kahden lähekkäin olevan käyrän pisteen kautta kulkevan suoran raja-asennoksi. Tämä on tiettävästi ensimmäinen selkeä erotusosamäärän raja-arvon määrittäminen. Barrow tutki myös geometrisesti differentiaalilaskennan peruslausetta eli derivaatan ja integraalin välistä yhteyttä, joten hänen panostaan ei turhan takia korosteta.

1.3 Newtonin kaksi tehokasta vuotta

Isaac Barrow'n oppilas Isaac Newton (1642-1727) opiskeli matematiikkaa Cambridgen yliopistossa. Hän on yksi keskeisimpiä differentiaalilaskennan kehittäjiä. Hän muun muassa oivalsi pinta-alanmäärittämisen ja tangentinmäärittämisen yhteyden. Mielenkiintoista on, että tärkeimmät tieteelliset saavutuksensa: binomisarjan, differentiaali- ja integraalilaskennan kehityksen, värien luonteen sekä yleisen painovoimalain, hän kehitti vuosina 1665-1666. Tällöin hän oli vielä opiskelija, kun yliopisto oli suljettuna kulkutautiepidemian vuoksi. Newton kirjoittikin vanhana: "All this was in the two plague years 1665 & 1666 for in those days I was in the prime of my age for invention and minded Mathematics and Philosophy more than at any time since". Yllättävän pian Newton pääsi Cambridgen yliopiston professoriksi. Barrow nimittäin luopui 1669 vapaaehtoisesti paikastaan lahjakkaan oppilaansa hyväksi. Siinä tehtävässä Newton toimi 30 vuotta. Newtonin saavutukset professorina olivat vaatimattomia. Hän panosti erityisesti alkemiaan eikä tietenkään onnistunut.

Isaac Newtonin ensimmäinen differentiaalilaskentaa käsittelevä käsikirjoitus on vuodelta 1666, ja vuonna 1669 kirjoitettu *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas* levisi käsikirjoituksena Englannissa. Newton ei juuri julkaissut elinaikanaan puhtaasti matemaattisia töitä. Hänen ehkä tärkein matemaattinen tutkimuksensa oli *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, jonka hän kirjoitti vuonna 1671, mutta joka julkaistiin hänen kuolemansa jälkeen vasta 1736. Siinä hän käsittelee muun muassa Newtonin menetelmän nimellä tunnettua menetelmää, jossa yhtälö ratkaistaan likimääräisesti korvaamalla funktion kuvaaja funktion tangentilla. Hänen ensimmäinen painettu kirjansa differentiaali- ja integraalilaskennan tutkimuksista oli 1704 ilmestyneen *Optics*-teoksen liitteenä julkaistu *De quadratura curvarum*. Newtonin differentiaalilaskennan perusta tuli fysiikan puolelta. Hän ajatteli käyrän syntyvän kahdella akselilla liikkuvien pisteiden liikkeiden yhdistämisestä. Jos x ja y ovat ajan funktioita, Newtonin terminologialla *fluentteja*, niin ne saavat lyhyenä aikana o lisäykset po ja qo. Käyrän $f(x, y) = 0$ tangentin kulmakerroin on $\frac{q}{p}$, eli lukujen y ja x hetkellisten muutosten suhde. Fluentin derivaatta oli nimentään *fluksio* ja termi on käytössä mekaniikassa edelleenkin.

Analyysin peruskäsite raja-arvo ei ollut Newtonille aivan selvä. Hänen mukaansa ”pienet lisäykset” ovat tarpeen mukaan tasan nollia, jolloin ne voidaan pyyhkiä pois, tai pieniä nollasta eroavia lukuja, jolloin niillä voi supistaa. Derivaattaa määritellessään Newton käyttää ilmaisua ”häviävien suureiden viimeinen suhde” tai ”syntyvien suureiden ensimmäinen suhde”, siinä tapauksessa kun nykyään tarkastellaan raja-arvoa.

Newton ei siis onnistunut luomaan vankkaa teoriapohjaa, mutta integrointi- ja derivointimenetelmiä hän onnistui kehittämään huomattavasti. Hän nimesi laskusääntökokoelmansa ”kalkyyliksi”. Esimerkiksi ketjusääntö ja integroinnin sijoitusmenetelmä ovat Newton tutkimuksen tuloksia. Teoreettisemmalta puolelta hän havaitsi derivointi- ja integrointioperaatioiden käänteisyyden ja oli näin mukana kehittämässä differentiaalilaskennan peruslausetta.

1.4 Monipuolinen Leibniz loi merkintätavat

Samoihin aikoihin Newtonin kanssa tutki differentiaalilaskentaa filosofi ja yleisnero Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Häntä pidetään Newtonin ohella toisena keskeisimpänä differentiaalilaskennan kehittäjänä. Henkilönä Leibniz on kiinnostava monipuolisuutensa vuoksi. Hän oli tuottelias matematiikan lisäksi esimerkiksi filosofian, teologian, historian, politiikan, juridiikan, fysiikan ja geologian alalla. Hän kirjoitti filosofian väitöskirjansa jo 20-vuotiaana, mutta Leipzigin yliopisto ei hiukan kyseenalaisesti hyväksynyt sitä. Leibniz ei kuitenkaan masentunut, vaan matkusti Nürnbergin yliopistoon ja kirjoitti matkalla uuden väitöskirjan juridiikan opetuksesta. Matematiikan tutkimuksensa Leibniz teki Mainzin arkkipiispan ja Hannoverin vaaliruhtinaan hallintotehtävien ohella. Hän haaveili luovansa universaalikalkyylin, joka ratkaisisi kaikki filosofian ongelmat yksiselitteisesti laskemalla.

Newtonin ohella myös Leibniz päätyi oikeisiin derivointisääntöihin. Vuonna 1684 Leibniz julkaisi muiden tulostensa joukossa ensimmäisen modernin differentiaalilaskennan fysikaalisen sovelluksen: valon taittumisen kahden väliaineen rajapinnassa. Leibnizin suosimat merkinnät olivat kehittyneitä. Monien yritysten kautta hän päätyi merkitsemään muuttujan x pienintä mahdollista muutosta eli *differentiaalia dx* . Leibniz julkaisi differentiaalilaskennan ensimmäisen esityksen *Uusi menetelmä maksimien ja minimien sekä tangentin määrittämiseksi, jota irrationaaliset suureet eivät estä* vuonna 1684. Hän oli ilmeisesti ensimmäinen, joka toteutti derivoinnin ja integroinnin nykyisin käytössä olevin merkinnöin. Tämä osaltaan vaikutti siihen, että infinitesimaalilaskennan kehitys eteni Leibnizin osoittamaan suuntaan. Newtonia seurattiin vain Englannissa, ja kehitys oli siellä selvästi muuta Eurooppaa hitaampaa. Mielenkiintoista oli, että englantilaiset eivät isänmaallisista syistä suostuneet ottamaan käyttöön Leibnizin merkintätapoja. Englantilaiset olivat myös varmoja, että Leibniz oli kopioinut Newtonin tutkimuksen tuloksia. Asiasta onkin väitelty paljon, mutta kopioinnista ei kuitenkaan koskaan ole löytynyt todisteita. Lisäksi Newton ja Leibniz olivat käyneet vuosina 1676-1677 lyhyen mutta rakentavan kirjeenvaihdon differentiaalilaskennan perusteista. Nykykäsityksen mukaan kunnia hienosta tutkimuksesta kuuluu molemmille.

1.5 Matemaatikon ja markiisin liitto

Seuraavaksi kehitystä veivät eteenpäin Leibnizin oppilaat, joista mainittavan arvoisia ovat Bernoullin veljekset. Jakob Bernoulli (1654-1705) on ilmeisesti ottanut ensimmäisenä käyttöön termin *integraali*. Esimerkiksi Leibniz käytti pitkään nimitystä *calculus summatorium*. Nuorempi veli Johann Bernoulli (1667-1748) tunnetaan diffrentiaalilaskennan alueella tutkimuksistaan Guillaume L'Hospitalin (1661-1704) kanssa. Joidenkin lähteiden mukaan kyse ei niinkään ollut yhteisistä tutkimuksista, vaan Johann Bernoulli oli L'Hospitalin erittäin kallis yksityisopettaja. L'Hospital oli markiisi, eikä läheskään Bernoullin tasolla differentiaalilaskennan tutkimisessa. Kuitenkin hän julkaisi vuonna 1696 ensimmäisen differentiaalilaskennan oppikirjan *Analyse des infiniment petit*. Teos oli hyvin merkittävä ja teki L'Hospitalista kuuluisan. Kirjassa julkaistaan esimerkiksi *L'Hospitalin sääntö*, joka yksinkertaistetusti kuuluu:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)},$$

jos $f(a) = g(a) = 0$. Tämä ei kuitenkaan ole L'Hospitalin kehittämä. Joidenkin lähteiden mukaan (ks. esim. [3]) L'Hospital siis röyhkeästi julkaisi Bernoullin luennot omalla nimellään ja kirjoitti kirjansa esipuheeseen: "I must own myself very much obliged to the labours of Messieurs Bernoulli, but particularly to those of the present Professor at Groeningen, as having made free with their Discoveries as well as those of Mr Leibniz: So that whatever they please to claim as their own I frankly return to them."

Toinen versio tarinasta kertoo, että L'Hospital olisi sopinut alusta asti maksavansa Bernoullille huomattavan summan oikeuksista tuloksiin. L'Hospitalin kuoleman jälkeen Bernoulli olikin joidenkin lähteiden mukaan (ks. esim. [2]) vaatinut tulosten nimeämistä hänen mukaansa. Todisteita asiasta saatiin, kun vuonna 1922 Baselista löytyi Johann Bernoullin veljenpojalleen kirjoittama L'Hospitalin julkaiseman oppikirjan kanssa lähes yhtenevä käsikirjoitus. Bernoullin ja L'Hospitalin välisestä mahdollisesta sopimuksesta ei varmuutta saada, mutta tuloksiin Bernoullilla on mitä ilmeisimmin ollut osuutensa.

1.6 Differentiaalilaskennan kehittyminen lähes nykyiseen muotoonsa

Differentiaalilaskennan kehityksessä oli tähän asti keskitytty teorian täsmällisyyttä enemmän menetelmien toimivuuteen ja käytettävyyteen. Seuraavaksi käsitteet ja teoriat alkoivat muotoutua täsmällisimmiksi. Esimerkiksi filosofimatemaatikko Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) halusi perustaa infinitesimaalilaskennan täsmälliselle derivaatan määritelmälle. Hän käsitti nykyaikaiseen tapaan raja-arvon suureeksi, jota muuttuva suure lähestyy niin, että suureen ja raja-arvon erotus tulee pienemmäksi kuin mikä hyvänsä ennalta annettu suure. Samoin Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) oli tarkempi ja kriittisempi kuin muut sen ajan matemaatikot. Häneltä on muun muassa peräisin termi *derivaatta*, jota hän yritti määritellä täsmällisemmin päästäkseen eroon infinitesimaalisista suureista.

Augustin Cauchy (1789-1857) oli ranskalainen huippulahjakas matemaatikko. Hän loi uraansa insinöörinä, mutta opetti myöhemmin matematiikkaa muun muassa arvostetussa École Polytechniquessa. Cauchy onnistui selkeyttämään differentiaalilaskentaa. Raja-arvon Cauchy määritteli sanallisesti: "Jos muuttujan peräkkäiset arvot lähestyvät rajatta kiinteätä arvoa niin, että ne lopulta eroavat tästa miten vähän tahansa, niin mainittua kiinteää arvoa kutsutaan muiden arvojen raja-arvoksi." Nykyaikaista ϵ ja δ -tarkastelua ei vielä tässä kohdassa ole mukana merkinnöissä, mutta semanttisella tasolla ollaan lähellä. Jatkuvuuden Cauchy määritteli siten, että

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

tulee mielivaltaisen pieneksi, kun muuttuja α pienenee rajatta. Tällä Cauchy ilmeisesti tarkoitti, että

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

lähenee nollaa, kun muuttuja α pienenee rajatta. Cauchy sai tehdyksi paljon differentiaalilaskennan alalla. Hän muun muassa onnistui todistamaan väliarvolauseen sekä sen yleisemmän muodon. Muistelmissaan hän pitää tärkeimpänä saavutuksenaan aallon leviämistä koskevaa tulosta, josta hän sai Grand Prix of the Institut -palkinnon vuonna 1816. Myöhemmin on selvinnyt, että aikaansa edellä ollut matemaatikko Bernhard Bolzano (1781-1848) olikin esittänyt täsmällisemmän määritelmän jo ennen Cauchya: ”funktio f on jatkuva, jos se muuttuu niin, että

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

voidaan tehdä pienemmäksi kuin mikä hyvänsä annettu suure, kunhan vain α tehdään niin pieneksi kuin halutaan”. Kuitenkin kaikenkaikkiaan Cauchyn merkitys matemaattisen analyysin täsmällistymiselle oli keskeinen.

Differentiaalilaskennan perusteiden lujittamisen vei tavallaan loppuun matemaatikko nimeltä Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897). Muun muassa epsilon delta-tekniikka on Weierstrassin vakiinnuttamaa. Vuonna 1861 Weierstrass esitti jatkuvuuden määritelmän seuraavasti: ”Jos on mahdollista määrittää h:lle sellainen raja δ, että kaikille h:n arvoille, joiden itseisarvo on pienempi kuin δ, $f(x+h)-f(x)$ on pienempi kuin mielivaltainen suure ϵ, joka voi olla miten pieni tahansa, niin argumentin äärettömän pieniä muutoksia vastaavat funktionarvojen äärettömän pienet muutokset.”

1.7 Funktion konveksisuuden historiasta

Konveksien funktioiden ensimmäiset tarkastelut ajatellaan lähteneen liikkeelle, kun Cauchy vuonna 1821 halusi selvittää mitkä jatkuvat reaalifunktiot toteuttavat yhtälön

$$f(x)+f(y)=f(x+y).$$

Hän onnistui saamaan ratkaisuksi $f(x)=Cx$ ja päätyi myöhemmin tutkimuksissaan epäyhtälöön

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

Ensimmäisen kerran systemaattisesti konvekseja funktioita määritteli ja tutki Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859 - 1925) vuonna 1905. Hän ymmärsi Cauchyn epäyhtälön ja teki merkittävästi tutkimusta siitä eteenpäin.

Matemaatikot olivat tietysti ennen vuotta 1905 havainneet joidenkin funktioiden täyttävän Cauchyn epäyhtälön ehdot, mutta Jensen oli ensimmäinen, joka ymmärsi konveksisuuden merkityksen ja nosti sen esiin tutkimuksilllaan.

Jenseniä ennen konvekseja funktioita olivat 1800-luvun lopussa tutkineet erityisesti Otto Ludwig Hölder (1859-1937) ja Jacques Salomon Hadamard (1865 - 1963). Kuitenkin Jensen oli todella ensimmäinen systemaattinen konveksien funktioiden tutkimuksen kehittäjä. Viime vuosikymmenillä konvekseja ovat tutkineet muun muassa matemaatikot Andreas Dress (1938-) , John Wenzel (1942-) ja Kazuo Murota (1955-). Nykyään konveksit funkiot muodostavat oman haaransa ja niiden tutkimus on tärkeää analyysin, soveltavan matematiikan, todennäköisyyslaskennan ja jopa geometrian alalla.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä luvussa esitetään lyhyesti muutamia pääaiheen käsittelyssä tarvittavia määritelmiä ja lauseita. Ensimmäisessä kappaleessa tarkastellaan jatkuvuutta, eksponenttifunktion määritelmää ja lukujonon tasaista suppenemista. Edellisessä luvussa käsiteltiin paljon täsmällisyyden muotoutumista. Nyt esitettävä jatkuvuuden määritelmä on hyvä esimerkki siitä, kuinka täsmälliseksi differentiaalilaskenta on nykypäivänä kehittynyt. Toisessa kappaleessa on muutama myöhemmin tarvittava lause. Kaikki tässä tutkielmassa esiintyvät funktiot ovat yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita, ellei toisin sanota.

2.1 Keskeisiä määritelmiä

Määritelmä 2.1 (Jatkuvuus)**.** Olkoon funktio f määritelty avoimelta reaalilukuväliltä I reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$ ja olkoon c välin I piste. Funktio f on *jatkuva pisteessä* c, jos jokaiselle positiiviselle luvulle ϵ on olemassa sellainen positiivinen δ, että

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon$$

kaikilla sellaisille välin I pisteillä x, että

$$|x - c| < \delta.$$

Funktio f on *jatkuva välillä* I, jos se on jatkuva kaikissa välin I pisteissä.

Määritelmä 2.2 (Eksponenttifunktio)**.**

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Määritelmä 2.3 (Tasainen suppeneminen)**.** Olkoon (f_n) funktiojono. Jono (f_n) *suppenee tasaisesti* kohti funktiota f reaalilukuvälillä I, jos jokaiselle positiiviselle luvulle ϵ on olemassa sellainen kokonaisluku n_0, että

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

kaikilla $x \in I$ ja $n \geq n_0$.

2.2 Apulauseita

Lause 2.1 (Eksponenttifunktion yhteenlaskukaava [4, prop. 3.28])**.** *Olkoot* $f(x) = e^x$ *ja* $x, y \in \mathbb{R}$. *Tällöin* $f(x + y) = f(x)f(y)$, *kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$.

Todistus. Määritelmän 2.2 perusteella

$$f(x+y) = e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+j=n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{y^j}{j!} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

□

Lause 2.2 (Jatkuvien funktioiden summa ja tulo [4, prop. 3.10])**.** *Olkoot funktiot f ja g määritellyt reaalilukuvälillä I ja $c \in I$. Jos f ja g ovat jatkuvia pisteessä c, niin $f+g$ ja fg ovat jatkuvia pisteessä c.*

Lause 2.3 (Jatkuvien funktioiden yhdistäminen [4, prop. 3.12])**.** *Olkoot funktio f määritelty reaalilukuvälillä I ja funktio g reaalilukuvälillä J. Olkoot lisäksi $f(I) \subset J$ ja $c \in I$. Jos f on jatkuva pisteessä c ja g on jatkuva pisteessä $f(c)$, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä c.*

Lause 2.4 (Jatkuvuus [4, prop. 3.9(e)])**.** *Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$, kun I on reaalilukuväli. Funktio f on jatkuva pisteessä $c \in I$, jos ja vain jos jono $(f(x_n))$ suppenee kohti lukua $f(c)$ kaikilla sellaisilla jonoilla $(x_n) \in I$, että*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että f on jatkuva pisteessä c ja (x_n) on sellainen jono välin I alkioita, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon,$$

kaikilla sellaisilla $x \in I$, että $|x - c| < \delta$. Lisäksi on olemassa sellainen n_0, että $|x_n - c| < \delta$ kaikilla $n \geq n_0$. Edelleen

$$|f(x_n) - f(c)| < \epsilon,$$

kun $n \geq n_0$. Täten $\lim f(x_n) = f(c)$ kaikilla sellaisilla jonoilla $(x_n) \in I$, joilla

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Oletetaan nyt, että f ei ole jatkuva pisteessä c. Tällöin on olemassa sellainen $\epsilon > 0$, että jokaiselle luvulle $\delta > 0$ on olemassa sellainen $x \in I$, että $|x-c| < \delta$, mutta $|f(x)-f(c)| \geq \epsilon$. Erityisesti jokaiselle luvulle n on olemassa sellainen $x_n \in I$, että

$$|x_n - c| < \frac{1}{n} \text{ ja } |f(x_n) - f(c)| \geq \epsilon.$$

Täten
$$\lim_{n\to\infty} x_n = c,$$
mutta
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(c).$$
$\square$

Lause 2.5 (Suurin ja pienin arvo [4, lause 3.15])**.** *Olkoon funktio f määritelty suljetulla välillä I. Olkoon f jatkuva tällä välillä. Tällöin funktiolla f on suurin ja pienin arvo tällä välillä I.*

Seuraavaa lausetta ei pidä sekoittaa *differentiaalilaskennan väliarvolauseeseen*, josta tässä työssä käytetään vain nimeä *väliarvolause*. Englanniksi *jatkuvan funktion väliarvolause* on *intermediate value theorem*.

Lause 2.6 (Jatkuvan funktion väliarvolause [4, lause 3.16])**.** *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja olkoon $f(a) < y < f(b)$ tai $f(a) > y > f(b)$. On olemassa sellainen x, $a < x < b$, että $f(x) = y$.*

Todistus. Olkoon $f(a) < y < f(b)$. Olkoon
$$E = \{t \in [a, b] : f(t) < y\},$$
joten ainakin $a \in E$ eli E on välin $[a, b]$ epätyhjä osajoukko. Olkoon $x = \sup E$, joten $x \in [a, b]$. Jokaiselle luvulle n on olemassa sellainen $x_n \in E$, että
$$x - \frac{1}{n} < x_n \leq x.$$
Täten $f(x_n) < y$ kaikilla luvuilla n. Koska $x_n \to x$, niin lauseen 2.4 perusteella
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$
joten $f(x) \leq y$. Mutta oletuksen mukaan $f(b) > y$ ja funktio f on jatkuva pisteessä b, joten on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f(t) > y$, kaikilla $t \in]b - \delta, b]$. Täten $x < b$. Edelleen on olemassa sellainen t_n, että $x < t_n$ ja
$$\lim_{n\to\infty} t_n = x.$$
Koska $t_n > x$, niin $t_n \notin E$ eli $f(t_n) \geq y$, joten
$$f(x) = \lim f(t_n) \geq y.$$
Täten $f(x) = y$. $\square$

Edellisestä seuraa Bolzanon lause -niminen erikoistapaus. Siinä funktion arvot pisteissä a ja b ovat erimerkkiset, ja väitteen mukaan funktion arvo jossakin välin $[a, b]$ pisteessä on 0.

Lause 2.7 (Käänteisfunktion jatkuvuus [4, lause 3.17]). *Olkoon funktio f määritelty reaalilukuvälillä I. Olkoon f lisäksi jatkuva ja injektio tällä välillä I. Tällöin $J = f(I)$ on myös reaalilukuväli ja $g = f^{-1}$ on jatkuva funktio.*

Lause 2.8 (Weierstrassin testi [4, lause 3.27]). *Olkoon (f_n) lukujono reaalilukuvälillä I. Olkoon (M_n) sellainen lukujono, että $|f_n(x)| \leq M_n$ kaikilla $x \in I$. Olkoon lisäksi $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti välillä I.*

Lause 2.9 ([4, lause 3.25]). *Olkoon (f_n) jatkuvien funktioiden jono reaalilukuvälillä I. Oletetaan, että jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f välillä I. Tällöin funktio f on jatkuva tällä välillä.*

Todistus. Olkoot x reaalilukuvälin I piste ja $\epsilon > 0$. Valitaan sellainen n, että

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{3}$$

kaikilla $t \in I$. Lisäksi valitaan sellainen positiivinen δ, että

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

kun y on sellainen välin I piste, että $|y - x| < \delta$.Tällöin

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

joten määritelmän 2.1 perusteella f on jatkuva pisteessä x. Edelleeen funktio f on jatkuva välillä I.

□

3 Derivaatta

Derivaatta on differentiaalilaskennan keskeisimpiä käsitteitä. Geometrisesti derivaatta tarkoittaa funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerrointa. Tämän luvun ensimmäisessä kappaleessa käydään läpi derivaatan käsitettä edellistä geometrista huomiota täsmällisemmmin ja tutkitaan derivoituvuuden ja jatkuvuuden yhteyttä. Huomataan esimerkiksi, että jatkuvuus on välttämätön mutta ei riittävä ehto derivoituvuudelle. Toisessa kappaleessa tarkastellaan muutamien yksinkertaisten funktioiden derivoituvuutta. Tämän jälkeen tutkitaan funktioiden summan ja tulon sekä yhdistetyn funktion derivointisääntöjä.

3.1 Derivaatan käsite

Määritelmä 3.1. Olkoon funktio f määritelty reaalilukuväliltä I reaalilukujen joukolle, ja olkoon x välin I piste. Funktio f on *derivoituva* pisteessä x, jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

on olemassa. Tämä raja-arvo on funktion *derivaatta* pisteessä x ja sitä merkitään $f'(x)$.

Huomataan, että jos x on välin I päätepiste, niin saadaan selville vain toispuolinen raja-arvo. Tällöin joko oikeanpuolinen raja-arvo

$$\lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

tai vasemmanpuolinen raja-arvo

$$\lim_{y \to x-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

on olemassa. Vastaavasti funktiolla f on tällöin *oikeanpuolinen derivaatta* f'_+ tai *vasemmanpuolinen derivaatta* f'_- pisteessä x. Funktion f derivaatta pisteessä x on olemassa, jos ja vain jos oikean- ja vasemmanpuoliset derivaatat ovat olemassa ja ne ovat samat.

Määritelmän 3.1 vaihoehtoinen merkintä

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Lause 3.1 (Differentiaalihajotelma [4, prop. 4.2]). *Olkoon funktio f määritelty reaalilukuväliltä I reaalilukujen joukolle $\mathbb{R}$, ja olkoon x välin I piste.*

Funktio f on derivoituva pisteessä x, jos ja vain jos on olemassa sellainen reaalilukuväliltä I reaalilukujen joukolle $\mathbb{R}$ määritelty funktio ϕ, joka on jatkuva pisteessä x ja lisäksi

$$f(y) = f(x) + (y - x)\phi(y),$$

kaikilla välin I pisteillä y. Tällöin $f'(x) = \phi(x)$.

Lause 3.2 ([4, seurauslause 4.3])**.** *Olkoon funktio f määritelty reaalilukuväliltä I reaalilukujen joukolle $\mathbb{R}$ ja olkoon x välin I piste. Jos funktio f on derivoituva pisteessä x, niin se on myös jatkuva pisteessä x.*

Todistus ([14, s. 124]). Olkoot $x, y \in I$ ja $x \neq y$. Nyt

$$f(y) - f(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(y - x).$$

Oletettiin, että funktio f on derivoituva pisteessä x, joten

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x).$$

Lisäksi tiedetään, että

$$\lim_{y \to x}(y - x) = 0.$$

Saadaan siis

$$\lim_{y \to x}(f(y) - f(x)) = f'(x) \cdot 0 = 0$$

ja edelleen

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x).$$

Täten funktio f on jatkuva pisteessä x. □

Jatkuva funktio ei aina ole derivoituva. Esimerkiksi jatkuva funktio $f(x) = |x|$ ei ole derivoituva pisteessä 0. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan jatkuvaa funktiota, joka ei ole derivoituva missään pisteessä. Lisää esimerkkejä ja pohdintaa aiheesta löytyy lähteestä [6].

Esimerkki 3.1 ([4, esimerkki 4.4])**.** Olkoon f sellainen funktio, että $f(t) = |t|$, kun t on välillä $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Olkoon edelleen

$$f(t + n) = f(t)$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Olkoon lisäksi

$$f_n(t) = 4^{-n} f(4^n t),$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Nyt

$$f_n(t + 4^{-n}) = f_n(t),$$

kun $t \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan funktiota

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Huomataan, että

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{2}\, 4^{-n},$$

joten lauseen 2.8 perusteella (f_n) suppenee tasaisesti. Tällöin lauseen 2.9 perusteella g on jatkuva.

Seuraavaksi kuitenkin osoitetaan, että g ei ole missään derivoituva. Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Valitaan

$$h_n = \pm 4^{-n-1},$$

niin, että $4^n t$ ja $4^n(t + h_n)$ ovat molemmat samalla välillä $[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}]$. Nyt

$$f_n(t + h_n) - f_n(t) = \pm h_n.$$

Lisäksi

$$f_m(t + h_n) - f_m(t) = \pm h_n,$$

kun $m \leq n$. Toisaalta

$$f_m(t + h_n) = f_m(t),$$

kun $m > n$. Siis

$$\frac{g(t + h_n) - g(t)}{h_n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{f_m(t + h_n) - f_m(t)}{h_n} = \sum_{m=0}^{n} \epsilon_m,$$

ja $\epsilon_m = \pm 1$, kun $m \leq n$. Tällöin

$$\frac{g(t + h_n) - g(t)}{h_n}$$

on pariton, kun n on parillinen, ja se on parillinen, kun n on pariton. Kun $n \to \infty$, niin $h_n \to 0$, joten tällä erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa, kun $h \to 0$. Siis $g'(t)$ ei ole olemassa.

3.2 Derivoimiskaavoja

Lause 3.3 (Potenssifunktion derivaatta)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{Z}$ ja $f(x) = x^n$, kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Olkoon lisäksi $x \neq 0$, jos $n \leq 0$. Funktio f on derivoituva määrittelyjoukossaan ja $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Todistus. Tapaus $n = 0$ on selvä, joten olkoon ensin $n > 0$. Tarkastellaan erotusosamäärän raja-arvoa

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

eli

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}.$$

Merkitään $x+h=z$, jolloin

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{z^n-x^n}{z-x}=z^{n-1}+z^{n-2}x+z^{n-3}x^2+...+zx^{n-2}+x^{n-1}.$$

Koska $z\to x$, kun $h\to 0$, on summan jokaisen termin raja-arvo x^{n-1} ja termejä on n kappaletta, joten

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=nx^{n-1}.$$

Olkoon nyt $n<0$. Merkitään $m=-n>0$ ja $x+h=z$, jolloin

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{z^n-x^n}{z-x}=\frac{z^{-m}-x^{-m}}{z-x}=\frac{\frac{1}{z^m}-\frac{1}{x^m}}{z-x}$$

$$=\frac{\frac{x^m}{z^mx^m}-\frac{z^m}{z^mx^m}}{z-x}=\frac{x^m-z^m}{x^mz^m(z-x)}=\frac{1}{x^mz^m}\frac{-z^m+x^m}{z-x}$$

$$=\frac{1}{x^mz^m}(-z^{m-1}-xz^{m-2}-x^2z^{m-3}-...-x^{m-2}z^{m-(m-1)}-x^{m-1}).$$

Koska $z\to x$, kun $h\to 0$, on erotuksen jokaisen termin raja-arvo $-x^{m-1}$ ja termeja on m kappaletta, joten

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x^mx^m}(-x^{m-1}m)$$

$$=-m\frac{x^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{m-1-2m}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}.$$

□

Lause 3.4 (Eksponenttifunktion derivaatta [4, prop. 4.7])**.** *Olkoon $f(x)=e^x$, kun $x\in\mathbb{R}$. Funktio $f(x)$ on derivoituva joukossa $\mathbb{R}$ ja $f'(x)=e^x$.*

Todistus. Tarkastellaan erotusosamäärää

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{e^{x+h}-e^x}{h}.$$

Lauseen 2.1 perusteella

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\frac{e^xe^h-e^x}{h}=\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Täten

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on olemassa, jos

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

on olemassa. Tällöin

$$f'(x)=f(x)f'(0).$$

Määritelmän 2.2 mukaan

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

joten

$$1+x<e^x<1+x+x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+x+x^2,$$

jokaisella $x\in]0,1[$, koska $n!\geq 2^{n-1}$, kun $n\geq 2$. Näin ollen

$$1<\frac{f(h)-f(0)}{h}<1+h,$$

kaikilla $h\in]0,1[$, joten

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=1.$$

Samoin, jos $h<0$, niin

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{1}{f(-h)}-1}{h}=\frac{1}{f(|h|)}\frac{f(|h|)-1}{|h|)},$$

joten

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{k\to 0+}\frac{f(k)-1}{f(k)k}=1.$$

Täten $f'(0)=1$ ja $f'(x)=f(x)$, kun $x\in\mathbb{R}$.

$\square$

Lause 3.5 (Summan ja tulon derivaatta)**.** *Olkoot f ja g funktioita reaalilukuvälillä I ja derivoiuvia välin I pisteessä x. Tällöin $f+g$ ja fg ovat derivoituvia pisteessä x ja*

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)\ ,\ (fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Todistus. Tarkastellaan ensin funktioiden f ja g summan erotusosamäärän raja-arvoa

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Oletettiin, että funktiot f ja g ovat derivoituvia pisteessä x, joten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Tarkastellaan seuraavaksi funktioiden f ja g tulon erotusosamäärän raja-arvoa

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Oletettiin, että funktiot f ja g ovat derivoituvia pisteessä x, joten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Siis

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \ , \ (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

□

Lause 3.6 (Yhdistetyn funktion derivaatta [4, prop. 4.18]). *Olkoot I ja J reaalilukuvälejä ja*

$$f : I \to \mathbb{R} \quad , \quad f(I) \subset J \quad \textit{ja} \quad g : J \to \mathbb{R}.$$

Olkoon lisäksi funktio f derivoituva pisteessä x ja g derivoituva pisteessä $f(x)$. Yhdistetty funktio $g \circ f$ on derivoituva pistessä x ja

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Todistus (yksityiskohtaisempi kuin lähteessä). Lauseen 3.1 perusteella on olemassa sellaiset funktiot $\phi : I \to \mathbb{R}$, joka on jatkuva pisteessä x ja $f(y) - f(x) = (y - x)\phi(y)$ kaikilla $y \in I$ ja $\theta : J \to \mathbb{R}$, joka on jatkuva pisteessä $f(x)$ ja $g(v) - g(f(x)) = (v - f(x))\theta(v)$ kaikilla $v \in J$. Tällöin

$$(g \circ f)(y) - (g \circ f)(x) = g(f(y)) - g(f(x))$$

$$= (f(y) - f(x))\theta(f(y)) = (y - x)\phi(y)\theta(f(y)),$$

joten lauseiden 2.3, 2.2 ja 3.1 perusteella $g \circ f$ on derivoituva pisteessä x ja

$$(g \circ f)(x) = \phi(x)\theta((fx)) = g'(f(x))f'(x).$$

□

Esimerkki 3.2 ([4, esimerkki 4.19])**.** Olkoot f ja g funktioita reaalilukuvälillä I ja $f(x) = g(x)^n$, kun n on kokonaisluku. Jos g on derivoituva pisteessä c, niin myös f on derivoituva pisteessä c ja $f'(c) = ng(c)^{n-1}g'(c)$. Tapauksessa $n = -1$ saadaan $(\frac{1}{g})'(c) = -\frac{g'(c)}{g(c)^2}$. Kun tässä vielä käytetään funktioiden tulon derivointisääntöä saadaan

$$(\frac{f}{g})'(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}.$$

Samoin, jos $f(x) = e^{g(x)}$, kun $x \in \mathbb{R}$, niin $f'(c) = f(c)g'(c)$.

4 Konveksit funktiot

Konveksit funktiot edustavat tämän tutkielman nuorinta tutkimusalaa. Konveksisuuden merkitys ymmärrettiin vasta 1800-luvun alussa ja systemaattinen tutkimus aloitettiin 1900-luvun alussa. Geometrisesti funktion konveksisuus tarkoittaa, että jos konveksin funktion kuvaajalta yhdistetään mitkä tahansa kaksi pistettä, niin tämä yhdysjana on aina funktion kuvaajan yläpuolella. Tämän luvun ensimmäisessä kappaleessa esitellään konveksisuutta tarkemmin ja täsmällisemmin. Ensimmäisessä kappaleessa todistetaan kaksi lausetta konveksisuudesta, joita käytetään myöhempien kappaleiden mielenkiintoisempien lauseiden todistuksissa. Seuraavassa kappaleessa päästään tarkastelemaan konveksisuuden ja jatkuvuuden yhteyttä ja todistetaan, kuinka tietyillä ehdoilla funktion konveksisuudesta seuraa funktion jatkuvuus. Kolmannessa kappaleessa tutkitaan konveksin funktion derivaattaa.

4.1 Konveksisuuden käsite

Määritelmä 4.1. Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$ ja I reaalilukuväli. Funktio f on *konveksi*, jos

$$f(tb + (1-t)a) \leq tf(b) + (1-t)f(a),$$

kun $a, b \in I$ ja $0 < t < 1$.

Lause 4.1 ([4, prop. 4.10])**.** *Olkoot $f : I \to \mathbb{R}$ ja I reaalilukuväli. Funktio f on konveksi, jos ja vain jos jokaisella sellaisella $a, b \in I$, että $a < x < b$, pätee*

$$f(x) \leq \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a). \tag{4.1}$$

Todistus (yksityiskohtaisempi kuin lähteessä). Oletetaan ensin, että f on konveksi. Olkoon $x \in I$. Etsitään sellainen t, että

$$tb + (1-t)a = x.$$

Tällöin

$$tb + a - ta = x,$$

joten

$$t = \frac{x-a}{b-a}.$$

Selvästi $0 < t < 1$. Edelleen

$$1 - t = 1 - \frac{x-a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} - \frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{b-a},$$

joten epäyhtälöstä

$$f(x) \leq tf(b) + (1-t)f(a)$$

seuraa

$$f(x) \leq \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a).$$

Oletetaan sitten, että jokaisella sellaisella $a, b \in I$, että $a < x < b$, pätee

$$f(x) \leq \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a).$$

Olkoon $0 < t < 1$. Tällöin on olemassa sellainen $x \in]a, b[$, että

$$t = \frac{x-a}{b-a}.$$

Edelleen

$$1 - t = 1 - \frac{x-a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} - \frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{b-a}.$$

Tällöin

$$x = bt + a - at,$$

mistä saadaan

$$x = bt + (1-t)a.$$

Täten

$$f(bt + (1-t)a) \leq tf(b) + (1-t)f(a).$$

□

Lause 4.2 ([4, prop. 4.10])**.** *Olkoot $f : I \to \mathbb{R}$ konveksi ja $a < b < c \in I$. Tällöin*

$$f(x) \geq \frac{c-x}{c-b}f(b) + \frac{x-b}{c-b}f(c),$$

kun $a < x < b$, sekä

$$f(x) \geq \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a),$$

kun $b < x < c$.

Todistus (yksityiskohtaisempi kuin lähteessä). Oletettiin, että funktio f on konveksi ja $a < x < b < c$. Vaihdetaan epäyhtälöön (4.1) sellaiset muuttujat, että $a < x < b < c$, eli

$$x \mapsto b\ ,\ a \mapsto x \text{ ja } b \mapsto c.$$

Tällöin

$$f(b) \leq \frac{b-x}{c-x}f(c) + \frac{c-b}{c-x}f(x).$$

Ratkaistaan epäyhtälöstä $f(x)$. Aluksi saadaan

$$f(x) \geq \frac{f(b)}{\frac{c-b}{c-x}} - \frac{\frac{b-x}{c-x}}{\frac{c-b}{c-x}} f(c)$$

ja edelleen

$$f(x) \geq \frac{c-x}{c-b} f(b) + \frac{x-b}{c-b} f(c).$$

Lauseen jälkimmäinen epäyhtälö saadaan vastaavalla tavalla, kun epäyhtälöön 4.1 vaihdetaan sellaiset muuttujat, että $a < b < x < c$. □

4.2 Konveksisuus ja jatkuvuus

Konveksisuuden ja jatkuvuuden yhteydessä on analogiaa derivoituvuuden ja jatkuvuuden välisen yhteyden kanssa. Molemmissa tapauksissa jatkuvuus on välttämätön, mutta ei riittävä ehto.

Lause 4.3 ([4, seurauslause 4.12])**.** *Olkoon funktio f konveksi avoimella välillä I. Funktio f on jatkuva tällä välillä.*

Todistus. Olkoon b välin I piste. Koska oletettiin, että I on avoin väli, niin on olemassa sellaiset välin I pisteet a ja c, että $a < b < c$. Olkoon x sellainen välin I piste, että $b < x < c$. Oletettiin, että f on konveksi, joten lauseista 4.1 ja 4.2 saadaan epäyhtälöt

$$\frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a) \leq f(x) \leq \frac{x-b}{c-b} f(c) + \frac{c-x}{c-b} f(b).$$

Huomataan, että

$$\lim_{x \to b+} \left(\frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a)\right) = f(b)$$

ja

$$\lim_{x \to b+} \left(\frac{x-b}{c-b} f(c) + \frac{c-x}{c-b} f(b)\right) = f(b).$$

Täten

$$\lim_{x \to b+} f(x) = f(b).$$

Samoin, jos $a < x < b$, niin lauseitten 4.1 ja 4.2 perusteella

$$\frac{c-x}{c-b} f(b) + \frac{x-b}{c-b} f(c) \leq f(x) \leq \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a),$$

mistä seuraa, että

$$\lim_{x \to b-} \left(\frac{c-x}{c-b} f(b) + \frac{x-b}{c-b} f(c)\right) = f(b)$$

ja

$$\lim_{x\to b-}(\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{b-x}{b-a}f(a))=f(b).$$

Näin ollen myös

$$\lim_{x\to b-} f(x)=f(b),$$

joten

$$\lim_{x\to b} f(x)=f(b),$$

eli määritelmän 2.1 perusteella f on jatkuva pisteessä b. Koska pisteestä b ei oletettu muuta kuin, että se on välillä I, on funktio f jatkuva välillä I.

□

Huomataan, että oletus välin I avoimuudesta on välttämätön, sillä esimerkiksi sellainen välillä $[0,1]$ määritelty funktio g, että $g(0)=1$ ja $g(t)=0$, kun $0<t\leq 1$ on konveksi, mutta ei jatkuva.

Lause 4.4 ([4, prop. 4.13])**.** *Olkoon funktio* $f: I\to\mathbb{R}$ *konveksi. Tällöin*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\frac{f(b)-f(x)}{b-x}, \tag{4.2}$$

kun $a,b\in I$ *ja* $a<x<b$.

Todistus. Oletettiin, että f on konveksi, joten lauseen 4.1 perusteella

$$f(x)\leq\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{b-x}{b-a}f(a).$$

Täten

$$\begin{gathered} f(x)-f(a)\leq\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{b-x}{b-a}f(a)-f(a)= \\ \frac{(x-a)f(b)+(b-x)f(a)-(b-a)f(a)}{b-a}= \\ \frac{(x-a)f(b)-(x-a)f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \end{gathered}$$

mistä väitöksen vasemmanpuolinen epäyhtälö seuraa.

Oikeanpuolinen epäyhtälö saadaan vastaavalla tavalla tutkimalla erotusta $f(x)-f(b)$.

□

4.3 Konveksin funktion derivaatta

Seuraavaksi tutkitaan konveksin funktion derivoituvuuutta.

Lause 4.5 ([4, lause 4.14]). *Olkoon funktio f konveksi avoimella välillä I. Funktiolla f on vasemman-ja oikeanpuolinen derivaatta f'_- ja f'_+ pisteessä c, kun $c \in I$. Edelleen*

$$f'_+(a) \leq f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq f'_-(b),$$

kun $a < c < b$.

Todistus. Koska I on avoin väli, on olemassa sellaiset $t, u \in I$, että $t < c < u$. Oletettiin, että funktio f on konveksi, joten lauseen 4.4 perusteella

$$\frac{f(c) - f(t)}{c - t} \leq \frac{f(u) - f(c)}{u - c}.$$

Koska $t < c < u$, niin

$$\sup_{t<c} \frac{f(c) - f(t)}{c - t} \leq \inf_{u>c} \frac{f(u) - f(c)}{u - c} \tag{4.3}$$

ja epäyhtälön molemmat puolet ovat äärellisiä. Olkoot $s, v \in I$ ja

$$s < t < c < u < v.$$

Lauseen 4.4 vasemmanpuolisen epäyhtälön perusteella

$$\frac{f(u) - f(c)}{u - c} \leq \frac{f(v) - f(c)}{v - c},$$

joten funktio

$$u \mapsto \frac{f(u) - f(c)}{u - c}$$

on kasvava joukossa $I \cap]c, \infty[$. Täten oikeanpuolinen derivaatta

$$f'_+(c) = \lim_{u \to c+} \frac{f(u) - f(c)}{u - c} = \inf_{u>c} \frac{f(u) - f(c)}{u - c}$$

on olemassa. Vastaavasti lauseen 4.4 oikeanpuolisen epäyhtälön perusteella

$$\frac{f(c) - f(s)}{c - s} \leq \frac{f(c) - f(t)}{c - t},$$

joten funktio

$$t \mapsto \frac{f(c) - f(t)}{c - t}$$

on kasvava joukossa $I \cap]-\infty, c[$. Täten vasemmanpuolinen derivaatta

$$f'_-(c) = \lim_{t \to c-} \frac{f(c) - f(t)}{c - t} = \sup_{t<c} \frac{f(c) - f(t)}{c - t}$$

on olemassa. Tällöin epäyhtälöstä 4.3 nähdään, että

$$f'_-(c) \leq f'_+(c).$$

Olkoon nyt

$$a < t < c < u < b.$$

Tällöin

$$f'_+(a) \leq \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq \frac{f(c) - f(t)}{c - t} \leq f'_-(c),$$

ja

$$f'_+(c) \leq \frac{f(u) - f(c)}{u - c} \leq \frac{f(b) - f(u)}{b - u} \leq f'_-(b).$$

Siis

$$f'_+(a) \leq f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq f'_-(b).$$

□

Lause 4.6 ([4, seurauslause 4.16])**.** *Olkoon konveksi funktio f määritelty avoimella reaalilukuvälillä I. Olkoon $c \in I$. Lisäksi olkoon m sellainen, että*

$$f'_-(c) \leq m \leq f'_+(c).$$

Tällöin

$$f(x) \geq f(c) + m(x - c),$$

kun $x \in I$.

Todistus (yksityiskohtaisempi kuin lähteessä). Tapaus $x = c$ on selvä.

Olkoon nyt $x > c$ eli $x - c > 0$. Oletuksen mukaan $m \leq f'_+(c)$, joten

$$f'_+(c)(x - c) \geq m(x - c).$$

Oletettiin, että f on konveksi, joten lauseen 4.5 todistuksen perusteella

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \geq (\inf_{x>c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c})(x - c) = f'_+(c)(x - c),$$

joten

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq f'_+(c).$$

Täten

$$f(x) - f(c) \geq f'_+(c)(x - c) \geq m(x - c),$$

mistä seuraa, että

$$f(x) \geq f(c) + m(x-c).$$

Olkoon nyt $x < c$ eli $x - c < 0$. Oletuksen mukaan $m \geq f'_-(c)$, joten

$$m(x-c) \leq f'_-(x-c).$$

Oletettiin, että f on konveksi, joten vastaavasti

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c) \geq (\sup_{x>c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c})(x-c) = f'_-(c)(x-c),$$

ja väitös seuraa.

$\square$

5 Väliarvolause ja L'Hospitalin sääntö

Väliarvolause on yksi differentiaalilaskennan keskeisimpiä tuloksia. Ensimmäisiä selkeitä muotoiluja siitä löytyy jo 1300-luvulta, mutta nykyisessä muodossa sen esitteli Cauchy 1800-luvulla. Tästä huolimatta se tunnetaan myös nimellä Lagrangen väliarvolause tai differentiaalilaskennan väliarvolause. Tässä tutkielmassa väliarvolauseen voima näkyy mm. funktion kulkua koskevan lauseen ja L'Hospitalin säännön todistamisessa. Tämän luvun ensimmäisessä kappaleessa todistetaan ääriarvoja koskeva lause, jota käytetään väliarvolauseen todistuksessa. Seuraavassa kappaleessa esitetään väliarvolauseen lisäksi sen yleistys, joka tunnetaan myös nimellä Cauchyn väliarvolause. Seuraavaksi tutkitaan funktion monotonisuuden ja derivaatan merkin yhteyttä, sekä tarkastellaan jatkuvan funktion derivaatan jatkuvuutta. Tämän jälkeen todistetaan derivoituvan funktion käänteisfunktion derivoituvuus. Lopuksi käydään läpi muutama esimerkki, joissa käytetään todistettuja lauseita. Tämän tutkielman viimeisessä kappaleessa käydään läpi L'Hospitalin sääntönä tunnettu lause. Tällä ilmeisesti Johann Bernoullin keksimällä ja todistamalla lauseella on keskeinen merkitys määritettäessä raja-arvoja.

5.1 Ääriarvot

Määritelmä 5.1. Olkoot $f : I \to \mathbb{R}$ ja I reaalilukuväli. Funktiolla f on *paikallinen maksimi* [*paikallinen minimi*] pisteessä $c \in I$, jos on olemassa sellainen piseteen c ympäristö U, että $f(c) \geq f(x)$ [$f(c) \leq f(x)$], kun $x \in U$.

Lause 5.1 (Välttämätön ehto ääriarvolle [4, Prop. 4.21])**.** *Olkoot $f : I \to \mathbb{R}$ ja I reaalilukuväli. Olkoon funktiolla f paikallinen maksimi tai minimi pisteessä $c \in I$, kun c ei ole välin I päätepiste. Olkoon funktio f lisäksi derivoituva pisteessä c. Tällöin $f'(c) = 0$.*

Todistus. Oletetaan, että funktiolla f on paikallinen minimi pisteessä c. Määritelmän 5.1 mukaan on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f(c) \leq f(t)$, kun $|t-c| < \delta$. Oletetaan ensin, että $c < t < c+\delta$, jolloin $t-c > 0$. Tästä seuraa, että

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq 0.$$

Oletettiin, että funktio f on derivoituva pisteessä c, joten erotusosamäärän raja-arvo $f'(c) \geq 0$.

Oletetaan nyt, että $c-\delta < t < c$, jolloin $t-c < 0$. Vastaavasti saadaankin epäyhtälö

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \leq 0,$$

joten $f'(c) \leq 0$. Täten $f'(c) = 0$.

Funktion f paikallisen maksimin tapaus todistetaan vastaavasti. $\square$

5.2 Väliarvolause

Väliarvolause on ensimmäinen tulos, joka funktion derivaatan avulla kertoo merkittävästi funktion käyttäytymisestä.

Lause 5.2 (Väliarvolause [4, lause 4.22])**.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$. On olemassa sellainen $\xi \in]a, b[$, että*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Todistus. Olkoon $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja

$$g(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a).$$

Funktion f määrittelyn perusteella myös g on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$. Funktion g derivaatasta

$$g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

nähdään, että väite toteutuu, jos on olemassa sellainen $\xi \in]a, b[$, että $g'(\xi) = 0$. Jaetaan tarkastelu kolmeen tapaukseen. Olkoon ensin $g(t) = 0$ kaikilla $t \in]a, b[$. Tällöin $g'(\xi) = 0$ jokaisella $\xi \in]a, b[$. Olkoon seuraavaksi, että $g(t) < 0$ jollakin $t \in]a, b[$. Lauseen 2.5 mukaan funktiolla g on minimiarvo jossakin pisteessä $\xi \in [a, b]$. Itse asiassa $\xi \in]a, b[$, koska

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

ja

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

ja koska oletettiin, että funktio g saa myös nollaa pienemmän arvon. Näin ollen lauseen 5.1 perusteella $g'(\xi) = 0$. Tapaus $g(t) > 0$ todistetaan vastaavasti.

$\square$

Seuraavassa lauseessa yleistetään väliarvolause. Tätä yleistettyä muotoa tarvitaan L'Hospitaalin säännön todistamisessa.

Lause 5.3 (Yleistetty väliarvolause [4, lause 4.29])**.** *Olkoot f ja g jatkuvia funktioita $[a, b] \to \mathbb{R}$ ja derivoituvia välillä $]a, b[$. On olemassa sellainen $c \in]a, b[$, että*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Todistus. Olkoon $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja

$$\phi(t) = (f(t) - f(a))(g(b) - g(a)) + (g(b) - g(t))(f(b) - f(a)).$$

Funktioiden f ja g määrittelyiden perusteella myös ϕ on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä $]a,b[$. Funktion ϕ derivaatasta

$$\phi'(t) = f'(t)(g(b) - g(a)) - g'(t)(f(b) - f(a))$$

nähdään, että jos on olemassa sellainen c, että $\phi'(c) = 0$, niin väite on todistettu. Lauseen 5.2 perusteella on olemassa sellainen $c \in]a,b[$, että

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi'(c)(b - a).$$

Huomataan, että

$$\phi(a) = (g(b) - g(a))(f(b) - f(a)) = \phi(b),$$

joten $\phi'(c) = 0$.

□

Lause 5.4 (Funktion kulku ja derivaatan merkki [4, seurauslause 4.23])**.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä $]a,b[$. Olkoon lisäksi $f'(t) \geq 0$, kun $t \in]a,b[$. Tällöin f on kasvava välillä $[a,b]$ (aidosti kasvava jos $f'(t) > 0$). Vastaavasti, jos $f'(t) \leq 0$, kun $t \in]a,b[$, niin f on vähenevä välillä $[a,b]$ (aidosti vähenevä, jos $f'(t) < 0$). Jos $f'(t) = 0$, kaikilla $t \in]a,b[$, niin f on vakiofunktio välillä $[a,b]$.*

Todistus. Lauseen 5.2 perusteella kaikille sellaisille luvuille x, y, joille $a \leq x < y \leq b$, pätee

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x),$$

missä $x < \xi < y$.

Jos $f'(t) \geq 0$ jokaisella $t \in]x,y[$, niin

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x),$$

missä

$$f'(\xi)(y - x) \geq 0,$$

jolloin

$$f(y) \geq f(x).$$

Jos $f'(t) \leq 0$, niin

$$f'(\xi)(y - x) \leq 0,$$

jolloin

$$f(y) \leq f(x).$$

Jos $f'(t) = 0$ jokaisella $t \in]x,y[$ niin

$$f'(\xi)(y - x) = 0,$$

jolloin $f(y) = f(x)$.

□

Kappaleesta 3.1 muistamme, että funktion derivoituvuudesta seuraa funtion jatkuvuus. Seuraava esimerkki havainnollistaa, kuinka funktion derivoituvuudesta ei kuitenkaan vielä voida päätellä derivaattafunktion jatkuvuutta. Tässä oletetaan tunnetuksi, että trigonometriset funktiot voidaan määritellä sarjakehitelmillä, ks. [4, määr. 3.31]. Derivoimiskaavojen johtaminen, ks. [4, prop. 4.8].

Esimerkki 5.1 ([4, esimerkki 4.24])**.** Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g(0) = 0$ ja $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$. Olkoon lisäksi $f(x) = xg(x)$. Funktio g on siis jatkuva pisteessä 0 ja derivoituva kun $x \neq 0$. Funktio f on kuitenkin derivoituva kaikkialla, sillä $f'(x) = g(x) + xg'(x)$, kun $x \neq 0$ ja edelleen $f'(0) = g(0) = 0$. Kuitenkaan f' ei ole jatkuva pisteessä 0, sillä $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$, joten $\lim_{x \to 0} f'(x)$ ei ole olemassa.

Vaikka derivaatta ei ole välttämättä jatkuva, sillä on jatkuvan funktion väliarvolausetta vastaava ominaisuus.

Lause 5.5 ([4, lause 4.25])**.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivoituva välillä $[a,b]$. Olkoon $f'(a) < y < f'(b)$ tai $f'(a) > y > f'(b)$. On olemassa sellainen $x \in]a,b[$, että $f'(x) = y$.*

Todistus. Tarkastellaan tapausta $f'(a) < y < f'(b)$. Derivaatan määritelmän 3.1 perusteella on olemassa sellainen h, $0 < h < b - a$, että

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < y < \frac{f(b) - f(b-h)}{h}.$$

Olkoon $g : [a, b-h] \to \mathbb{R}$ ja $g(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$. Tällöin

$$g(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < y < \frac{f(b) - f(b-h)}{h} = g(b-h).$$

Oletettiin, että f on derivoituva välillä $[a,b]$, joten lauseen 3.2 mukaan f on jatkuva välillä $[a,b]$, ja edelleen g on jatkuva välillä $[a, b-h]$. Nyt lauseen 2.6 perusteella on olemassa sellainen $c \in]a, b-h[$, että $g(c) = y$. Lisäksi lauseen 5.2 mukaan on olemassa sellainen $x \in]c, c+h[\subset]a,b[$, että

$$f(c+h) - f(c) = f'(x)((c+h) - c),$$

jolloin

$$y = g(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(x).$$

Tapaus $f'(a) > y > f'(b)$ todistetaan vastaavasti. □

Lause 5.6 ([4, lause 4.26])**.** *Olkoon funktio f derivoituva avoimella välillä I ja $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in I$. Funktio f on bijektio eräälle avoimelle välille J. Käänteisfunktio $g : J \to I$ on derivoituva tällä välillä ja $g'(u) = f'(g(u))^{-1}$, kun $u \in J$.*

Todistus. Oletettiin, että funktio f on derivoituva välillä I, joten lauseen 3.2 perusteella se on myös jatkuva tällä välillä. Funktio f täyttää lauseen 5.4 oletukset, joten funktio on aidosti kasvava. Tällöin f on injektio, joten lauseen 2.7 mukaan $f : I \to J = f(I)$ on bijektio, ja käänteisfunktio $g : J \to I$ on jatkuva välillä J.

Osoitetaan siis, että funktio g on derivoituva avoimella välillä J. Valitaan $u \in J$, eli on olemassa sellainen $x \in I$, että $f(x) = u$ ja $g(u) = x$. Oletuksen mukaan funktio f on derivoituva pisteessä x, joten lauseen 3.1 mukaan on olemassa sellainen funktio $\phi : I \to \mathbb{R}$, että ϕ on jatkuva pisteessä x ja

$$f(y) = f(x) + (y - x)\phi(y), \tag{5.1}$$

kun $y \in I$. Edelleen lauseen 3.1 ja oletuksen perusteella $\phi(x) = f'(x) > 0$, joten $\phi(y) > 0$. Valitaan sellainen $v \in J$, että $y = g(v)$. Sijoitetaan $y = g(v)$, $x = g(u)$, $u = f(x)$ ja $v = f(y)$ yhtälöön 5.1, jolloin

$$g(v) - g(u) = \frac{v - u}{\phi(y)} = (v - u)\frac{1}{\phi(g(v))}.$$

Funktioiden ϕ ja g määrittelyiden perusteella $\frac{1}{\phi(g(v))}$ toteuttaa lauseen 3.1 oletukset toiseen suuntaan, jolloin g on derivoituva pisteessä u ja

$$g'(u) = \frac{1}{\phi(g(u))} = \frac{1}{f'(g(u))}.$$

□

Seuraavassa esimerkissä tarvittava logaritmifunktio määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona. [4, s. 66].

Esimerkki 5.2 ([4, esimerkki 4.27a])**.** Tarkastellaan funktiota $f(x) = e^x$. Lauseen 3.4 perusteella $f'(x) = f(x)$, jolloin $f'(x) > 0$, joten lauseen 5.6 mukaan käänteisfunktio g on derivoituva välillä $]0, \infty[$ ja $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{x}$. Täten $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

Esimerkki 5.3 ([4, esimerkki 4.27b])**.** Olkoon $p > 0$. Määritellään

$$f(x) = x^p = e^{\log x^p} = e^{p \log x}.$$

Lauseen 3.6 ja edellisen esimerkin logaritmifunktion derivointisäännön perusteella

$$f'(x) = \frac{p}{x}e^{p \log x} = \frac{p}{x}x^p = px^{p-1},$$

mikä on lauseen 3.3 yleistys.

Esimerkki 5.4 ([4, esimerkki 4.28])**.** Olkoon $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, kun $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Lauseen 3.5 ja esimerkin 3.2 perusteella

$$f'(x) = \cos x(\cos x)^{-1} + \sin x(-1)(\cos x)^{-2}(-\sin x) = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Käänteisfunktion g derivaatta saadaan lauseen 5.6 perusteella, jolloin

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \cos^2(g(x)).$$

Toisaalta

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1,$$

josta seuraa

$$1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ja edelleen

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Funktio g on funktion $f(x) = \tan x$ käänteisfunktio, jolloin

$$g'(x) = \cos^2(g(x)) = \frac{1}{1 + (\tan(g(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2},$$

kun $x \in \mathbb{R}$. Käänteisfunktio g on arkustangentti, jota merkitään $\arctan x$.

5.3 L'Hospitalin sääntö

Lause 5.7 (L'Hospitalin sääntö [4, lause 4.30])**.** *Olkoot funktiot f ja g derivoituvia välillä $]a, b[$ ja olkoon $g'(t) \neq 0$ jokaisella $t \in]a, b[$. Olkoon myös*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \tag{5.2}$$

kun $L \in \mathbb{R}$ tai $L = \pm\infty$.

Olkoon lisäksi joko

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0 \tag{5.3}$$

tai

$$\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty. \tag{5.4}$$

Tällöin

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Todistus. Lauseen 5.5 mukaan ei ole mahdollista, että jollakin $x \in]a, b[$ on $g'(x) < 0$ ja jollakin $x \in]a, b[$ on $g'(x) > 0$ ilman, että jollakin $x \in]a, b[$ on $g'(x) = 0$. Oletettiin, että $g'(x) \neq 0$ jokaisella $x \in]a, b[$, joten on siis joko $g'(x) < 0$ tai $g'(x) > 0$, kun $x \in]a, b[$. Täten g on aidosti monotoninen, joten nyt voidaan tarkastella sellaista funktiota g, joka on aidosti kasvava. Lauseen 5.3 mukaan on olemassa sellainen $u \in]s, t[$, että kun $a < s < t < b$, on

$$f'(u)(g(t) - g(s)) = g'(u)(f(t) - f(s)).$$

Koska g on aidosti kasvava, niin $g(t) - g(s) > 0$ ja $g'(u) > 0$, joten

$$\frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}. \tag{5.5}$$

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa L on reaaliluku. Olkoon $\epsilon > 0$. On olemassa sellainen $c \in]a, b[$, että

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} \in]L - \epsilon, L + \epsilon[,$$

kaikilla $u \in]a, c[$, joten yhtälön (5.5) mukaan

$$L - \epsilon < \frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} < L + \epsilon, \tag{5.6}$$

kun $s, t \in]a, c]$.

Oletaan ensin yhtälö (5.3), joten kun $s \to a+$, niin epäyhtälöstä (5.6) saadaan

$$L - \epsilon \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq L + \epsilon,$$

kun $t \in]a, c[$. Täten

$$\lim_{t \to a+} \frac{f(t)}{g(t)} = L.$$

Oletetaan nyt yhtälö (5.4). Koska g on aidosti kasvava, niin

$$\lim_{s \to a+} g(s) = -\infty.$$

Olkoon $t \in]a, c[$ sellainen, että $g(t) < 0$ ja olkoon $s \in]a, t[$, eli myös $g(s) < 0$. Tällöin

$$\frac{g(s) - g(t)}{g(s)} > 0.$$

Kerrotaan epäyhtälö (5.6) edellisellä lausekkeella, jolloin saadaan

$$\frac{g(s) - g(t)}{g(s)}(L - \epsilon) < \frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} \frac{g(s) - g(t)}{g(s)} < \frac{g(s) - g(t)}{g(s)}(L + \epsilon)$$

Eli

$$(5.7) \qquad (L-\epsilon)(1-\frac{g(t)}{g(s)}) < \frac{f(s)-f(t)}{g(s)} < (L+\epsilon)(1-\frac{g(t)}{g(s)}).$$

Yhtälön (5.4) perusteella tiedetään, että on olemassa sellainen $d \in]a,t[$, että

$$\frac{|f(t)|}{|g(s)|} < \epsilon \text{ ja } \frac{g(t)}{g(s)} < \epsilon,$$

kun $s \in]a,d[$. Tällöin epäyhtälöstä (5.7) seuraa

$$(L-\epsilon)(1-\epsilon)-\epsilon < \frac{f(s)}{g(s)} < (L+\epsilon)(1+\epsilon)+\epsilon.$$

Täten

$$\lim_{s\to a+} \frac{f(s)}{g(s)} = L.$$

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $L = +\infty$. Olkoon $M > 0$. On olemassa sellainen $c \in]a,b[$, että $\frac{f'(u)}{g'(u)} > M$ kaikilla $u \in]a,c[$. Yhtälön (5.5) perusteella

$$(5.8) \qquad \frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)} > M,$$

kun $s,t \in]a,c[$ ja $s<t$.

Oletetaan ensin yhtälö (5.3). Kun $s \to a+$, niin epäyhtälöstä (5.8) saadaan

$$\frac{f(t)}{g(t)} \geq M,$$

kun $t \in]a,c]$, joten

$$\lim_{t\to a+} \frac{f(t)}{g(t)} = +\infty.$$

Oletetaan nyt yhtälö (5.4). Jälleen funktion g määrittelyistä seuraa, että

$$\lim_{s\to a+} g(s) = -\infty.$$

Valitaan sellainen $d \in]a,t[$, että

$$|g(s)| > 2(|f(t)|+|g(t)|),$$

jokaisella $s \in]a,d[$. Kerrotaan epäyhtälö 5.8 lausekkeella

$$\frac{g(s)-g(t)}{g(s)} > 0,$$

jolloin saadaan

$$\frac{g(s)-g(t)}{g(s)}\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)} > M\frac{g(s)-g(t)}{g(s)},$$

mistä seuraa, että

$$\frac{f(s)-f(t)}{g(s)} > M(1-\frac{g(t)}{g(s)}).$$

Edelleen

$$\frac{f(s)}{g(s)} > \frac{M}{2}-\frac{1}{2},$$

kun $s \in]a, d[$. Täten

$$\lim_{s\to a+}\frac{f(s)}{g(s)} = +\infty.$$

□

Tarkastellaan lopuksi kahta esimerkkiä L'Hospitalin säännön käytöstä. Samanlaisia esimerkkejä on lähteessä [14, esim. 1-3].

Esimerkki 5.5. Olkoot $f(x) = \sqrt{x}$ ja $g(x) = \ln x$. Tarkastellaan funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ raja-arvoa, kun x lähestyy ääretöntä. Tästä raja-arvosta

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$$

ei voida suoraan sanoa mitään, joten käytetään L'Hospitalin sääntöä. Eksponenttifunktion derivoituvuus todistettiin lauseessa 3.4, joten L'Hospitalin säännön oletukset ovat kunnossa. Tutkitaan siis derivaattafunktioiden $f'(x)$ ja $g'(x)$ osamäärän raja-arvoa

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2} = \infty.$$

Täten L'Hospitalin säännön perusteellla

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Esimerkki 5.6. Olkoot $f(x) = e^x - x - 1$ ja $g(x) = x^2$. Tarkastellaan funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ raja-arvoa, kun x lähestyy pistettä 0. Tästä raja-arvosta

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} = \frac{0}{0}$$

ei voida suoraan päätellä varmuudella mitään, joten käytetään L'Hospitalin sääntöä. Derivaattojen $f'(x)$ ja $g'(x)$ osamäärän raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{0}{0},$$

joten vielä ei raja-arvosta

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

voida sanoa mitään. Funktiot $f'(x)$ ja $g'(x)$ toteuttavat kuitenkin L'Hospitalin säännön oletukset, joten sovelletaan sääntöä uudelleen. Toisten derivaattojen $f''(x)$ja $g''(x)$ osamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Täten L'Hospitalin säännön mukaan

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}.$$

Viitteet

[1] Beckenbach, E., *Convex Functions.*
[http://www.ams.org/bull/1948-54-05
/S0002-9904-1948-08994-7/S0002-9904-1948-08994-7.pdf]

[2] Biography of Johann Bernoulli. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk /Biographies/Bernoulli_Johann.html]

[3] Boyer, C., *A History of Mathematics.* 2nd Ed. Suomentanut Kimmo Pietiläinen. WS Bookwell Oy, 2000.

[4] Browder, A., *Mathematical Analysis: An Introduction.* 2nd Ed. Springer, 2001.

[5] Calculus. [http://en.wikipedia.org/wiki/Calculus]

[6] Halmetoja, M., Analyysin alkulähteillä.
[http://solmu.math.helsinki.fi/2008/3/kummalliset.pdf]

[7] History of calculus. [http://library.thinkquest.org/C0110248/calculus
/history2.htm]

[8] History of calculus. [http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_calculus]

[9] Korhonen, H., *Matematiikan historian henkilöhahmoja.* Lahden Kirjapaino ja Sanomalehti Oy, 1995.

[10] Lancon, D., Some mathematical notes.
[http://www.obkb.com/dcljr/mathemat.html]

[11] Lehtinen, M., Matematiikan historia.
[http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/]

[12] Neuman, E., Inequalities Involving Multivariate Convex Functions II. *Proc. Amer. Math. Soc.* 109 (1990), 965-974.

[13] Pachpatte,B., Mathematical inequalities. Elsevier, 2005.
[http://books.google.com/books?hl=fi&lr=&id=
W8LCxphoIkAC&oi=fnd&pg=PA1&dq
=%22history+of+convex+functions%22&ots=r9rr69-NO3&sig
=Y8KWfwzyQEigQya2Ge83NH92gY0#PPP1,M1]

[14] Salas, S. Hille, E. ja Etgen, G., *Calculus, One and Several Variables.* 8nd Ed. John Wiley & Sons, 1999.