TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Tanja Lehtinen

Sekventtikalkyylin täydellisyyden todistaminen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Toukokuu 2008

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

LEHTINEN, TANJA: Sekventtikalkyylin täydellisyyden todistaminen

Pro gradu -tutkielma, 49 s.

Matematiikka

Toukokuu 2008

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan täydellisyyslauseen todistamista sekventtikalkyylin avulla ensimmäisen kertaluvun logiikassa.

Aluksi luvussa 1 tutustutaan aiheen kontekstiin ja tarkastellaan tarvittavia käsitteitä. Sen jälkeen luvussa 2 käsitellään logiikan syntaksia. Tässä luvussa esitellään hieman propositiologiikkaa ja sen jälkeen siirrytään tarkastelemaan ensimmäisen kertaluvun logiikkaa, jossa tutustutaan muun muassa aakkostoihin, termeihin, kaavoihin ja induktiolla todistamiseen.

Luvussa 3 tutkitaan logiikan semantiikkaa. Jälleen ensimmäisenä käsitellään propositiologiikkaa, jossa tarkastellaan kaavojen totuusarvoja. Ensimmäisen kertaluvun logiikkaa käsittelevässä luvussa määritellään struktuuri, tulkintafunktio ja tulkinta. Tämän jälkeen tarkastellaan kaavojen totuutta, loogista seurausta ja lopuksi sijoitusta.

Valmisteluna pääaihetta varten esitämme luvussa 4 luettelomaisesti useita sekventtikalkyylin sääntöjä. Luvun lopussa tarkastellaan joukkojen ristiriidattomuutta ja todistetaan eheyslause, joka on erittäin tärkeä sekventtikalkyylin täydellisyyden todistamisessa.

Kaikki nämä edeltävät luvut valmistelevat täydellisyyslauseen todistamista, joka esitetään viidennessä ja viimeisessä luvussa. Ennen täydellisyyslauseen todistusta todistetaan kuitenkin Henkinin lause ja ristiriidattomien joukkojen toteutuvuus.

Lähdeteoksena käytetään H.D. Ebbinghaus, J. Flum ja W. Thomasin kirjaa; Mathematical Logic. Asiasanat: Kurt Gödel, täydellisyyslause, sekventtikalkyyli, propositiologiikka, ensimmäisen kertaluvun logiikka, eheyslause, Henkinin lause.

Sisältö

1 Johdanto

Jokaisen matemaattisen teorian rakentaminen alkaa väitelauseiden eli *propositioiden* järjestelmästä Φ, joka siis on kyseisen teorian aksioomajärjestelmä. Propositio ψ seuraa aksioomajärjestelmästä Φ, jos ψ on tosi jokaisessa struktuurissa, joka toteuttaa kaikki aksioomajärjestelmän Φ aksioomat. Proposition ψ todistus aksioomajärjestelmässä Φ osoittaa, että ψ seuraa järjestelmästä Φ. Tämä johdattaa meidät vastakkaisen ongelman ääreen: Onko jokainen propositio ψ, joka seuraa järjestelmästä Φ, myös todistuva järjestelmässä Φ? Kysymykseen vastataan positiivisesti tämän tutkielman lopussa. Tätä lausetta kutsutaan täydellisyyslauseeksi ja se on olennaisen tärkeä matemaattisessa logiikassa.

Mitä sitten tarkoittavat ”propositio”, ”struktuuri”, ”olla tosi”, ”seuraus” ja ”todistuva”? Proposition käsite selitetään luvun 2.1 alussa, struktuurin käsite puolestaan luvussa 3.2.1, totuus ja seuraus vastaavasti luvuissa 3.2.2 ja 3.2.3. Proposition ψ matemaattinen todistus aksioomajärjestelmässä Φ muodostuu sarjasta päätelmiä, jotka etenevät aiemmin todistetuista järjestelmän Φ aksioomista tai propositioista uusiin propositioihin ja lopulta päättyvät propositioon ψ. Formaalia todistusta käsitellään tarkemmin luvussa 4.

Minkä tahansa logiikan kolme tärkeää näkökulmaa ovat syntaksi, semantiikka ja kalkyyli (Vrt. [3, s. 23]), joita käsitelläänkin tämän tutkielman luvuissa 2, 3 ja 4. Kalkyylillä tarkoitetaan yksinkertaisimmillaan aksioomista ja syntaktisista päättelysäännöistä muodostuvaa formaalia systeemiä. Kolme tunnetuinta kalkyyliä ovat luonnollinen päättely, Hilbertin päättelyjärjestelmä ja sekventtikalkyyli. Tässä tutkielmassa käytetään sekventtikalkyyliä. Tästä enemmän luvussa 4.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan täydellisyyslauseen todistamista sekventtikalkyylin avulla ensimmäisen kertaluvun logiikassa. Täydellisyyslauseen todisti ensimmäisenä Kurt Gödel vuonna 1929. Gödelin täydellisyyslause osoittaa, että semanttinen totuus ja syntaktinen todistuksen käsite vastaavat täsmälleen toisiaan. Lukijalta edellytetään logiikan perusasioiden tuntemusta, joskin suurin osa niistä on tässä tutkielmassa lyhyesti käyty läpi. Lähdeteoksena käytämme H.D. Ebbinghaus, J. Flum ja W. Thomasin kirjaa; Mathematical Logic.

Matemaattisessa logiikassa samoin kuin perinteisessä logiikassa keskeisinä tutkimuskohteina ovat päättely ja todistaminen. Päättelyn metodeissa sekä todistusten matemaattisissa menettelytavoissa näkyvät matemaattisen logiikan ja perinteisen logiikan erot. Päättelyä tarkastellaan *formaalien kielten* avulla. Formaali kieli eroaa arkikielestä, kuten suomenkielestä, täsmällisyydessään. Formaaleita kieliä ovat logiikan formaalit kielet sekä ohjelmointikielet kuten C++ ja Java (Vrt. [8, s. 1]). Formaalin kielen *syntaksi* ja *semantiikka* määritellään täsmällisesti.

Aluksi luvussa 1 tutustutaan aiheen kontekstiin ja tarkastellaan tarvittavia käsitteitä. Sen jälkeen luvussa 2 käsitellään logiikan syntaksia. Tässä luvussa esitellään hieman propositiologiikkaa ja sen jälkeen siirrytään tarkastelemaan ensimmäisen kertaluvun logiikkaa, jossa tutustutaan muun muassa aakkostoihin, termeihin, kaavoihin ja induktiolla todistamiseen. Tämä luku vastaa H.D. Ebbinghausin kirjan lukua 2.

Luvussa 3 tutkitaan logiikan semantiikkaa. Jälleen ensimmäisenä käsitellään propositiologiikkaa, jossa tarkastellaan kaavojen totuusarvoja. Ensimmäisen kertaluvun logiikkaa käsittelevässä luvussa määritellään struktuuri, tulkintafunktio ja tulkinta. Tämän jälkeen tarkastellaan kaavojen totuutta, loogista seurausta ja lopuksi sijoitusta. Tämä vastaa H.D. Ebbinghausin kirjan lukua 3.

Valmisteluna pääaihetta varten esitämme luvussa 4 luettelomaisesti useita sekventtikalkyylin sääntöjä. Luvun lopussa tarkastellaan joukkojen ristiriidattomuutta ja todistetaan eheyslause, joka on erittäin tärkeä sekventtikalkyylin täydellisyyden todistamisessa. Tämä vastaa H.D. Ebbinghausin kirjan lukua 4.

Kaikki nämä edeltävät luvut valmistelevat täydellisyyslauseen todistamista, joka esitetään viidennessä ja viimeisessä luvussa. Ennen täydellisyyslauseen todistusta todistetaan kuitenkin Henkinin lause ja ristiriidattomien joukkojen toteutuvuus. Tämä vastaa H.D. Ebbinghausin kirjan lukua 5.

Tarvittavien käsitteiden merkintöjä

Merkitään joukkoja isoilla kirjaimilla $A, B, C \dots$, relaatiosymboleita $P, Q, R, \dots$, vakioita $c, c_0, c_1, \dots$, muuttujia $x, y, z, \dots$ ja funktiosymboleita $f, g, h, \dots$.

Joukon A n-paikkaisella funktiolla tarkoitetaan kuvausta $f : A^n \to A$, kun $n \geq 1$. Sanotaan, että R on *kaksipaikkainen relaatiosymboli*, jos $R \subseteq$ A $\times$ A. R on *n-paikkainen relaatiosymboli*, jos R on karteesisen tulon A^n osajoukko. Sen sijaan, että kirjoitettaisiin $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in R$, käytetään tässä kirjoitelmassa yleensä merkintätapaa $Ra_0 \dots a_{n-1}$.

Termeille puolestaan käytetään kirjaimia $t, t_0, t_1, \dots$ ja kaavoille kirjaimia $\phi, \psi, \dots$. Käytetään $\equiv$ yhtäsuuruusmerkkinä, jotta voidaan kirjoittaa väittämiä, kuten $\psi = x \equiv y$ yksiselitteisesti. Tässä tutkielmassa käytetään termeille ja kaavoille lyhennettyä merkintätapaa. Esimerkiksi Rv_0v_1 tarkoittaa v_0Rv_1 (vertaa tätä merkintään $4 > 1$). Lisäksi myös uloimmat sulkeet jätetään usein pois. Tällöin esimerkiksi $(\phi \vee \psi)$ kirjoitetaan $\phi \vee \psi$.

2 Syntaksi

Matemaattinen logiikka jakautuu lauselogiikkaan eli propositiologiikkaan ja predikaattilogiikkaan, johon sisältyy muun muassa ensimmäisen kertaluvun logiikka ja äärellisen monen muuttujan logiikka.

Ryhdyttäessä muodostamaan formaalia kieltä, määritellään aluksi kielen pienimmät yksiköt eli aakkoset. Logiikassa aakkosia voivat periaatteessa vastata mitkä tahansa symbolit ja merkit (Vrt. [5, s. 1]); Suomen kielessä puolestaan aakkosia on 29. Tämän jälkeen määritellään, mitkä aakkosten muodostamista äärellisistä merkkijonoista ovat kieliopillisesti oikeita kaavoja. Suomenkielessä esimerkiksi ”hevonen” ja ”fgrtek” ovat aakkosista muodostettuja merkkijonoja eli sanoja, mutta vain "hevonen"on kieliopillisesti oikea ilmaus (Vrt. [5, s. 1]). Sanat puolestaan muodostavat lauseita kyseisen kielen kielioppia käyttäen. Kaavat ja niiden muodostussäännöt muodostavat kielen syntaksin. Tämä ei kuitenkaan kerro vielä mitään siitä, miten ne pitäisi tulkita. Kaavojen tulkitsemista eli merkitystä tutkitaan semantiikassa (Vrt.[1, s. 57]).

Aakkostolla $\mathbb{A}$ tarkoitetaan epätyhjää merkkijoukkoa. Aakkoston $\mathbb{A}$ kaikkien sanojen joukolle käytetään puolestaan merkintää $\mathbb{A}^*$. Esimerkiksi aakkosto voi olla joukko $\mathbb{A} = \{$a,b,c, . . . ,ä,ö$\}$. Tyhjä merkkijono (merk. $\emptyset$) lasketaan myös sanaksi aakkostossa $\mathbb{A}$.

2.1 Propositiologiikka

Yksinkertaisia asiaintiloja kuten ”sandaali on jalkine” tai ”Helsinki on Suomen pääkaupunki” kutsutaan *atomilauseiksi.* Niitä yhdistetään toisiinsa esimerkiksi ilmausten ”ja”, ”tai”, ”jos . . . niin”, ”jos ja vain jos” sekä ”ei” avulla. Tällaisia ilmauksia kutsutaan *konnektiiveiksi.* Konnektiiveja merkitään symboleilla $\neg$ (negaatio), $\wedge$ (konjunktio), $\vee$ (disjunktio), $\rightarrow$ (implikaatio) sekä $\leftrightarrow$ (ekvivalenssi). Negaatio vastaa luonnollisen kielen ilmaisua ”ei”, konjunktiota vastaa ”ja”, disjunktiota ”tai”, implikaatiota ”jos, niin” ja ekvivalenssia vastaa ”jos ja vain jos”.

Atomilause abstrahoidaan propositiosymboleiksi, jotka ovat pelkkiä symboleita kuten p_0, p_1, jne (Vrt. [11, s. 12]). Voidaan ajatella, että nämä propositiosymbolit ovat kuin muuttujia, jotka saavat arvoikseen atomilauseita (Vrt. [11, s. 13]). Abstrahoituja atomilauseita yhdistelemällä konnektiivien avulla saadaan *propositiolauseita* eli lyhyesti *propositioita.* Näin esimerkiksi yhdistetyt atomilauseet ”aurinko paistaa, joten käytän hattua” voidaan esittää ”$p_0 \rightarrow p_1$”, kun p_0 tarkoittaa atomilausetta ”aurinko paistaa” ja p_1 atomilausetta ”käytän hattua”.

2.2 Ensimmäisen kertaluvun logiikka

Ensimmäisen kertaluvun logiikka on yksi predikaattilogiikan osa-alueista. Usein kuitenkin predikaattilogiikasta puhuttaessa tarkoitetaan ensimmäisen kertaluvun logiikkaa. Predikaatti on propositiota monimuotoisempi, sillä siinä voi olla muuttujia. Esimerkiksi ”$4+3 = 7$” on propositio ja ”$4+x = 7$” on predikaatti (Vrt. [7, s. 15]). Predikaattilogiikassa otetaan käyttöön kvanttorit $\forall$ ja $\exists$, jotka laajentavat propositiologiikan ilmaisukykyä vielä lisää (Vrt.

[11, s. 67]). Kaikkikvanttori eli universaalikvanttori $\forall$ tarkoittaa "kaikilla" ja olemassaolokvanttori eli eksistenssikvanttori $\exists$ tarkoittaa "on olemassa". Otetaan esimerkiksi funktion määritelmä "Jokaisella $x \in X$ on olemassa sellainen yksikäsitteinen $y \in Y$, että $(x, y) \in f$". Formalisoituna tämä voidaan kirjoittaa seuraavasti: $\forall x \in X : \exists! y \in Y : (x, y) \in f$, missä huutomerkki vastaa yksikäsitteisyyttä (Vrt. [6, s. 21]). Yksikäsitteisyydestä enemmän luvun 3.2.5 lopussa.

2.2.1 Ensimmäisen kertaluvun logiikan aakkosto, termit ja kaavat

Logiikan kieltä muodostettaessa määritellään aluksi kielelle *aakkosto*. Aakkostoon kuuluvat ensinnäkin *aakkoset*, jotka jo edellä on esitelty. Aakkosia ovat konnektiivit, kvanttorit ja muuttujasymbolit, joita merkitään symboleilla $v_0, v_1, v_2, \ldots$ sekä sulkeet ja yhtäsuuruussymboli ($\equiv$). Merkitään näitä kaikkia yhdessä symbolilla $\mathbb{A}$. Tämän lisäksi aakkostoon kuuluu kustakin teoriasta riippuvaiset vakiosymbolit sekä n-paikkaiset relaatiosymbolit ja n-paikkaiset funktiosymbolit. Huomattakoon, että mikä tahansa näistä symbolijoukoista saattaa olla tyhjä. Näitä teoriasta riippuvaisia symboleita merkitään symbolilla S. Olkoon $\mathbb{A}_S := \mathbb{A} \cup S$ tämän kielen aakkosto ja S on sen symbolijoukko.

Tarkastellaan seuraavaksi jonkin tietyn aakkoston merkkijonojen määrää. Joukkoa M kutsutaan numeroituvaksi, jos se on ääretön ja jos on olemassa surjektiivinen kuvaus α luonnollisilta luvuilta $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ joukolle M. Joukko M voidaan esittää muodossa $\{\alpha_n | \ n \in \mathbb{N}\}$. Joukkoa M kutsutaan *korkeintaan numeroituvaksi*, jos joukko on äärellinen tai numeroituva.

Apulause 1. Jos S on korkeintaan numeroituva, niin T^S ja L^S ovat numeroituvia.

Todistus. Sivuutetaan.(Ks. [2, s. 17]) $\square$

Aiemmin jo keskusteltiin *kaavoista*. Riippuen tarkasteltavasta teoriasta, kaavat voivat saada esimerkiksi muodon $v_1 \equiv \ e \circ v_2$ tai $\exists v_1 v_1 \equiv v_1$, mutta ei $e \wedge \vee e$ tai $\exists v_1 (\rightarrow v_2 \neg)$. Kaavat $v_1 \equiv e \circ v_2$ ja $\exists v_1 (v_1 \equiv v_3 \vee v_1 \equiv v_2)$ ovat yhtälömuotoisia. Yhtäsuuruusmerkin oikealla ja vasemmalla puolella olevia merkkijonoja kutsutaan *termeiksi*. Termit ovat vakioiden, muuttujien ja funktiosymboleiden mielekäs yhdistelmä. Termien määrittelemiseksi annetaan säännöt, jotka osoittavat, miten termejä tuotetaan. Tällaista sääntöjärjestelmää kutsutaan usein kalkyyliksi tai päättelyjärjestelmäksi.

Määritelmä 2.1. S-termit ovat niitä aakkoston $\mathbb{A}_{\mathbb{S}}^*$ merkkijonoja, jotka saadaan soveltamalla seuraavia sääntöjä äärellisen monta kertaa.

T1 Jokainen joukon S vakio on S-termi.

T2 Jokainen muuttuja on S-termi.

T3 Jos f on n-paikkainen funktiosymboli, $f \in S$ ja merkkijonot $t_0, \ldots, t_{n-1}$ ovat S-termejä, niin $ft_0, \ldots, t_{n-1}$ on myös S-termi.

Käytetään merkintää T^S tarkoittamaan S-termien joukkoa. Osoitetaan, että $g\,x\,g\,f\,x\,f\,y$ on S-termi.

Esimerkki 2.1. Jos f on 1-paikkainen funktiosymboli, g on 2-paikkainen funktiosymboli ja symbolijoukko $S = \{f, g, c, R\}$, niin $g\,x\,g\,f\,x\,f\,y$ on S-termi. Osoitetaan skemaattisesti, että $g\,x\,g\,f\,x\,f\,y$ on S-termi.

1.	y	$(T2)$
2.	x	$(T2)$
3.	fy	$(T3)$ sovellettuna kohtaan 1 käyttäen funktiota f
4.	fx	$(T3)$ sovellettuna kohtaan 2 käyttäen funktiota f
5.	$gfxfy$	$(T3)$ sovellettuna kohtiin 3 ja 4 käyttäen funktiota g
6.	$gxgfxfy$	$(T3)$ sovellettuna kohtiin 2 ja 5 käyttäen funktiota g

Rivien merkkijonot saadaan soveltamalla termien kalkyylin sääntöjä. Kohdan **T3** sovellukset käyttävät termejä, jotka on saatu edellisiltä riveiltä. Selvästi viimeisen rivin merkkijonon ollessa S-termi, myös edellisten rivien merkkijonot ovat S-termejä. Termin käsitettä apuna käyttäen annetaan seuraavaksi kaavojen määritelmä.

Määritelmä 2.2. S-kaavat ovat niitä aakkoston $\mathbb{A}_{\mathbb{S}}^*$ merkkijonoja, jotka saadaan soveltamalla seuraavia sääntöjä äärellisen monta kertaa.

F1 Jos t_0 ja t_1 ovat S-termejä, niin $t_0 \equiv t_1$ on S-kaava.

F2 Jos R on n-paikkainen relaatiosymboli, $R \in S$ ja $t_0, \ldots, t_{n-1}$ ovat S-termejä, niin $Rt_0 \ldots t_{n-1}$ on S-kaava.

F3 Jos ϕ on S-kaava, niin $\neg\phi$ on S-kaava.

F4 Jos ϕ ja ψ ovat S-kaavoja, niin $(\phi \wedge \psi)$,$(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ ja $(\phi \leftrightarrow \psi)$ ovat S-kaavoja.

F5 Jos x on muuttuja ja ϕ on S-kaava, niin $\forall x\phi$ ja $\exists x\phi$ ovat S-kaavoja.

Atomikaavoiksi kutsutaan sellaisia S-kaavoja, jotka muodostetaan käyttäen apuna ainoastaan kohtia **F1** ja **F2**, koska niiden muodostamisessa ei ole käytetty muita S-kaavoja. Käytetään merkintää L^S tarkoittamaan S-kaavojen joukkoa. Mikäli on selvää, että viitataan joukkoon S, niin puhutaan vain termeistä ja kaavoista S-termien ja S-kaavojen sijaan.

2.2.2 Induktio

Olkoon S joukko symboleita ja olkoon $Z \subset \mathbb{A}_{\mathbb{S}}^*$ aakkoston $\mathbb{A}_{\mathbb{S}}$ eräs merkkijonojoukko. Merkkijonojoukon Z alkioita kuvattiin kalkyylin avulla silloin, kun $Z = T^S$ tai $Z = L^S$. Jokaisen tämän kalkyylin säännön mukaan joko jotkut merkkijonot kuuluvat joukkoon Z (kuten säännöt **T1**, **T2**, **F1** ja **F2**) tai muuten sallivat siirtymisen tietyistä merkkijonoista $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ uuteen merkkijonoon ζ.Tällä siirtymisellä tarkoitetaan sitä, että jos $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ kuuluu joukkoon Z, niin ζ myös kuuluu joukkoon Z. Tämä kirjoitetaan skemaattisessa muodossa

$$\frac{\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}}{\zeta}.$$

Sallimalla $n = 0$, yllä mainittu oletuksista vapaa sääntö sisällytetään järjestelmään.

Säännöt termien kalkyylille:

T1 $\dfrac{}{c}$, jos $c \in S$

T2 $\dfrac{}{x}$

T3 $\dfrac{t_0, \ldots, t_{n-1}}{ft_0, \ldots, t_{n-1}}$, jos $f \in S$ ja f on n-paikkainen funktiosymboli.

Merkkijonojen joukon Z määritteleminen kalkyylin **C** avulla mahdollistaa joukon Z alkioihin perustuvien väitteiden todistamisen induktion avulla. Tämä todistusperiaate vastaa luonnollisten lukujen induktiota. Mikäli halutaan osoittaa, että kaikilla joukon Z alkioilla on ominaisuus P, on riittävää osoittaa, että

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \text{jokaisella säännöllä} \\ \qquad (*) \qquad \dfrac{\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}}{\zeta} \\ \text{päättelyjärjestelmässä } \mathbf{C}, \text{ seuraava pätee:} \\ \text{aina, kun } \zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1} \text{ on johdettavissa kalkyylistä } \mathbf{C} \\ \text{ja kaikilla kaavoilla } \zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1} \text{ on ominaisuus } P \text{ (induktio-oletus),} \\ \text{niin myös merkkijonolla } \zeta \text{ on ominaisuus } P. \end{array} \right.$$

Tällöin sellaisessa tapauksessa, että $n = 0$, osoitetaan merkkijonolla ζ olevan ominaisuuden P. Todistuksen periaate on selvä. Jotta voidaan osoittaa ominaisuuden P olevan kaikilla kalkyylin **C** johdettavilla merkkijonoilla, niin osoitetaan ominaisuuden P olevan kaikilla joukon Z alkioilla, jotka ovat johdettavissa oletuksettoman säännön (eli kun $n = 0$ kohdassa $(*)$) avulla. Tämän jälkeen osoitetaan, että P säilyy sovellettaessa jäljellä olevia sääntöjä.

Metodi voidaan myös oikeuttaa käyttämällä luonnollisten lukujen täydellisen induktion periaatetta. Tätä tarkoitusta varten määritellään johtamisen rakenne kalkyylissä **C** ja sitten perustellaan seuraavasti: jos ehto (I) on voimassa, niin voidaan osoitetaan induktiolla n:n suhteen, että ominaisuus P on jokaisella merkkijonolla, jolla on n:n pituinen todistus. Jokaisella joukon Z alkiolla on jokin äärellisen pituinen todistus, joten ominaisuuden P täytyy silloin olla tosi kaikilla kalkyylin Z alkioilla.

Erityistapauksessa, missä **C** on termien tai kaavojen kalkyyli, kutsutaan edellä esiteltyä todistusmenetelmää todistukseksi induktiolla termin tai kaavan rakenteen suhteen. Osoittaaksemme ominaisuuden P olevan kaikilla S-termeillä, on riittävää osoittaa, että

T1' Jokaisella joukon S vakiolla on ominaisuus P.

T2' Jokaisella joukon S muuttujalla on ominaisuus P.

T3' Jos S-termeillä $t_0, \ldots, t_{n-1}$ on ominaisuus P, ja jos $f \in S$ on n-paikkainen, niin termillä $ft_0, \ldots, t_{n-1}$ myös on ominaisuus P.

Vastaavat ehdot kaavojen kalkyylille ovat:

F1' Jokaisella muotoa $t_0 \equiv t_1$ olevalla S-kaavalla on ominaisuus P.

F2' Jokaisella muotoa $Rt_0, \ldots t_{n-1}$ olevalla S-kaavalla on ominaisuus P.

F3' Jos S-kaavalla ϕ on ominaisuus P, niin kaavalla $\neg\phi$ on ominaisuus P.

F4' Jos S-kaavoilla ϕ ja ψ on ominaisuus P, niin kaavoilla $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ ja $(\phi \leftrightarrow \psi)$ on ominaisuus P.

F5' Jos S-kaavalla ϕ on ominaisuus P ja jos x on muuttuja, niin kaavoilla $\exists x\phi$ ja $\forall x\phi$ on ominaisuus P.

Apulause 2. Jokainen S-kaava sisältää saman määrän oikean- ja vasemmanpuoleisia sulkuja kaikilla symbolijoukoilla S.

Todistus. Ensin osoitetaan induktiolla termien rakenteen suhteen, että S-termillä ei ole vasemman- eikä oikeanpuoleisia sulkeita. Sitten tutkitaan ominaisuutta P aakkostossa $\mathbb{A}_{\mathbb{S}}^*$. Aakkoston $\mathbb{A}_{\mathbb{S}}$ merkkijonolla ζ on ominaisuus P, jos ja vain jos merkkijonolla ζ on sama määrä vasemman- ja oikeanpuoleisia sulkeita. Osoitetaan induktiolla kaavojen rakenteen suhteen, että jokaisella S-kaavalla on ominaisuus P.

$\phi = c$: termeillä, jotka ovat muotoa c, ei ole sulkeita. Samoin tapauksessa $\phi = x$. Siis kummassakin tapauksessa termeillä Φ on ominaisuus P.

$\phi = ft_0, \ldots, t_{n-1}$: kohdan **T3** mukaisesti muodostettu termi alkaa aina symbolilla f, jolla ei ole sulkeita. Myöskään S-termeillä $t_0, \ldots, t_{n-1}$ ei ole sulkeita, joten termillä Φ on ominaisuus P.

$\phi = t_0 \equiv t_1$, missä t_0 ja t_1 ovat S-termejä: kaavalla ϕ ei ole sulkeita, joten kaavalla ϕ on ominaisuus P.

$\phi = Rt_0 \dots t_{n-1}$, missä kaavalla ϕ on ominaisuus P induktioväitteen avulla: koska kaavalla ϕ on yksi oikeanpuoleinen ja yksi vasemmanpuoleinen sulkumerkki ja termeillä $t_0, \dots t_{n-1}$ ei ole sulkeita, niin kaavalla ϕ on ominaisuus P.

$\phi = \neg\psi$, missä kaavalla ψ on ominaisuus P induktioväitteen avulla: koska ϕ ei sisällä muita sulkeita kuin ne, jotka ovat kaavassa ψ, niin kaavalla ϕ on ominaisuus P.

$\phi = (\psi \wedge \chi)$, missä kaavoilla ψ ja χ on ominaisuus P induktioväitteen avulla: koska kaavalla ϕ on yksi oikeanpuoleinen ja yksi vasemmanpuoleinen sulje niiden sulkeiden lisäksi, jotka ovat kaavoissa ψ ja χ, niin kaavalla ϕ on ominaisuus P. Tapaukset $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ ja $(\phi \leftrightarrow \psi)$ voidaan todistaa vastaavasti.

$\phi = \forall x\psi$, missä kaavalla ψ on ominaisuus P induktioväitteen avulla: todistus sama kuin tapauksessa $\phi = \neg\psi$. Samoin voidaan todistaa kaava $\exists x\psi$. □

Apulause 3. (a) Jos $t_0, \dots, t_{n-1}$ ja $t'_0, \dots, t'_{m-1}$ ovat termejä ja jos $t_0, \dots, t_{n-1} = t'_0, \dots, t'_{m-1}$, niin $n = m$ ja $t_i = t'_i$, kun $i < n$.
(b) Jos $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$ ja $\phi'_0, \dots, \phi'_{m-1}$ ovat kaavoja ja jos $\phi_0, \dots, \phi_{n-1} = \phi'_0, \dots, \phi'_{m-1}$, niin $n = m$ ja $\phi_i = \phi'_i$, kun $i < n$.

Lause 2.1. *(a) Jokainen termi on joko vakio tai muuttuja tai termi, joka on muotoa $ft_0 \dots t_{n-1}$. Viimeisessä tapauksessa funktiosymboli f ja termit $t_0, \dots, t_{n_1}$ on yksikäsitteisesti määritelty.*
(b) Jokainen kaava on muotoa: (1) $t_0 \equiv t_1$ *tai* (2) $Rt_0 \dots t_{n-1}$ *tai* (3) $\neg\phi$ *tai* (4) $(\phi \wedge \psi)$ *tai* (5) $(\phi \vee \psi)$ *tai* (6) $(\phi \rightarrow \psi)$ *tai* (7) $(\phi \leftrightarrow \psi)$ *tai* (8) $\forall x\phi$ *tai* (9) $\exists x\phi$. *Kaikki nämä tapaukset ovat toisensa poissulkevia ja seuraavat ovat yksikäsitteisiä: termit t_0 ja t_1 kohdassa* (1), *relaatiosymboli R ja termit $t_0, \dots t_{n_1}$ kohdassa* 2, *kaava ϕ kohdassa* 3, *kaavat ϕ ja ψ kohdissa* (4), (5), (6) *ja* (7) *sekä muuttuja x ja kaava ϕ kohdissa* (8) *ja* (9).

Todistus. Sivuutetaan. (Ks. [2, s. 20-21]) □

Tämä lause vahvistaa sen, että termillä ja kaavalla on yksikäsitteinen esitys. Siis on vain yksi tapa muodostaa termi tai kaava atomikaavoista. Tällöin voidaan antaa induktiivinen määritelmä termeille ja kaavoille. Esimerkiksi, jotta voidaan määritellä funktio kaikille termeille, on riittävää

T1” liittää arvo jokaiseen vakioon,

T2” liittää arvo jokaiseen muuttujaan,

T3” jokaisella n-paikkaisella funktiosymbolilla f ja kaikille termeillä $t_0, \ldots, t_{n-1}$ liittää arvo termeihin $f(t_0 \ldots t_{n-1})$ olettaen, että arvot on jo liitetty termeihin $t_0, \ldots, t_{n-1}$.

Kohdat **T1**$''$:stä **T3**$''$:een liittävät jokaiseen termiin tasan yhden arvon. Tämä osoitetaan induktiolla termien rakenteen suhteen seuraavasti.

Todistus. $t = c$: Lauseen 2.1 (a)-kohdan mukaan t ei ole muuttuja eikä sen ensimmäinen symboli ole funktiosymboli. Tällöin sille liitetään arvo vain soveltamalla kohtaa **T1**$''$. Näin termille t on määrätty tasan yksi arvo.
$t = x$: Todistus on samanlainen kuin edellä.
$t = ft_0 \ldots t_{n-1}$ ja jokaiseen termiin $t_0, \ldots, t_{n-1}$ on liitetty tasan yksi arvo: Liitettäessä arvo termiin t, voidaan ainoastaan käyttää sääntöä **T3**$''$ lauseen 2.1 mukaan. Koska tämän saman lauseen mukaan arvot t_i on yksikäsitteisesti määritelty, termille t on määrätty yksikäsitteinen arvo. □

Seuraavaksi annetaan esimerkkejä funktion induktiivisesta määritelmästä. Funktio var (tarkemmin var_S), joka liittää jokaiseen S-termiin siinä esiintyvien muuttujien joukon, määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.3.

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(c) &:= \varnothing \\ \mathrm{var}(x) &:= \{x\} \\ \mathrm{var}(ft_0 \ldots t_{n-1}) &:= \mathrm{var}(t_0) \cup \cdots \cup \mathrm{var}(t_{n-1}). \end{aligned}$$

Määritellään kaavan ϕ *alikaavojen* joukko seuraavasti [12, s. 21]).

Määritelmä 2.4.

$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}(t_0 \equiv t_1) &:= \{t_0 \equiv t_1\} \\ \mathrm{Sub}(Rt_0 \ldots t_{n-1}) &:= \{Rt_0 \ldots t_{n-1}\} \\ \mathrm{Sub}(\neg\phi) &:= \{\neg\phi\} \cup Sub(\phi) \\ \mathrm{Sub}(\phi \wedge \psi) &:= \{(\phi \wedge \psi)\} \cup \mathrm{Sub}(\phi) \cup \mathrm{Sub}(\psi), \\ &\quad\ \text{vastaavasti } (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi) \text{ ja } (\phi \leftrightarrow \psi) \\ \mathrm{Sub}(\forall x\phi) &:= \{\forall x\phi\} \cup \mathrm{Sub}(\phi),\ \text{vastaavasti } \exists x\phi. \end{aligned}$$

2.2.3 Vapaat muuttujat ja lauseet

Kvanttorien vaikutusalassa olevia muuttujia kutsutaan *sidotuiksi*, muut muuttujat ovat *vapaita*. Tarkastellaan $\{R\}$ -kaavaa $\phi := Rxy \wedge \forall x\, Rxz$, missä x, y ja z ovat muuttujia. Tässä esimerkissä muuttuja x esiintyy sekä sidottuna että vapaana; ensimmäisessä esiintymässä vapaana ja toisessa sidottuna. Muut muuttujat ovat vapaita.

Kaavan ϕ vapaiden muuttujien joukko $\mathrm{free}(\phi)$ määritellään induktiivisesti kaavan ϕ rakenteen suhteen seuraavasti. Kiinnitetään symbolijoukko S.

Määritelmä 2.5.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{free}(t_0 \equiv t_1) &:= \mathrm{var}(t_0) \cup \mathrm{var}(t_1) \\
\mathrm{free}(Pt_0 \dots t_{n-1}) &:= \mathrm{var}(t_0) \cup \dots \cup \mathrm{var}(t_{n-1}) \\
\mathrm{free}(\neg\phi) &:= \mathrm{free}(\phi) \\
\mathrm{free}(\phi * \psi) &:= \mathrm{free}(\phi) \cup \mathrm{free}(\psi), \text{ kun } \quad * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \\
\mathrm{free}(\forall x\phi) &:= \mathrm{free}(\phi) - \{x\} \\
\mathrm{free}(\exists x\phi) &:= \mathrm{free}(\phi) - \{x\}
\end{aligned}
$$

Käytetään määritelmää määrittämään vapaiden muuttujien esiintymisen luvun 2.2.3 alussa olevassa kaavassa ϕ. Olkoot x, y ja z erillisiä muuttujia.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{free}(Rxy \wedge \forall x\, Rxz) &= \mathrm{free}(Rxy) \cup \mathrm{free}(\forall x\, Rxz) \\
&= \{x, y\} \cup (\mathrm{free}(Rxz) - \{x\}) \\
&= \{x, y\} \cup (\{x, z\} - \{x\}) \\
&= \{x, y, z\}.
\end{aligned}
$$

Kaavoja, joissa ei ole vapaita muuttujia, kutsutaan *lauseiksi*. Siis $\mathrm{free}(\phi) = \varnothing$. Esimerkiksi $\forall v_0\, v_0 \equiv v_0$ on lause. Merkitään L_n^S, kun tarkoitetaan sellaista S-kaavojen joukkoa, jossa vapaina esiintyvät kaavat ovat muuttujien $v_0, \dots, v_{n-1}$ joukossa:

$$L_n^S := \{\phi \mid \phi \text{ on S-kaava ja } \mathrm{free}(\phi) \subset \{v_0, \dots, v_{n-1}\}\}.$$

Erityisesti L_0^S on kaikkien L^S -lauseiden joukko.

3 Semantiikkaa

3.1 Propositiologiikan semantiikkaa

Semantiikassa tarkastellaan kaavojen totuutta. Tämä tapahtuu tulkitsemalla kaavassa esiintyvät propositiosymbolit reaalimaailman ilmiöiksi, jotka ovat joko tosia tai epätosia [5, s. 30]. Näin ollen kaavat saavat *totuusarvoikseen* joko toden (t) tai epätoden (e). Otetaan esimerkiksi propositio $\phi \vee \psi$. Arkikielessä tämä voisi tarkoittaa vaikkapa ”Matkustan kesäkuussa Kiinaan tai heinäkuussa Kanadaan.” Henkilö tuskin tällöin tarkoittaa matkustavansa molempiin. Arkikielessä konnektiivia ”tai” yleensä käytetään eksklusiivisessa tarkoituksessa, jolloin arkikielen lause on epätosi, mikäli molemmat sen osat ovat tosia. Tässä tutkielmassa kiinnitämme kuitenkin disjunktion inklusiiviseksi, jolloin yhdistetyn lauseen totuusarvo on tosi, jos toinen tai molemmat sen osista ovat tosia. Esitetään tämä *totuustaulussa* seuraavasti.

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
t	t	t
t	e	t
e	t	t
e	e	e

Muiden tässä tutkielmassa käytössä olevien konnektiivien totuustaulut ovat seuraavat.

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\phi \to \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
t	t	t	t	t
t	e	e	e	e
e	t	e	t	e
e	e	e	t	t

sekä

ϕ	$\neg\phi$
t	e
e	t

Sellaisen proposition totuusarvo, jonka osat on yhdistetty konnektiivilla, riippuu ainoastaan sen osien totuusarvoista. Tällöin voidaan käyttää seuraavaa kuvausta eli *totuusfunktiota*:

$$v : \{t, e\}^{n+1} \to \{t, e\}$$

konnektiivien totuusarvojen ilmaisemiseen.

3.2 Ensimmäisen kertaluvun logiikan semantiikkaa

3.2.1 Struktuurit ja tulkinnat

Tarkastellaan kaavaa $\forall v_0 \exists v_1 R v_0 v_1$, jonka muuttujien määrittelyjoukko on luonnollisten lukujen joukko ja tulkitaan binäärirelaatio R tässä määrittelyjoukossa. Tästä kaavasta ei selvästikään tiedetä, onko se tosi vai epätosi ennen kuin relaatiolle R annetaan tulkinta. Oletetaan, että Rv_0v_1 tulkitaan lauseeksi ”v_0 on pienempi kuin v_1” luonnollisten lukujen joukossa eli R on luonnollisten lukujen joukon ”pienempi kuin” -relaatio. Tässä tulkinnassa kaava on tosi, jolloin sanotaan, että kaava $\forall v_0 \exists v_1 R v_0 v_1$ on tosi struktuurissa $(\mathbb{N}, R^{\mathbb{N}})$. Toisaalta, jos R tulkitaan ”suurempi kuin” -relaatioksi, niin kaava on epätosi.

Määritelmä 3.1. S-struktuuri on pari $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$, jolla on seuraavat ominaisuudet.

(a) A on epätyhjä joukko alkioita, jotka muodostavat parin $\mathfrak{A}$ universumin eli määrittelyjoukon.

(b) $\mathfrak{a}$ on joukossa S määritelty kuvaus, joka liittää

(i) jokaiseen joukon S n-paikkaiseen relaatiosymboliin R n-paikkaisen relaation $\mathfrak{a}(R) \subseteq A^n$,

(ii) jokaiseen joukon S n-paikkaiseen funktiosymboliin f n-paikkaisen funktion $\mathfrak{a}(f) : A^n \to A$,

(iii) jokaiseen joukon S vakioon c alkion $\mathfrak{a}(c) \in A$. (Vrt. [5, s. 76-77],[4, s. 36])

Merkinnät $\mathfrak{a}(R)$, $\mathfrak{a}(f)$ ja $\mathfrak{a}(c)$ kirjoitetaan usein muodossa $R^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ ja $c^{\mathfrak{A}}$ tai vielä yksinkertaisemmin R^A, f^A ja c^A. Struktuureille $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$,... käytetään kirjaimia A, B, ... ilmaisemaan struktuureiden määrittelyjoukkoja. Lisäksi sen sijaan, että kirjoitetaan S-struktuuri muodossa $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$, korvataan $\mathfrak{a}$ listalla sen arvoja. Tällöin esimerkiksi, kun $S = \{R, f, g\}$, niin S-struktuuri voidaan kirjoittaa muodossa $\mathfrak{A} = (A, R^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, g^{\mathfrak{A}})$.

Tutkittaessa aritmetiikkaa symbolijoukot

$$S_{ar} := \{+, \cdot, 0, 1\} \quad \text{ja} \quad S_{ar}^{<} := \{+, \cdot, 0, 1, <\}$$

ovat erityisroolissa, missä $+$ ja $\cdot$ ovat 2-paikkaisia funktiosymboleita, 0 ja 1 ovat vakioita ja $<$ on 2-paikkainen relaatiosymboli. Tästä eteenpäin käytetään symbolia $\mathfrak{N}$ tarkoittamaan S_{ar}-struktuuria $(\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$, missä $+^{\mathbb{N}}$ ja $\cdot^{\mathbb{N}}$ ovat tavalliset yhteenlasku ja kertolasku luonnollisten lukujen joukossa ja $0^{\mathbb{N}}$ ja $1^{\mathbb{N}}$ ovat numerot 0 ja 1. Esimerkki $S_{ar}^{<}$ -struktuurista on $\mathfrak{N}^{<} := (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}})$, missä $<^{\mathbb{N}}$ tarkoittaa tavallista järjestystä luonnollisten lukujen joukossa. Vastaavasti asetetaan $\mathfrak{R}^{<} := (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}})$ ja $\mathfrak{R}^{<} := (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}})$. Usein yläindeksit $^{\mathbb{N}}$,$^{\mathbb{R}}$ jätetään pois. Asiayhteydestä selviää, tarkoitetaanko symbolilla $+$ funktiosymbolia, yhteenlaskua luonnollisten lukujen joukossa vai yhteenlaskua reaalilukujen joukossa.

Muuttujien tulkinta saadaan niin kutsutun tulkintafunktion avulla. Tulkintafunktio kuvaa muuttujat tarkasteltavan struktuurin alkioiksi (Vrt. [11, s. 68]).

Määritelmä 3.2. Tulkintafunktio $\mathfrak{A}$ S-struktuurissa on kuvaus $\beta : \{v_n | \; n \in \mathbb{N}\} \to A$ on muuttujajoukosta määrittelyjoukkoon A.

Nyt voidaan antaa tulkinnalle tarkka määritelmä.

Määritelmä 3.3. S-tulkinta $\mathfrak{I}$ on pari $(\mathfrak{A}, \beta)$, joka muodostuu S-struktuurista $\mathfrak{A}$ ja tulkintafunktiosta β struktuurissa $\mathfrak{A}$.

Kyseessä olevan tietyn symbolijoukon S ollessa joko selvä tai yhdentekevä, käytetään sanoja "termi", "kaava" tai "tulkinta", kun tarkoitetaan "S-termiä", "S-kaavaa" ja "S-tulkintaa".

Olkoon $\beta\frac{a}{x}$ tulkintafunktio struktuurissa $\mathfrak{A}$, joka kuvaa muuttujan x alkiolle a ja joka on sama tulkintafunktion β kanssa kaikilla muuttujasta x eroavilla muuttujilla. Nyt jos β on tulkintafunktio struktuurissa $\mathfrak{A}, a \in A$ ja x on muuttuja, niin

$$\beta\frac{a}{x}(y) = \begin{cases} \beta(y), & y \neq x \\ a, & y = x. \end{cases}$$

Jos $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, olkoon $\mathfrak{I}\frac{a}{x} = (\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x})$.

3.2.2 Totuusrelaatio

Totuusrelaatio kertoo, milloin kaava on tosi annetussa tulkinnassa. Kiinnitetään jälleen symbolijoukko S. Alustavasti yhdistetään jokaiseen tulkintaan $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ja jokaiseen termiin t alkio $\mathfrak{I}(t)$ määrittelyjoukosta A.

Määritelmä 3.4. (a) Olkoon $\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$ vakiolle $c \in S$.
(b) Olkoon $\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$ muuttujalle x.
(c) Olkoot $\mathfrak{I}(ft_0 \dots t_{n-1} := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_0), \dots, \mathfrak{A}(t_{n-1})$
n-paikkaiselle funktiosymbolille $f \in S$ ja termeille $t_0, \dots, t_{n-1}$.

Käyttämällä induktiota kaavan ϕ rakenteen suhteen, annetaan määritelmä relaatiolle "$\mathfrak{I}$ on kaavan ϕ malli", missä $\mathfrak{I}$ on mielivaltainen tulkinta. Sanotaan, että "$\mathfrak{I}$ toteuttaa kaavan ϕ" tai että "kaava ϕ on tosi tulkinnassa $\mathfrak{I}$", jos $\mathfrak{I}$ on kaavan ϕ malli. Tämä merkitään $\mathfrak{I} \vDash \phi$.

Määritelmä 3.5. Olkoon $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ tulkinta. Määritellään totuus induktiolla kaavojen rakenteen suhteen:
$\mathfrak{I} \vDash t_0 \equiv t_1$ joss $\mathfrak{I}(t_0) = \mathfrak{I}(t_1)$,
$\mathfrak{I} \vDash Rt_0 \dots t_{n-1}$ joss $(\mathfrak{I}(t_0) \dots \mathfrak{I}(t_{n_1})) \in R^{\mathfrak{A}}$
$\mathfrak{I} \vDash \neg\phi$ joss ei $\mathfrak{I} \vDash \phi$,
$\mathfrak{I} \vDash (\phi \wedge \psi)$ joss $\mathfrak{I} \vDash \phi$ ja $\mathfrak{I} \vDash \psi$,
$\mathfrak{I} \vDash (\phi \vee \psi)$ joss $\mathfrak{I} \vDash \phi$ or $\mathfrak{I} \vDash \psi$,
$\mathfrak{I} \vDash (\phi \rightarrow \psi)$ joss jos $\mathfrak{I} \vDash \phi$, niin $\mathfrak{I} \vDash \psi$,
$\mathfrak{I} \vDash (\phi \leftrightarrow \psi)$ joss $\mathfrak{I} \vDash \phi$, jos ja vain jos $\mathfrak{I} \vDash \psi$,
$\mathfrak{I} \vDash \forall x\phi$ joss kaikilla $a \in A$ on $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \phi$,
$\mathfrak{I} \vDash \exists x\phi$ joss on olemassa sellainen $a \in A$, että $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \phi$.

Jos Φ on S-kaavajoukko, niin sanotaan, että $\mathfrak{I}$ on kaavajoukon Φ malli ja kirjoitetaan $\mathfrak{I} \vDash \Phi$, jos $\mathfrak{I} \vDash \phi$ on tosi kaikilla $\phi \in \Phi$. Tarkastelemalla viimeisintä määritelmää voidaan todeta, että $\mathfrak{I} \vDash \phi$, jos ϕ on tosi tulkinnassa $\mathfrak{I}$.

3.2.3 Looginen seuraus

Totuusrelaation merkintätapaa käyttäen voidaan ilmaista tarkasti, milloin kaava on kaavajoukon seuraus. Oletetaan jälleen, että symbolijoukko S on annettu.

Määritelmä 3.6. (Looginen seuraus) Sanotaan, että ϕ on kaavajoukon Φ looginen seuraus (merkitään $\Phi \vDash \phi$), jos ja vain jos jokainen tulkinta, joka on kaavajoukon Φ malli, on myös kaavan ϕ malli.

Loogisen seurauksen käsitteen avulla voidaan nyt määritellä validisuus, toteutuminen ja looginen ekvivalenssi.

Määritelmä 3.7. Kaava ϕ on validi (merk. $\models \phi$), jos ja vain jos $\varnothing \models \phi$.

Tällöin kaava on validi, jos se on tosi kaikissa tulkinnoissa.

Määritelmä 3.8. Kaava ϕ on toteutuva (kirjoitetaan: Sat ϕ), jos ja vain jos on olemassa tulkinta, joka on ϕ:n malli. Kaavajoukko Φ on toteutuva (kirjoitetaan: Sat Φ), jos ja vain jos on olemassa tulkinta, joka on kaikkien kaavajoukon Φ kaavojen malli.

Apulause 4. Kaikilla Φ ja kaikilla ϕ,

$$\Phi \models \phi, \text{ jos ja vain jos ei Sat } \Phi \cup \{\neg\phi\}.$$

Erityisesti ϕ on validi, joss $\neg\phi$ ei ole toteutuva.

Todistus. $\Phi \models \phi$
jos ja vain jos jokainen tulkinta, joka on kaavajoukon Φ malli, on myös kaavan ϕ malli,
jos ja vain jos ei ole olemassa tulkintaa, joka on kaavajoukon Φ malli, mutta ei ole kaavan ϕ malli,
jos ja vain jos ei ole olemassa tulkintaa, joka on yhdisteen $\Phi \cup \{\neg\phi\}$ malli,
jos ja vain jos ei Sat $\Phi \cup \{\neg\phi\}$. $\square$

Määritelmä 3.9. Kaksi kaavaa, ϕ ja ψ, ovat loogisesti ekvivalentit, joss $\phi \models \psi$ ja $\psi \models \phi$.

Tällöin kaksi kaavaa, ϕ ja ψ, ovat loogisesti ekvivalentit, jos ja vain jos ne ovat tosia samoilla tulkinnoilla eli jos ja vain jos $\models \phi \leftrightarrow \psi$.

3.2.4 Lisää lauseita

On intuitiivisesti selvää, että totuusrelaatio S-kaavan ja S-tulkinnan $\mathfrak{I}$ välillä riippuu ainoastaan kaavassa ϕ esiintyvien joukon S symbolien tulkinnasta ja muuttujista, jotka esiintyvät vapaana kaavassa ϕ. Seuraava apulause antaa tarkan määritelmän.

Apulause 5. Olkoon $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ S_1-tulkinta ja $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ S_2-tulkinta, joilla molemmilla on sama määrittelyjoukko, eli $A_1 = A_2$. Asetetaan $S := S_1 \cap S_2$.

(a) Olkoon t S-termi. Jos $\mathfrak{I}_1$ ja $\mathfrak{I}_2$ ovat samat S-symboleilla, jotka esiintyvät termissä t ja muuttujilla, jotka esiintyvät termissä t, niin $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.

(b) Olkoon ϕ S-kaava. Jos $\mathfrak{I}_1$ ja $\mathfrak{I}_2$ ovat samat S-symboleilla ja kaavassa ϕ vapaana esiintyvillä muuttujilla, niin $\mathfrak{I}_1 \models \phi$, joss $\mathfrak{I}_2 \models \phi$.

Todistus. (a) Käytetään induktiota termien rakenteen suhteen.

$t = x$: Oletuksen perusteella $\beta_1(x) = \beta_2(x)$ ja tällöin $\mathfrak{I}_1(x) = \beta_1(x) = \beta_2(x) = \mathfrak{I}_2(x)$.

$t = c$: Vastaavasti.

$t = ft_0 \ldots t_{n-1}$ ($f \in S$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_0 \ldots t_{n-1} \in T^S$):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1(ft_0 \ldots t_{n-1}) &= f^{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{I}_1(t_0), \ldots, \mathfrak{I}_1(t_{n-1})) \\
&= f^{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{I}_2(t_0), \ldots, \mathfrak{I}_2(t_{n-1})) \text{ (Induktio-oletuksen mukaan)} \\
&= f^{\mathfrak{A}_2}(\mathfrak{I}_2(t_0), \ldots, \mathfrak{I}_2(t_{n-1})) \text{ (Oletuksen mukaan } f^{\mathfrak{A}_1} = f^{\mathfrak{A}_2}) \\
&= \mathfrak{I}_2(ft_0 \ldots t_{n-1}).
\end{aligned}$$

(b) Käytetään induktiota S-kaavojen rakenteen suhteen.

$\phi = Rt_0 \ldots t_{n-1}$ ($R \in S$ on n-paikkainen relaatiosymboli ja $t_0 \ldots t_{n-1} \in T^S$):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1 \models Rt_0 \ldots t_{n-1} \quad &\text{joss} \quad R^{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{I}_1(t_0) \ldots \mathfrak{I}_1(t_{n-1}) \\
&\text{joss} \quad R^{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{I}_2(t_0) \ldots \mathfrak{I}_2(t_{n-1}) \quad \text{(Kohdan (a) mukaan)} \\
&\text{joss} \quad R^{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{I}_2(t_0) \ldots \mathfrak{I}_2(t_{n-1}) \quad \text{(Oletuksen mukaan } R^{\mathfrak{A}_1} = R^{\mathfrak{A}_2}) \\
&\text{joss} \quad \mathfrak{I}_2 \models Rt_0 \ldots t_{n-1}.
\end{aligned}$$

$\phi = t_1 \equiv t_2$: Vastaavasti.

$\phi = \neg\psi$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1 \models \neg\psi \quad &\text{joss} \quad \text{ei } \mathfrak{I}_1 \models \psi \\
&\text{joss} \quad \text{ei } \mathfrak{I}_2 \models \psi \qquad \text{(Oletuksen mukaan)} \\
&\text{joss} \quad \mathfrak{I}_2 \models \neg\psi
\end{aligned}$$

$\phi = (\psi \vee \chi)$: Vastaavasti.

$\phi = \exists x\psi$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1 \models \exists x\psi \quad &\text{joss} \quad \text{on olemassa } a \in A_1 \text{ siten, että } \mathfrak{I}_1\frac{a}{x} \models \psi \\
&\text{joss} \quad \text{on olemassa } a \in A_2\,(= A_1) \text{ siten, että } \mathfrak{I}_2\frac{a}{x} \models \psi.
\end{aligned}$$

(Soveltamalla induktio-oletusta kaavaan ψ ja tulkintoihin $\mathfrak{I}_1\frac{a}{x}$ ja $\mathfrak{I}_2\frac{a}{x}$ huomataan, että koska free(ψ) $\subset$ free(ϕ)$\cup\{x\}$, tulkinnat $\mathfrak{I}_1\frac{a}{x}$ ja $\mathfrak{I}_2\frac{a}{x}$ ovat samat kaikilla symboleilla, jotka esiintyvät kaavassa ψ ja kaikilla muuttujilla, jotka esiintyvät vapaana kaavassa ψ)

$$\text{joss} \quad \mathfrak{I}_2 \models \exists x\psi.$$

$\square$

Siis erityisesti S-kaavalle ϕ ja S-tulkinnalle $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ kaavan ϕ validisuus tulkinnalla $\mathfrak{I}$ riippuu ainoastaan kaavassa ϕ vapaana esiintyvien äärellisen monen muuttujan tulkintafunktioista (sekä tietenkin struktuurin $\mathfrak{A}$ S-symbolien tulkinnasta). Jos nämä muuttujat ovat joukossa $v_0, \ldots v_{n-1}$ eli $\phi \in L_n^S$, niin korkeintaan β-arvot $a_i = \beta(v_i)$, kun $i = 0, \ldots, n-1$, ovat merkitseviä. Joten sen sijaan, että käytettäisiin merkintätapaa $(\mathfrak{A}, \beta) \vDash \phi$, käytetään usein enemmän suuntaa antavaa merkintätapaa

$$\mathfrak{A} \vDash \phi\,[a_0, \ldots, a_{n-1}].$$

Samoin S-termille t siten, että $\mathrm{var}(t) \subset v_0, \ldots, v_{n-1}$ kirjoitetaan $t^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ sen sijaan, että käytettäisiin merkintätapaa $\mathfrak{I}(t)$. Kun ϕ on lause , siis $\phi \in L_0^S$, valitaan $n = 0$ ja kirjoitetaan

$$\mathfrak{A} \vDash \phi,$$

mainitsematta ollenkaan tulkintafunktiota. Näin ollen sanotaan, että $\mathfrak{A}$ on kaavan ϕ malli. Kaavajoukolle $\Phi, \mathfrak{A} \vDash \Phi$ tarkoittaa, että $\mathfrak{A} \vDash \phi$ jokaisella $\phi \in \Phi$.

Määritelmä 3.10. Olkoot S ja S' symbolijoukkoja siten, että $S \subset S'$ ja olkoot $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ S-struktuuri ja $\mathfrak{A}' = (A', \mathfrak{a}')$ S'-struktuuri. Kutsutaan struktuuria $\mathfrak{A}$ struktuurin $\mathfrak{A}'$ reduktiksi (tarkemmin struktuurin $\mathfrak{A}'$ S-reduktiksi), jos ja vain jos $A = A'$ ja $\mathfrak{a}(x)$ ja $\mathfrak{a}'(x)$ jokaisella symbolilla x, joka kuuluu S:ään. Tässä tapauksessa struktuuria $\mathfrak{A}'$ kutsutaan struktuurin $\mathfrak{A}$ ekspansioksi. Merkitään $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction S$.

Jos $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction S$, niin apulauseesta 5 seuraa, että kun $\phi \in L_n^S$ ja $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, $\mathfrak{A} \vDash \phi\,[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A}' \vDash \phi\,[a_0, \ldots, a_{n-1}]$. Jotta tämä toteutuisi, valitaan $\beta : \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \to A$ siten, että $\beta(v_i) = a_i$, kun $i < n$ ja sovelletaan apulausetta 5 tulkintoihin $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}, \beta)$ ja $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}', \beta)$. Tulkinnat $\mathfrak{I}_1$ ja $\mathfrak{I}_2$ ovat samoja niillä symboleilla, jotka esiintyvät kaavassa ϕ ja muuttujilla, jotka esiintyvät vapaana kaavassa ϕ.

Tulkinta, looginen seuraus ja toteutuvuus viittaavat kiinnitettyyn symbolijoukkoon S. Käyttämällä apulausetta 5 voidaan tämä viittaus joukkoon S poistaa. Mietitään esimerkiksi toteutuvuuden käsitettä. Jos Φ on joukko S-kaavoja ja $S' \supset S$, niin Φ on myös joukko S'-kaavoja. S-kaavajoukkona Φ on toteutuva, jos on olemassa S-tulkinta, joka toteuttaa sen ja S'-kaavajoukkona Φ on toteutuva, jos on olemassa S'-tulkinta, joka toteuttaa sen. Siispä

Apulause 6. Φ on toteutuva jossakin S-struktuurissa, jos ja vain jos Φ on toteutuva struktuurissa S'.

Todistus. Jos $\mathfrak{I}' = (\mathfrak{A}', \beta')$ on S'-tulkinta siten, että $\mathfrak{I}' \vDash \Phi$, niin apulauseen 5 mukaan S-tulkinta $(\mathfrak{A}' \restriction S, \beta')$ on kaavajoukon Φ malli. Toisaalta, jos $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ on S-tulkinta, joka toteuttaa joukon Φ, valitaan S'-struktuuri $\mathfrak{A}'$ siten, että $\mathfrak{A}' \restriction S = \mathfrak{A}$. (Symbolit joukoissa $S' - S$ voidaan tulkita mielivaltaisesti). Apulauseen 5 mukaan S-tulkinta $(\mathfrak{A}', \beta)$ on kaavajoukon Φ malli. $\square$

Tämän luvun 3.2.4 lopuksi tutustutaan isomorfisiin struktuureihin.

Määritelmä 3.11. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ S-struktuureita.

(a) Kuvausta $\pi : A \to B$ sanotaan *isomorfismiksi* joukolta A joukolle B (merkitään $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) jos ja vain jos

(i) π on bijektio joukolta A joukolle B;

(ii) $R^{\mathfrak{A}} a_0 \dots a_{n-1}$ jos ja vain jos $R^{\mathfrak{B}} \pi(a_0) \dots \pi(a_{n-1})$, kun $R \in S$ on n-paikkainen relaatiosymboli ja $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$,

(iii) $\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_0), \dots, \pi(a_{n-1}))$, kun $f \in S$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$,

(iv) $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$, jokaisella $c \in S$.

(b) Struktuureita $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ sanotaan *isomorfisiksi* (merk. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), jos ja vain jos on olemassa isomorfismi $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Seuraava apulause osoittaa, että isomorfisia struktuureita ei voi erottaa toisistaan ensimmäisen kertaluvun lauseiden avulla.

Apulause 7. Jos $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat isomorfisia S-struktuureita, niin kaikilla S-lauseilla ϕ

$$\mathfrak{A} \models \phi, \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{B} \models \phi.$$

Todistus. Olkoon $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Aiotulle induktiotodistukselle ei ole ainoastaan kätevää osoittaa, että samat S-struktuurit toteutuvat struktuureissa $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$, vaan myös se, että S-kaavat toteutuvat, jos käytetään toisiaan vastaavia tulkintafunktioita: Jokaiseen tulkintafunktioon β struktuurissa A liitetään tulkintafunktion $\beta^{\pi} := \pi \circ \beta$ struktuurissa $\mathfrak{B}$ ja toisiaan vastaaville tulkinnoille $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ja $\mathfrak{I} := (\mathfrak{B}, \beta^{\pi})$ osoitetaan:

(i) $\pi(\mathfrak{I}(t)) = \mathfrak{I}^{\pi}(t)$ jokaisella S-termillä t.

(ii) $\mathfrak{I} \models \phi$ jos ja vain jos $\mathfrak{I}^{pi} \models \phi$, jokaisella S-kaavalla ϕ.

Tämä täydentää todistuksen.
(i) voidaan helposti todistaa induktiolla termien rakenteen suhteen.
(ii) todistetaan induktiolla kaavojen ϕ rakenteen suhteen yhtäaikaisesti kaikilla tulkintafunktioilla β struktuurissa $\mathfrak{A}$. Käsitellään ainoastaan atomilauseet ja ne vaiheet, jotka käsittelevät negaatiota ja olemassaolokvanttoria.
$\phi = t_0 \equiv t_1$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \models t_0 \equiv t_1, \quad & \text{joss} \quad \mathfrak{I}(t_0) = \mathfrak{I}(t_1) \\ & \text{joss} \quad \pi(\mathfrak{I}(t_0)) = \pi(\mathfrak{I}(t_1)) \quad \text{(Koska } \pi : A \to B \text{ on injektiivinen)} \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{I}^{\pi}(t_0) = \mathfrak{I}^{\pi}(t_1) \qquad \text{(Kohdan (i) mukaan)} \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{I}^{\pi} \models t_0 \equiv t_1. \end{aligned}$$

$\phi = Rt_0 \ldots t_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models Rt_0 \ldots t_{n-1}, \quad & \text{joss} \quad R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_{n-1}) \\
& \text{joss} \quad R^{\mathfrak{B}}\pi(\mathfrak{I}(t_0)) \ldots \pi(\mathfrak{I}(t_{n-1}) \qquad \text{(Koska } \pi : A \cong B\text{)} \\
& \text{joss} \quad R^{\mathfrak{B}}\mathfrak{I}^{\pi}(t_0) \ldots \mathfrak{I}^{\pi}(t_{n-1}) \qquad \text{(Kohdan (i) mukaan)} \\
& \text{joss} \quad \mathfrak{I}^{\pi} \models Rt_0 \ldots t_{n-1}.
\end{aligned}$$

$\phi = \neg\psi$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1 \models \neg\psi, \quad & \text{joss} \quad \text{ei } \mathfrak{I} \models \psi \\
& \text{joss} \quad \text{ei } \mathfrak{I}^{\pi} \models \psi \qquad \text{(Induktio-oletuksen mukaan)} \\
& \text{joss} \quad \mathfrak{I}^{\pi} \models \neg\psi
\end{aligned}$$

$\phi = \exists x\psi$:

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{I} \models \exists x\psi \\
& \qquad \text{joss} \quad \text{on olemassa } a \in A \text{ siten, että } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi \\
& \qquad \text{joss} \quad \text{on olemassa } a \in A \text{ siten, että } \left(\mathfrak{I}\frac{a}{x}\right)^{\pi} \models \psi \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Induktio-oletuksen mukaan)} \\
& \qquad \text{joss} \quad \text{on olemassa } a \in A \text{ siten, että } \mathfrak{I}^{\pi}\frac{\pi(a)}{x} \models \psi \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Koska } \left(\mathfrak{I}\frac{a}{x}\right)^{\pi} = \mathfrak{I}^{\pi}\frac{\pi(a)}{x}\text{)} \\
& \qquad \text{joss} \quad \text{on olemassa alkio } b \in B \text{ siten, että } \mathfrak{I}^{\pi}\frac{b}{x} \models \psi \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Koska } \pi : A \to B \text{ on surjektiivinen)} \\
& \qquad \text{joss} \quad \mathfrak{I}^{\pi} \models \exists x\psi.
\end{aligned}$$

□

Tämän todistuksen perusteella saadaan

Seuraus 1. Jos $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, niin kun $\phi \in L_n^S$ ja $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, $\mathfrak{A} \models \phi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{B} \models \phi[\pi(a_0), \ldots, \pi(a_{n-1})]$.

□

Apulauseen 7 mukaan isomorfisia S-struktuureita ei voi erotella joukossa L_0^S.

3.2.5 Sijoitus

Tässä luvussa määritellään, miten korvataan muuttuja x termillä t kaavassa ϕ silloin, kun x esiintyy vapaana. Tämä merkitään $\phi\frac{t}{x}$. Tällöin saadaan kaava ψ.

Esimerkki 3.1. Olkoon $\phi := \forall z\ z \geq x$. Struktuurissa $\mathfrak{R}$ kaavan ϕ mukaan x aina edeltää z:tä.

Sijoittamalla muuttuja y muuttujan x sijaan, saadaan $\forall z\ z \geq y$, minkä mukaan y on on pienempi tai yhtä suuri kuin z. Mikäli kuitenkin sijoitetaan muuttujan x paikalle muuttujan z, saadaan $\forall z\ z \geq z$. Itse asiassa tämä kaava on validi struktuurissa $\mathfrak{R}$ riippumatta muuttujan z tulkintafunktiosta, sillä $z \geq z$ aina. Kaavan tarkoitus muuttuu, koska siinä missä muuttuja x esiintyy on vapaana, z onkin sidottu.

Kaava, joka ilmaisee saman muuttujasta z kuin ϕ ilmaisee muuttujasta x, saadaan seuraavasti: Ensin esitellään uusi sidottu muuttuja u kaavassa ϕ. Näin saadussa kaavassa $\forall u\ u \geq x$ korvataan muuttuja x muuttujalla z. On epäolennaista mikä muuttuja u valitaan, kunhan se eroaa muuttujista x ja z. Teknistä tarkoitusta varten on hyödyllistä kiinnittää tehty valinta.

Täsmällisessä määritelmässä yhden muuttujan korvaamisen sijasta määritellään menettelytapa korvaamaan useita muuttujia yhtäaikaisesti; annettuun kaavaan ϕ, pareittain eri muuttujiin $x_0, \ldots, x_r$ ja mielivaltaisiin termeihin $t_0, \ldots, t_r$ liitetään kaava

$$\phi\frac{t_0, \ldots, t_r}{x_0, \ldots, x_r},$$

joka saadaan kaavasta ϕ korvaamalla samanaikaisesti muuttujat $x_0, \ldots, x_r$ termeillä $t_0, \ldots, t_r$. Huomattakoon, että x_i korvataan termillä t_i ainoastaan, jos $x_i \in \mathrm{free}(\phi)$ ja $x_i \neq t_i$. Induktiivisessa määritelmässä 3.13 tämä huomioidaan erityisesti kvanttorikohdassa.

Olkoon S kiinnitetty symbolijoukko.

Määritelmä 3.12.

$$(a) \qquad x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \begin{cases} x, & \text{jos } x \neq x_0, \ldots x \neq x_r \\ t_i, & \text{jos } x = x_i, \end{cases}$$

$$(b) \qquad c\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := c$$

$$(c) \qquad ft'_0 \ldots t'_{n-1}\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := ft'_0\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \ldots t'_{n-1}\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$$

Lukemisen helpottamiseksi käytetään jatkossa hakasulkeita.

Määritelmä 3.13.

$$\text{(a)} \qquad [t'_0 \equiv t'_1]\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \quad := \quad t'_0\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \equiv t'_1\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$$

$$\text{(b)} \qquad [Rt'_0 \ldots t'_{n-1}]\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \quad := \quad Rt'_0\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \ldots t'_{n-1}\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$$

$$\text{(c)} \qquad [\neg\phi]\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \quad := \quad \neg\left[\phi\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right]$$

$$\text{(d)} \qquad (\phi \vee \psi)\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \quad := \quad \phi\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \vee \psi\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$$

(e) Oletetaan, että $x_{i_0}, \ldots, x_{i_{s-1}} (i_0 < \cdots < i_{s-1})$ ovat täsmälleen ne muuttujat x_i joukossa $x_0, \ldots, x_r$, että

$$x_i \in \mathrm{free}(\exists x\phi) \quad \text{ja} \quad x_i \neq t_i.$$

Asetetaan

$$[\exists x\phi]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \exists u\left[\phi\frac{t_{i_0} \ldots t_{i_{s-1}} u}{x_{i_0} \ldots x_{i_{s-1}} x}\right],$$

missä u on muuttuja x, jos x ei esiinny termeissä $t_{i_0} \ldots t_{i_{s-1}}$. Muuten u on ensimmäinen muuttuja listalla $v_0, v_1, v_2, \ldots$, joka ei esiinny jonossa $\phi, t_{i_0} \ldots t_{i_{s-1}}$.

Esittelemällä muuttuja u, varmistetaan, ettei mikään muuttuja, joka esiintyy termeissä $t_{i_0} \ldots t_{i_{s-1}}$ ole kvanttorin vaikutusalassa. Siltä varalta, että ei ole sellaista muuttujaa x_i, että $x_i \in \mathrm{free}(\exists x\phi)$ ja $x_i \neq t_i$, niin $s = 0$ ja kohdan (e) mukaan saadaan

$$[\exists x\phi]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = \exists x\left[\phi\frac{x}{x}\right],$$

joka siis on $\exists x\phi$, kuten nähdään apulauseessa 9 (b).

Esimerkki 3.2. Olkoot P 2-paikkainen relaatiosymboli ja f 2-paikkainen funktiosymboli.

$$\text{(a)} \qquad [Pv_0\,fv_1v_2]\,\frac{v_3fv_1v_1}{v_1\quad v_2} \quad = \quad Pv_0\,fv_3\,fv_1v_1$$

$$\text{(b)} \qquad [\exists v_0\,Pv_0\,fv_1v_2]\,\frac{v_1v_2}{v_0v_1} \quad = \quad \exists v_0\,[Pv_0\,fv_1v_2\,\frac{v_2v_0}{v_1v_0}] \quad = \quad \exists v_0\,Pv_0\,fv_2v_2$$

$$\text{(c)} \qquad [\exists v_0\,Pv_0\,fv_1v_2]\,\frac{v_1v_0v_2}{v_1v_2v_0} \quad = \quad \exists v_3\,[Pv_0\,fv_1v_2\,\frac{v_0v_3}{v_2v_0}] \quad = \quad \exists v_3\,Pv_3\,fv_1v_0$$

Kohdissa, joissa x_i esiintyy vapaana kaavassa ϕ, termi t_i esiintyy sijoituksessa $\phi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$. Tällöin, mikäli $\mathrm{free}(\phi) \subset \{x_0, \ldots, x_r\}$, niin odotetaan, että $\phi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$ toteutuu tulkinnassa $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, jos ja vain jos ϕ toteutuu struktuurissa $\mathfrak{A}$, olettaen, että käytetään tulkintaa $\mathfrak{I}(t_0)$ muuttujalle $x_0, \ldots,$ $\mathfrak{I}(t_r)$ muuttujalle x_r. Tämän ominaisuuden täsmällinen määrittely annetaan apulauseessa 8.

Ennen apulauseen 8 määrittelyä, yleistetään tulkinnan $\mathfrak{I}\frac{a}{x}$ määrittely. Olkoot $x_0, \ldots, x_r$ pareittain eriävät ja oletetaan, että $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ on tulkinta ja $a_0, \ldots, a_r \in A$, niin tulkintafunktio $\beta\frac{a_0 \ldots a_r}{x_0 \ldots x_r}$ struktuurissa $\mathfrak{A}$ ja tulkinta $\mathfrak{I}\frac{a_0 \ldots a_r}{x_0 \ldots x_r}$ saadaan seuraavasti:

$$\beta\frac{a_0 \ldots a_r}{x_0 \ldots x_r}(y) := \begin{cases} \beta(y), & \text{jos } y \neq x_0, \ldots, y \neq x_r \\ a_i, & y = x_i \end{cases}$$

ja

$$\mathfrak{I}\frac{a_0 \ldots a_r}{x_0 \ldots x_r} := \left(\mathfrak{A}, \beta\frac{a_0 \ldots a_r}{x_0 \ldots x_r}\right).$$

Apulause 8 (Sijoitus)**.** (a)

$$\mathfrak{I}(t\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}(t),$$

jokaisella termillä t.
(b)

$$\mathfrak{I} \models \phi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}, \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r} \models \phi,$$

jokaisella kaavalla ϕ.

Todistus. Sivuutetaan. (Ks. [2, s. 54]) $\square$

Seuraavassa apulauseessa kerätään yhteen useita sijoituksen syntaktisia ominaisuuksia.

Apulause 9. (a)

$$\phi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = \phi\frac{t_{\pi(0)} \ldots t_{\pi(r)}}{x_{\pi(0)} \ldots x_{\pi(r)}}$$

jokaisella lukujen $0, \ldots, r$ permutaatiolla π.
(b) Jos $0 \leq i \leq r$ ja $x_i = t_i$, niin

$$\phi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = \phi\frac{t_0 \ldots t_{i-1}t_{i+1} \ldots t_r}{x_0 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_r}. \text{ Erityisesti } \phi\frac{x}{x} = \phi.$$

(c) Jokaisella muuttujalla y

(i) jos $y \in \text{var}\left(t\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)$, niin ($y \in \text{var}(t_0) \cup \cdots \cup \text{var}(t_r)$) tai ($y \in \text{var}(t)$ ja $y \neq x_0, \ldots, y \neq x_r$);

(ii) Jos $y \in \text{free}\left(\phi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)$, niin ($y \in \text{var}(t_0) \cup \cdots \cup \text{var}(t_r)$) tai ($y \in \text{free}(t)$ ja $y \neq x_0, \ldots, y \neq x_r$).

Todistus. Sivuutetaan. □

Seuraus 2. Olkoon $\text{free}(\phi) \subset \{x_0, \ldots, x_r\}$, missä jatketaan oletusta, että $x_0, \ldots, x_r$ ovat erillisiä. Silloin termeille $t_0, \ldots, t_r$ siten, että $\text{var}(t_i) \subset \{v_0, \ldots v_{n-1}\}$, kaava $\phi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$ on joukossa L_n. Erityisesti $\phi\frac{c_0 \ldots c_r}{x_0 \ldots x_r}$ on lause.

Konnektiivien ja kvanttoreiden määrää kaavassa ϕ merkitään $\text{rank}(\phi)$. Tarkemmin:

Määritelmä 3.14.

$$\begin{aligned}
\text{rank}(\phi) &:= 0, \text{ jos } \phi \text{ on atomilause,} \\
\text{rank}(\neg\phi) &:= \text{rank}(\phi) + 1, \\
\text{rank}(\phi \vee \psi) &:= \text{rank}(\phi) + \text{rank}(\psi) + 1, \\
\text{rank}(\exists x\phi) &:= \text{rank}(\phi) + 1.
\end{aligned}$$

Suoraan sijoituksen apulauseesta saadaan

Apulause 10.

$$\text{rank}(\phi\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}) = \text{rank}(\phi).$$

□

Kvanttori "on olemassa yksikäsitteinen" voidaan kätevästi muotoilla sijoituksen käytöllä. Olkoon ϕ kaava, x muuttuja ja y ensimmäinen muuttujasta x eroava muuttuja ja joka esiinny vapaana kaavassa ϕ. Kirjoitetaan $\exists! x\phi$, kun $\exists x(\phi \wedge \forall y(\phi\frac{y}{x} \rightarrow x \equiv y))$. Kaava $\exists! x\phi$ siis tarkoittaa "on olemassa yksikäsitteinen x siten, että ϕ". On helppo osoittaa, että jokaisella tulkinnalla $\mathfrak{I} = (\mathfrak{I}, \beta)$,

$$\mathfrak{I} \models \exists! x\phi, \text{ jos on olemassa yksikäsitteinen } a \in A \text{ siten, että } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \phi.$$

4 Sekventtikalkyyli

Olkoot S symbolijoukko ja Φ joukko S-lauseita. Tällöin merkitään $\Phi^{\models}$ tarkoittamaan joukkoa S-lauseita, jotka seuraavat joukosta Φ. S-lauseen ϕ matemaattinen todistus joukon Φ aksioomista osoittaa, että ϕ kuuluu joukkoon $\Phi^{\models}$. Nyt kysymys kuuluu, onko jokainen joukon $\Phi^{\models}$ lause todistuva joukon Φ aksioomista.

Jatketaan samalla tavoin kuin aiemmin esiteltäessä matemaattisen väitteen käsite täsmällisesti. Aloitetaan esittelemällä matemaattisen päättelyn osia. Esimerkiksi jo saaduista väitteistä ϕ ja ψ voidaan edetä konjunktioon

$(\phi \wedge \psi)$. Samoin voidaan edetä väitteistä Px ja $x \equiv t$ tulokseen Pt. Nämä voidaan esittää skemaattisesti:

$$\frac{\phi, \quad \psi}{(\phi \wedge \psi)} \qquad\qquad \frac{Px, x \equiv t}{Pt}$$

Tällä tavoin esitettyinä näitä todistuksen osia voidaan pitää syntaktisina operaatioina symbolijonoille. Tätä näkökulmaa yhdenmukaisesti noudattaen laaditaan lista päättelysääntöjä, jotka muodostavat kalkyylin $\mathfrak{S}$. Luvussa 4.6 annetaan olennainen määritelmä kaavan ϕ formaalin todistuvuuden käsitteelle kaavajoukosta Φ (Vrt. 4.1). Tämä määritelmä perustuu formaalin todistuksen käsitteelle kalkyylissä $\mathfrak{S}$. Formaali todistus on syntaktinen vastine seurauksen semanttiselle käsitteelle. Tässä luvussa käytetään kiinnitettyä symbolijoukkoa S.

4.1 Sekventtisäännöt

Matemaattinen todistus etenee yhdestä väitteestä toiseen, kunnes se lopulta päätyy kyseessä olevan lauseen väitteeseen. Yksittäiset väitteet riippuvat tietyistä oletuksista. Nämä voivat olla lauseeseen liittyviä oletuksia tai lisäoletuksia, jotka tilapäisesti oletetaan todistuksen aikana. Esimerkiksi haluttaessa todistaa vastaoletuksen avulla välivaiheen väite ϕ, niin lisätään $\neg\phi$ oletuksiin; jos vastaoletus johtaa ristiriitaan, niin ϕ on todistettu.

Tämä havainto johdattaa kuvaamaan yhden todistuksen vaiheen listaamalla oletukset ja niitä vastaavan väitteen. Otetaan esimerkiksi vaihe, jonka oletukset ovat $\phi_0 \dots \phi_{n-1}$ ja väite ϕ. Kutsutaan mitä tahansa epätyhjää kaavalistaa *sekventiksi*. Näitä sekventtejä voidaan käyttää kuvailemaan todistuksen eri vaiheita. Edellä mainitut oletukset ja väite esitetään sekventtinä $\phi_0 \dots \phi_{n-1}\phi$. Jonoa $\phi_0 \cdots \phi_{n-1}$ kutsutaan sekventin $\phi_0 \dots \phi_{n-1}\phi$ *edeltäjäksi* ja väitettä ϕ sen *seuraajaksi*. Apulauseesta 3 seuraa, että kaavat, jotka muodostavat sekventin, ovat yksikäsitteisesti muodostettuja. Erityisesti, edeltäjä ja seuraaja ovat hyvinmääriteltyjä.

Sekventtien suhteen epäsuora todistus, joka edellä hahmoteltiin, voidaan esittää skemaattisesti seuraavasti:

$$(+) \qquad \begin{array}{lll} \phi_0 \cdots \phi_{n-1} & \neg\phi & \psi \\ \phi_0 \cdots \phi_{n-1} & \neg\phi & \neg\psi \\ \hline \phi_0 \cdots \phi_{n-1} & & \phi \end{array}$$

Täten (+) esittää seuraavan väitteen: mikäli oletuksista $\phi_0 \dots \phi_{n-1}$ ja (lisäoletuksesta) $\neg\phi$ seuraa sekä kaava ψ että sen negaatio $\neg\psi$ (eli vastaväite), niin oletuksista $\phi_0 \dots \phi_{n-1}$ voidaan päätellä ϕ. Tästä eteenpäin käytetään kirjaimia Γ, Δ,... merkitsemään (mahdollisesti tyhjiä) kaavajonoja. Tällöin sekventit voidaan kirjoittaa muodossa $\Gamma\phi\psi$, $\Delta\psi$, ... ja kaavio (+) seuraavasti:

$$(+\,+) \qquad \begin{array}{lll} \Gamma & \neg\phi & \psi \\ \Gamma & \neg\phi & \neg\psi \\ \hline \Gamma & & \phi \end{array}$$

(Kuten kohdassa (+), sekventtien alkioiden välistä tilaa käytetään helpottamaan lukemista).

Tähän mennessä esitettyjen käsitteiden mukaan jokainen todistuksen askel johtaa tietyistä jo saavutetuista vaiheista uusiin sekventteihin ja siis sekventeistä uusiin sekventteihin. On siis luonnollista esittää päättelysäännöt kalkyylin $\mathfrak{S}$ sääntöinä, jotka käytävät sekventtejä, kuten kohdassa (+ +).

Mikäli kalkyylissä $\mathfrak{S}$ sekventti $\Gamma\phi$ on todistuva, niin kirjoitetaan $\vdash \Gamma\phi$.

Määritelmä 4.1. Kaava ϕ on *formaalisti todistuva* tai *johdettavissa* kaavajoukosta Φ (merk. $\Phi \vdash \phi$), jos ja vain jos on olemassa äärellisen monta kaavaa $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ joukossa Φ siten, että $\vdash \phi_0 \ldots \phi_{n-1}\phi$.

Sekventtiä $\Gamma\phi$ sanotaan *korrektiksi*, jos $\Gamma \models \phi$. Täsmällisemmin esitettynä $\{\psi \,|\, \psi \text{ on } \Gamma\text{:n jäsen}\} \models \phi$. Mikäli kalkyylin $\mathfrak{S}$ säännöt muodostetaan tavallisista matemaattisista oletuksista, huomataan, että ne ovat korrekteja. Siis sääntöjä sovellettaessa korrekteihin sekventteihin, ne antavat tulokseksi korrektin sekventin. Tästä seuraa, että jokainen kaava, joka on todistuva kaavajoukossa Φ, myös seuraa kaavajoukosta Φ.

4.2 Struktuuri- ja konnektiivisäännöt

Jaetaan sekventtikalkyylin $\mathfrak{S}$ säännöt neljään luokkaan: struktuurisääntöihin, konnektiivien sääntöihin, kvanttorisääntöihin ja identiteettisääntöihin.

4.2.1 Ant (Antecedent Rule)

$\dfrac{\Gamma \;\; \phi}{\Gamma' \;\; \phi}$, jos jokainen Γ:n jäsen on myös Γ':n jäsen (lyhyesti: jos $\Gamma \subseteq \Gamma$').

Sääntö (Ant) ilmaisee sen tosiseikan, että on mahdollista uudelleenjärjestää tai lisätä oletuksia. Huomattakoon, että kaava, joka esiintyy useammin kuin kerran oletusjoukossa Γ, esiintyy ainoastaan kerran joukossa Γ'.

Todistus. (Ant) Jos sekventti $\Gamma\phi$ on korrekti ja $\Gamma \subset \Gamma'$, joten koska $\Gamma \models \phi$, niin myös $\Gamma' \models \phi$. $\square$

Sääntö (Ass) kuvaa sen yksinkertaisen tosiasian, että ϕ voidaan päätellä joukosta oletuksia, jotka sisältävät ϕ:n.

4.2.2 Ass (Assumption Rule)

$$\overline{\Gamma \quad \phi}\text{, jos } \phi \text{ on } \Gamma\text{:n jäsen.}$$

Todistus. (Ass) (Ass) on korrekti, sillä $\Phi \vDash \phi$ on aina tosi, kun $\phi \in \Phi$. $\square$

Ensimmäinen negaation sisältävä sääntö on yleisesti käytetty todistusmetodi PC. Kaavan ϕ päättely kaavajoukosta Φ: tarkastellaan ensin tapausta, jossa ψ on tosi ja sen jälkeen käsitellään tilanne, jossa $\neg\psi$ on tosi. Siis oletuksena on ensin ψ ja sen jälkeen lisäoletuksena $\neg\psi$. Muutetaan tämä väite sekventtisäännöksi seuraavasti.

4.2.3 PC (Proof by Cases Rule)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \psi & \phi \\ \Gamma & \neg\psi & \phi \\ \hline \Gamma & & \phi \end{array}$$

Todistus. (PC) Olkoot $\Gamma\,\psi \vDash \phi$ ja $\Gamma\,\neg\psi \vDash \phi$ tosia. Osoitetaan, että $\Gamma \vDash \phi$. Olkoon $\mathfrak{I}$ mikä tahansa tulkinta siten, että $\mathfrak{I} \vDash \Gamma$. Siis $\mathfrak{I} \vDash \chi$ jokaisella Γ:n jäsenellä χ. Nyt joko $\mathfrak{I} \vDash \psi$ tai $\mathfrak{I} \vDash \neg\psi$. Jos $\mathfrak{I} \vDash \psi$, niin koska $\Gamma\,\psi \vDash \phi$, niin tästä seuraa, että $\mathfrak{I} \vDash \phi$. Jos $\mathfrak{I} \vDash \neg\psi$, saadaan sama tulos, koska $\mathfrak{I}\,\neg\psi \vDash \phi$. $\square$

Toisena negaatiota koskevana sääntönä tarkastelemme kohdan (+ +) kaaviota.

4.2.4 Ctr (Contradiction Rule)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \neg\phi & \psi \\ \Gamma & \neg\phi & \neg\psi \\ \hline \Gamma & \phi & \end{array}$$

Todistus. (CTR) Olkoot $\Gamma\,\neg\phi \vDash \psi$ ja $\Gamma\,\neg\phi \vDash \neg\psi$. Tällöin ei ole olemassa sellaista tulkintaa, joka toteuttaa sekventin $\Gamma\,\neg\phi$ ja mikä tahansa tulkinta, joka toteuttaa Γ:n, toteuttaa myös ϕ:n. Siis $\Gamma\,\phi$ on korrekti. $\square$

4.2.5 $\vee$ A ($\vee$-Rule for the Antecedent)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \phi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi \\ \hline \Gamma & (\phi \vee \psi) & \chi \end{array}$$

Tämän säännön todistus on vastaavanlainen säännön (PC) todistuksen kanssa.

4.2.6 $\vee$ S (∨-Rules for the Succedent)

$$(a)\ \frac{\Gamma \quad \phi}{\Gamma \quad (\phi \vee \psi)} \qquad (b)\ \frac{\Gamma \quad \phi}{\Gamma \quad (\psi \vee \phi)}$$

Todistus. ($\vee$ S) Oletetaan $\Gamma \models \phi$ ja olkoon $\mathfrak{I} \models \Gamma$. Silloin $\mathfrak{I} \models \phi$ ja tällöin molemmat $\mathfrak{I} \models (\phi \vee \psi)$ ja $\mathfrak{I} \models (\psi \vee \phi)$. □

4.3 Todistuvat konnektiivisäännöt

Käyttämällä aiemmin muodostettuja kalkyylin $\mathfrak{S}$ sääntöjä, johdetaan lisää sekventtejä ja esitellään *todistuvan säännön* merkintä. Tarkastelemme "kolmannen poissuljetun lakia" (TND eli Tertium non datur), joka muodostetaan seuraavasti: $(\phi \vee \neg\phi)$. Osoitetaan, että kaikki tätä muotoa olevat sekventit ovat todistuvia.

	1.	ϕ	ϕ	(Ass)
	2.	ϕ	$(\phi \vee \neg\phi)$	($\vee$S) sovellettuna kohtaan 1
($*$)	3.	$\neg\phi$	$\neg\phi$	(Ass)
	4.	$\neg\phi$	$(\phi \vee \neg\phi)$	($\vee$S) sovellettuna kohtaan 3
	5.		$(\phi \vee \neg\phi)$	(PC) sovellettuna kohtiin 2 ja 4

(TND)-sääntö
$$\frac{}{(\phi \vee \neg\phi)}$$

ei ole kalkyylin $\mathfrak{S}$ sääntö. Lisäämällä (TND)-sääntö kalkyyliin $\mathfrak{S}$, todistuvien sekventtien joukko ei laajene. Tämä siksi, että jos sekventillä on formaali todistus, joka käyttää kalkyylin $\mathfrak{S}$ sääntöjä sekä sääntöä (TND), niin ($*$):n rivit 1-4 voidaan lisätä todistukseen suoraan ennen jokaista sekventtiä $(\phi \vee \neg\phi)$, joka alun perin esiteltiin säännön (TND) avulla. Sekventtisääntöjä, joiden käyttö formaalissa todistuksessa voidaan jättää pois kaavioiden, kuten ($*$), avulla ja jotka tällöin eivät laajenna johdettavien sekventtien joukkoa, voidaan kutsua todistuviksi säännöiksi. Täten (TND) on todistuva sääntö.

4.3.1 Ctr' (Second Contradiction Rule)

$$\frac{\begin{array}{cc}\Gamma & \psi \\ \Gamma & \neg\psi\end{array}}{\Gamma \quad \phi}$$

Todistus. (Ctr') (Todistus osoittaa, että sääntö on johdettava. Tässä tapauksessa osoitetaan, miten kalkyylin $\mathfrak{S}$ sääntöjä voidaan käyttää saamaan sekventti $\Gamma\,\phi$ oletetuista kaavajoukoista $\Gamma\,\psi$ ja $\Gamma\,\neg\psi$.)

$$\begin{array}{lllrl}
1. & \Gamma & & \psi & \text{Oletus} \\
2. & \Gamma & & \neg\psi & \text{Oletus} \\
3. & \Gamma & \neg\phi & \psi & \text{(Ant) sovelletuna kohtaan 1} \\
4. & \Gamma & \neg\phi & \neg\psi & \text{(Ant) sovellettuna kohtaan 2} \\
5. & \Gamma & & \phi & \text{(Ctr) sovellettuna kohtiin 3 ja 4}
\end{array}$$

□

4.3.2 Ch (Ketjusääntö)

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & & \phi \\
\Gamma & \phi & \psi \\
\hline
\Gamma & & \psi
\end{array}$$

Todistus. (Ch)

$$\begin{array}{lllrl}
1. & \Gamma & & \phi & \text{Oletus} \\
2. & \Gamma & \phi & \psi & \text{Oletus} \\
3. & \Gamma & \neg\phi & \phi & \text{(Ant) sovellettuna kohtaan 1} \\
4. & \Gamma & \neg\phi & \neg\phi & \text{(Ass) sovellettuna kohtaan 2} \\
5. & \Gamma & \neg\phi & \psi & \text{(Ctr') sovellettuna kohtiin 3 ja 4} \\
6. & \Gamma & & \psi & \text{(PC) sovellettuna kohtiin 2 ja 5}
\end{array}$$

□

4.3.3 Kontrapositiosäännöt

$$(a)\ \begin{array}{ccc}
\Gamma & \phi & \psi \\
\hline
\Gamma & \neg\psi & \neg\phi
\end{array}
\qquad
(b)\ \begin{array}{ccc}
\Gamma & \neg\phi & \neg\psi \\
\hline
\Gamma & \psi & \phi
\end{array}$$

$$(c)\ \begin{array}{ccc}
\Gamma & \neg\phi & \psi \\
\hline
\Gamma & \neg\psi & \phi
\end{array}
\qquad
(d)\ \begin{array}{ccc}
\Gamma & \phi & \neg\psi \\
\hline
\Gamma & \psi & \neg\phi
\end{array}$$

Todistus. (kohta (b))

$$\begin{array}{llllrl}
1. & \Gamma & \neg\phi & & \neg\psi & \text{Oletus} \\
2. & \Gamma & \psi & \neg\phi & \neg\psi & \text{(Ant) sovellettuna kohtaan 1} \\
3. & \Gamma & \psi & \neg\phi & \psi & \text{(Ass)} \\
4. & \Gamma & \psi & \neg\phi & \phi & \text{(Ctr') sovellettuna kohtiin 2 ja 3} \\
5. & \Gamma & \psi & \phi & \phi & \text{(Ass)} \\
6. & \Gamma & \psi & & \phi & \text{(PC) sovellettuna kohtiin 4 ja 5}
\end{array}$$

$\square$

4.3.4

$$\begin{array}{cc} \Gamma & (\phi \vee \psi) \\ \Gamma & \neg\phi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

Todistus.

1.	Γ		$(\phi \vee \psi)$	Oletus
2.	Γ		$(\neg\phi)$	Oletus
3.	Γ	ψ	ψ	(Ass)
4.	Γ	ϕ	$\neg\phi$	(Ant) sovellettuna kohtaan 2
5.	Γ	ϕ	ϕ	(Ass)
6.	Γ	ϕ	ψ	(Ctr') sovellettuna kohtiin 5 ja 4
7.	Γ	$(\phi \vee \psi)$	ψ	($\vee$ A) sovellettuna kohtiin 6 ja 3
8.	Γ		ψ	(Ch) sovellettuna kohtiin 1 ja 7

$\square$

4.3.5 MP (Modus ponens)

$$\begin{array}{cc} \Gamma & (\phi \to \psi) \\ \Gamma & \phi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array} \quad \text{, joka tarkoittaa samaa kuin} \quad \begin{array}{cc} \Gamma & (\neg\phi \vee \psi) \\ \Gamma & \phi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

Seuraava todistus on samankaltainen kuin edellisen kohdan todistus.

Todistus.

1.	Γ		$(\neg\phi \vee \psi)$	Oletus
2.	Γ		ϕ	Oletus
3.	Γ	$\neg\phi$	ϕ	(Ant) sovellettuna kohtaan 2
4.	Γ	$\neg\phi$	$\neg\phi$	(Ass)
5.	Γ	$\neg\phi$	ψ	(Ctr') sovellettuna kohtiin 3 ja 4
6.	Γ	ψ	ψ	(Ass)
7.	Γ	$(\neg\phi \vee \psi)$	ψ	($\vee$ A) sovellettuna kohtiin 5 ja 6
8.	Γ		ψ	(Ch) sovellettuna kohtiin 1 ja 7

$\square$

Käyttäen edeltäviä sääntöjä, saadaan:

Apulause 11. Seuraavat sekventit ovat johdettavissa:

$$\begin{array}{llll} (a1) & \phi\ (\phi\ \vee\ \psi), & (a2) & \psi\ (\phi\ \vee\ \psi), \\ (b) & (\phi\ \vee\ \psi)\ \neg\ \phi\ \ \psi, & (c) & (\neg\ \phi\ \vee\ \psi)\ \phi\ \psi. \end{array}$$

Todistus. Kohta (a2)

$$\begin{array}{llll} 1. & \psi & \psi & (\mathrm{Ass}) \\ 2. & \psi & (\phi \vee \psi) & (\vee S) \end{array}$$

□

Kohdat (a1), (b) ja (c) voidaan todistaa vastaavasti käyttäen sääntöjä ($\vee S$), 4.3 ja 4.3.

4.4 Kvanttori- ja identiteetti-säännöt

Seuraavaksi annetaan kaksi sekventtikalkyylin $\mathfrak{S}$ sääntöä, jotka koskevat olemassaolokvanttoria.

4.4.1 $\exists$ S (Rule for $\exists$-Introduction in the Succedent)

$$\frac{\Gamma \quad \phi\ \frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x\phi}$$

Säännössä ($\exists$ S) sanotaan, että voidaan päätellä $\exists x\phi$ kaavajonosta Γ, jos aiemmin on saatu ”todistaja” t tälle olemassaoloväitteelle.

Todistus. Oletetaan $\Gamma \vDash \phi\ \frac{t}{x}$. Olkoon $\mathfrak{I}$ tulkinta siten, että $\mathfrak{I} \vDash \Gamma$. Oletuksen mukaan $\mathfrak{I} \vDash \phi\ \frac{t}{x}$ toteutuu. Tällöin sijoituksen apulauseen perusteella $\mathfrak{I}\ \frac{\mathfrak{I}(\mathfrak{t})}{x} \vDash \phi$ ja näin ollen myöskin $\mathfrak{I} \vDash \exists\, x\, \phi$. □

Jälkimmäinen olemassaolo-sääntö on monimutkaisempi, mutta se sisältää usein käytetyn todistustavan. Päämääränä on todistaa väite ψ oletuksista $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}, \exists\, x\, \phi$. Päämäärän saavuttaminen formaalilla tasolla vaatii seuraavan sekventin johtamista sekventtikalkyylissä:

$$(*) \qquad \phi_0 \ldots \phi_{n-1} \exists\, x\phi\ \psi.$$

Oletuksen $\exists\, x\phi$ mukaan voidaan otaksua, että on olemassa esimerkki, joka on merkitty uudella muuttujalla y ja joka toteuttaa kaavan ϕ ja käyttää sitä todistamaan kaavan ψ. Sekventtikalkyylissä tämä vastaa seuraavan sekventin johtamista:

$$(*\,*) \qquad \phi_0 \ldots \phi_{n-1} \phi\ \frac{y}{x}\ \psi,$$

missä y ei esiinny vapaana kohdassa $(*)$. Tällöin kaavan ψ voidaan katsoa olevan todistettu oletuksista $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}, \exists\, x\phi$. Tämä väite voidaan toistaa sekventtikalkyylissä säännön avulla, joka sallii etenemisen kohdasta $(*\ *)$ kohtaan $(*)$:

4.4.2 $\exists$ A (Rule for $\exists$-Introduction in the Antecedent)

$$\frac{\Gamma \quad \phi\,\frac{y}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\phi \quad \psi}, \text{ jos } y \text{ ei esiinny vapaana sekventissä } \Gamma\ \exists x\phi\,\psi.$$

Todistus. Oletetaan, että $\Gamma\phi\,\frac{y}{x} \vDash \psi$, y ei esiinny vapaana sekventissä $\Gamma\exists x\,\phi\,\psi$ ja tulkinta $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ on sekventin $\Gamma\exists x\phi$ malli. Täytyy osoittaa, että $\mathfrak{I} \vDash \psi$. Ensiksikin on olemassa $a \in A$ siten, että $\mathfrak{I}\,\frac{a}{x} \vDash \phi$. Käyttämällä apulausetta 5 saadaan $\left(\mathfrak{I}\,\frac{a}{y}\right)\,\frac{a}{x} \vDash \phi$. Kun $x = y$ asia on selvä, mutta kun $x \neq y$ huomataan, että $y \notin \text{free}(\phi)$, sillä muutoin $y \in \text{free}(\exists x\phi)$ oletuksen vastaisesti.

Koska $\mathfrak{I}\,\frac{a}{y}(y) = a$ saadaan

$$\left(\mathfrak{I}\,\frac{a}{y}\right)\frac{\mathfrak{I}\,\frac{a}{y}(y)}{x} \vDash \phi.$$

Tällöin sijoituksen apulauseen perusteella $\mathfrak{I}\,\frac{a}{y} \vdash \phi\,\frac{y}{x}$. Koska $\mathfrak{I} \vDash \Gamma$ ja $y \notin \text{free}(\Gamma)$, saadaan $\mathfrak{I}\,\frac{a}{y} \vDash \Gamma$ jälleen apulauseen 5 perusteella ja koska $\Gamma\phi\frac{y}{x} \vDash \psi$, saadaan $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \vdash \psi$ ja tällöin $\mathfrak{I} \vDash \psi$, koska $y \notin \text{free}(\psi)$. □

Muuttujan y ehto tässä todistuksessa on välttämätön. Esimerkiksi sekventti $[x \equiv fy]\frac{y}{x}y \equiv fy$ on korrekti, mutta sekventti $\exists x\, x \equiv fy\, y \equiv fy$, joka voidaan saada soveltamalla sääntöä $(\exists A)$ ja ottamatta huomioon tätä lisäehtoa, ei enää ole korrekti. Tämä voidaan osoittaa esimerkiksi tulkinnalla, jonka määrittelyjoukko on $\mathbb{N}$ ja joka tulkitsee funktion f seuraajafunktiona $n \mapsto n + 1$ ja muuttujan y nollaksi.

Kaavasta $\phi\,\frac{t}{x}$ ei yleensä ole mahdollista palauttaa joko ϕ:tä tai t:ä. Esimerkiksi kaava Rfy voidaan kirjoittaa muodossa $Rx\,\frac{fy}{x}$ tai $Rfx\,\frac{y}{x}$. Siitä syystä sääntöjen $(\exists S)$ ja $(\exists A)$ sovelluksissa mainitaan erikseen ϕ ja t tai ϕ ja y, jos ne eivät ole selviä.

Kaksi viimeistä kalkyylin $\mathfrak{S}$ sääntöä seuraavat identiteettirelaation kahdesta perusominaisuudesta.

4.4.3 $\equiv$ (Reflexivity Rule for Equality)

$$\frac{}{t \equiv t}$$

Todistus. Triviaali. □

4.4.4 Sub (Substitution Rule for Equality)

$$\frac{\Gamma \qquad\qquad \phi\,\frac{t}{x}}{\Gamma \quad t \equiv t' \quad \phi\,\frac{t'}{x}}$$

Todistus. (Sub) Oletetaan, että $\Gamma \vDash \phi\,\frac{t}{x}$ ja oletetaan, että tulkinta $\mathfrak{I}$ toteuttaa sekä kaavajoukon Γ että identiteettirelaation $t \equiv t'$. Tällöin $\mathfrak{I} \vDash \phi\,\frac{t}{x}$ ja näin ollen sijoituksen apulauseen perusteella $\mathfrak{I}\,\frac{\mathfrak{I}(t)}{x} \vDash \phi$. Siksi koska $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t')$, niin $\mathfrak{I}\,\frac{\mathfrak{I}(t')}{x} \vDash \phi$. Sijoituksen apulauseen soveltaminen edelleen antaa lopulta tuloksen $\mathfrak{I} \vDash \phi\,\frac{t'}{x}$. □

4.5 Lisää todistuvia sääntöjä ja sekventtejä

Koska $\phi\frac{x}{x} = \phi$, saadaan käyttämällä sääntöjä ($\exists$S) ja ($\exists$A) (kun $t = x$ ja $y = x$)

4.5.1

$$(a)\ \frac{\Gamma \quad \phi}{\Gamma \quad \exists x\phi} \qquad (b)\ \frac{\Gamma \quad \phi \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\phi \quad \psi}$$, jos x ei esiinny vapaana sekventissä $\Gamma\ \psi$.

Sääntöä (Sub) vastaava erityistapaus on

4.5.2

$$\frac{\Gamma \qquad\qquad \phi}{\Gamma \quad x \equiv t \quad \phi\frac{t}{x}}$$

Lopuksi tarkastellaan sellaisia johdettavia sekventtejä, jotka käsittelevät identiteettirelaation symmetrisyyttä ja transitiivisuutta ja sen yhteensopivuutta funktioiden ja relaatioiden kanssa.

4.5.3

$$\vdash t_0 \equiv t_1 \qquad t_1 \equiv t_0$$

Todistus. Olkoon x muuttuja, joka ei esiinny termeissä t_0 tai t_1.

1.		$t_0 \equiv t_0$	($\equiv$)
2.	$t_0 \equiv t_1$	$t_1 \equiv t_0$	(Sub) sovellettuna kohtaan 1 käyttämällä

$$t_0 \equiv t_0 = [x \equiv t_0]\frac{t_0}{x}\ .$$ □

4.5.4

$$\vdash t_0 \equiv t_1 \qquad t_1 \equiv t_2 \qquad t_0 \equiv t_2$$

Todistus. Oletetaan, että x on muuttuja, joka ei esiinny termeissä t_0, t_1 tai t_2.

1.	$t_0 \equiv t_1$		$t_0 \equiv t_1$	(Ass)
2.	$t_0 \equiv t_1$	$t_1 \equiv t_2$	$t_0 \equiv t_2$	(Sub) sovellettuna kohtaa 1 käyttämällä $t_0 \equiv t_1 = [t_0 \equiv x]\frac{t_1}{x}$.

□

4.5.5

Jokaisella n-paikkaisella $R \in S$,

$$\vdash Rt_0 \ldots t_{n-1} \qquad t_0 \equiv t'_0 \qquad t_1 \equiv t'_1 \qquad \ldots \qquad t_{n-1} \equiv t'_{n-1} \qquad Rt'_0 \ldots t'_{n-1}$$

Todistus. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että $n = 2$. Olkoon x muuttuja, joka ei esiinny termeissä t_0, t_1, t'_0 tai t'_1.

1.	$R\,t_0\,t_1$			$R\,t_0\,t_1$	(Ass)
2.	$R\,t_0\,t_1$	$t_0 \equiv t'_0$		$R\,t'_0\,t_1$	(Sub) sovellettuna kohtaan 1 käyttämällä $R\,t_0\,t_1 = [R\,x\,t_1]\frac{t_0}{x}$.
3.	$R\,t_0\,t_1$	$t_0 \equiv t'_0$	$t_1 \equiv t'_1$	$R\,t'_0\,t'_1$	(Sub) sovellettuna kohtaan 2 käyttämällä $R\,t'_0\,t_1 = [R\,t'_0 x]\frac{t_1}{x}$.

□

4.5.6

Jokaisella n-paikkaisella $f \in S$,

$$\vdash t_0 \equiv t'_0 \qquad t_1 \equiv t'_1 \qquad \ldots \qquad t_{n-1} \equiv t'_{n-1} \qquad ft_0 \ldots t_{n-1} \equiv f't_0 \ldots t'_{n-1}$$

Todistus. Voidaan todistaa kuten edellisessä kohdassa. □

4.6 Eheyslause

Määritelmässä 4.1 määriteltiin kaavan ϕ olevan formaalisti todistuva kaavajoukossa Φ (merk. $\Phi \vdash \phi$), jos on olemassa joukon Φ kaavat $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ siten, että $\vdash \phi_0 \ldots \phi_{n-1}\phi$. Tästä määritelmästä saadaan välittömästi:

Apulause 12. Kaikilla Φ ja ϕ, $\Phi \vdash \phi$ jos ja vain jos on olemassa äärellinen Φ:n osajoukko Φ_0 siten, että $\Phi_0 \vdash \phi$.

$\square$

Näin on oikeastaan jo todistettu:

Lause 4.1. *(Eheys lause) Kaikilla Φ ja ϕ, jos $\Phi \vdash \phi$, niin $\Phi \vDash \phi$.*

Todistus. Oletetaan, että $\Phi \vdash \phi$. Tällöin sopivalle joukon Φ kaavajonolle Γ (siis kaavajoukolle Γ, jonka jäsenet ovat joukon Φ kaavoja) saadaan $\vdash \Gamma\phi$. Kuten aiemmin on osoitettu, jokainen sääntö ilman oletuksia antaa ainoastaan korrekteja sekventtejä ja muut kalkyylin $\mathfrak{S}$ säännöt aina johtavat korrekteista sekventeistä korrekteihin sekventteihin. Tällöin induktiolla kalkyylin $\mathfrak{S}$ rakenteen suhteen huomataan, että jokainen formaalisti todistuva sekventti on korrekti, tällöin myös $\Gamma\phi$. Näin ollen $\Gamma \vDash \phi$ ja $\Phi \vDash \phi$. $\square$

Seuraavassa luvussa todistetaan tämän teorian käänteinen väite eli ”jos $\Phi \vDash \phi$, niin $\Phi \vdash \phi$”. Siis erityisesti, jos ϕ on matemaattisesti todistuva kaavajoukosta Φ ja tällöin $\Phi \vDash \phi$, niin ϕ on myös formaalisti todistuva kaavajoukosta Φ. Sekventtisääntöjen yksinkertaisen luonteen vuoksi formaali todistus on yleensä huomattavasti monimutkaisempi kuin vastaava matemaattinen todistus. (Ks.[1] s.70-72)

4.7 Ristiriidattomuus

Johtamisen syntaktinen käsite $\vdash$ vastaa loogisen seurauksen semanttista käsitettä $\vDash$. Syntaktisena vastineena toteutuvuudelle määritellään *konsistenssin* käsite.

Määritelmä 4.2. (a) Φ on konsistentti eli *ristiriidaton* (merk. Con Φ), jos ja vain jos ei ole olemassa sellaista kaavaa ϕ, että $\Phi \vdash \phi$ ja $\Phi \vdash \neg\phi$.
(b) Φ on ristiriitainen (merk. Inc Φ), jos ja vain jos Φ ei ole ristiriidaton (siis, jos on olemassa kaava ϕ siten, että $\Phi \vdash \phi$ ja $\Phi \vdash \neg\phi$).

Osoitetaan ensin, että ristiriitaisesta joukosta voidaan johtaa mikä tahansa kaava.

Apulause 13. Seuraavat ovat ekvivalentteja kaavajoukossa Φ:
(a) Inc Φ,
(b) Kaikilla ϕ, $\Phi \vdash \phi$.

Todistus. Kohta (a) on suoraan seurausta kohdasta (b). Oletetaan toisaalta, että Inc Φ on tosi. Siis $\Phi \vdash \psi$ ja $\Phi \vdash \neg\psi$ jollakin kaavalla ψ. Olkoon ϕ mielivaltainen kaava. Osoitetaan, että $\Phi \vdash \phi$. Ensinnäkin on olemassa kaavajonot Γ_1 ja Γ_2, jotka koostuvat joukon Φ kaavoista ja formaaleista todistuksista

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ & \text{ja} & \\ \Gamma_1\,\psi & & \Gamma_2\,\neg\psi \end{array}$$

Yhdistämällä nämä kaksi formaalia todistusta ja lisäämällä ne saatuun formaaliin todistukseen, saadaan

$$
\begin{array}{llll}
 & \vdots & & \\
m. & \Gamma_1 & \psi & \\
 & \vdots & & \\
n. & \Gamma_2 & \neg\psi & \\
n+1. & \Gamma_1\Gamma_2 & \psi & \text{(Ant) sovellettuna kohtaan } m \\
n+2. & \Gamma_1\Gamma_2 & \neg\psi & \text{(Ant) sovellettuna kohtaan } n \\
n+3. & \Gamma_1\Gamma_2 & \phi & \text{(Ctr') sovellettuna kohtiin } n+1 \text{ ja } n+2
\end{array}
$$

Tällöin nähdään, että $\Phi \vdash \phi$. □

Seuraus 3. Seuraavat ovat ekvivalentteja kaavajoukossa Φ:
(a) Con Φ
(b) On olemassa kaava ϕ, joka ei ole johdettavissa Φ:stä.

Koska $\Phi \vdash \phi$, jos ja vain jos $\Phi_0 \vdash \phi$ sopivalle joukon Φ äärelliselle osajoukolle Φ_0, saadaan:

Apulause 14. Kaikilla kaavajoukoilla Φ, Con Φ, jos ja vain jos Con Φ_0 kaikilla Φ:n äärellisillä osajoukoilla Φ_0.

Apulause 15. Jokainen toteutuva kaavajoukko on ristiriidaton.

Todistus. Oletetaan Inc Φ. Sitten sopivalla ϕ sekä $\Phi \vdash \phi$ että $\Phi \vdash \neg\phi$. Tällöin kalkyylin $\mathfrak{S}$ eheyslauseen perusteella $\Phi \models \phi$ ja $\Phi \models \neg\phi$, mutta nyt Φ ei voi olla toteutuva. □

Myöhemmin tarvitaan seuraavaa tulosta:

Apulause 16. Kaikilla Φ ja ϕ,
(a) jos ei $\Phi \vdash \phi$, niin Con $\Phi \cup \{\neg\phi\}$
(b) jos Con Φ ja $\Phi \vdash \phi$, niin Con $\Phi \cup \{\phi\}$
(c) jos Con Φ, niin Con $\Phi \cup \{\phi\}$ tai Con $\Phi \cup \{\neg\phi\}$.

Todistus. (a) Oletetaan, että ei $\Phi \vdash \phi$, mutta $\Phi \cup \{\neg\phi\}$ on ristiriitainen. Tällöin sopivalle sekventille Γ, joka koostuu joukon Φ kaavoista, on olemassa sekventin $\Gamma\neg\phi\,\phi$ formaali todistus. Tästä saadaan seuraava formaali todistus:

$$
\begin{array}{llll}
 & \vdots & & \\
\Gamma & \neg\phi & \phi & \\
\Gamma & \phi & \phi & \text{(Ass)} \\
\Gamma & & \phi & \text{(PC)}
\end{array}
$$

Tällöin $\Phi \vdash \phi$ eli saadaan ristiriita.
(b) Vaihdetaan kaavojen ϕ ja $\neg\phi$ rooleja kohdassa a) ja huomataan, että $\Phi \vdash \neg\phi$ ei ole tosi.
(c) Tämä seuraa suoraan kohdista (a) ja (b). □

Tässä luvussa on viitattu kiinnitettyyn symbolijoukkoon S. Tällöin käytettäessä sekventtikalkyyliä $\mathfrak{S}$, viitataan itse asiassa tiettyyn kalkyyliin $\mathfrak{S}_S$, joka vastaa symbolijoukkoa S. Joissakin tapauksissa on välttämätöntä käsitellä useita symbolijoukkoja samanaikaisesti, tällöin lisätään alaindeksi selkeyden vuoksi. Täsmällisyyden vuoksi käytetään tarkkaa merkintätapaa $\Phi \vdash_S \phi$ viittaamaan formaaliin todistukseen S-kaavoista koostuvassa kalkyylissä $\mathfrak{S}_S$. Tällöin kalkyylin $\mathfrak{S}_S$ viimeinen sekventti on muotoa $\Gamma\phi$, missä Γ koostuu joukon Φ kaavoista. Samoin merkitään $\mathrm{Con}_S\,\Phi$, jos ei ole olemassa sellaista S-kaavaa, että $\Phi \vdash_S \phi$ ja $\Phi \vdash_S \neg\phi$.

Apulause 17. Kun $n \in \mathbb{N}$, olkoot S_n symbolijoukkoja siten, että $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots$, ja olkoot Φ_n S_n-kaavajoukkoja siten, että $\mathrm{Con}_{S_n}\Phi_n$ ja $\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots$. Olkoon $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ ja $\Phi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$. Tällöin $\mathrm{Con}_S\Phi$.

Todistus. Olkoon $\mathrm{Inc}_S\,\Phi$. Valitaan kaavajoukon Φ äärellinen osajoukko Ψ siten, että $\Psi \vdash \phi$ ja $\Psi \vdash \neg\phi$ (Ks. apulause 13). Siis $\mathrm{Inc}_S\Psi$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ sellainen, että $\Psi \subset \Phi_n$. Tällöin $\mathrm{Inc}_S\Phi_n$. Siis $\Phi_n \vdash \phi$ ja $\Phi_n \vdash \neg\phi$, mikä on ristiriidassa oletusten kanssa. □

5 Täydellisyyslause

Tämä luku käsittelee sekventtikalkyylin täydellisyyden todistamista eli väitettä

$$(*) \qquad \text{Kaikilla } \Phi \text{ ja } \phi, \text{ jos } \Phi \models \phi, \text{ niin } \Phi \vdash \phi.$$

Jotta tämä voidaan todistaa, osoitetaan, että

$$(**) \qquad \text{Jokainen ristiriidaton kaavajoukko on toteutuva.}$$

Kohdan $(**)$ todistamiseksi täytyy löytää malli mille tahansa kaavajoukolle Φ. Luvussa 5.1 nähdään, että tämä voidaan osoittaa luonnollisella tavalla, jos Φ on *maksimaalisesti ristiriidaton* ja jos sillä on *todistajia*. Luvuissa 5.2 ja 5.3 siirrytään yleisestä tapauksesta yksittäisiin eli luvussa 5.2 käsitellään korkeintaan numeroituvia symbolijoukkoja ja luvussa 5.3 mielivaltaisia symbolijoukkoja. Ellei muuta mainita, viitataan aina kiinnitettyyn symbolijoukkoon S.

5.1 Henkinin teoria

Olkoon Φ ristiriidaton kaavajoukko. Kaavajoukon Φ mallin $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ löytämiseksi, voidaan käyttää ainoastaan kaavajoukon Φ ristiriidattomuudesta saatua ”syntaktista” informaatiota. Tällöin yritetään saada malli käyttämällä syntaktisia objekteja niin paljon kuin mahdollista. Ensimmäinen ajatus on ottaa määrittelyjoukoksi A kaikkien S-termien joukko, määritellä β:

$\beta(v_i) = v_i\,(i \in \mathbb{N})$ ja $R^{\mathfrak{A}}$ (kun R on yksipaikkainen): $R^{\mathfrak{A}} = \{t \in A \,|\, Rt \in \Phi\}$. Nyt esimerkiksi, jos $Rx \in \Phi$ ja $Rx \to Ry \in \Phi$, niin pitäisi saada $Ry \in \Phi$. Sekä jos $\exists x\, Rx \in \Phi$, pitäisi olla olemassa "todistaja" t eli termi t siten, että $Rt \in \Phi$.

Jotta kaavajoukon Φ malli voidaan muodostaa tällä tavoin, kaavajoukon Φ täytyy toteuttaa tiettyjä sulkeutumisehtoja. Ne esitetään täsmällisesti seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 5.1. Olkoon Φ kaavajoukko.
(a) Kaavajoukon Φ sanotaan olevan *maksimaalisesti ristiriidaton*, jos ja vain jos Con Φ ja jos jokainen kaava ϕ, kun asetetaan Con $\Phi \cup \{\phi\}$, kuuluu kaavajoukkoon Φ.
(b) Kaavajoukolla Φ on todistajia, jos ja vain jos jokaisella kaavalla, joka on muotoa $\exists x\phi$, on olemassa termi t siten, että $(\exists x\phi \to \phi\frac{t}{x}) \in \Phi$.

Mikäli $\mathfrak{I}$ on tulkinta, niin joukko $\Phi = \{\phi \in L^S \,|\mathfrak{I} \vDash \phi\}$ on maksimaalisesti ristiriidaton. Sillä, koska $\mathfrak{I} \vDash \Phi$, niin Φ on toteutuva ja apulauseen 15 mukaan se on ristiriidaton. Lisäksi, jos Con $\Phi \cup \{\phi\}$, niin $\neg\phi \notin \Phi$. Tällöin $\mathfrak{I} \vDash \phi$ ja siis $\phi \in \Phi$. Toisaalta jokaiseen maksimaalisesti ristiriidattomaan joukkoon Φ, jolla on todistajia, liitetään tulkinta $\mathfrak{I}_\Phi$, kuten yllä hahmoteltiin, siten, että $\mathfrak{I}_\Phi \vDash \Phi$. Siis jokainen tällainen Φ on toteutuva.

Apulause 18. Olkoon Φ maksimaalisesti ristiriidaton ja oletetaan, että sillä on todistajia. Tällöin kaikilla ϕ ja ψ:
(a) jos $\Phi \vdash \phi$, niin $\phi \in \Phi$.
(b) joko $\phi \in \Phi$ tai $\neg\phi \in \Phi$.
(c) $(\phi \vee \psi) \in \Phi$ jos ja vain jos $\phi \in \Phi$ tai $\psi \in \Phi$.
(d) jos $(\phi \to \psi) \in \Psi$ ja $\phi \in \Psi$, niin $\psi \in \Phi$.
(e) $\exists x\phi \in \Phi$ jos ja vain jos on olemassa termi t siten, että $\phi\frac{t}{x} \in \Phi$.

Todistus. (a) Jos $\Psi \vdash \phi$, niin apulauseen 16(b) mukaan Con $\Phi \cup \{\phi\}$ ja tällöin $\phi \in \Phi$, koska Φ on maksimaalisesti ristiriidaton.
(b) Apulauseen 16(c) mukaan Con $\Phi \cup \{\phi\}$ tai Con $\Phi \cup \{\neg\phi\}$ ja tällöin $\phi \in \Phi$ tai $\neg\phi \in \Phi$. Koska $\Phi \cup \{\phi, \neg\phi\}$ on ristiriitainen, niin ϕ ja $\neg\phi$ eivät molemmat voi kuulua joukkoon Φ.
(c) Oletetaan ensin, että $(\phi \vee \psi) \in \Phi$, Jos $\phi \notin \Phi$, niin $\neg\phi \in \Phi$. Koska $\vdash (\phi \vee \psi)\,\neg\phi\,\psi$ (Vrt. 11(b)), niin $\Phi \vdash \psi$ ja (a)-kohdan mukaan $\psi \in \Phi$. Toisaalta, jos esimerkiksi $\phi \in \Phi$, niin apulauseen 11(a1) mukaan $\Phi \vdash (\phi \vee \psi)$ ja tällöin (a)-kohdan perusteella $(\phi \vee \psi) \in \Phi$.
(d) Oletetaan, että $(\phi \to \psi)$ (siis $\neg\phi \vee \psi$) ja ϕ kuuluu joukkoon Φ. Koska $\vdash (\neg\phi \vee \psi)\,\phi\,\psi$ (Vrt. 11(c)), saadaan (a)-kohdan perusteella, että ψ kuuluu joukkoon Φ.
(e) Oletetaan ensin, että $\exists x\phi \in \Phi$. Koska joukolla Φ on todistajia, on olemassa termi t tällöin, että $\left(\exists x\phi \to \phi\frac{t}{x}\right) \in \Phi$ ja siksi $\phi\frac{t}{x} \in \Phi$ kohdan (d)

perusteella. Toisaalta, jos $\phi\frac{t}{x} \in \Phi$, niin $\Phi \vdash \exists x\phi$ (käytetään sääntöä ($\exists$ S)) ja (a)-kohdan mukaan $\exists x\phi \in \Phi$. $\square$

Apulauseen 18 mukaan saadaan tulos, että tulkinnalla $\mathfrak{I}$ väite

$$(*) \qquad \mathfrak{I} \vDash \phi \text{ jos, ja vain jos } \phi \in \Phi$$

toteutuu kaikilla ϕ (ja tällöin $\mathfrak{I} \vDash \Phi$), mikäli seuraavat kohdat voidaan osoittaa todeksi:
(1) $(*)$ toteutuu atomilauseelle ϕ,
(2) jokaisella tulkinnan $\mathfrak{I}$ määrittelyjoukon alkiolla on olemassa termi t siten, että $\mathfrak{I}(t) = a$.

Alkuperäisen ajatuksen mukaisesti muodostetaan tulkinta $\mathfrak{I}$, joka toteuttaa kohdat (1) ja (2). Mikäli tulkinnan $\mathfrak{I}$ määrittelyjoukoksi otetaan joukko termejä ja asetetaan tulkinta siten, että $\mathfrak{I}(t) = (t)$ ja ($\mathfrak{I} \vDash Rt_0 \dots t_{n-1}$ jos, ja vain jos $Rt_0 \dots t_{n-1} \in \Phi$), niin huomataan eräs ongelma yhtälöihin liittyen. Nimittäin mikäli $t_0 \equiv t_1 \in \Phi$, niin kohdan $(*)$ vuoksi $\mathfrak{I}(t_0) = \mathfrak{I}(t_1)$ pitää olla tosi, vaikka t_0 ja t_1 olisivatkin toisistaan eriäviä termejä. Tämä ongelma ylitetään määrittelemällä identiteettirelaatio termeille ja sitten käyttämällä ekvivalenssiluokkia sen sijaan, että käytettäisiin yksittäisiä termejä tulkinnan $\mathfrak{I}$ määrittelyjoukon alkioina.

Olkoon Φ maksimaalisesti ristiriidaton joukko, jolla on todistajia. Päteköön oletus tämän luvun 5.1 loppuun asti. Jatketaan määrittelemällä tulkinta $\mathfrak{I}_\Phi = (\mathfrak{T}_\Phi, \beta_\Phi)$. Ensiksi määritellään kuitenkin binäärirelaatio $\sim$ S-termien joukolle T^S.

5.1.1

$$t_0 \sim t_1, \quad \text{joss } t_0 \equiv t_1 \in \Phi.$$

Apulause 19. (a) $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.
(b) $\sim$ on yhteensopiva joukon S symbolien kanssa seuraavassa mielessä:
Jos $t_0 \sim t'_0, \dots, t_{n-1} \sim t'_{n-1}$, niin jokaisella n-paikkaisella funktiosymbolilla $f \in S$,

$$ft_0 \dots t_{n-1} \sim ft'_0 \dots t'_{n-1}$$

ja jokaisella n-paikkaisella relaatiosymbolilla $R \in S$,

$$R\,t_0 \dots t_{n-1} \in \Phi, \quad \text{jos ja vain jos } Rt'_0 \dots t'_{n-1} \in \Phi.$$

Todistus. Sivuutetaan. (Ks. [2, s. 78]) $\square$

Olkoon $\bar{t}$ termin t ekvivalenssiluokka $\bar{t} := \{t' \in T^S \,|\, t \sim t'\}$, ja olkoon T_Φ ekvivalenssiluokkien joukko $T_\Phi := \{\bar{t} \,|\, t \in T^S\}$. T_Φ on epätyhjä. Määritellään S-struktuuri $\mathfrak{T}_\Phi$ ekvivalenssiluokkien joukossa T_Φ eli niin sanottu *termistruktuuri*, joka vastaa joukkoa Φ, seuraavilla ehdoilla:

5.1.2

$$R^{\mathfrak{T}_\Phi}\bar{t}_0 \dots \bar{t}_{n-1} \text{ joss } R\, t_0 \dots t_{n-1} \in \Phi,$$

kun R on n-paikkainen relaatiosymboli ja $R \in S$.

5.1.3

$$f^{\mathfrak{T}_\Phi}(\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_{n-1}) := \overline{f\, t_0 \dots t_{n-1}},$$

kun f on n-paikkainen funktiosymboli ja $f \in S$.

5.1.4

$$c^{\mathfrak{T}_\Phi} := \bar{c},$$

kun $c \in S$.

Apulauseen 19 mukaan ehdot 5.1 ja 5.1 ovat riippumattomia termien $t_0, \dots, t_{n-1}$ valinnasta. Tällöin $R^{\mathfrak{T}_\Phi}$ ja $f^{\mathfrak{T}_\Phi}$ ovat hyvinmääriteltyjä. Kiinnitetään vielä tulkintafunktio β_Φ seuraavasti:

5.1.5

$\beta_\Phi(x) := \bar{x}$.
Kutsutaan tulkintaa $\mathfrak{I}_\Phi = (\mathfrak{T}_\Phi, \beta_\Phi)$ *termien tulkinnaksi* liitettynä joukkoon Φ.

Apulause 20. (a) Kaikilla t, $\mathfrak{I}_\Phi(t) = \bar{t}$.
(b) Jokaisella atomikaavalla ϕ, $\mathfrak{I}_\Phi \vDash \phi$, jos ja vain jos $\phi \in \Phi$.

Todistus. (a) Tehdään todistus induktiolla termien rakenteen suhteen. Ehdon 5.1 mukaan $t = x$ on tosi ja ehdon 5.1 $t = c$ on tosi. Jos $t = ft_0 \dots t_{n-1}$, niin

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_\Phi(ft_0 \dots t_{n-1} &= f^{\mathfrak{T}_\Phi}(\mathfrak{I}_\Phi(t_0), \dots, \mathfrak{I}_\Phi(t_{n-1})) \\
&= f^{\mathfrak{T}_\Phi}(\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_{n-1}) \qquad \text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\
&= \overline{ft_0 \dots t_{n-1}} \qquad \text{(Ehdon 5.1 mukaan)}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_\Phi \vDash t_0 \equiv t_1 \quad &\text{joss} \quad \mathfrak{I}_\Phi(t_0) = \mathfrak{I}_\Phi(t_1) \\
&\text{joss} \quad \bar{t}_0 = \bar{t}_1 \qquad \text{(a)-kohdan perusteella} \\
&\text{joss} \quad t_0 \sim t_1 \\
&\text{joss} \quad t_0 \equiv t_1 \in \Phi.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{I}_\Phi \models Rt_0 \dots t_{n-1} & \text{joss} & R^{\mathfrak{T}_\Phi}\bar{t}_0 \dots \bar{t}_{n-1} \\ & \text{joss} & Rt_0 \dots t_{n-1} \in \Phi \qquad \text{(Ehdon 5.1 perusteella)} \end{array}$$

$\square$

Lause 5.1 (Henkinin lause)**.** *Olkoon Φ maksimaalisesti ristiriidaton joukko, jolla on todistajia. Tällöin kaikilla ϕ,*

$$(*) \qquad \mathfrak{I}_\Phi \models \phi, \quad \textit{joss } \phi \in \Phi.$$

Todistus. Osoitetaan $(*)$ induktiolla konnektiivien ja kvanttoreiden lukumäärän suhteen kaavassa ϕ. Toisin sanoen todistetaan $(*)$ induktiolla rank(ϕ):n rakenteen suhteen (Vrt. 3.14). Mikäli rank$(\phi) = 0$, niin ϕ on atomilause ja $(*)$ on tosi apulauseen 20 (b)-kohdan perusteella. Induktioaskel jakautuu kolmeen eri osaan.

(1) $\phi = \neg\psi$:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{I}_\Phi \models \neg\psi & \text{jos ja vain jos} & \text{ei } \mathfrak{I}_\Phi \models \psi & \\ & \text{jos ja vain jos} & \psi \notin \Phi & \text{(Induktio-oletuksen perusteella)} \\ & \text{jos ja vain jos} & \neg\psi \in \Phi & \text{(apulauseen 18 (b) perusteella)} \end{array}$$

(2) $\phi = (\psi \vee \chi)$:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{I}_\Phi \models (\psi \vee \chi) & \text{jos ja vain jos} & \mathfrak{I}_\Phi \models \psi \text{ tai } \mathfrak{I}_\Phi \models \chi \\ & \text{jos ja vain jos} & \psi \in \Phi \text{ tai } \chi \in \Phi \text{ (Induktio-oletuksen mukaan} \\ & \text{jos ja vain jos} & (\psi \vee \chi) \in \Phi \qquad \text{(Apulauseen 18 (c) mukaan)} \end{array}$$

(3) $\phi = \exists x\psi$:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{I}_\Phi \models \exists x\psi & \text{jos ja vain jos on olemassa termi } t \text{ siten, että } \mathfrak{I}_\Phi \frac{\bar{t}}{x} \models \psi \\ & \text{jos ja vain jos on olemassa termi } t \text{ siten, että } \mathfrak{I}_\Phi \frac{\mathfrak{I}_\Phi(t)}{x} \models \psi \\ & \qquad\qquad \text{(Apulauseen 20 perusteella)} \\ & \text{jos ja vain jos on olemassa termi } t \text{ siten, että } \mathfrak{I}_\Phi \models \psi\frac{t}{x} \\ & \qquad\qquad \text{(Sijoitus-apulauseen mukaan)} \\ & \text{jos ja vain jos on olemassa termi } t \text{ siten, että } \psi\frac{t}{x} \in \Phi \\ & \text{(Induktio-oletuksen perusteella, koska rank } \left(\psi\frac{t}{x}\right) = \\ & \text{rank}(\psi) < \text{rank}(\phi)) \qquad \text{(Vrt. 10)} \\ & \text{jos ja vain jos } \exists x\psi \qquad \text{(Apulauseen 18 (e) mukaan).} \end{array}$$

$\square$

Seuraus 4. Olkoon Φ maksimaalisesti ristiriidaton joukko, jolla on todistajia. Tällöin $\mathfrak{I}_\Phi \models \Phi$ ja siis Φ on toteutuva.

5.2 Ristiriidattomien kaavajoukkojen toteutuvuus (numeroituva tapaus)

Seurauksen 4 mukaan jokainen maksimaalisesti ristiriidaton kaavajoukko, jolla on todistajia, on toteutuva. Todistetaan, että jokainen ristiriidaton kaavajoukko Φ on toteutuva osoittamalla, miten se voidaan laajentaa maksimaalisesti ristiriidattomaksi joukoksi, jolla on todistajia. Tässä luvussa asetetaan symbolijoukot olemaan korkeintaan numeroituvia. Olkoon seuraavassa S korkeintaan numeroituva. Ensiksi käsitellään tapaus, jossa ainoastaan äärellisen monta muuttujaa esiintyy vapaana joukossa Φ eli, missä free $(\Phi) := \bigcup_{\phi \in \Phi} \text{free}(\phi)$ on äärellinen.

Apulause 21. Olkoon $\Phi \subset L^S$ ristiriidaton ja olkoon free(Φ) äärellinen. Tällöin on olemassa ristiriidaton joukko Ψ siten, että $\Phi \subset \Psi \subset L^S$ ja joukolla Ψ on todistajia.

Todistus. Apulauseen 1 mukaan L^S on numeroituva. Olkoon $\exists x_0 \phi_0, \exists x_1 \phi_1, \ldots$ lista kaikista joukon L^S kaavoista, jotka alkavat olemassaolokvanttorilla. Määritellään induktiivisesti kaavat $\psi_0, \psi_1, \ldots$, jotka lisätään joukkoon Φ. Jokaisella luvulla n, ψ_n on ”todistajakaava”, kun $\exists x_n \phi_n$.

Oletetaan, että ψ_m on jo määritelty, kun $m < n$. Koska free(Φ) on äärellinen, vain äärellisen monta muuttujaa esiintyy vapaana yhdisteessä $\Phi \cup \{\psi_m \mid m < n\} \cup \{\exists x_n \phi_n\}$. Olkoon y_n näistä eroava muuttuja. Asetetaan

$$\psi_n := \left(\exists x_n \phi_n \to \phi_n \frac{y_n}{x_n} \right).$$

Olkoon nyt

$$\Psi := \Phi \cup \{\psi_0, \psi_1, \ldots\}.$$

Tällöin $\Phi \subset \Psi$ ja joukolla Ψ selvästi on todistajia. Täytyy vielä osoittaa, että Ψ on ristiriidaton. Tähän tarkoitukseen asetetaan

$$\Phi_n := \Phi \cup \{\psi_m \,|\, m < n\}.$$

Tällöin $\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \cdots$ ja $\Psi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$. Todistus on valmis, jos voidaan osoittaa, että jokainen Φ_n on ristiriidaton (Vrt. 17, kun $S = S_0 = S_1 = \ldots$). Tehdään tämä induktiolla.

Koska $\Phi_0 = \Phi$, Con Φ_0 on tosi oletuksen perusteella. Induktioaskeleessa oletetaan, että Φ_n on ristiriidaton. Tehdään vastaoletus, että $\Phi_{n+1} = \Phi_n \cup$

$\{\psi_n\}$ on ristiriitainen. Tällöin jokaisella ϕ on olemassa Γ joukossa Φ_n siten, että $\vdash \Gamma\psi_n\phi$ eli

$$\vdash \Gamma \left(\neg\exists x_n\phi_n \vee \phi_n\frac{y_n}{x_n}\right)\phi.$$

Tällöin on olemassa formaali todistus

$$\vdots$$

$$m.\ \Gamma \left(\neg\exists x_n\phi_n \vee \phi_n\frac{y_n}{x_n}\right)\phi,$$

joka voidaan laajentaa seuraavasti, jos ϕ on lause:

$m+1.$	Γ	$\neg\exists x_n\phi_n$	$\neg\exists x_n\phi_n$	(Ass)
$m+2.$	Γ	$\neg\exists x_n\phi_n$	$\left(\neg\exists x_n\phi_n \vee \phi_n\frac{y_n}{x_n}\right)$	($\vee$ S) sovellettuna kohtaan $m+1$
$m+3.$	Γ	$\neg\exists x_n\phi_n$	ϕ	(Ch) ja (Ant) sovellettuna kohtiin $m+2$ ja m
$m+4.$	Γ	$\phi_n\frac{y_n}{x_n}$	ϕ	(Vastaavasti)
$m+5.$	Γ	$\exists x_n\phi_n$	ϕ	($\exists\, A$) sovellettuna kohtaan $m+4$ (y_n ei esiinny vapaana sekventissä $\Gamma\exists x_n\phi_n\phi$)
$m+6.$	Γ		ϕ	(PC) sovellettuna kohtiin $m+5$ ja $m+3$

Tällöin saadaan $\Phi_n \vdash \phi$. Asettamalla $\phi = \exists v_0\, v_0 \equiv v_0$ ja $\phi = \neg\exists v_0\, v_0 \equiv v_0$, huomataan, että Φ_n on ristiriitainen, mikä on ristiriidassa induktio-oletuksen kanssa. $\square$

Apulause 22. Olkoon $\Psi \subset L^S$ ristiriidaton. Tällöin on olemassa maksimaalisesti ristiriidaton joukko Θ asettamalla $\Psi \subset \Theta \subset L^S$.

Todistus. Oletetaan, että Ψ on ristiriidaton ja olkoot $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ luettelo kaavajoukon L^S kaavoja. Määritellään kaavajoukko Θ_n seuraavasti:

$$\Theta_0 := \Psi$$

ja

$$\Theta_{n+1} := \begin{cases} \Theta_n \cup \{\phi_n\}, & \text{jos Con}\,\Theta_n \cup \{\phi_n\} \\ \Theta_n, & \text{muuten,} \end{cases}$$

ja asetetaan

$$\Theta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Theta_n.$$

Ensiksikin $\Psi \subset \Theta$. Selvästi kaikki kaavajoukot Θ_n ovat ristiriidattomia. Tällöin apulauseen 17 perusteella myös Θ on ristiriidaton. Lopulta saadaan, että Θ on maksimaalisesti ristiriidaton. Sillä, jos $\phi \in L^S$, niin vaikkapa $\phi = \phi_n$ ja jos Con $\Theta \cup \{\phi_n\}$, niin koska $\Theta_n \subset \Theta$, saadaan Con $\Theta_n \cup \{\phi_n\}$ ja tällöin $\phi_n \in \Theta_{n+1}$ eli $\phi_n \in \Theta$. $\square$

Apulauseet 21 ja 22 mahdollistavat ristiriidattoman kaavajoukon Φ laajennuksen kahdessa vaiheessa maksimaalisesti ristiriidattomaksi kaavajoukoksi, jolla on todistajia. Ensiksi laajennetaan joukko Φ joukoksi Ψ apulauseen 21 mukaan ja sen jälkeen laajennetaan joukko Ψ joukoksi Θ apulauseen 22 mukaan. Joukko Θ on maksimaalisesti ristiriidaton ja sillä on todistajia, koska joukolla Ψ on todistajia. Tällöin seurauksen 4 mukaan Θ on toteutuva ja koska $\Phi \subset \Theta$, niin myös Φ on toteutuva. Tällöin saadaan seuraus:

Seuraus 5. Olkoon Φ ristiriidaton ja olkoon $\mathrm{free}(\Phi)$ äärellinen. Tällöin Φ on toteutuva.

Nyt luovutaan oletuksesta, että $\mathrm{free}(\Phi)$ on äärellinen.

Lause 5.2. *Jos S on korkeintaan numeroituva ja $\Phi \subset L^S$ on ristiriidaton, niin Φ on toteutuva.*

Todistus. Yksinkertaistetaan lause 5.2 seuraukseksi 5. Olkoot $c_0, c_1, \ldots$ toisistaan erillisiä vakioita, jotka eivät kuulu joukkoon S ja asetetaan

$$S' = S \cup \{c_0, c_1, \ldots\}.$$

Kun $\phi \in L^S$, pienin n merkitään $n(\phi)$ siten, että $\mathrm{free}(\phi) \subset \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Olkoon

$$\phi' := \phi \frac{c_0 \ldots c_{n(\phi)-1}}{v_0 \ldots v_{n(\phi)-1}} \quad \text{ja} \quad \Phi' := \{\phi' \mid \phi \in \Phi\}. \tag{1}$$

Ensinnäkin seurauksen 2 mukaan

$$\mathrm{free}(\Phi') = \varnothing. \tag{2}$$

Nyt riittää osoittaa, että

$$\mathrm{Con}_{S'} \Phi', \tag{3}$$

sillä sitten tiedetään seurauksessa 5 todistetun erikoistapauksen avulla, että Φ' on toteutuva, sanotaan vaikka jollakin tulkinnalla $\mathfrak{I}' = (\mathfrak{A}', \beta')$ avulla. Käyttäen apulausetta 5 voidaan kohdan (2) avulla olettaa, että $\beta'(v_n) = c_n^{A'}$ eli $\mathfrak{I}'(v_n) = \mathfrak{I}'(c_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Sitten kohdasta (1) ja sijoitus- apulauseesta seuraa, että $\mathfrak{I}'$ on joukon Φ malli. Tällöin Φ on toteutuva.

Todistetaan kohta (3) osoittamalla, että jokainen äärellinen joukon Φ' osajoukko Φ'_0 on toteutuva ja tällöin apulauseen 15 perusteella ristiriidaton (joukon S' suhteen). Olkoon $\Phi'_0 = \{\phi'_0, \ldots, \phi'_{n-1}\}$, missä $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1} \in \Phi$. Koska $\{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\}$ on joukon Φ osajoukko, se on ristiriidaton (joukon S suhteen) ja koska siinä esiintyy vapaana ainoastaan äärellisen monta muuttujaa, niin se on toteutuva (Vrt. 5).

Valitaan S-tulkinta $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ siten, että

$$(*) \qquad \mathfrak{I} \models \{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\}$$

ja laajennetaan $\mathfrak{A}$ S'-struktuuriksi $\mathfrak{A}'$ $c_n^{\mathfrak{A}'} = \mathfrak{I}(v_n)$ avulla, kun $n \in \mathbb{N}$. Kohdista (1), $(*)$ ja sijoitus-apulauseesta seuraava S'-tulkinta $(\mathfrak{A}', \beta')$ on joukon Φ_0' malli. □

5.3 Ristiriidattomien kaavajoukkojen toteutuvuus (yleinen tapaus)

Tässä kappaleessa ei enää oleteta, että S olisi numeroituva.

Apulause 23. Oletetaan, että $\Phi \subset L^S$ ja $\mathrm{Con}_S \Phi$. Tällöin on olemassa $S' \supset S$ ja Ψ siten, että $\Phi \subset \Psi \subset L^{S'}$ ja $\mathrm{Con}_{S'} \Psi$ ja joukolla Ψ on todistajia joukon S' suhteen (siis jokaisella kaavalla, joka on muotoa $\exists x \phi \in L^{S'}$, on olemassa termi $t \in T^{S'}$ siten, että$\left(\exists x \phi \to \phi \frac{t}{x}\right) \in \Psi$).

Apulause 24. Oletetaan, että $\Psi \subset L^S$ ja $\mathrm{Con}_S \Psi$. Tällöin on olemassa joukko Θ siten, että $\Psi \subset \Theta \subset L^S$ ja Θ on maksimaalisesti ristiriidaton S:n suhteen.

Apulauseista 21 ja 22 saadaan seuraus 5, samoin apulauseista 23 ja 24 seuraa:

Seuraus 6. Jos $\Phi \subset L^S$ ja $\mathrm{Con}_S \Phi$, niin Φ on toteutuva.

Seuraava seikka johtaa apulauseen 23 todistukseen.
olkoon S mielivaltainen symbolijoukko. Liitetään jokaiseen $\phi \in L^S$ vakio c_ϕ siten, että $c_\phi \notin S$ ja $c_\phi \neq c_\psi$, kun $\phi \neq \psi$. Määrittelemällä

$$S^* := S \cup \{c_{\exists x \phi} \mid \exists x \phi \in L^S\}$$

ja

$$W(S) := \left\{\exists x \phi \to \phi \frac{c_{\exists x \phi}}{x} \mid \exists x \phi \in L^S\right\},$$

kun $\Phi \subset L^S$, saadaan:

Apulause 25. Jos $\mathrm{Con}_S \Phi$, niin $\mathrm{Con}_{S^*} \Phi \cup W(S)$.

Todistus. Oletetaan, että $\mathrm{Con}_S \Phi$ toteutuu. Osoitetaan, että jokainen joukon $\Phi \cup W(S)$ äärellinen osajoukko Φ_0^* on ristiriidaton joukon S^* suhteen todistamalla, että se on toteutuva.

Olkoon

$$\Phi_0^* = \Phi_0 \cup \left\{\exists x_0 \phi_0 \to \phi_0 \frac{c_0}{x_0}, \ldots, \exists x_{n-1} \phi_{n-1} \to \phi_{n-1} \frac{c_{n-1}}{x_{n-1}}\right\},$$

missä $\Phi_0 \subset \Phi, \exists x_0\phi_0, \ldots, \exists x_{n-1}\phi_{n-1} \in L^S$ ja missä $c_{\exists x_i \phi_i}$ merkitään yksinkertaisuuden vuoksi c_i. Sopivalle äärelliselle osajoukolle $S_0 \subset S$, saadaan

$$\Phi_0 \cup \{\exists x_0\phi_0, \ldots, \exists x_{n-1}\phi_{n-1}\} \subset L^{S_0}.$$

Lisäksi, koska $\mathrm{Con}_S\Phi$ toteutuu, niin myös $\mathrm{Con}_S\Phi_0$ toteutuu. Tällöin tietenkin $\mathrm{Con}_{S_0}\Phi_0$. Koska free(Φ_0) on äärellinen, niin seurauksesta 5 seuraa, että Φ_0 on toteutuva.

Olkoon $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ S-tulkinta, joka toteuttaa joukon Φ_0 ja kiinnittää alkion $a \in A$. Toteuttaakseen joukon Φ_0^* laajennetaan tulkinta $\mathfrak{I}$ S^*-tulkinnaksi $\mathfrak{I}^*$ seuraavasti: kun $i < n$, valitaan $a_i \in A$ siten, että

$$(*) \qquad \mathfrak{I}\frac{a_i}{x_i} \models \phi_i, \text{jos } \mathfrak{I} \models \exists x_i\phi_i,$$

ja $a_i = a$ muuten. Laajennetaan $\mathfrak{A}$ S^*-struktuuriksi $\mathfrak{A}^*$ asettamalla

$$c_i^{\mathfrak{A}^*} = a_i,$$

kun $i < n$ ja tulkitsemalla loput muotoa $c_{\exists x \phi}$ olevat vakiot alkioksi a. Olkoon $\mathfrak{I}^* = (\mathfrak{A}^*, \beta)$. Koska joukossa Φ_0 ei esiinny yhtään vakiota, joka olisi muotoa $c_{\exists x \phi}$, niin $\mathfrak{I} \models \Phi_0$:sta seuraa, että $\mathfrak{I}^* \models \Phi_0$. Lisäksi

$$\mathfrak{I}^* \models \exists x_i\phi_i \to \phi_i\frac{c_i}{x_i}$$

(ja tämä osoittaa, että Φ_0^* on toteutuva). Itse asiassa, jos $\mathfrak{I}^* \models \exists x_i\phi_i$, niin $\mathfrak{I}^*\frac{a_i}{x_i} \models \phi_i$ kohdan $(*)$ perusteella. Koska $a_i = \mathfrak{I}^*(c_i)$, niin sijoitus-apulauseesta seuraa, että $\mathfrak{I}^* \models \phi_i\,\frac{c_i}{x_i}$. □

Todistus. Todistetaan apulause 23. Oletetaan $\mathrm{Con}\,_S\Phi$ ja olkoon $\Phi \subset L^S$. Määritellään symbolijoukko S' ja $\Psi \subset L^{S'}$ seuraavien ominaisuuksien avulla:
(a) $S \subset S'$ ja $\Phi \subset \Psi$
(b) $\mathrm{Con}_{S'}\Psi$
(c) Joukolla Ψ on todistajia.

Tätä tarkoitusta varten määritellään symbolijoukko S_n ja kaavajoukot Φ_n induktiolla n:n suhteen:

$$S_0 := S \qquad \text{ja} \qquad S_{n+1} := (S_n)^*$$

$$\Phi_0 := \Phi \qquad \text{ja} \qquad \Phi_{n+1} := \Phi_n \cup W(S_n).$$

(Vertaa $(S_n)^*$:ä ja $W(S_n)$ä apulauseen 25 $(S)^*$ ja $W(S)$ määritelmiin.)

Rakenteesta seuraa, että

$$S = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots,$$

$$\Phi_n \subset L^{S_n}, \text{ kun } n \in \mathbb{N},$$

$$\Phi = \Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots .$$

Asetetaan $S' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ ja $\Psi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$. Täten (a)-kohta on tosi. Käyttäen apuna apulausetta 25 voidaan helposti osoittaa, että $\mathrm{Con}_{S_n}\Phi_n$ induktiolla n:n suhteen ja tällöin apulauseen 17 mukaan, että $\mathrm{Con}_{S'}\Psi$. Tällöin myös kohta (b) on tosi. Lopuksi todistetaan, että joukolla Ψ on todistajia. Oletetaan esimerkiksi, että $\exists x\phi \in L^{S'}$. Tällöin sopivalle n, $\exists x\phi \in L^{S^n}$. Tällöin jollekin vakiolle $c \in S_{n+1}$, kaava $\left(\exists x\phi \to \phi\frac{c}{x}\right)$ on $W(S)$:n alkio ja siis joukon Ψ alkio. □

Todistus. Todistetaan apulause 24. Apulauseen 22 todistuksessa joukon L^S laskettavuuden käyttö oli välttämätöntä. Satunnaiselle joukolle S tämä ominaisuus ei ole enää käytettävissä. Tämän vuoksi todistuksessa turvaudutaan *Zornin lemmaan*, joka esitetään tässä tämän todistukseen tarpeisiin muokatussa muodossa.

Olkoon M joukko ja olkoon $\mathfrak{U}$ epätyhjä joukko joukon M osajoukkoja. Osajoukkoa $\mathfrak{B}$ sanotaan joukon $\mathfrak{U}$ *ketjuksi*, jos $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ ja $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ ja mikäli kun $V_0, V_1 \in \mathfrak{B}$, saadaan $V_0 \subset V_1$ tai $V_1 \subset V_0$. Niin Zornin lemman mukaan:

Apulause 26. Jos jokaisella osajoukkojen joukon $\mathfrak{U}$ ketjulla $\mathfrak{B}$ yhdiste $\bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V$ kuuluu joukkoon $\mathfrak{U}$, niin on olemassa vähintään yksi maksimaalinen alkio joukossa $\mathfrak{U}$ eli alkio U_0, jolle ei ole alkiota $U_1 \in \mathfrak{U}$ siten, että $U_0 \subsetneqq U_1$.

Nyt mielivaltaiselle joukolle S, olkoon $\Psi \subset L^S$ ja Con Ψ. Asetetaan $M := L^S$ ja

$$\mathfrak{U} := \{\Phi \mid \Psi \subset \Phi \subset L^S \text{ ja } \mathrm{Con}_S\Phi\}.$$

Selvästi $\Psi \in \mathfrak{U}$, joten $\mathfrak{U}$ on epätyhjä. Olkoon $\mathfrak{B}$ ketju joukossa $\mathfrak{A}$. $\Theta_1 := \bigcup_{\Theta \in \mathfrak{B}} \Phi$ on joukon $\mathfrak{U}$ alkio, koska $\Psi \subset \Theta_1 \subset L^S$ ja $\mathrm{Con}_S\Theta_1$. (Joukon Θ_1 ristiriidattomuus voidaan todistaa seuraavasti: Jos Θ_0 on äärellinen joukon Θ_1 osajoukko, vaikkakin $\Theta_0 = \{\phi_0, \dots, \phi_{n-1}\}$, niin on olemassa $\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1} \in \mathfrak{B}$, kun $\phi_i \in \Phi_i$, jos $i < n$. Koska $\mathfrak{B}$ on ketju, voidaan luetella Φ_i siten, että $\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \dots \subset \Phi_{n-1}$. Tällöin $\Theta_0 \subset \Phi_{n-1}$ ja kun $\mathrm{Con}_S\Phi_{n-1}$, niin saadaan $\mathrm{Con}_S\Theta_0$.

Nyt Zornin lemmaa voidaan soveltaa joukkoon $\mathfrak{U}$. Tällöin saadaan maksimaalinen alkio Θ joukossa $\mathfrak{U}$. Joukon $\mathfrak{U}$ määritelmän mukaan tiedetään, että $\Psi \subset \Theta \subset L^S$ ja Con $_S\Theta$. Toisaalta Θ on maksimaalisesti ristiriidaton. Sillä, jos $\phi \in L^S$ ja $\mathrm{Con}_S\Theta \cup \{\phi\}$, niin $\Theta \cup \{\phi\} \in \mathfrak{U}$, mutta koska Θ on maksimaalinen, $\Theta = \Theta \cup \{\phi\}$. Toisin sanoen $\phi \in \Theta$. □

5.4 Täydellisyyslause

Lause 5.3 (Täydellisyyslause)**.** *Oletetaan, että* $\Phi \subset L^S$ *ja* $\phi \in L^S$. *Nyt jos* $\Phi \models \phi$, *niin* $\Phi \vdash_S \phi$.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että jos $\Phi \vDash \phi$, niin ei $\Phi \vdash_S \phi$. Apulauseen 16 (a)-kohdan mukaan, jos ei $\Phi \vdash_S \phi$, niin $\Phi \cup \{\neg\phi\}$. Siis $\Phi \cup \{\neg\phi\}$ on ristiriidaton. Yhdiste $\Phi \cup \{\neg\phi\}$ ei kuitenkaan ole toteutuva, sillä seurausten 5 ja 6 mukaan $\Phi \cup \{\neg\phi\}$ ei ole toteutuva, mikä johtaa ristiriitaan. $\square$

Viitteet

[1] Allwood,J., Andersson L-G. ja Dahl, Ö. *Logiikka ja kieli.* Pori: Oy Gaudeamus Ab, 1980.

[2] Ebbinghaus, H.D., Flum, J. ja Thomas W. *Mathematical Logic.* 2. painos. New York: Springer-Verlag, 1989.

[3] Goré, R. *An Introduction to Classical Propositional Logic: Syntax, Semantics, Sequents* [Verkkodokumentti]. Lagon: Ghana University Press. [Viitattu 23.04.2008]. URL http://www.cs.brandeis.edu/ cs112/docs/intrologic1.pdf.

[4] Harju, T. *Logiikka, lyhyt kurssi* [Verkkodokumentti]. Turku: Turun yliopisto, 2007. [Viitattu 23.04.2008]. URL http://users.utu.fi/harju/logiikka/logiikka2007.pdf.

[5] Kurittu, L. *Propositio- ja predikaattilogiikka* [Verkkodokumentti]. Jyväskylä, 2006. [Viitattu 23.04.2008]. URL http://www.math.jyu.fi/ lkurittu/johdlogiikkaan.pdf.

[6] Merikoski, J., Halmetoja, M. ja Tossavainen T. *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan.* Porvoo: Werner Söderström Osakeyhtiö,2004.

[7] Merikoski, J. Virtanen A. ja Koivisto P. *Diskreetti matematiikka I* [Moniste]. 7. painos. Tampere: Tampereen yliopisto, 1998.

[8] Niiniluoto, I. *Johdatus tieteenfilosofiaan* [Verkkodokumentti]. Helsinki: Helsingin yliopisto. [Viitattu 14.05.2008]. URL http://www.helsinki.fi/˜ohallama/Opetus/Y11_09.htm.

[9] Nurmonen, J. *Johdatus äärellisten mallien teoriaan* [Verkkodokumentti]. Tampere: Tampereen yliopisto. [Viitattu 23.04.2008]. URL http://mtl.uta.fi/Opetus/FMT/notes.pdf.

[10] Rantala, V. ja Virtanen A. *Johdatus modaalilogiikkaan, Matemaattinen näkökulma* [moniste]. Tampere: Tampereen yliopisto, 2000.

[11] Salminen, H. ja Väänänen J. *Johdatus logiikkaan.* 3. painos. Saarijärvi: Gummerus Kirjapaino Oy, 2000.

[12] Väänänen, J. *Matemaattinen logiikka.* Helsinki: Oy Gummerus Ab, 1988.