TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Tia Suurhasko

Hybridilogiikkaa

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Kesäkuu 2008

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

SUURHASKO, TIA: Hybridilogiikkaa

Pro gradu -tutkielma, 47 s.

Matematiikka

Kesäkuu 2008

TIIVISTELMÄ

Tämä tutkielma käsittelee hybridilogiikan kieltä $\mathcal{H}(@)$. Tutkielmassa keskitytään malliteoriaan. Käsiteltävälle kielelle annetaan syntaksi ja semantiikka, ja esitellään kaksi kielen aksiomatisointia. Näille aksiomatisoinneille osoitetaan luotettavuustulokset, sekä täydellisyystulokset puhtailla kaavoilla laajennetuille aksiomatisoinneille ja Sahlqvist-kaavoilla laajennetuille aksiomatisoinneille. Lisäksi todistetaan, ettei aksiomatisointi välttämättä ole täydellinen, jos sitä laajennetaan sekä puhtailla kaavoilla että Sahlqvist-kaavoilla. Tutkielmassa tarkastellaan käsiteltävän kielen ilmaisuvoimaa. Näitä tarkasteluja varten määritellään ensimmäisen kertaluvun korrespondenssikieli. Lisäksi tutkitaan määriteltävyyttä kehysten luokissa. Tutkitaan, millä ehdoilla kehysten luokka on määriteltävissä joukolla kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja, sekä millä ehdoilla kehysten luokka on määriteltävissä puhtaalla $\mathcal{H}(@)$-kaavalla. Näitä tarkasteluja varten määritellään bisimulaation, ultrafiltterimorfisen kuvan ja bisimulaatiosysteemin käsitteet. Lopuksi tässä tutkielmassa esitellään vielä interpolaation ja Beth-määriteltävyyden käsitteet, sekä näiden ominaisuuksien todistamisessa tarvittava bisimulaatiotulon käsite. Tutkielmassa osoitetaan, että kieli $\mathcal{H}(@)$ toteuttaa interpolaation propositiosymboleiden suhteen eräissä kehysten luokissa, ja että kyseisellä kielellä on myös Beth-ominaisuus näissä kehysten luokissa. Tutkielman keskeisimmät lähdeteokset ovat Balder ten Caten väitöskirja *Model theory for extended modal languages*, sekä Carlos Arecesin ja Balder ten Caten artikkeli *Hybrid Logics* teoksessa *Handbook of Modal Logic*.

Sisältö

Johdanto

Hybridilogiikan kielet ovat perusmodaalilogiikan ja ensimmäisen kertaluvun logiikan välille sijoittuvia modaalilogiikan kieliä. Yksinkertaisimmillaan hybridilogiikka on modaalilogiikkaa, jota laajennetaan nominaaleilla, eli symboleilla, jotka nimeävät yksittäisiä mallin maailmoja. Tässä tutkielmassa esitellään hybridilogiikan kieli $\mathcal{H}(@)$ ja tutkitaan tämän hybridikielen ominaisuuksia.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa määritellään kielen $\mathcal{H}(@)$ syntaksi ja semantiikka. Lisäksi tässä luvussa esitellään lyhyesti tutkielman muissa luvuissa tarvittavia merkintöjä, määritelmiä ja lauseita.

Tutkielman toisessa luvussa esitellään hybridilogiikan aksiomatisointi, ja osoitetaan luotettavuus sekä kaksi täydellisyystulosta. Pykälässä 2.1 osoitetaan hybridilogiikkojen luotettavuus. Pykälässä 2.2 todistetaan täydellisyystulos puhtailla kaavoilla laajennetuille hybridilogiikoille. Pykälässä 2.3 todistetaan täydellisyystulos Sahlqvist-kaavoilla laajennetuille hybridilogiikoille. Pykälässä 2.4 osoitetaan, että täydellisyystulos ei välttämättä päde, jos hybridilogiikkaa laajennetaan sekä puhtailla kaavoilla että Sahlqvist-kaavoilla.

Kolmannessa luvussa tutkitaan kielen $\mathcal{H}(@)$ ilmaisuvoimaa. Pykälässä 3.1 esitellään ensimmäisen kertaluvun logiikan korrespondenssikieli kielelle $\mathcal{H}(@)$. Määritellään standardikäännös kieleltä $\mathcal{H}(@)$ ensimmäisen kertaluvun kielelle ja osoitetaan, että se säilyttää ekvivalenssin. Lisäksi esitellään bisimulaation käsite ja osoitetaan, että korrespondenssikielen kaava on ekvivalentti kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavan standardikäännöksen kanssa jos ja vain jos se on invariantti $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioiden suhteen. Pykälässä 3.2 tutkitaan määriteltävyyttä kehysten luokissa. Ensin määritellään kehyksen ultrafiltterimorfisen kuvan käsite, minkä jälkeen osoitetaan, että elementaarinen kehysten luokka on määriteltävissä joukolla kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja jos ja vain jos se on suljettu generoitujen alikehysten ja ultrafiltterimorfisten kuvien suhteen. Lopuksi määritellään vielä bisimulaatiosysteemin käsite, ja osoitetaan, että kehysten luokka on määriteltävissä yhdellä kielen $\mathcal{H}(@)$ puhtaalla kaavalla jos ja vain jos se on elementaarinen, sekä suljettu generoitujen alikehysten ja bisimulaatiosysteemien kuvien suhteen.

Neljännessä luvussa käsitellään interpolaatiota ja Beth-määriteltävyyttä koskevia tuloksia. Ensin esitellään interpolaation ja bisimulaatiotulon käsitteet, ja osoitetaan, että kieli $\mathcal{H}(@)$ toteuttaa interpolaation propositiosymboleiden suhteen sellaisissa kehysten luokissa, jotka ovat suljettuja generoitujen alikehysten ja bisimulaatiotulojen suhteen. Sitten esitellään Beth-ominaisuuden käsite, ja osoitetaan, että kielellä $\mathcal{H}(@)$ on myös Beth-ominaisuus edellä mainituissa kehysten luokissa.

Tutkielman lukijalta odotetaan klassisen logiikan ja modaalilogiikan tuntemusta. Erityisesti lukijalla olisi hyvä olla tietoa modaalilogiikan malliteoriasta. Tutkielmassa pyritään esittämään kaikki tarvittavat määritelmät ja lauseet, mutta todistuksia sivuutetaan. Tarvittavat pohjatiedot lukija voi hankkia esimerkiksi kirjasta Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y.: *Modal Logic* [6]. Pääasiallisina lähteinä tässä työssä on käytetty väitöskirjaa ten Cate, B.: *Model theory for extended modal languages* [7], sekä artikkelia Areces, C., ten Cate, B.: *Hybrid Logics* [3].

1 Esitietoja

Tässä luvussa esitellään kielen $\mathcal{H}(@)$ syntaksi ja semantiikka, sekä annetaan jatkossa tarvittavia määritelmiä ja lauseita.

1.1 Syntaksi ja semantiikka

Tässä alaluvussa määritellään hybridikielen $\mathcal{H}(@)$ syntaksi ja semantiikka. Hybridikieli $\mathcal{H}(@)$ laajentaa perusmodaalilogiikkaa nominaaleilla ja @-operaattorilla.

Määritelmä 1.1. (Vrt. [7, s. 38]). Olkoon PROP $= \{p_1, p_2, \dots\}$ numeroituvasti ääretön joukko propositiosymboleita ja NOM $= \{i_1, i_2, \dots\}$ numeroituvasti ääretön joukko nominaaleja. Olkoot PROP ja NOM erilliset joukot. Hybridikielen $\mathcal{H}(@)$ hyvinmuodostetut kaavat määritellään rekursiivisesti:

$$\text{FORMS} ::= \top \mid p \mid i \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Diamond\varphi \mid @_i\varphi,$$

missä $p \in$ PROP ja $i \in$ NOM.

Määritelmä 1.2. (Vrt. [3, s. 825]). *Malli* $\mathcal{M}$ on kolmikko $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, jossa $W \neq \emptyset$, $R \subseteq W \times W$ ja $V : \text{PROP} \cup \text{NOM} \to \mathcal{P}(W)$ on sellainen kuvaus, että $|V(i)| = 1$ aina, kun $i \in$ NOM. Joukkoa W sanotaan mallin $\mathcal{M}$ *mahdollisten maailmojen* joukoksi, ja kuvausta V *valuaatioksi*. *Kehys* $\mathcal{F}$ on järjestetty pari $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, eli malli ilman valuaatiota.

Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ malli ja $w \in W$. Olkoon $p \in$ PROP, $i \in$ NOM ja $\varphi, \psi \in$ FORMS. Kaavojen totuusehdot ovat seuraavat:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \vDash \top & & \\
\mathcal{M}, w \vDash p & \text{joss} & w \in V(p) \\
\mathcal{M}, w \vDash i & \text{joss} & w \in V(i) \\
\mathcal{M}, w \vDash \neg\varphi & \text{joss} & \mathcal{M}, w \nvDash \varphi \\
\mathcal{M}, w \vDash \varphi \wedge \psi & \text{joss} & \mathcal{M}, w \vDash \varphi \text{ ja } \mathcal{M}, w \vDash \psi \\
\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\varphi & \text{joss} & \exists w' \in W : wRw' \text{ ja } \mathcal{M}, w' \vDash \varphi \\
\mathcal{M}, w \vDash @_i\varphi & \text{joss} & \mathcal{M}, w' \vDash \varphi, \text{ kun } V(i) = \{w'\}.
\end{array}$$

Esitetään vielä yksinkertainen esimerkki hybridimallista sekä nominaalien ja @-operaattoreiden totuusehtojen käytöstä.

Esimerkki 1.1. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, jossa $W = \{1,2,3\}$ ja $R = \{(1,2),(2,3)\}$. Olkoon $V(p) = \{1,3\}$ ja $V(q) = \emptyset$, kun $q \in \mathrm{PROP} \setminus \{p\}$. Olkoon lisäksi $V(i) = \{1\}$ ja $V(j) = \{3\}$, kun $j \in \mathrm{NOM} \setminus \{i\}$. Joukkoon $V(x)$ voi siis kuulua yksi tai useampia joukon W alkioita, tai se voi olla tyhjä joukko, jos $x \in \mathrm{PROP}$. Mutta jos $x \in \mathrm{NOM}$, niin joukkoon $V(x)$ kuuluu täsmälleen yksi joukon W alkio.

Nyt koska $1 \in V(i)$, niin $\mathcal{M}, 1 \vDash i$, ja koska $|V(i)| = 1$, niin $\mathcal{M}, w \nvDash i$ jokaisella $w \in W \setminus \{1\}$. Koska $\mathcal{M}, 1 \vDash \Diamond\Box p$ ja $V(i) = \{1\}$, niin $\mathcal{M}, w \vDash @_i \Diamond\Box p$ jokaisella $w \in W$.

1.2 Määritelmiä ja lauseita

Tässä alaluvussa esitetään tutkielman muissa luvuissa tarvittavia merkintöjä, määritelmiä ja lauseita.

Kaava φ on *toteutuva kehyksessä* $\mathcal{F}$, jos on olemassa sellainen kehyksen $\mathcal{F}$ maailma w sekä sellainen valuaatio V, että $\langle \mathcal{F}, V \rangle, w \vDash \varphi$. Kaava φ on *toteutuva kehysten luokassa* K, jos on olemassa sellainen $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$, että φ on toteutuva kehyksessä $\mathcal{F}$. Kaava φ on *globaalisesti toteutuva* kehyksessä $\mathcal{F}$, jos on olemassa sellainen valuaatio V, että aina, kun w on kehyksen $\mathcal{F}$ maailma, $\langle \mathcal{F}, V \rangle, w \vDash \varphi$. Kaavajoukko Σ on toteutuva kehyksessä $\mathcal{F}$, jos on olemassa sellainen kehyksen $\mathcal{F}$ maailma ja sellainen valuaatio V, että $\langle \mathcal{F}, V \rangle, w \vDash \Sigma$. Vastaavasti määritellään myös toteutuvuus kehysten luokassa sekä globaalinen toteutuvuus joukolle Σ. Kaavajoukko Σ on *äärellisesti toteutuva* kehyksessä $\mathcal{F}$, jos sen jokainen äärellinen osajoukko on toteutuva kehyksessä $\mathcal{F}$. Vastaavasti määritellään kaikki toteutuvuuden käsitteet malleille.

Olkoon $\{x_1, x_2, \dots\}$ ensimmäisen kertaluvun logiikan muuttujien joukko. Jatkossa ensimmäisen kertaluvun logiikan muuttujille käytetään kuitenkin usein myös merkintöjä x, y ja z. Ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavaa, jossa on n vapaata muuttujaa $x_1, \dots, x_n$, merkitään $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Merkitään $\mathcal{M} \vDash \varphi[d_1, \dots, d_n]$, kun kaavan φ kukin vapaa muuttuja x_i tulkitaan mallin $\mathcal{M}$ maailmaksi d_i, ja kaava φ toteutuu mallissa $\mathcal{M}$ näillä tulkinnoilla.

Määritelmä 1.3. (Vrt. [6, s. 15]). *Sijoitus* $\sigma : \mathrm{PROP} \cup \mathrm{NOM} \to \mathrm{FORMS} \cup \mathrm{NOM}$ on sellainen kuvaus, joka kuvaa joukon PROP alkiot joukolle FORMS, ja joukon NOM alkiot joukolle NOM. Sijoitus σ määrittelee edelleen kuvauksen $(\cdot)^\sigma : \mathrm{FORMS} \to \mathrm{FORMS}$, joka määritellään rekursiivisesti:

$$
\begin{aligned}
\top^\sigma &= \top \\
p^\sigma &= \sigma(p) \\
i^\sigma &= \sigma(i) \\
(\neg\varphi)^\sigma &= \neg\varphi^\sigma \\
(\varphi \wedge \psi)^\sigma &= \varphi^\sigma \wedge \psi^\sigma \\
(\Diamond\varphi)^\sigma &= \Diamond\varphi^\sigma
\end{aligned}
$$

$$(@_i\varphi)^\sigma = @_{\sigma(i)}\varphi^\sigma.$$

Esimerkki 1.2. Olkoon σ sellainen sijoitus, että $\sigma(i) = j$ ja $\sigma(p) = p \vee \Box q$. Nyt esimerkiksi

$$\begin{aligned}(@_i(\neg p \wedge \Diamond i))^\sigma &= @_i(\neg p \wedge \Diamond i)^\sigma \\ &= @_i((\neg p)^\sigma \wedge (\Diamond i)^\sigma) \\ &= @_i(\neg p^\sigma \wedge \Diamond i^\sigma) \\ &= @_i(\neg(p \vee \Box q) \wedge \Diamond j).\end{aligned}$$

Usein sijoitukselle käytetään yksinkertaisempaa merkintää

$$\varphi[q_1/\psi_1, \ldots, q_n/\psi_n],$$

mikä tarkoittaa, että jokainen propositiosymbolin (nominaalin) q_1 esiintymä kaavassa φ korvataan kaavalla (nominaalilla) ψ_1 ja niin edelleen.

Määritelmä 1.4. (Vrt. [6, s.189]). *Logiikka* Λ on sellainen joukko hybridikielen kaavoja, joka sisältää kaikki tautologiat ja on suljettu päättelysääntöjen (MP) ja (Subst) (ks. määritelmä 2.3, s. 7) suhteen.

Määritelmä 1.5. (Ks. [13, s. 85]). *Normaali modaalilogiikka* on sellainen joukko modaalilogiikan kaavoja, joka sisältää kaikki skeeman ($\mathrm{K}_\Box$) (ks. määritelmä 2.3, s. 7) instanssit ja on suljettu päättelysääntöjen ($\mathrm{Gen}_\Box$), (MP) ja (Subst) (ks. määritelmä 2.3, s. 7) suhteen.

Määritelmä 1.6. (Ks. [13, s. 88]). Kaavan A *todistus* aksioomasysteemissä Λ on äärellinen jono kaavoja $A_1, \ldots, A_n$, jossa $A_n = A$ ja jokainen A_i on joko systeemin Λ aksiooma tai A_i voidaan päätellä systeemin Λ päättelysäännöllä kaavoista $A_1, \ldots, A_j$, kun $j < i$.

Tällöin merkitään $\vdash_\Lambda A$, ja sanotaan, että A on *pääteltävissä* aksioomasysteemissä Λ.

Määritelmä 1.7. (Vrt. [13, s. 231]). Olkoon Λ logiikka. Kaavajoukko Ω on Λ-*ristiriitainen*, jos on olemassa sellainen joukon Ω osajoukko $\{A_1, \ldots, A_n\}$, että $\vdash_\Lambda \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. Muuten joukko Ω on Λ-*ristiriidaton*. Joukko Ω on *maksimaalisesti* Λ-*ristiriidaton*, jos se on Λ-ristiriidaton, ja sen jokainen aito laajennus on Λ-ristiriitainen.

Määritelmä 1.8. (Vrt. [6, s. 56]). Olkoot $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ ja $\mathcal{F}' = \langle W', R'\rangle$ kehyksiä. Kehys $\mathcal{F}'$ on kehyksen $\mathcal{F}$ *alikehys*, jos $W' \subseteq W$ ja

$$R' = R \cap (W' \times W').$$

Malli $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}', V'\rangle$ on mallin $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V\rangle$ *alimalli*, jos $\mathcal{F}'$ on kehyksen $\mathcal{F}$ alikehys ja $V'(p) = V(p) \cap W'$ aina, kun $p \in \mathrm{PROP} \cup \mathrm{NOM}$.

Määritelmä 1.9. (Vrt. [6, s. 138-139]). Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ ja $X \subseteq W$. *Joukon X generoima kehyksen $\mathcal{F}$ alikehys* on kehys $\mathcal{F}' = \langle W', R'\rangle$, jossa $W' \subseteq W$ on pienin sellainen joukko, joka toteuttaa ehdot

$$X \subseteq W',$$
$$\text{jos } w \in W' \text{ ja } wRv, \text{ niin } v \in W',$$

ja $R' = R \cap (W' \times W')$. Jos X on yksialkioinen joukko $\{w\}$, niin sanotaan, että $\mathcal{F}'$ on *maailman w generoima alikehys.*

Määritelmä 1.10. (Ks. [6, s. 5-6]). Olkoon $W \neq \emptyset$ ja $R \subseteq W \times W$. Relaation R *transitiivinen sulkeuma* R^+ on pienin sellainen transitiivinen relaatio joukossa W, joka sisältää relaation R, eli

$$R^+ = \bigcap\{R' \mid R' \subseteq W \times W, R' \text{ on transitiivinen, ja } R \subseteq R'\}.$$

Vastaavasti relaation R *refleksiivinen transitiivinen sulkeuma* R^* on pienin sellainen refleksiivinen ja transitiivinen relaatio joukossa W, joka sisältää relaation R, eli

$$R^* = \bigcap\{R' \mid R' \subseteq W \times W, R' \text{ on refleksiivinen ja transitiivinen, ja } R \subseteq R'\}.$$

Määritelmä 1.11. (Ks. [6, s. 6]). *Puu $\mathcal{T}$* on struktuuri $\langle T, R\rangle$, jossa

(i) T on joukko solmuja, ja on olemassa sellainen $r \in T$ (puun *juuri*), että $\forall t \in T : rR^*t$.
(ii) Aina, kun $t \neq r$, on olemassa sellainen yksikäsitteinen $t' \in T$, että $t'Rt$.
(iii) $\forall t \in T : t \not R^+ \, t$.

Määritelmä 1.12. (Vrt. [6, s. 29]). *Yleinen kehys* on pari $\langle \mathcal{F}, A\rangle$, jossa $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ on kehys, ja $A \neq \emptyset$ on kokoelma joukon W *sallittuja* osajoukkoja, jotka ovat suljettuja seuraavien operaatioiden suhteen:

(i) Jos $X, Y \in A$, niin $X \cup Y \in A$.
(ii) Jos $X \in A$, niin $W \setminus X \in A$.
(iii) Jos $X \in A$, niin $\{w \in W \mid wRw' \text{ jollain } w' \in X\} \in A$.

Määritelmä 1.13. (Vrt. [6, s. 30]). Olkoon X joukko ja $Y \subseteq X$. Joukko Y on joukon X *kofiniittinen* osajoukko, jos sen komplementti joukossa X on äärellinen.

Joukkoa sellaisia ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavoja, joissa esiintyy vain yksi vapaa muuttuja, kutsutaan *1-tyypiksi.* Olkoon $\Gamma(x)$ 1-tyyppi, jossa x on ainoa vapaana esiintyvä muuttuja. Joukko $\Gamma(x)$ *toteutuu* mallissa $\mathcal{M}$, jos on olemassa sellainen maailma d, että $\mathcal{M} \vDash \Gamma[d]$.

Määritelmä 1.14. (Ks. [7, s. 187]). Malli $\mathcal{M}$ on *1-saturoitu*, jos seuraava ehto pätee aina, kun $\Gamma(x)$ on 1-tyyppi: jos jokainen joukon $\Gamma(x)$ äärellinen osajoukko toteutuu mallissa $\mathcal{M}$, niin $\Gamma(x)$ toteutuu mallissa $\mathcal{M}$.

Olkoon $\mathcal{M}$ malli ja $d_1, \ldots, d_n$ äärellinen jono mallin $\mathcal{M}$ maailmoja. Käytetään merkintää $\langle \mathcal{M}, d_1, \ldots, d_n \rangle$ mallin $\mathcal{M}$ laajennukselle, jossa maailmat $d_1, \ldots, d_n$ on nimetty uusilla vakioiolla $c_1, \ldots, c_n$. Laajennetussa mallissa siis kutakin maailmaa d_k vastaa uusi vakio c_k.

Määritelmä 1.15. (Ks. [7, s. 187]). Malli $\mathcal{M}$ on *ω-saturoitu*, jos sen jokainen laajennus $\langle \mathcal{M}, d_1, \ldots, d_n \rangle$, $n \in \omega$, on 1-saturoitu.

Sanotaan, että malli $\mathcal{N}$ on mallin $\mathcal{M}$ *laajennus*, jos $\mathcal{M}$ on mallin $\mathcal{N}$ alimalli.

Määritelmä 1.16. (Ks. [6, s. 490]). Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ malleja. Malli $\mathcal{N}$ on mallin $\mathcal{M}$ *elementaarinen laajennus*, jos

(i) $\mathcal{N}$ on mallin $\mathcal{M}$ laajennus.
(ii) Aina, kun $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ on ensimmäisen kertaluvun logiikan kaava ja $d_1, \ldots, d_n$ ovat mallin $\mathcal{M}$ maailmoja, niin

$$\mathcal{M} \models \alpha[d_1, \ldots, d_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{N} \models \alpha[d_1, \ldots, d_n].$$

Lause 1.1. (Vrt. [7, s. 187]). *Jokaisella mallilla on olemassa ω-saturoitu elementaarinen laajennus.*

Todistus. Ks. [4, s. 87-89]. □

Jatkossa ei erikseen mainita lauseen 1.1 käytöstä, vaan mallien ω-saturoidut elementaariset laajennukset otetaan käyttöön niitä tarvittaessa ilman erillistä mainintaa laajennuksen olemassaolosta.

Määritelmä 1.17. (Vrt. [13, s. 57]). Olkoon φ kielen $\mathcal{H}(@)$ kaava ja olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ malli. Joukko

$$V(\varphi) = \{w \in W \mid \mathcal{M}, v \models \varphi\}$$

on kaavan φ *totuusjoukko* mallissa $\mathcal{M}$.

2 Luotettavuus ja täydellisyys

Tässä luvussa esitetään kaksi hybridikielen $\mathcal{H}(@)$ aksiomatisointia. Molemmat aksiomatisoinnit todistetaan luotettaviksi. Toista aksiomatisointia laajennetaan puhtailla kaavoilla, ja todistetaan näin saadulle aksiomatisoinnille täydellisyystulos. Toista aksiomatisointia puolestaa laajennetaan Sahlqvist-kaavoilla, ja todistetaan täydellisyystulos myös tälle aksiomatisoinnille. Lisäksi osoitetaan, ettei aksiomatisointi välttämättä ole täydellinen, jos sitä laajennetaan sekä puhtailla kaavoilla että Sahlqvist-kaavoilla.

Määritellään ensin luotettavuuden ja täydellisyyden sekä vahvan täydellisyyden käsitteet.

Määritelmä 2.1. (Vrt. [6, s. 193]). Aksioomasysteemi on *luotettava* kehysten luokan suhteen, jos kaikille kaavoille φ pätee, että jos φ on johdettavissa aksioomasysteemissä, niin φ on validi annetussa kehysten luokassa.

Määritelmä 2.2. (Vrt. [6, s. 193-194]). Aksioomasysteemi on *täydellinen* kehysten luokan suhteen, jos kaikille kaavoille φ pätee, että jos φ on validi annetussa kehysten luokassa, niin φ on johdettavissa aksioomasysteemissä.

Aksioomasysteemi Λ on *vahvasti täydellinen* kehysten luokan K suhteen, jos kaikille kaavajoukoille $\Gamma \cup \{\varphi\}$ pätee, että jos $\Gamma \vDash_{\mathsf{K}} \varphi$, niin $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$.

Seuraavaksi esitetään täydellisyyden todistamista helpottava lause, jota tarvitaan sekä puhtaan täydellisyyden että Sahlqvist-täydellisyyden todistamisessa.

Lause 2.1. *Logiikka Λ on täydellinen struktuurien luokan S suhteen, jos ja vain jos jokainen Λ-ristiriidaton kaava on toteutuva jossakin $\mathcal{G} \in \mathsf{S}$. Vastaavasti Λ on vahvasti täydellinen struktuurien luokan S suhteen, jos ja vain jos jokainen Λ-ristiriidaton kaavajoukko on toteutuva jossakin $\mathcal{G} \in \mathsf{S}$.*

Todistus (vrt. [6, s. 194-195]). Täydellisyyttä koskeva tulos seuraa suoraan vahvaa täydellisyyttä koskevasta tuloksesta, joten todistetaan jälkimmäinen. Oletetaan ensin, että logiikka Λ on vahvasti täydellinen struktuurien luokan S suhteen. Olkoon Γ Λ-ristiriidaton kaavajoukko, ja olkoon φ sellainen kaava, että $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$. Koska Γ on Λ-ristiriidaton, niin $\Gamma \nvdash_{\Lambda} \neg\varphi$. Nyt koska Λ on vahvasti täydellinen luokan S suhteen, niin kontrapositioperiaatteen nojalla saadaan $\Gamma \nvDash_{\mathsf{S}} \neg\varphi$. Siis on olemassa sellainen $\mathcal{G} \in \mathsf{S}$, että aina, kun $\psi \in \Gamma$, $\mathcal{G} \vDash \psi$ ja $\mathcal{G} \nvDash \neg\varphi$. Koska Γ oli mielivaltainen, on osoitettu, että jokainen Λ-ristiriidaton kaavajoukko on toteutuva jossain struktuurissa $\mathcal{G} \in \mathsf{S}$.

Osoitetaan toinen suunta kontraposition avulla. Oletetaan siis, että Λ ei ole vahvasti täydellinen luokan S suhteen. Tällöin on olemassa sellainen kaavajoukko $\Gamma \cup \{\varphi\}$, että $\Gamma \vDash_{\mathsf{S}} \varphi$, mutta $\Gamma \nvdash_{\Lambda} \varphi$. Tällöin joukko $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ on Λ-ristiriidaton, mutta se ei ole toteutuva missään $\mathcal{G} \in \mathsf{S}$. $\square$

Määritellään sitten Sahlqvist-täydellisyyden todistamiseen riittävä aksiomatisointi.

Määritelmä 2.3. (Vrt. [3, s. 832-833]). Olkoot $\varphi, \psi \in$ FORMS ja $i, j \in$ NOM. Logiikka $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)}$ on pienin joukko kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja, joka sisältää seuraavat aksioomat ja on suljettu seuraavien päättelysääntöjen suhteen:

(CT)	Kaikki klassiset tautologiat
($K_\Box$)	$\vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
($K_@$)	$\vdash @_i(\varphi \to \psi) \to (@_i\varphi \to @_i\psi)$
($\mathrm{Selfdual}_@$)	$\vdash @_i\varphi \leftrightarrow \neg @_i \neg\varphi$
($\mathrm{Ref}_@$)	$\vdash @_i i$
(Agree)	$\vdash @_i @_j \varphi \leftrightarrow @_j\varphi$
(Intro)	$\vdash i \to (\varphi \leftrightarrow @_i\varphi)$
(Back)	$\vdash \Diamond @_i\varphi \to @_i\varphi$
(MP)	Jos $\vdash \varphi$ ja $\vdash \varphi \to \psi$, niin $\vdash \psi$.
(Subst)	Jos $\vdash \varphi$, niin $\vdash \varphi^\sigma$, missä σ on sijoitus.
($\mathrm{Gen}_@$)	Jos $\vdash \varphi$, niin $\vdash @_i\varphi$.
($\mathrm{Gen}_\Box$)	Jos $\vdash \varphi$, niin $\vdash \Box\varphi$.

Olkoon Σ joukko kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja. Logiikka $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on pienin kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavajoukko, joka sisältää edellä annetut aksioomat sekä joukon Σ kaavat ja on suljettu edellä annettujen päättelysääntöjen suhteen.

Edellä määritelty aksiomatisointi ei vielä riitä puhtaan täydellisyyden todistamiseen, joten aksiomatisointiin on lisättävä tarvittavat päättelysäännöt. Laajennetaan siis logiikkaa $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ vielä kahdella päättelysäännöllä:

(Name)	Jos $\vdash @_i\varphi$ ja i ei esiinny kaavassa φ, niin $\vdash \varphi$.
(BG)	Jos $\vdash @_i\Diamond j \to @_j\varphi$, kun $i \neq j$ ja j ei esiinny kaavassa φ, niin $\vdash @_i\Box\varphi$.

Merkitään tätä uutta logiikkaa $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$.

2.1 Luotettavuus

Tässä alaluvussa todistetaan logiikat $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ ja $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ luotettaviksi joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen.

Lause 2.2. *Olkoon Σ joukko kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja. Tällöin logiikka $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on luotettava joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen.*

Todistus. Luotettavuus logiikalle $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ todistetaan vastaavasti kuin perusmodaalilogiikoille (vrt. [13, s. 200-204]). Esitetään tässä kaikkien nominaaleja tai @-operaattoreita sisältävien kohtien todistukset. Muut kohdat todistetaan vastaavasti.

Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ jokin $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-kehys. Olkoon $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V\rangle$ ja $w \in W$. Olkoon $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ kaavan A_n todistus. Tehdään induktio-oletus, että $\mathcal{M} \vDash A_j$, kun $j < i$. Oletetaan ensin, että A_i on skeeman ($K_@$) instanssi ja osoitetaan, että tällöin $\mathcal{M}, w \vDash A_i$. Jos $\mathcal{M}, w \vDash @_i(\varphi \to \psi)$ ja

$\mathcal{M}, w \vDash @_i\varphi$, niin $\mathcal{M}, w' \vDash \varphi \to \psi$ ja $\mathcal{M}, w' \vDash \varphi$, kun $V(i) = \{w'\}$. Edelleen $\mathcal{M}, w' \vDash \psi$, kun $V(i) = \{w'\}$, joten $\mathcal{M}, w \vDash @_i\psi$.

Seuraavaksi oletetaan, että A_i on skeeman (Selfdual$_@$) instanssi. Tällöin $\mathcal{M}, w \vDash A_i$, sillä

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \vDash @_i\varphi \quad & \text{joss} \quad \mathcal{M}, w' \vDash \varphi, \text{ kun } V(i) = \{w'\} \\ & \text{joss} \quad \mathcal{M}, w' \nvDash \neg\varphi, \text{ kun } V(i) = \{w'\} \\ & \text{joss} \quad \mathcal{M}, w \nvDash @_i\neg\varphi \\ & \text{joss} \quad \mathcal{M}, w \vDash \neg @_i \neg\varphi. \end{aligned}$$

Oletetaan, että A_i on skeeman (Ref$_@$) instanssi ja osoitetaan, että tällöin $\mathcal{M}, w \vDash A_i$. Totuusehdon mukaan $\mathcal{M}, w' \vDash i$ jos ja vain jos $w' \in V(i)$. Siis $\mathcal{M}, w' \vDash i$, kun $V(i) = \{w'\}$. Edelleen $\mathcal{M}, w \vDash @_i i$.

Jos A_i on skeeman (Agree) instanssi, niin $\mathcal{M}, w \vDash A_i$, sillä

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \vDash @_i @_j\varphi \quad & \text{joss} \quad \mathcal{M}, w' \vDash @_j\varphi, \text{ kun } V(i) = \{w'\} \\ & \text{joss} \quad \mathcal{M}, w'' \vDash \varphi, \text{ kun } V(j) = \{w''\} \\ & \text{joss} \quad \mathcal{M}, w \vDash @_j\varphi. \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että jos A_i on skeeman (Intro) instanssi, niin $\mathcal{M}, w \vDash A_i$. Jos $\mathcal{M}, w \vDash i$, niin $w \in V(i)$ eli $V(i) = \{w\}$. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash \varphi$. Siis $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$, kun $V(i) = \{w\}$. Tällöin $\mathcal{M}, w \vDash @_i\varphi$. Oletetaan sitten, että $\mathcal{M}, w \vDash @_i\varphi$. Nyt $\mathcal{M}, w' \vDash \varphi$, kun $V(i) = \{w'\}$. Koska $\mathcal{M}, w \vDash i$, niin $V(i) = \{w\} = \{w'\}$. Edelleen koska $\mathcal{M}, w' \vDash \varphi$, niin myös $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$.

Oletetaan, että A_i on skeeman (Back) instanssi ja osoitetaan, että tällöin $\mathcal{M}, w \vDash A_i$. Jos $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond @_i\varphi$, niin on olemassa sellainen $w' \in W$, että wRw' ja $\mathcal{M}, w' \vDash @_i\varphi$. Edelleen $\mathcal{M}, w'' \vDash \varphi$, kun $V(i) = \{w''\}$. Tällöin $\mathcal{M}, w \vDash @_i\varphi$.

Koska kaikissa kohdissa maailma w oli mielivaltainen, niin kaikissa kohdissa $\mathcal{M} \vDash A_i$. Edelleen koska malli $\mathcal{M}$ oli mielivaltainen, niin kaikissa kohdissa $\mathcal{F} \vDash A_i$.

Jos taas kaava A_i on saatu kaavasta A_j säännöllä (Gen$_@$), niin $A_i = @_k A_j$. Induktio-oletuksen perusteella $\mathcal{M} \vDash A_j$, eli myös $\mathcal{M}, w \vDash A_j$, kun $V(k) = \{w\}$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathcal{M}, w' \vDash @_k A_j$ aina, kun $w' \in W$, eli $\mathcal{M} \vDash @_k A_j$. Edelleen $\mathcal{F} \vDash @_k A_j$. □

Seuraus 2.1. *Olkoon Σ joukko $\mathcal{H}(@)$-kaavoja. Tällöin logiikka $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on luotettava joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen.*

Todistus. Logiikan $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ luotettavuus joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen seuraa suoraan lauseesta 2.2. □

2.2 Puhdas täydellisyys

Tässä alaluvussa todistetaan, että logiikka $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on vahvasti täydellinen joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen, kun Σ on joukko puhtaita

$\mathcal{H}(@)$-kaavoja. Tämän tuloksen todistamista varten yleistetään Lindenbaumin lemma kielelle $\mathcal{H}(@)$.

Määritellään ensin puhtaan kaavan käsite.

Määritelmä 2.4. (Ks. [3, s. 833]). Kaava on *puhdas*, jos se ei sisällä propositiosymboleita. Puhdas kaava voi sisältää nominaaleja.

Seuraavaa lemmaa tarvitaan sekä Lindenbaumin lemman että puhtaan täydellisyyden todistamisessa.

Lemma 2.1. (Vrt. [3, s. 835]). *Olkoon* Σ *joukko kielen* $\mathcal{H}(@)$ *kaavoja. Olkoot* $\varphi, \psi \in \mathrm{FORMS}$ *ja* $i, j \in \mathrm{NOM}$. *Seuraavat kaavat ja päättelysääntö ovat johdettavissa systeemissä* $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$*:*

1. $\vdash @_i j \to (@_i\varphi \leftrightarrow @_j\varphi)$
2. $\vdash @_i(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow @_i\varphi \wedge @_i\psi$
3. $\vdash @_i\neg\varphi \leftrightarrow \neg @_i\varphi$
4. $\vdash @_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \to @_i\Diamond\varphi$
5. *Jos* $\vdash @_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \to \psi$, *kun* $i \neq j$ *ja* j *ei esiinny kaavoissa* φ *ja* ψ, *niin* $\vdash @_i\Diamond\varphi \to \psi$.

Todistus. Todistetaan tässä kohdat 1, 2 ja 3. Merkinnällä (LP) tarkoitetaan, että tulos on saatu lauselogiikan päättelyllä. Aloitetaan kohdasta 1.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} j \to (\varphi \leftrightarrow @_j\varphi) & (\mathrm{Intro}) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} j \to (\varphi \to @_j\varphi) & (\mathrm{LP}) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} j \to (@_j\varphi \to \varphi) & (\mathrm{LP}) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i(j \to (\varphi \to @_j\varphi)) & (\mathrm{Gen}_@) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i(j \to (@_j\varphi \to \varphi)) & (\mathrm{Gen}_@) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i j \to @_i(\varphi \to @_j\varphi) & (\mathrm{K}_@), (\mathrm{LP}) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i j \to @_i(@_j\varphi \to \varphi) & (\mathrm{K}_@), (\mathrm{LP}) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i j \to (@_i\varphi \to @_i @_j\varphi) & (\mathrm{K}_@), (\mathrm{LP}) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i j \to (@_i @_j\varphi \to @_i\varphi) & (\mathrm{K}_@), (\mathrm{LP}) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i j \to (@_i\varphi \leftrightarrow @_i @_j\varphi) & (\mathrm{LP}) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i j \to (@_i\varphi \leftrightarrow @_j\varphi) & (\mathrm{Agree}), (\mathrm{LP}).
\end{array}
$$

Todistetaan sitten kohta 2.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} \varphi \wedge \psi \to \varphi & \text{(CT)} \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i(\varphi \wedge \psi \to \varphi) & (\text{Gen}_@) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i(\varphi \wedge \psi) \to @_i\varphi & (\text{K}_@), \text{(MP)} \\
 & \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} \varphi \wedge \psi \to \psi & \text{(CT)} \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i(\varphi \wedge \psi \to \psi) & (\text{Gen}_@) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i(\varphi \wedge \psi) \to @_i\psi & (\text{K}_@), \text{(MP)} \\
 & \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i(\varphi \wedge \psi) \to @_i\varphi \wedge @_i\psi & \text{(LP)} \\
 & \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} \neg(@_i\varphi \to @_i\neg\psi) \to \neg @_i(\varphi \to \neg\psi) & \text{(CT)}, (\text{K}_@), \text{(MP)} \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i\varphi \wedge \neg @_i\neg\psi \to \neg @_i(\neg\varphi \vee \neg\psi) & \text{(LP)} \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i\varphi \wedge @_i\psi \to \neg @_i\neg(\varphi \wedge \psi) & (\text{Selfdual}_@), \text{(LP)} \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i\varphi \wedge @_i\psi \to @_i(\varphi \wedge \psi) & (\text{Selfdual}_@), \text{(LP)} \\
 & \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow @_i\varphi \wedge @_i\psi & \text{(LP)}.
\end{array}
$$

Todistetaan vielä kohta 3.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} \neg\neg @_i\varphi \leftrightarrow @_i\varphi & \text{(CT)} \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i\varphi \leftrightarrow \neg @_i\neg\varphi & (\text{Selfdual}_@) \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} \neg @_i\neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg @_i\varphi & \text{(LP)} \\
\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i\neg\varphi \leftrightarrow \neg @_i\varphi & \text{(LP)}.
\end{array}
$$

□

Todistetaan sitten kielelle $\mathcal{H}(@)$ yleistetty Lindenbaumin lemma.

Lemma 2.2. *Jokainen* $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ *-ristiriidaton kaavajoukko* Γ *voidaan laajentaa sellaiseksi maksimaalisesti* $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ *-ristiriidattomaksi kaavajoukoksi* Γ^+*, että*

1. *Vähintään yksi joukon* Γ^+ *alkioista on nominaali.*
2. *Aina, kun* $@_i\Diamond\varphi \in \Gamma$*, on olemassa sellainen nominaali* j*, että* $@_i\Diamond j \in \Gamma$ *ja* $@_j\varphi \in \Gamma$*.*

Todistus (vrt. [3, s. 835-836]). Laajennetaan kieltä numeroituvalla määrällä nominaaleja. Nyt on olemassa ääretön määrä nominaaleja, jotka eivät esiinny joukon Γ kaavoissa. Olkoon $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ luettelo laajennetun kielen nominaaleista ja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ luettelo kaikista laajennetun kielen $\mathcal{H}(@)$-kaavoista. Muodostetaan ääretön jono kaavajoukkoja $\Gamma^0 \subseteq \Gamma^1 \subseteq \Gamma^2 \subseteq \cdots$ seuraavasti:

$$\Gamma^0 = \Gamma \cup \{i\}, \text{ missä } i \text{ on sellainen nominaali, että se ei esiinny joukon } \Gamma \text{ kaavoissa.}$$

Kun $k \in \mathbb{N}$, määritellään Γ^{k+1} seuraavasti:

1. Jos $\Gamma^k \cup \{\varphi_k\}$ on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriitainen, niin $\Gamma^{k+1} = \Gamma^k$.
2. Muuten
   a) Jos φ_k ei ole muotoa $@_i\Diamond\psi$, niin $\Gamma^{k+1} = \Gamma^k \cup \{\varphi_k\}$.
   b) Jos φ_k on muotoa $@_i\Diamond\psi$, niin $\Gamma^{k+1} = \Gamma^k \cup \{\varphi_k, @_i\Diamond i_m, @_{i_m}\psi\}$, missä i_m on ensimmäinen sellainen nominaali, joka ei esiinny joukon Γ^k kaavoissa tai kaavassa φ_k.

Osoitetaan induktiolla, että Γ^k on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton aina, kun $k \in \mathbb{N}$. Osoitetaan ensin joukon Γ^0 ristiriidattomuus. Tehdään vastaoletus, että Γ^0 on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma$-ristiriitainen. Koska Γ on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma$-ristiriidaton, niin joukon Γ^0 ristiriitaisuuden aiheuttaa uusi kaava i. Siis on olemassa sellaiset $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$, että

$$\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} i \to \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n).$$

Siis säännön ($\mathrm{Gen}_@$) mukaan

$$\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i(i \to \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)).$$

Edelleen aksiooman ($\mathrm{K}_@$) ja säännön (MP) perusteella

$$\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i i \to @_i\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n).$$

Käytetään aksioomaa ($\mathrm{Ref}_@$) ja sääntöä (MP), jolloin saadaan

$$\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n).$$

Koska i on sellainen nominaali, joka ei esiinny joukon Γ kaavoissa, niin säännön (Name) perusteella

$$\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n).$$

Tämä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että Γ on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma$-ristiriidaton. Siis vastaoletus on väärin, ja Γ^0 on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton.

Tehdään induktio-oletus, että Γ^k on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton. Osoitetaan, että tällöin myös Γ^{k+1} on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton. Jos Γ^{k+1} on muodostettu kohdan 1 tai kohdan 2a) mukaisesti, niin joukko Γ^{k+1} on triviaalisti $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma$

-ristiriidaton. Oletetaan, että Γ^{k+1} on muodostettu kohdan 2b) mukaisesti. Tehdään vastaoletus, että Γ^{k+1} on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriitainen. Koska $\Gamma^k \cup \{\varphi_k\}$ on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton, niin on olemassa sellaiset kaavat $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma^k \cup \{\varphi_k\}$, että

$$\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} (@_i \Diamond i_m \wedge @_{i_m} \psi) \to \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n).$$

Siis lemman 2.1 kohdan 5 perusteella

$$\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} @_i \Diamond \psi \to \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$$

eli

$$\vdash_{\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}+\Sigma} \varphi_k \to \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n).$$

Tästä seuraa ristiriita, sillä $\Gamma^k \cup \{\varphi_k\}$ on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton. Siis vastaoletus on väärin, ja Γ^{k+1} on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton. Nyt induktioperiaatteen nojalla Γ^k on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton aina, kun $k \in \mathbb{N}$.

Muodostetaan joukko

$$\Gamma^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma^k.$$

Koska Γ^k on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton aina, kun $k \in \mathbb{N}$, niin myös Γ^+ on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton. Osoitetaan, että Γ^+ on maksimaalisesti ristiriidaton. Tehdään vastaoletus, että on olemassa joukon Γ^+ aito laajennus Γ^*, joka on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton. Olkoon $\varphi \in \Gamma^* \setminus \Gamma^+$. Olkoon k kaavan φ paikka luettelossa $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Koska $\varphi_k \notin \Gamma^+$, niin joukko $\Gamma^k \cup \{\varphi_k\}$ on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ -ristiriitainen. Mutta nyt myös Γ^* on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriitainen, sillä

$$\Gamma^k \cup \{\varphi_k\} \subseteq \Gamma^+ \cup \{\varphi_k\} \subseteq \Gamma^*.$$

Siis vastaoletus on väärin, ja joukko Γ^+ on maksimaalisesti $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton. Lisäksi $\{i\} \subseteq \Gamma^0 \subseteq \Gamma^+$, ja jos $@_i \Diamond \psi \in \Gamma^+$, niin on olemassa sellainen $k \in \mathbb{N}$, että $@_i \Diamond \psi \in \Gamma^k$, jolloin joukon Γ^k määritelmän mukaan myös $@_i \Diamond i_m, @_{i_m} \psi \in \Gamma^k$ eli edelleen $@_i \Diamond i_m, @_{i_m} \psi \in \Gamma^+$. Siis Γ^+ toteuttaa annetut ehdot 1 ja 2. Näin on osoitettu, että jos Γ on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton kaavajoukko, niin se voidaan aina laajentaa annetut ehdot täyttäväksi maksimaalisesti ristiriidattomaksi kaavajoukoksi Γ^+. □

Nyt päästään todistamaan itse täydellisyystulos.

Lause 2.3. *Olkoon Σ joukko kielen $\mathcal{H}(@)$ puhtaita kaavoja. Tällöin logiikka $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on vahvasti täydellinen joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen.*

Todistus (vrt. [3, s. 833-836]). Olkoon Γ $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton joukko kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja. Laajennetaan Γ sellaiseksi maksimaalisesti $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ -ristiriidattomaksi kaavajoukoksi Γ^+, että se toteuttaa lemman 2.2 ehdot. Olkoon

$$[i] = \{j \mid @_i j \in \Gamma^+\}$$

aina, kun $i \in \mathrm{NOM}$.

Määritellään $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, jossa

$$\begin{aligned}
&W = \{[i] \mid i \text{ on nominaali joka esiintyy joukon } \Gamma^+ \text{ kaavoissa}\},\\
&R = \{([i],[j]) \mid @_i \Diamond j \in \Gamma^+\},\\
&V(p) = \{[i] \mid @_i p \in \Gamma^+\} \text{ ja}\\
&V(i) = \{[i]\}.
\end{aligned}$$

Koska vähintään yksi joukon Γ^+ alkioista on nominaali, niin $W \neq \emptyset$. Lisäksi $R \subseteq W \times W$ ja $V : \mathrm{PROP} \cup \mathrm{NOM} \to \mathcal{P}(W)$ on sellainen kuvaus, että $|V(i)| = 1$ aina, kun $i \in \mathrm{NOM}$. Siis $\mathcal{M}$ on malli.

Osoitetaan sitten, että aina, kun φ on $\mathcal{H}(@)$-kaava ja j on nominaali, niin $\mathcal{M}, [j] \vDash \varphi$ jos ja vain jos $@_j \varphi \in \Gamma^+$. Kun φ on propositiosymboli p, niin väite pätee:

$$\mathcal{M}, [j] \vDash p \quad \Leftrightarrow \quad [j] \in V(p) \quad \Leftrightarrow \quad @_j p \in \Gamma^+.$$

Osoitetaan, että väite pätee, kun φ on nominaali i. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M}, [j] \vDash i$. Tällöin $[j] \in V(i)$, eli $[j] = [i]$. Toisin sanoen $@_j k \in \Gamma^+$ jos ja vain jos $@_i k \in \Gamma^+$ aina, kun $k \in \mathrm{NOM}$. Koska Γ^+ on $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton, niin $@_i i \in \Gamma^+$, joten myös $@_j i \in \Gamma^+$. Oletetaan sitten, että $@_j i \in \Gamma^+$. Koska Γ^+ on maksimaalisesti $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton, niin lemman 2.1 kohdan 1 mukaan

$$@_j i \to (@_j k \leftrightarrow @_i k) \in \Gamma^+$$

aina, kun $k \in \mathrm{NOM}$. Edelleen säännön (MP) perusteella $@_j k \leftrightarrow @_i k \in \Gamma^+$, eli $@_j k \in \Gamma^+$ jos ja vain jos $@_i k \in \Gamma^+$. Siis $[j] = [i]$. Koska $[i] \in V(i)$, myös $[j] \in V(i)$, joten $\mathcal{M}, [j] \vDash i$.

Tehdään sitten induktio-oletus, että väite pätee kaavoille ψ_1 ja ψ_2. Osoitetaan, että väite pätee, kun $\varphi = \Diamond \psi_1$. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M}, [j] \vDash \Diamond \psi_1$. Siis

$$\exists [i] \in W : [j] R [i] \text{ ja } \mathcal{M}, [i] \vDash \psi_1.$$

Relaation R määritelmän ja induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\exists [i] \in W : @_j \Diamond i \in \Gamma^+ \text{ ja } @_i \psi_1 \in \Gamma^+$$

eli

$$\exists [i] \in W : @_j \Diamond i \wedge @_i \psi_1 \in \Gamma^+.$$

Nyt lemman 2.1 kohdan 4 ja säännön (MP) perusteella $@_j \Diamond \psi_1 \in \Gamma^+$. Oletetaan sitten, että $@_j \Diamond \psi_1 \in \Gamma^+$. Lemman 2.2 kohdan 2 perusteella on olemassa sellainen nominaali i, että $@_j\Diamond i \in \Gamma^+$ ja $@_i\psi_1 \in \Gamma^+$. Edelleen relaation R määritelmän ja induktio-oletuksen mukaan on olemassa sellainen nominaali i, että $[j]R[i]$ ja $\mathcal{M}, [i] \vDash \psi_1$, eli $\mathcal{M}, [j] \vDash \Diamond\psi_1$.

Osoitetaan sitten, että väite pätee, kun $\varphi = @_i\psi_1$. Totuusehdon mukaan $\mathcal{M}, [j] \vDash @_i\psi_1$ jos ja vain jos $\mathcal{M}, [k] \vDash \psi_1$, kun $V(i) = \{[k]\}$. Koska mallissa $\mathcal{M}$ pätee $V(i) = \{[i]\}$, saadaan edellinen yhtäpitävään muotoon $\mathcal{M}, [i] \vDash \psi_1$. Induktio-oletuksen mukaan tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $@_i\psi_1 \in \Gamma^+$. Edelleen aksiooman (Agree) mukaan edellinen pätee jos ja vain jos $@_j@_i\psi_1 \in \Gamma^+$.

Induktiotodistuksen kohdat $\varphi = \neg\psi_1$ ja $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ osoitetaan vastaavasti käyttäen lemman 2.1 kohtia 2 ja 3.

Olkoon $i \in \Gamma^+$. Säännön ($\mathrm{Gen}_@$) mukaan $@_i\varphi \in \Gamma^+$ aina, kun $\varphi \in \Gamma^+$. Edelleen edellä todistetun tuloksen mukaan $\mathcal{M}, [i] \vDash \varphi$ aina, kun $\varphi \in \Gamma^+$. Siis $\mathcal{M}, [i] \vDash \Gamma^+$, kun $i \in \Gamma^+$. Koska mallin $\mathcal{M}$ jokainen maailma on nimetty nominaalilla, niin $\mathcal{M} \vDash \Gamma^+$. Koska Γ^+ sisältää kaikki joukon Σ aksioomien instanssit, niin kaikki joukon Σ kaavat ovat valideja mallissa $\mathcal{M}$.

Olkoon $\mathcal{M}' = \langle W, R, V_p \rangle$ sellainen malli, jossa W ja R ovat kuten mallissa $\mathcal{M}$, ja valuaatio V_p on muuten kuten valuaatio V, mutta V_p on valuaatio pelkille propositiosymboleille. Osoitetaan, että kaikki joukon Σ kaavat ovat valideja myös mallissa $\mathcal{M}'$ (vrt. [10, s. 627]). Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $\varphi \in \Sigma$, että $\mathcal{M}' \nvDash \varphi$. Tällöin on olemassa sellainen valuaatio V_n pelkille nominaaleille ja sellainen $w \in W$, että $\langle \mathcal{M}', V_n \rangle, w \nvDash \varphi$. Olkoot $i_1, \ldots, i_k$ kaavassa φ esiintyvät nominaalit. Koska mallin $\mathcal{M}$ jokainen maailma on nimetty nominaalilla, ja V kuvaa jokaisen nominaalin tämän itsensä nimeämään maailmaan, niin V kuvaa jokaiseen maailmaan jonkin nominaalin. Siis on olemassa sellaiset nominaalit $j_1, \ldots, j_k$, että $V(j_1) = V(i_1), \ldots, V(j_k) = V(i_k)$. Tällöin siis $\mathcal{M}, w \nvDash \varphi(i_1/j_1, \ldots, i_k/j_k)$. Tästä seuraa ristiriita, sillä $\varphi \in \Sigma$ ja kaikki joukon Σ kaavat ovat valideja mallissa $\mathcal{M}$, joten säännön (Subst) mukaan pitäisi olla $\mathcal{M}, w \vDash \varphi(i_1/j_1, \ldots, i_k/j_k)$. Siis vastaoletus on väärin, ja kaikki joukon Σ kaavat ovat valideja mallissa $\mathcal{M}'$.

Koska joukon Σ kaavat ovat puhtaita, eli eivät sisällä propositiosymboleita, niin pelkät propositiosymbolit kuvaavaa valuaatiota V_p ei tarvita. Täten joukon Σ kaavat ovat edelleen valideja mallia $\mathcal{M}'$ vastaavassa kehyksessä. Näin on osoitettu, että Γ on toteutuva eräässä joukon Σ määräämän luokan kehyksessä. Edelleen lauseen 2.1 mukaan $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on vahvasti täydellinen joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen. □

Esitetään vielä esimerkki puhtaalla kaavalla laajennetusta, tämän kaavan määräämän kehysten luokan suhteen täydellisestä logiikasta.

Esimerkki 2.1. Kaava $i \to \neg\Diamond i$ on puhdas, ja se määrää irrefleksiivisten kehysten luokan (ks. [7, s. 40]). Siis lauseen 2.3 mukaan logiikka

$$\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \{i \to \neg\Diamond i\}$$

on vahvasti täydellinen irrefleksiivisten kehysten luokan suhteen.

2.3 Sahlqvist-täydellisyys

Tässä alaluvussa todistetaan, että logiikka $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on vahvasti täydellinen joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen, kun Σ on joukko Sahlqvist-kaavoja.

Määritellään ensin Sahlqvist-kaavan käsite.

Määritelmä 2.5. (Vrt. [8, s. 3]). Propositiosymbolin p esiintymä kaavassa φ on *positiivinen (negatiivinen)*, jos kaavassa φ on parillinen (pariton) määrä negaatioita, joiden vaikutusalueella p on. Kaava φ on positiivinen (negatiivinen), jos kaikkien kaavassa esiintyvien propositiosymboleiden kaikki esiintymät ovat positiivisia (negatiivisia).

Määritelmä 2.6. (Vrt. [8, s. 3]). *Modaaliatomi* on muotoa $\Box^n p$ oleva kaava, missä $n \geq 0$ ja p on propositiosymboli.

Määritelmä 2.7. (Ks. [8, s. 3]). Modaalinen *Sahlqvist-kaava* on muotoa $\varphi \to \psi$ oleva modaalinen kaava, missä ψ on positiivinen, ja φ on muodostettu kaavoista $\top$ ja $\bot$, modaaliatomeista ja negatiivisista kaavoista käyttäen konnektiiveja $\wedge$ ja $\vee$ sekä mahdollisuusoperaattoreita.

Nollapaikkaiset modaalioperaattorit eli *modaaliset vakiot* ovat operaattoreita, jotka eivät saa argumentteja. Modaalisia vakioita ei niinkään ajatella operaattoreina, vaan ne ovat pikemminkin kuin propositiosymboleita.

Huomautus 2.1. (Ks. [8, s. 3]). Nollapaikkaiset modaalioperaattorit eli modaaliset vakiot ovat sekä negatiivisia että positiivisia kaavoja.

Koska määritelmä on moniosainen, selvennetään asiaa vielä yksinkertaisella esimerkillä.

Esimerkki 2.2. Kaava $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ on Sahlqvist-kaava, sillä $\Box\Diamond p$ on positiivinen ja $\Diamond\Box p$ on muodostettu modaaliatomista $\Box p$ käyttäen mahdollisuusoperaattoria.

Seuraavaksi esitetään Sahlqvist-täydellisyys perusmodaalilogiikalle. Tätä tulosta tarvitaan, kun todistetaan Sahlqvist-täydellisyyttä hybridilogiikalle. Tässä sivuutetaan perusmodaalilogiikan tuloksen todistus, sillä halutaan keskittyä hybridikielen tähän todistukseen tuomiin muutoksiin.

Lause 2.4. (Ks. [8, s. 3]). *Olkoon Σ joukko modaalisia Sahlqvist-kaavoja. Jokainen näillä kaavoilla laajennettu normaali modaalilogiikka on vahvasti täydellinen joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen.*

Todistus. Ks. [6, s. 322-325]. $\Box$

Jotta voidaan osoittaa Sahlqvist-täydellisyys hybridilogiikalle, käsitellään hybridikieltä tavanomaisena modaalikielenä, missä jokainen $@_i$-operaattori on erillinen yksipaikkainen (mahdollisuus)operaattori, ja jokainen nominaali on modaalinen vakio. Muodostetaan kehys

$$\mathcal{F} = \langle W, R, (R_i)_{i \in \mathrm{NOM}}, (S_i)_{i \in \mathrm{NOM}} \rangle,$$

jossa $R_i \subseteq W \times W$ ja $S_i \subseteq W$. Tällaista kehystä kutsutaan *epästandardiksi.* Epästandardi malli on pari $\langle \mathcal{F}, V \rangle$, jossa $\mathcal{F}$ on epästandardi kehys ja valuaatio V tulkitsee vain propositiosymbolit.

Koska @-operaattorit tulkitaan modaalioperaattoreiksi ja nominaalit modaalisiksi vakioiksi, niin annetaan seuraavat epästandardeja malleja koskevat totuusehdot:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}, w \vDash i & \text{joss} & w \in S_i \\ \mathcal{M}, w \vDash @_i \varphi & \text{joss} & \exists w' \in W : w R_i w' \text{ ja } \mathcal{M}, w' \vDash \varphi. \end{array}$$

Määritellään sitten yksi jatkossa tarvittava epästandardien kehysten ja mallien ominaisuus.

Määritelmä 2.8. (Ks. [5, s. 3]). Epästandardi kehys tai malli on *hyvä*, jos $|S_i| = 1$ ja $\forall xy(R_i(x, y) \leftrightarrow S_i(y))$ aina, kun $i \in \mathrm{NOM}$.

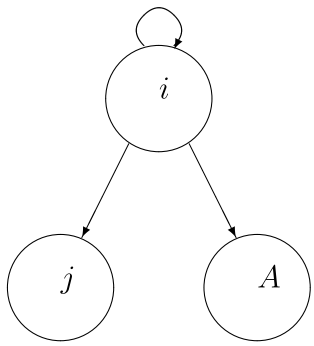
Jokaiseen hyvään epästandardiin malliin voidaan liittää standardi hybridimalli $\mathcal{M}^+ = \langle W, R, V \cup \{(i, S_i) \mid i \in \mathrm{NOM}\} \rangle$. Jokaista standardia hybridimallia $\mathcal{M}$ kohti on olemassa täsmälleen yksi sellainen epästandardi malli $\mathcal{N}$, että $\mathcal{M} = \mathcal{N}^+$.

Selvennetään vielä epästandardien kehysten ja mallien käsitettä esimerkillä.

Esimerkki 2.3. Olkoot $W = \{1, 2, 3\}$ ja $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$. Olkoot

$$\begin{aligned} R_i &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}, \\ R_j &= \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}, \\ R_k &= \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}, \text{ kun } k \in \mathrm{NOM} \setminus \{i, j\}. \end{aligned}$$

Olkoot $S_i = \{1\}$, $S_j = \{2\}$ ja $S_k = \{3\}$, kun $k \in \mathrm{NOM} \setminus \{i, j\}$. Nyt $\mathcal{F} = \langle W, R, (R_i)_{i \in \mathrm{NOM}}, (S_i)_{i \in \mathrm{NOM}} \rangle$ on hyvä, epästandardi kehys. Olkoon V valuaatio, joka tulkitsee vain propositiosymbolit. Nyt $\langle \mathcal{F}, V \rangle$ on epästandardi malli, jota vastaa seuraava standardi hybridimalli, missä $A = \mathrm{NOM} \setminus \{i, j\}$:



Ennen täydellisyystulosta esitetään ja todistetaan vielä kaksi Sahlqvist-täydellisyyden todistamisessa tarvittavaa lemmaa.

Lemma 2.3. (Ks. [8, s. 4]). *Aina, kun $\mathcal{M}$ on hyvä epästandardi malli, $w \in W$ ja φ on kaava, niin $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ jos ja vain jos $\mathcal{M}^+, w \vDash \varphi$. Lisäksi jos φ ei sisällä nominaaleja eikä @-operaattoreita, niin φ on validi mallia $\mathcal{M}^+$ vastaavassa kehyksessä jos ja vain jos φ on validi mallia $\mathcal{M}$ vastaavassa kehyksessä.*

Todistus. Toisen väitteen todistus on triviaali. Todistetaan ensimmäinen väite induktiolla kaavan φ pituuden suhteen. Osoitetaan tässä vain kohdat $\varphi = i$ ja $\varphi = @_i\psi$. Muut kohdat osoitetaan vastaavasti. Jos $\varphi = i$, niin $\mathcal{M}, w \vDash i$ jos ja vain jos $w \in S_i$. Koska $\mathcal{M}$ on hyvä, tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\{w\} = S_i$. Tämä taas pätee jos ja vain jos $(i, \{w\}) \in V \cup \{(i, S_i) \mid i \in \mathrm{NOM}\}$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathcal{M}^+, w \vDash i$.

Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalle ψ. Nyt jos $\varphi = @_i\psi$, niin $\mathcal{M}, w \vDash @_i\psi$ jos ja vain jos

$$\exists w' \in W : wR_iw' \text{ ja } \mathcal{M}, w' \vDash \psi.$$

Koska $\mathcal{M}$ on hyvä, edellinen on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\exists w' \in W : w' \in S_i \text{ ja } \mathcal{M}, w' \vDash \psi.$$

Edelleen koska $\mathcal{M}$ on hyvä, niin $|S_i| = 1$, joten edellinen pätee jos ja vain jos

$$\exists w' \in W : \{w'\} = S_i \text{ ja } \mathcal{M}, w' \vDash \psi.$$

Induktio-oletuksen perusteella tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\exists w' \in W : (i, \{w'\}) \in V \cup \{(i, S_i) \mid i \in \mathrm{NOM}\} \text{ ja } \mathcal{M}^+, w' \vDash \psi,$$

eli $\mathcal{M}^+, w \vDash @_i\psi$. $\square$

Olkoon Δ aksioomien (Selfdual$_@$), (Ref$_@$), (Agree), (Intro) ja (Back) joukko. Tämän joukon aksioomat määrittelevät epästandardien kehysten ominaisuuksia. Näiden aksioomien instanssit ovat joko Sahlqvist-kaavoja tai ekvivalentteja Sahlqvist-kaavojen konjunktioiden kanssa. Jokainen näistä aksioomista voidaan myös kääntää ensimmäisen kertaluvun logiikan kielelle seuraavasti:

(Selfdual$_@$)	$\forall x \exists ! y (R_i(x,y))$
(Ref$_@$)	$\forall xy (R_i(x,y) \to S_i(y))$
(Agree)	$\forall xyz (R_i(x,y) \wedge R_j(y,z) \to R_j(x,z))$
(Intro)	$\forall x (S_i(x) \to R_i(x,x))$
(Back)	$\forall xyz (R(x,y) \wedge R_i(y,z) \to R_i(x,z))$

Lemma 2.4. *Yhden maailman generoima epästandardi kehys $\mathcal{F}$ on hyvä jos ja vain jos $\mathcal{F} \vDash \Delta$.*

Todistus (vrt. [8, s. 5]). Jos $\mathcal{F}$ on hyvä, niin aksiooman (Selfdual$_@$) validisuus seuraa ehdoista $|S_i| = 1$ ja $\forall xy(R_i(x,y) \leftrightarrow S_i(y))$, ja muiden joukon Δ aksioomien validisuus seuraa suoraan jälkimmäisestä ehdosta.

Osoitetaan sitten toinen suunta. Oletetaan, että $\mathcal{F}$ on maailman w generoima epästandardi kehys, ja $\mathcal{F} \vDash \Delta$. Aksioomien (Selfdual$_@$) ja (Ref$_@$) ensimmäisen kertaluvun käännösten mukaaan $|S_i| \geq 1$ aina, kun $i \in \mathrm{NOM}$.

Osoitetaan sitten, että $|S_i| \leq 1$. Olkoon $i \in \mathrm{NOM}$ ja $u, v \in S_i$. Aksiooman (Intro) perusteella vR_iv ja uR_iu. Koska $\mathcal{F}$ on maailman w generoima, ovat maailmat u ja v saavutettavissa maailmasta w äärellisellä polulla. Käytetään toistuvasti aksioomia (Back) ja (Agree), jolloin saadaan wR_iu ja wR_iv. Nyt aksiooman (Selfdual$_@$) perusteella $u = v$. Siis $|S_i| = 1$ aina, kun $i \in \mathrm{NOM}$. Aksioomien (Selfdual$_@$) ja (Ref$_@$) perusteella lisäksi $\forall xy(R_i(x,y) \leftrightarrow S_i(y))$ aina, kun $i \in \mathrm{NOM}$. Siis $\mathcal{F}$ on hyvä. $\square$

Todistetaan sitten Sahlqvist-täydellisyys hybridilogiikalle.

Lause 2.5. *Olkoon Σ joukko modaalisia Sahlqvist-kaavoja, jotka eivät sisällä nominaaleja tai @-operaattoreita. Logiikka $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on vahvasti täydellinen joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen.*

Todistus (ks. [8, s. 5]). Olkoon Σ joukko modaalisia Sahlqvist-kaavoja, jotka eivät sisällä nominaaleja tai @-operaattoreita. Lauseen 2.4 perusteella $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on vahvasti täydellinen epästandardien kehysten luokan suhteen, jossa joukko $\Delta \cup \Sigma$ on validi.

Olkoon Γ jokin $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$-ristiriidaton kaavajoukko. Nyt on olemassa sellainen epästandardi malli $\mathcal{M}$ ja tämän mallin maailma w, että $\mathcal{M}, w \vDash \Gamma$, sekä mallia $\mathcal{M}$ vastaava epästandardi kehys, jossa joukko $\Delta \cup \Sigma$ on validi. Tällöin voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $\mathcal{M}$ on maailman w generoima. Nyt lemman 2.4 mukaan $\mathcal{M}$ on hyvä. Muodostetaan mallia $\mathcal{M}$ vastaava standardi hybridimalli $\mathcal{M}^+$. Lemman 2.3 perusteella $\mathcal{M}^+, w \vDash \Gamma$

ja mallia $\mathcal{M}^+$ vastaavassa standardissa kehyksessä joukko Σ on validi, sillä joukon Σ kaavat eivät sisällä nominaaleja tai @-operaattoreita. Toisin sanoen Γ on toteutuva joukon Σ määräämän kehysten luokan kehyksessä. Edelleen lauseen 2.1 mukaan $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ on vahvasti täydellinen joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen. $\square$

Esitetään vielä esimerkki Sahlqvist-kaavalla laajennetusta, tämän kaavan määräämän kehysten luokan suhteen täydellisestä logiikasta.

Esimerkki 2.4. Kaava $\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$ on modaaalinen Sahlqvist-kaava, joka ei sisällä nominaaleja tai @-operaattoreita. Tämä kaava määrää sellaisten kehysten luokan, joille pätee ehto

$$\forall w_1, w_2, w_3 \in W : w_1 R w_2 \wedge w_1 R w_3 \Rightarrow \exists w_4 \in W : w_2 R w_4 \wedge w_3 R w_4$$

(ks. [5, s. 5]). Siis lauseen 2.5 mukaan logiikka $\mathbf{K}_{\mathcal{H}(@)} + \{\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p\}$ on täydellinen edellä mainitun ehdon täyttävien kehysten luokan suhteen.

2.4 Puhtaiden kaavojen ja Sahlqvist-kaavojen yhdistäminen

Jos joukko Σ sisältää sekä puhtaita kaavoja että Sahlqvist-kaavoja, niin logiikka $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \Sigma$ ei välttämättä ole täydellinen joukon Σ määräämän kehysten luokan suhteen. Tässä alaluvussa todistetaan tämä tulos.

Lause 2.6. *On olemassa sellainen puhdas kaava φ ja sellainen Sahlqvist-kaava ψ, joka ei sisällä nominaaleja eikä @-operaattoreita, että näillä kaavoilla laajennettu logiikka $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \{\varphi, \psi\}$ ei ole täydellinen kaavojen φ ja ψ määräämän kehysten luokan suhteen.*

Todistus (vrt. [5, s. 5]). Tutkitaan seuraavia kaavoja:

(CR)	$\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$
	$\forall xyz(R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow \exists u(R(y,u) \wedge R(z,u))$
(NoGrid)	$\Diamond(i \wedge \Diamond j) \rightarrow \Box(\Diamond j \rightarrow i)$
	$\forall xyzu(R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge R(y,u) \wedge R(z,u) \rightarrow y = z)$
(Func)	$\Diamond p \rightarrow \Box p$
	$\forall xyz(R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow y = z)$.

Kaava (CR) on Sahlqvist-kaava ja (NoGrid) on puhdas kaava. Edellä olevista ensimmäisen kertaluvun käännöksistä nähdään helposti, että jos (CR) ja (NoGrid) ovat valideja jossakin kehyksessä, niin myös (Func) on validi tässä kehyksessä. Osoitamme nyt, että (Func) ei ole johdettavissa kaavoista (CR) ja (NoGrid). Olkoon ω^ω puu, jonka jokaisella solmulla on numeroituvasti ääretön määrä seuraajia. Olkoon $\mathcal{F}$ tätä puuta vastaava yleinen kehys, jossa sallitut joukot ovat ääreelliset ja kofiniittiset joukot.

Voidaan osoittaa, että jokainen logiikan $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}$ aksiooma on validi yleisessä kehyksessä $\mathcal{F}$, ja edelleen niiden kaavojen joukko, jotka ovat valideja tässä kehyksessä, on suljettu logiikan $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}$ päättelysääntöjen suhteen. Tulos todistetaan kuten vastaava perusmodaalilogiikan tulos (ks. [6, s. 306]). Osoitamme nyt, että $\mathcal{F} \models$ (CR), $\mathcal{F} \models$ (NoGrid) ja $\mathcal{F} \not\models$ (Func). Koska $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \{(\mathrm{CR}), (\mathrm{NoGrid})\}$ on pienin sellainen kaavajoukko, joka sisältää logiikan $\mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)}$ aksioomat sekä aksioomat (CR) ja (NoGrid) ja on suljettu päättelysääntöjen suhteen, niin (Func) $\notin \mathbf{K}^+_{\mathcal{H}(@)} + \{(\mathrm{CR}), (\mathrm{NoGrid})\}$.

Osoitetaan, että $\mathcal{F} \models$ (CR). Oletetaan, että $\mathcal{F}, V, w \models \Diamond\Box p$. Koska $V(p)$ on sallittu, sen on oltava joko äärellinen tai kofiniittinen. Koska w toteuttaa kaavan $\Diamond\Box p$, on olemassa maailma, jonka kaikki seuraajat toteuttavat kaavan p. Koska jokaisella puun ω^ω maailmalla on ääretön määrä seuraajia, niin $V(p)$ on ääretön, eli edelleen kofiniittinen. Tästä seuraa, että jokaisella maailmalla on seuraaja, joka toteuttaa kaavan p, joten $\mathcal{F}, V, w \models \Box\Diamond p$. Edelleen siis $\mathcal{F} \models$ (CR).

Osoitetaan sitten, että $\mathcal{F} \models$ (NoGrid). Oletetaan, että $\mathcal{F}, V, w \models \Diamond(i \wedge \Diamond j)$. Siis maailmalla w on olemassa sellainen seuraaja w_1, että $\mathcal{F}, V, w_1 \models i \wedge \Diamond j$. Edelleen siis maailmalla w_1 on sellainen seuraaja w_2, että $\mathcal{F}, V, w_2 \models j$. Tehdään vastaoletus, että $\mathcal{F}, V, w \not\models \Box(\Diamond j \to i)$. Tällöin maailmalla w on sellainen seuraaja w_3, että $\mathcal{F}, V, w_3 \not\models \Diamond j \to i$, eli $\mathcal{F}, V, w_3 \models \Diamond j$ ja $\mathcal{F}, V, w_3 \not\models i$. Koska $\mathcal{F}, V, w_3 \models \Diamond j$, niin maailmalla w_3 on sellainen seuraaja w_4, että $\mathcal{F}, V, w_4 \models j$. Koska $|V(j)| = 1$, niin $w_2 = w_4$. Koska ω^ω on puu, ja $\mathcal{F}$ sitä vastaava yleinen kehys, niin kullakin maailmalla on täsmälleen yksi edeltäjä. Siis koska $w_2 = w_4$, niin myös $w_1 = w_3$. Nyt $\mathcal{F}, V, w_1 \models i$ ja $\mathcal{F}, V, w_1 \not\models i$, mikä on ristiriita. Siis vastaoletus on väärin, ja $\mathcal{F}, V, w \models \Box(\Diamond j \to i)$. Edelleen $\mathcal{F} \models$ (NoGrid).

Osoitetaan vielä lopuksi, että $\mathcal{F} \not\models$ (Func). Olkoon V sellainen valuaatio, että $V(p) = \{w'\}$. Olkoon w sellainen maailma, että maailmat w' ja w'' ovat sen seuraajia. Nyt koska $\mathcal{F}, V, w' \models p$, niin $\mathcal{F}, V, w \models \Diamond p$. Mutta koska $\mathcal{F}, V, w'' \not\models p$, niin $\mathcal{F}, V, w \not\models \Box p$. Siis $\mathcal{F}, V, w \not\models \Diamond p \to \Box p$, ja edelleen $\mathcal{F} \not\models$ (Func). □

3 Ilmaisuvoima

Tässä luvussa tutkitaan kielen $\mathcal{H}(@)$ ilmaisuvoimaa. Määritellään kielelle $\mathcal{H}(@)$ ensimmäisen kertaluvun korrespondenssikieli $\mathcal{L}$. Esitetään standardikäännös kieleltä $\mathcal{H}(@)$ kielelle $\mathcal{L}$ ja tutkitaan, mitkä kielen $\mathcal{L}$ kaavat ovat ekvivalentteja jonkun kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavan standardikäännöksen kanssa. Lisäksi käsitellään määriteltävyyttä kehysten luokissa. Tutkitaan, millä ehdoilla kehysten luokka on määriteltävissä joukolla $\mathcal{H}(@)$-kaavoja, sekä millä ehdoilla kehysten luokka on määriteltävissä yhdellä puhtaalla $\mathcal{H}(@)$-kaavalla.

3.1 Korrespondenssikieli

Tässä alaluvussa määritellään ensimmäisen kertaluvun korrespondenssikieli $\mathcal{L}$. Lisäksi esitellään standardikäännös kieleltä $\mathcal{H}(@)$ kielelle $\mathcal{L}$. Lopuksi tutkitaan, millä ehdolla kielen $\mathcal{L}$ kaava on ekvivalentti kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavan standardikäännöksen kanssa. Tätä ehtoa varten määritellään $\mathcal{H}(@)$-bisimulaation käsite, jota tullaan käyttämään myös seuraavissa alaluvuissa ja seuraavassa luvussa.

Aloitetaan määrittelemällä ensimmäisen kertaluvun logiikan korrespondenssikieli. Ensimmäisen kertaluvun logiikan korrespondenssikieli $\mathcal{L}$ hybridikielelle $\mathcal{H}(@)$ on sellainen ensimmäisen kertaluvun kieli, jossa jokaista nominaalia $i \in \mathrm{NOM}$ vastaa vakio c_i ja jokaista propositiosymbolia $p \in \mathrm{PROP}$ vastaa yksipaikkainen predikaattisymboli P_p. Kaksipaikkaiset relaatiot siirtyvät kieleen $\mathcal{L}$ sellaisenaan. Hybridimalli $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ voidaan tulkita ensimmäisen kertaluvun kielen malliksi, sillä vakioiden c_i tulkinnat saadaan valuaatiosta $V(i)$, yksipaikkaisten predikaattisymbolien P_p tulkinnat saadaan valuaatiosta $V(p)$ ja kaksipaikkaisen relaation R tulkinta on mallin $\mathcal{M}$ relaatio R. Merkitään hybridimallia $\mathcal{M}$ vastaavaa ensimmäisen kertaluvun logiikan mallia $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}$.

Määritellään sitten standardikäännös, jolla voidaan muuntaa kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavat kielen $\mathcal{L}$ kaavoiksi.

Määritelmä 3.1. (Ks. [7, s. 39]). Standardikäännös $ST_{x_k}(\cdot)$ kuvaa kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavat sellaisiksi kielen $\mathcal{L}$ kaavoiksi, joissa esiintyy korkeintaan yksi vapaa muuttuja x_k. Määritellään standardikäännös kaikille ensimmäisen kertaluvun muuttujille x_k seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&ST_{x_k}(\top) &&= \top\\
&ST_{x_k}(p) &&= P_p(x_k)\\
&ST_{x_k}(i) &&= (x_k = c_i)\\
&ST_{x_k}(\neg\varphi) &&= \neg ST_{x_k}(\varphi)\\
&ST_{x_k}(\varphi \wedge \psi) &&= ST_{x_k}(\varphi) \wedge ST_{x_k}(\psi)\\
&ST_{x_k}(\Diamond\varphi) &&= \exists x_{k+1}(R(x_k, x_{k+1}) \wedge ST_{x_{k+1}}(\varphi))\\
&ST_{x_k}(@_i\varphi) &&= \exists x_{k+1}(x_{k+1} = c_i \wedge ST_{x_{k+1}}(\varphi)).
\end{aligned}$$

Yleensä muuttujia x_k merkitään tavalliseen tapaan x, y ja z.

Esitetään standardikäännöksen käyttöä selventävä esimerkki.

Esimerkki 3.1. Etsitään kaavan $\Diamond(@_i p \wedge \neg j)$ standardikäännös kielelle $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
ST_x(\Diamond(@_i p \wedge \neg j)) &= \exists y(R(x,y) \wedge ST_y(@_i p \wedge \neg j))\\
&= \exists y(R(x,y) \wedge ST_y(@_i p) \wedge ST_y(\neg j))\\
&= \exists y(R(x,y) \wedge \exists z(z = c_i \wedge ST_z(p)) \wedge \neg ST_y(j))\\
&\Leftrightarrow \exists y \exists z(R(x,y) \wedge (z = c_i) \wedge P_p(z) \wedge (y \neq c_j)).
\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että standardikäännös säilyttää ekvivalenssin.

Lause 3.1. (Ks. [7, s. 39]). *Aina, kun* φ *on* $\mathcal{H}(@)$*-kaava,* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *on hybridimalli ja* $w \in W$*, niin* $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ *jos ja vain jos* $\mathcal{M}_{FO} \vDash ST_x(\varphi)$*, kun muuttujan* x *tulkinta mallissa* $\mathcal{M}_{FO}$ *on* w*.*

Todistus (vrt. [1, s. 8]). Todistetaan induktiolla kaavan φ pituuden suhteen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ hybridimalli ja $w \in W$. Oletetaan ensin, että φ on propositiosymboli p. Propositiosymbolien totuusehdon mukaan $\mathcal{M}, w \vDash p$ jos ja vain jos $w \in V(p)$. Koska kielessä $\mathcal{L}$ yksipaikkaisen predikaattisymbolin P_p tulkinta saadaan valuaatiosta $V(p)$, niin edellinen on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash (P_p(x))[w]$. Edelleen koska muuttujan x tulkinta mallissa $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}$ on w, niin edellinen saadaan yhtäpitävään muotoon $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash P_p(x)$, mikä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash ST_x(p)$.

Oletetaan sitten, että φ on nominaali i. Nominaalien totuusehdon mukaan $\mathcal{M}, w \vDash i$ jos ja vain jos $w \in V(i)$. Koska kielessä $\mathcal{L}$ vakion c_i tulkinta saadaan valuaatiosta $V(i)$, niin edellinen on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash (c_i = x)[w]$. Edelleen koska muuttujan x tulkinta mallissa $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}$ on w, niin päästään yhtäpitävään muotoon $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash c_i = x$, mikä taas pätee jos ja vain jos $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash ST_x(i)$.

Tehdään sitten induktio-oletus, että väite pätee kaavoille ψ_1 ja ψ_2. Nyt jos $\varphi = \neg\psi_1$, niin

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}, w \vDash \neg\psi_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}, w \nvDash \psi_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \nvDash ST_x(\psi_1) \qquad \text{(IO)} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash \neg ST_x(\psi_1) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash ST_x(\neg\psi_1).
\end{aligned}
$$

Jos $\varphi = @_i\psi_1$, niin totuusehdon mukaan $\mathcal{M}, w \vDash @_i\psi_1$ jos ja vain jos

$$\exists w' \in W : \mathcal{M}, w' \vDash \psi_1 \text{ ja } V(i) = \{w'\}. \tag{1}$$

Koska vakion c_i tulkinta saadaan valuaatiosta $V(i)$, niin tämän ja induktio-oletuksen perusteella (1) on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash \exists y(y = c_i \wedge ST_y(\psi_1))[w']. \tag{2}$$

Edelleen standardikäännöksen määritelmän mukaan (2) saadaan yhtäpitävään muotoon

$$\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash ST_x(@_i\psi_1). \tag{3}$$

Kohdat $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ ja $\varphi = \Diamond\psi_1$ todistetaan vastaavasti. Nyt induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu. □

Seuraavaksi tutkitaan, mitkä kaikki ensimmäisen kertaluvun korrespondenssikielen kaavat ovat ekvivalentteja jonkin kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavan standardikäännöksen kanssa. Ensin määritellään näissä tarkasteluissa tarvittava $\mathcal{H}(@)$-bisimulaation käsite.

Määritelmä 3.2. (Ks. [3, s. 838]). *$\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio hybridimallien $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ ja $\mathcal{N} = \langle W', R', V'\rangle$ välillä* on sellainen relaatio $Z \subseteq W \times W'$, $Z \neq \emptyset$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(Atom)	Jos wZv, niin $w \in V(p)$ jos ja vain jos $v \in V'(p)$ aina, kun $p \in \text{PROP} \cup \text{NOM}$.
(Forth)	Jos wZv ja wRw', niin on olemassa sellainen $v' \in W'$, että $vR'v'$ ja $w'Zv'$.
(Back)	Jos wZv ja $vR'v'$, niin on olemassa sellainen $w' \in W$, että wRw' ja $w'Zv'$.
(Nom)	Aina, kun $i \in \text{NOM}$, jos $w \in V(i)$ ja $v \in V'(i)$, niin wZv.

$\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio kehysten $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ ja $\mathcal{G} = \langle W', R'\rangle$ välillä on sellainen relaatio $Z \subseteq W \times W'$, joka toteuttaa edellä annetut ehdot (Forth) ja (Back).

Selvennetään vielä bisimulaation käsitettä esimerkillä.

Esimerkki 3.2. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ malli, jossa $W = \{1, 2\}$, relaatio $R = \{(1, 2), (2, 2)\}$ ja

$$V(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{kun } x \in \{p, i\} \\ \{2\}, & \text{kun } x \in \{q\} \cup \text{NOM} \setminus \{i\} \\ \emptyset, & \text{kun } x \in \text{PROP} \setminus \{p, q\}. \end{cases}$$

Olkoon $\mathcal{N} = \langle W', R', V'\rangle$, jossa $W' = \{a, b, c\}$, $R' = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$ ja

$$V'(x) = \begin{cases} \{a\}, & \text{kun } x \in \{p, i\} \\ \{b, c\}, & \text{kun } x \in \{q\} \cup \text{NOM} \setminus \{i\} \\ \emptyset, & \text{kun } x \in \text{PROP} \setminus \{p, q\}. \end{cases}$$

Nyt relaatio $Z = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$ on $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ välillä.

Esitetään vielä esimerkki sellaisista malleista, joiden välille voidaan muodostaa perusmodaalilogiikan bisimulaatio, mutta ei $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatiota.

Esimerkki 3.3. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, jossa $W = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 2)\}$ ja

$$V(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{kun } x \in \{p\} \cup \text{NOM} \setminus \{i\} \\ \{2\}, & \text{kun } x \in \{q, i\} \\ \emptyset, & \text{kun } x \in \text{PROP} \setminus \{p, q\}. \end{cases}$$

Olkoon $\mathcal{N} = \langle W', R', V' \rangle$, jossa $W' = \{a, b\}$, $R' = \{(a, b)\}$ ja

$$V'(x) = \begin{cases} \{a\}, & \text{kun } x \in \{p\} \cup \text{NOM} \\ \{b\}, & \text{kun } x \in \{q\} \\ \emptyset, & \text{kun } x \in \text{PROP} \setminus \{p, q\}. \end{cases}$$

Nyt relaatio $Z = \{(1, a), (2, b)\}$ toteuttaa ehdot (Atom), (Forth) ja (Back), joten Z on perusmodaalilogiikan bisimulaatio mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ välillä. Sen sijaan mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ välillä ei voida muodostaa $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatiota.

Jotta mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ välillä voisi olla $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio, ehdon (Nom) mukaan pitäisi olla $2Za$, sillä $2 \in V(i)$ ja $a \in V'(i)$. Jos olisi $2Za$, niin koska $aR'b$, ehdon (Back) mukaan pitäisi olla olemassa sellainen $w \in W$, että $2Rw$ ja wZa. Mutta koska $2 \not R\, 1$ ja $2 \not R\, 2$, niin tällaista $w \in W$ ei ole olemassa. Siis mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ välille ei voida muodostaa $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatiota.

Olkoon $\mathcal{M}$ malli ja w sen maailma sekä $\mathcal{N}$ malli ja v sen maailma. Jos on olemassa sellainen bisimulaatio Z mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ välillä, että wZv, niin sanotaan, että $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{N}, v)$ ovat *$\mathcal{H}(@)$-bisimilaarisia*. Olkoon $\mathcal{M}$ malli ja $d_1, \ldots, d_n$ tämän maailmoja sekä $\mathcal{N}$ malli ja $e_1, \ldots, e_n$ tämän maailmoja. Ensimmäisen kertaluvun korrespondenssikielen kaava $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ on *invariantti $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioiden suhteen*, jos aina, kun d_i ja e_i ovat $\mathcal{H}(@)$-bisimilaarisia jokaisella $i = 1, \ldots, n$, niin $\mathcal{M} \vDash \varphi[d_1, \ldots, d_n]$ jos ja vain jos $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_1, \ldots, e_n]$. Olkoon Z bisimulaatio mallien $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ ja $\mathcal{N} = \langle W', R', V' \rangle$ välillä. Bisimulaatio Z on *täydellinen*, jos

$$\forall w \in W : \exists v \in W' : wZv$$

ja

$$\forall v \in W' : \exists w \in W : wZv.$$

Olkoon $\mathcal{M}$ malli ja w sen maailma, ja olkoon $\mathcal{N}$ malli ja v sen maailma. Jos aina, kun φ on $\mathcal{H}(@)$-kaava, $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ jos ja vain jos $\mathcal{N}, v \vDash \varphi$, niin $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{N}, v)$ ovat *$\mathcal{H}(@)$-ekvivalentit*, merkitään $(\mathcal{M}, w) \equiv_{\mathcal{H}(@)} (\mathcal{N}, v)$.

Ennen varsinaisten tulosten todistamista esitetään vielä seuraava lause, jota tullaan tarvitsemaan jatkossa muita lauseita todistettaessa.

Lause 3.2. (Ks. [7, s. 48]). *Olkoon $\mathcal{M}$ malli ja w sen maailma ja olkoon $\mathcal{N}$ malli ja v sen maailma. Jos maailmat w ja v ovat $\mathcal{H}(@)$-bisimilaarisia, niin $(\mathcal{M}, w) \equiv_{\mathcal{H}(@)} (\mathcal{N}, v)$. Jos $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat ω-saturoituja ja $(\mathcal{M}, w) \equiv_{\mathcal{H}(@)} (\mathcal{N}, v)$, niin w ja v ovat $\mathcal{H}(@)$-bisimilaarisia.*

Todistus. Perusmodaalilogiikan vastaava tulos voidaan suoraan yleistää hybridilogiikalle $\mathcal{H}(@)$. Molempien väitteiden todistukset löytyvät lähdeteoksesta [6] (ks. [6, s. 67, s. 102]). $\square$

Nyt päästään todistamaan kaksi kielen $\mathcal{L}$ ja kielen $\mathcal{H}(@)$ standardikäännöksen kaavojen ekvivalenttisuutta koskevaa tulosta.

Lause 3.3. (Ks. [3, s. 839]). *Kielen $\mathcal{L}$ kaava φ, jossa on korkeintaan yksi vapaa muuttuja, on ekvivalentti $\mathcal{H}(@)$-kaavan standardikäännöksen kanssa jos ja vain jos φ on invariantti $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioiden suhteen.*

Todistus. Yleistetään perusmodaalilogiikan vastaava tulos (ks. [6, s. 103-104]) hybridilogiikalle $\mathcal{H}(@)$. Lauseen 3.2 mukaan kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavat ovat invariantteja $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioiden suhteen. Siis jos kaava on ekvivalentti $\mathcal{H}(@)$-kaavan standardikäännöksen kanssa, se on invariantti $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioiden suhteen.

Osoitetaan sitten toinen suunta. Oletetaan, että $\varphi(x)$ on kielen $\mathcal{L}$ kaava, jossa on korkeintaan yksi vapaa muuttuja x. Oletetaan, että $\varphi(x)$ on invariantti $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioiden suhteen. Olkoon

$$HC(\varphi) = \{ST_x(\psi) \mid \psi \text{ on } \mathcal{H}(@)\text{-kaava ja } \varphi(x) \vDash ST_x(\psi)\}.$$

Joukko $HC(\varphi)$ sisältää siis sellaiset kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavojen standardikäännökset, jotka ovat kaavan $\varphi(x)$ loogisia seurauksia.

Osoitetaan ensin, että jos $HC(\varphi) \vDash \varphi(x)$, niin $\varphi(x)$ on ekvivalentti $\mathcal{H}(@)$ -kaavan standardikäännöksen kanssa. Oletetaan, että $HC(\varphi) \vDash \varphi(x)$. Nyt koska ensimmäisen kertaluvun logiikalla on kompaktisuusominaisuus, niin on olemassa sellainen äärellinen osajoukko $X \subseteq HC(\varphi)$, että $X \vDash \varphi(x)$. Olkoot $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ joukon X kaavat. Nyt siis

$$\vDash (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi(x).$$

Koska $X \subseteq HC(\varphi)$, niin joukon $HC(\varphi)$ määritelmän perusteella

$$\vDash \varphi(x) \rightarrow (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n).$$

Siis

$$\vDash \varphi(x) \leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n).$$

Koska jokainen joukon X kaava on $\mathcal{H}(@)$-kaavan standardikäännös, myös konjunktio $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ on $\mathcal{H}(@)$-kaavan standardikäännös, joten väite on todistettu.

Osoitetaan sitten, että $HC(\varphi) \vDash \varphi(x)$. Olkoon $\mathcal{M}$ hybridimalli ja w sen maailma. Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash HC(\varphi)[w]$ ja osoitetaan, että $\mathcal{M} \vDash \varphi[w]$. Olkoon

$$\Gamma(x) = \{ST_x(\psi) \mid \mathcal{M} \vDash ST_x(\psi)[w]\}.$$

Osoitetaan, että joukko $\Gamma(x) \cup \{\varphi(x)\}$ on ristiriidaton. Tehdään vastaoletus, että $\Gamma(x) \cup \{\varphi(x)\}$ on ristiriitainen. Kompaktisuuden perusteella on olemassa sellainen äärellinen osajoukko $\Gamma_0(x) \subseteq \Gamma(x)$, että

$$\vDash \varphi(x) \rightarrow \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k),$$

kun $\psi_1, \ldots, \psi_k$ ovat joukon $\Gamma_0(x)$ kaavat. Siis $\neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k) \in HC(\varphi)$. Mutta nyt $\mathcal{M} \vDash \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\mathcal{M} \vDash \Gamma[w]$, sillä $\Gamma_0(x) \subseteq \Gamma(x)$. Siis vastaoletus on väärin, ja joukko $\Gamma(x) \cup \{\varphi(x)\}$ on ristiriidaton.

Olkoon $\mathcal{N}$ sellainen malli, ja olkoon v tämän mallin sellainen maailma, että $\mathcal{N} \models \Gamma(x) \cup \{\varphi(x)\}[v]$. Osoitetaan, että $\mathcal{M}, w \equiv_{\mathcal{H}(@)} \mathcal{N}, v$. Olkoon ψ kielen $\mathcal{H}(@)$ kaava. Jos $\mathcal{M}, w \models \psi$, niin $ST_x(\psi) \in \Gamma(x)$, jolloin $\mathcal{N}, v \models \psi$. Jos taas $\mathcal{M}, w \not\models \psi$, niin $\mathcal{M}, w \models \neg\psi$, jolloin $ST_x(\neg\psi) \in \Gamma(x)$. Edelleen $\mathcal{N}, v \models \neg\psi$ eli $\mathcal{N}, v \not\models \psi$.

Olkoot $\mathcal{M}^*$ ja $\mathcal{N}^*$ mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ elementaariset ω-saturoidut laajennukset. Elementaarisuuden perusteella $\mathcal{M}^*, w \equiv_{\mathcal{H}(@)} \mathcal{N}^*, v$. Nyt lauseen 3.2 mukaan $\mathcal{M}^*, w$ ja $\mathcal{N}^*, v$ ovat $\mathcal{H}(@)$-bisimilaarisia. Koska $\mathcal{N} \models \varphi[v]$, niin elementaarisuuden perusteella $\mathcal{N}^* \models \varphi[v]$. Koska $\varphi(x)$ on invariantti $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioiden suhteen, niin $\mathcal{M}^* \models \varphi[w]$. Edelleen elementaarisuuden perusteella $\mathcal{M} \models \varphi[w]$. Koska maailma w ja malli $\mathcal{M}$ olivat mielivaltaiset, saadaan $HC(\varphi) \models \varphi(x)$. Osoitimme jo, että jos $HC(\varphi) \models \varphi(x)$, niin $\varphi(x)$ on ekvivalentti $\mathcal{H}(@)$-kaavan standardikäännöksen kanssa, joten väite on todistettu. □

Seuraus 3.1. *Kielen $\mathcal{L}$ kaava φ, jossa on korkeintaan yksi vapaa muuttuja x, on ekvivalentti $\mathcal{H}(@)$-kaavan standardikäännöksen kanssa jos ja vain jos φ on ekvivalentti sellaisen kaavan kanssa, joka on muodostettu seuraavan määritelmän mukaisesti:*

$$\varphi ::= \top \mid P(t) \mid t = c \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \exists x(R(t,x) \wedge \varphi),$$

missä t on termi (vakio tai muuttuja), c on vakio ja x on muuttuja, sekä $x \neq t$.

Todistus (vrt. [3, s. 839]). Jos φ on ekvivalentti kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavan standardikäännöksen kanssa, niin se on ekvivalentti annetun määritelmän mukaan muodostetun kaavan kanssa, sillä standardikäännökset ovat valmiiksi tässä muodossa. Oletetaan sitten, että φ on ekvivalentti kyseisen määritelmän mukaan muodostetun kaavan kanssa. Induktiolla kaavan pituuden suhteen voidaan osoittaa, että φ on invariantti $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioiden suhteen. Nyt siis lauseen 3.3 perusteella φ on ekvivalentti kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavan standardikäännöksen kanssa. □

3.2 Määriteltävyys kehysten luokissa

Tässä alaluvussa annetaan välttämättömät ja riittävät ehdot sille, että kehysten luokka on määriteltävissä joukolla $\mathcal{H}(@)$-kaavoja. Lisäksi annetaan välttämättömät ja riittävät ehdot sille, että kehysten luokka on määriteltävissä yhdellä puhtaalla $\mathcal{H}(@)$-kaavalla. Näitä tarkasteluja varten määritellään elementaarinen kehysten luokka, sekä ultrafiltterimorfisen kuvan ja bisimulaatiosysteemin käsitteet.

Aloitetaan määrittelemällä elementaarisen kehysten luokan käsite.

Määritelmä 3.3. (Ks. [7, s. 10]). Kehysten luokka on *elementaarinen*, jos se voidaan määritellä ensimmäisen kertaluvun korrespondenssikielen $\mathcal{L}$ kaavalla.

Tulevia tuloksia todistettaessa tullaan tarvitsemaan kompaktisuuden käsitettä sekä seuraavaa lausetta.

Määritelmä 3.4. (Vrt. [11, s. 24]). Kehysten luokka K on $\mathcal{H}(@)$-*kompakti*, jos jokainen luokassa K äärellisesti toteutuva $\mathcal{H}(@)$-kaavojen joukko on myös toteutuva luokassa K.

Lause 3.4. *Elementaariset kehysten luokat ovat* $\mathcal{H}(@)$*-kompakteja.*

Todistus. Olkoon K elementaarinen kehysten luokka. Olkoon ψ kielen $\mathcal{L}$ kaava, joka määrittelee luokan K. Olkoon Σ luokassa K äärellisesti toteutuva $\mathcal{H}(@)$-kaavojen joukko. Olkoon x sellainen ensimmäisen kertaluvun muuttuja, joka ei esiinny kaavassa ψ. Olkoon $\Delta = \{\mathrm{ST}_x(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma\}$. Olkoon Σ_0 joukon Σ äärellinen osajoukko.

Nyt on olemassa sellaiset $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle \in \mathsf{K}$, $w \in W$ ja valuaatio V, että $\langle \mathcal{F}, V\rangle, w \vDash \varphi$ jokaisella $\varphi \in \Sigma_0$. Tällöin lauseen 3.1 mukaan $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash \mathrm{ST}_x(\varphi)$ jokaisella $\varphi \in \Sigma_0$, kun muuttujan x tulkinta mallissa $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}$ on w. Lisäksi koska $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$, niin $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}} \vDash \psi$. Siis on olemassa sellainen malli $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}$, että joukon $\Delta \cup \{\psi\}$ äärellinen osajoukko $\{\mathrm{ST}_x(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma_0\} \cup \{\psi\}$ on toteutuva tässä mallissa. Koska Σ_0 oli mielivaltainen, on osoitettu, että jokaisella joukon $\Delta \cup \{\psi\}$ äärellisellä osajoukolla Δ_0 on olemassa sellainen malli $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}$, että Δ_0 on toteutuva tässä mallissa.

Koska ensimmäisen kertaluvun logiikalla on kompaktisuusominaisuus, on olemassa sellainen malli $\mathcal{M}'_{\mathrm{FO}}$, että joukko $\Delta \cup \{\psi\}$ on toteutuva tässä mallissa. Siis $\mathcal{M}'_{\mathrm{FO}} \vDash \mathrm{ST}_x(\varphi)$ jokaisella $\varphi \in \Sigma$ ja $\mathcal{M}'_{\mathrm{FO}} \vDash \psi$. Olkoon muuttujan x tulkinta mallissa $\mathcal{M}'_{\mathrm{FO}}$ maailma w'. Nyt lauseen 3.1 perusteella $\langle W', R', V'\rangle, w' \vDash \varphi$ jokaisella $\varphi \in \Sigma$, kun $\langle W', R', V'\rangle$ on mallia $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}$ vastaava hybridimalli ja $w' \in W'$. Siis joukko Σ on toteutuva kehyksessä $\mathcal{F}' = \langle W', R'\rangle$. Koska ψ määrittelee kehysten luokan, se ei sisällä vakioita tai yksipaikkaisia predikaattisymboleita. Kaava ψ ei sisällä myöskään muuttujaa x, joten valuaatiolla V' tai maailmalla w' ei ole vaikutusta kaavan ψ validisuuteen. Siis koska $\mathcal{M}'_{\mathrm{FO}} \vDash \psi$, niin $\mathcal{F}' \in \mathsf{K}$.

Osoitettiin, että jokainen luokassa K äärellisesti toteutuva $\mathcal{H}(@)$-kaavojen joukko on myös toteutuva luokassa K. Siis luokka K on $\mathcal{H}(@)$-kompakti. $\square$

Jotta päästään määrittelemään ultrafiltterimorfisen kuvan käsite, määritellään ensin filtterin, ultrafiltterin ja ultrafiltterilaajennuksen käsitteet.

Määritelmä 3.5. (Ks. [11, s. 16]). Olkoon $W \neq \emptyset$. W-*filtteri* F on joukon $\mathcal{P}(W)$ osajoukko, joka toteuttaa ehdot

(i) $W \in F$
(ii) Jos $X, Y \in F$, niin $X \cap Y \in F$.
(iii) Jos $X \in F$ ja $X \subseteq Z \subseteq W$, niin $Z \in F$.

W-filtteri F on *aito*, jos $F \neq \mathcal{P}(W)$. *W-ultrafiltteri U* on maksimaalinen aito W-filtteri eli toteuttaa ylläolevien ehtojen lisäksi ehdon

$$\text{(iv)} \quad X \in U \text{ jos ja vain jos } (W \setminus X) \notin U$$

aina, kun $X \in \mathcal{P}(W)$.

Myös pääultrafiltterin käsitettä tullaan tarvitsemaan jatkossa.

Määritelmä 3.6. (Ks. [6, s. 492]). Olkoon $W \neq \emptyset$ ja $w \in W$. *Alkion w generoima pääultrafiltteri* $\pi_w = \{X \subseteq W \mid w \in X\}$.

Määritellään sitten ultrafiltterilaajennuksen käsite.

Määritelmä 3.7. (Vrt. [7, s. 11]). *Kehyksen $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ ultrafiltterilaajennus* $\mathfrak{ue}\mathcal{F}$ on kehys $\langle Uf(W), R^{\mathfrak{ue}} \rangle$, missä $Uf(W)$ on W-ultrafilttereiden joukko ja

$$uR^{\mathfrak{ue}}v \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \in v : m_R(X) \in u,$$

missä $m_R(X) = \{w \in W \mid \exists w' \in X : wRw'\}$.

Mallin $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ ultrafiltterilaajennus on malli $\mathfrak{ue}\mathcal{M} = \langle \mathfrak{ue}\mathcal{F}, V^{\mathfrak{ue}} \rangle$, jossa jokaisella $p \in \mathrm{PROP} \cup \mathrm{NOM}$, $V^{\mathfrak{ue}}(p)$ on niiden ultrafilttereiden joukko, joihin $V(p)$ kuuluu. Koska V on valuaatio, niin $|V(i)| = 1$ jokaisella $i \in \mathrm{NOM}$. Vastaavasti joukkoon $V^{\mathfrak{ue}}(i)$ kuuluu vain yksi ultrafiltteri, joka on joukon $V(i)$ alkion generoima pääultrafiltteri. Siis valuaatio $V^{\mathfrak{ue}}$ on hyvinmääritelty.

Selvennetään asiaa vielä esimerkillä.

Esimerkki 3.4. Olkoon $W = \{1, 2, 3\}$ ja $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$. Muodostetaan kehyksen $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ ultrafiltterilaajennus $\mathfrak{ue}\mathcal{F}$. Nyt W-ultrafiltterit ovat

$$\begin{aligned} u_1 &= \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}, \\ u_2 &= \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}, \\ u_3 &= \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Relaatio $R^{\mathfrak{ue}}$ voidaan helposti muodostaa seuraavan taulukon avulla:

X	$m_R(X)$	$x \in u_1$	$x \in u_2$	$x \in u_3$	$m_R(X) \in u_1$	$m_R(X) \in u_2$	$m_R(X) \in u_3$
$\{1\}$	$\{1\}$	T	E	E	T	E	E
$\{2\}$	$\{1,3\}$	E	T	E	T	E	T
$\{3\}$	$\emptyset$	E	E	T	E	E	E
$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	T	T	E	T	E	T
$\{1,3\}$	$\{1\}$	T	E	T	T	E	E
$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	E	T	T	T	E	T
$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$	T	T	T	T	E	T

Taulukosta nähdään, että parit (u_1, u_1), (u_1, u_2), ja (u_3, u_2) toteuttavat relaation $R^{\mathfrak{ue}}$ ehdon. Siis kehyksen $\mathcal{F}$ ultrafiltterilaajennus $\mathfrak{ue}\mathcal{F} = \langle Uf(W), R^{\mathfrak{ue}} \rangle$, jossa $Uf(W) = \{u_1, u_2, u_3\}$ ja $R^{\mathfrak{ue}} = \{(u_1, u_1), (u_1, u_2), (u_3, u_2)\}$.

Ultrafiltterimorfisen kuvan määrittelemistä varten tarvitaan vielä seuraava määritelmä.

Määritelmä 3.8. (Vrt. [6, s. 59]). Olkoot $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ ja $\mathcal{F}' = \langle W', R' \rangle$ kehyksiä. Kuvaus $f : W \to W'$ on *rajoitettu morfismi kehykseltä* $\mathcal{F}$ *kehykselle* $\mathcal{F}'$, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(Forth) Jos wRv, niin $f(w)R'f(v)$.
(Back) Jos $f(w)R'v'$, niin on olemassa sellainen $v \in W$, että wRv ja $f(v) = v'$.

Jos on olemassa surjektiivinen rajoitettu morfismi kehykseltä $\mathcal{F}$ kehykselle $\mathcal{F}'$, niin $\mathcal{F}'$ on kehyksen $\mathcal{F}$ *rajoitettu morfinen kuva.*

Esitetään tästäkin yksinkertainen esimerkki.

Esimerkki 3.5. Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ kehys, jossa $W = \{1, 2, 3\}$ ja

$$R = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Olkoon $\mathcal{F}' = \langle W', R' \rangle$, jossa $W' = \{a, b\}$ ja

$$R' = \{(a, b), (b, a)\}.$$

Olkoon $f : W \to W'$ sellainen kuvaus, että $f(1) = f(2) = a$ ja $f(3) = b$. Nyt kuvaus f on rajoitettu morfismi kehykseltä $\mathcal{F}$ kehykselle $\mathcal{F}'$. Lisäksi f on surjektio, joten $\mathcal{F}'$ on kehyksen $\mathcal{F}$ rajoitettu morfinen kuva.

Nyt päästään määrittelemään ultrafiltterimorfisen kuvan käsite.

Määritelmä 3.9. (Ks. [3, s. 841]). Olkoot $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ ja $\mathcal{G} = \langle W', R' \rangle$ kehyksiä ja olkoon $\mathfrak{ue}\mathcal{G} = \langle Uf(W'), R'^{\mathfrak{ue}} \rangle$ kehyksen $\mathcal{G}$ ultrafiltterilaajennus. Kehys $\mathcal{G}$ on kehyksen $\mathcal{F}$ *ultrafiltterimorfinen kuva*, jos on olemassa sellainen surjektiivinen rajoitettu morfismi $f : \mathcal{F} \to \mathfrak{ue}\mathcal{G}$, että $|f^{-1}(u)| = 1$ aina, kun $u \in Uf(W')$ on pääultrafiltteri.

Esitetään ja todistetaan sitten kaksi propositiota, jotka helpottavat seuraavan lauseen todistamista.

Propositio 3.1. *Kehysten luokat, jotka ovat määriteltävissä joukolla kielen* $\mathcal{H}(@)$ *kaavoja, ovat suljettuja generoitujen alikehysten suhteen.*

Todistus (vrt. [7, s. 49]). Olkoon K kehysten luokka, joka on määriteltävissä joukolla kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja. Olkoon $\mathcal{G} = \langle W', R' \rangle \in \mathsf{K}$. Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ kehyksen $\mathcal{G}$ generoitu alikehys, ja olkoon V valuaatio kehykselle $\mathcal{F}$. Osoitetaan, että $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$.

Valuaatio V voidaan muuntaa kehyksen $\mathcal{G}$ valuaatioksi määrittelemällä kaikki propositiosymbolit ja nominaalit epätosiksi maailmoissa, jotka eivät kuulu kehykseen $\mathcal{F}$. Identiteettirelaatio $I = \{(w,w) \mid w \in W\}$ on $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio mallien $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ ja $\mathcal{N} = \langle \mathcal{G}, V \rangle$ välillä. Tällöin lauseen 3.2 mukaan aina, kun φ on $\mathcal{H}(@)$-kaava ja $w \in W$, niin $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ jos ja vain jos $\mathcal{N}, w \vDash \varphi$.

Olkoon Σ niiden $\mathcal{H}(@)$-kaavojen joukko, jotka määrittelevät luokan K. Nyt koska $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$, niin aina, kun $w \in W'$, $\mathcal{N}, w \vDash \varphi$ jokaisella $\varphi \in \Sigma$. Nyt koska $W \subseteq W'$, niin aina, kun $w \in W$, $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ jokaisella $\varphi \in \Sigma$. Siis $\mathcal{M} \vDash \varphi$ jokaisella $\varphi \in \Sigma$, ja edelleen koska V oli mielivaltainen, niin $\mathcal{F} \vDash \varphi$ jokaisella $\varphi \in \Sigma$. Siis $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$, joten K on suljettu generoitujen alikehysten suhteen. $\square$

Proposition 3.3 todistamista varten esitetään ja todistetaan vielä seuraava tulos.

Propositio 3.2. *Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ malli. Aina, kun u on W-ultrafiltteri, φ on kaava ja $\mathfrak{ue}\mathcal{M}$ on mallin $\mathcal{M}$ ultrafiltterilaajennus, niin $V(\varphi) \in u$ jos ja vain jos $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, u \vDash \varphi$. Edelleen aina, kun w on mallin $\mathcal{M}$ maailma, niin $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ jos ja vain jos $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, \pi_w \vDash \varphi$.*

Todistus (vrt. [6, s. 96-97]). Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ malli. Olkoon $\mathfrak{ue}\mathcal{M}$ tämän mallin ultrafiltterilaajennus, φ kaava ja u W-ultrafiltteri. Toinen väite seuraa suoraan ensimmäisestä, sillä

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \vDash \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad w \in V(\varphi) \\ &\Leftrightarrow \quad V(\varphi) \in \pi_w \\ &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{ue}\mathcal{M}, \pi_w \vDash \varphi. \end{aligned}$$

Ensimmäinen väite todistetaan induktiolla kaavan φ pituuden suhteen. Oletetaan ensin, että $\varphi = p$, kun $p \in \mathrm{PROP} \cup \mathrm{NOM}$. Nyt valuaation $V^{\mathfrak{ue}}$ määritelmän perusteella

$$V(p) \in u \quad \Leftrightarrow \quad u \in V^{\mathfrak{ue}}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{ue}\mathcal{M}, u \vDash p.$$

Tehdään sitten induktio-oletus, että väite pätee kaavoille ψ_1 ja ψ_2. Koska lähdeteoksessa todistetaan kohdat $\varphi = \neg\psi_1$ ja $\varphi = \Diamond\psi_1$, niin todistetaan tässä kohdat $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ ja $\varphi = @_i\psi_1$. Oletetaan ensin, että $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Nyt $V(\psi_1 \wedge \psi_2) \in u$ jos ja vain jos $V(\psi_1) \cap V(\psi_2) \in u$. W-filtterin määritelmän kohtien (ii) ja (iii) perusteella tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $V(\psi_1) \in u$ ja $V(\psi_2) \in u$. Edelleen induktio-oletuksen mukaan edellinen saadaan yhtäpitävään muotoon $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, u \vDash \psi_1$ ja $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, u \vDash \psi_2$, mikä taas pätee jos ja vain jos $\mathfrak{ue}\mathcal{M} \vDash \psi_1 \wedge \psi_2$.

Oletetaan sitten, että $\varphi = @_i\psi_1$. Jos on olemassa sellainen $w' \in W$, että $\mathcal{M}, w' \vDash @_i\psi_1$ ja $V(i) = \{w'\}$, niin tällöin aina, kun $w \in W$, $\mathcal{M}, w \vDash @_i\psi_1$. Tällöin siis $V(@_i\psi_1) = W$. Jos taas ei ole olemassa edellä kuvattua maailmaa, niin aina, kun $w \in W$, $\mathcal{M}, w \nvDash @_i\psi_1$. Tällöin siis $V(@_i\psi_1) = \emptyset$. Aina, kun v on W-ultrafiltteri, niin määritelmän mukaan $W \in v$, ja ehdon (iv) mukaan $\emptyset \notin v$.

Oletetaan ensin, että $V(@_i\psi_1) \in u$. On siis oltava $V(@_i\psi_1) = W$. Nyt on olemassa sellainen maailma $w' \in W$, että $V(i) = \{w'\}$ ja $\mathcal{M}, w' \vDash \psi_1$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $w' \in V(\psi_1)$ ja $V^{\mathfrak{ue}}(i) = \{\pi_{w'}\}$. Edelleen $V(\psi_1) \in \pi_{w'}$ ja $V^{\mathfrak{ue}}(i) = \{\pi_{w'}\}$. Nyt induktio-oletuksen perusteella saadaan $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, \pi_{w'} \vDash \psi_1$ ja $V^{\mathfrak{ue}}(i) = \{\pi_{w'}\}$. Siis aina, kun $v \in Uf(W)$, niin $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, v \vDash @_i\psi_1$, joten myös $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, u \vDash @_i\psi_1$.

Osoitetaan toinen suunta kontrapositiolla. Oletetaan, että $V(@_i\psi_1) \notin u$. Tällöin on oltava $V(@_i\psi_1) = \emptyset$. Siis aina, kun $V(i) = \{w\}$, niin $\mathcal{M}, w \nvDash \psi_1$ eli $w \notin V(\psi_1)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että aina, kun $V^{\mathfrak{ue}}(i) = \{\pi_w\}$, niin $V(\psi_1) \notin \pi_w$. Edelleen induktio-oletuksen mukaan kun $V^{\mathfrak{ue}}(i) = \{\pi_w\}$, niin $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, \pi_w \nvDash \psi_1$. Siis ei ole olemassa sellaista ultrafiltteriä $v \in Uf(W)$, että $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, v \vDash \psi_1$ ja $V^{\mathfrak{ue}}(i) = \{v\}$, joten aina, kun $v \in Uf(W)$, niin $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, v \nvDash @_i\psi_1$. Siis myös $\mathfrak{ue}\mathcal{M}, u \nvDash @_i\psi_1$.

Nyt induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu. □

Propositio 3.3. *Kehysten luokat, jotka ovat määriteltävissä joukolla kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja, ovat suljettuja ultrafiltterimorfisten kuvien suhteen.*

Todistus (vrt. [3, s. 841]). Olkoon K kehysten luokka, joka on määriteltävissä joukolla kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja. Olkoon $\mathcal{F} = \langle W', R' \rangle \in \mathsf{K}$ ja olkoon $\mathcal{G} = \langle W, R \rangle$ kehyksen $\mathcal{F}$ ultrafiltterimorfinen kuva. Osoitetaan, että $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$.

Olkoon φ kielen $\mathcal{H}(@)$ kaava. Oletetaan, että $\mathcal{G} \nvDash \varphi$ ja osoitetaan, että tällöin $\mathcal{F} \nvDash \varphi$. Olkoon V sellainen valuaatio ja w sellainen maailma, että $\langle \mathcal{G}, V \rangle, w \nvDash \varphi$. Olkoon $\langle \mathfrak{ue}\mathcal{G}, V^{\mathfrak{ue}} \rangle$ mallin $\langle \mathcal{G}, V \rangle$ ultrafiltterilaajennus. Proposition 3.2 mukaan aina, kun $v \in W$ ja ψ on kaava, $\langle \mathcal{G}, V \rangle, v \vDash \psi$ jos ja vain jos $\langle \mathfrak{ue}\mathcal{G}, V^{\mathfrak{ue}} \rangle, \pi_v \vDash \psi$. Siis $\langle \mathfrak{ue}\mathcal{G}, V^{\mathfrak{ue}} \rangle, \pi_w \nvDash \varphi$.

Koska $\mathcal{G}$ on kehyksen $\mathcal{F}$ ultrafiltterimorfinen kuva, on olemassa surjektiivinen rajoitettu morfismi $f : \mathcal{F} \to \mathfrak{ue}\mathcal{G}$. Määritellään kehykselle $\mathcal{F}$ sellainen valuaatio V', että $V'(p) = \{v \mid f(v) \in V^{\mathfrak{ue}}(p)\}$ ja $V'(i) = \{v \mid f(v) \in V^{\mathfrak{ue}}(i)\}$ aina, kun $p \in \mathrm{PROP}$ ja $i \in \mathrm{NOM}$. Koska kehyksessä $\mathfrak{ue}\mathcal{G}$ pääultrafiltterit vastaavat nominaaleja, ja koska f on injektio pääultrafilttereiden suhteen, niin $|V'(i)| = 1$ aina, kun $i \in \mathrm{NOM}$. Siis $\langle \mathcal{F}, V' \rangle$ on hyvinmääritelty hybridimalli.

Osoitetaan, että f on $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio mallien $\langle \mathcal{F}, V' \rangle$ ja $\langle \mathfrak{ue}\mathcal{G}, V^{\mathfrak{ue}} \rangle$ välillä. Olkoon w kehyksen $\mathcal{F}$ maailma ja v kehyksen $\mathfrak{ue}\mathcal{G}$ maailma. Jos $f(w) = v$, niin $w \in V'(p)$ jos ja vain jos $f(w) \in V^{\mathfrak{ue}}(p)$ jos ja vain jos $v \in V^{\mathfrak{ue}}(p)$, joten $\mathcal{H}(@)$-bisimulaation ehto (Atom) toteutuu.

Jos $f(w) = v$ ja $wR'w'$, niin koska f on kuvaus, on olemassa sellainen kehyksen $\mathfrak{ue}\mathcal{G}$ maailma v', että $f(w') = v'$. Lisäksi koska f on rajoitettu morfismi, niin ehdon (Forth) mukaan $vR^{\mathfrak{ue}}v'$. Siis $\mathcal{H}(@)$-bisimulaation ehto (Forth) toteutuu.

Jos $f(w) = v$ ja $vR^{\mathfrak{ue}}v'$, niin koska f on rajoitettu morfismi, niin ehdon (Back) mukaan on olemassa sellainen $w' \in W'$, että $wR'w'$ ja $f(w') = v'$. Siis

$\mathcal{H}(@)$-bisimulaation ehto (Back) toteutuu.

Olkoon $i \in \mathrm{NOM}$. Nyt $w \in V'(i)$ jos ja vain jos $f(w) \in V^{\mathfrak{ue}}(i)$, eli jos $w \in V'(i)$ ja $v \in V^{\mathfrak{ue}}(i)$, niin koska $|V^{\mathfrak{ue}}(i)| = 1$, niin on oltava $f(w) = v$. Siis $\mathcal{H}(@)$-bisimulaation ehto (Nom) toteutuu. Siis f toteuttaa kaikki $\mathcal{H}(@)$-bisimulaation ehdot.

Koska f on surjektio, niin on olemassa sellainen $u \in W'$, että $f(u) = \pi_w$. Nyt $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioiden invarianttiuden perusteella $\langle \mathcal{F}, V' \rangle, u \not\models \varphi$, ja edelleen $\mathcal{F} \not\models \varphi$.

Osoitettiin siis, että aina, kun φ on $\mathcal{H}(@)$-kaava, jos $\mathcal{G} \not\models \varphi$, niin $\mathcal{F} \not\models \varphi$. Siis kontrapositioperiaatteen mukaan aina, kun φ on $\mathcal{H}(@)$-kaava, jos $\mathcal{F} \models \varphi$, niin $\mathcal{G} \models \varphi$. Olkoon Σ niiden $\mathcal{H}(@)$-kaavojen joukko, jotka määrittelevät luokan K. Nyt koska $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$, niin $\mathcal{F} \models \varphi$ jokaisella $\varphi \in \Sigma$. Edelleen $\mathcal{G} \models \varphi$ jokaisella $\varphi \in \Sigma$ eli $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$, joten K on suljettu ultrafiltterimorfisten kuvien suhteen. $\square$

Nyt päästään todistamaan ensimmäinen kehysten määriteltävyyttä koskeva tulos.

Lause 3.5. *Elementaarinen kehysten luokka on määriteltävissä joukolla kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavoja jos ja vain jos se on suljettu ultrafiltterimorfisten kuvien ja generoitujen alikehysten suhteen.*

Todistus (vrt. [7, s. 56-57]). Toinen suunta osoitettiin propositioissa 3.1 ja 3.3. Osoitetaan nyt toinen suunta. Olkoon K elementaarinen kehysten luokka, joka on suljettu ultrafiltterimorfisten kuvien ja generoitujen alikehysten suhteen. Olkoon $Th(\mathsf{K})$ niiden $\mathcal{H}(@)$-kaavojen joukko, jotka ovat valideja luokassa K. Koska $Th(\mathsf{K})$ on joukko $\mathcal{H}(@)$-kaavoja, riittää osoittaa, että $Th(\mathsf{K})$ määrittelee luokan K.

Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ sellainen kehys, että $\mathcal{F} \models Th(\mathsf{K})$. Otetaan käyttöön propositiosymboli p_A jokaista osajoukkoa $A \subseteq W$ kohti ja nominaali i_w jokaista $w \in W$ kohti. (Jos W on ääretön joukko, niin lajennettu kieli sisältää ylinumeroituvan määrän propositiosymboleita.) Muodostetaan sellainen kaavajoukko Δ, että aina, kun $A \subseteq W$ ja $v \in W$, niin joukkoon Δ kuuluvat seuraavat kaavat:

$$
\begin{aligned}
&p_{-A} \leftrightarrow \neg p_A, \\
&p_{A \cap B} \leftrightarrow p_A \wedge p_B, \\
&p_{R^{-1}(A)} \leftrightarrow \Diamond p_A, \\
&i_v \leftrightarrow p_{\{v\}},
\end{aligned}
$$

missä $R^{-1}(A) = \{w \in W \mid \exists v \in A : wRv\}$. Olkoon

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{@_{i_v} \Box^n \delta \mid v \in W, \delta \in \Delta \text{ ja } n \in \omega\}.$$

Intuitiivisesti joukko $\Delta_{\mathcal{F}}$ kuvailee kehyksen $\mathcal{F}$. Olkoon V' sellainen valuaatio, että $V'(p_A) = A$ ja $V'(i_v) = \{v\}$ aina, kun $A \subseteq W$ ja $v \in W$. Olkoon $w \in W$.

Nyt $\langle \mathcal{F}, V' \rangle, w \vDash \Delta_{\mathcal{F}}$, joten $\Delta_{\mathcal{F}}$ on toteutuva kehyksessä $\mathcal{F}$. Osoitetaan, että $\Delta_{\mathcal{F}}$ on toteutuva kehysten luokassa K. Koska K on elementaarinen, sillä on kompaktisuusominaisuus. Täten riittää osoittaa, että jokainen äärellinen joukon $\Delta_{\mathcal{F}}$ alkioiden konjunktio δ on toteutuva luokassa K. Koska δ on toteutuva kehyksessä $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F} \vDash Th(\mathsf{K})$, niin $\neg\delta \notin Th(\mathsf{K})$, eli δ on toteutuva luokassa K.

Olkoon $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$ ja $\langle \mathcal{G}, V \rangle \vDash \Delta_{\mathcal{F}}$. Nyt siis mallissa $\langle \mathcal{G}, V \rangle$ on oltava nominaaleilla i_w, $w \in W$, nimetyt maailmat. Koska K on suljettu generoitujen alikehysten suhteen, voidaan olettaa, että $\mathcal{G}$ on sellaisten maailmojen generoima, jotka on nimetty nominaaleilla i_w, $w \in W$. Tällöin jokainen kehyksen $\mathcal{G}$ maailma on joko nimetty nominaalilla i_w, $w \in W$, tai siihen päästään tällaisella nominaalilla nimetystä maailmasta polulla, jonka pituus on n, $n \in \omega$. Nyt koska $\langle \mathcal{G}, V \rangle \vDash \Delta_{\mathcal{F}}$, niin Δ on globaalisesti toteutuva mallissa $\langle \mathcal{G}, V \rangle$. Olkoon $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$ mallin $\langle \mathcal{G}, V \rangle$ ω-saturoitu elementaarinen laajennus. Elementaarisuuden perusteella $\mathcal{G}^* \in \mathsf{K}$ ja Δ on globaalisesti toteutuva mallissa $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$.

Osoitetaan vielä, että $\mathcal{F}$ on kehyksen $\mathcal{G}^*$ ultrafiltterimorfinen kuva. Olkoon

$$f(v) = \{A \subseteq W \mid \langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v \vDash p_A\}$$

aina, kun v on kehyksen $\mathcal{G}^*$ maailma. Osoitetaan, että f on rajoitettu morfismi kehykseltä $\mathcal{G}^*$ kehykselle $\mathfrak{ue}\mathcal{F}$, ja että $|f^{-1}(u)| = 1$ aina, kun $u \in Uf(W)$ on pääultrafiltteri. Koska Δ on globaalisesti toteutuva mallissa $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$, niin $f(v)$ on ultrafiltteri kehykselle $\mathcal{F}$.

Osoitetaan, että f on surjektio. Olkoon $u \in Uf(W)$. Osoitetaan, että joukko $\{p_A \mid A \in u\}$ on toteutuva mallissa $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$. Koska malli $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$ on ω-saturoitu, riittää osoittaa, että $\{p_A \mid A \in u\}$ on äärellisesti toteutuva mallissa $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$. Olkoot $A_1, \ldots, A_n \in u$. Merkitään

$$B = \bigcap_k A_k.$$

Tällöin $B \in u$, joten $B \neq \emptyset$. Olkoon $v \in B$. Tällöin $\Delta_{\mathcal{F}} \vDash @_{i_v} p_B$, ja edelleen $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle \vDash @_{i_v} p_B$.

Osoitetaan seuraavaksi, että jos vR^*v', niin $f(v) R^{\mathfrak{ue}} f(v')$. Relaation $R^{\mathfrak{ue}}$ määritelmän perusteella riittää osoittaa, että aina, kun $A \in f(v')$, niin $m_R(A) \in f(v)$. Oletetaan, että $A \in f(v')$. Nyt $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v' \vDash p_A$. Oletuksen mukaan vR^*v', joten $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v \vDash \Diamond p_A$. Koska Δ on globaalisesti toteutuva mallissa $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$, niin

$$\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v \vDash p_{R^{-1}(A)} \leftrightarrow \Diamond p_A,$$

eli edelleen $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v \vDash p_{R^{-1}(A)}$. Huomataan, että $R^{-1}(A) = m_R(A)$, joten $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v \vDash p_{m_R(A)}$, eli edelleen $m_R(A) \in f(v)$.

Osoitetaan sitten, että jos $f(v) R^{\mathfrak{ue}} u$, niin on olemassa sellainen kehyksen $\mathcal{G}^*$ maailma v', että $f(v') = u$ ja vR^*v'. On siis löydettävä maailmalle u sellainen seuraaja v', joka toteuttaa kaavajoukon $\{p_A \mid A \in u\}$. Koska $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$

on ω-saturoitu, riittää osoittaa, että kyseinen kaavajoukko on äärellisesti toteutuva maailman v seuraajien joukossa. Olkoot $A_1, \dots, A_n \in u$. Merkitään

$$C = \bigcap_i A_i.$$

Nyt $C \in u$, ja edelleen koska $f(v) R^{\mathfrak{ue}} u$, niin $m_R(C) \in f(v)$. Siis

$$\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v \vDash p_{m_R(C)},$$

eli toisin sanoen

$$\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v \vDash p_{R^{-1}(C)}.$$

Koska Δ on globaalisesti toteutuva mallissa $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$, niin

$$\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v \vDash \Diamond p_C.$$

Siis maailmalla v on olemassa sellainen seuraaja v', että

$$\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v' \vDash p_C.$$

Edelleen koska Δ on globaalisesti toteutuva, niin

$$\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, v' \vDash p_{A_1} \wedge \cdots \wedge p_{A_n}.$$

Lopuksi osoitetaan, että $|f^{-1}(u)| = 1$ aina, kun $u \in Uf(W)$ on pääultrafiltteri. Oletetaan, että x ja y ovat kehyksen $\mathcal{G}^*$ maailmoja, w on kehyksen $\mathcal{F}$ maailma, ja $f(x) = f(y) = \pi_w$. Nyt kuvauksen f määritelmän mukaan x ja y toteuttavat propositiosymbolin $p_{\{w\}}$. Koska Δ on globaalisesti toteutuva mallissa $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle$, niin $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, x \vDash i_w$ ja $\langle \mathcal{G}^*, V^* \rangle, y \vDash i_w$. Siis $x = y$.

Osoitettiin siis, että $\mathcal{F}$ on kehyksen $\mathcal{G}^*$ ultrafiltterimorfinen kuva. Nyt koska $\mathcal{G}^* \in \mathsf{K}$ ja K on suljettu ultrafiltterimorfisten kuvien suhteen, niin $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$. $\square$

Määritellään vielä bisimulaatiosysteemin käsite.

Määritelmä 3.10. (Ks. [3, s. 842]). Olkoon Z $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio kehysten $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ ja $\mathcal{G} = \langle W', R' \rangle$ välillä ja olkoon $X \subseteq W'$. $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio Z *kunnioittaa joukkoa* X, jos seuraavat ehdot pätevät aina, kun $x \in X$:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{Jos } wZx \text{ ja } vZx, \text{ niin } w = v. \\ \text{(ii)} & \text{Jos } wZx \text{ ja } wZv, \text{ niin } v = x. \end{array}$$

Bisimulaatiosysteemi kehykseltä $\mathcal{F}$ kehykselle $\mathcal{G}$ on sellainen funktio f, joka kuvaa jokaisen äärellisen osajoukon $X \subseteq W'$ täydelliseksi joukkoa X kunnioittavaksi $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatioksi $f(X) \subseteq W \times W'$.

Jos on olemassa bisimulaatiosysteemi kehykseltä $\mathcal{F}$ kehykselle $\mathcal{G}$, niin $\mathcal{G}$ on kehyksen $\mathcal{F}$ *bisimulaatiosysteemin kuva.*

Esitetään ja todistetaan ensin propositio, joka helpottaa seuraavan lauseen todistamista.

Propositio 3.4. *Kehysten luokat, jotka ovat määriteltävissä puhtaalla kielen $\mathcal{H}(@)$ kaavalla, ovat suljettuja bisimulaatiosysteemien kuvien suhteen.*

Todistus. Olkoon K kehysten luokka, joka on määriteltävissä puhtaalla $\mathcal{H}(@)$-kaavalla. Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle \in \mathsf{K}$ ja olkoon $\mathcal{G} = \langle W', R'\rangle$ kehyksen $\mathcal{F}$ bisimulaatiosysteemin kuva. Osoitetaan, että $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$.

Olkoon φ puhdas $\mathcal{H}(@)$-kaava ja olkoon $\mathcal{G} \nvDash \varphi$. On siis olemassa sellainen $w \in W'$ ja sellainen valuaatio V, että $\langle \mathcal{G}, V\rangle, w \nvDash \varphi$. Olkoot $i_1, \dots, i_n$ kaavassa φ esiintyvät nominaalit. Nyt on olemassa sellaiset maailmat $w_1, \dots, w_n \in W'$, että $V(i_1) = \{w_1\}, \dots, V(i_n) = \{w_n\}$. Olkoon V' sellainen valuaatio, että $V'(i) = V(i)$, kun $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$, $V'(i) = \{w\}$, kun $i \in \mathrm{NOM} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$ ja $V'(p) = \emptyset$, kun $p \in \mathrm{PROP}$. Tällöin $\langle \mathcal{G}, V'\rangle, w \nvDash \varphi$.

Olkoon $X = \{w, w_1, \dots, w_n\}$. Koska on olemassa bisimulaatiosysteemi f kehykseltä $\mathcal{F}$ kehykselle $\mathcal{G}$, niin $f(X) = Z$ on täydellinen joukkoa X kunnioittava $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio kehysten $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ välillä. Koska $f(X)$ kunnioittaa joukkoa X, niin jokaista $v \in X$ kohti on olemassa täsmälleen yksi sellainen $v' \in W$, että $v'Zv$. Olkoot siis $w'Zw$, $w'_1Zw_1, \dots, w'_nZw_n$. Olkoon U sellainen valuaatio, että $U(i_1) = \{w'_1\}, \dots, U(i_n) = \{w'_n\}$, sekä $U(i) = \{w'\}$, kun $i \in \mathrm{NOM} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$ ja $U(p) = \emptyset$, kun $p \in \mathrm{PROP}$. Nyt Z on $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio mallien $\langle \mathcal{F}, U\rangle$ ja $\langle \mathcal{G}, V'\rangle$ välillä. Koska $(\langle \mathcal{F}, U\rangle, w')$ ja $(\langle \mathcal{G}, V'\rangle, w)$ ovat $\mathcal{H}(@)$-bisimilaarisia ja $\langle \mathcal{G}, V'\rangle, w \nvDash \varphi$, niin lauseen 3.2 mukaan $\langle \mathcal{F}, U\rangle, w' \nvDash \varphi$ ja edelleen $\mathcal{F} \nvDash \varphi$.

Osoitettiin siis, että jos φ on puhdas $\mathcal{H}(@)$-kaava ja $\mathcal{G} \nvDash \varphi$, niin $\mathcal{F} \nvDash \varphi$. Nyt kontrapositioperiaatteen mukaan jos $\mathcal{F} \vDash \varphi$, niin $\mathcal{G} \vDash \varphi$. Olkoon ψ luokan K määrittelevä puhdas $\mathcal{H}(@)$ kaava. Koska $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$, niin $\mathcal{F} \vDash \psi$, joten edelleen $\mathcal{G} \vDash \psi$. Siis $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$, ja on todistettu, että K on suljettu bisimulaatiosysteemien kuvien suhteen. □

Todistetaan sitten toinen kehysten luokan määriteltävyyttä koskeva tulos.

Lause 3.6. *Kehysten luokka on määriteltävissä puhtaalla $\mathcal{H}(@)$-kaavalla jos ja vain jos se on elementaarinen sekä suljettu generoitujen alikehysten ja bisimulaatiosysteemien kuvien suhteen.*

Todistus (vrt. [7, s. 61-62]). Toinen suunta osoitettiin propositioissa 3.1 ja 3.4. Osoitetaan nyt toinen suunta. Olkoon K elementaarinen kehysten luokka, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja bisimulaatiosysteemien kuvien suhteen. Olkoon $PTh(\mathsf{K})$ niiden puhtaiden $\mathcal{H}(@)$-kaavojen joukko, jotka ovat valideja luokassa K. Osoitetaan, että aina, kun $\mathcal{F}$ on kehys ja $\mathcal{F} \vDash PTh(\mathsf{K})$, niin $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$.

Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ ja $\mathcal{F} \models PTh(\mathsf{K})$. Otetaan käyttöön nominaali i_w jokaista $w \in W$ kohti. Olkoon V sellainen valuaatio, että $V(i_w) = \{w\}$ aina, kun $w \in W$. Olkoon $\Delta_{\mathcal{F}}$ sellainen kaavajoukko, joka koostuu niistä muotoa $@_{i_w}\varphi$ olevista puhtaista kaavoista, jotka ovat valideja mallissa $\langle \mathcal{F}, V\rangle$. Intuitiivisesti joukko $\Delta_{\mathcal{F}}$ kuvailee kehyksen $\mathcal{F}$. Koska $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models \Delta_{\mathcal{F}}$, niin $\Delta_{\mathcal{F}}$ on toteutuva kehyksessä $\mathcal{F}$. Osoitetaan, että $\Delta_{\mathcal{F}}$ on toteutuva luokassa K. Koska K on elementaarinen, sillä on kompaktisuusominaisuus. Riittää siis osoittaa, että jokainen äärellinen konjuktio δ joukon $\Delta_{\mathcal{F}}$ alkioita on toteutuva luokassa K. Koska δ on toteutuva kehyksessä $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F} \models PTh(\mathsf{K})$, niin $\neg\delta \notin PTh(\mathsf{K})$, eli δ on toteutuva luokassa K.

Olkoon $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$ ja $\langle \mathcal{G}, U\rangle \models \Delta_{\mathcal{F}}$. Koska K on suljettu generoitujen alikehysten suhteen, voidaan olettaa, että $\mathcal{G}$ on sellaisten maailmojen generoima, jotka on nimetty nominaaleilla. Osoitetaan, että aina, kun φ on puhdas $\mathcal{H}(@)$-kaava, niin $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models \varphi$ jos ja vain jos $\langle \mathcal{G}, U\rangle \models \varphi$. Yhtäpitävästi voidaan osoittaa, että φ on toteutuva mallin $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ maailmassa jos ja vain jos φ on toteutuva mallin $\langle \mathcal{G}, U\rangle$ maailmassa.

Oletetaan ensin, että $\langle \mathcal{F}, V\rangle, w \models \varphi$. Tällöin $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models @_{i_w}\varphi$. Siis $@_{i_w}\varphi \in \Delta_{\mathcal{F}}$, ja edelleen $\langle \mathcal{G}, U\rangle \models @_{i_w}\varphi$, joten $\langle \mathcal{G}, U\rangle, w \models \varphi$. Oletetaan sitten, että $\langle \mathcal{G}, U\rangle, v \models \varphi$. Koska $\langle \mathcal{G}, U\rangle$ on sellaisten maailmojen generoima, jotka on nimetty nominaaleilla, on olemassa sellainen nominaali i, että $\langle \mathcal{G}, U\rangle \models @_i\Diamond^n\varphi$, missä $n \in \omega$. Nyt jos $\langle \mathcal{F}, V\rangle \not\models @_i\Diamond^n\varphi$, niin $@_i\Box^n\neg\varphi \in \Delta_{\mathcal{F}}$, jolloin $\langle \mathcal{G}, U\rangle \models @_i\Box^n\neg\varphi$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\langle \mathcal{G}, U\rangle \models @_i\Diamond^n\varphi$. Siis $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models @_i\Diamond^n\varphi$ eli $\langle \mathcal{F}, V\rangle, v \models \Diamond^n\varphi$, kun $V(i) = \{v\}$. Tällöin on olemassa pituudeltaan n oleva polku maailmasta v johonkin maailmaan v', ja $\langle \mathcal{F}, V\rangle, v' \models \varphi$.

Olkoot $\langle \mathcal{F}^*, V^*\rangle$ ja $\langle \mathcal{G}^*, U^*\rangle$ mallien $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ ja $\langle \mathcal{G}, U\rangle$ ω-saturoidut elementaariset laajennukset. Elementaarisuuden perusteella $\mathcal{G}^* \in \mathsf{K}$. Seuraavaksi konstruoidaan bisimulaatiosysteemi kehykseltä $\mathcal{G}^*$ kehykselle $\mathcal{F}^*$. Kiinnitetään jotkin $w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{F}^*$, ja valitaan näitä vastaamaan uudet nominaalit $j_1, \ldots, j_n$. Merkitään saatua laajennusta $\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n\rangle$. Osoitetaan, että on olemassa sellaiset $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{G}^*$, että mallit $\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n\rangle$ ja $\langle \mathcal{G}^*, U^*, v_1, \ldots, v_n\rangle$ toteuttavat globaalisesti täsmälleen samat nominaaleilla $j_1, \ldots, j_n$ laajennetun kielen puhtaat $\mathcal{H}(@)$-kaavat.

Olkoon Γ seuraava joukko ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavoja:

$$\{\forall x ST_x(\varphi) \mid \langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n\rangle \models \varphi\} \cup$$
$$\{\neg\forall x ST_x(\varphi) \mid \langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n\rangle \not\models \varphi\}.$$

Osoitetaan, että on olemassa sellainen mallin $\langle \mathcal{G}^*, U^*\rangle$ laajennus, jossa Γ on globaalisesti toteutuva. Koska $\langle \mathcal{G}^*, U^*\rangle$ on ω-saturoitu, riittää osoittaa, että Γ on äärellisesti globaalisesti toteutuva. Toisin sanoen osoitetaan, että aina, kun $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \Gamma$, on olemassa sellaiset $v_1, \ldots, v_n$, että $\langle \mathcal{G}^*, U^*, v_1, \ldots, v_n\rangle$ toteuttaa globaalisesti kaavat $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

Olkoot $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \Gamma$. Joukon Γ määritelmän mukaan kaavat $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ toteutuvat globaalisesti mallissa $\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n\rangle$. Koska $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ on mallin

$\langle \mathcal{F}^*, V^* \rangle$ elementaarinen alimalli, niin on olemassa sellaiset $w_1', \ldots, w_n'$, että $\langle \mathcal{F}, V, w_1', \ldots, w_n' \rangle$ toteuttaa globaalisesti kaavat $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Koska maailmat $w_1', \ldots, w_n'$ on nimetty nominaaleilla $i_{w_1'}, \ldots, i_{w_n'}$, niin aina, kun φ on puhdas kaava,

$$\langle \mathcal{F}, V, w_1', \ldots, w_n' \rangle \vDash \varphi$$

jos ja vain jos

$$\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \varphi[j_1/i_{w_1'}, \ldots, j_n/i_{w_n'}].$$

Olkoot $v_1, \ldots, v_n$ maailmat, jotka vastaavat nominaaleja $i_{w_1'}, \ldots, i_{w_n'}$ mallissa $\langle \mathcal{G}, U \rangle$. Aikaisemmin osoitettiin, että aina, kun φ on puhdas kaava, niin $\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \varphi$ jos ja vain jos $\langle \mathcal{G}, U \rangle \vDash \varphi$. Tämän perusteella

$$\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \varphi[j_1/i_{w_1'}, \ldots, j_n/i_{w_n'}] \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{G}, U \rangle \vDash \varphi[j_1/i_{w_1'}, \ldots, j_n/i_{w_n'}].$$

Tästä seuraa, että aina, kun $1 \leq i \leq m$, niin $\langle \mathcal{F}, V, w_1', \ldots, w_n' \rangle \vDash \varphi_i$ jos ja vain jos $\langle \mathcal{G}, U, v_1, \ldots, v_n \rangle \vDash \varphi_i$. Siis koska $\langle \mathcal{F}, V, w_1', \ldots, w_n' \rangle$ toteuttaa globaalisesti kaavat $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, niin myös $\langle \mathcal{G}, U, v_1, \ldots, v_n \rangle$ toteuttaa globaalisesti nämä kaavat. Edelleen koska $\langle \mathcal{G}, U \rangle$ on mallin $\langle \mathcal{G}^*, U^* \rangle$ elementaarinen alimalli, niin myös $\langle \mathcal{G}^*, U^*, v_1, \ldots, v_n \rangle$ toteuttaa globaalisesti kaavat $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

Määritellään relaatio Z mallin $\mathcal{G}^*$ maailmojen joukolta mallin $\mathcal{F}^*$ maailmojen joukolle seuraavasti:

$$\begin{gathered} sZt \text{ jos ja vain jos aina, kun } \varphi \text{ on puhdas } \mathcal{H}(@)\text{-kaava, pätee} \\ \langle \mathcal{G}^*, U^*, v_1, \ldots, v_n \rangle, s \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n \rangle, t \vDash \varphi. \end{gathered}$$

Osoitetaan, että Z on täydellinen bisimulaatio kehysten $\mathcal{G}^*$ ja $\mathcal{F}^*$ välillä, ja että Z kunnioittaa maailmojen joukkoa $\{w_1, \ldots, w_n\}$.

Edellä todistetun sekä lauseen 3.2 perusteella Z on bisimulaatio kehysten $\mathcal{G}^*$ ja $\mathcal{F}^*$ välillä. Osoitetaan, että Z on täydellinen bisimulaatio. Olkoon $s \in \mathcal{G}^*$ ja olkoon

$$\Gamma = \{ST_x(\varphi) \mid \langle \mathcal{G}^*, U^*, v_1, \ldots, v_n \rangle, s \vDash \varphi\}.$$

Olkoot $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$. Siis joukon Γ määritelmän perusteella

$$\langle \mathcal{G}^*, U^*, v_1, \ldots, v_n \rangle, s \vDash \varphi_i,$$

kun $1 \leq i \leq n$. Edelleen

$$\langle \mathcal{G}^*, U^*, v_1, \ldots, v_n \rangle \vDash @_{i_s}\varphi_i,$$

kun $1 \leq i \leq n$. Koska mallit $\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n \rangle$ ja $\langle \mathcal{G}^*, U^*, v_1, \ldots, v_n \rangle$ toteuttavat globaalisesti täsmälleen samat puhtaat $\mathcal{H}(@)$-kaavat, niin

$$\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n \rangle \vDash @_{i_s}\varphi_i,$$

kun $1 \leq i \leq n$. Edelleen

$$\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n \rangle, t \vDash \varphi_i,$$

kun $1 \leq i \leq n$ ja $V(i_s) = \{t\}$. Siis kaikki joukon Γ äärelliset osajoukot ovat toteutuvia mallissa $\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n \rangle$. Koska $\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n \rangle$ on ω-saturoitu, niin on olemassa sellainen maailma t, että

$$\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n \rangle, t \vDash \Gamma.$$

Siis sZt. Toinen suunta todistetaan vastaavasti. Pitää vielä osoittaa, että bisimulaatio Z kunnioittaa maailmojen joukkoa $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Tämä seuraa suoraan laajennusten $\langle \mathcal{F}^*, V^*, w_1, \ldots, w_n \rangle$ ja $\langle \mathcal{G}^*, U^*, v_1, \ldots, v_n \rangle$ konstruoinneista.

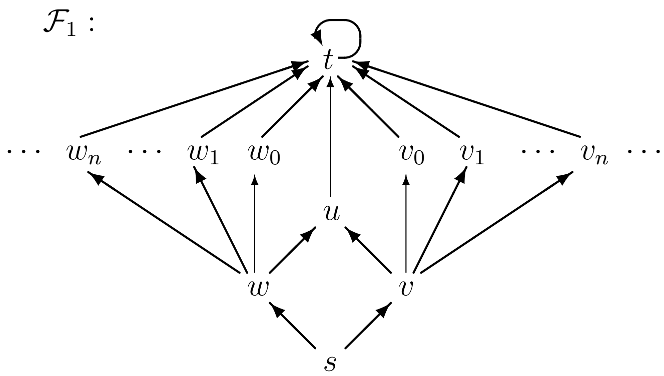
On siis konstruoitu bisimulaatiosysteemi kehykseltä $\mathcal{G}^*$ kehykselle $\mathcal{F}^*$. Koska K on suljettu bisimulaatiosysteemien kuvien suhteen, $\mathcal{F}^* \in \mathsf{K}$. Edelleen elementaarisuuden perusteella $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$. $\square$

Esitetään lopuksi esimerkki kehysten luokasta, joka ei ole määriteltävissä puhtaalla $\mathcal{H}(@)$-kaavalla.

Esimerkki 3.6. (Ks. [3, s. 842-843]). Osoitetaan, että Church-Rosser -ominaisuus, joka määritellään kaavalla

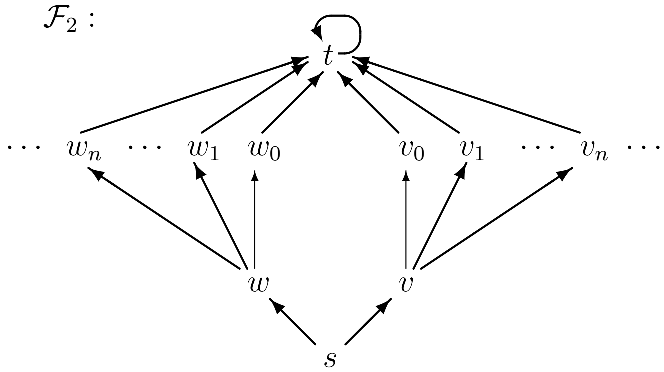
$$\forall xyz(R(x,y) \wedge R(x,z) \to \exists u(R(y,u) \wedge R(z,u))),$$

ei välttämättä säily bisimulaatiosysteemien kuvissa, eikä siis ole määriteltävissä puhtaalla $\mathcal{H}(@)$-kaavalla. Olkoon $\mathcal{F}_1 = \langle F_1, R_1 \rangle$ seuraava kehys:



Olkoon $\mathcal{F}_2 = \langle F_2, R_2 \rangle$ seuraava kehys:

$\mathcal{F}_2$:



Huomataan, että ainoa ero kehyksissä on maailma u, sekä siitä lähtevät ja siihen tulevat nuolet. Olkoon aina, kun $X \subseteq F_2$,

$$f(X) = \{(w, w) \mid w \in F_1\} \cup \{(u, w_k), (u, v_l)\},$$

missä $w_k, v_l \notin X$. Nyt f on bisimulaatiosysteemi, mutta kehyksellä $\mathcal{F}_1$ on Church-Rosserin ominaisuus ja kehyksellä $\mathcal{F}_2$ ei ole.

4 Interpolaatio ja Beth-määriteltävyys

Tässä luvussa määritellään interpolaation, Beth-määriteltävyyden ja bisimulaatiotulon käsitteet. Osoitetaan, että kieli $\mathcal{H}(@)$ toteuttaa interpolaation propositiosymboleiden suhteen kehysten luokissa, jotka ovat suljettuja generoitujen alikehysten ja bisimulaatiotulojen suhteen. Osoitetaan, että kielellä $\mathcal{H}(@)$ on myös Beth-ominaisuus näissä luokissa.

Aloitetaan määrittelemällä interpolaatio sekä propositiosymboleiden että nominaalien suhteen.

Määritelmä 4.1. (Ks. [7, s. 95, s. 100]). Olkoon φ kaava. Olkoon $\mathrm{PROP}(\varphi)$ niiden propositiosymboleiden joukko, jotka esiintyvät kaavassa φ. Hybridikieli $\mathcal{HL}$ toteuttaa *interpolaation propositiosymboleiden suhteen* kehysten luokassa K, jos aina, kun φ ja ψ ovat $\mathcal{HL}$-kaavoja, pätee:

$$\text{Jos } \mathsf{K} \vDash \varphi \to \psi, \text{ niin on olemassa sellainen } \mathcal{HL}\text{-kaava } \vartheta, \text{ että}$$
$$\mathsf{K} \vDash \varphi \to \vartheta, \mathsf{K} \vDash \vartheta \to \psi \text{ ja } \mathrm{PROP}(\vartheta) \subseteq \mathrm{PROP}(\varphi) \cap \mathrm{PROP}(\psi).$$

Vastaavasti, olkoon $\mathrm{NOM}(\varphi)$ niiden nominaalien joukko, jotka esiintyvät kaavassa φ. Hybridikieli $\mathcal{HL}$ toteuttaa *interpolaation nominaalien suhteen* kehysten luokassa K, jos aina, kun φ ja ψ ovat $\mathcal{HL}$-kaavoja, pätee:

$$\text{Jos } \mathsf{K} \vDash \varphi \to \psi, \text{ niin on olemassa sellainen } \mathcal{HL}\text{-kaava } \vartheta, \text{ että}$$
$$\mathsf{K} \vDash \varphi \to \vartheta, \mathsf{K} \vDash \vartheta \to \psi \text{ ja } \mathrm{NOM}(\vartheta) \subseteq \mathrm{NOM}(\varphi) \cap \mathrm{NOM}(\psi).$$

Kaavaa ϑ sanotaan implikaation $\varphi \to \psi$ *interpolantiksi.*

Kieli $\mathcal{H}(@)$ ei toteuta interpolaatiota nominaalien suhteen missään kehysten luokassa. Tämä voidaan todeta, kun tarkastellaan validia implikaatiota $i \wedge \Diamond i \to (j \to \Diamond j)$. Tämän implikaation interpolantin pitäisi ilmaista, että tutkittava maailma on relaatiossa itsensä kanssa. Mutta koska implikaation vasemmalla ja oikealla puolella ei esiinny samoja nominaaleja, interpolantti ei voi sisältää nominaaleja. Ilman nominaaleja taas ei voida ilmaista haluttua ominaisuutta, joten interpolanttia ei löydy. Kieli $\mathcal{H}(@)$ toteuttaa kuitenkin interpolaation propositiosymboleiden suhteen.

Määritellään ensin kehysjoukon tulo. Olkoon $I \neq \emptyset$ ja $A_i \neq \emptyset$ aina, kun $i \in I$. Olkoon

$$C = \prod_{i \in I} A_i$$

joukkojen A_i, $i \in I$, karteesinen tulo. Joukko C on siis kaikkien sellaisten funktioiden f joukko, joiden määrittelyjoukko on I ja $f(i) \in A_i$ aina, kun $i \in I$.

Määritelmä 4.2. (Vrt. [9, s. 177]). Olkoon $I \neq \emptyset$ ja $\{\mathcal{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle \mid i \in I\}$ joukko kehyksiä. *Kehysjoukon* $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ *tulo* $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ on kehys $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, jossa

$$W = \prod_{i \in I} W_i,$$
$$(f, g) \in R \quad \Leftrightarrow \quad (f(i), g(i)) \in R_i \quad \text{aina, kun } i \in I.$$

Kehysjoukon tulon määritelmä on hiukan monimutkainen, joten selvennetään asiaa esimerkillä.

Esimerkki 4.1. Olkoon $I = \{a, b\}$. Olkoon $\mathcal{F}_a = \langle W_a, R_a \rangle$ kehys, jossa $W_a = \{1\}$ ja $R_a = \{(1,1)\}$. Olkoon $\mathcal{F}_b = \langle W_b, R_b \rangle$, jossa $W_b = \{2, 3\}$ ja $R_b = \{(2,3), (3,2)\}$. Muodostetaan kehysjoukon $\{\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b\}$ tulo $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$. Saadaan $W = \{f, g\}$, missä f on siis sellainen funktio, että $f(a) = 1$ ja $f(b) = 2$, ja vastaavasti g on sellainen funktio, että $g(a) = 1$ ja $g(b) = 3$. Koska

$$(f(b), f(b)) = (2,2) \notin R_b,$$

niin $(f, f) \notin R$. Koska

$$(f(a), g(a)) = (1,1) \in R_a$$

ja

$$(f(b), g(b)) = (2,3) \in R_b,$$

niin $(f, g) \in R$. Vastaavasti huomataan, että $(g, f) \in R$ ja $(g, g) \notin R$. Siis $R = \{(f, g), (g, f)\}$.

Määritellään sitten bisimulaatiotulon käsite, ja esitetään tästäkin yksinkertainen esimerkki.

Määritelmä 4.3. (Ks. [7, s. 21]). Olkoon $\{\mathcal{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle \mid i \in I\}$ joukko kehyksiä. Joukon $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ bisimulaatiotulo on sellainen tulon $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ alikehys $\mathcal{G} = \langle W, R \rangle$, että aina, kun $i \in I$, luonnollinen projektio $f_i : W \to W_i$ on surjektiivinen rajoitettu morfismi.

Kehysten luokka K on *suljettu bisimulaatiotulojen suhteen*, jos jokainen kehysten $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ bisimulaatiotulo kuuluu luokkaan K aina, kun $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{K}$.

Esimerkki 4.2. Osoitetaan, että esimerkin 4.1 kehysjoukon $\{\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b\}$ tulo on myös bisimulaatiotulo. Olkoon $f_a : W \to W_a$ sellainen kuvaus, että

$$f_a(f) = f_a(g) = 1,$$

ja olkoon $f_b : W \to W_b$ sellainen kuvaus, että $f_b(f) = 2$ ja $f_b(g) = 3$. Nyt luonnolliset projektiot f_a ja f_b ovat surjektiivisia rajoitettuja morfismeja, joten kehys $\mathcal{F}$ on kehysjoukon $\{\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b\}$ bisimulaatiotulo.

Ennen varsinaista interpolaatiota koskevan lauseen todistusta esitetään vielä yksi lauseen todistamiseen tarvittava propositio.

Propositio 4.1. (Ks. [7, s. 21]). *Olkoon $\mathcal{H}$ tulon $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ alikehys. Kehys $\mathcal{H}$ on kehysten $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ bisimulaatiotulo jos ja vain jos kehyksen $\mathcal{H}$ mahdollisten maailmojen joukko on täydellinen $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio kehysten $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ välillä.*

Todistus. Ks. [12, s. 215-216]. $\square$

Lause 4.1. *Olkoon K elementaarinen kehysten luokka, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja bisimulaatiotulojen suhteen. Kieli $\mathcal{H}(@)$ toteuttaa interpolaation propositiosymboleiden suhteen luokassa K.*

Todistus (vrt. [7, s. 95-96, s. 22]). Olkoon K elementaarinen kehysten luokka, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja bisimulaatiotulojen suhteen. Oletetaan, että $\mathsf{K} \vDash \varphi \to \psi$. Tehdään vastaoletus, että ei ole olemassa sellaista kaavaa ϑ, että $\mathsf{K} \vDash \varphi \to \vartheta$, $\mathsf{K} \vDash \vartheta \to \psi$ ja $\mathrm{PROP}(\vartheta) \subseteq \mathrm{PROP}(\varphi) \cap \mathrm{PROP}(\psi)$. Olkoon $Cons(\varphi)$ sellaisten $\mathcal{H}(@)$-kaavojen χ joukko, jotka toteuttavat ehdot $\mathsf{K} \vDash \varphi \to \chi$ ja $\mathrm{PROP}(\chi) \subseteq \mathrm{PROP}(\varphi) \cap \mathrm{PROP}(\psi)$.

Osoitetaan, että on olemassa sellaiset luokan K kehykseen perustuva malli $\mathcal{M}$ ja maailma w, että $\mathcal{M}, w \vDash Cons(\varphi) \cup \{\neg\psi\}$. Kompaktisuuden perusteella riittää osoittaa, että jokainen joukon $Cons(\varphi) \cup \{\neg\psi\}$ äärellinen osajoukko on toteutuva luokassa K. Olkoot $\chi_1, \ldots, \chi_n \in Cons(\varphi)$. Jos $\{\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\psi\}$ ei olisi toteutuva luokassa K, niin $\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_n$ olisi kaavan $\varphi \to \psi$ interpolantti. Vastaoletuksen mukaan kaavalla $\varphi \to \psi$ ei ole interpolanttia, joten $\{\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\psi\}$ on toteutuva luokassa K.

Olkoon $Th(\mathcal{M}, w)$ sellaisten kaavojen χ joukko, että

$$\mathcal{M}, w \vDash \chi \quad \text{ja} \quad \mathrm{PROP}(\chi) \subseteq \mathrm{PROP}(\varphi) \cap \mathrm{PROP}(\psi).$$

Osoitetaan, että on olemassa sellaiset luokan K kehykseen perustuva malli $\mathcal{N}$ ja maailma v, että $\mathcal{N}, v \vDash Th(\mathcal{M}, w) \cup \{\varphi\}$.

Koska K on kompakti, riittää osoittaa, että jokainen joukon $Th(\mathcal{M}, w) \cup \{\varphi\}$ äärellinen osajoukko on toteutuva luokassa K. Olkoot

$$\chi_1, \ldots, \chi_n \in Th(\mathcal{M}, w).$$

Tehdään vastaoletus, että $\{\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi\}$ ei ole toteutuva luokassa K. Nyt

$$\mathsf{K} \vDash \varphi \to \neg(\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_n).$$

Siis $\neg(\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_n) \in Cons(\varphi)$ ja edelleen

$$\mathcal{M}, w \vDash \neg(\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_n).$$

Mutta tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $\chi_1, \ldots, \chi_n \in Th(\mathcal{M}, w)$. Siis vastaoletus on väärin ja $\{\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi\}$ on toteutuva luokassa K.

On siis löydetty sellaiset mallit $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ ja maailmat w, v, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $\mathcal{M}, w \vDash Cons(\varphi) \cup \{\neg\psi\}$
2. $\mathcal{N}, v \vDash Cons(\varphi) \cup \{\varphi\}$
3. Aina, kun ϑ on sellainen $\mathcal{H}(@)$-kaava, että $\mathrm{PROP}(\vartheta) \subseteq \mathrm{PROP}(\varphi) \cap \mathrm{PROP}(\psi)$, niin $\mathcal{M}, w \vDash \vartheta \iff \mathcal{N}, v \vDash \vartheta$.

Ehto 1 on selvä. Koska $Cons(\varphi) \subseteq Th(\mathcal{M}, w)$, niin myös ehto 2 pätee. Osoitetaan vielä, että ehto 3 toteutuu. Olkoon ϑ sellainen $\mathcal{H}(@)$-kaava, että $\mathrm{PROP}(\vartheta) \subseteq \mathrm{PROP}(\varphi) \cap \mathrm{PROP}(\psi)$. Nyt jos $\mathcal{M}, w \vDash \vartheta$, niin $\vartheta \in Th(\mathcal{M}, w)$. Tällöin $\mathcal{N}, v \vDash \vartheta$. Oletetaan sitten, että $\mathcal{N}, v \vDash \vartheta$. Tehdään vastaoletus, että $\mathcal{M}, w \nvDash \vartheta$. Siis $\mathcal{M}, w \vDash \neg\vartheta$. Nyt $\neg\vartheta \in Th(\mathcal{M}, w)$ ja edelleen $\mathcal{N}, v \vDash \neg\vartheta$, mikä on ristiriita. Siis vastaoletus on väärin ja $\mathcal{M}, w \vDash \vartheta$.

Koska K on suljettu generoitujen alikehysten suhteen, voidaan olettaa, että $\mathcal{M}$ on maailman w ja nominaaleilla nimettyjen maailmojen generoima. Vastaavasti voidaan olettaa, että $\mathcal{N}$ on maailman v ja nominaaleilla nimettyjen maailmojen generoima.

Olkoot $\mathcal{M}^+$ ja $\mathcal{N}^+$ mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ω-saturoidut elementaariset laajennukset. Koska K on elementaarinen, niin mallien $\mathcal{M}^+$ ja $\mathcal{N}^+$ kehykset kuuluvat luokkaan K. Määritellään relaatio Z mallien $\mathcal{M}^+$ ja $\mathcal{N}^+$ välille seuraavasti:

dZe, jos aina, kun χ on $\mathcal{H}(@)$-kaava ja
$\mathrm{PROP}(\chi) \subseteq \mathrm{PROP}(\varphi) \cap \mathrm{PROP}(\psi)$,
niin $\mathcal{M}^+, d \vDash \chi \iff \mathcal{N}^+, e \vDash \chi$.

Toisin sanoen dZe jos maailmoissa d ja e on totta täsmälleen samat kaavojen φ ja ψ yhteisen aakkoston $\mathcal{H}(@)$-kaavat. *Kaavojen φ ja ψ yhteinen aakkosto* sisältää kaikki nominaalit, mutta vain ne propositiosymbolit, jotka esiintyvät sekä kaavassa φ että kaavassa ψ. Nyt ehdon 3 perusteella wZv.

Osoitetaan, että Z on täydellinen $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio mallien $\mathcal{M}^+$ ja $\mathcal{N}^+$ välillä kaavojen φ ja ψ yhteisen aakkoston suhteen. Lauseen 3.2 perusteella Z on $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio mallien $\mathcal{M}^+$ ja $\mathcal{N}^+$ välillä kaavojen φ ja ψ yhteisen aakkoston suhteen. Osoitetaan, että Z on täydellinen.

Olkoon d mallin $\mathcal{M}^+$ maailma ja olkoon

$$\Gamma = \{ST_x(\gamma) \mid \mathcal{M}^+, d \vDash \gamma \text{ ja } \mathrm{PROP}(\gamma) \subseteq \mathrm{PROP}(\varphi) \cap \mathrm{PROP}(\psi)\}.$$

Osoitetaan, että on olemassa sellainen mallin $\mathcal{N}^+$ maailma e, jossa kaavajoukko Γ toteutuu. Koska $\mathcal{N}^+$ on ω-saturoitu, riittä osoittaa, että jokainen joukon Γ äärellinen osajoukko on toteutuva mallissa $\mathcal{N}^+$.

Olkoon $ST_x(\gamma_1), \ldots, ST_x(\gamma_n) \in \Gamma$. Koska $\mathcal{M}^+$ on mallin $\mathcal{M}$ elementaarinen laajennus ja

$$\mathcal{M}^+ \vDash \exists x(ST_x(\gamma_1) \wedge \cdots \wedge ST_x(\gamma_n)),$$

niin

$$\mathcal{M} \vDash \exists x(ST_x(\gamma_1) \wedge \cdots \wedge ST_x(\gamma_n)).$$

Koska $\mathcal{M}$ on maailman w ja nominaaleilla nimettyjen maailmojen generoima, niin joko

$$\mathcal{M}, w \vDash \Diamond^n(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$$

tai

$$\mathcal{M}, w \vDash @_i \Diamond^n(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n),$$

missä i on nominaali. Molemmissa tapauksissa ehdosta 3 seuraa, että konjunktio $\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ on totta jossain mallin $\mathcal{N}^+$ maailmassa. Nyt koska jokainen joukon Γ äärellinen osajoukko on toteutuva mallissa $\mathcal{N}^+$, niin ω-saturoituvuuden perusteella myös joukko Γ on toteutuva mallissa $\mathcal{N}^+$. Siis on olemassa sellainen mallin $\mathcal{N}^+$ maailma e, että $\mathcal{N}^+, e \vDash \Gamma$, joten dZe. Vastaavasti voidaan osoittaa, että aina, kun e on mallin $\mathcal{N}^+$ maailma, on olemassa sellainen mallin $\mathcal{M}^+$ maailma d, että dZe.

Olkoot $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ ja $\mathcal{G} = \langle W', R'\rangle$ malleja $\mathcal{M}^+$ ja $\mathcal{N}^+$ vastaavat kehykset. Nyt Z on täydellinen kehysbisimulaatio kehysten $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ välillä. Siis proposition 4.1 perusteella on olemassa kehysten $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ bisimulaatiotulo $\mathcal{H} \in \mathsf{K}$, jonka mahdollisten maailmojen joukko on Z. Bisimulaatiotulon määritelmän mukaan luonnolliset projektiot $f : Z \to W$ ja $g : Z \to W'$ ovat surjektiivisia rajoitettuja morfismeja. Olkoon

$$V(p) = \{u \mid \mathcal{M}^+, f(u) \vDash p\},$$

kun $p \in \mathrm{PROP}(\varphi)$ ja

$$V(p) = \{u \mid \mathcal{N}^+, g(u) \vDash p\},$$

kun $p \in \mathrm{PROP}(\psi)$. Täydellisen bisimulaation Z ominaisuudet takaavat, että V on hyvinmääritelty, kun $p \in \mathrm{PROP}(\varphi) \cap \mathrm{PROP}(\psi)$. Olkoon

$$V(i) = \{u \mid \mathcal{M}^+, f(u) \models i\} = \{u \mid \mathcal{N}^+, g(u) \models i\},$$

kun $i \in \mathrm{NOM}$. Jälleen täydellisen bisimulaation Z ominaisuudet takaavat, että V on hyvinmääritelty ja että $|V(i)| = 1$ aina, kun $i \in \mathrm{NOM}$.

Lopulta huomataan, että f on $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio mallien $\langle \mathcal{H}, V \rangle$ ja $\mathcal{M}^+$ välillä kaavassa φ esiintyvien propositiosymboleiden ja nominaalien suhteen, ja g on $\mathcal{H}(@)$-bisimulaatio mallien $\langle \mathcal{H}, V \rangle$ ja $\mathcal{N}^+$ välillä kaavassa ψ esiintyvien propositiosymboleiden ja nominaalien suhteen. Siis $\langle \mathcal{H}, V \rangle, (w, v) \models \varphi \wedge \neg\psi$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\mathsf{K} \models \varphi \to \psi$, joten vastaoletus on väärin. Siis on olemassa sellainen $\mathcal{H}(@)$-kaava ϑ, että $\mathsf{K} \models \varphi \to \vartheta$ ja $\mathsf{K} \models \vartheta \to \psi$. □

Ennen kuin siirrytään tarkastelemaan Beth-ominaisuutta, esitellään muutamia tämän ominaisuuden määrittelemisessä tarvittavia merkintöjä. Merkitään $\Sigma \models^{glo}_{\mathsf{K}} \varphi$, jos seuraava ehto pätee aina, kun $\mathcal{M}$ on luokan K kehykseen perustuva malli: Jos $\mathcal{M}$ toteuttaa globaalisesti kaikki joukon Σ kaavat, niin $\mathcal{M}$ toteuttaa globaalisesti kaavan φ.

Olkoon $\Sigma(p)$ joukko sellaisia kaavoja, jotka sisältävät propositiosymbolin p. Joukon $\Sigma(p)$ kaavat voivat sisältää myös muita propositiosymboleita ja nominaaleja. Joukko $\Sigma(p)$ *määrittelee implisiittisesti propositiosymbolin* p luokassa K, jos

$$\Sigma(p) \cup \Sigma(p') \models^{glo}_{\mathsf{K}} p \leftrightarrow p',$$

missä p' on sellainen propositiosymboli, joka ei esiinny joukon $\Sigma(p)$ kaavoissa, ja $\Sigma(p')$ on kaavajoukko, jossa kaikki propositiosymbolin p esiintymät joukon $\Sigma(p)$ kaavoissa on korvattu propositiosymbolilla p'.

Määritelmä 4.4. (Ks. [7, s. 98]). Kielellä $\mathcal{L}$ on *Beth-ominaisuus* luokassa K, jos aina, kun joukko $\Sigma(p)$ kielen $\mathcal{L}$ kaavoja määrittelee implisiittisesti propositiosymbolin p luokassa K, on olemassa sellainen kaava ϑ, jossa ei esiinny propositiosymbolia p, että $\Sigma(p) \models^{glo}_{\mathsf{K}} p \leftrightarrow \vartheta$. Kaava ϑ on *propositiosymbolin* p *eksplisiittinen määritelmä* joukossa $\Sigma(p)$ luokassa K.

Nyt päästään todistamaan tämän luvun toinen päätulos.

Lause 4.2. *Olkoon* K *elementaarinen kehysten luokka, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja bisimulaatiotulojen suhteen. Kielellä* $\mathcal{H}(@)$ *on Beth-ominaisuus luokassa* K*.*

Todistus (vrt. [7, s. 98-99]). Olkoon $\Sigma(p)$ joukko sellaisia $\mathcal{H}(@)$-kaavoja, jotka sisältävät kaavan p. Oletetaan, että $\Sigma(p)$ määrittelee implisiittisesti propositiosymbolin p luokassa K. Olkoon p' sellainen propositiosymboli, joka ei esiinny joukon $\Sigma(p)$ kaavoissa. Olkoon $\Sigma(p')$ kaavajoukko, jossa kaikki propositiosymbolin p esiintymät joukon $\Sigma(p)$ kaavoissa on korvattu propositiosymbolilla p'. Koska $\Sigma(p)$ määrittelee implisiittisesti propositiosymbolin p, niin

$$\Sigma(p) \cup \Sigma(p') \models^{glo}_{\mathsf{K}} p \leftrightarrow p'.$$

Olkoon

$$\Gamma(p) = \{\Box^n\varphi, @_i\Box^n\varphi \mid \varphi \in \Sigma(p), n \in \omega, i \in \mathrm{NOM}\}$$

ja

$$\Gamma(p') = \{\Box^n\varphi, @_i\Box^n\varphi \mid \varphi \in \Sigma(p'), n \in \omega, i \in \mathrm{NOM}\}.$$

Osoitetaan, että $\Gamma(p) \cup \Gamma(p') \models_{\mathsf{K}} p \leftrightarrow p'$. Olkoon $\mathcal{M}$ luokan K kehykseen perustuva malli, ja olkoon $\mathcal{M}, w \models \Gamma(p) \cup \Gamma(p')$. Olkoon $\mathcal{M}_w$ maailman w generoima mallin $\mathcal{M}$ alimalli. Koska K on suljettu generoitujen alikehysten suhteen, mallin $\mathcal{M}_w$ kehys kuuluu luokkaan K. Joukkojen $\Gamma(p)$ ja $\Gamma(p')$ määritelmien perusteella $\mathcal{M}_w$ toteuttaa globaalisesti joukot $\Sigma(p)$ ja $\Sigma(p')$. Edelleen $\mathcal{M}_w$ toteuttaa globaalisesti kaavan $p \leftrightarrow p'$. Siis $\mathcal{M}, w \models p \leftrightarrow p'$.

Kompaktisuuden perusteella on olemassa sellainen äärellinen osajoukko $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, että

$$\Gamma_0(p) \cup \Gamma_0(p') \models_{\mathsf{K}} p \leftrightarrow p'.$$

Tästä seuraa, että

$$\models_{\mathsf{K}} (p \wedge \bigwedge \Gamma_0(p)) \to (\bigwedge \Gamma_0(p') \to p').$$

Olkoon ϑ tämän implikaation interpolantti. Nyt koska

$$\mathrm{PROP}(\vartheta) \subseteq \mathrm{PROP}(p \wedge \bigwedge \Gamma_0(p)) \cap \mathrm{PROP}(\bigwedge \Gamma_0(p') \to p'),$$

niin propositiosymbolit p ja p' eivät esiinny kaavassa ϑ. Lisäksi

$$\models_{\mathsf{K}} (p \wedge \bigwedge \Gamma_0(p)) \to \vartheta$$

ja

$$\models_{\mathsf{K}} \vartheta \to (\bigwedge \Gamma_0(p') \to p').$$

Säännön (Subst) perusteella

$$\models_{\mathsf{K}} \vartheta \to (\bigwedge \Gamma_0(p) \to p).$$

Olkoot $\mathcal{M}$ luokan K kehykseen perustuva malli ja w sen maailma. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M}, w \models \Gamma_0(p)$ ja $\mathcal{M}, w \models \vartheta$. Koska $\mathcal{M}$ on luokan K kehykseen perustuva malli, niin

$$\mathcal{M}, w \models \vartheta \to (\bigwedge \Gamma_0(p) \to p),$$

joten edelleen $\mathcal{M}, w \models p$. Oletetaan sitten, että $\mathcal{M}, w \models \Gamma_0(p)$ ja $\mathcal{M}, w \models p$. Tällöin koska

$$\mathcal{M}, w \models (p \wedge \bigwedge \Gamma_0(p)) \to \vartheta,$$

niin $\mathcal{M}, w \models \vartheta$. Siis jos $\mathcal{M}, w \models \Gamma_0(p)$, niin $\mathcal{M}, w \models p \leftrightarrow \vartheta$. Koska $\mathcal{M}$ ja w olivat mielivaltaisia, niin $\Gamma_0(p) \models_{\mathsf{K}} p \leftrightarrow \vartheta$, ja edelleen $\Sigma(p) \models^{\mathrm{glo}}_{\mathsf{K}} p \leftrightarrow \vartheta$.

$\square$

Viitteet

[1] Areces, C., Blackburn, P., Marx, M. *Hybrid Logic is the Bounded Fragment of First Order Logic.* Proceedings of 6th Workshop on Logic, Language , Information and Computation, WOLLIC99, s. 33–50, Rio de Janeiro, 1999. (http://hylo.loria.fr/content/papers/files/wollic99.pdf)

[2] Areces, C., Blackburn, P., Marx, M. *Hybrid Logics: Characterization, Interpolation and Complexity.* The Journal of Symbolic Logic, 66(3):977–1010, 2001. (http://hylo.loria.fr/content/papers/files/jsl.pdf)

[3] Areces, C., ten Cate, B. *Hybrid Logics.* Handbook of Modal Logic. Amsterdam: Elsevier B.V., 821-868, 2007.

[4] van Benthem, J. *Exploring Logical Dynamics.* Stanford: CSLI Publications, 1995.

[5] Bezhanisvili, N., ten Cate, B., Marx, M., Viana, P. *Sahlqvist theory and transfer results for Hybrid Logic.* Preliminary proceedings of Advances in Modal Logic 2004, 2004. (http://staff.science.uva.nl/ bcate/papers/aiml-combined.pdf)

[6] Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y. *Modal Logic.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[7] ten Cate, B. *Model theory for extended modal languages*, Ph.D. Thesis. Amsterdam: University of Amsterdam, 2005.

[8] ten Cate, B., Marx, M., Viana, P. *Hybrid Logics with Sahlqvist axioms.* Logic Journal of the IGPL, 13(3):293–300, 2005. (http://staff.science.uva.nl/ bcate/papers/sahlqvist-igpl.pdf)

[9] Chang, C.C., Keisler, H.J. *Model Theory.* Amsterdam: North-Holland publishing company, 1973.

[10] Gargov, G., Goranko, V. *Modal logic with names.* Journal of Philosophical Logic, 22:607–636, 1993.

[11] Lehtinen, S. *Määriteltävyys modaalilogiikoissa*, Lisensiaatintutkimus. Tampere: Tampereen yliopisto, 2005.

[12] Marx, M., Venema, Y. *Multi-Dimensional Modal Logic.* Applied Logic Series. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[13] Rantala, V., Virtanen, A. *Johdatus modaalilogiikkaan.* Helsinki: Gaudeamus, 2004.