TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Suvi Lahti

Vektorinormit

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Kesäkuu 2008

Sisältö

1 Johdanto

1.1 Vektorinormien merkitys

Matematiikassa vektorinormeja käytetään numeerisessa matematiikassa ja teoreettisissa tarkasteluissa. Lisäksi matemaattisessa tilastotieteessä vektorinormeja käytetään optimointitehtäviä ratkaistaessa. Käytettäviä menetelmiä ovat esimerkiksi sisäpistemenetelmä, Newton-tyyliset ratkaisumenetelmät ja katkaistu Newtonin menetelmä. Viimeisessä näistä vektorinormia käytetään määrittämään residuaalin sallittu suuruusluokka. Lisäksi näiden optimointitehtävien ratkaisualgoritmeissa tarvitaan ehto iteroinnin lopettamiselle, joka voidaan asettaa vektorinormien avulla.

Vektorinormeja käytetään esimerkiksi signaalikäsittelyn eri osa-alueilla. Näistä esimerkkeinä monikanavaisen signaalin energian ja energiaspektrin määrittelyyn tarkoitettu Parsevalin yhtälö. Lisäksi vektorinormeja käytetään tutkittaessa, onko jokin monikanavainen LTI-järjestelmä BIBO-stabiili.

1.2 Työn sisältö

Tämä tutkielma pohjautuu Roger A. Hornin ja Charles R. Johnson:in teokseen *Matrix analysis*. Tätä teosta on käsitelty luvun 5, *Norms for vectors and matrices*, vektorinormien osalta.

Ensin tutkielmassa käsitellään ominaisuuksia, joiden avulla sisätulo ja vektorinormi määritellään. Tämän jälkeen käydään läpi esimerkkejä normeista, joista tärkein ja käytetyin on euklidinen normi. Lisäksi käydään läpi vielä vektorinormien algebrallisia, analyyttisiä ja geometrisia ominaisuuksia. Tässä tutkielmassa tarkastellaan usein, toteuttaako normi (tai funktio) vektornormille asetetut ehdot. Euklidisen normin lisäksi tarkastellaan myös esimerkiksi summanormia ja maksiminormia. Käytettävän normin valinta riippuu aina ratkaistavasta tehtävästä. Euklidisella normilla saadaan usein kauneimmat ja täydellisimmät teoreettiset tulokset, mutta joissakin sovelluksissa jokin muu normi on käyttökelpoisempi. Euklidisen normin teoreettiset ominaisuudet ovat kuitenkin niin hyvät, että tämä tutkielma keskittyy pääsääntöisesti tähän normiin. Tähän kyseiseen normiin perustuvat tulokset eivät kaikki yleisty muille normeille mm. siitä syystä, että euklidinen normi on sisätulon indusoima. Esimerkiksi jo aiemmin mainittua summanormia ei johdeta sisätulosta, joka tullaan myöhemmin tutkielman aikana osoittamaan.

Lukijan oletetaan tuntevan vektorien normaalit laskutoimitukset ja lineaarialgebran perusteet. Seuraavassa alaluvussa käydään hieman läpi tuloksia, joista on apua tekstin ymmärtämisessä ja joihin tekstissä voidaan viitata.

1.3 Esi- ja lisätietoja

Keskeisiä epäyhtälöitä, joita tutkielmassa tullaan useaan otteeseen soveltamaan, ovat kolmioepäyhtälö ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Lause 1.1 (kolmioepäyhtälö) $[1, s.40]$ *Kaikille* $x, y \in \boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{R}$ *tai* $\boldsymbol{C}$) *on voimassa*

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Tullaan myöhemmin osoittamaan, että tämä on voimassa myös vektorinormeille sekä vektorin seminormeille.

Seuraavaa kahta määritelmää tarvitaan tutkielman edetessä.

Määritelmä 1.2 $[3, s.296]$ *Vektoreiden x ja y* sisätulo *määritellään yhtälön* $\langle x, y \rangle \equiv x^* y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$ *avulla.*

Sisätuloa käytetaan tutkielmassa esimerkiksi vektorin euklidisen normin määrittämiseen.

Määritelmä 1.3 $[2, s.257]$ *Vektorin* $z \in \boldsymbol{C}^n$ euklidinen pituus *on*

$(z^*z)^{1/2} = (\sum z_i^2)^{1/2}.$

Seuraavaan kahteen määritelmään viitataan tutkielmassa:

Määritelmä 1.4 $[4, s.13]$ *Olkoon* a *nollasta poikkeava vektori avaruudessa* $\boldsymbol{R}^n$ *ja* b *skalaari. Tällöin joukko*

$\{x \in \boldsymbol{R}^n | a'x \leq b\}$

on puoliavaruus.

Lause 1.5 (Hahn-Banachin lause) $[5, s.21]$ *Olkoon* X *reaalinen vektoriavaruus ja* $p : X \to \boldsymbol{R}$ *kuvaus, joka toteuttaa ehdot:*

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *kaikilla* $x, y \in X$,

(ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ *kaikilla* $\in X$, $\alpha \geq 0$.

Olkoon V *avaruuden* X *aliavaruus ja* $g : V \to \boldsymbol{R}$ *sellainen lineaarikuvaus, että* $g(x) \leq p(x)$ *kaikilla* $x \in V$. *Tällöin on olemassa koko avaruudessa määritelty lineaarikuvaus* f *siten, että*

(a) $f(x) = g(x)$ *kaikilla* $x \in V$,

(b) $f(x) \leq p(x)$ *kaikilla* $x \in X$.

Sanomme, että f *on kuvauksen* g jatko.

Vektorinormeja käsitellään tutkielmassa usein avaruudessa $\mathbf{F}$, jolla tilanteesta riippuen tarkoitetaan joko avaruutta $\mathbf{R}$ tai $\mathbf{C}$.

2 Vektorinormin ja sisätulon ominaisuuksien määrittäminen

Tutkielmassa tarkastelemme normeja vektoriavaruudessa. Täsmentääksemme funktion ominaisuuksia, joita vaaditaan jotta se on normi, abstrahoimme yleisen käsitteen reaali- tai kompleksiskalaareiden itseisarvosta. Funktio jolla on itseisarvo, on yhden reaali- tai kompleksimuuttujan reaaliarvoinen funktio, kun taas vektorinormeille edellytetään normin olevan useamman muuttujan reaaliarvoinen funktio. Tämä on merkittävin ero. Eräs tällaisista funktioista avaruudessa $\mathbf{C}^n$ on euklidinen pituus $(z^*z)^{1/2}$, mutta on myös muita funktioita, jotka omaavat euklidisen pituuden fundamentaalisia ominaisuuksia. Ne voivat olla paljon miellyttävämpiä käyttää tietyissä asiayhteyksissä.

Tässä tutkielmassa otetaan huomioon reaali- ja kompleksiavaruudet. Kaikki tärkeät tulokset pätevät molemmissa kunnissa, mutta jokaisen tuloksen yhteydessä on oltava johdonmukainen siinä, kumpaa kuntaa käytetään. Tulokset saatetaan usein esittää kunnassa $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$ tai $\mathbf{C}$) ja sitten viitata samaan kuntaan $\mathbf{F}$ argumentin lopussa.

Määritelmä 2.1 [2, s.259] *Olkoon V vektoriavaruus kunnassa $\boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{R}$ tai $\boldsymbol{C}$). Funktio $\|\circ\| : V \to \boldsymbol{R}$ on vektorinormi, jos kaikille $x, y \in V$ pätee:*

1. *ei-negatiivisuus:* $\|x\| \geq 0$
2. *positiivisuus:* $\|x\| = 0$, *jos ja vain jos* $x = 0$
3. *homogeenisuus:* $\|cx\| = |c|\,\|x\|$ *kaikille skalaareille* $c \in \boldsymbol{F}$
4. *kolmioepäyhtälö:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Nämä neljä aksioomaa ovat euklidisen pituuden tuttuja ominaisuuksia. Euklidisella pituudella on myös muita ominaisuuksia, jotka ovat riippumattomia näistä neljästä aksioomasta. Näitä ei tässä tutkielmassa oteta aksioomiksi, sillä ne eivät ole oleellisia yleiselle teorialle.

Funktiota, joka toteuttaa aksioomat 1,3 ja 4 (mutta ei välttämättä aksioomaa 2), kutsutaan vektorin seminormiksi. Seminormi yleistää normin käsitteen.

Lemma 2.2 $[2, s.260]$ *Jos* $\|\circ\|$ *on vektorin seminormi avaruudessa* V*, niin*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

kaikilla $x, y \in V$.

Todistus: Koska $y = x + (y - x)$, saamme

$$\|y\| \leq \|x\| + \|y - x\| = \|x\| + \|x - y\|$$

kolmioepäyhtälöstä 4 ja homogeenisuusaksioomasta 3. Tästä seuraa, että

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

Mutta koska $x = y + (x - y)$, niin

$$\|x\| \leq \|y\| + \|x - y\|$$

kolmioepäyhtälön nojalla. Täten

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Olemme nyt osoittaneet, että

$$\pm\left(\|x\| - \|y\|\right) \leq \|x - y\|,$$

joka on yhtäpitävä väitteen kanssa.

Aivan kuten vektorien normeille, voidaan euklidisesta sisätulosta tiivistää muutama oleellinen ominaisuus ja käyttää niitä aksioomina sisätulon yleisessä teoriassa.

Määritelmä 2.3 $[2, s.260]$ *Olkoon* V *vektoriavaruus yli avaruuden* $\boldsymbol{F}$ $(\boldsymbol{R}$ *tai* $\boldsymbol{C})$. *Funktio* $\langle \circ, \circ \rangle : V \times V \to \boldsymbol{F}$ *on sisätulo, jos sille on voimassa*

1. ei-negatiivisuus: $\langle x, x \rangle \geq 0$,
2. positiivisuus: $\langle x, x \rangle = 0$, jos ja vain jos $x = 0$;
3. additiivisuus: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

4. homogeenisuus: $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$ kaikille skalaareille $c \in \mathbf{F}$ ja

5. konjugaattisymmetrisyys: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

kaikille $x, y, z \in V$.

Esimerkki 2.4 *On osoitettava, että euklidinen sisätulo $\langle x, y\rangle = x^* y$ toteuttaa kaikki viisi yllä olevaa aksioomaa sisätulolle.*

Ratkaisu: Olkoon V vektoriavaruus yli avaruuden $\mathbf{F}$ ($\mathbf{R}$ tai $\mathbf{C}$). Funktio $\langle \circ, \circ\rangle$: $V \times V \to \mathbf{F}$ on sisätulo, jos kaikille $x, y, z \in V$ pätevät sisätulon aksioomat 1 - 5. Olkoon x, y, z mielivaltaisia joukon $\mathbf{F}$ alkioita ja c sellainen skalaari, että $c \in \mathbf{F}$. Nyt

1. ei-negatiivisuus: $\langle x, x\rangle = x^* x = \sum \overline{x}_i x_i = \sum |x_i|^2 \geq 0$.

2. positiivisuus: $\langle x, x\rangle = x^* x = 0$, jos ja vain jos $x = 0$ itseisarvon ja neliön ominaisuuksien nojalla.

3. additiivisuus: pistetulon distributiivisuuden nojalla $\langle x + y, z\rangle = (x+y)^* z = x^* z + y^* z = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

4. homogeenisuus: $\langle cx, y\rangle = cx^* y = c\,(x^* y) = c\langle x, y\rangle$.

5. konjugaattisymmetrisyys: $\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{y^* x} = \overline{\overline{y_1} x_1 + \cdots + \overline{y_n} x_n} = \overline{\overline{y_1} x_1} + \cdots + \overline{\overline{y_n} x_n} = y_1 \overline{x_1} + \cdots + y_n \overline{x_n} = \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n = x^* y = \langle x, y\rangle$ kertolaskun kommutatiivisuuden ja liittoluvun ominaisuuksien nojalla.

Täten voidaan todeta, että funktio $\langle \circ, \circ\rangle : V \times V \to \mathbf{F}$: $\langle x, y\rangle = x^* y$ on sisätulo kaikilla $x, y, z \in V$, sillä se toteuttaa kaikki viisi aksioomaa.

Esimerkki 2.5 *Olkoon $D = diag\,(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \boldsymbol{R}^n$ Tarkastellaan funktiota $\langle x, y\rangle \equiv Dx^* y$. Tutkittava mitkä aksioomat sisätulolle funktio $\langle \circ, \circ\rangle$ toteuttaa ja millä matriisin D ehdoilla funktio on sisätulo.*

Ratkaisu: Olkoon V vektoriavaruus kunnassa $\mathbf{F}$ ($\mathbf{R}$ tai $\mathbf{C}$). Olkoon lisäksi x, y, z mielivaltaisia joukon $\mathbf{F}$ alkioita ja c sellainen skalaari, että $c \in \mathbf{F}$. Tutkitaan nyt, mitkä aksioomat $1-5$ sisätulolle funktio $\langle \circ, \circ \rangle$ toteuttaa.

1. Osoitetaan vastamerkillä, että väite positiivisuudesta ei pidä paikkaansa. Valitaan $x = (0,1)^T$ ja $D = diag\,(1,-1)$. Tällöin $\langle x, x\rangle = Dx^*x = -1 < 0$ ja aksiooma 1 ei pidä paikkaansa.

   Valitaan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ja $D = diag\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Nyt $\langle x, x\rangle = dx^*x = \overline{d_1x_1}x_1 + \overline{d_2x_2}x_2 + \cdots + \overline{d_nx_n}x_n = \overline{d_1}\,\overline{x_1}x_1 + \overline{d_2}\,\overline{x_2}x_2 + \cdots + \overline{d_n}\,\overline{x_n}x_n = \sum_{i=1}^{n} d_i \left|x_i\right|^2$. Neliön positiivisuuden nojalla huomataan, että jotta asiooma 1 on tosi, täytyy kaikkien $d_i \geq 0$.

2. Jos matriisin D kaikki diagonaalialkiot saavat arvon 0, on $\langle x, x\rangle = x^*Dx = 0$, vaikka $x \neq 0$. Täten väite on epätosi. Lisäksi kohdan yksi perusteella on nähtävissä, että matriisin D diagonaalialkioiden tulee olla suurempia kuin nolla, tai muuten väite ei pidä paikkaansa. Valitaan esimerkiksi vektori $x = (1,1)^T$ ja $D = diag\,(1,-1)$. Tällöin $\langle x, x\rangle = 0$, vaikka $x \neq 0$.

3. $\langle x + y, z\rangle = z^*D\,(x + y) = z^*Dx + z^*Dy = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, joten tämä väite pitää paikkansa riippumatta matriisista D.

4. $\langle cx, y\rangle = y^*D\,(cx) = y^*Dcx = cy^*Dx = c\,(y^*Dx) = c\,\langle x, y\rangle$ kaikilla skalaareilla $c \in \mathbf{F}$.

5. $\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{Dy^*x} = \overline{\overline{d_1y_1}x_1 + \cdots + \overline{d_ny_n}x_n} = \overline{\overline{d_1y_1}x_1} + \cdots + \overline{\overline{d_ny_n}x_n} = d_1y_1\overline{x_1} + \cdots + d_ny_n\overline{x_n} = \overline{d_1}\,\overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{d_n}\,\overline{x_n}y_n = \overline{d_1x_1}y_1 + \cdots + \overline{d_nx_n}y_n = Dx^*y = \langle x, y\rangle$ kertolaskun kommutatiivisuuden ja liittoluvun ominaisuuksien nojalla.

Täten voimme todeta, että $\langle \circ, \circ \rangle$ on sisätulo sillä ehdolla, että matriisin D alkiot ovat positiivisia.

Seuraavat sisätulon ominaisuudet voidaan johtaa Määritelmän 2.3 avulla.

Seuraus 2.6 $[2, s.261]$ *Olkoon V vektoriavaruus kunnassa $\boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{R}$ tai $\boldsymbol{C}$) ja olkoon funktio $\langle \circ, \circ \rangle$ kuvaus $V \times V \to \boldsymbol{F}$. Nyt*

(i) $\langle x, cy \rangle = \bar{c} \langle x, y \rangle$

(ii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(iii) $\langle ax + by, cw + dz \rangle = a\bar{c} \langle x, w \rangle + b\bar{c} \langle y, w \rangle + a\bar{d} \langle x, z \rangle + b\bar{d} \langle y, z \rangle$

(iv) $\langle x, y \rangle = 0$ kaikille $y \in V$, jos ja vain jos $x = 0$

(v) $\langle x, \langle x, y \rangle y \rangle = |\langle x, y \rangle|^2$

kaikille $a, b, c, d \in \mathbf{F}$ ja kaikille $x, y, z, w \in V$.

Todistetaan kohta (i) käyttämällä hyväksi Määritelmän 2.3 ja liittoluvun ominaisuuksia. Nyt

$\langle x, cy \rangle = \overline{\langle cy, x \rangle} = \overline{c \langle y, x \rangle} = \bar{c}\, \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{c} \langle x, y \rangle.$

Siivuutetaan muut todistukset.

Kaikille sisätuloille eräs tärkeä ominaisuus on *Cauchyn-Schwarzin* -epäyhtälö.

Lause 2.7 (Cauchyn-Schwarzin -epäyhtälö) $[2, s.261]$ *Jos $\langle \circ, \circ \rangle$ on sisätulo vektoriavaruudessa V kunnassa $\boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{R}$ tai $\boldsymbol{C}$), niin*

$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

kaikilla $x, y \in V$.

Yhtäsuuruus ilmenee, jos ja vain jos x ja y ovat toisistaan lineaarisesti riippuvat, eli $x = \alpha y$ tai $y = \alpha x$ jollakin $\alpha \in \mathbf{F}$.

Todistus: Olkoon $x, y \in V$ annettu. Jos $y = 0$, väite on triviaali. Tutkitaan siis tapausta jolloin $y \neq 0$. Olkoon lisäksi t skalaari siten, että $t \in \mathbf{R}$. Tarkastellaan polynomia

$$p(t) \equiv \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t \langle y, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle,$$

joka on reaalinen toisen asteen polynomi reaalisin kertoimin. Aksiooman 2.3 (1) perusteella tiedämme, että $p(t) \geq 0$ kaikilla reaalisilla t:n arvoilla. Tämän vuoksi polynomilla $p(t)$ ei voi olla reaalisia yksinkertaisia juuria. Polynomin $p(t)$ diskriminantin tulee näin ollen olla ei-positiivinen

$$(2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leq 0,$$

ja täten

(2.1) $(\operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$

Koska tämän epäyhtälön tulee olla voimassa kaikille vektoripareille, täytyy sen olla voimassa myös, kun y:n tilalle asetetaan $\langle x, y \rangle y$. Tällöin saamme epäyhtälön

$$(\operatorname{Re} \langle x, \langle x, y \rangle y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle |\langle x, y \rangle|^2.$$

Mutta valitsemalla $\langle x, y \rangle \langle x, y \rangle = a + ib$, saadaan

$$\operatorname{Re} \langle x, \langle x, y \rangle y \rangle = \operatorname{Re} \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} (a^2 + b^2) = a^2 + b^2 = \operatorname{Re} |\langle x, y \rangle \langle x, y \rangle| = \operatorname{Re} |\langle x, y \rangle|^2 = |\langle x, y \rangle|^2.$$

Täten

(2.2) $|\langle x, y \rangle|^4 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle |\langle x, y \rangle|^2.$

Jos $\langle x, y \rangle = 0$, niin teoreeman väite on triviaali. Jos ei, voimme jakaa yhtälön (2.2) suureella $|\langle x, y \rangle|^2$, jotta saadaan haluttu epäyhtälö. Aksiooman 2 vuoksi polynomilla $p(t)$ voi olla reaalinen (kaksinkertainen) juuri, jos ja vain jos $x+ty=0$ jollain t:n arvolla. Täten yhtäsuuruus voi ilmetä diskriminattiehdossa yhtälössä (2.1), jos ja vain jos x ja y ovat lineaarisesti riippuvat.

Seuraus 2.8 [2, *s.262*] *Jos* $\langle \circ, \circ \rangle$ *on sisätulo vektoriavaruudessa* V*, niin* $\|x\| \equiv (\langle x, x\rangle)^{1/2}$ *on vektorinormi avaruudessa* V*.*

Todistus: Olkoon $x, y, z \in V$. Jotta kuvaus $\|\circ\| : V \to \mathbf{F}$ ($\mathbf{R}$ tai $\mathbf{C}$) on normi, täytyy sen toteuttaa seraavat aksioomat:

1. $\|x\| \geq 0 \, \forall x \in V$

   Koska $\langle \circ, \circ \rangle$ on sisätulo vektoriavaruudessa V ja $\|x\| \equiv (\langle x, x\rangle)^{1/2}$, niin väite on tosi, sillä sisätulon ominaisuuksien mukaan $\langle x, x\rangle \geq 0$, jolloin $\sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$.

2. $\|x\| = 0$, jos ja vain jos x=0.

   Koska sisätulon ominaisuuksien mukaan $\langle x, x\rangle = 0$, jos ja vain jos $x = 0$,

   niin $\sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$, jos ja vain jos $x = 0$.

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \, \forall \alpha \in \mathbf{F}, x \in V$. Nyt

   $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} \, \langle x, x\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \, \|x\|$,

   [Seuraus 2.6].

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, \forall x, y \in V$.

   Käyttämällä sisätulon ominaisuuksia ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä saamme

   $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle =$

   $\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \leq \|x\|^2 + 2 \, |\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 +$

$$2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Normin positiivisuuden nojalla myös $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Täten Seuraus (2.8) on todistettu.

Jos $\|\circ\|$ on vektorinormi siten, että $\|x\| \equiv (\langle x, x\rangle)^{1/2}$ jollekin sisätulolle $\langle \circ, \circ \rangle$, sanomme, että $\|\circ\|$ voidaan johtaa sisätulosta.

3 Esimerkkejä vektorinormeista

Seuraavassa on joitakin esimerkkejä usein tavattavista vektorinormeista.

Määritelmä 3.1 [2, *s.*264] Euklidinen normi, *eli l_2 normi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$ on*

$$\|x\|_2 \equiv \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{1/2}.$$

Tämä on kenties tunnetuin vektorinormi, koska $\|x - y\|_2$ mittaa euklidisen etäisyyden kahden pisteen x ja y välillä ($x, y \in \mathbf{C}^n$). Tämä normi voidaan johtaa euklidisesta sisätulosta, eli $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = x^* x$.

Esimerkki 3.2 *Osoitettava, että $\|\circ\|_2$ on vektorinormi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$.*

Todistus: Jotta $\|\circ\|_2$ on vektorinormi avaruudessa $\mathbf{C}^n$, on sen toteutettava vektorinormin ominaisuudet $1-4$. Valitaan mielivaltaiset $x, y, z \in V$. Tällöin

1. $\|x\|_2 \geq 0 \; \forall x \in V$,

   koska $\|x\|_2 \equiv \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{1/2}$ ja kaikilla $x_i, i = 1, \ldots n$ pätee $|x_i|^2 \geq 0$, niin väite 1 on tosi.

2. $\|x\|_2 = 0$, jos ja vain jos x=0.

   Yhtälöstä $\|x\|_2 \equiv \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{1/2}$ on nähtävissä, että väite on tosi.

3. $\|\alpha x\|_2 = |\alpha| \, \|x\|_2 \, \forall \alpha \in \mathbf{C}, x \in V$.

   $$\|\alpha x\|_2 = \left(|\alpha x_1|^2 + \cdots + |\alpha x_n|^2\right)^{1/2} = \left((|\alpha| \, |x_1|)^2 + \cdots + (|\alpha| \, |x_n|)^2\right)^{1/2} =$$

   $$\left(|\alpha|^2 |x_1|^2 + \cdots + |\alpha|^2 |x_n|^2\right)^{1/2} = \left[|\alpha|^2 \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)\right]^{1/2} =$$

$$|\alpha| \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{1/2} = |\alpha| \, \|x\|_2,$$

joten kohta 3 on tosi.

4. $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \, \forall x, y \in V.$

   Positiivisuuden nojalla riittää osoittaa, että mielivaltaisilla vektoreilla $x, y \in \mathbf{C}^n$ on voimassa

   $$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

   Koska on kyse euklidisesta normista, niin

   $$\|x+y\|^2 = (x+y)\left(\overline{x+y}\right) = (x+y)(\bar{x}+\bar{y}) =$$

   $$x\bar{x} + x\bar{y} + \bar{x}y + y\bar{y} = \|x\|^2 + x\bar{y} + \overline{x\bar{y}} + \|y\|^2 =$$

   $$\|x\|^2 + 2\text{Re }(x\bar{y}) + \|y\|^2.$$

   Nyt itseisarvon määritelmän nojalla

   $$\text{Re }(x\bar{y}) \leq |x\bar{y}|$$

   ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

   $$\|x+y\| \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|\bar{y}\| + \|y\|^2 =$$

   $$(\|x\| + \|y\|)^2.$$

   Täten euklidinen normi toteuttaa kolmioepäyhtälön.

Määritelmä 3.3 $[2, s.265]$ *Normin* $\|\circ\|$ *sanotaan olevan* unitaarisesti invariantti, *jos* $\|Ux\| = \|x\|$ *kaikilla* $x \in \boldsymbol{C}^n$ *ja kaikilla unitaarimatriiseilla* $U \in \mathrm{M}_n$.

Esimerkki 3.4 *Osoitettava, että euklidinen normi* $\|\circ\|_2$ *on unitaarisesti invariantti.*

Todistus: On siis osoitettava, että euklidiselle normille $\|\circ\|_2$ pätee $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ kaikilla $x \in \mathbf{C}^n$.

Unitaarinen $n \times n$ -matriisi kompleksiavaruudessa $\mathbf{C}$ täyttää ehdot $U^*U = UU^* = I_n$, missä I_n on yksikkömatriisi ja matriisi U^* on matriisin U konjugaattitranspoosi. Nyt matriisin U unitaarisuuden nojalla

$$\|Ux\|_2 = x^*U^*Ux = x^*Ix = x^*x = \|x\|_2.$$

Täten euklidinen normi on unitaarisesti invariantti.

Määritelmä 3.5 [2, s.265] Summanormi*, eli l_1 normi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$ on*

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

Normia kutsutaan myös ykkösnormiksi tai Manhattanin normiksi.

Esimerkki 3.6 *Osoitettava, että summanormi on vektorinormi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$, mutta sitä ei ole johdettu sisätulosta.*

Todistus: $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots |x_n|$ on summanormi avaruudessa $V = \mathbf{C}^n$. Valitaan mielivaltaiset alkiot $x, y, z \in V$. On siis todistettava, että näille alkioille pätee aksioomat $1 - 4$. Nyt

1. $\|x\|_1 \geq 0 \, \forall x \in V$

   Koska $|x_i| \geq 0$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$ itseisarvon määritelmän nojalla, niin summanormille

   $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots |x_n|$ on voimassa $\|x\|_1 \geq 0$.

2. $\|x\|_1 = 0$, jos ja vain jos $x = 0$.

   Vastaavasti kuin kohdassa 1.

3. $\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \|x\|_1 \, \forall \alpha \in \mathbf{F}, x \in V$.

   $\|\alpha x\|_1 = |\alpha x_1| + \cdots + |\alpha x_n| = |\alpha| (|x_1| + \cdots + |x_n|) = |\alpha| \|x\|_1$, joten aksiooma 3 on tosi itseisarvon määritelmän nojalla.

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, \forall x, y \in V$.

   Käyttämällä kolmioepäyhtälöä saamme

   $\|x + y\|_1 = |x_1 + y_1| + \cdots + |x_n + y_n| \leq$

   $|x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| = |x_1| + \cdots + |x_n| + |y_1| + \cdots + |y_n| =$

   $\|x\|_1 + \|y\|_1$.

Koska aksioomat $1 - 4$ ovat voimassa summanormille, niin se on vektorinormi avaruudessa $\mathbf{C}^n$.

On vielä osoitettava, että summanormia ei ole johdettu sisätulosta. Jotta normi olisi johdettu sisätulosta, tulee sille olla voimassa suunnikassääntö [6, s.51]

$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 2 \|x\|_1^2 + 2 \|y\|_1^2$.

Valitaan nyt vektoreiksi $x = (1, 0)^T$ ja $y = (0, 2)^T$. Tällöin

$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = (|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|)^2 + (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)^2 =$

$(|1| + |2|)^2 + (|1| + |-2|)^2 = 18$, kun taas.

$2 \|x\|_1^2 + 2 \|y\|_1^2 = 2 (|x_1| + |x_2|)^2 + 2 (|y_1| + |y_2|)^2 = 2 (|1|)^2 + 2 (|2|)^2 = 10$.

Koska yhtäsuuruus ei ole voimassa, ei normia ole johdettu sisätulosta.

Määritelmä 3.7 [2, s.265] Maksiminormi*, eli l_∞ normi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$ on*

$\|x\|_\infty \equiv max \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Maksiminormi on vektorinormi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$. Sivuutetaan todistus.

Määritelmä 3.8 $[2, s.265]$ l_p *-normi avaruudessa* $\boldsymbol{C}^n$ *on*

$\|x\|_p \equiv (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$

kaikille $p \geq 1$.

Edeltävät esimerkit vektorinormeista ovat kaikki olleet normeja avaruudessa $\mathbf{C}^n$. Niitä voidaan käyttää myös vektorinormien generoimisessa missä tahansa äärellisuloitteisessa reaali- tai kompleksivektoriavaruudessa V. Jos $\beta = \left\{b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}\right\}$ on vektoriavaruuden V kanta, niin

$x \rightarrow [x]_\beta \equiv [x_1, \ldots, x_n]^T \in \mathbf{C}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i b^{(i)}$

on isomorfismi vektoriavaruudelta V avaruudelle $\mathbf{C}^n$. Jos $\|\circ\|$ on mikä tahansa vektorinormi avaruudessa $\mathbf{C}^n$, niin määritellään

$\|x\|_\beta \equiv \left\|[x]_\beta\right\| = \left\|[x_1, \ldots, x_n]^T\right\|$, $x = \sum_{i=1}^n x_i b^{(i)}$.

On osoitettavissa, että tämä on vektorinormi avaruudessa V $[2, s.265 - 266]$. Sivuutetaan todistus.

Määritelmä 3.9 $[2, s.266]$ *Matriisin* $B \in M_n$ *sanotaan olevan* isometria *vektorinormille* $\|\circ\|$ *avaruudessa* $\boldsymbol{C}^n$*, jos*

$\|Bx\| = \|x\|$

kaikilla $x \in \boldsymbol{C}^n$.

Vektorinormin määritelmä ei vaadi, että vektoriavaruus V olisi äärellisuloitteinen. Avaruus V voi esimerkiksi olla kaikki jatkuvat reaali- ja kompleksiarvoiset funktiot sisältävä vektoriavaruus reaalilukuvälillä $[a, b]$.

Esimerkki 3.10 $[2, s.266]$ *Osa seuraavista esimerkkinormeista avaruudessa* $C[a,b]$ *on vastaavanlaisia jo avaruudessa* $\boldsymbol{C}^n$ *määritellyille. Esimerkiksi*

L_2 *-normi:* $\|f\|_2 \equiv \left[\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right]^{1/2}$

L_1 *-normi:* $\|f\|_1 \equiv \int_a^b |f(t)| \, dt$

L_p *-normi:* $\|f\|_p \equiv \left[\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right]^{1/p}$

L_∞ *-normi:* $\|f\|_\infty \equiv max \{|f(x)| : x \in [a,b]\}$

ovat kaikki normeja avaruudessa $C[a,b]$.

4 Vektorinormien algebrallisia ominaisuuksia

Annetulle normille (tai normeille) voidaan konstruoida uusia normeja usealla eri tavalla. On helppo osoittaa, että kahden vektorinormin summa ja mikä tahansa positiivinen vektorinormin kerroin on jälleen vektorinormi. Sama pätee vektorin seminormeille. Voidaan myös helposti osoittaa, että jos $\|\circ\|_\alpha$ ja $\|\circ\|_\beta$ ovat vektorinormeja, niin funktio $\|\circ\|$, joka on määritelty $\|x\| \equiv max\left\{\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta\right\}$, on myös vektorinormi. Nämä huomiot ovat erityistapauksia ja seurauksia seuraavista tuloksista.

Lause 4.1 $[2, s.268]$ *Olkoon* $\|\circ\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\circ\|_{\alpha_m}$ *m kappaletta annettuja vektorinormeja vektoriavaruudessa* V *yli* $\boldsymbol{F}$*:n* ($\boldsymbol{R}$ *tai* $\boldsymbol{C}$) . *Olkoon* $\|\circ\|_\beta$ *vektorinormi avaruudessa* $\boldsymbol{R}^m$ *siten, että* $\|y\|_\beta \leq \|y+z\|_\beta$ *kaikille vektoreille* $y, z \in \boldsymbol{R}^m$, *joiden alkiot ovat positiivisia. Tällöin funktio* $\|\circ\| : V \to \boldsymbol{R}$, *joka on määritelty* $\|x\| \equiv \left\|\left[\|x\|_{\alpha_1}, \ldots, \|x\|_{\alpha_m}\right]^T\right\|_\beta$ *on vektorinormi avaruudessa* V.

Oletus normin $\|\circ\|_\beta$ monotonisuudesta teoreemassa takaa, että konstruoitu funktio $\|\circ\|$ toteuttaa kolmioepäyhtälön. Kaikilla l_p -normeilla on tämä monotonisuusominaisuus, kuten on myös jokaisella vektorinormilla $\|x\|_\beta$ (avaruudessa $\mathbf{R}^m$), joka on funktio vain joukon X alkioiden absoluuttisilla arvoilla. On myös olemassa vektorinormeja, joilla ei ole tätä ominaisuutta.

Esimerkki 4.2 *Olkoon* $m = 2$, $V = \boldsymbol{R}^2$ *ja* $\|x\|_\beta = |x_1 - x_2| + |x_2|$. *Osoitettava, että* $\|\circ\|_\beta$ *on vektorinormi avaruudessa* $\boldsymbol{R}^2$, *mutta funktio* $\|x\| \equiv \left\|[\|x\|_\infty, \|x\|_1]^T\right\|_\beta = min\{|x_1|, |x_2|\} + |x_1| + |x_2|$ *ei ole. Mitkä vektorin aksioomista* $\|\circ\|$ *toteuttaa?*

Ratkaisu: Osoitetaan ensin, että $\|\circ\|_\beta$ on vektorinormi avaruudessa $\mathbf{R}^2$. Valitaan mielivaltaiset $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^2$ ja osoitetaan, että näille pätee vektorinormin aksioomat $1-4$ avaruudessa $V = \mathbf{R}^2$. Nyt

1. $\|x\|_\beta \geq 0 \ \forall x \in V$

   Kolmioepäyhtälön perusteella

   $0 \leq |x_1| = (|x_1| - |x_2|) + |x_2| \leq |x_1 - x_2| + |x_2| = \|x\|_\beta$, joten väite on tosi.

2. $\|x\|_\beta = 0$, jos ja vain jos x=0.

   $|x_1 - x_2| + |x_2| = 0$ jos $|x_1 - x_2| = -|x_2|$. Tämä on tosi, jos ja vain jos $|x_1 - x_2| = 0$ ja $|x_2| = 0$, eli kun $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$.

3. $\|\alpha x\|_\beta = |\alpha| \|x\|_\beta \forall \alpha \in \mathbf{R}, x \in V$.

   Vektorinormin määritelmän perusteella

   $\|\alpha x\|_\beta = |\alpha x_1 - \alpha x_2| + |\alpha x_2| = |\alpha (x_1 - x_2)| + |\alpha| |x_2| =$

   $|\alpha| |x_1 - x_2| + |\alpha| |x_2| = |\alpha| (|x_1 - x_2| + |x_2|) = |\alpha| \|x\|_\beta$,

   joten $\|\alpha x\|_\beta$ toteuttaa aksiooman 3.

4. $\|x + y\|_\beta \leq \|x\|_\beta + \|y\|_\beta \forall x, y \in V$.

   Kolmioepäyhtälön perusteella

   $\|x + y\|_\beta = |(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)| + |x_2 + y_2| =$

   $|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)| + |x_2 + y_2| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 + y_2| \leq$

   $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2| + |y_2| = \|x\|_\beta + \|y\|_\beta$,

   joten $\|\alpha x\|_\beta$ toteuttaa myös aksiooman 4.

Koska $\|\alpha x\|_\beta$ toteuttaa aksioomat $1 - 4$, on se vektorinormi avaruudessa $\mathbf{R}^2$.

Nyt täytyy vielä todistaa, että funktio $\|x\| \equiv \left\| [\|x\|_\infty, \|x\|_1]^T \right\|_\beta = min \{|x_1|, |x_2|\} + |x_1| + |x_2|$ ei ole vektorinormi avaruudessa $\mathbf{R}^2$.

Valitaan vektoreiksi $x = [1, 0]^T$ ja $y = [0, 1]^T$. Muodostetaan nyt normi $\|x + y\|$ ja osoitetaan, että se ei toteuta aksioomaa 4:

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, \forall x, y \in V.$

Nyt

$\|x + y\| = min\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} + |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| = 1 + 1 + 1 = 3$

ja

$\|x\| + \|y\| = min\{|x_1|, |x_2|\} + |x_1| + |x_2| + min\{|y_1|, |y_2|\} + |y_1| + |y_2| =$

$0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 2.$

Koska nyt $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$, niin vektoripari $x = [1, 0]^T$ ja $y = [0, 1]^T$ ei toteuta aksioomaa 4. Täten funktio $\|x\| \equiv \left\| [\|x\|_\infty, \|x\|_1]^T \right\|_\beta = min\{|x_1|, |x_2|\} + |x_1| + |x_2|$ ei ole vektorinormi avaruudessa $\mathbf{R}^2$.

Toinen tapa konstruoida uusia normeja vanhoista on annettu seuraavassa tuloksessa.

Lause 4.3 [2, s.268] *Jos $\|\circ\|$ on vektorinormi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$ ja $T \in M^n$ on ei-singulaarinen matriisi, niin $\|\circ\|_T$, missä $\|x\|_T \equiv \|Tx\|$, on myös vektorinormi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$.*

Uusia normeja voidaan konstruoida vanhoista myös käyttämällä hyväksi duaalisuuden käsitettä. Metodia käsitellään seuraavan luvun lopussa.

5 Vektorinormien analyyttisiä ominaisuuksia

Aikaisemmassa kahdessa luvussa esitetyt esimerkit selventävät, että on useita eri funktioita $\|\circ\| : V \to \mathbf{R}$ jotka toteuttavat normeille asetetut aksioomat. On käytännöllistä käyttää useita erilaisia normeja, sillä toinen normi voi toisinaan olla määrätyssä tilanteessa käytännöllisempi kuin joku toinen normi. Esimerkiksi l_2 -normia on usein helppo käyttää optimoinnin ongelmissa, koska se on jatkuvasti differentoituva (lukuunottamatta origoa). Toisaalta tilastotieteessä suositaan l_1 -normia, joka on differentoituva suppeammassa joukossa, sillä se johtaa estimaatteihin jotka ovat vahvempia kuin klassiset regressioestimaattorit. Normia l_∞ taas on kuitenkin usein luonnollisinta käyttää, sillä siinä tarkastellaan suppenemista alkio kerrallaan. Valitettavasti sitä voi olla kuitenkin analyyttisesti ja algebrallisesti hankala käyttää. Todellisissa sovelluksissa normi, johon teoria luonnollisimmin perustuu ja normi, joka on tilanteessa helpoin käyttää laskutoimitusten yhteydessä, eivät välttämättä aina kohtaa. Tämän vuoksi on tärkeää tiedostaa eri normien väliset suhteet. Onneksi normit ovat usein ”yhteneviä” tietyllä vahvalla tavalla, kun on kyseessä äärellisulottuvuus.

Tämän luvun analyysissä käytetään peruskäsitteenä lukujonon suppenemista ja vektorinormeja käytetään mittaamaan vektoreiden lukujonojen suppenemista.

Määritelmä 5.1 $[2, s.269]$ *Olkoon V vektoriavaruus yli avaruuden $\boldsymbol{R}$ tai $\boldsymbol{C}$, ja olkoon $\|\circ\|$ avaruuden V normi. Sanotaan, että lukujono $\left\{x^{(k)}\right\}$ avaruuden V vektoreita suppenee kohti vektoria $x \in V$ (suhteessa normiin $\|\circ\|$), jos ja vain jos $\left\|x^{(k)} - x\right\| \to 0$, kun $k \to \infty$. Jos $\left\{x^{(k)}\right\}$ suppenee kohti vektoria x suhteessa normiin $\|\circ\|$, voidaan kirjoittaa $x^{(k)} \overset{\|\circ\|}{\to} x$ tai $lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ suhteessa normiin $\|\circ\|$.*

On tärkeää tehdä selväksi, mikä normi on kyseessä, kun kyseenalaistetaan suppenemista. Ongelmia ilmenee kun pohditaan, voiko annettu vektorilukujono supeta suhteessa jonkin normin suhteen, mutta ei toisen normin suhteen. Tämä monimerkityksellisyys voi olla ongelma, kun on kyseessä äärettömulotteinen vektoriavaruus.

Esimerkki 5.2 $[2, s.270]$ *Olkoon* $\{f_k\}$ *jono funktioita avaruudessa* $C[0,1]$ *määritelty seuraavalla tavalla:*

$f_k(x) = 0,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{k}$

$f_k(x) = 2\left(k^{3/2}x - k^{1/2}\right),\ \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{3}{2k}$

$f_k(x) = 2\left(-k^{3/2}x + 2k^{1/2}\right),\ \frac{3}{2k} \leq x \leq \frac{2}{k}$

$f_k(x) = 0,\ \frac{2}{k} \leq x \leq 1,$

kun $k = 2, 3, 4, \ldots$. *Voidaan laskea, että*

$\|f_k\|_1 = \frac{1}{2}k^{-1/2} \to 0,$ *kun* $k \to 0,$ $\|f_k\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *kaikilla* $k,$ $\|f_k\|_\infty =$

$k^{1/2} \to \infty,$ *kun* $k \to \infty.$

Raja-arvo $lim_{k\to\infty}f_k = 0$ suhteessa normiin L_1, mutta ei suhteessa normeihin L_2 ja L_∞.

Esimerkki 5.3 $[2, s.270]$ *Osoitettava kolmioepäyhtälön avulla, että jos* $\|\circ\|$ *on vektorinormi,* $x^{(k)} \overset{\|\circ\|}{\to} x$ *ja* $x^{(k)} \overset{\|\circ\|}{\to} y$*, niin* $x = y$.

Todistus: Tehdään vastaoletus, että $x \neq y$. Sovelletaan raja-arvon määritelmää ja valitaan $\epsilon = \|x - y\|/2$, $\epsilon > 0$. Koska $x^{(k)} \overset{\|\circ\|}{\to} x$, on olemassa sellainen $n_1 \in \mathbf{Z}_+$ siten, että

$n \geq n_1 \Rightarrow \left\|x^{(k)} - x\right\| < \frac{\|x-y\|}{2}.$

Toisaalta, koska $x^{(k)} \overset{\|\circ\|}{\to} y$, on olemassa sellainen $n_2 \in \mathbf{Z}_+$ siten, että

$n \geq n_2 \Rightarrow \left\|x^{(k)} - y\right\| < \frac{\|x-y\|}{2}.$

Olkoon n_0 suurempi luvuista n_1 ja n_2. Kun $n > n_0$, saamme lisäämällä ja vähentämällä $x^{(k)}$:n sekä käyttämällä kolmioepäyhtälöä

$\|x - y\| = \left\|x - x^{(k)} + x^{(k)} - y\right\| \leq \left\|x - x^{(k)}\right\| + \left\|x^{(k)} - y\right\| < \frac{\|x-y\|}{2} + \frac{\|x-y\|}{2}$

$= \|x - y\|,$

mistä seuraa ristiriita. Täten vastaoletus on väärä ja $x = y$.

Onneksi Esimerkin 4.2 ilmiö ei voi tapahtua äärellisulotteisen vektoriavaruuden ollessa kyseessä. Jotta tämä olisi helpommin nähtävissä, tarvitsemme lemman normien jatkuvuuden ominaisuuksista.

Lemma 5.4 [2, *s.*271] *Olkoon* $\|\circ\|$ *normi vektoriavaruudessa* V *yli avaruuden* $\boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{R}$ *tai* $\boldsymbol{C}$) *ja olkoon vektorit* $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)} \in V$ *annettu. Funktio* $g : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{R}$, *joka on määritelty* $g(z_1, z_2, \ldots, z_m) \equiv \left\|z_1 x^{(1)} + z_2 x^{(2)} + \cdots + z_m x^{(m)}\right\|$, *on tasaisesti jatkuva funktio.*

Todistus: Olkoon $u = \sum_{i=1}^{m} u_i x^{(i)}$ ja $v = \sum_{i=1}^{m} v_i x^{(i)}$ ja lasketaan

$|g(u_1, u_2, \ldots, u_m) - g(v_1, v_2, \ldots, v_m)| = |\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| =$

$\left\|\sum_{i=1}^{m} (u_i - v_i) x^{(i)}\right\| = \sum_{i=1}^{m} |u_i - v_i| \left\|x^{(i)}\right\| \leq C max_{1 \leq i \leq m} |u_i - v_i|$,

missä $C \equiv m \ max_{1 \leq i \leq m} \left\|x^{(i)}\right\|$.

Ensimmäinen epäyhtälö voidaan johtaa Lemmasta 2.2. On huomattavissa, että äärellinen vakio C on riippuvainen ainakin normista $\|\circ\|$ ja m kappaleesta vektoreita $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)} \in V$. Jos vektorit $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ ovat kaikki nollavektoreita, ei ole mitään osoitettavaa. Jos vektorit taas eivät ole nollavektoreita, niin $C > 0$. Jotta saadaan

$|g(u_1, u_2, \ldots, u_m) - g(v_1, v_2, \ldots, v_m)| < \epsilon$,

voidaan valita $|u_i - v_i| < \epsilon / C$.

Vaikka vektoriaaruuden V ei tarvitse olla äärellisuloitteinen lemmaa varten, on tärkeää, että vektorien $x^{(i)}$ lukumäärä on äärellinen.

Avaruuden V äärellisulotteisuus on olennaista seuraavien lauseiden kanssa.

Käytetään seuraavan Lauseen 5.6 todistuksessa apuna seuraavaa apulausetta:

Apulause 5.5 (Weierstrassin -lause) $[2, s.541]$ *Olkoon S äärellisulotteisen reaali- tai kompleksivektoriavaruuden V kompakti osajoukko. Jos $f : S \to \boldsymbol{R}$ on jatkuva funktio, niin on olemassa piste $x_{min} \in S$ siten, että*

$$f(x_{min}) \leq f(x)$$

kaikilla $x \in S$. Lisäksi on olemassa piste $x_{max} \in S$ siten, että

$$f(x) \leq f(x_{max}) \text{ kaikilla } x \in S.$$

Toisin sanoen, funktio f saa miniminsä ja maksiminsa joukossa S.

Lause 5.6 $[2, s.271]$ *Olkoon f_1 ja f_2 kaksi reaaliarvoista funktiota äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa V yli avaruuden $\boldsymbol{F}$. Olkoon $\beta = \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right\}$ vektoriavaruuden V kanta. Oletetaan, että f_1 ja f_2 ovat*

(a) positiivisia: $f_i(x) \geq 0$ kaikilla $x \in V$ ja $f_i(x) = 0$, jos ja vain jos $x = 0$;

(b) homogeenisia: $f_i(\alpha x) = |\alpha| f_i(x)$ kaikilla $\alpha \in \boldsymbol{F}$ ja kaikilla $x \in V$; ja

(c) jatkuvia: $f_i(x(z))$ on jatkuva avaruudessa $\boldsymbol{F}^n$, missä

$$z = [z_1, z_2, \ldots, z_n]^T \in \boldsymbol{F}^n \text{ ja } x(z) \equiv z_1 x^{(1)} + z_2 x^{(2)} + \cdots + z_n x^{(n)}.$$

Nyt on olemassa äärelliset positiiviset vakiot C_m ja C_M siten, että

$$C_m f_1(x) \leq f_2(x) \leq C_M f_1(x)$$

kaikilla vektoreilla $x \in V$.

Todistus: Todistuksessa käytetään apulauseena aiemmin esiteltyä Weierstrassin lausetta.

Määritellään nyt funktio h siten, että $h(z) \equiv f_2(x(z)) / f_1(x(z))$ euklidisessa yksikköympyrässä $S = \{x \in \mathbf{F}^n : \|z\|_2 = 1\}$. Tämä on kompakti joukko avaruudessa $\mathbf{F}^n$. Tulee huomata, että funktion $h(z)$ nimittäjä ei tule nollaksi kohdan (a) nojalla joukossa S. Tästä seuraa, että kohdan (c) nojalla funktio on jatkuva joukossa S. Käyttämäällä apuna Weierstrassin -lausetta voidaan todeta, että jatkuva funktio $h(z)$ saavuttaa äärellisen positiivisen maksimin C_M ja postiivisen minimin C_m kompaktissa joukossa S. Täten

$$C_m f_1(x(z)) \leq f_2(x(z)) \leq C_M f_1(x(z))$$

kaikille $z \in S$. Koska $z/\|z\|_2 \in S$ kaikilla $z \in \mathbf{F}^n$ $(z \neq 0)$, homogeenisuusominaisuus takaa, että epäyhtälöt pitävät paikkansa kaikille nollasta eroaville $z \in \mathbf{F}^n$. Ne pitävät paikkansa triviaalisti, kun $z = 0$, sillä $f_i(0) = 0$. Kaikille vektoreille $x \in V$ pätee taas muoto $x = x(z)$ jollain $z \in \mathbf{F}^n$. Koska β on kanta, väitetyt epäyhtälöt pätevät kaikilla $x \in V$.

Määritelmä 5.7 [2, s.272] *Olkoon V reaali- tai kompleksivektoriavaruus. Olkoon lisäksi f funktio $f : V \to \boldsymbol{R}$, joka toteuttaa kolme hypoteesia positiivisuudesta, homogeenisuudesta ja jatkuvuudesta Lauseessa 5.6. Tällöin funktion f sanotaan olevan* esinormi.

Tärkein esimerkki esinormien luokasta on tietysti vektorinormit: Lemman 5.4 mukaan jokainen vektorinormi täyttää Lauseen 5.6 oletuksen jatkuvuudesta. Esinormi, joka toteuttaa kolmioepäyhtälön, on vektorinormi.

Seuraus 5.8 [2, s.272] *Olkoon $\|\circ\|_\alpha$ ja $\|\circ\|_\beta$ mitkä tahansa kaksi vektorinormia äärellisulotteisessa reaali- tai kompleksivektoriavaruudessa V. Tällöin on olemassa äärelliset positiiviset vakiot C_M ja C_m siten, että*

$$C_m \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C_M \|x\|_\alpha$$

kaikilla vektoreilla $x \in V$.

Esimerkki 5.9 *Olkoon* $x = [x_1, x_2]^T \in \boldsymbol{R}^2$. *Pohdittava seuraavia normeja* $\|x\|_\alpha \equiv \left\|[10x_1, x_2]^T\right\|_\infty$ *ja* $\|x\|_\beta \equiv \left\|[x_1, 10x_2]^T\right\|_\infty$ *avaruudessa* $\boldsymbol{R}^2$. *Osoitettava, että funktio* $f(x) \equiv \left(\|x\|_\alpha \|x\|_\beta\right)^{1/2}$ *on esinormi avaruudessa* $\boldsymbol{R}^2$, *mutta ei normi.*

Ratkaisu: Tutkitaan ensin, onko funktio f esinormi, eli toteuttaako se kohdat $(a) - (c)$ Lauseessa 5.6. Valitaan mielivaltainen vektoriaaruuden $\mathbf{R}^2$ vektori x. Tällöin

(a) positiivisuus: $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^2$ ja $f(x) = 0$, jos ja vain jos $x = 0$;

$f(x) = \left(\left\|[10x_1, x_2]^T\right\|_\infty \left\|[x_1, 10x_2]^T\right\|_\infty\right)^{1/2} =$

$(max\{|10x_1|, |x_2|\} * max\{|x_1|, |10x_2|\})^{1/2} =$

$(max\{10|x_1|, |x_2|\} * max\{|x_1|, 10|x_2|\})^{1/2}$.

Koska $|x_1|, |x_2| \geq 0$, niin täytyy olla voimassa $f(x) \geq 0$. Lisäksi, jotta $f(x) = 0$, niin $max\{|x_1|, |x_2|\} = 0$. Täten itseisarvon positiivisuuden nojalla $x = [0, 0]^T$. Funktio on siis positiivinen.

(b) homogeenisuus: $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ kaikilla $\alpha \in \mathbf{F}$ ja kaikilla $x \in \mathbf{R}^2$

Nyt vektorille $x = [x_1, x_2]^T$ on $\alpha x = [\alpha x_1, \alpha x_2]^T$. Täten

$(max\{|10\alpha x_1|, |\alpha x_2|\} * max\{|\alpha x_1|, |10\alpha x_2|\})^{1/2} =$

$(|\alpha| max\{|10x_1|, |x_2|\} * |\alpha| max\{|x_1|, |10x_2|\})^{1/2} =$

$|\alpha| (max\{|10x_1|, |x_2|\} * max\{|x_1|, |10x_2|\})^{1/2}$

pistetulon ja itseisarvon laskusääntöjen nojalla. Funktio on täten homogeeninen.

(c) jatkuvuus: On aiemmin Määritelmässä 3.7 todettu, että maksiminormi on vektorinormi. Täten normit $\|x\|_\alpha$ ja $\|x\|_\beta$ ovat vektorinormeja. Lemman 5.4 nojalla jokainen vektorinormi täyttää Lauseen 5.6 oletuksen jatkuvuudesta ja täten normit $\|x\|_\alpha$ ja $\|x\|_\beta$ ovat jatkuvia. Jatkuvuuden määritelmän nojalla myös näiden tulon muodostava funktio $\|x\|_\alpha \|x\|_\beta$ (≥ 0) on jatkuva. Koska neliöjuurifunktio $(y)^{1/2}$ on jatkuva funktio kaikilla $y \geq 0$, on myös näiden funktioiden yhdiste $\left(\|x\|_\alpha \|x\|_\beta\right)^{1/2}$ jatkuva funktion jatkuvuuden määritelmän nojalla ja täten funktio f toteuttaa aksiooman jatkuvuudesta.

Täten funktio $f(x)$ on esinormi avaruudessa $\mathbf{R}^2$.

Nyt tulee vielä osoittaa, että funktio ei ole vektorinormi. Todistetaan, että vektorinormin määritelmän kohta 4 ei ole tosi käsittelemämme funktion f ollessa kyseessä. Tehdään se vastaesimerkin avulla. Olkoon vektorit x_1 ja x_2 määritelty seuraavalla tavalla: $x_1 = [1,0]^T$ ja $x_2 = [0,1]^T$. Tällöin

$$f\left([1,1]^T\right) = f\left([1,0]^T + [0,1]^T\right) = 10 > 2\sqrt{10} = f\left([1,0]^T\right) + f\left([0,1]^T\right).$$

Koska tässä yhtälössä $f(x_1 + x_2) > f(x_1) + f(x_2)$,

niin funktio ei toteuta vektorinormin määritelmää.

Esimerkki 5.10 *Olkoon* $\|\circ\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\circ\|_{\alpha_k}$ *vektorinormeja avaruudessa* V. *Osoitettava, että* $f(x) \equiv \left(\|x\|_{\alpha_1} \cdots \|x\|_{\alpha_k}\right)^{1/k}$ *ja* $h(x) \equiv min\left\{\|x\|_{\alpha_1}, \ldots, \|x\|_{\alpha_k}\right\}$ *ovat esinormeja avaruudessa* V.

Todistus: Jotta funktiot $f(x)$ ja $h(x)$ ovat esinormeja avaruudessa V, tulee niiden toteuttaa Lauseen 5.6 kolme hypoteesia positiivisuudesta, homogeenisuudesta ja jatkuvuudesta. Valitaan mielivaltainen vektori $x \in V$ ja tarkastellaan funktioita rinnakkain.

(a) positiivisuus: $f(x), h(x) \geq 0$ kaikilla $x \in V$ ja $f(x), g(x) = 0$, jos ja vain jos $x = 0$;

Koska $\|\circ\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\circ\|_{\alpha_k}$ ovat vektorinormeja avaruudessa V, on niille voimassa $\|\circ\|_{\alpha_i} \geq 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Täten $f(x) \geq$ ja $h(x) \geq 0$ kaikilla $x \in V$. On myös selvästi nähtävissä, että koska $\|x\|_{\alpha_i} = 0$ $(\forall i = 1, 2, \ldots, k)$, jos ja vain jos $x = 0$ vektorinormin määritelmän perusteella, on lauseen (a) loppuosa myös tosi molemmille funktioille.

(b) homogeenisuus: $f(\beta x) = |\beta| f(x)$ ja $g(\beta x) = |\beta| g(x)$ kaikilla $\alpha \in \mathbf{F}$ ja kaikilla $x \in V$

Tarkastellaan ensin funktiota $f(x) \equiv \left(\|x\|_{\alpha_1} \cdots \|x\|_{\alpha_k}\right)^{1/k}$. Nyt vektorinormin määritelmän perusteella funktiolle f on voimassa

$$f(\beta x) \equiv \left(\|\beta x\|_{\alpha_1} \cdots \|\beta x\|_{\alpha_k}\right)^{1/k} = \left(|\beta| \|x\|_{\alpha_1} \cdots |\beta| \|x\|_{\alpha_k}\right)^{1/k}.$$

Nyt

$$\left((|\beta|)^k \|x\|_{\alpha_1} \cdots \|x\|_{\alpha_k}\right)^{1/k} = |\beta| \left(\|x\|_{\alpha_1} \cdots \|x\|_{\alpha_k}\right)^{1/k} = |\beta| f(x).$$

Täten funktio f on homogeeninen. Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $h(x) \equiv min\left\{\|x\|_{\alpha_1}, \ldots, \|x\|_{\alpha_k}\right\}$. Nyt

$$h(\beta x) \equiv min\left\{\|\beta x\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\beta x\|_{\alpha_k}\right\} = min\left\{|\beta| \|x\|_{\alpha_1}, \ldots, |\beta| \|x\|_{\alpha_k}\right\}.$$

Tämä yhtälö voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$|\beta| \, min\left\{\|x\|_{\alpha_1}, \ldots, \|x\|_{\alpha_k}\right\} = |\beta| h(x),$$

sillä $|\beta|$ on kertoimena jokaisessa $\|x\|_{\alpha_i}, i = 1, 2, \ldots, k$. Täten myös funktio h on homogeeninen.

(c) jatkuvuus: Koska $\|\circ\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\circ\|_{\alpha_k}$ ovat vektorinormeja avaruudessa V, niin Lemman 5.4 nojalla ne toteuttavat Lauseen 5.6 oletuksen jatkuvuudesta. Tarkastellaan ensin funktiota $f(x)$. Koska jatkuvien funktioiden tulo on jatkuva, on myös $\left(\|x\|_{\alpha_1} \cdots \|x\|_{\alpha_k}\right)$ jatkuva. Koska potenssifunktio $(\circ)^{\frac{1}{k}}$ on jatkuva, on myös funktio $f(x) \equiv \left(\|x\|_{\alpha_1} \cdots \|x\|_{\alpha_k}\right)^{1/k}$ jatkuva jatkuvuuden määritelmän perusteella (yhdisteen jatkuvuus). Tarkastelaan seuraavaksi funktiota $h(x) \equiv min\left\{\|x\|_{\alpha_1}, \ldots, \|x\|_{\alpha_k}\right\}$. Tämä on jatkuva, sillä kaikki normit $\|\circ\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\circ\|_{\alpha_k}$ ovat jatkuvia. Täten molemmat funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ toteuttavat kohdat $(a) - (c)$ ja ovat näin esinormeja.

Seuraus 5.11 $[2, s.272]$ *Olkoon* $\|\circ\|_\alpha$ *ja* $\|\circ\|_\beta$ *ovat vektorinormeja äärellisulotteisessa reaali-, tai kompleksivektoriavaruudessa. Jos* $\left\{x^{(k)}\right\}$ *on annettu jono vektoreita, niin tällöin* $lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ *suhteessa vektorinormiin* $\|\circ\|_\alpha$*, jos ja vain jos* $lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ *suhteessa vektorinormiin* $\|\circ\|_\beta$*.*

Todistus: Koska

$$C_m \left\|x^{(k)} - x\right\|_\alpha \leq \left\|x^{(k)} - x\right\|_\beta \leq C_M \left\|x^{(k)} - x\right\|_\alpha$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$, on voimassa

$\left\|x^{(k)} - x\right\|_\alpha \to 0$, jos ja vain jos $\left\|x^{(k)} - x\right\|_\beta \to 0$.

Määritelmä 5.12 $[2, s.273]$ *Kahden normin sanotaan olevan yhtenevät, jos aina kun sarja kun sarja* $\left\{x^{(k)}\right\}$ *suppenee kohti vektoria* x *suhteessa ensimmäiseen normiin, niin se suppenee kohti samaa vektoria* x *suhteessa toiseen normiin. Seuraus 5.11 toteaa, että äärellisulotteiselle reaali- tai kompleksivektoriavaruudelle kaikki vektorinormit ovat yhteneviä. Esimerkissä 5.2 oli nähtävissä, että kaksi erilasta normia eivät välttämättä ole yhteneviä ääretönulotteisessa avaruudessa.*

Koska kaikki vektorinormit ovat yhteneviä vektorinormin $\|\circ\|_\infty$ suhteen avaruudessa $\mathbf{R}^n$ tai $\mathbf{C}^n$, saamme

$$lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

suhteessa mihin tahansa vektorinormiin, jos ja vain jos

$lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Komponenttikohtainen suppeneminen (suhteessa mihin tahansa kantaan) on yhtenevää suppenemiseen suhteessa mihin tahansa vektorinormiin.

Toinen tärkeä seuraus Määritelmästä 5.12 on, että kaikkien vektorinormien yksikköpallot ja yksikköympyrät ovat kompakteja. Tästä seuraa, että minkä tahansa vektorinormin jatkuva (kompleksisia arvoja saava) funktio yksikköpallossa on rajoitettu ja se saa maksiminsa ja miniminsä, jos se on reaaliarvoinen.

Seuraus 5.13 [2, *s.*273] *Olkoon V vektoriavaruus yli avaruuden $\boldsymbol{R}^n$ tai $\boldsymbol{C}^n$ ja olkoon $f(\circ)$ esinormi avaruudessa V. Joukot $\{x : f(x) \leq 1\}$ ja $\{x : f(x) = 1\}$ ovat tällöin kompakteja. Erityisesti, jos $\|\circ\|$ on vektorinormi avaruudessa V, niin suljettu yksikköpallo $\{x : \|x\| \leq 1\}$ ja yksikköympyrä $\{x : \|x\| = 1\}$ ovat molemmat kompakteja.*

Todistus: Lauseen 5.6 nojalla on olemassa eräs $C > 0$ siten, että $\|x\|_2 \leq Cf(x)$ kaikilla $x \in V$. Täten joukko $\{x : f(x) \leq 1\}$ on rajoitettu ja se sisältyy tavalliseen euklidiseen palloon (jonka säde on C ja keskipiste origossa). Molemmat joukot $\{x : f(x) \leq 1\}$ ja $\{x : f(x) = 1\}$ ovat suljettuja, sillä $f(\circ)$ on jatkuva. Nyt, koska suljettu rajoitettu joukko avaruudessa $\mathbf{R}^n$ tai $\mathbf{C}^n$ on kompakti, on Seuraus 5.13 todistettu.

Todennäköisemmin joudutaan määrittämään suppeneeko annettu jono $\left\{x^{(k)}\right\}$ lainkaan, kuin että suppeneeko se johonkin määrättyyn vektoriin. Tästä syystä tarvitaan suppenemiskriteeri, joka on riippumaton raja-arvosta x, johon jono suppenee. Jos on olemassa tällainen raja-arvo x, niin

$$\left\|x^{(k)} - x^{(j)}\right\| = \left\|x^{(k)} - x + x - x^{(j)}\right\| \leq \left\|x^{(k)} - x\right\| + \left\|x - x^{(j)}\right\| \to 0,$$

kun $k, j \to \infty$. Tämä toimii inspiraationa seuraavalle määritelmälle.

Määritelmä 5.14 [2, *s.*274] *Jono $\left\{x^{(k)}\right\}$ vektoriavaruudessa V on* Cauchyn jono *suhteessa vektorinormiin $\|\circ\|$, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa positiivinen* *kokonaisluku* $N(\epsilon)$ *siten, että*

$$\left\| x^{(k_1)} - x^{(k_2)} \right\| \leq \epsilon$$

kun $k_1, k_2 \geq N(\epsilon)$.

Lause 5.15 $[2, s.274]$ *Olkoon* $\|\circ\|$ *annettu normi äärellisulotteisessa reaali- tai kompleksivektoriavaruudessa* V. *Olkoon lisäksi* $\left\{x^{(k)}\right\}$ *annettu jono vektoreita avaruudessa* V. *Jono* $\left\{x^{(k)}\right\}$ *suppenee kohti jotakin vektoria avaruudessa* V, *jos ja vain jos se on Cauchyn jono suhteessa normiin* $\|\circ\|$.

Analyysin peruslauseen perusteella jono on Cauchyn jono reaalilukujen ja kompleksilukujen kunnassa, jos ja vain jos se suppenee johonkin skalaariin α ($\alpha \in \mathbf{R}$ tai $\alpha \in \mathbf{C}$). Tämä tunnetaan täydellisyysominaisuutena reaali- ja kompleksilukujen kunnissa. Olemme juuri osoittaneet, että täydellisyysominaisuus ulottuu äärellisulotteiseen reaali- ja kompleksivektoriavaruuteen suhteessa mihin tahansa normiin. Valitettavasti täydellisyysominaisuuden ei tarvitse päteä vektoriavaruuksille, jotka eivät ole äärellisulotteisia.

Määritelmä 5.16 $[2, s.274]$ *Olkoon* $\|\circ\|$ *vektoriavaruuden* V *normi. Vektoriavaruuden* V *sanotaan olevan täydellinen suhteessa normiin* $\|\circ\|$, *jos jokainen Cauchyn jono suppenee kohti vektoriavaruuden* V *pistettä suhteessa normiin* $\|\circ\|$.

Kun hyödynnetään aiemmin luvussa annettua tietoa, että minkä tahansa vektorinormin (tai esinormin) yksikköpallo avaruudessa $\mathbf{R}^n$ tai $\mathbf{C}^n$ on kompakti, voidaan esittää uusi käyttökelpoinen metodi johtaa uusia normeja vanhoista.

Määritelmä 5.17 $[2, s.275]$ *Olkoon* $f(\circ)$ *avaruuden* $\boldsymbol{R}^n$ *tai* $\boldsymbol{C}^n$ *esinormi. Funktiota*

$$f^D(y) \equiv max_{f(x)=1} Re\, y^* x$$

kutsutaan funktion f duaalinormiksi.

On helppo huomata, että duaalinormi on hyvinmääritelty funktio avaruudessa V, sillä $\mathrm{Re}\, y^* x$ on x:n jatkuva funktio kaikilla (kiinnitetyillä) vektoreilla $y \in V$ ja joukko $\{x : f(x) = 1\}$ on kompakti joukko Seurauksen 5.13 nojalla. Weierstrassin teoreeman mukaan funktion Re $y^* x$ maksimi saavutetaan jossakin pisteessä $x_0 \in \{x : f(x) = 1\}$. Jos c on skalaari siten, että $|c| = 1$, niin funktion f homogeenisuuden perusteella saamme

$$max_{f(x)=1} |y^* x| = max_{f(x)=1} max_{|c|=1} \mathrm{Re}\, c y^* x = max_{f(x)=1} max_{|c|=1} \mathrm{Re}\, y^* (cx) =$$

$$max_{|c|=1} max_{f(x/c)=1} \mathrm{Re}\, y^* x = max_{f(x)=1} \mathrm{Re}\, y^* x.$$

Täten yhtenevä ja joskus käytännöllinen määritelmä duaalinormille on

(5.1) $f^D(y) = max_{f(x)=1} |y^* x|$.

Lopuksi on tutkittava, että nimi duaalinormi funktiolle f^D on hyvin perusteltu. Funktio $f^D(\circ)$ on selvästi homogeeninen ja positiivinen, sillä jos $y \neq 0$, niin voidaan käyttää funktion $f(\circ)$ homogeenisuutta hyväksi osoitettaessa, että

$$f^D(y) \equiv max_{f(x)=1} |y^* x| \geq \left| y^* \tfrac{y}{f(y)} \right| = \tfrac{\|y\|_2^2}{f(y)} > 0.$$

On huomionarvoista, että vaikka funktio $f(\circ)$ ei noudata kolmioepäyhtälöä, sen duaali $f^D(\circ)$ aina noudattaa:

$$f^D(y+z) = max_{f(x)=1} |(y+z)^* x| \leq max_{f(x)=1} [|y^* x| + |z^* x|] \leq$$

$$max_{f(x)=1} |y^* x| + max_{f(x)=1} |z^* x| = f^D(y) + f^D(z).$$

Esinormin duaalinormi on täten siis aina normi.

Eli mikä tahansa esinormi generoi normin prosessissa, kun konstruoidaan duaalinormia. Yleisin tapaus tästä konstruoinnista on esinormille, joka on aidosti normi.

Duaalinormille annetaan yksinkertainen epäyhtälö seuraavassa Lemmassa.

Tullaan osoittamaan, että se on yleistys Cauchyn-Schwartzin epäyhtälöstä.

Lemma 5.18 [2, *s.*276] *Olkoon* $f(\circ)$ *esinormi avaruudessa* $\boldsymbol{R}^n$ *tai* $\boldsymbol{C}^n$*. Tällöin*

$|y^* x| \leq f(x) f^D(y)$

$|y^* x| \leq f^D(x) f(y)$

kaikilla $x, y \in V$.

Todistus: Jos $x \neq 0$, niin

$\left| y^* \frac{x}{f(x)} \right| \leq max_{f(z)=1} |y^* z| = f^D(y),$

ja tämän vuoksi

$|y^* x| \leq f(x) f^D(y).$

Koska epäyhtälö on tosi yhä, kun $x = 0$, ensimmäinen epäyhtälö on tosi. Toinen epäyhtälö seuraa ensimmäisestä, sillä itseisarvon määritelmän nojalla $|y^* x| = |x^* y|$.

Tutuimpien vektorinormien duaalit on helppo tunnistaa. Jos $x, y \in \mathbf{C}^n$, niin *Hölderin epäyhtälön* erityistapaus on

(5.2) $|y^* x| = |\sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i| \leq max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \sum_{j=1}^n |x_j| = \|y\|_\infty \|x\|_1.$

Olkoon y annettu vektori. Yllä oleva epäyhtälö (5.2) on yhtälö, kun x on yksikkövektori (suhteessa normiin $\|\circ\|_1$) siten, että $x_i = 1$ jollakin i:n arvolla, jolle $|y_i| = \|y\|_\infty$ ja $x_i = 0$ muutoin. Olkoon x nyt annettu vektori siten, että $x \neq 0$. Epäyhtälössä (5.2) on yhtäsuuruus edelleen, kun y on yksikkövektori (suhteessa normiin $\|\circ\|_\infty$) siten, että

$y_i = x_i / |x_i|$

kaikille i siten, että

$x_i \neq 0,$

ja $y_i = 0$ muulloin. Täten

$(\|y\|_1)^D = max_{\|x\|_1=1} |y^*x| = max_{\|x\|_1=1} \|y\|_\infty \|x\|_1 = \|y\|_\infty$

$(\|y\|_\infty)^D = max_{\|x\|_\infty=1} |y^*x| = max_{\|x\|_\infty=1} \|y\|_1 \|x\|_\infty = \|y\|_1$

Nyt voidaan päätellä, että

$(\|\circ\|_1)^D = \|\circ\|_\infty$ ja $(\|\circ\|_\infty)^D = \|\circ\|_1$.

Tarkastellaan nyt euklidista normia $\|\circ\|_2$, annettua vektoria y ($y \neq 0$) ja mielivaltaista vektoria x. Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön mukaan

(5.3) $|y^*x| = |\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i| \leq \|y\|_2 \|x\|_2$

ja yhtäsuuruus on voimassa, kun $x = y/\|y\|_2$. Käyttämällä väitettä, jota käytettiin jo aiemmin l_1- ja l_∞-normeille, voidaan todeta että

$(\|y\|_2)^D = \|y\|_2$.

Täten euklidinen normi on oma duaalinsa.

On havaittavissa, että jokaiselle kolmelle normille, l_1, l_2 ja l_∞, duaalinormin duaali on alkuperäinen normi. Tämä ei ole silkkaa sattumaa. Duaalisuuslause [Lause 6.14] toteaa, että näin on aina.

Näistä kolmesta esimerkkinormista ainoastaan euklidinen normi on yhtä kuin oma duaalinsa. Tätä käsitellään seuraavassa lauseessa.

Lause 5.19 [2, s.277] *Olkoon* $\|\circ\|$ *avaruuden* V ($\boldsymbol{R}^n$ *tai* $\boldsymbol{C}^n$) *vektorinormi. Olkoon lisäksi* $\|\circ\|^D$ *sen duaalinormi ja skalaari* $c > 0$ *annettu. Tällöin*

$\|x\| = c \|x\|^D$

kaikilla $x \in V$*, jos ja vain jos*

$\|\circ\| = \sqrt{c}\,\|\circ\|_2.$

Erityisesti

$\|\circ\| = \|\circ\|^D,$

jos ja vain jos $\|\circ\|$ *on euklidinen normi* $\|\circ\|_2$.

Todistus: Jos $\|\circ\| = \sqrt{c}\,\|\circ\|_2$ ja $x \in V$, niin

$\|x\|^D = max_{\|y\|=1} |x^*y| = max_{\|y\|_2=1/\sqrt{c}} |x^*y| = max_{\|y\|_2=1} \left|x^* \frac{y}{\sqrt{c}}\right| =$

$\frac{1}{\sqrt{c}} max_{\|y\|_2=1} |x^*y| = \frac{1}{\sqrt{c}} \|x\|_2^D = \frac{1}{\sqrt{c}} \|x\|_2 = \frac{1}{c} \|x\|,$

kaikilla $x \in V$. Jos

$\|\circ\| = c\,\|\circ\|^D,$

jollakin skalaarin c arvolla ja jos $x \in V$, niin Lemman 5.18 nojalla saadaan epäyhtälö

$\|x\|_2^2 = |x^*x| \leq \|x\|\,\|x\|^D = \frac{1}{c}\|x\|^2.$

Tämän nojalla

$\|x\| \geq \sqrt{c}\,\|x\|_2.$

Tätä epäyhtälöä voidaan käyttää saadaksemme vastakkaisen rajan, kun $x \neq 0$ seuraavalla tavalla.

$\frac{1}{c}\|x\| = \|x\|^D = max_{\|y\|=1} |x^*y| =$

$max_{y\neq 0} \left|x^* \frac{y}{\|y\|}\right| = max_{y\neq 0} \left|x^* \frac{y}{\|y\|_2}\right| \frac{\|y\|_2}{\|y\|} \leq$

$max_{y\neq 0} \left|x^* \frac{y}{\|y\|_2}\right| \frac{1}{\sqrt{c}} =$

$\left|x^* \frac{x}{\|x\|_2} \frac{1}{\sqrt{c}}\right| = \|x\|_2 \frac{1}{\sqrt{c}}.$

Yllä olevassa yhtälössä on käytetty hyväksi yhtälöä $\|y\|_2 / \|y\| \leq 1/\sqrt{c}$ kaikilla $y \neq 0$. Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö takaa sen, että kiinnitetyn vektorin ($x \neq 0$) ja euklidisen yksikkövektorin sisätulon ääriarvomaksimi esiintyy, kun yksikkövektori on yhdensuuntainen annetun vektorin kanssa. Täten

$$\|x\| \leq \sqrt{c}\,\|x\|_2$$

kaikilla $x \in V$. Tämä yhdessä aiemmin todistetun epäyhtälön kanssa osoittaa, että

$$\|x\| = \sqrt{c}\,\|x\|_2$$

kaikilla $x \in V$. Viimeinen väite seuraa, kun valitaan $c = 1$ ja tämä osoittaa, että euklidinen normi on ainoa normi, joka on yhtäpitävä oma duaalinsa kanssa.

Määritelmä 5.20 [2, *s.*278] *Olkoon x annettu vektori ja $\|\circ\|$ annettu vektorinormi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$. Joukon*

$$\left\{y \in \boldsymbol{C}^n : \|y\|^D \|x\| = y^* x = 1\right\}$$

sanotaan olevan vektorin x duaali suhteessa vektorinormiin $\|\circ\|$. Tällöin järjestetyn vektoriparin $(x, y) \in \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^n$ sanotaan olevan duaalipari suhteessa vektorinormiin $\|\circ\|$, jos y on vektorin x duaalissa suhteessa vektorinormiin $\|\circ\|$.

Seurauksesta 6.15 seuraa, että jos $\|\circ\|$ on vektorinormi, niin vektorin $x \in \mathbf{C}^n$ jokainen duaali suhteessa vektorinormiin $\|\circ\|$ on epätyhjä. Se voi sisältää yhden tai useamman pisteen.

6 Vektorinormien geometrisia ominaisuuksia

Alkukantainen geometrinen muoto vektorinormille on sen yksikköpallo, jonka avulla voidaan saavuttaa huomattavia oivalluksia normeista.

Määritelmä 6.1 $[2, s.281]$ *Olkoon $\|\circ\|$ vektorinormi reaali- tai kompleksivektoriavaruudessa ja olkoon x avaruuden V piste. Olkoon myös $r > 0$ annettu. Tällöin r-säteinen pallo keskipisteenään x on joukko*

$$B_{\|\circ\|}(r; y) \equiv \{y \in V : \|y - x\| \leq r\}.$$

Lisäksi vektorinormin $\|\circ\|$ yksikköpallo *on joukko*

$$B_{\|\circ\|} \equiv B_{\|\circ\|}(1; 0) = \{y \in V : \|y\| \leq 1\}.$$

Pallo, jonka säde on annettu ja jonka keskipiste on mikä tahansa piste x näyttää samalta, kuin pallo, jonka säde on sama ja keskipisteenä origo. Yksikköpallo on vain "siirretty" pisteeseen x. Yksikköpallo on geometrinen yhteenveto normista, joka homogeenisuusominaisuutensa vuoksi luonnehtii normia .Itse asiassa vain yksikköpallon $B_{\|\circ\|}$ raja tarvitaan. Tässä luvussa määritetään tarkasti, mitkä avaruuden $\mathbf{C}^n$ osajoukot voivat olla jonkin vektorinormin yksikköpalloja.

Määritelmä 6.2 $[2, s.282]$ *Vektorinormia sanotaan* monitahokkaaksi*, jos sen yksikköpallo on monitahokas. Monitahokkaan joukon antaa äärellinen määrä lineaarisia epäyhtälöitä $S = \{x | Ax \leq b\}$, jossa A on $m \times n$ -matriisi.*

Käsitteet avoimesta ja suljetusta joukosta ovat hyvin helppoja määrittää vektoriavaruudessa, jossa on normi.

Määritelmä 6.3 $[2, s.282]$ *Olkoon $\|\circ\|$ normi reaali- tai kompleksivektoriavaruudessa ja olkoon S avaruuden V osajoukko. Pisteen $x \in S$ sanotaan olevan joukon S* sisäpiste*, jos on olemassa sellainen $\epsilon > 0$ siten, että $B(\epsilon; x) \subset$*

S. Joukon S sanotaan olevan avoin, *jos jokainen joukon S piste on sisäpiste. Joukon S sanotaan olevan* suljettu, *js sen komplementti on avoin. Joukon S* rajapiste *on sellainen piste $x \in V$ siten, että $lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ suhteessa normiin $\|\circ\|$ jollekin jonolle $\left\{x^{(k)}\right\} \subset S$. Joukon S* sulkeuma *on joukon S unioni joukon S rajapisteiden kanssa. Joukon S* raja *on leikkaus joukon S sulkeuman ja joukon S komplementin sulkeuman kesken. Joukko S on* rajoitettu, *jos on olemassa sellainen $M > 0$ siten, että $S \subset B_{\|\circ\|}(M;0)$. Joukko S on* kompakti, *jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite. Toisin sanoen joukkoa S kutsutaan kompaktiksi jos sen jokaiselle peitteelle $\bigcup_\alpha S_\alpha \supset S$, jossa S_α on avoin joukko, löydetään äärellinen osakokoelma $\bigcup_{i=1}^{N} S_{\alpha_i} \supset S$, joka edelleen peittää joukon S.*

Huomautus 6.4 [2, *s*.283] *Jos $\|\circ\|$ on ei-triviaalin reaali- tai kompleksivektoriavaruuden V ($dimV \neq 0$) normi, niin 0 on yksikköpallon $B_{\|\circ\|}$ sisäpiste. Tämä seuraa normin $\|\circ\|$ homogeenisuudesta ja positiivisuudesta, sillä nyt*

$B_{\|\circ\|}\left(\frac{1}{2};0\right) \subset B_{\|\circ\|}(1;0).$

Näin siksi, että aiemman normin raja sisältyy jälkimmäisen sisäpisteisiin.

Huomautus 6.5 [2, *s*.283] *Vektorinormin yksikköpallo on tasapainotettu; jos x on yksikköpallon sisäpuolella, niin myös αx on yksikköpallon sisäpuolella millä tahansa skalaarilla α siten, että $|\alpha| = 1$. Tämä seuraa vektorinormin homogeenisuusominaisuudesta.*

Huomautus 6.6 [2, *s*.283] *Vektorinormin yksikköpallo äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa on kompakti. Se on rajoitettu vektorinormin homogeenisuusominaisuuden nojalla ja suljettu, sillä normi on aina jatkuva funktio. Äärellisulottuvuuden tapauksessa suljettu rajoitettu joukko on kompakti, mutta tämä* *ei ole aina totta kun kyseessä on äääretönulottuvuus. Kompaktien joukkojen ominaisuus, jota käytetään usein hyväksi, on jo aiemmin tutkielmassa esitelty Weierstrassin teoreema. Jatkuva reaaliarvoinen funktio kompaktissa joukossa on rajoitettu ja se saa supremuminsa ja infimuminsa tässä joukossa. Tämän vuoksi usein viitataan tällaisten funktioiden "maksimeihin" ja "minimeihin".*

Huomautus 6.7 $[2, s.284]$ *Vektorinormin yksikköpallo on konveksi.*

Todistus: Jos $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ja $\alpha \in [0,1]$, niin

$\|\alpha x + (1-\alpha)\, y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)\, y\| = \alpha \|x\| + (1-\alpha)\|y\| \leq \alpha + (1-\alpha) \leq$

1,

joten $\alpha x + (1-\alpha)\, y$ sisältyy myös yksikköpalloon.

Aiemmat välttämättömät ehdot yksikköpallolle ovat riittävät normin luonnehdintaan.

Lause 6.8 $[2, s.284]$ *Joukko B äärellisulotteisessa reaali-, tai kompleksivektoriavaruudessa on vektorinormin yksikköpallo avaruudessa V, jos ja vain jos joukko B on*

(i) *kompakti,*

(ii) *konveksi,*

(iii)*tasapainotettu ja*

(iv) 0 *on sen sisäpiste.*

Todistus: Ehtojen $(i) - (iv)$ välttämättömyys on jo tutkittu. Nähdäksemme, että ne riittävät normin määritelmään, tutkimme mielivaltaista pistettä $x \in V$ $(x \neq 0)$. Muodostetaan sädesegmentti $\{\alpha x : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ origosta pisteen x kautta. On määritettävä pisteen x ja origon etäisyys suhteellisena etäisyytenä pitkin sädettä, kun käytetään yhtenä yksikkönä säteen pituutta origosta yksikäsitteiseen pisteeseen yksikköpallon rajalla. Muodollisemmin, on määritettävä $\|x\|$ siten, että

$\|x\| = 0$, jos $x = 0$ ja

$\|x\| = min\left\{\frac{1}{t} : t > 0 \wedge tx \in B\right\}$, jos $x \neq 0$.

Tämä funktio on hyvin määritelty, äärellinen ja positiivinen millä tahansa vektorilla x, sillä B on kompakti ja origo on sen sisäpiste. Käyttämällä tasapainoisuusominaisuutta on helppo nähdä, että $\|\circ\|$ on homogeeninen funktio, joten jää jäljelle tarkastaa, että se toteuttaa kolmioepäyhtälön. Olkoon x ja y ovat annetut vektorit siten, että $x, y \neq 0$. Nyt $x/\|x\|$ ja $y/\|y\|$ ovat yksikkövektoreita, jotka ovat joukon B rajalla. Konveksiivisuuden nojalla vektorin

$z = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\frac{y}{\|y\|}$

täytyy myös joukon B vektori. Tämän vuoksi $\|z\| \leq 1$ ja on helposti laskettavissa, että tämä on yhtenevä epäyhtälön $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kanssa.

Kaikilla tunnetuilla l_p-vektorinormeilla on ominaisuus, että $\|x\|$ riippuu ainoastaan vektorin x alkioiden absoluuttisista arvoista. Tämän lisäksi jokainen l_p-normi on vektorin x alkioiden absoluuttisten arvojen kasvava funktio. Nämä kaksi ominaisuutta eivät ole vertailukelpoisisa keskenään.

Määritelmä 6.9 $[2, s.285]$ *Jos* $x = [x_i] \in \boldsymbol{F}^n$, $(\boldsymbol{R}^n$ *tai* $\boldsymbol{C}^n)$, *niin määritellään* $|x| \equiv [|x_i|]$. *Sanotaan, että*

$|x| \leq |y|$, *jos* $|x_i| \leq |y_i|$

kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. *Tällöin avaruuden* $\boldsymbol{F}^n$ *vektorinormin* $\|\circ\|$ *sanotaan olevan*

(a) monotoninen, *jos epäyhtälöstä* $|x| \leq |y|$ *seuraa* $\|x\| \leq \|y\|$ *kaikilla* $x, y \in \boldsymbol{F}^n$ *ja*

(b) absoluuttinen, *jos* $\|x\| = \||x|\|$ *kaikilla* $x \in \boldsymbol{F}^n$.

Lause 6.10 [2, s.285] *Avaruuden* $\boldsymbol{F}^n$ $(\boldsymbol{R}^n$ *tai* $\boldsymbol{C}^n)$ *vektorinormi* $\|\circ\|$ *on monotoninen, jos ja vain jos se on absoluuttinen.*

Todistus: Olkoon vektorinormi $\|\circ\|$ monotoninen, $x \in \mathbf{F}^n$ ja $y \equiv |x|$. Tällöin

$|y| \leq |x|$ ja $|x| \leq |y|$,

joten

$\|y\| \leq \|x\|$ ja $\|x\| \leq \|y\|$.

Näin vektorinormi $\|\circ\|$ on absoluuttinen.

Todistuksen toinen puoli: oletetaan, että $\|\circ\|$ on absoluuttinen. Olkoon nyt $x = [x_i] \in \mathbf{F}^n$ annettu vektori ja k annettu kokonaisluku siten, että $1 \leq k \leq n$. Olkoon lisäksi $\alpha \in [0, 1]$. Tällöin

(6.1) $\left\|[x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\right\| =$

$\left\|\frac{1}{2}(1-\alpha)[x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T + \frac{1}{2}(1-\alpha)x + \alpha x\right\| \leq$

$\frac{1}{2}(1-\alpha)\left\|[x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\right\| + \frac{1}{2}(1-\alpha)\|x\| + \alpha\|x\| =$

$\frac{1}{2}(1-\alpha)\|x\| + \frac{1}{2}(1-\alpha)\|x\| + \alpha\|x\| = \|x\|$.

Oletusta normin absoluuttisuudesta käytetään vain viimeistä edellisessä yhtälössä. Toistamalla yhtälöä (6.1) eri komponenteille, voidaan osoittaa, että absoluuttisilla normeilla on seuraava ominaisuus:

(6.2) $\left\|[\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n]^T\right\| \leq \left\|[x_1, \ldots, x_n]^T\right\|$, kaikille $x \in \mathbf{F}^n$ ja kaikille $\alpha_k \in [0,1]$, kun $k = 1, 2, \ldots, n$. Lopuksi, jos $|x| \leq |y|$, niin jokaiselle $k = 1, 2, \ldots, n$ on olemassa reaaliluvut α_k ja β_k siten, että $\alpha_k \in [0,1]$ ja $x_k = \alpha_k e^{i\theta_k} y_k$. Käyttämällä vektorinormin absoluuttisuusominaisuutta, saamme

$$\|x\| = \left\| \left[\alpha_1 e^{i\theta_1} y_1, \ldots, \alpha_n e^{i\theta_n} y_n\right]^T \right\| = \left\| [\alpha_1 |y_1|, \ldots, \alpha_n |y_n|]^T \right\| \leq$$

$$\left\| [|y_1|, \ldots, |y_n|]^T \right\| = \|y\|,$$

joten normin täytyy olla monotoninen.

Epäyhtälö 6.1 esittää hieman heikomman käsitteen monotonisuudesta.

Määritelmä 6.11 [2, s.285] *Avaruuden $\boldsymbol{F}^n$ ($\boldsymbol{R}^n$ tai $\boldsymbol{C}^n$) vektorinormin $\|\circ\|$ sanotaan olevan* heikosti monotoninen, *jos*

$$\left\| [x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T \right\| \leq \left\| [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T \right\|,$$

kaikilla $x \in \boldsymbol{F}^n$ ja kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Jos vektorinormi $\|\circ\|$ on heikosti monotoninen ja jos $\alpha \in [0,1]$, niin

$$\left\| [x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T \right\| = \left\| (1-\alpha) [x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T + \alpha x \right\| \leq$$

$$(1-\alpha) \left\| [x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T + \alpha x \right\| \leq (1-\alpha) \|x\| + \alpha \|x\| = \|x\|,$$

joten heikosti monotoninen normi toteuttaa näennäisesti vahvemman ehdon 6.2. Täten, jos heikosti monotonisen normin yksikköympyrä on annettu ja jos yksi sen koordinaateista lähenee nollaa, niin tällöin koko suorasegmentti tällä tavalla tuotettuna sijaitsee yksikköpallon sisällä. Monotoninen normi on selvästi heikosti monotoninen, mutta ei toisinpäin.

Esimerkki 6.12 *Tarkastellaan funktiota $f(x) = |x_1 - x_2| + |x_2|$ avaruudessa $\boldsymbol{R}^2$. On jo aiemmin Esimerkissä 4.2 osoitettu, että tämä on vektorinormi.*

On nyt tarkasteltava, onko tämä normi (i) monotoninen, (ii) heikosti monotoninen tai molempia.

Ratkaisu:

Tutkitaan ensin onko funktio heikosti monotoninen, eli onko sille voimassa epäyhtälö

$$\left\|[x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\right\| \leq \left\|[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T\right\|,$$

kaikilla $x \in \mathbf{F}^n$ ja kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$. Pitää siis osoittaa, että yhtälöt$[x_1, 0]^T \leq \|x_1, x_2\|$ ja $\|0, x_2\| \leq \|x_1, x_2\|$ ovat tosia kaikille vektoreille x. Tarkastellaan epäyhtälöä $\|0, x_2\| \leq \|x_1, x_2\|$. Nyt

$\|0, x_2\| \leq \|x_1, x_2\|$, joten tulisi olla

$\Rightarrow |-x_2| + |x_2| \leq |x_1 - x_2| + |x_2|.$

Valitaan nyt vektoriksi $x = [1, 2]^T$. Tällöin

$\|0, 2\| = 4 \geq 3 = \|1, 2\|.$

Täten väite ei tämän epäyhtälön osalta pidä paikkaansa ja funktio ei ole heikosti monotoninen. Koska kaikki monotoniset funktiot ovat heikosti monotonisia Määritelmän 6.11 nojalla, niin funktio ei ole monotoninen.

Vektorinormin yksikköpallon konveksiivisuus seuraa useista käsitteistä. Eräs näistä on duaalisuuden käsite, joka perustetaan usein esinormien yhteyteen.

Seuraavassa lauseessa käytetään hyväksi muutamia varsin perustavaa laatua olevia käsitteitä, jotka liittyvät joukkojen geometrisiin ominaisuuksiin. Esitetään nämä ennen Lausetta 5.1 apulauseiden muodossa.

Apulause 6.13 [2, *s*.533] *Pienin suljettu konveksiivinen joukko, joka sisältää joukon S ($Co\,S$), on leikkaus kaikista suljetuista puoliavaruuksista, jotka sisältävät joukon S.*

Lause 6.14 (duaalisuuslause) [2, *s*.287] *Olkoon $f(\circ)$ esinormi avaruudessa V ($\boldsymbol{R}^n$ tai $\boldsymbol{C}^n$). Merkitään normin f duaalinormia f^D ja jälleen tämän duaalinormia f^{DD}. Olkoon nyt*

$$B \equiv \{x \in V : f(x) \leq 1\}$$

normin f yksikköpallo ja

$$B'' \equiv \left\{x \in V : f^{DD}(x) \leq 1\right\}$$

normin f^{DD} yksikköpallo. Nyt

$$B \subset B'' = Co\,B,$$

ja täten $f^{DD}(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in V$. Jos f on vektorinormi avaruudessa V, niin $B = B''$ ja $f^{DD} = f$.

Todistus: Olkoon $x \in V$ annettu vektori. Tällöin Lemman 5.18 nojalla

$$|y^* x| \leq f(x)\, f^D(y),$$

mille tahansa $y \in V$. Tämän vuoksi

$$f^{DD}(x) = max_{f^D(y)=1} |y^* x| \leq max_{f^D(y)=1} f(x)\, f^D(y) = f(x).$$

Täten $f^{DD}(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in V$. Tämä epäyhtälö on yhtäpitävä väitteen $B \subset B''$ kanssa.

Huomataan nyt, että joukko $\{t \in V : \mathrm{Re}\, t^* v \leq 1\}$ on suljettu puoliavaruus, joka sisältää origon. Käytetään lisäksi hyväksemme duaalinormin määritelmää Olkoon siis $u \in B''$ annettu piste. Tällöin

$$u \in \left\{t : \mathrm{Re}\, t^* v \leq 1 \text{ kaikilla } v \text{ siten, että } f^D(v) \leq 1\right\}$$

$$= \{t : \mathrm{Re}\, t^* v \leq 1 \text{ kaikilla } v \text{ siten, että} \,\mathrm{Re}\, v^* w \leq a \text{ kaikilla } w \text{ siten, että } f(w) \leq 1\}$$

$= \{t : \mathrm{Re}\, t^* v \leq 1$ kaikilla v siten, että $\mathrm{Re}\, v^* w \leq a$ kaikilla $w \in B\}$.

Tämän nojalla u sijaitsee jokaisessa suljetussa puoliavaruudessa, joka sisältää kaikki joukon B pisteet. Eli u sisältyy jokaiseen suljettuun puoliavaruuteen, joka sisältää joukon B. Koska kaikkien tällaisten suljettujen puoliavaruuksien leikkaus on suljettu joukon B konveksiverho ($\mathrm{Co}\, B$), voidaan päätellä, että $u \in \mathrm{Co}\, B$. Mutta koska piste $u \in B''$ on mielivaltainen, niin $B'' \subset \mathrm{Co}\, B$. Koska $\mathrm{Co}\, B$ on kaikkien konveksien joukkojen leikkaus (jotka sisältävät joukon B), saadaan myös, että $\mathrm{Co}\, B \subset B''$ ja täten $B'' = \mathrm{Co}\, B$.

Jos esinormi on itse asiassa normi, niin sen suljettu yksikköpallo B on konveksi ja $B = \mathrm{Co}\, B = B''$. Täten normit f ja f^{DD} ovat identtiset, sillä niiden yksikköpallot ovat samat.

Eräs duaalisuuslauseen sovellus on seuraava käytännöllinen tulos. Se on erityistapaus Hahn-Banachin teoreemasta, joka on esitelty luvussa 1.

Seuraus 6.15 [2, s.288] *Olkoon $y \in \boldsymbol{C}^n$ annettu vektori ja $\|\circ\|$ annettu vektorinormi avaruudessa $\boldsymbol{C}^n$. Nyt on olemassa vektori $y_0 \in \boldsymbol{C}^n$ siten, että*

(a) $|(y_0)^* x| \leq \|x\|$ kaikilla $x \in \boldsymbol{C}^n$; ja

(b) $(y_0)^* y = \|y\|$.

Vektori y_0 ei välttämättä ole yksikäsitteinen, mutta $\|y\|^D = 1$ ja $(y_0)^* y = \|y\|$.

Todistus: Tiedämme duaalisuuslauseen nojalla, että

$$\|y\| = \left(\|y\|^D\right)^D = max_{\|z\|^D=1} |y^* z|.$$

Lisäksi tiedämme vektorinormin $\|\circ\|^D$ yksikköympyrän kompaktiuden vuoksi, että maksimi saavutetaan jollakin vektorilla $z = y_0$ (z ei ole välttämättä yksikäsitteinen), jolle $\|y_0\|^D = 1$. Täten $\|y\| = |y^* y_0|$. Kun kerrotaan y_0 sopivalla tekijällä, jonka kerroin on 1, saadaan sisätulo $y * y_0$ positiiviseksi ja korollaarin (b)-kohta voidaan vahvistaa todeksi.

Tiedämme Lemman 5.18 perusteella, että

$|(y_0)^* x| \leq \|y_0\|^D \|x\| = \|x\|$ kaikilla $x \in \mathbf{C}^n$. Täten vektori y_0 toteuttaa myös kohdan (a).

Huomaa, että kohdassa(a) todetaan, että $\|y_0\|^D \leq 1$ ja kohdan (b) perusteella $\|y_0\|^D = 1$.

Lähteet

[1] Jorma Merikoski, Markku Halmetoja, Timo Tossavainen: *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan*, WSOY, Porvoo, painettu 2004

[2] Roger A. Horn, Charles R. Johnson: *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, uusintapainos 1991

[3] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence: *Linear algebra*, Prentice-Hall International Editions, New Jersey, painettu 1989, toinen painos

[4] Lineaarisen ja diskreetin optimoinnin opetusmoniste Jyväskylän yliopistosta: http:\\users.jyu.fi\~ jhaka\ldo \(4.6.2008), kurssi luennoitu 2008, luennoija yliassistentti Jussi Hakanen

[5] Osmo Kaleva: *Funktionaalianalyysi*, Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitos: http:\\butler.cc.tu.fi\~ kaleva\Funk_anal.pdf (4.6.2008)

[6] Lauri Kahanpää: *Suoraviivaista ajattelua II osa, Funktionaalianalyysi*, Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen opetusmoniste: http:\\www.math.jyu.fi\~ kahanpaa\FAN \FAN51_ 100.pdf (4.6.2008)