TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Rami Uurainen

Graafiteorian minorilause

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
huhtikuu 2008

Tampereen yliopisto
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
UURAINEN, RAMI: Graafiteorian minorilause
Pro gradu -tutkielma, 61 s.
Matematiikka
huhtikuu 2008

Tiivistelmä

Tämän tutkielman tarkoitus on esitellä minorilause, joka on yksi graafiteorian ja matematiikan syvällisimmistä lauseista. Minorilauseen todistuksesta esitellään lyhyt hahmotelma.

Tutkielman alussa esitellään perusasioita graafiteoriasta. Siinä määritellään esimerkiksi itse graafi, yhtenäisyys ja puu. Alkuosassa käydään läpi myös muutamia lauseita, jotka liittyvät näihin peruskäsitteisiin.

Tutkielman toisessa luvussa määritellään tasograafi, minori ja topologinen minori. Minorilauseen kannalta tärkeä Kuratowskin lause esitellään ja todistetaan tässä luvussa. Kuratowskin lause osoittaa edellä mainittujen käsitteiden yhteyden.

Viimeinen luku johdattaa lukijaa luvun lopussa esiteltävään minorilauseeseen. Tässä luvussa määritellään sellaisia käsitteitä kuin kvasihyvä järjestys, puuhajotelma ja kielletyt minorit, sekä esitellään ja todistetaan niihin liittyviä lauseita.

Asiasanat: graafiteoria, graafi, tasograafi, minori, minorilause

Sisältö

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoitus on esitellä minorilause, joka on yksi graafiteorian ja matematiikan syvällisimmistä lauseista. Lisäksi esitellään ja todistetaan joukko lauseita, jotka ovat merkittäviä minorilauseen kannalta. Kaikki tarvittavat käsitteet tulevat määritellyiksi.

Ensimmäisen luvun alussa esitellään graafiteorian historiaa lyhyesti niiltä osin, kun se liittyy tämän tutkielman sisältöön. Pykälässä 1.2 määritellään itse graafi. Ensimmäisessä luvussa tutustutaan myös käsitteisiin solmun aste, polku, yhtenäisyys ja puu. Myös joitakin niihin liittyviä lauseita esitellään ja todistetaan.

Toisen luvun alussa määritellään minori ja topologinen minori. Lisäksi todistetaan, että minorirelaatio ja topologinen minorirelaatio ovat graafien osittaisia järjestyksiä. Pykälässä 2.2 esitellään tasograafi sekä alue. Siinä todistetaan Eulerin kaava ja muutamia muita lauseita. Tärkein on pykälän lopussa todistettava Kuratowskin lause, joka on tärkeä lause minorilauseen todistuksessa.

Kolmannessa luvussa kaikki määritelmät ja lauseet valmistelevat minorilauseen esittämistä. Pykälässä 3.1 määritellään graafien väritys, kvasihyvä järjestys ja hyvä jono. Siinä myös todistetaan muun muassa, että jokaisella jonolla joukossa X on ääretön kasvava osajono, jos joukko X on kvasihyvin järjestetty. Pykälässä 3.2 määritellään kvasijärjestys kaikkien juurellisten puiden luokassa ja todistetaan Kruskalin lause. Pykälässä 3.3 määritellään esimerkiksi puuhajotelma ja monia muita käsitteitä. Pykälässä 3.3 todistetaan useita minorilauseen kannalta tarpeellisia lauseita. Pykälässä 3.4 esitellään kiellettyjen minorien määritelmä. Pykälän lopussa todistetaan, että jokaista kokonaislukua r kohti on olemassa sellainen kokonaisluku k, että jokaisella graafilla, jonka puuleveys on vähintään k, on $r \times r$-ruudukko minorina. Pykälässä 3.5 esitellään minorilause ja sen todistuksen hahmotelma.

Lukijalta edellytetään joukko-opin, lukuteorian ja topologian perustermien tuntemista. Myöskin niiden piirissä olevat tulokset oletetaan tunnetuiksi. Graafiteorian tuntemusta lukijalta ei edellytetä lainkaan. Tämän tutkielman tärkein lähdeteos on Reinhard Diestelin *Graph Theory*.

1 Graafeista

Tässä luvussa määritellään graafiteorian tärkeimmät käsitteet. Aluksi esitellään myös tämän tutkielman kannalta tärkeimpien asioiden ja henkilöiden taustoja. Jotkin esiteltävät lauseet eivät ole niin oleellisia tutkielman kannalta kuin ne ovat graafiteorian kannalta yleensä. Siksi ne on sisällytetty mukaan perusteisiin.

1.1 Historiaa

Kuva 1: Leonhard Euler

Graafiteorian katsotaan saaneen alkunsa sveitsiläisen matemaatikon Leonhard Eulerin 1736 kirjoittamasta artikkelista *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Artikkelissaan Euler ratkaisi ns. *Königsbergin siltaongelman*. Königsberg tunnetaan nykyään nimellä Kaliningrad. Euler todisti, että on mahdotonta löytää sellainen reitti, joka kulkisi vain kerran jokaisen sillan kautta.

Kuva 2: Königsbergin sillat

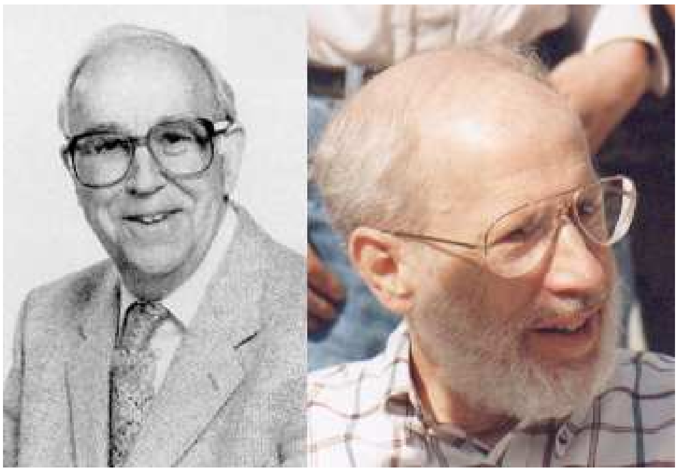
Pykälässä 1.5 määritellään *puu*. Termiä puu käytti ensimmäisen kerran englantilainen matemaatikko Arthur Cayley 1857. Puiden käsitteen esittelivät saksalainen matemaatikko Karl G. C. von Staudt ja saksalainen, Königsbergissä syntynyt, fyysikko Gustav R. Kirchhoff kuitenkin jo kymmenen vuotta aiemmin. Vuonna 1878 Cayleyn ystävä James Joseph Sylvester käytti artikkelissaan sanaa *graafi* ensimmäistä kertaa siinä mielessä kuin se nykyään ymmärretään.

Kuva 3: Cayley, von Staudt, Kirchhoff, Sylvester

Tasograafien ja *minorien* tutkimus jatkui, ja 1930 puolalainen matemaatikko Kazimierz Kuratowski julkaisi merkittävän lauseensa, joka esitellään pykälässä 2.2.

Kuva 4: Kazimierz Kuratowski

Ennen kuin *minorilausetta* oli todistettu, se tunnettiin nimellä *Wagnerin otaksuma* saksalaisen matemaatikon Klaus Wagnerin mukaan. Hän muotoili otaksumansa vuonna 1937. Vuonna 1960 amerikkalainen matemaatikko Joseph Kruskal todisti minorilauseen puille. Se esitellään pykälässä 3.2.



Kuva 5: Klaus Wagner & Joseph Kruskal

Lopulta minorilauseen todistivat kanadalainen Neil Robertson ja englantilainen Paul Seymour. Todistus käsittää kaikkiaan yli 500 sivua ja se esiteltiin julkaisusarjassa vuosina 1983-2004. Tästä työstä he saivat unkarilaisen matemaatikon George Pólyan mukaan nimetyn *Pólya*-palkinnon vuonna 2004. Minorilause tunnetaankin englanniksi nimellä *Robertson–Seymour theorem*.

Kuva 6: Neil Robertson & Paul Seymour

1.2 Perusteita

Graafiteorian termeissä ja määritelmissä on eroja riippuen lähteistä. Esimerkiksi Andersonin teoksessa (vrt. [1, s. 4]) graafi määritellään relaation kautta seuraavasti. Olkoon S äärellinen epätyhjä joukko. *Relaatio* R joukolla S on kokoelma joukon S alkioiden järjestettyjä pareja. Merkitään joukko S kirjaimella V ja järjestettyjen parien joukkoa kirjaimella X. Joukon V alkiota kutsutaan *pisteiksi* ja joukon X alkioita *nuoliksi.*

Tässä tutkielmassa käytetään selkeämpää määrittelyä, joka on sama kuin Diestelin teoksessa (vrt. [3, s. 2]).

Määritelmä 1.1. Olkoot V ja E joukkoja, missä joukon E alkiot ovat järjestämättömiä pareja $\{u, v\}$ joukon V alkioista eli $E \subseteq [V]^2$. Tällöin pari $G = (V, E)$ on *graafi.* Joukon V alkiot ovat *solmuja* ja joukon E alkiot ovat *särmiä.* Graafin G solmujoukolle käytetään merkintää $V(G)$ ja särmäjoukolle $E(G)$. Pari $(\emptyset, \emptyset)$ on *tyhjä graafi.*

Määritelmä 1.2. Graafin G *järjestys* on sen solmujen lukumäärä, merkitään $|G|$. Graafin G särmien lukumäärää merkitään $\|G\|$. Jos graafin järjestys on 0 tai 1, se on *triviaali.*

Huomautus. Jos G ei ole graafi vaan joukko, niin merkintä $|G|$ tarkoittaa joukon G alkioiden lukumäärää.

Määritelmä 1.3. Jos $V \neq \emptyset$ ja E on äärellinen joukko järjestämättömiä pareja $\{u, v\}$, missä $u, v \in V$, $u \neq v$, niin pari (V, E) on *yksinkertainen graafi.*

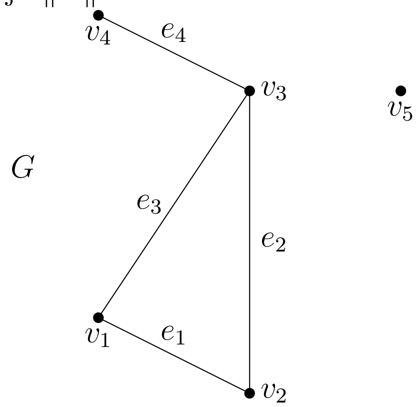
Määritelmä 1.4. Jos $V \neq \emptyset$ ja E on äärellinen joukko järjestettyjä pareja (u, v), missä $u, v \in V$, niin pari (V, E) on *suunnattu graafi.* Särmä (u, v) on *luuppi*, jos $u = v$.

Määritelmä 1.5. Jos $V \neq \emptyset$ ja E on äärellinen multijoukko järjestämättömiä pareja $\{u, v\}$, missä $u, v \in V$, pari (V, E) on *multigraafi.* Lisäksi multigraafissa voi olla luuppeja.

Huomautus. Graafin solmujen ja särmien joukkojen nimet eivät vaikuta solmu- ja särmäjoukkojen merkintään. Olkoon $H = (W, F)$ graafi. Graafin H solmujoukko on $V(H)$ ja särmäjoukko $E(H)$, eikä $W(H)$ ja $F(H)$. Jos $v \in V(H)$ ja $e \in E(H)$, niin merkitään, että $v \in H$ ja $e \in H$. Myös särmille on lyhyempi merkintätapa. Jos $e = \{v_1, v_2\}$, niin merkitään, että $e = v_1v_2$.

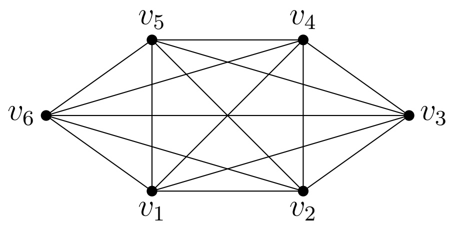
Jatkossa sanalla graafi tarkoitetaan yksinkertaista graafia ellei toisin mainita. Usein graafeja havainnollistetaan kuviolla, jossa solmut piirretään pisteiksi ja särmät viivoiksi pisteiden välille.

Esimerkki 1.1. Graafi $G = (V, E)$, missä $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $|G| = 5$ ja $\|G\| = 4$.



Määritelmä 1.6. Olkoon G graafi. Tällöin solmut v_1 ja v_2 ovat *vierussolmuja* tai *naapureita*, jos $v_1v_2 \in E(G)$. Jos graafin G kaikki solmut ovat keskenään vierussolmuja, niin tällöin G on *täydellinen* graafi. Täydellistä n-solmuista graafia merkitään K^n.

Esimerkki 1.2. Täydellinen kuusisolmuinen graafi K^6.



K^6

Määritelmä 1.7. Solmu- tai särmäjoukko on *riippumaton*, jos mitkään sen alkioista eivät ole naapureita keskenään.

Määritelmä 1.8. Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ graafeja, sekä $W \subseteq V$ ja $F \subseteq E$. Tällöin graafi H on graafin G *aligraafi* ja merkitään $H \subseteq G$.

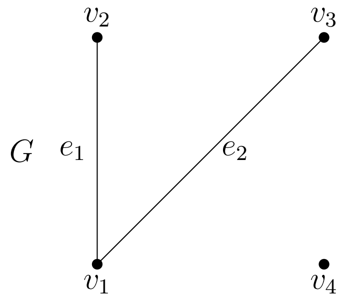
Määritelmä 1.9. Olkoon $G' \subseteq G$. Jos graafin G' jokainen särmä $xy \in E(G)$ ja jokainen solmu $x, y \in V(G')$, niin G' on graafin G *indusoitu aligraafi*.

Määritelmä 1.10. Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ graafeja. Jos on olemassa sellainen bijektio $\varphi : V \to W$, että $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in F$ kaikilla $x, y \in V$, niin graafi G on *isomorfinen* graafin H kanssa. Merkitään $G \simeq H$.

1.3 Solmun aste

Määritelmä 1.11. Olkoon $G = (V, E)$ epätyhjä graafi. Graafin G solmun v naapureiden joukkoa merkitään $N_G(v)$. Merkintää, ilman alaindeksiä, $N(v)$ käytetään, kun yhteys on selvä. Yleisemmin, kun $U \subseteq V$, niin joukon U solmujen naapureita joukossa $V \backslash U$ sanotaan *joukon U naapureiksi.* Tätä naapureiden joukkoa merkitään $N(U)$. Solmusta v lähtevien särmien lukumäärä $|E(v)|$ on solmun v *aste*. Merkitään $d_G(v)$ tai lyhyemmin $d(v)$. Jos solmun aste on 0, se on *eristetty.*

Esimerkki 1.3. Olkoon $G = (V, E)$ graafi, missä $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, $e_1 = v_1v_2$ ja $e_2 = v_1v_3$. Tällöin solmun v_2 aste on 1 ja solmu v_4 on eristetty.



Määritelmä 1.12. Graafin $G = (V, E)$ *minimiaste* on $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ ja *maksimiaste* $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$. Graafi on *$k$-säännöllinen*, jos sen jokaisen solmun aste on k.

Esimerkki 1.4. Olkoon G sama graafi kuin esimerkissä 1.3. Tällöin graafin G minimiaste on 0 ja maksimiaste 2.

Määritelmä 1.13. Graafin $G = (V, E)$ *keskiarvoaste* $d(G)$ saadaan kaavalla

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v).$$

Voidaan laskea myös suoraan särmien ja solmujen suhde $\varepsilon(G)$:

$$\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}.$$

Kun lasketaan solmujen asteiden summa, niin jokainen särmä tulee käytyä läpi kahdesti, joten

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|\,.$$

Tällöin

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v) = 2\frac{|E|}{|V|},$$

eli

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{2}\, d(G).$$

Lause 1.1. *Paritonasteisten solmujen lukumäärä graafissa on parillinen.*

Todistus (vrt. [3, s. 5] ja [7, s. 8]). Olkoon $G = (V, E)$ epätyhjä graafi, koska tyhjässä graafissa ei ole solmuja. Koska

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} d(v) &= 2\,|E| \\ |E| &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) \end{aligned}$$

ja koska $|E|$ on kokonaisluku, niin $\sum d(v)$ täytyy olla parillinen kokonaisluku. Summa voi olla parillinen vain silloin, kun kaikki summattavat ovat parillisia tai parittomia summattavia on parillinen määrä. □

Merkintöjen lyhentämiseksi otetaan seuraavat merkinnät käyttöön.

Määritelmä 1.14. Olkoon $G = (V, E)$, $H = (W, F)$, $v \in V$, $e \in E$, $H \subseteq G$. Tällöin

$$\begin{aligned} (V \setminus \{v\}, E) &= G - v, \\ (V, E \setminus \{e\}) &= G - e \text{ ja} \\ (V \setminus W, E \setminus F) &= G - H. \end{aligned}$$

Lause 1.2. *Kun graafissa G on vähintään yksi särmä, on olemassa sellainen G:n aligraafi H, että $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.*

Todistus (vrt. [3, s. 6]). Muodostetaan jono $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots$ indusoituja graafin G aligraafeja seuraavasti. Jos graafissa G_i on sellainen solmu v_i, että $d(v_i) \leq \varepsilon(G_i)$, niin asetetaan $G_{i+1} := G_i - v_i$. Jos taas sellaista solmua ei löydy, niin jonon muodostaminen voidaan lopettaa ja asetetaan $H := G_i$. Nyt $\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$ kaikilla kokonaisluvuilla i, joten $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Koska $\varepsilon(K^1) = 0 < \varepsilon(G)$, niin yksikään jonon graafeista ei ole triviaali ja erityisesti $H \neq \emptyset$. Kun jono muodostetaan kyseisellä tavalla, niin graafissa H ei siis ole yhtään solmua, jonka aste olisi pienempi tai yhtäsuuri kuin $\varepsilon(H)$. Tällöin myöskin $\delta(H) > \varepsilon(H)$. □

1.4 Polut ja yhtenäisyys

Tässä pykälässä esitellään polun käsite. Lisäksi esitellään yhtenäisyys, joka on tärkeä ominaisuus useissa graafiteorian sovelluksissa.

Määritelmä 1.15. Epätyhjä graafi $P = (V, E)$, missä $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ ja $E = \{x_0x_1, x_1x_2 \ldots, x_{k-2}x_{k-1}, x_{k-1}x_k\}$, on *polku*, kun solmut x_i ovat erilliset. Polku P *yhdistää* solmut x_0 ja x_k, ja ne ovat polun P *päät*. Solmut $x_1 \ldots x_{k-1}$ taas ovat polun P *sisäsolmuja*.

Määritelmä 1.16. Polun särmien lukumäärä on sen *pituus*. Polku, jonka pituus on k, merkitään P^k. Polku, jonka pituus on nolla, on *tyhjä polku*. Tällöin $P^0 = K^1$.

Kun $0 \leq i \leq j \leq k$, niin

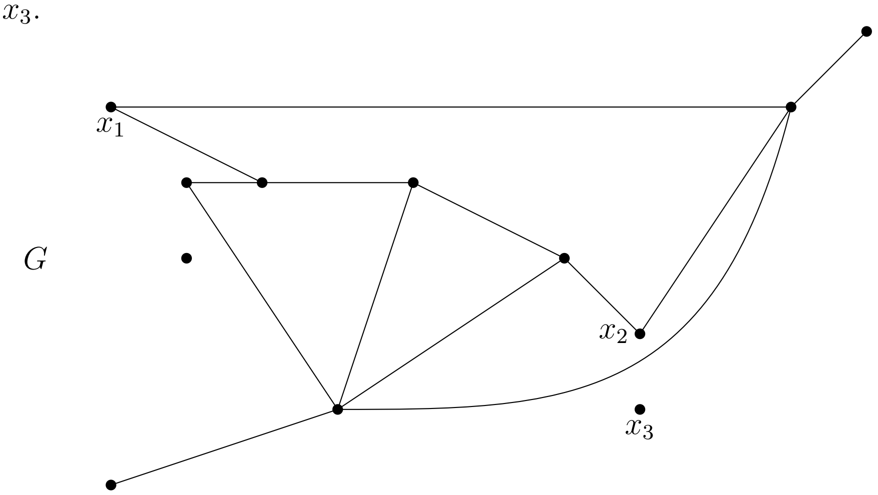
$$\begin{aligned} Px_i &= x_0 \ldots x_i, \\ x_iP &= x_i \ldots x_k \text{ ja} \\ x_iPx_j &= x_i \ldots x_j. \end{aligned}$$

Lisäksi määritellään tiettyjä polun P alipolkuja seuraavasti.

$$\begin{aligned} \mathring{P} &= x_1 \ldots x_{k-1}, \\ P\,\mathring{x}_i &= x_0 \ldots x_{i-1}, \\ \mathring{x}_i\,P &= x_{i+1} \ldots x_k \text{ ja} \\ \mathring{x}_i\,P\,\mathring{x}_j &= x_{i+1} \ldots x_{j-1}. \end{aligned}$$

Huomautus. Jos ketju polkuja muodostaa polun, käytetään lyhennettyä merkintätapaa. $Px \cup xQy \cup yR$ merkitään siis $PxQyR$.

Esimerkki 1.5. Graafissa G on olemassa polku $x_1 \ldots x_2$, mutta ei polkua $x_1 \ldots x_3$.



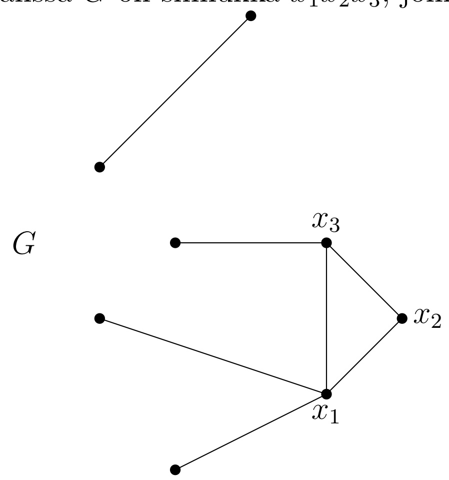
Määritelmä 1.17. Olkoot A ja B solmujoukkoja. Tällöin $P = x_0 \dots x_k$ on *A–B polku*, jos $V(P) \cap A = \{x_0\}$ ja $V(P) \cap B = \{x_k\}$. Jos $A = \{a\}$, käytetään merkintää $a - B$-polku merkinnän $\{a\} - B$-polku asemesta. Polut ovat *erillisiä*, jos mikään poluista ei sisällä jonkin muun polun sisäsolmua. Kaksi $a - b$ polkua ovat erilliset, jos ja vain jos a ja b ovat niiden ainoat yhteiset solmut.

Määritelmä 1.18. Olkoon H graafi. Polku $P = x_0 \dots x_k$ on *H-polku*, jos polku P ei ole triviaali ja $V(P) \cap V(H) = \{x_0, x_k\}$.

Määritelmä 1.19. Olkoon $P = x_0 \dots x_{k-1}$ polku ja $k \geq 3$. Tällöin graafi $C = P + x_{k-1}x_0$ on *silmukka*. Silmukka esitetään solmujen tai särmien jonona kuten polkukin. Tällöin $C = x_0 \dots x_{k-1}x_0$.

Määritelmä 1.20. Silmukan särmien (tai solmujen) lukumäärä on sen *pituus*. Silmukka, jonka pituus on k, on *k-silmukka*, merkitään C^k.

Esimerkki 1.6. Graafissa G on silmukka $x_1x_2x_3$, jonka pituus on kolme.



Määritelmä 1.21. Graafin G sisältämien silmukoiden pienin pituus on sen *minimiympärys*, merkitään $g(G)$. Vastaavasti graafin G sisältämien silmukoiden suurin pituus on sen *maksimiympärys*.

Huomautus. Jos graafissa G ei ole yhtään silmukkaa, niin minimiympärys on ääretön ja maksimiympärys on nolla.

Määritelmä 1.22. Olkoot C silmukka graafissa G, $x, y \in V(C)$, $xy \in E(G)$ ja $xy \notin E(C)$. Tällöin särmä xy on silmukan C *jänne*.

Määritelmä 1.23. Olkoon C silmukka, joka on graafin G indusoitu aligraafi. Tällöin silmukka C on graafin G *indusoitu silmukka*, jos siinä ei ole yhtään jännettä.

Lause 1.3. *Olkoon G graafi ja $\delta(G) \geq 2$. Graafissa G on polku, jonka pituus on $\delta(G)$ ja silmukka, jonka pituus on vähintään $\delta(G) + 1$.*

Todistus (vrt. [3, s. 8]). Olkoon $P = x_0 \dots x_k$ graafin G pisin polku. Tällöin solmun x_k kaikki naapurit ovat polulla P, joten $k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$. Jos $i < k$ on pienin sellainen luku, jolla $x_i x_k \in E(G)$, niin $x_i \dots x_k x_i$ on silmukka, jonka pituus on korkeintaan $\delta(G) + 1$. □

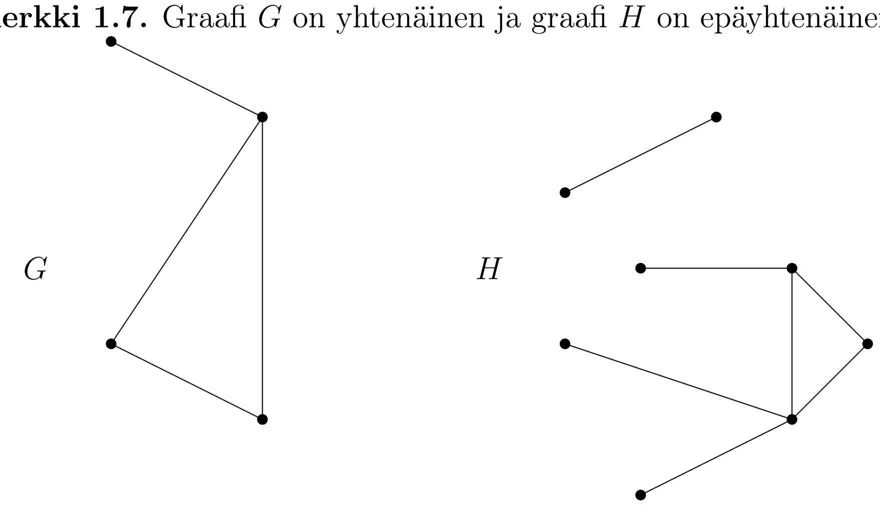
Määritelmä 1.24. Olkoon G graafi ja $x, y \in V(G)$. Tällöin solmujen x ja y välisen polun pienin pituus on niiden *etäisyys*, merkitään $d_G(x, y)$ tai lyhyemmin $d(x, y)$, jos sekaannuksen vaaraa ei ole. Graafin G suurin etäisyys on sen *halkaisija*, merkitään diam (G).

Lause 1.4. *Jos graafissa on silmukka, niin $g(G) \leq 2 diam\ (G) + 1$.*

Todistus (vrt. [3, s. 9]). Olkoon C graafin G lyhin silmukka. Tehdään vastaoletus, että $g(G) \geq 2\text{diam}\ (G) + 2$. Tällöin silmukassa C on kaksi solmua x ja y, joiden etäisyys silmukassa C on vähintään diam $(G) + 1$. Olkoon polku P niiden solmujen välinen lyhin polku graafissa G. Tällöin niiden etäisyys on kuitenkin korkeintaan diam (G), joten $P \nsubseteq C$. Polku P kuitenkin sisältää C-polun xPy. Nyt yhdistetään polku P ja silmukan C sisältämä lyhyempi polku solmujen x ja y välisistä poluista. Tällöin saadaan silmukka, joka on lyhyempi kuin C, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että C on lyhin silmukka graafissa G. Siis vastaoletus hylätään ja väite on tosi. □

Määritelmä 1.25. Olkoon G epätyhjä graafi. Jos graafin G minkä tahansa kahden solmun välillä on polku, niin graafi G on *yhtenäinen*. Olkoot $U \subseteq V(G)$ ja $G[U]$. Tällöin myös joukkoa U kutsutaan yhtenäiseksi graafissa G. Jos graafi ei ole yhtenäinen, se on *epäyhtenäinen*.

Esimerkki 1.7. Graafi G on yhtenäinen ja graafi H on epäyhtenäinen.



Lause 1.5. *Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi. Jos $e \in E$ on graafin G jonkin silmukan särmä, myös graafi $G - e$ on yhtenäinen.*

Todistus (vrt. [7, s. 34]). Olkoon $e = \{u, v\}$ graafin G silmukan $C = v, u_1, \ldots, u_{n-2}, u, v$ särmä. Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että silmukan esityksessä särmä e on viimeisenä. Nyt polku $P = v, u_1, \ldots, u_{n-2}, u$ on graafin G polku, joka ei sisällä särmää e. Siis P on myös graafin $G-e$ polku. Tehdään vastaoletus, että graafi $G-e$ ei ole yhtenäinen. Tällöin graafissa $G - e$ on solmut x ja y, joiden välillä ei ole polkua graafissa $G - e$. Graafissa G kuitenkin on polku solmujen x ja y välillä. Lisäksi tämä polku sisältää särmän e. Olkoon se polku $x, x_1, \ldots, x_k, v, u, x_{k+3}, \ldots, x_{l-1}, y$. Mutta nyt graafissa $G - e$ on polku $x, x_1, \ldots, x_k, v, u_1, \ldots, u_{n-2}, u, x_{k+3}, \ldots, x_{l-1}, y$ solmujen x ja y välillä, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. □

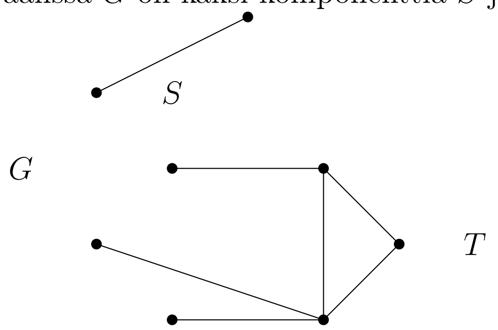
Lause 1.6. *Yhtenäisen graafin G solmut voidaan aina järjestää jonoon $v_1, v_2, \ldots, v_n$ niin, että graafi $G_i := G[v_1, \ldots, v_i]$ on yhtenäinen aina kun $i \leq n$.*

Todistus (vrt. [3, s. 10]). Valitaan mikä tahansa solmu solmuksi v_1. Tehdään induktio-oletus, että väite on tosi jollain kokonaisluvulla $i < |G|$. Valitaan jokin solmu $v \in G - G_n$. Graafissa G on olemassa polku P solmujen v_1 ja v välillä, koska G on yhtenäinen. Asetetaan nyt polun P ensimmäinen solmu, joka ei ole polulla $v_1 \ldots v_i$, solmuksi $v_{i+1} \in G - G_i$. Tällöin solmulla v_{i+1} on naapuri graafissa G_i, joten induktioperiaatteen nojalla väite on tosi. □

Määritelmä 1.26. Graafin maksimaalinen yhtenäinen aligraafi on graafin *komponentti.*

Huomautus. Koska komponentti on yhtenäinen, se ei koskaan voi olla tyhjä. Tällöin tyhjällä graafilla ei ole komponentteja.

Esimerkki 1.8. Graafissa G on kaksi komponenttia S ja T.

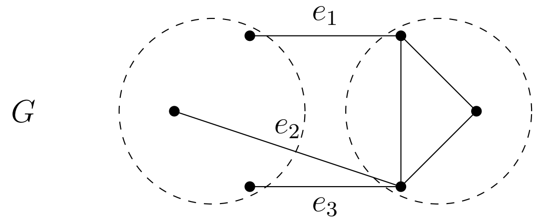


Määritelmä 1.27. Olkoon $G = (V, E)$ graafi. Jos $A, B \subseteq V$ ja $X \subseteq V \cup E$ ovat sellaisia joukkoja, että jokainen $A - B$ polku graafissa G sisältää solmun tai särmän joukosta X, niin tällöin joukko X *separoi* joukot A ja B graafissa G. Yleisemmin voidaan sanoa, että joukko X *separoi* graafin G, jos graafi $G - X$ on epäyhtenäinen.

Määritelmä 1.28. Separoiva joukko solmuja on *hajotusjoukko* ja separoiva joukko särmiä on *irrotusjoukko*. Jos hajotusjoukossa on vain yksi solmu v, niin tällöin v on *irrotussolmu*. Jos irrotusjoukossa on vain yksi särmä e, niin tällöin e on *silta*.

Määritelmä 1.29. Olkoon $\{A, B\}$ graafin $G = (V, E)$ solmujoukon V jokin luokkajako. Tällöin niiden särmien joukko, joiden toinen päätesolmu on joukossa A ja toinen joukossa B on graafin G *irrotus*.

Esimerkki 1.9. Graafilla G on irrotus $\{e_1, e_2, e_3\}$.



Määritelmä 1.30. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Graafi G on *k-yhtenäinen*, jos $|G| > k$, ja graafi $G - X$ on yhtenäinen kaikilla joukoilla $X \subseteq V$, kun $|X| < k$.

Määritelmä 1.31. Olkoon kokonaisluku k suurin sellainen luku, että graafi G on k-yhtenäinen. Tällöin k on graafin G *yhtenäisyysaste* $\kappa(G)$.

Huomautus. Näin ollen $\kappa(G) = 0$, jos ja vain jos graafi G on epäyhtenäinen tai $G = K^1$. Yhtenäisyysaste $\kappa(K^n) = n - 1$ kaikilla $n \geq 1$.

Määritelmä 1.32. Graafi G on *ℓ-särmäyhtenäinen*, jos $|G| > 1$ ja graafi $G - F$ on yhtenäinen kaikilla joukoilla $F \subseteq E$, kun $|F| < \ell$.

Määritelmä 1.33. Olkoon kokonaisluku ℓ suurin sellainen luku, että graafi G on ℓ-särmäyhtenäinen. Tällöin ℓ on graafin G *särmäyhtenäisyysaste* $\lambda(G)$.

Huomautus. Jos graafi G on epäyhtenäinen, niin $\lambda(G) = 0$.

Lause 1.7. *Jos graafi G ei ole triviaali, niin $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Todistus (vrt. [3, s. 12] ja [7, s. 56]). Olkoon $G = (V, E)$ graafi. Jälkimmäinen epäyhtälö pätee, koska niiden särmien, jotka ovat yhteydessä johonkin tiettyyn solmuun, joukko separoi graafin G.

Olkoon F mikä tahansa sellainen joukon E minimaalinen osajoukko, että graafi $G - F$ on epäyhtenäinen. Osoitetaan nyt, että $\kappa(G) \leq |F|$. Oletetaan, että graafissa G on sellainen solmu v, että se ei muodosta särmää minkään muun solmun kanssa joukossa F. Olkoon nyt C sellainen graafin $G - F$ komponentti, että $v \in C$. Tällöin ne komponentin C solmut, jotka ovat joukon

F särmissä, separoivat solmun v graafista $G - C$. Koska joukko F on minimaalinen, niin minkään joukon F särmän molemmat solmut eivät ole komponentissa C. Tällöin sellaisia solmuja on korkeintaan $|F|$ kappaletta, joten $\kappa(G) \leq |F|$.

Oletetaan sitten, että jokainen solmu on jonkin joukon F särmän solmu. Olkoon v mikä tahansa solmu ja olkoon C sellainen graafin $G - F$ komponentti, että $v \in V(C)$. Tällöin solmun v ne naapurit w, joille pätee, että $vw \notin F$, ovat komponentissa C ja joukon F erillisissä särmissä. Näin ollen $d_G(v) \leq |F|$. Koska $N_G(v)$ separoi solmun v kaikista muista solmuista graafissa G, niin $\kappa(G) \leq |F|$, jollei ei ole muita solmuja esimerkiksi $\{v\} \cup N(v) = V$. Mutta solmu v oli mielivaltaisesti valittu, joten voidaan olettaa, että graafi G on täydellinen, jolloin $\kappa(G) = \lambda(G) = |G| - 1$. □

Huomautus. Lauseen 1.7 perusteella korkea yhtenäisyysaste edellyttää suurta minimiastetta. Kuitenkaan suuri minimiaste ei takaa korkeaa yhtenäisyysastetta.

Lause 1.8. *Olkoon* $0 \neq k \in \mathbb{N}$. *Jokaisella graafilla* G*, jolla* $d(G) \geq 4k$*, on sellainen* $(k+1)$*-yhtenäinen aligraafi* H*, että* $\varepsilon(H) > \varepsilon(G) - k$.

Todistus (vrt. [3, s. 13]). Asetetaan $\gamma = \varepsilon(G)$ $(\geq 2k)$. Tarkastellaan sellaisia aligraafeja $G' \subseteq G$, että

$$|G'| \geq 2k \text{ ja } \|G'\| > \gamma \left(|G'| - k\right). \tag{$*$}$$

Tämän ehdon mukaisia graafeja G' on olemassa, koska esimerkiksi G on sellainen. Olkoon H jokin ehdon $(*)$ täyttävistä aligraafeista, jolla on pienin koko.

Yhdenkään ehdon $(*)$ täyttävän graafin G' koko ei voi olla tasan $2k$, koska siitä seuraisi, että

$$\|G'\| > \gamma k \geq 2k^2 > \binom{|G'|}{2}.$$

Graafin H minimaalisuudesta seuraa, että $\delta(H) > \gamma$, koska muussa tapauksessa voisimme poistaa jonkin korkeintaan astetta γ olevan solmun, jolloin saisimme graafin $G' \nsubseteq H$, joka kuitenkin täyttää ehdon $(*)$. Erityisesti pätee, että $|H| \geq \gamma$. Kun jaetaan ehdon $(*)$ epäyhtälö $\|H\| > \gamma\,|H| - \gamma k$ luvulla $|H|$, niin saadaan $\varepsilon(H) > \gamma - k$.

Osoitetaan vielä, että H on $(k+1)$-yhtenäinen. Jos näin ei ole, niin graafilla H on irrotus $\{U_1, U_2\}$, jonka järjestys on korkeintaan k. Asetetaan $H[U_i] = H_i$. Koska minkä tahansa solmun $v \in U_1 \setminus U_2$ naapurit $(d(v) \geq \delta(H) > \gamma$ kappaletta) graafissa H ovat graafissa H_1, niin $|H_1| \geq \gamma \geq 2k$. Samoin myös $|H_2| \geq 2k$. Graafin H minimaalisuudesta johtuen graafit H_1 ja H_2 eivät kumpikaan täytä ehtoa $(*)$, joten saadaan $\|H_i\| \leq \gamma\,(|H_i| - k)$, kun $i = 1, 2$. Mutta tällöin

$$\begin{aligned}
\|H\| &\leq \|H_1\| + \|H_2\| \\
&\leq \gamma\,(|H_1| + |H_2| - 2k) \\
&\leq \gamma\,(|H| - k) \ \ (\text{kun } |H_1 \cap H_2| \leq k),
\end{aligned}$$

mikä on ristiriidassa ehdon $(*)$ kanssa. □

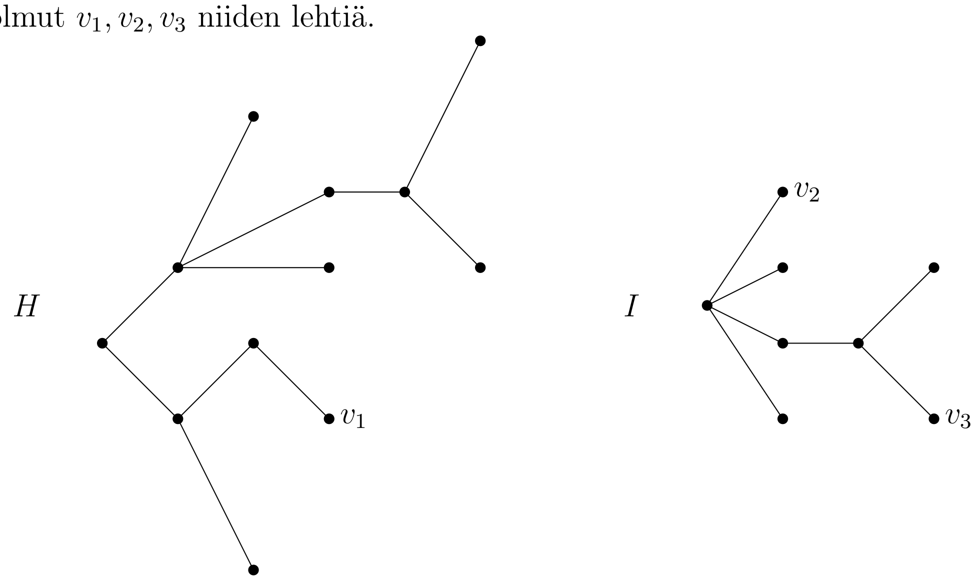
Määritelmä 1.34. Olkoon $r \geq 2$ kokonaisluku. Graafi $G = (V, E)$ on *r-jakoinen*, jos on olemassa sellainen joukon V luokkajako $\{V_1, \ldots, V_r\}$, että joukon E minkään särmän molemmat solmut eivät kuulu joukkoon V_i. Jos graafi on 2-jakoinen, käytetään nimitystä *kaksijakoinen*.

1.5 Puut

Tässä pykälässä esitellään puun ja metsän käsite sekä muutama niihin liittyvä lause.

Määritelmä 1.35. Graafi, jossa ei ole yhtään silmukkaa, on *metsä*. Yhtenäinen metsä on *puu*. Tällöin siis metsä on graafi, jonka komponentit ovat puita. Puun solmut, joiden aste on 1, ovat sen *lehtiä*.

Esimerkki 1.10. Graafi G on metsä. Sen komponentit H ja I ovat puita ja solmut v_1, v_2, v_3 niiden lehtiä.



G

Lause 1.9. *Olkoon T graafi. Seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä keskenään.*

(i) *T on puu.*

(ii) *Graafin T minkä tahansa kahden solmun välillä on yksikäsitteinen polku.*

(iii) *T on yhtenäinen, mutta $T - e$ on epäyhtenäinen kaikilla särmillä $e \in T$.*

(iv) *Graafissa T ei ole yhtään silmukkaa, mutta graafissa $T + xy$ on silmukka millä tahansa kahdella solmulla $x, y \in T$, jotka eivät ole vierussolmuja.*

Todistus (vrt. [3, s. 14] ja [7, s. 62]). Todistetaan lause niin, että oletetaan edellinen kohta ja pidetään seuraavaa kohtaa väitteenä.

(i) Olkoon T puu. Tällöin T on määritelmän mukaan yhtenäinen. Valitaan mielivaltaisesti kaksi solmua $u, v \in T$. Tehdään sitten vastaoletus, että puussa T on olemassa kaksi eri polkua uP_1v ja uP_2v. Muodostetaan nyt polku vP_3u luettelemalla polun uP_2v solmut käänteisessä järjestyksessä. Tällöin polku $P = uP_1vP_3u$ sisältää määritelmän mukaan silmukan. Tämä on ristiriidassa puun määritelmän kanssa, joten väite on tosi.

(ii) Olkoon T graafi. Valitaan mielivaltaisesti kaksi solmua $u, v \in T$. Oletuksen mukaan niiden välillä on yksikäsitteinen polku P. Tällöin T on määritelmän mukaan yhtenäinen. Valitaan mielivaltaisesti särmä $e \in P$. Nyt graafissa $T - e$ ei ole polkua solmujen u ja v välillä, joten $T - e$ on epäyhtenäinen. Väite on tosi, koska solmut u ja v sekä särmä e olivat mielivaltaisia.

(iii) Olkoon T yhtenäinen. Jos graafissa T olisi silmukka C, niin myöskin $T - e$ olisi yhtenäinen millä tahansa särmällä $e \in C$. Tällöin siis graafissa T ei ole yhtään silmukkaa. Määritelmän mukaan T on nyt puu. Valitaan mielivaltaisesti kaksi solmua $u, v \in T$, jotka eivät ole vierussolmuja. Ensimmäisen kohdan perusteella niiden välillä on yksikäsitteinen polku uPv. Lisätään graafiin T nyt särmä vu. Tällöin polku $uPv \cup vu$ on silmukka.

(iv) Olkoon T yhtenäinen. Tällöin se on määritelmän mukaan puu.

Olkoon T sitten epäyhtenäinen. Valitaan mielivaltaisesti kaksi sellaista solmua $u, v \in T$, joiden välillä ei ole polkua. Lisätään graafiin T särmä uv, mutta graafi $T + uv$ ei vielä sisällä silmukkaa, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Siis T ei voi olla epäyhtenäinen.

□

Lause 1.10. *Puun solmut voidaan aina laittaa järjestykseen* $v_1, \dots, v_n$ *niin, että jokaisella solmulla* v_i *on yksikäsitteinen naapuri joukossa* $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$*, kun* $i \geq 2$.

Todistus (vrt. [3, s. 14]). Toimitaan lähes samoin kuin lauseen 1.6 todistuksessa. Olkoon G puu. Asetetaan $G_i := G[v_1, \dots, v_i]$ ja valitaan mikä tahansa solmu solmuksi $v_1 \in G$. Tehdään induktio-oletus, että väite on tosi jollain kokonaisluvulla $n < |G|$. Valitaan jokin solmu $v \in G - G_n$. Lauseen 1.9 mukaan puussa G on olemassa yksikäsitteinen polku P solmujen v_1 ja v välillä. Asetetaan nyt polun P ensimmäinen solmu, joka ei ole polulla $v_1 \dots v_i$, solmuksi $v_{i+1} \in G - G_i$. Tällöin solmulla v_{i+1} on yksikäsitteinen naapuri puussa G_i, joten induktioperiaatteen nojalla väite on tosi. □

Lause 1.11. *Yhtenäinen graafi, jossa on* n *solmua, on puu, jos ja vain jos siinä on* $m = n - 1$ *särmää.*

Todistus (vrt. [3, s. 14] ja [7, s. 61]). Olkoon G yhtenäinen graafi. Oletetaan ensin, että graafi G on puu. Jos $n = 1$, niin graafissa ei ole särmiä. Tehdään sitten induktio-oletus, että jos puussa on korkeintaan $n-1$ solmua, särmiä on yksi vähemmän kuin solmuja. Olkoon $|G| = n$ ja $v \in G$. Lauseen 1.9 mukaan puussa on yksikäsitteinen polku kahden solmun välillä, joten graafissa $G - v$ on $k = d(v)$ komponenttia. Kukin komponentti on puun G alipuu. Olkoot $n_1, n_2, \dots, n_k$ näiden alipuiden solmujen lukumäärät ja $m_1, m_2, \dots, m_k$ särmien lukumäärät. Koska alipuissa on yhteensä $n - 1$ solmua, niissä kussakin on korkeintaan $n-1$ solmua. Induktio-oletuksen perusteella puun G särmien lukumääräksi m saadaan

$$m = k + \sum_{i=1}^{k} m_i = k + \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = k + (n - 1) - k = n - 1.$$

Oletetaan nyt, että graafissa G on $m = n - 1$ särmää. Jos graafissa G on silmukka ja e on jokin tämän silmukan särmä, niin lauseen 1.5 mukaan myös graafi $G - e$ on yhtenäinen. Toisaalta n-solmuisessa yhtenäisessä graafissa on vähintään $n-1$ särmää. (Jos $n = 2$, niin tarvitaan yksi särmä yhtenäisyyteen. Tämän jälkeen jokainen solmun lisääminen vaatii yhden särmän lisäämisen jotta yhtenäisyys säilyisi.) Siis graafi $G - e$, jossa on $n - 2$ särmää, ei voi olla yhtenäinen. Tällöin graafi G on silmukaton, joten se on määritelmän mukaan myös puu. □

Määritelmä 1.36. Jollekin puun solmuista voidaan antaa nimi *juuri*. Jos puulla T on kiinteä juuri r, niin tällöin T on *juurellinen puu*. Merkitään $x \leq y$, kun $x \in rTy$, määrittelee osittaisen järjestyksen joukolle $V(T)$, joka on puun T ja juuren r *puujärjestys*. Jos $x < y$, niin sanotaan, että solmu x sijaitsee solmun y *alapuolella*. Vastaavasti solmu y sijaitsee solmun x *yläpuolella*.

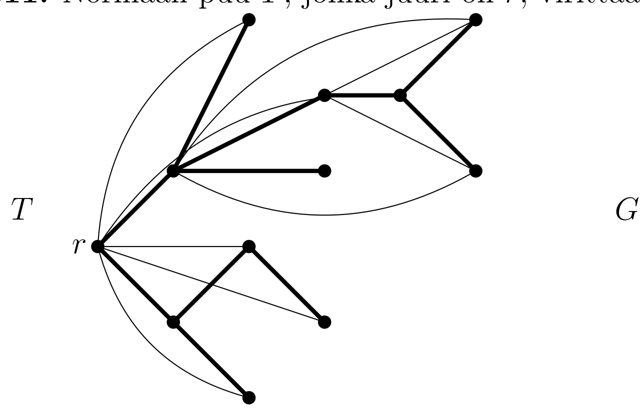
Huomautus. Puun T juuri r on osittaisen järjestyksen pienin alkio ja lehdet maksimaalisia alkioita. Siis puun T jokaisen särmän päät ovat verrattavissa keskenään.

Määritelmä 1.37. Joukko $\lceil y \rceil = \{x \mid x \leq y\}$ on solmun y *alasulkeuma* ja joukko $\lfloor x \rfloor = \{y \mid y \geq x\}$ on solmun y *yläsulkeuma*. Jokaisen solmun alasulkeuma on *ketju*.

Määritelmä 1.38. Solmuilla, joiden etäisyys juuresta r on k, on *korkeus* k ja ne muodostavat puun T k:nnen *tason*.

Määritelmä 1.39. Kun graafi G sisältää juurellisen puun T, niin T on *normaali*, jos jokaisen T-polun pää graafissa G on verrattavissa sen T-polun toiseen päähän puun T puujärjestyksessä. Jos puu T virittää graafin G, niin se edellyttää sitä, että puun T kaksi solmua täytyy olla verrattavissa aina, kun ne ovat naapureita graafissa G.

Esimerkki 1.11. Normaali puu T, jonka juuri on r, virittää graafin G.



Lause 1.12. *Olkoon T normaali puu graafissa G.*

(i) *Joukko $\lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil$ separoi mitkä tahansa solmut $x, y \in T$ graafissa G.*

(ii) *Jos $S \subseteq V(T) = V(G)$ ja S on alaspäin suljettu, niin joukot $\lfloor x \rfloor$ virittävät graafin $G - S$ komponentit, kun x on minimaalinen graafissa $T - S$.*

Todistus (vrt. [3, s. 15]). (i) Olkoon P mikä tahansa $x - y$ polku graafissa G. Koska T on normaali, niin polun P solmut puussa T muodostavat jonon $x = t_1, \ldots, t_n = y$, jossa t_i ja t_{i+1} ovat aina verrattavissa puun T puujäjestyksessä. Tarkastellaan sellaista minimaalista solmujonoa joukossa $P \cap T$. Tässä jonossa ei voi olla $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$ millään luvulla i, koska silloin t_{i-1} ja t_{i+1} olisivat verrattavissa ja solmun t_i poistaminen tuottaisi pienemmän jonon. Siis

$$x = t_1 > \ldots > t_k < \ldots < t_n = y$$

jollain $k \in \{1, \ldots n\}$. Väite pätee, kun $t_k \in \lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil \cap V(P)$.

(ii) Koska S on alaspäin suljettu, niin graafin $G - S$ minkä tahansa solmun ylemmät naapurit puussa T ovat myös graafissa $G - S$. Tällöin ne ovat myös samassa komponentissa, joten graafin $G - S$ komponentit C ovat ylhäältä suljettuja. Kun S on alaspäin suljettu, niin komponentin C minimaaliset solmut ovat minimaalisia myös graafissa $G - S$. Kohdan (i) perusteella komponentilla C on vain yksi minimaalinen solmu x, ja se on sama kuin yläsulkeuma $\lfloor x \rfloor$.

□

Lause 1.13. *Jokainen yhtenäinen graafi sisältää normaalin virittävän puun millä tahansa juuren valinnalla.*

Todistus (vrt. [3, s. 16]). Olkoon G yhtenäinen graafi ja $r \in G$ mielivaltaisesti valittu solmu. Olkoon T maksimaalinen normaali puu, jolla on juuri r graafissa G. Osoitetaan, että $V(T) = V(G)$.

Tehdään vastaoletus, että $V(T) \neq V(G)$ ja olkoon C graafin $G - T$ komponentti. Kun T on normaali, niin $N(C)$ on ketju puussa T. Olkoon x sen suurin alkio ja $y \in C$ solmun x naapuri. Olkoon T' puusta T saatu puu, kun solmu y on yhdistetty solmuun x. Puun T' puujärjestys laajentaa tällöin puun T puujäjestystä. Muodostetaan ristiriita osoittamalla, että myös T' on normaali graafissa G.

Olkoon P T'-polku graafissa G. Jos polun P molemmat päät ovat puussa T, niin ne ovat verrattavissa puun T, ja siis myös puun T', puujärjestyksessä, koska silloin P on myös T-polku ja puu T on oletuksen mukaan normaali graafissa G. Jos näin ei ole, niin y on polun P yksi pää, joten P on komponentissa C lukuunottamatta sen toista päätesolmua z, joka on ketjussa $N(C)$. Tällöin $z \leq x$, koska x on suurin alkio ketjussa $N(C)$. Jotta y ja z olisivat verrattavissa, riittää osoittaa, että $x < y$ eli $x \in rT'y$. Tämä taas pitää paikkansa, koska y on puun T' lehti, jonka naapuri on solmu x. Tällöin siis myös puu T' on normaali graafissa G, mikä on ristiriita sen kanssa, että T on maksimaalinen normaali puu graafissa G. □

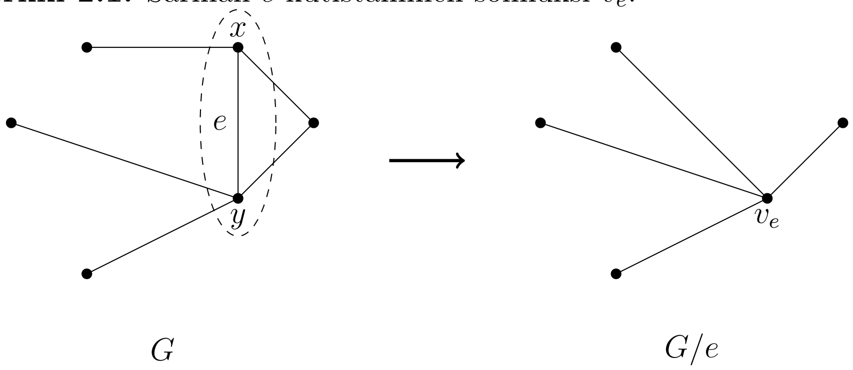
2 Minorit

Tässä luvussa perehdytään minoreihin sekä Kuratowskin lauseeseen.

2.1 Minori ja topologinen minori

Määritelmä 2.1. Olkoon $G = (V, E)$ graafi ja $e = xy$ sen särmä. Merkinnällä G/e tarkoitetaan graafia, joka on saatu graafista G *kutistamalla* särmä e uudeksi solmuksi v_e, josta tulee naapuri kaikkien solmujen x ja y entisten naapurien kanssa. Siis $G/e = (V', E')$, missä $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$ ja $E' = \{vw \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w \mid xw \in E \setminus \{e\} \vee yw \in E \setminus \{e\}\}$.

Esimerkki 2.1. Särmän e kutistaminen solmuksi v_e.



Määritelmä 2.2. Graafin G *minorien* joukko määritellään rekursiivisesti seuraavasti.

(i) G on itsensä minori.

(ii) Jos graafi H on graafin G minori, niin graafi $H - v$ on myös graafin G minori kaikilla graafin H solmuilla v.

(iii) Jos graafi H on graafin G minori, niin graafi $H - e$ on myös graafin G minori kaikilla graafin H särmillä e.

(iv) Jos graafi H on graafin G minori, niin graafi H/e on myös graafin G minori kaikilla graafin H särmillä e.

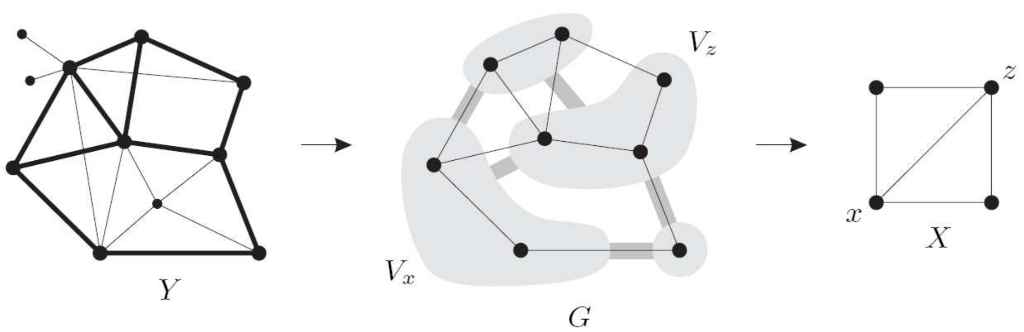
Toisin sanoen graafi H on graafin G minori, jos ja vain jos on olemassa sellaiset graafit $G_0, \ldots, G_n$, että $G_0 = G$, $G_n = H$ ja graafi G_{i+1} saadaan graafista G_i ($i < n$) poistamalla solmu, poistamalla särmä tai kutistamalla särmä. Siis graafi H on graafin G minori, jos graafilla G on sellainen aligraafi H', että graafi H saadaan graafista H' sarjalla peräkkäisiä särmien kutistamisia.

Minorius voidaan määritellä myös seuraavasti.

Määritelmä 2.3. Olkoon X graafi ja $\{V_x \mid x \in V(X)\}$ joukon V sellainen ositus yhtenäisiin osajoukkoihin, että mille tahansa kahdelle solmulle $x, y \in X$ on olemassa särmä $V_x - V_y$, jos ja vain jos $xy \in E(X)$. Tällöin graafi G kuuluu graafien luokkaan $M(X)$. Joukot V_x ovat luokan $M(X)$ *oksajoukkoja.* Jos $G \in M(X)$ on jonkin graafin Y aligraafi, niin sanotaan, että X on graafin Y minori, merkitään $X \preccurlyeq Y$.

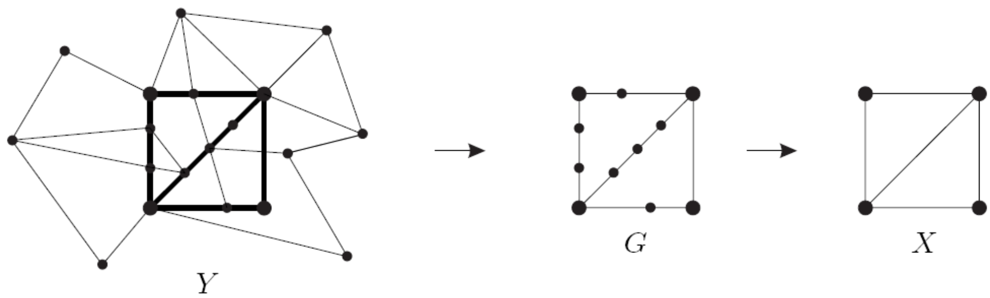
Huomautus. Diestelin teoksessa käytetään hiukan hämäävää merkintää $G = MX$, silloin kun graafi G kuuluu luokkaan $M(X)$.

Esimerkki 2.2. Graafi G on graafin Y aligraafi ja $G \in M(X)$, joten graafi X on graafin Y minori.



Määritelmä 2.4. Jos korvataan graafin X särmät poluilla siten, että yhdenkään polun sisäsolmu ei ole minkään muun polun sisäsolmu tai graafin X solmu, niin näin saatu graafi G on graafin X särmien *polkujako*, merkitään $G \in T(X)$. Jos $G \in T(X)$ on jonkin graafin Y aligraafi, niin graafi X on graafin Y *topologinen minori*, merkitään $X \preccurlyeq_T Y$.

Esimerkki 2.3. Graafi G on graafin Y aligraafi ja $G \in T(X)$, joten graafi X on graafin Y topologinen minori.



Huomautus. Jos $V_x = U \subseteq V$ on yksi oksajoukoista ja muut oksajoukot sisältävät vain yhden solmun, niin graafille X käytetään merkintää G/U. Solmulle $x \in X$, johon U kutistuu, käytetään merkintää v_U. Tällöin muuta graafia X ajatellaan graafin G indusoituna aligraafina. Yhden särmän uu' kutistaminen on siis erikoistapaus, kun $U = \{u, u'\}$.

Määritelmä 2.5. Jos $G \in T(X)$, niin joukko $V(X)$ on joukon $V(G)$ osajoukko, ja sen alkiot ovat graafin G *oksasolmuja*. Graafin G muut solmut ovat *jakosolmuja*. Tällöin kaikkien jakosolmujen aste on 2, kun taas oksasolmuilla on sama aste kuin graafissa X.

Lause 2.1. *Seuraavat väittämät kuvaavat minorin ja topologisen minorin suhdetta.*

(i) *Jokainen luokka $T(X)$ on myös $M(X)$. Siis graafin topologinen minori on myös sen minori.*

(ii) *Jos $\Delta(X) \leq 3$ ja $X \preccurlyeq Y$, niin graafi X on graafin Y topologinen minori.*

Todistus (vrt. [3, s. 20]). (i) Olkoon X graafi. Korvataan graafin X särmät poluilla siten, että yhdenkään polun sisäsolmu ei ole minkään muun polun sisäsolmu tai graafin X solmu. Näin saadaan graafi G ja $G \in T(X)$. Olkoon graafi Y sellainen, että $G \subseteq Y$. Valitaan jotkin kaksi graafin G sellaista oksasolmua, joiden välillä on polku. Kutistetaan tämän polun kaikkien sisäsolmujen väliset särmät. Särmien kutistamisjärjestyksellä ei ole merkitystä. Lopulta kutistetaan jommankumman oksasolmun ja jäljelle jääneen solmun välinen särmä. Nyt näiden oksasolmujen välillä on vain särmä. Tehdään samoin kaikille muillekin oksasolmujen välisille poluille. Näin saadaan graafi X. Tällöin graafilla Y on sellainen aligraafi G, että graafi X saadaan graafista G sarjalla peräkkäisiä särmien kutistamisia. Määritelmän mukaan graafi X on siis graafin Y minori.

(ii) Olkoon $\Delta(X) \leq 3$ ja $X \preccurlyeq Y$. Tällöin graafilla Y on aligraafi G, josta särmien kutistamisilla saadaan graafi X. Kutistamalla graafin G niitä särmiä, joiden päiden aste korkeintaan kaksi, ei kasvateta solmujen asteita. Siis jokaisen astetta kolme olevan solmun $v \in X$ on oltava alkuperäisenä solmuna jo graafissa G. Nyt graafi X on myös graafin Y topologinen minori, koska voidaan muodostaa samanlainen aligraafi G ja tehdä kutistukset kuten kohdassa (i), joka osoittaa, että $G \preccurlyeq Y$.

□

Lause 2.2. *Minorirelaatio $\preccurlyeq$ ja topologinen minorirelaatio $\preccurlyeq_T$ ovat graafien osittaisia järjestyksiä. Toisin sanoen ne ovat refleksiivisiä, transitiivisia ja antisymmetrisiä.*

Todistus (vrt. [3, s. 20]). Todistetaan lause ensin minorirelaatiolle.

(i) Määritelmän mukaan graafi on itsensä minori, joten minorirelaatio on refleksiivinen.

(ii) Olkoot $X \preccurlyeq Y$ ja $Y \preccurlyeq Z$. Jos $X = Y$, $Y = Z$, $X = Z$ tai $X = Y = Z$, niin minorirelaatio on transitiivinen. Olkoon sitten $X \neq Y \neq Z \neq X$. On olemassa sellaiset graafit $X_0, \ldots, X_k$, että $X_0 = Z$ ja $X_k = Y$. Graafi X_{i+1} saadaan graafista X_i (kun $i < k$) poistamalla solmu, poistamalla särmä tai kutistamalla särmä. Samoin on olemassa sellaiset graafit $X_{k+j}, \ldots, X_n$, että $X_{k+j} = Y$ ja $G_n = X$. Graafi X_{k+j+1} saadaan graafista G_{k+j} (kun $k + j < n$) poistamalla solmu, poistamalla särmä tai kutistamalla särmä. Tästä seuraa, että on olemassa sellaiset graafit $X_0, \ldots, X_k, \ldots, X_n$, että $X_0 = Z$ ja $G_n = X$. Graafi X_ℓ saadaan graafista $G_{\ell+1}$ (kun $\ell < n$) poistamalla solmu, poistamalla särmä tai kutistamalla särmä. Tällöin määritelmän mukaan $X \preccurlyeq Z$, joten minorirelaatio on transitiivinen.

(iii) Olkoot $X = (V, E)$ ja $Y = (V', E')$ graafeja, sekä $X \preccurlyeq Y$ ja $Y \preccurlyeq X$. Jotta minorirelaatio olisi antisymmetrinen, niin graafien X ja Y pitäisi olla samoja. Tehdään vastaoletus, että $X \neq Y$. Koska $X \preccurlyeq Y$ ja $X \neq Y$, niin vähintään toinen epäyhtälöistä $|V| < |V'|$ ja $|E| < |E'|$ pätee. Tästä taas seuraa, että graafi Y ei voi olla graafin X minori, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että $Y \preccurlyeq X$. Tällöin vastaoletus on väärä ja $X = Y$, mistä seuraa, että minorirelaatio on antisymmetrinen.

Todistetaan lause vielä topologiselle minorirelaatiolle.

(i) Olkoon X graafi. Korvataan graafin X särmät sellaisilla poluilla, että särmien päät ovat myös polkujen päitä, mutta poluille ei lisätä yhtään sisäsolmua. Näin saatu graafi G on oleellisesti sama graafi kuin X. Määritelmän mukaan graafi G on itsensä aligraafi, joten graafi X on itsensä topologinen minori. Täten topologinen minorirelaatio on refleksiivinen.

(ii) Olkoon $X \preccurlyeq_T Y$. Tällöin on olemassa sellainen graafi G, että se on saatu graafista X korvaamalla särmiä poluilla. Lisäksi $G \subseteq Y$. Olkoon myös $Y \preccurlyeq_T Z$. Tällöin on olemassa sellainen graafi F, että se on saatu graafista Y korvaamalla särmiä poluilla. Lisäksi $F \subseteq Z$. Muodostetaan nyt sellainen graafi D, joka on saatu korvaamalla jokainen särmä $xy \in$

X polulla $xPy \in F$. Täten $X \preccurlyeq_T Z$, koska $D \subseteq F \subseteq Z$. Siis topologinen minorirelaatio on transitiivinen.

(iii) Olkoot $X = (V, E)$ ja $Y = (V', E')$ graafeja, sekä $X \preccurlyeq_T Y$ ja $Y \preccurlyeq_T X$. Jotta topologinen minorirelaatio olisi antisymmetrinen, niin graafien X ja Y pitäisi olla samoja. Tehdään vastaoletus, että $X \neq Y$. Koska $X \preccurlyeq_T Y$ ja $X \neq Y$, niin vähintään toinen epäyhtälöistä $|V| < |V'|$ ja $|E| < |E'|$ pätee. Tästä taas seuraa, että graafi Y ei voi olla graafin X topologinen minori, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Täten vastaoletus on väärä ja $X = Y$, mistä seuraa, että topologinen minorirelaatio on antisymmetrinen.

□

Määritelmä 2.6. Injektiivinen kuvaus $\varphi : V(G) \to V(H)$ on graafin G *upotus* graafiin H. Kuvaus φ upottaa graafin G 'aligraafiksi' graafiin H, jos se säilyttää solmujen naapuruuden ja 'indusoiduksi aligraafiksi', jos se säilyttää sekä solmujen naapuruuden että solmujen eristyneisyyden. Jos kuvaus φ on määritelty sekä joukolle $E(G)$ että joukolle $V(G)$, ja kuvaa särmät $xy \in G$ erillisiksi poluiksi graafissa H solmujen $\varphi(x)$ ja $\varphi(y)$ välille, niin se upottaa graafin G 'topologiseksi minoriksi' graafiin H. Samoin graafin G upotus 'minoriksi' graafiin H olisi sellainen kuvaus joukosta $V(G)$ erillisiin yhtenäisiin solmujoukkoihin graafissa H, että graafissa H on särmä joukkojen $\varphi(x)$ ja $\varphi(y)$ välillä aina, kun xy on graafin G särmä.

2.2 Tasograafit ja Kuratowskin lause

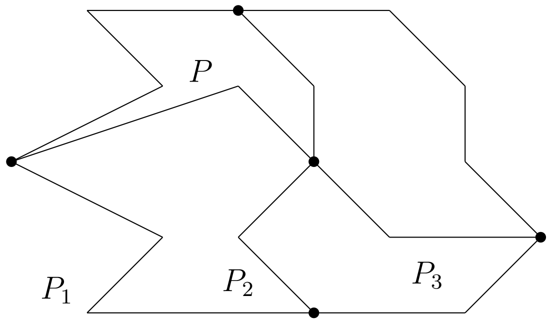
Seuraavaksi esitellään muutama lause, joiden tulokset oletetaan tunnetuiksi, joten todistukset sivuutetaan. Todistukset löytyvät esimerkiksi seuraavista teoksista: B. Mohar & C. Thomassen, *Graphs on Surfaces* sekä J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory.*

Lause 2.3 (Jordanin käyrälause monitahokkaille)**.** *Jokaiselle monitahokkaalle $P \subseteq \mathbb{R}^2$ on täsmälleen kaksi aluetta joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus P$. Kummallakin niistä on koko monitahokas P reunanaan.*

Lause 2.4. *Olkoot P_1, P_2 ja P_3 kaaria, joilla on samat päätepisteet, mutta ovat muuten erillisiä.*

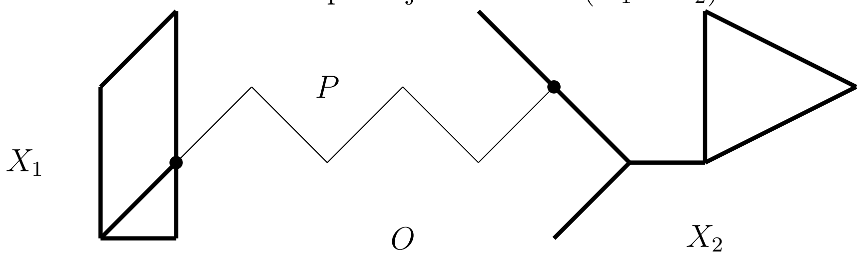
(i) *Joukolla $\mathbb{R} \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ on täsmälleen kolme aluetta, ja niiden reunat ovat $P_1 \cup P_2$, $P_2 \cup P_3$ ja $P_1 \cup P_3$.*

(ii) *Jos P on kaari joidenkin sisäpuolien $\mathring{P}_1$ ja $\mathring{P}_3$ pisteiden välillä, ja kaaren P sisäpuoli on sellaisella joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$ alueella, joka sisältää sisäpuolen $\mathring{P}_2$, niin $\mathring{P} \cap \mathring{P}_2 \neq \emptyset$.*



Lause 2.5. *Olkoot $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ sellaisia erillisiä joukkoja, että kumpikin on äärellisen monen pisteen ja kaaren yhdiste, ja olkoon P sellainen kaari joidenkin joukkojen X_1 ja X_2 pisteiden välillä, että sen sisäpuoli $\mathring{P}$ on joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ alueella O. Tällöin $O \setminus \mathring{P}$ on joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup P \cup X_2)$ alue.*

Esimerkki 2.4. Kaari P ei separoi joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ aluetta O.



Lause 2.6. *Olkoon $\varphi : C_1 \to C_2$ homomorfismi kahden pallolla S^2 olevan piirin välillä. Olkoot O_1 piirin C_1 alue ja O_2 piirin C_2 alue. Tällöin φ voidaan laajentaa homomorfismiksi $C_1 \cup O_1 \to C_2 \cup O_2$.*

Määritelmä 2.7. Äärellisten joukkojen muodostama pari (V, E) on *tasograafi*, jos se täyttää seuraavat ehdot.

(i) $V \subseteq \mathbb{R}^2$.

(ii) Jokainen särmä on kaari kahden solmun välillä.

(iii) Kaikilla särmillä on eri päätepisteiden joukot.

(iv) Minkään särmän sisäpuoli ei sisällä yhtään solmua, eikä yhtään pistettä, mistään muusta särmästä.

Huomautus. Tasograafi (V, E) määrittelee graafin G joukolle V luonnollisella tavalla. Jatkossa käytetään abstraktin graafin nimeä G myös tasograafille (V, E), koska sekaannuksen vaara on mitätön.

Määritelmä 2.8. Jokaiselle tasograafille G, joukko $\mathbb{R}^2 \setminus G$ on avoin. Sen alueet ovat myös graafin G alueita. Koska graafi G on rajoitettu (toisin sanoen se on riittävän suuren kiekon D sisällä), niin täsmälleen yksi sen alueista on rajoittamaton. Kyseessä on se alue, joka sisältää joukon $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Tämä alue on graafin G *ulkoalue* ja loput alueet ovat *sisäalueita*. Graafin G alueiden joukkoa merkitään $F(G)$.

Lause 2.7. *Olkoon G tasograafi, $f \in F(G)$ alue ja $H \subseteq G$ aligraafi.*

(i) *Aligraafilla H on alue f', joka sisältää alueen f.*

(ii) *Jos alueen f reuna on aligraafissa H, niin $f' = f$.*

Todistus (vrt. [3, s. 87]). (i) Pisteet alueessa f ovat ekvivalentteja myös joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus H$. Olkoon sitten f' se joukon $\mathbb{R}^2 \setminus H$ ekvivalenssiluokka, joka sisältää ne pisteet.

(ii) Jokainen kaari alueiden f ja $f' \setminus f$ välillä kohtaa alueen f reunan X. Jos $f' \setminus f \neq \emptyset$, niin on olemassa sellainen kaari alueen f' sisällä, että sen pisteet reunalla X eivät olekaan aligraafissa H. Joten $X \nsubseteq H$.

□

Lause 2.8. *Olkoon G tasograafi ja e sen särmä.*

(i) *Jos X on jonkin graafin G alueen reuna, niin tällöin joko $e \subseteq X$ tai $X \cap \mathring{e} = \emptyset$*

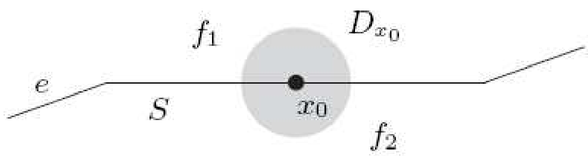
(ii) *Jos särmä e on piirissä $C \subseteq G$, niin e on täsmälleen kahden graafin G alueen reunalla, ja ne sisältyvät erillisiin piirin C alueisiin.*

(iii) *Jos särmä e ei ole missään piirissä, niin se on täsmälleen yhden graafin G alueen reunalla.*

Todistus (vrt. [3, s. 87]). Tarkastellaan yhtä pistettä $x_0 \in \mathring{e}$. Osoitetaan, että x_0 on joko täsmälleen kahden tai täsmälleen yhden alueen reunalla, riippuen siitä onko e jossakin graafin G piirissä vai ei. Sitten osoitetaan, että jokainen muu piste sisäpuolessa $\mathring{e}$ on täsmälleen samojen alueiden reunalla kuin x_0. Silloin särmän e päätepisteet myös näiden alueiden reunalla, koska jokaisen särmän e päätepisteen ympäristö on myös sen sisäpisteen ympäristö.

Voidaan ajatella graafi G äärellisen monen janan yhdisteenä, sekä olettaa minkä tahansa kahden janan leikkaavan korkeintaan yhdessä pisteessä. Jokaisen pisteen $x \in \mathring{e}$ ympäriltä voi löytää avoimen kiekon D_x, x keskipisteenään, joka kohtaa vain ne janat, jotka sisältävät pisteen x.

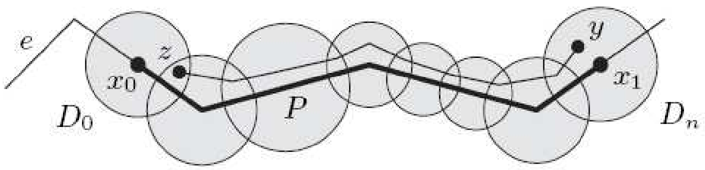
Valitaan sisäpiste x_0 janalta $S \subseteq e$. Tällöin $D_{x_0} \cap G = D_{x_0} \cap S$, joten $D_{x_0} \setminus G$ on kahden avoimen puolikiekon yhdiste. Koska nämä puolikiekot eivät kohtaa graafia G, niin ne ovat sen joissakin alueissa. Olkoot ne alueet f_1 ja f_2. Ne ovat graafin G ainoat alueet, joiden reunalla x_0 on, ja ne voivat yhtyä.



Kuva 7: Graafin G alueet f_1 ja f_2.

Jos e on piirissä $C \subseteq G$, niin lauseen 2.3 mukaan D_{x_0} kohtaa piirin C molemmat alueet. Koska lauseen 2.7 mukaan alueet f_1 ja f_2 sisältyvät piirin C alueisiin, niin $f_1 \neq f_2$. Jos särmä e ei ole missään piirissä, niin e on silta ja täten yhdistää kaksi erillistä pistejoukkoa X_1 ja X_2, joille pätee $X_1 \cup X_2 = G \setminus \mathring{e}$ lauseen 2.5 mukaan. Nyt $f_1 \cup \mathring{e} \cup f_2$ on graafin $G - e$ alueen f osajoukko. Lauseen 2.5 mukaan $f \setminus \mathring{e}$ on graafin G alue. Toisaalta $f \setminus \mathring{e}$ sisältää alueet f_1 ja f_2 alueen f määritelmän mukaan, joten $f_1 = f \setminus \mathring{e} = f_2$ koska f_1, f_2 ja f ovat kaikki graafin G alueita.

Tarkastellaan nyt mitä tahansa muuta pistettä $x_1 \in \mathring{e}$. Olkoon P kaari pisteestä x_0 pisteeseen x_1. Koska P on kompakti, niin äärellinen määrä kiekkoja D_x kattaa kaaren P, kun $x \in P$. Nimetään kiekot niiden keskipisteiden mukaan luonnollisessa järjestyksessä $D_0, \ldots, D_n$ ja oletetaan, että $D_0 = D_{x_0}$ ja $D_n = D_{x_1}$. Jokainen piste $y \in D_n \setminus e$ voidaan yhdistää kaarella pisteeseen $z \in D_0 \setminus e$ joukon $(D_0 \cup \ldots \cup D_n) \setminus e$ sisällä.



Kuva 8: Kaari pisteestä y joukkoon D_0 kulkee lähellä kaarta P.

Tällöin pisteet y ja z ovat ekvivalentteja joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Näin ollen jokainen joukon $D_n \setminus e$ piste on joko alueessa f_1 tai f_2, joten x_1 ei voi olla minkään muun graafin G alueen reunalla. Koska molemmat joukon $D_0 \setminus e$ puolikiekot voidaan yhdistää joukkoon $D_n \setminus e$ tällä tavoin, niin huomataan, että x_1 on sekä alueen f_1 että alueen f_2 reunalla. $\square$

Määritelmä 2.9. Graafin G aligraafi, jonka pistejoukko on alueen f reuna, *rajoittaa* aluetta f ja on sen *raja*, merkitään $G[f]$. Alue on *yhteydessä* reunansa solmuihin ja särmiin.

Määritelmä 2.10. Jos tasograafiin G ei voida lisätä uutta särmää, kun muodostetaan uutta tasograafia $G' \supsetneq G$, ja $V(G') = V(G)$, niin tällöin tasograafi G on *maksimaalinen tasograafi*.

Määritelmä 2.11. Jos tasograafin G jokainen alue on rajoitettu kolmiolla, niin tällöin tasograafi G on *tasokolmiointi*.

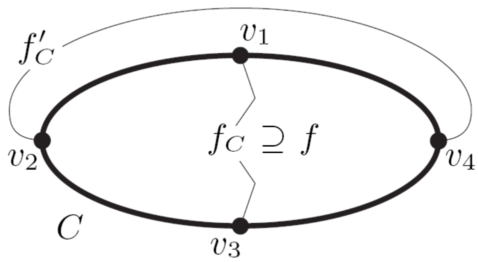
Lause 2.9. *Tasograafi, jonka järjestys on vähintään kolme, on maksimaalinen, jos ja vain jos se on tasokolmiointi.*

Todistus (vrt. [3, s. 90]). Olkoon G tasograafi, jonka järjestys on vähintään kolme. Jos graafin G jokainen alue on rajoitettu kolmiolla, niin minkä tahansa uuden särmän e sisäpuoli olisi jonkin graafin G alueen sisällä, ja särmän päät saman alueen rajalla. Tällöin nämä päät olisivat jo naapureita graafissa G, joten $G \cup e$ ei täytä tasograafin määritelmän ehtoa (iii). Siis G on maksimaalinen tasograafi.

Oletetaan sitten, että G on maksimaalinen tasograafi. Olkoon $f \in F(G)$ alue ja merkitään, että $H = G[f]$. Koska G on maksimaalinen, niin $G[H]$ on täydellinen. Muussa tapauksessa mitkä tahansa kaksi graafin H solmua, jotka eivät ole naapureita graafissa G, voidaan yhdistää kaarella alueen f kautta, jolloin G laajenee suuremmakai tasograafiksi. Nyt siis $G[H] = K^n$ jollakin kokonaisluvulla n.

Osoitetaan ensin, että graafi H sisältää piirin. Tehdään vastaoletus, että graafi H ei sisällä piiriä. Nyt $G \supseteq K^n$ kun $n \geq 3$, koska muussa tapauksessa $|G| \geq 3$, joten $G \setminus H \neq \emptyset$. Toisaalta $f \cup H = \mathbb{R}^2$, jolloin $G = H$, mikä on ristiriita. Siis graafi H sisältää piirin.

Koska graafi H sisältää piirin, riittää osoittaa, että $n \leq 3$, koska silloin $H = K^3$. Oletetaan, että $n \geq 4$ ja olkoon $C = v_1v_2v_3v_4v_1$ piiri graafissa $G[H] (= K^n)$. Koska $C \subseteq G$, niin alue f sisältyy piirin C alueeseen f_C. Olkoon f'_C piirin C toinen alue. Koska solmut v_1 ja v_3 ovat alueen f rajalla, ne voidaan yhdistää kaarella, jonka sisäpuoli on alueessa f_C ja väistää graafin G. Tällöin lauseen 2.4 mukaan graafin särmä $G[H]$ v_2v_4 kulkeekin alueen f'_C eikä f_C kautta.



Kuva 9: Graafin G särmä v_2v_4 kulkee alueen f'_C kautta.

Koska $v_2, v_4 \in G[f]$, niin särmä v_1v_3 kulkee alueen f'_C kautta. Nyt kuitenkin särmät v_1v_3 ja v_2v_4 ovat erilliset, jolloin syntyy ristiriita lauseen 2.4 kanssa. Siis $n \leq 3$. $\square$

Lause 2.10 (Eulerin kaava)**.** *Olkoon G yhtenäinen tasograafi, jossa on n solmua, m särmää ja l aluetta. Tällöin*

$$n - m + l = 2.$$

Todistus (vrt. [3, s. 91], [4, s. 160], [5, s. 103] ja [6, s. 76]). Oletetaan ensin, että $m \leq n - 1$. Tällöin graafi G on puu, joten $m = n - 1$ ja $l = 1$. Nyt

$$n - m + l = n - (n - 1) + 1 = 2.$$

Olkoon nyt $m \geq n$. Tällöin graafissa G on särmä e, joka on jossakin piirissä. Merkitään $G' = G - e$. Nyt lauseen 2.8 mukaan särmä e on täsmälleen kahden graafin G alueen rajalla. Olkoot ne alueet f_1 ja f_2. Lisäksi, koska sisäpuolen $\mathring{e}$ pisteet ovat ekvivalentteja joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus G'$, niin graafissa G' on alue f_e, joka sisältää sisäpuolen $\mathring{e}$. Osoitetaan, että

$$F(G) \setminus \{f_1, f_2\} = F(G') \setminus \{f_e\}, \qquad (*)$$

jolloin graafilla G on täsmälleen yksi alue vähemmän kuin graafilla G ja väite tulee todistetuksi induktioperiaatteen nojalla.

Olkoon ensin $f \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$ annettu. Nyt lauseen 2.8 mukaan $G[f] \subseteq G \setminus \mathring{e} = G'$, joten $f \in F(G')$ lauseen 2.7 mukaan. Koska $f \neq f_e$, niin lause $(*)$ pätee toiseen suuntaan.

Tarkastellaan sitten mitä tahansa aluetta $f' \in F(G') \setminus \{f_e\}$. Selvästi $f_1 \neq f' \neq f_2$ ja $f' \cap \mathring{e} = \emptyset$. Tällöin alueen f' mitkä tahansa kaksi pistettä ovat joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus G'$ ja ekvivalentteja, joten graafilla G on alue f, joka sisältää alueen f'. Toisaalta lauseen 2.7 mukaan f on graafin G' alueen f'' sisällä. Täten $f' \subseteq f \subseteq f''$ ja $f' = f = f''$, koska sekä f' että f'' ovat graafin G' alueita. $\square$

Lause 2.11. *Tasograafissa, jossa on $n \geq 3$ solmua, on korkeintaan $3n - 6$ särmää. Jokaisella n-solmuisella tasokolmioinnilla on $3n - 6$ särmää.*

Todistus (vrt. [3, s. 91]). Lauseen 2.9 perusteella riittää todistaa toinen väite. Tasokolmioinnissa G jokaisen alueen raja sisältää täsmälleen kolme särmää, ja lauseen 2.8 mukaan jokainen särmä on täsmälleen kahden alueen rajalla. Kaksijakoisella graafilla joukolla $E(G) \cup F(G)$, jonka särmäjoukko on $\{ef \mid e \subseteq G[f]\}$, on tällöin täsmälleen $2|E(G)| = 3|F(G)|$ särmää. Nyt voidaan korvata Eulerin kaavassa l luvulla $2m/3$, jolloin saadaan, että

$$m = 3n - 6.$$

□

Lause 2.12. *Tasograafilla ei voi olla graafia K^5 tai $K_{3,3}$ topologisena minorina.*

Todistus (vrt. [3, s. 92]). Graafilla K^5 on $10 > 3 \cdot 5 - 6$ särmää, joka on enemmän kuin lauseen 2.11 mukaan saisi olla.

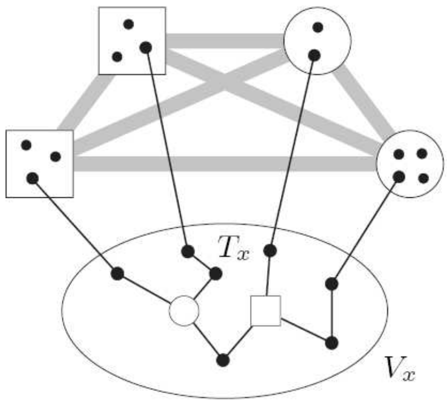
Koska $K_{3,3}$ on 2-yhtenäinen, mutta ei sisällä yhtään kolmiota, niin tasograafin $K_{3,3}$ jokainen alue olisi rajoitettu piirillä, jonka pituus on vähintään neljä. Lauseen 2.11 todistuksen mukaan tästä seuraa, että $2m \geq 4l$, mistä saadaan Eulerin kaavaan sijoittamalla, että $m \leq 2n - 4$. Toisaalta graafilla $K_{3,3}$ on $9 > 2 \cdot 6 - 4$ särmää.

Tällöin graafit K^5 ja $K_{3,3}$ eivät ole tasograafeja, eivätkä niiden polkujaot ole myöskään tasograafeja. □

Kuratowskin lause sanoo, että jos graafilla ei ole topologisena minorina graafia K^5 tai $K_{3,3}$, niin se on tasograafi. Osoitetaan ensin, että riittää tarkastella tavallista minoria.

Lause 2.13. *Graafilla on minorina graafi K^5 tai $K_{3,3}$, jos ja vain jos sillä on K^5 tai $K_{3,3}$ topologisena minorina.*

Todistus (vrt. [3, s. 97]). Lauseen 2.1 mukaan riittää osoittaa, että jokaisella graafilla G, jolla on K^5 minorinaan, on joko K^5 topologisena minorina tai $K_{3,3}$ minorina. Oletetaan, että $G \succcurlyeq K^5$ ja olkoon $K \subseteq G$ sellainen minimaalinen graafi, että $K \in M(K^5)$. Tällöin jokainen graafin K oksajoukko indusoi puun graafissa K, ja jokaisen oksajoukon välillä on täsmälleen yksi särmä. Jos tarkastellaan oksajoukon V_x indusoimaa puuta ja lisätään siihen ne neljä särmää, jotka yhdistävät sen muihin oksajoukkoihin, niin saadaan toinen puu, merkitään T_x. Graafin K minimaalisuudesta seuraa, että puulla T_x on täsmälleen neljä lehteä, jotka ovat ne neljä oksajoukon V_x naapuria muissa oksajoukoissa.



Kuva 10: Jokainen luokka $M(K^5)$ sisältää joko luokan $T(K^5)$ tai $M(K_{3,3})$.

Jos jokainen viidestä puusta $T_x \in T(K_{1,4})$, niin $K \in T(K^5)$ ja lause on todistettu. Jos taas joku puista $T_x \notin T(K_{1,4})$, niin sillä on täsmälleen kaksi astetta kolme olevaa solmua. Kun kutistetaan V_x näiksi kahdeksi solmuksi ja jokainen muu oksajoukko yhdeksi omaksi solmukseen, niin saadaan kuusisolmuinen graafi, joka sisältää graafin $K_{3,3}$. Nyt $G \succcurlyeq K_{3,3}$. □

Määritelmä 2.12. Graafin G ja tasograafin H välinen isomorfismi on *tasoupotus*. Tällöin tasograafi H on graafin G *tasoesitys*.

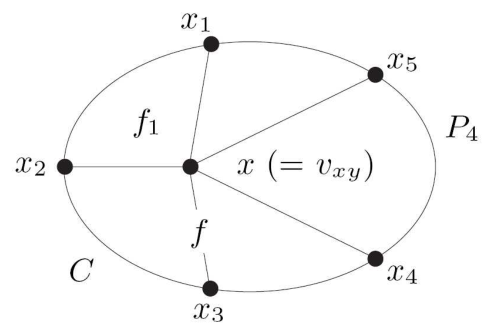
Seuraavaksi todistetaan Kuratowskin lause ensin 3-yhtenäisille graafeille.

Lause 2.14. *Jos 3-yhtenäisellä graafilla G ei ole minorina graafia K^5 tai $K_{3,3}$, niin se on tasograafi.*

Todistus (vrt. [3, s. 98]). Todistetaan lause induktiolla luvun $|G|$ suhteen. Kun $|G| = 4$, niin $G = K^4$ ja väite on tosi. Olkoon nyt $|G| > 4$ ja oletetaan, että väite on tosi pienemmillä graafeilla. Graafilla G on sellainen särmä xy, että graafi G/xy on myös 3-yhtenäinen. Koska minorirelaatio on transitiivinen, niin graafilla G/xy ei ole graafia K^5 tai $K_{3,3}$ minorina. Tällöin graafilla G/xy on tasoesitys $\widetilde{G}$. Olkoon f graafin $\widetilde{G} - v_{xy}$ se alue, joka sisältää pisteen v_{xy} ja olkoon C alueen f raja. Merkitään, että $X = N_G(x) \setminus \{y\}$ ja $Y = N_G(y) \setminus \{x\}$. Tällöin $X \cup Y \subseteq V(C)$, koska $v_{xy} \in f$. Nyt tasoesitystä

$$\widetilde{G}' = \widetilde{G} - \{v_{xy}v \mid v \in Y \setminus X\}$$

voidaan tarkastella graafin $G - y$ tasoesityksenä, missä solmua x edustaa piste v_{xy}. Tavoitteena on lisätä solmu y tähän tasoesitykseen, jotta saadaan graafin G tasoesitys.



Kuva 11: Graafin $G - y$ tasoesitys $\widetilde{G}'$. Piste v_{xy} edustaa solmua x.

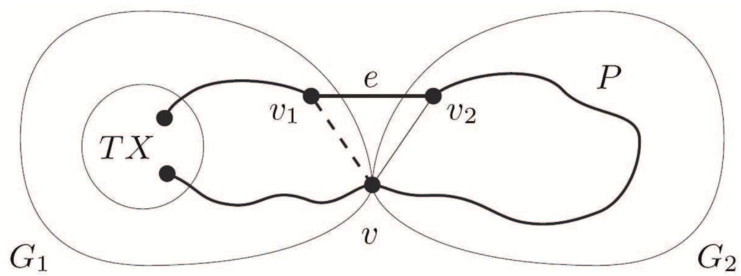
Koska $\widetilde{G}$ on 3-yhtenäinen, niin $\widetilde{G} - v_{xy}$ on 2-yhtenäinen, jolloin C on piiri. Olkoot $x_1, \ldots, x_k$ luettelo joukon X solmuista piirillä C, ja olkoot $P_i = x_i \ldots x_{i+1}$ X-polkuja niiden välillä piirillä C, kun $i = 1, \ldots, k$ ja $x_{k+1} = x_1$. Osoitetaan, että $Y \subseteq V(P_i)$ jollakin luvulla i. Jos näin ei olisi, niin joko solmulla x ja solmulla y olisi kolme yhteistä naapuria piirillä C ja muodostuisi graafi, joka kuuluu luokkaan $T(K^5)$, tai sitten solmulla y olisi kaksi naapuria piirissä C, jotka ovat eristettyjä kahdella solmun x naapurilla. Jälkimmäisessä tapauksessa neljä piirin C solmua muodostavat solmujen x ja y kanssa luokan $T(K_{3,3})$ graafin oksasolmut. Molemmissa tapauksissa on ristiriita, koska graafi G ei sisällä graafia luokasta $T(K^5)$ tai $T(K_{3,3})$.

Valitaan nyt sellainen i, että $Y \subseteq P_i$. Joukko $C \setminus P_i$ sisältyy toiseen piirin $C_i = xx_iP_ix_{i+1}x$ alueista. Olkoon se piirin C_i sellainen alue f_i, johon $C \setminus P_i$ ei kuulu. Koska alue f_i sisältää alueen f pisteitä, mutta ei piirin C pisteitä, niin $f_i \subseteq f$. Lisäksi särmät xx_j, missä $j \notin \{i, i+1\}$, kohtaavat piirin C_i vain pisteessä x, ja niiden toiset päät ovat alueen f_i ulkopuolella joukossa $C \setminus P_i$. Tällöin f_i ei kohtaa yhtäkään niistä särmistä. Näin ollen $f_i \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{G}'$, eli alue f_i sisältyy tasoesityksen $\widetilde{G}'$ alueeseen, ja ne ovat samat. Tällöin tasoesitys $\widetilde{G}'$ voidaan laajentaa graafin G tasoesitykseksi, kun sijoitetaan solmu y ja sen särmät alueeseen f_i. □

Lause 2.15. *Olkoon $\mathcal{X}$ joukko 3-yhtenäisiä graafeja. Olkoon G graafi, jonka yhtenäisyysaste $\kappa(G) \leq 2$. Olkoot vielä G_1 ja G_2 sellaisia indusoituja aligraafeja, että $G = G_1 \cup G_2$ ja $|G_1 \cap G_2| = \kappa(G)$. Jos graafi G on särmämaksimaalinen ja sillä ei ole topologista minoria joukossa $\mathcal{X}$, niin graafit G_1 ja G_2 ovat myös särmämaksimaalisia, ja $G_1 \cap G_2 = K^2$.*

Todistus (vrt. [3, s. 99]). Jokaisella solmulla $v \in S = V(G_1 \cap G_2)$ on naapuri jokaisessa graafien $G_i - S$ $(i = 1, 2)$ komponenteissa, koska muulloin $S \setminus \{v\}$ separoisi graafin G, mikä on ristiriidassa sen kanssa että $|S| = \kappa(G)$. Graafin G maksimaalisuudesta johtuen, jokainen graafiin G lisätty särmä e on jossakin luokan $T(X)$ graafissa, joka on graafin $G+e$ aligraafi, kun $X \in \mathcal{X}$. Kaikilla seuraavilla särmän e valinnoilla graafin X 3-yhtenäisyydestä seuraa, että luokan $T(X)$ graafin oksasolmut ovat samassa graafissa G_i. Symmetrisyydestä johtuen voidaan G_1 valita siksi graafiksi. Tällöin luokan $T(X)$ graafi kohtaa graafin G_2 korkeintaan graafin X särmää vastaavassa polussa P.

Jos $S=\emptyset$, saadaan ristiriita, kun valitaan sellainen e, jonka toinen pää on graafissa G_1 ja toinen graafissa G_2. Jos $S=\{v\}$, niin valitaan sellainen e, että se yhdistää solmut v_1 ja v_2, missä v_1 on solmun v naapuri graafissa $G_1 - S$ ja v_2 on solmun v naapuri graafissa $G_2 - S$. Tällöin polku P sisältää sekä solmun v että särmän v_1v_2. Kun korvataan polku vPv_1 särmällä vv_1 saadaan luokan $T(X)$ graafi graafissa $G_1 \subseteq G$, mikä on ristiriita.



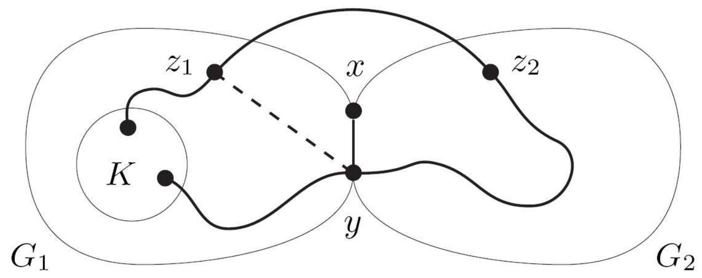
Kuva 12: Jos graafi $G+e$ sisältää graafin luokasta $T(X)$, niin myös graafit G_1 ja G_2 sisältävät sellaisen graafin.

Olkoon sitten $|S|=2$ ja $S=\{x,y\}$. Jos $xy \notin G$, niin korvataan särmä $e=xy$ polulla, joka kulkee graafissa G_2, jolloin saadaan luokan $T(X)$ graafi graafissa G, mikä on ristiriita. Näin ollen $xy \in G$ ja $G[S]=K^2$.

Osoitetaan vielä, että graafit G_1 ja G_2 ovat särmämaksimaalisia, eikä niillä ole topologista minoria joukossa $\mathcal{X}$. Olkoon e' lisäsärmä graafille G_1. Kun korvataan polku xPy särmällä xy, jos tarpeen, niin saadaan luokan $T(X)$ graafi joko graafissa G_1+e', mikä osoittaa graafin G_1 särmämaksimaalisuuden, tai graafissa G_2, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $G_2 \subseteq G$. $\square$

Lause 2.16. *Jos $|G| \geq 4$ ja G on särmämaksimaalinen, kun mikään luokkien $T(K^5)$ ja $T(K_{3,3})$ graafeista ei ole graafin G aligraafi, niin graafi G on 3-yhtenäinen.*

Todistus (vrt. [3, s. 100]). Todistetaan lause induktiolla luvun $|G|$ suhteen. Kun $|G|=4$, niin $G=K^4$, jolloin väite on tosi. Olkoon nyt $|G|>4$ ja graafi G särmämaksimaalinen ilman aligraafia luokasta $T(K^5)$ tai $T(K_{3,3})$. Oletetaan, että $\kappa(G) \leq 2$ ja valitaan graafit G_1 ja G_2 kuten lauseen 2.15 todistuksessa. Lauseen 2.15 mukaan joukolle $\mathcal{X}=\{K^5, K_{3,3}\}$ leikkaus $G_1 \cap G_2$ on graafi K^2. Olkoot sen solmut x ja y. Lauseiden 2.15, 2.14 ja induktio-oletuksen perusteella graafit G_1 ja G_2 ovat tasograafeja. Kummallekin luvulle $i = 1, 2$ valitaan tasoesitys G_i, alue f_i, jonka rajalla särmä xy on, ja solmu $z_i \neq x, y$ alueen f_i rajalta. Olkoon K joko luokan $T(K^5)$ tai $T(K_{3,3})$ edustaja graafissa $G + z_1 z_2$.



Kuva 13: Luokan $T(K^5)$ tai $T(K_{3,3})$ edustaja K graafissa $G + z_1 z_2$.

Jos kaikki graafin K oksasolmut ovat samassa graafissa G_i, niin silloin joko graafi $G_i + xz_i$ tai $G_i + yz_i$ (tai G_i itse, jos z_i on jo solmun x tai y naapuri) sisältää graafin luokasta $T(K^5)$ tai $T(K_{3,3})$. Tämä on ristiriidassa lauseen 2.12 kanssa, koska nämä graafit ovat tasograafeja valitulla solmulla z_i. Koska graafi $G + z_1 z_2$ ei sisällä neljää erillistä polkua graafien $(G_1 - G_2)$ ja $(G_2 - G_1)$ välillä, niin ne molemmat eivät voi sisältää luokan $T(K^5)$ graafin oksasolmua eivätkä kahta luokan $T(K_{3,3})$ graafin oksasolmuista. Tällöin graafi K on luokan $T(K_{3,3})$ edustaja vain yhdellä oksasolmulla v graafissa $G_2 - G_1$. Nyt taas myös graafi $G_1 + v + \{vx, vy, vz_1\}$ sisältää graafin luokasta $T(K_{3,3})$, mikä on ristiriidassa lauseen 2.12 kanssa. □

Lause 2.17 (Kuratowski 1930; Wagner 1937)**.** *Olkoon G graafi. Seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä keskenään.*

(i) *G on tasograafi.*

(ii) *Graafilla G ei ole minorinaan graafia K^5 tai $K_{3,3}$.*

(iii) *Graafilla G ei ole topologisena minorinaan graafia K^5 tai $K_{3,3}$.*

Todistus (vrt. [3, s. 101]). Todistetaan lause niin, että oletetaan edellinen kohta ja pidetään seuraavaa kohtaa väitteenä.

(i) Olkoon G tasograafi. Lauseen 2.12 perusteella tasograafilla ei ole topologisena minorinaan graafia K^5 tai $K_{3,3}$. Toisaalta lauseen 2.13 mukaan graafilla on minorinaan graafi K^5 tai $K_{3,3}$, jos ja vain jos sillä on K^5 tai $K_{3,3}$ topologisena minorinaan. Tällöin graafilla G ei ole minorinaan graafia K^5 tai $K_{3,3}$.

(ii) Oletetaan, että graafilla G ei ole minorinaan graafia K^5 tai $K_{3,3}$. Lauseen 2.13 mukaan graafilla on minorinaan graafi K^5 tai $K_{3,3}$, jos ja vain jos sillä on K^5 tai $K_{3,3}$ topologisena minorinaan. Tällöin graafilla G ei ole topologisena minorinaan graafia K^5 tai $K_{3,3}$.

(iii) Oletetaan, että graafilla G ei ole topologisena minorinaan graafia K^5 tai $K_{3,3}$. Lauseen 2.16 mukaan graafi G on 3-yhtenäinen. Toisaalta lauseen 2.13 mukaan graafilla on minorinaan graafi K^5 tai $K_{3,3}$, jos ja vain jos sillä on K^5 tai $K_{3,3}$ topologisena minorinaan, jolloin sillä ei ole minorinaan graafia K^5 tai $K_{3,3}$. Tällöin lauseen 2.14 mukaan graafi G on tasograafi.

□

3 Minorilause

Tämän luvun lauseet ja todistukset ovat valmisteluja luvun lopussa esiteltävälle minorilauseelle ja sen todistuksen hahmotelmalle.

3.1 Kvasihyvä järjestys

Määritelmä 3.1. Joukon X ositus c eri luokkaan on joukon X alkioiden *väritys c:llä eri värillä*, lyhyemmin joukon X *c-väritys.*

Määritelmä 3.2. Graafin $G = (V, E)$ *solmuväritys* on sellainen kuvaus $c : V \to S$, että $c(v) \neq c(w)$ aina, kun solmut v ja w ovat naapureita. Joukon S alkiot ovat *värejä*. Pienin sellainen kokonaisluku k, että graafilla G on k-väritys, on graafin G *väriluku*, merkitään $\chi(G)$.

Määritelmä 3.3. Joukon X kaikkien k-osajoukkojen joukko on $[X]^k$. Kun joukon $[X]^k$ c-väritys on annettu, niin joukko $Y \subseteq X$ on *yksivärinen*, jos kaikilla joukon $[Y]^k$ alkioilla on sama väri kuin joukon $[X]^k$ alkioilla.

Lause 3.1. *Olkoot k ja c positiivisia kokonaislukuja ja X ääretön joukko. Jos $[X]^k$ on väritetty c:llä eri värillä, niin joukolla X on ääretön yksivärinen osajoukko.*

Todistus (vrt. [3, s. 253]). Todistetaan lause induktiolla luvun k suhteen, kun c on kiinnitetty. Kun $k = 1$ väite on tosi, joten olkoon $k > 1$ ja oletetaan väite todeksi pienemmillä luvun k arvoilla. Olkoon joukko $[X]^k$ väritetty c:llä eri värillä. Muodostetaan ääretön jono $X_0, X_1, \ldots$ joukon X osajoukkoja ja valitaan alkiot $x_i \in X_i$, kaikilla luvuilla i, seuraavin ehdoin.

(i) $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$.

(ii) Kaikilla k-joukoilla $\{x_i\} \cup Z$, missä $Z \in [X_{i+1}]^{k-1}$, on sama väri, jotka liitetään alkioon x_i.

Asetetaan aluksi $X_0 = X$ ja valitaan mielivaltainen $x_0 \in X_0$. Oletuksen mukaan X_0 on ääretön. Kun on valittu ääretön joukko X_i ja alkio $x_i \in X_i$ jollekin luvulle i, niin c-väritetään joukko $[X_i \setminus \{x_i\}]^{k-1}$ antamalla jokaiselle joukolle Z joukon $\{x_i\} \cup Z$ väri joukon $[X]^k$ c-värityksestä. Induktio-oletuksen mukaan joukolla $X_i \setminus \{x_i\}$ on ääretön yksivärinen osajoukko, joka valitaan joukoksi X_{i+1}. Tämä valinta täyttää ehdot (i) ja (ii). Lopuksi valitaan mielivaltainen alkio $x_{i+1} \in X_{i+1}$. Koska c on äärellinen, yksi c:stä väristä littyy äärettömän moneen alkioon x_i. Nämä alkiot x_i muodostavat joukon X äärettömän yksivärisen osajoukon. $\square$

Määritelmä 3.4. Refleksiivinen ja transitiivinen relaatio on *kvasijärjestys*. Kvasijärjestys $\leq$ joukolla X on *kvasihyvä järjestys*, jos kaikille äärettömille jonoille $x_0, x_1 \ldots$ pätee, että $x_i \leq x_j$, kun $i < j$. Tällöin (x_i, x_j) on *hyvä pari*. Jono, joka sisältää hyvän parin, on *hyvä jono*. Jos jono ei ole hyvä, se on *paha*.

Lause 3.2. *Kvasijärjestys joukolla X on kvasihyvä järjestys, jos ja vain jos joukko X ei sisällä ääretöntä antiketjua eikä ääretöntä aidosti vähenevää jonoa $x_0 > x_1 > \ldots$.*

Todistus (vrt. [3, s. 316]). Väitteen suunta '=>' on triviaalisti tosi. Olkoon sitten $x_0, x_1, \ldots$ mikä tahansa ääretön jono joukossa X. Olkoon K täydellinen graafi joukolle $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Väritetään graafin K särmät ij $(i < j)$ seuraavasti: vihreä, jos $x_i \leq x_j$; punainen, jos $x_i > x_j$ ja keltainen, jos x_i ja x_j eivät ole verrattavissa. Lauseen 3.1 mukaan graafilla K on ääretön indusoitu aligraafi, jonka särmillä on sama väri. Jos joukossa X ei ole ääretöntä antiketjua eikä ääretöntä aidosti vähenevää jonoa, niin tämä väri on vihreä. Siis jonolla $x_0, x_1, \ldots$ on ääretön osajono, jonka jokainen pari on hyvä. Erityisesti jono $x_0, x_1, \ldots$ itse on hyvä. □

Lauseen 3.2 todistus voimakkaampi kuin mitä väite edellyttää. Jonosta $x_0, x_1, \ldots$ yhden hyvän parin löytämisen lisäksi, löydettiin ääretön kasvava osajono. Täten on tullut todistetuksi myös seuraava lause.

Lause 3.3. *Jos joukko X on kvasihyvin järjestetty, niin jokaisella äärettömällä jonolla joukossa X on ääretön kasvava osajono.*

Määritelmä 3.5. Joukon X kaikkien äärellisten osajoukkojen joukolle käytetään merkintää $[X]^{<\omega}$.

Määritelmä 3.6. Olkoon $\leq$ kvasijärjestys joukolle X. Äärellisille osajoukoille $A, B \subseteq X$ käytetään merkintää $A \leq B$, jos on olemassa sellainen injektiivinen kuvaus $f : A \to B$, että $a \leq f(a)$ kaikilla alkioilla $a \in A$. Tämä laajentaa luonnollisella tavalla kvasijärjestyksen joukolle $[X]^{<\omega}$.

Lause 3.4. *Jos joukolla X on kvasihyvä järjestys $\leq$, niin se on myös joukolla $[X]^{<\omega}$.*

Todistus (vrt. [3, s. 316]). Oletetaan, että $\leq$ on kvasihyvä järjestys joukolla X, mutta ei joukolla $[X]^{<\omega}$. Muodostetaan paha jono $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ joukossa $[X]^{<\omega}$ seuraavasti. Kun $n \in \mathbb{N}$ on annettu, niin tehdään induktio-oletus, että A_i on määritelty kaikilla $i < n$, ja että on olemassa paha jono joukossa $[X]^{<\omega}$, jonka alussa on jono $A_0, \ldots, A_{n-1}$. Tämä pätee kun $n = 0$, koska oletuksen mukaan joukko $[X]^{<\omega}$ sisältää pahan jonon ja tällä jonolla on tyhjä jono alkuosanaan.

Valitaan sellainen joukko $A_n \in [X]^{<\omega}$, että joukossa $[X]^{<\omega}$ jonkin pahan jonon alussa on jono $A_0, \ldots, A_n$ ja $|A_n|$ on niin pieni kuin mahdollista. Tällöin $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on paha jono joukossa $[X]^{<\omega}$ ja erityisesti $A_n \neq \emptyset$ kaikilla luvuilla n. Valitaan jokaiselle luvulle n alkio $a_n \in A_n$ ja joukko $B_n = A_n \setminus \{a_n\}$. Lauseen 3.3 mukaan jonolla $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on ääretön kasvava osajono $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Koska joukko A_{n_0} on valittu minimaalisesti, niin jono

$$A_0, \ldots, A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, B_{n_2}, \ldots$$

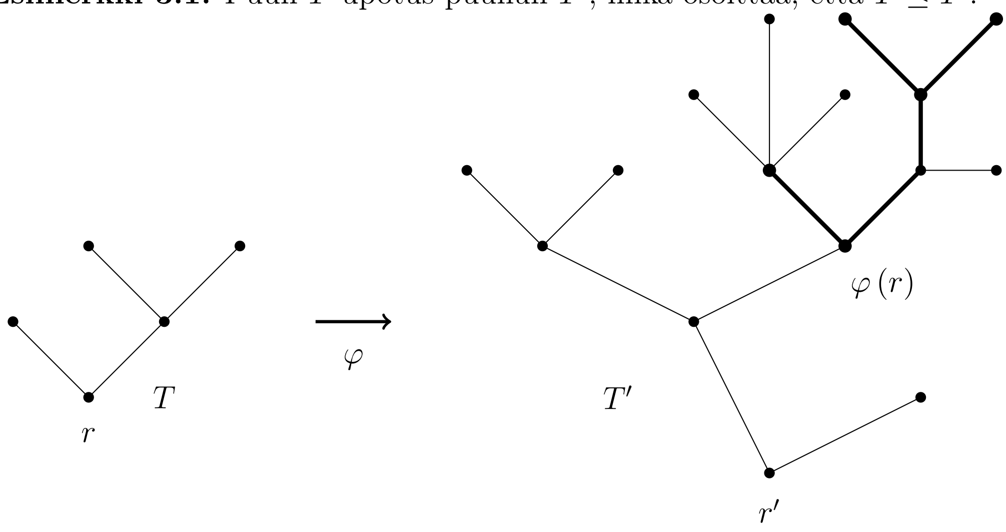
on hyvä ja sisältää hyvän parin. Koska $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on paha, niin tämä pari ei voi olla muotoa (A_i, A_j) tai (A_i, B_j), kun $B_j \leq A_j$. Tällöin se on muotoa (B_i, B_j). Kun laajennetaan injektiota $B_i \to B_j$ kuvauksella $a_i \longmapsto a_j$, voidaan taas päätellä, että pari (A_i, B_j) on hyvä, mikä on ristiriita. $\square$

3.2 Minorilause puille

Minorilause voidaan muotoilla myös niin, että äärelliset graafit ovat kvasihyvin järjestettyjä minorirelaation $\preccurlyeq$ suhteen. Tässä luvussa todistetaan puille vahva versio minorilauseesta.

Määritelmä 3.7. Olkoot T ja T' puita. Jos on olemassa isomorfismi φ joltain puun T polkujaolta puun T' alipuulle T'', joka säilyttää puun T ja juuren r puujärjestyksen joukossa $V(T)$, niin merkitään, että $T \leq T'$. Nin ollen jos $x < y$ puussa T, niin $\varphi(x) < \varphi(y)$ puussa T'. Tämä on kvasijärjestys kaikkien juurellisten puiden luokassa.

Esimerkki 3.1. Puun T upotus puuhun T', mikä osoittaa, että $T \leq T'$.



Lause 3.5 (Kruskalin lause)**.** *Äärelliset puut ovat kvasihyvin järjestettyjä topologisen minorirelaation suhteen.*

Todistus (vrt. [3, s. 317]). Osoitetaan, että juurelliset puut ovat kvasihyvin järjestettyjä edellisessä määritelmässä määritellyn relaation $\leq$ suhteen. Väite seuraa tästä.

Tehdään vastaoletus, että äärelliset puut eivät ole kvasihyvin järjestettyjä topologisen minorirelaation suhteen. Edetään kuten lauseen 3.4 todistuksessa, jotta saadaan ristiriita. Kun $n \in \mathbb{N}$ on annettu, tehdään induktio-oletus, että ollaan valittu sellainen jono $T_0, \ldots, T_{n-1}$ juurellisia puita, joka aloittaa jonkin pahan jonon juurellisia puita. Valitaan puuksi T_n sellainen minimaalisin juurellinen puu, että jono $T_0, \ldots, T_n$ aloittaa jonkin pahan jonon. Olkoon puun T_n juuri r_n kaikilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on paha jono. Olkoon A_n graafin $T_n - r_n$ komponenttien joukko kaikilla luvuilla n, missä sen komponentit ovat juurellisia puita, joiden juuria ovat solmun r_n naapurit. Näiden puiden puujärjestys on puun T_n indusoima. Todistetaan, että kaikkien näiden puiden joukko $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on kvasihyvin järjestetty.

Olkoon $\left(T^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ mikä tahansa jono puita joukossa A. Valitaan jokaiselle luvulle $k \in \mathbb{N}$ sellainen luku $n = n(k)$, että $T^k \in A_n$. Valitaan sellainen luku k, jolla on pienin $n(k)$. Tällöin

$$T_0, \ldots, T_{n(k)-1}, T^k, T^{k+1}, \ldots \tag{$*$}$$

on hyvä jono, koska $T_{n(k)}$ valittiin minimaalisesti ja $T^k \subsetneqq T_{n(k)}$. Olkoon (T, T') hyvä pari siinä jonossa. Koska $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on paha jono, niin T ei voi olla ensimäisten $n(k)$ joukossa $(T_0, \ldots, T_{n(k)-1})$ jonon $(*)$ jäsenistä. Silloin T' olisi joku puista T^i kun $i \geq k$, eli $T \leq T' = T^i \leq T_{n(i)}$. Koska $n(k) \leq n(i)$ valitulla luvulla k, niin tällöin $\left(T, T_{n(i)}\right)$ olisi hyvä pari pahassa jonossa $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Näin ollen (T, T') on hyvä pari jonossa $\left(T^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$, joten joukko A on kvasihyvin järjestetty.

Lauseen 3.4 mukaan jonolla $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on hyvä pari (A_i, A_j) joukossa $[A]^{<\omega}$. Olkoon $f : A_i \to A_j$ injektio, missä $T \leq f(T)$ kaikilla puilla $T \in A$. Laajennetaan upotusten $T \to f(T)$ yhdiste kuvaukseksi φ joukosta $V(T_i)$ joukkoon $V(T_j)$, missä $\varphi(r_i) = r_j$. Tällainen kuvaus φ säilyttää puun T_i puujärjestyksen ja määrittelee upotuksen, joka osoittaa, että $T_i \leq T_j$, koska särmät $r_i r \in T$ kuvautuvat poluiksi $r_j T_j \varphi(r)$. Näin ollen (T_i, T_j) on hyvä pari alkuperäisessä pahassa jonossa juurellisia puita, mikä on ristiriita. □

3.3 Puuhajotelma

Määritelmä 3.8. Olkoon G graafi ja T puu. Olkoon $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$ solmujoukkojen $V_t \subseteq V(G)$ perhe, missä $t \in T$. Pari $(T, \mathcal{V})$ on graafin G *puuhajotelma*, kun se täyttää seuraavat ehdot.

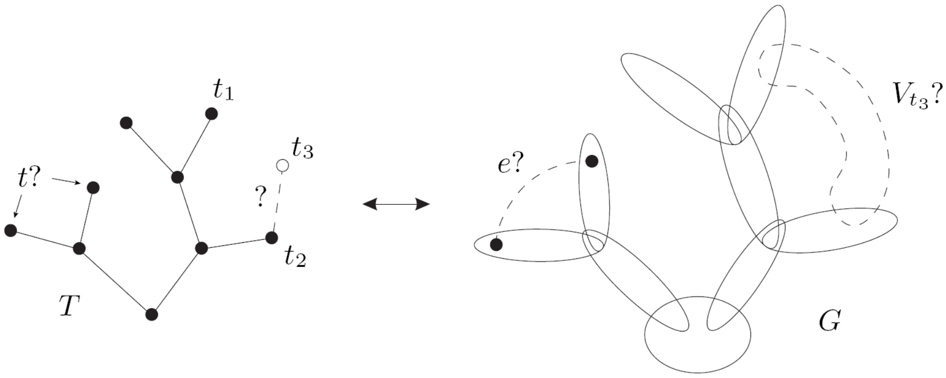
(T1) $V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t$.

(T2) Jokaista särmää $e \in G$ kohti on olemassa sellainen solmu $t \in T$, että särmän e molemmat päät ovat joukossa V_t.

(T3) $V_{t_1} \cap V_{t_3} \subseteq V_{t_2}$ aina, kun solmuille $t_1, t_2, t_3 \in T$ pätee, että $t_2 \in t_1Tt_3$.

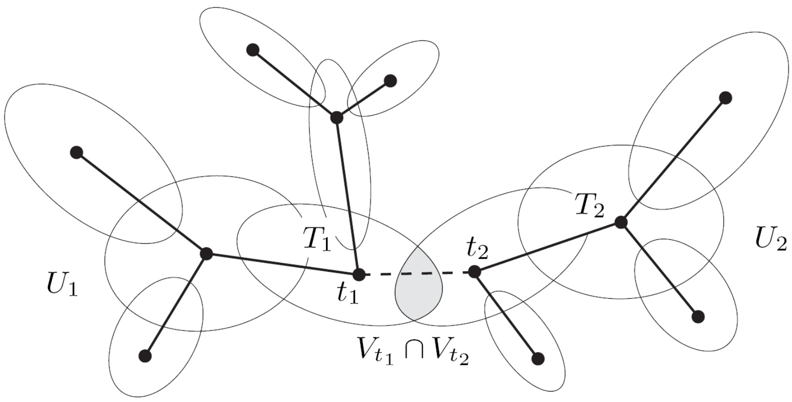
Määritelmä 3.9. Ehdoista (T1) ja (T2) seuraa, että graafi G on aligraafien $G[V_t]$ yhdiste. Nämä aligraafit ja joukot V_t ovat puuhajotelman $(T, \mathcal{V})$ *osia*. Ehdosta (T3) seuraa, että puuhajotelman $(T, \mathcal{V})$ osat ovat järjestäytyneet puun kaltaisesti.

Esimerkki 3.2. Särmiä ja puuhajotelman osia, jotka ehdot (T2) ja (T3) sulkevat pois.



Seuraavissa lauseissa oletetaan, että graafin G puuhajotelma $(T, \mathcal{V})$ on annettu, kun $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$.

Lause 3.6. *Olkoon t_1t_2 mikä tahansa särmä graafissa T. Olkoot T_1 ja T_2 graafin $T - t_1t_2$ komponentit, missä $t_1 \in T_1$ ja $t_2 \in T_2$. Tällöin joukko $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ separoi graafit $U_1 = \bigcup_{t \in T_1} V_t$ ja $U_2 = \bigcup_{t \in T_2} V_t$ graafissa G.*



Todistus (vrt. [3, s. 320]). Sekä solmu T_1 että solmu t_2 ovat jokaisella $t-t'$-polulla puussa T, kun $t \in T_1$ ja $t' \in T_2$. Näin ollen $U_1 \cap U_2 \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$ määritelmän kohdan (T3) perusteella. Nyt riittää osoittaa, että graafissa G ei ole sellaista särmää u_1u_2, että $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ ja $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Jos särmä u_1u_2 olisi sellainen, niin määritelmän kohdan (T2) mukaan on olemassa $t \in T$, jolla $u_1, u_2 \in V_t$. Solmujen u_1 ja u_2 valinnasta johtuen kumpikaan $t \in T_2$ tai $t \in T_1$ ei päde, mikä on ristiriita. □

Graafin puuhajotelma siirtyy myös aligraafeille ja kutistumille.

Lause 3.7. *Kaikille aligraafeille $H \subseteq G$ pari $\left(T, (V_t \cap V(H))_{t \in T}\right)$ on graafin H puuhajotelma.*

Lause 3.8. *Oletetaan, että graafi $G \in M(H)$ oksajoukoilla U_h, kun $h \in V(H)$. Olkoon $f : V(G) \to V(H)$ kuvaus, joka liittää jokaiseen graafin G solmuun indeksin siitä oksajoukosta, joka sen solmun sisältää. Olkoot kaikilla solmuilla $t \in T$ joukko $W_t = \{f(v) \mid v \in V_t\}$ ja $\mathcal{W} = (W_t)_{t \in T}$. Tällöin pari $(T, \mathcal{W})$ on graafin H puuhajotelma.*

Todistus (vrt. [3, s. 320]). Väitteet (T1) ja (T2) parille $(T, \mathcal{W})$ seuraavat suoraan vastaavista parille $(T, \mathcal{V})$. Olkoot sitten solmut $t_1, t_2, t_3 \in T$ kuten kohdassa (T3), ja tarkastellaan graafin H solmua $h \in W_{t_1} \cap W_{t_3}$. Osoitetaan, että $h \in W_{t_2}$. Joukkojen W_{t_1} ja W_{t_3} määritelmien perusteella on olemassa solmut $v_1 \in V_{t_1} \cap U_h$ ja $v_3 \in V_{t_3} \cap U_h$. Koska U_h on yhtenäinen graafissa G ja lauseen 3.6 mukaan joukko V_{t_2} separoi solmun v_1 solmusta v_3, niin joukolla V_{t_2} on solmu oksajoukossa U_h. Joukon W_{t_2} määritelmästä seuraa nyt, että $h \in W_{t_2}$. □

Lause 3.9. *Olkoon joukko $W \subseteq V(G)$ annettu. On olemassa joko sellainen solmu $t \in T$, että $W \subseteq V_t$, tai sellaiset solmut $w_1, w_2 \in W$ ja sellainen särmä $t_1t_2 \in T$, että solmut w_1 ja w_2 ovat sellaisen joukon $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ ulkopuolella, joka separoi ne graafissa G.*

Todistus (vrt. [3, s. 321]). Järjestetään graafin T särmät seuraavasti. Jokaista särmää $t_1t_2 \in T$ kohti määritellään joukot U_1 ja U_2 kuten lauseessa 3.6, jolloin joukko $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ separoi joukon U_1 joukosta U_2. Jos joukko $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ ei separoi mitään joukon W kahta solmua, jotka ovat sen ulkopuolella, niin voidaan löytää sellainen luku $i \in \{1, 2\}$, että $W \subseteq U_i$ ja suunnataan särmä t_1t_2 kohti solmua t_i.

Olkoon t viimeinen solmu maksimaalisessa suunnatussa polussa puussa T. Väitetään, että $W \subseteq V_t$. Olkoon solmu $w \in W$ annettu ja olkoon $t' \in T$ sellainen solmu, että $w \in V_{t'}$. Jos $t' \neq t$, niin se särmä e, joka separoi solmun t' solmusta t puussa T, on suunnattu solmua t kohti. Tällöin solmu w on joukossa $V_{t''}$ jollain solmun t sisältävän komponentin $T - e$ solmulla t''. Näin ollen $w \in V_t$ ehdon (T3) perusteella. □

Seuraava on lauseen 3.9 erikoistapaus.

Lause 3.10. *Mikä tahansa graafin G täydellinen aligraafi sisältyy johonkin puuhajotelman $(T, \mathcal{V})$ osaan.*

Määritelmä 3.10. Puuhajotelman $(T, \mathcal{V})$ *leveys* on luku

$$\max \{|V_t| - 1 : t \in T\} .$$

Graafin G *puuleveys* $\mathrm{tw}(G)$ on graafin G kaikkien puuhajotelmien pienin leveys.

Lauseiden 3.7 ja 3.8 perusteella graafin puuleveys ei koskaan kasva solmujen tai särmien poistamisella eikä särmien kutistamisella. Näin ollen seuraava tulos pitää paikkansa.

Lause 3.11. *Jos $H \preccurlyeq G$, niin $\mathrm{tw}(H) \leq \mathrm{tw}(G)$.*

Graafit, joilla on rajoitettu puuleveys, ovat riittävän samankaltaisia puihin verrattuna, jotta on mahdollista soveltaa Kruskalin lauseen todistusta sellaisten graafien luokalle. Karkeasti sanottuna täytyy iteroida lauseen 3.4 minimaalinen paha jono -vaihetta $\mathrm{tw}(G)$ kertaa. Näin päästään lähemmäksi minorilauseen todistusta.

Lause 3.12 (Robertson & Seymour 1990)**.** *Graafit, joiden puuleveys on pienempi kuin k, ovat kvasihyvin järjestettyjä minorirelaation suhteen kaikilla kokonaisluvuilla $k > 0$.*

Määritelmä 3.11. Joukon $V(G)$ kaksi osajoukkoa *koskettavat* toisiaan, jos niillä on yhteinen solmu tai graafissa G on särmä niiden välillä. Joukko toisiaan koskevia yhtenäisiä solmuja graafissa G on *pensas*. Joukon $V(G)$ osajoukko on pensaan $\mathcal{B}$ *peite*, jos se kohtaa pensaan $\mathcal{B}$ jokaisen alkion. Pienin määrä solmuja, joka peittää pensaan, on sen pensaan *järjestys*.

Lause 3.13. *Joukko, joka separoi kaksi pensaan peitettä, on myös sen pensaan peite.*

Todistus (vrt. [3, s. 322]). Koska jokainen joukko pensaassa on yhtenäinen ja kohtaa molemmat peitteet, se myös kohtaa minkä tahansa joukon, joka separoi nämä peitteet. □

Määritelmä 3.12. Oletetaan, että graafissa G on pensas $\mathcal{B}$, jonka aste ei ole suurempi kuin k. Tällöin graafin G puuhajotelma, jonka mikään astetta k suurempi osa ei peitä pensasta $\mathcal{B}$, on $\mathcal{B}$-*hyväksyttävä.*

Huomautus. Kun $\mathcal{B} = \emptyset$, niin tw(G)$<$ k, koska jokainen joukko peittää tyhjän pensaan.

Määritelmä 3.13. Graafi $G = (V, E)$on $k \times k$-*ruudukko*, jos

$$V = \{1, \ldots, k\}^2 \text{ ja}$$
$$E = \{(i, j)\,(i', j') : |i - i'| + |j - j'| = 1\}\,.$$

Ruudukon k^2 joukkoa $C_{ij} = \{(i, \ell) \mid \ell = 1, \ldots, k\} \cup \{(\ell, j) \mid \ell = 1, \ldots, k\}$ ovat ruudukon *ristejä.*

Lause 3.14 (Menger 1927). *Olkoon $G = (V, E)$ graafi ja $A, B \subseteq V$. Pienin lukumäärä solmuja, joka separoi joukon A joukosta B, on yhtäsuuri kuin suurin erillisten $A - B$-polkujen lukumäärä graafissa G.*

Todistus (vrt. [3, s. 62]). Olkoon $k = k\,(G, A, B)$ pienin lukumäärä solmuja, joka separoi joukon A joukosta B graafissa G. Tällöin selvästikään graafissa G ei voi olla enempää kuin k erillistä $A - B$-polkua. Osoitetaan särmien lukumäärän $\|G\|$ suhteen induktiolla, että sellaisia polkuja on olemassa k kappaletta. Jos graafissa G ei ole yhtään särmää, niin $|A \cap B| = k$, jolloin graafissa G on k triviaalia $A - B$-polkua. Oletetaan sitten, että graafissa G on särmä $e = xy$. Jos graafissa G ei ole k erillistä $A - B$-polkua, ei niitä myöskään ole graafissa G/e. Tässä kutistunut solmu v_e on joukon A (tai B) alkio graafissa G/e, jos graafissa G vähintään toinen solmuista x ja y on joukossa A (tai B). Induktio-oletuksen mukaan graafissa G/e on sellainen $A - B$-separaattori Y, missä on vähemmän kuin k solmua. Niiden solmujen joukossa täytyy olla solmu v_e, koska muuten $Y \subseteq V$ olisi $A - B$-separaattori graafissa G. Tällöin $X = (Y \setminus \{v_e\}) \cup \{x, y\}$ on $A - B$-separaattori, jolla on täsmälleen k solmua, graafissa G.

Tarkastellaan nyt graafia $G - e$. Koska $x, y \in X$, niin jokainen $A - X$-separaattori graafissa $G - e$ on $A - B$-separaattori graafissa G ja näin ollen sisältää vähintään k solmua. Induktioperiaatteen nojalla on olemassa k erillistä $A - X$-polkua graafissa $G - e$ ja samoin on olemassa k erillistä $X - B$-polkua graafissa $G - e$. Nämä kaksi polkuryhmää eivät kohtaa joukon X ulkopuolella, kun X separoi joukon A joukosta B, joten ne voidaan yhdistää ja saadaan k erillistä $A - B$-polkua. $\square$

Seuraavaasta lauseesta käytetään joskus nimitystä *puuleveyden duaalisuuslause.*

Lause 3.15 (Seymour & Thomas 1993)**.** *Olkoon $k > 0$ kokonaisluku. Graafin puuleveys on suurempi tai yhtäsuuri kuin k, jos ja vain jos graafi sisältää pensaan, jonka järjestys on suurempi kuin k.*

Todistus (vrt. [3, s. 322]). Olkoon ensin $\mathcal{B}$ mikä tahansa pensas graafissa G. Osoitetaan, että jokaisella graafin G puuhajotelmalla $\left(T, (V_t)_{t\in T}\right)$ on osa, joka peittää pensaan $\mathcal{B}$.

Toimitaan kuten lauseen 3.9 todistuksessa, ja järjestetään puun T särmät t_1t_2. Jos joukko $X = V_{t_1} \cap V_{t_2}$ peittää pensaan $\mathcal{B}$, niin lopetetaan siihen. Jos näin ei käy, niin jokaisella joukon X kanssa erillisellä joukolla $B \in \mathcal{B}$ on sellainen luku $i \in \{1, 2\}$, että $B \subseteq U_i \smallsetminus X$ kuten lauseessa 3.6. Muistetaan, että joukko B on yhtenäinen. Tämä luku i on sama kaikille tällaisille joukoille B, koska ne koskettavat toisiaan. Nyt järjestetään särmä t_1t_2 kohti solmua t_i. Jos jokainen puun T särmä järjestetään kuten edellä ja t on viimeinen solmu maksimaalisessa suunnatussa polussa puussa T, niin tällöin joukko V_t peittää pensaan $\mathcal{B}$ kuten lauseen 3.9 todistuksessa.

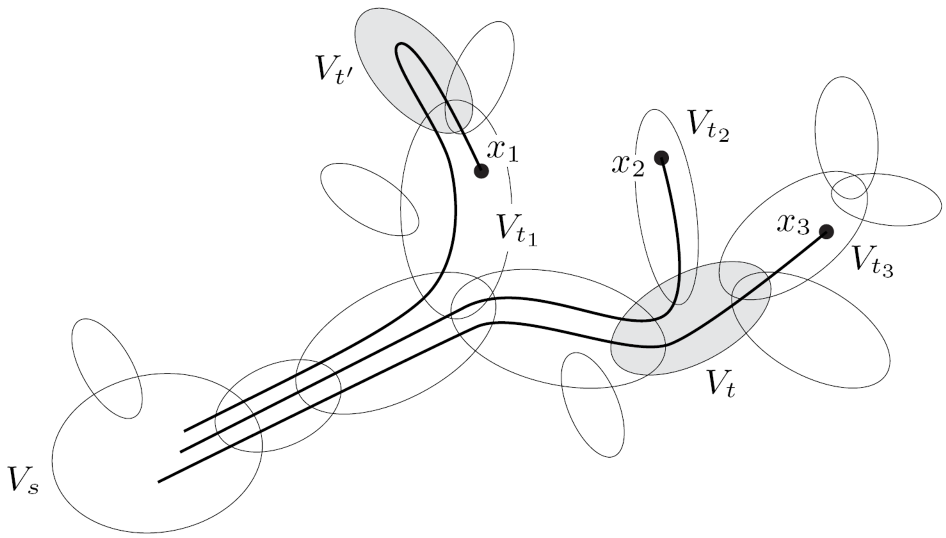
Oletetaan sitten, että graafissa G ei ole yhtään pensasta, jonka järjestys on suurempi kuin k. Osoitetaan, että jokaisella graafin G pensaalla $\mathcal{B}$ on $\mathcal{B}$-hyväksyttävä puuhajotelma. Olkoon pensas $\mathcal{B}$ annettu, ja tehdään induktio-oletus, että jokaisella pensaalla $\mathcal{B}'$, jossa on enemmän joukkoja kuin pensaassa $\mathcal{B}$, on graafin G $\mathcal{B}'$-hyväksyttävä puuhajotelma. Induktio alkaa, koska missään graafin G pensaassa ei ole enempää kuin $2^{|G|}$ joukkoa. Olkoon joukko $X \subseteq V(G)$ sellainen pensaan $\mathcal{B}$ peite, missä on mahdollisimman vähän solmuja. Tällöin $\ell = |X| \leq k$ on pensaan $\mathcal{B}$-järjestys. Tavoitteena on osoittaa seuraavaa.

***.** Jokaisella graafin $G - X$ komponentilla C on sellainen graafin $G[X \cup V(C)]$ $\mathcal{B}$-hyväksyttävä puuhajotelma, missä joukko X on osana.

Tällöin ne puuhajotelmat voidaan yhdistää graafin G $\mathcal{B}$-hyväksyttäväksi puuhajotelmaksi nimeämällä niiden solmut vastaamaan joukkoa X. Jos $X = V(G)$, niin puuhajotelma, missä joukko X on sen ainoa osa, on $\mathcal{B}$-hyväksyttävä.

Olkoon C graafin $G - X$ annettu komponentti. Merkitään $H = G[X \cup V(C)]$ ja $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{C\}$. Jos $\mathcal{B}'$ ei ole pensas, niin komponentti C ei koske mitään pensaan $\mathcal{B}$ solmua. Tällöin joukko $Y = V(C) \cup N(C)$ ei peitä pensasta $\mathcal{B}$. Nyt kahdesta osasta X ja Y koostuva graafin H puuhajotelma toteuttaa kohdan $*$. Voidaan siis olettaa, että $\mathcal{B}'$ on pensas. Koska joukko X peittää pensaan $\mathcal{B}$, niin $C \notin \mathcal{B}$, joten $|\mathcal{B}'| > |\mathcal{B}|$. Induktio-oletuksen mukaan graafilla G on $\mathcal{B}'$-hyväksyttävä puuhajotelma $\left(T, (V_t)_{t\in T}\right)$. Jos se on myös $\mathcal{B}$-hyväksyttävä, niin muuta ei tarvitse tehdä. Jos se ei ole $\mathcal{B}$-hyväksyttävä, niin yksi sen osista, jonka järjestys on suurempi kuin k, peittää pensaan $\mathcal{B}$. Olkoon se joukko V_s. Koska mikään joukko, missä on vähemmän kuin ℓ solmua, ei peitä pensasta $\mathcal{B}$, niin lauseista 3.13 ja 3.14 seuraa, että joukkojen V_s ja X välillä on ℓ erillistä polkua $P_1, \ldots, P_\ell$. Joukko V_s ei peitä pensasta $\mathcal{B}$ ja näin ollen on graafissa $G - C$. Nyt polut P_i kohtaavat graafin H vain päissään $x_i \in X$.

Valitaan jokaiselle luvulle $i = 1, \ldots, \ell$ solmu $t_i \in T$, joilla $x_i \in V_t$. Olkoon joukko $W_t = (V_t \cap V(H)) \cup \{x_i \mid t \in sTt_i\}$ kaikilla solmuilla $t \in T$.



Kuva 14: Joukko W_t sisältää solmut x_2 ja x_3 mutta ei solmua x_1. Joukko $W_{t'}$ ei sisällä mitään solmua x_i.

Tällöin $\left(T, (W_t)_{t\in T}\right)$ on puuhajotelma, jonka puuhajotelma $\left(T, (V_t)_{t\in T}\right)$ indusoi graafilla H, lisättynä muutamalla solmulla x_i joihinkin osiin. Huolimatta näistä lisäsolmuista, vielä pätee $|W_t| \leq |V_t|$ kaikilla solmuilla t, koska jokaista solmua $x_i \in W_t \smallsetminus V_t$ kohti $t \in sTt_i$, jolloin joukossa V_t on jokin muu polun P_i solmu. Se solmu ei ole joukossa W_t, koska polku P_i kohtaa graafin H vain solmussa x_i. Lisäksi $\left(T, (W_t)_{t\in T}\right)$ täyttää määritelmän ehdon (T3), koska jokainen solmu x_i lisätään kaikkiin osiin jonkin polun avulla, joka sisältää solmun t_i puussa T.

Kun $W_s = X$, niin väitteen $*$ osoittamiseksi riittää näyttää, että $\left(T, (W_t)_{t\in T}\right)$ on $\mathcal{B}$-hyväksyttävä. Tarkastellaan mitä tahansa joukkoa W_t, jonka järjestys on suurempi kuin k. Tällöin W_t kohtaa komponentin C, koska $|X| = \ell \leq k$. Koska puuhajotelma $\left(T, (V_t)_{t\in T}\right)$ on $\mathcal{B}$-hyväksyttävä ja $|V_t| \geq |W_t| > k$, niin tiedetään, että joukko V_t ei kohtaa jotakin joukkoa $B \in \mathcal{B}$. Osoitetaan, ettei joukko V_t kohtaa myöskään tätä joukkoa B. Jos niin olisi, sen pitäisi tapahtua jossakin solmussa $x_i \in W_t \smallsetminus V_t$. Tällöin B

olisi yhtenäinen joukko, joka kohtaa joukot V_s ja V_{t_i}, mutta ei joukkoa V_t. Kun $t \in sTt_i$ joukon W_t määritelmän mukaan, niin tämä on ristiriidassa lauseen 3.6 kanssa. □

Määritelmä 3.14. Suurin sellainen kokonaisluku r, millä $K^r \subseteq G$, on graafin G *klikkiluku* $\omega(G)$. Suurin sellainen kokonaisluku r, millä $\overline{K^r} \subseteq G$, on graafin G *riippumattomuusluku* $\alpha(G)$.

Huomautus. $\alpha(G) = \omega\left(\overline{G}\right)$ ja $\omega(G) = \alpha\left(\overline{G}\right)$.

Määritelmä 3.15. Jos graafin jokaisen indusoidun aligraafin $H \subseteq G$ väriluku $\chi(H) = \omega(H)$, niin se on *virheetön graafi*. Siis silloin kun klikkiluvun $\omega(H)$ triviaalin alarajan lukumäärä värejä riittää värittämään graafin H solmut.

Määritelmä 3.16. Graafi on *kolmioitu*, jos sen jokaisessa vähintään neljän pituisessa silmukassa on jänne. Toisin sanoen, sillä ei ole muita indusoituja silmukoita kuin kolmioita.

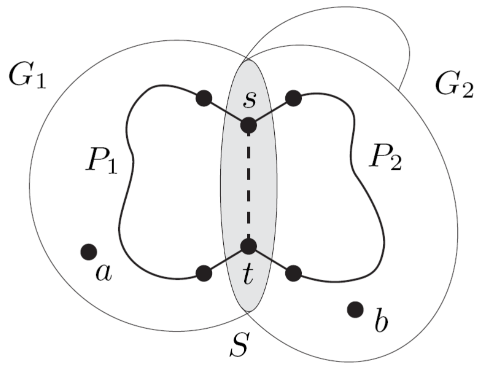
Määritelmä 3.17. Olkoon G graafi, jolla on sellaiset indusoidut aligraafit G_1, G_2 ja S, että $G = G_1 \cup G_2$ ja $S = G_1 \cap G_2$. Tällöin sanotaan, että graafi G syntyy, kun graafit G_1 ja G_2 *liimataan* yhteen graafilla S.

Lause 3.16. *Graafi on kolmioitu, jos ja vain jos se voidaan konstruoida rekursiivisesti liimaamalla täydellisillä aligraafeilla, aloittaen täydellisistä graafeista.*

Todistus (vrt. [3, s. 127]). Jos graafi G on saatu kahdesta kolmioidusta graafista G_1 ja G_2 liimaamalla ne yhteen täydellisellä aligraafilla, niin graafi G on selvästi kolmioitu, koska mikä tahansa indusoitu silmukka graafissa G on joko graafissa G_1 tai G_2, ja on siten määritelmän mukaan kolmio.

Olkoon sitten G kolmioitu graafi. Osoitetaan induktioilla luvun $|G|$ suhteen, että graafi G voidaan konstruoida vaaditulla tavalla. Jos G on täydellinen graafi, niin tilanne on triviaali. Oletetaan sitten, että graafi G ei ole täydellinen ja lisäksi, että $|G| > 1$ ja kaikki pienemmät kolmioidut graafit ovat konstruoitavissa vaaditulla tavalla. Olkoot $a, b \in G$ solmuja, jotka eivät ole naapureita keskenään ja olkoon joukko $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ minimaalinen $a - b$-separaattori. Olkoon C graafin $G - X$ se komponentti, missä solmu a on. Merkitään, että $G_1 = G[V(C) \cup X]$ ja $G_2 = G - C$. Nyt graafi G syntyy, kun graafit G_1 ja G_2 liimataan yhteen graafilla $S = [X]$.

Koska graafit G_1 ja G_2 ovat graafin G indusoituina aligraafeina kolmioituja ja tällöin konstruoitavissa induktiolla, niin riittää osoittaa, että graafi S on täydellinen. Oletetaan, että solmut $s, t \in S$ eivät ole naapureita keskenään. Joukon $X = V(S)$ minimaalisuudesta $a - b$-separaattorina seuraa, että molemmilla solmuilla s ja t on naapuri komponentissa C. Näin ollen graafissa G_1 on X-polku solmusta s solmuun t. Olkoon P_1 lyhin sellainen polku. Samoin graafissa G_2 on lyhin X-polku P_2 solmusta s solmuun t. Mutta nyt $P_1 \cup P_2$ on silmukka, jonka pituus on suurempi kuin neljä, eikä siinä ole jännettä. Tämä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että graafi G on kolmioitu.



Kuva 15: Jos graafit G_1 ja G_2 ovat kolmioituja, niin graafi G on myös kolmioitu.

□

Lause 3.17. *Graafi on kolmioitu, jos ja vain jos graafilla G on puuhajotelma täydellisiksi osiksi.*

Todistus (vrt. [3, s. 326]). Todistetaan lause induktiolla luvun $|G|$ suhteen. Oletetaan ensin, että graafilla G on sellainen puuhajotelma $(T, \mathcal{V})$, että $G[V_t]$ on täydellinen kaikilla solmuilla $t \in T$ ja valitaan sellainen puuhajotelma $(T, \mathcal{V})$, jolla $|T|$ on minimaalinen. Jos $|T| \leq 1$, niin graafi G on täydellinen ja siten kolmioitu. Olkoon sitten $t_1t_2 \in T$ särmä, ja graafit T_i ja $G_i = G[U_i]$ määriteltyjä kuten lauseessa 3.6, kun $i = 1, 2$. Tällöin $G = G_1 \cup G_2$ on täydellinen määritelmien (T1) ja (T2) perusteella, ja $V(G_1 \cap G_2) = V_{t_1} \cap V_{t_2}$ lauseen 3.6 perusteella. Näin ollen graafi $G_1 \cap G_2$ on täydellinen. Koska $\left(T_i, (V_t)_{t \in T_i}\right)$ on puuhajotelma täydellisiksi osiksi, niin molemmat graafit G_i ovat kolmioituja induktio-oletuksen perusteella. Puuhajotelman $(T, \mathcal{V})$ valinnasta johtuen, kumpikaan graafeista G_i ei ole graafin $G[V_{t_1} \cap V_{t_2}] = G_1 \cap G_2$ aligraafi, joten ne ovat pienempiä kuin graafi G. Koska $G_1 \cap G_2$ on täydellinen, niin mikä tahansa graafin G indusoitu silmukka on joko graafissa G_1 tai G_2 ja täten sillä on jänne. Graafi G on siis myös kolmioitu.

Oletetaan sitten, että graafi G on kolmioitu. Jos graafi G on täydellinen, niin tilanne on selvä. Oletetaan siis, että se ei ole täydellinen. Tällöin lauseen 3.16 perusteella graafi G on sellaisten kahden pienemmän kolmioidun graafin G_1 ja G_2 yhdiste, että $G_1 \cap G_2$ on täydellinen. Induktio-oletuksen perusteella graafeilla G_1 ja G_2 on puuhajotelmat $(T_1, \mathcal{V}_1)$ ja $(T_2, \mathcal{V}_\in)$ täydellisiksi osiksi. Lauseen 3.10 perusteella $G_1 \cap G_2$ on joka tapauksessa toisessa edellisistä osista. Olkoot ne indeksoitu $t_1 \in T_1$ ja $t_2 \in T_2$. Tällöin $((T_1 \cup T_2) + t_1 t_2, \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)$ on graafin G puuhajotelma täydellisiksi osiksi. $\square$

3.4 Puuleveys ja kielletyt minorit

Määritelmä 3.18. Olkoon $\mathcal{H}$ mikä tahansa joukko tai luokka graafeja. Nyt kaikkien graafien luokka $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H}) = \{G \mid \forall H \in \mathcal{H} : G \not\succcurlyeq H\}$, jolla ei ole minoria luokassa $\mathcal{H}$, on graafien ominaisuus. Siis se on suljettu isomorfismien suhteen. Tällöin sanotaan, että tämä ominaisuus on määritelty listaamalla graafit $H \in \mathcal{H}$ *kielletyiksi minoreiksi.*

Huomautus. Lauseen 2.2 perusteella $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$ on suljettu minorien ottamisen suhteen. Jos $G' \preccurlyeq G \in \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$, niin $G' \in \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$.

Määritelmä 3.19. Järjestetty pari (A, B) graafin G aligraafeja on *esipunos* graafissa G, jos $G = A \cup B$ ja graafi A sisältää sellaisen puun T, että

(i) puun T maksimiaste on korkeintaan kolme;

(ii) graafi $A \cap B$ sisältyy puuhun T ja sen maksimiaste on korkeintaan kaksi puussa T;

(iii) jokin puun T lehdistä on graafissa $A \cap B$, tai $|T| = 1$ ja $T \subseteq A \cap B$.

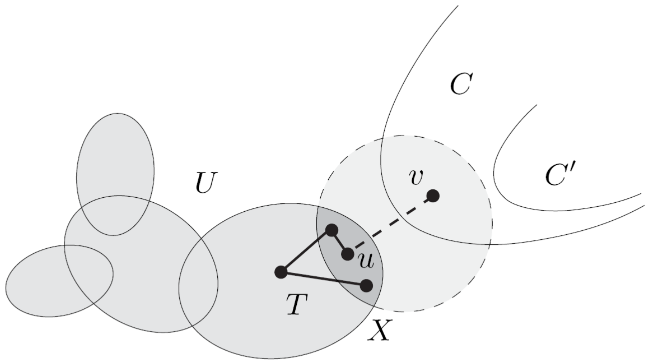
Tällaisen esipunoksen *järjestys* on luku $|A \cap B|$. Jos joukko $V(A \cap B)$ on ulkoisesti k-yhtenäinen graafissa B, niin tämä esipunos on *k-punos* graafissa G.

Lause 3.18. *Olkoon G graafi ja olkoot $h \geq k \geq 1$ kokonaislukuja. Jos graafissa G ei ole yhtään k-punosta, jonka järjestys on h, niin graafin G puuleveys on pienempi kuin $h + k - 1$.*

Todistus (vrt. [3, s. 329]). Voidaan olettaa, että graafi G on yhtenäinen. Olkoon $U \subseteq V(G)$ sellainen maksimaalinen joukko, että graafilla $G[U]$ puuhajotelma $\mathcal{D}$, jonka leveys on pienempi kuin $h + k - 1$. Lisäksi vaaditaan, että graafin $G - U$ jokaisen komponentin C naapurit joukossa U ovat jossakin puuhajotelman $\mathcal{D}$ osassa, ja $\left(G - C, \tilde{C}\right)$ on esipunos, jonka järjestys on korkeintaan h, missä $\tilde{C} = G[V(C) \cup N(C)]$. Selvästi $U \neq \emptyset$.

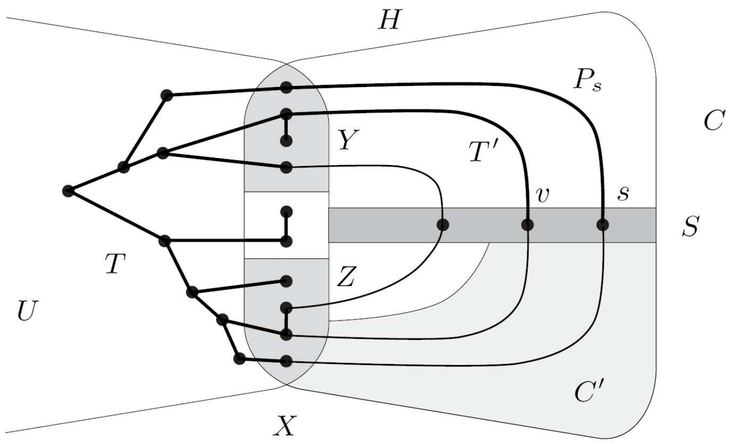
Väitetään, että $U = V(G)$. Tehdään sitten vastaoletus, että näin ei ole. Olkoot C graafin $G - U$ komponentti, $X = N(C)$ ja T esipunokseen $\left(G - C, \tilde{C}\right)$ liittyvä puu.

Oletuksen perusteella $|X| \leq h$. Osoitetaan, että yhtäsuuruus pätee. Jos se ei päde, niin olkoot $u \in X$ sellainen puun T lehti kuten määritelmän 3.19 kohdassa (iii) ja $v \in C$ lehden u naapuri. Asetetaan nyt $U' = U \cup \{v\}$ ja $X' = X \cup \{v\}$. Olkoon sitten T' puu, joka on saatu puusta T yhdistämällä solmut v ja u, ja $\mathcal{D}'$ graafin $G[U']$ puuhajotelma, joka on saatu puuhajotelmasta $\mathcal{D}$ lisäämällä joukko X' uudeksi osaksi.



Kuva 16: Joukkoa U ja puuhajotelmaa $\mathcal{D}$ laajennetaan, kun $|X| < h$.

Nyt puuhajotelman $\mathcal{D}'$ leveys on yhä pienempi kuin $h + k - 1$. Tarkastellaan graafin $G - U'$ komponenttia C'. Jos $C' \cap C = \emptyset$, niin C' on myös graafin $G - U$ komponentti. Tällöin $N(C')$ on jossakin puuhajotelman $\mathcal{D}$ osassa, myös puuhajotelman $\mathcal{D}'$, ja $\left(G - C', \tilde{C}'\right)$ on oletuksen perusteella esipunos, jonka järjestys on korkeintaan h. Jos taas $C' \cap C \neq \emptyset$, niin $C' \subseteq C$ ja $N(C') \subseteq X'$. Lisäksi $v \in N(C')$, koska muuten $N(C') \subseteq X$ separoisi komponentin C' solmusta v, mikä olisi ristiriidassa sen kanssa, että C' ja v ovat samassa graafin $G - X$ komponentissa C. Koska v on puun T' lehti, niin $\left(G - C', \tilde{C}'\right)$ on taas esipunos, jonka järjestys on korkeintaan h, vastoin joukon U maksimaalisuutta. Näin ollen $|X| = h$, joten oletuksen perusteella esipunos $\left(G - C, \tilde{C}\right)$ ei voi olla k-punos. Osoitetaan nyt tämä. Olkoot $Y, Z \subseteq X$ joukkoja ja $\mathcal{P}$ niin monen erillisen $Y - Z$-polun joukko kuin mahdollista graafissa $H = G[V(C) \cup Y \cup Z] - E(G[Y \cup Z])$. Koska nämä polut ovat 'ulkopuolisia' joukolle X graafissa $\tilde{C}$, niin joukkojen Y ja Z valinnasta johtuen $k' = |\mathcal{P}| < |Y| = |Z| \leq k$. Lauseen 3.14 perusteella joukko S, missä on k' solmua, separoi joukot Y ja Z graafissa H. Nyt joukolla S on täsmälleen yksi solmu jokaisessa joukon $\mathcal{P}$ polussa. Olkoon P_s se polku, missä on solmu $s \in S$.



Kuva 17: Joukko S separoi joukon Y joukosta Z graafissa H.

Olkoot $X' = X \cup S$, $U' = U \cup S$ ja $\mathcal{D}'$ graafin $G[U']$ puuhajotelma, joka on saatu puuhajotelmasta $\mathcal{D}$ lisäämällä joukko X' uudeksi osaksi. Nyt $|X'| \leq |X| + |S| \leq h + k - 1$. Osoitetaan, että U' on ristiriidassa joukon U maksimaalisuuden kanssa.

Koska $Y \cup Z \subseteq N(C)$ ja $|S| < |Y| = |Z|$, niin $S \cap C \neq \emptyset$, joten U' on mahtavampi kuin U. Olkoon C' graafin $G - U'$ komponentti. Jos $C' \cap C = \emptyset$, niin perustellaan kuten aikaisemminkin. Nyt $C' \subseteq C$ ja $N(C') \subseteq X'$. Komponentilla C' on taas vähintään yksi naapuri v joukossa $S \cap C$, koska joukko X ei separoi komponenttia $C' \subseteq C$ joukosta $S \cap C$. Joukon S määritelmän mukaan komponentilla C' ei voi olla naapureita molemmissa joukoissa $Y \setminus S$ ja $Z \setminus S$. Oletetaan, että niitä ei ole joukossa $Y \setminus S$. Olkoon T' puun T ja polkujen P_s kaikkien $Y - S$-alipolkujen unioni, missä $s \in N(C') \cap C$. Koska nämä alipolut alkavat joukosta $Y \setminus S$, eikä niillä ole sisäsolmua joukossa X', niin ne eivät voi kohdata komponentissa C'. Siksi $\left(G - C', \tilde{C}'\right)$ on esipunos puulla T' ja lehdellä v. Sen järjestys on $|N(C')| \leq |X| - |Y| + |S| = h - |Y| + k' < h$, mikä on ristiriidassa joukon U maksimaalisuuden kanssa. □

Lause 3.19. *Olkoon $k \geq 2$ kokonaisluku. Olkoot T puu, jonka aste on korkeintaan kolme, ja $X \subseteq V(T)$. Tällöin puulla T on sellainen särmäjoukko F, että jokaisen graafin $T - F$ komponentin solmujen lukumäärä on vähintään k ja enintään $2k - 1$ sillä poikkeuksella, että yhdellä komponentilla voi olla vähemmän solmuja joukossa X.*

Todistus (vrt. [3, s. 331]). Todistetaan induktiolla luvun $|X|$ suhteen. Jos $|X| \leq 2k - 1$, asetetaan $F = \emptyset$. Oletetaan siis, että $|X| \geq 2k$. Olkoon e

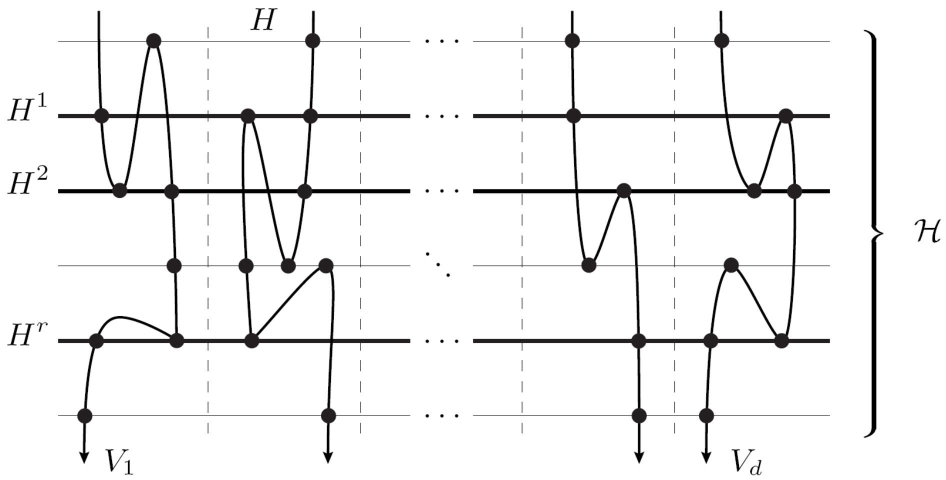
puun T sellainen särmä, että jollakin graafin $T - e$ komponentilla T' on vähintään k solmua joukossa X ja että $|T'|$ on niin pieni kuin mahdollista. Kun $\Delta(T) \leq 3$, niin särmän e graafin T' puoleisen pään aste on korkeintaan kaksi graafissa T'. Tällöin graafin T' minimaalisuudesta seuraa, että $|X \cap V(T')| \leq 2k - 1$. Kun käytetään induktio-oletusta graafiin $T - T'$, niin väite pätee. □

Määritelmä 3.20. Olkoon puu T annettu. Puun T erillisten solmujen r-jono $(x_1, \ldots, x_r)$ on *hyvä*, jos jokaisella luvulla $j = 1, \ldots, r-1$ puun T $x_j - x_{j+1}$-polku ei sisällä mitään muuta solmua tästä r-jonosta.

Lause 3.20. *Jokainen puu T, jonka järjestys on vähintään $r(r-1)$, sisältää hyvän r-jonon solmuja.*

Todistus (vrt. [3, s. 331]). Valitaan jokin solmu $x \in T$. Tällöin puu T on yhdiste sen alipoluista xTy, missä y käy läpi kaikki sen lehdet. Näin ollen ellei yhdelläkään niistä poluista ole vähintään r kappaletta solmuja, puulla T on vähintään $|T| / (r-1) \geq r$ lehteä. Koska mikä tahansa polku, jossa on r solmua, ja mikä tahansa joukko, jossa on r lehteä, muodostaa hyvän r-jonon puussa T, niin lause on todistettu. □

Lause 3.21. *Olkoot $d, r \geq 2$ sellaisia kokonaislukuja, että $d \geq r^{2r+2}$. Olkoon G graafi, joka sisältää sellaisen joukon $\mathcal{H}$, missä on $r^2 - 1$ kappaletta erillisiä polkuja, ja sellaisen joukon $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_d\}$, missä on d kappaletta erillisiä polkuja. Oletetaan, että jokainen joukon $\mathcal{V}$ polku kohtaa jokaisen joukon $\mathcal{H}$ polun. Oletetaan lisäksi, että jokainen polku $H \in \mathcal{H}$ sisältää d kappaletta sellaisia peräkkäisiä osia, että polku V_i kohtaa polun H vain osassa i kaikilla luvuilla $i = 1, \ldots, d$. Tilannetta voidaan havainnollistaa kuvalla:*



Tällöin graafilla G on $r \times r$-ruudukko minorina.

Todistus (vrt. [3, s. 332]). Tarkastellaan jokaisella luvulla $i = 1, \ldots, d$ graafia, jonka solmujoukko on sama kuin joukon $\mathcal{H}$, missä kaksi polkua ovat yhteydessa aina kun, polku V_i sisältää alipolun niiden välillä, jotka eivät kohtaa mitään muuta polkua joukossa $\mathcal{H}$. Koska polku V_i kohtaa jokaisen polun joukosta $\mathcal{H}$, niin tämä graafi on yhtenäinen. Olkoon T_i sen virittävä puu. Koska $|\mathcal{H}| \geq r\,(r-1)$, niin lauseen 3.20 perusteella jokaisella näillä $d \geq r^2\,(r^2)^r$ puulla T_i on hyvä r-jono solmuja. Koska joukolla $\mathcal{H}$ on korkeintaan $(r^2)^r$ kappaletta erillisiä r-jonoja, niin joillain r^2 kappaleesta puita T_i on yhteinen hyvä r-jono $(H^1, \ldots, H^r)$. Olkoon $I = \{i_1, \ldots, i_{r^2}\}$ näiden puiden indeksien joukko, missä $i_j < i_k$ kun $j < k$, ja asetetaan $\mathcal{H}' = \{H^1, \ldots, H^r\}$.

Konstruoidaan seuraavaksi haluttu $r \times r$-ruudukko. Tarkastellaan kaikkia lukuja $j, k \in \{1, \ldots, r\}$. Indeksiluvut j ovat ruudukon vaakatasoisille poluille ja indeksiluvut k pystysuuntaisille poluille. Olkoon H^j_k sellainen polun H^j alipolku, joka sisältää polun H^j osan i kaikilla luvuilla i, missä $i_{(k-1)r} < i \leq i_{kr}$ ja $i_0 = 0$. Poistetaan ensin polusta H^j kaikki osan i_{r^2} jälkeiset solmut, minkä jälkeen kutistetaan jokainen alipolku H^j_k yhdeksi solmuksi v^j_k. Olkoon näin saatu alipolku $\hat{H}^j$. Nyt $\hat{H}^j = v^j_1, \ldots, v^j_r$.

Kun luvut $j \in \{1, \ldots, r-1\}$ ja $k \in \{1, \ldots, r\}$ on annettu, täytyy määritellä sellainen polku V^j_k, joka muodostaa polkujaetun 'pystysuuntaisen särmän' $v^j_k v^{j+1}_k$. Tämä polku koostuu polun V_i osista yhdessä joukon $\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}'$ polkujen muutoin käyttämättömistä osista, kun $i = i_{(k-1)r+j}$. Muistetaan, että polkujen $\hat{H}^j$ ja $\hat{H}^{j+1}$ määritelmän mukaan polku V_i kohtaa polut H^j ja H^{j+1} täsmälleen vastaavissa kutistetuissa solmuissa v^j_k ja v^{j+1}_k. Polun V^j_k määrittämiseksi, tarkastellaan $H^j - H^{j+1}$-polkua $P = H_1, \ldots, H_t$ puussa T_i, jolla ei ole sisäsolmuja joukossa $\mathcal{H}'$. Näin ollen $H_1 = H^j$ ja $H_t = H^{j+1}$. Jokainen polun P särmä $H_s H_{s+1}$ vastaa polun V_i $H_s - H_{s+1}$-alipolkua, jolla ei ole yhtään sisäsolmua joukon $\mathcal{H}$ poluissa. Yhdessä polkujen $H_2, \ldots, H_{t-1}$ osien i kanssa nämä alipolut V_i muodostavat $H^j - H^{j+1}$-polun P' graafissa G, jolla ei ole sisäsolmuja millään poluista $H^1, \ldots, H^r$, eikä kohtaa mitään joukon $\mathcal{H}$ polkua sen i:nnen osan ulkopuolella. Korvaamalla polun P' päät poluissa H^j ja H^{j+1} solmuilla v^j_k ja v^{j+1}_k saadaan vastaavasti haluttu polku V^j_k, joka muodostaa ruudukon k:nnen 'pystysuuntaisen' polun j:nnen särmän. Koska polut P' ovat erillisiä eri luvuilla i ja eri parit (j, k) muodostavat eri lukuja i, niin polut V^j_k ovat erillisiä lukuunottamatta mahdollista yhteistä päätesolmua v^j_k. Lisäksi niillä ei ole sisäsolmua millään polulla $(H^1, \ldots, H^r)$, koska mikään polku H^j ei ole sisäsolmuna millään polulla $P \subseteq T_i$, joita käytettiin polun V^j_k konstruoimiseen. □

Lause 3.22. *Olkoon G kaksijakoinen graafi, jonka ositus on $\{A, B\}$, missä $|A| = a$ ja $|B| = b$. Olkoot $c \leq a$ ja $d \leq b$ positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että graafilla G on korkeintaan $(a-c)\,(b-d)\,/d$ särmää. Tällöin* *on olemassa sellaiset joukot $C \subseteq A$ ja $D \subseteq B$, että $|C| = c$ ja $|D| = d$, ja joukko $C \cup D$ on riippumaton graafissa G.*

Todistus (vrt. [3, s. 331]). Kun $\|G\| \leq (a-c)(b-d)/d$, niin vähemmällä kuin $b-d$ solmulla joukossa B on enemmän kuin $(a-c)/d$ naapuria joukossa A. Tällöin joukosta D 'lähtee' yhteensä korkeintaan $a-c$ särmää joukkoon A, joten joukolla A on osajoukko C, missä on c solmua ilman naapuria joukosta D. □

Lause 3.23 (Robertson & Seymour 1986)**.** *Jokaista kokonaislukua r kohti on olemassa sellainen kokonaisluku k, että jokaisella graafilla, jonka puuleveys on vähintään k, on $r \times r$-ruudukko minorina.*

Todistus (vrt. [3, s. 328]). Todistetaan väite, josta tämä lause seuraa.

***.** Olkoot $r, m > 0$ kokonaislukuja ja olkoon G graafi, jonka puuleveys on vähintään $r^{4m^2(r+2)}$. Tällöin graafi G sisältää $r \times r$-ruudukon tai sillä on graafi K^m minorina.

Koska K^{r^2} sisältää $r \times r$-ruudukon aligraafinaan, niin voidaan olettaa, että $2 \leq m \leq r^2$. Olkoot $c = r^{4(r+2)}$ ja $k = c^{2\binom{m}{2}}$. Nyt $c \geq 2^{16}$ ja täten $2m \leq m \leq r^2$, joten graafin G puuleveys on vähintään

$$c^{m^2} = c^m k \geq (2m+3)\,k \geq (m+1)(2k-1) + k - 1,$$

mikä on tarpeeksi, jotta lauseen 3.18 perusteella graafissa G on k-punos (A, B), jonka järjestys on $(m+1)(2k-1)$. Olkoon $T \subseteq A$ puu esipunoksella (A, B). Nyt $X = V(A \cap B) \subseteq V(T)$. Lauseen 3.19 perusteella puulla T on $|X|/(2k-1) - 1 = m$ erillistä alipuuta, joissa jokaisessa on vähintään k solmua joukosta X. Olkoot $A_1, \ldots, A_m$ näiden puiden solmujoukot. Graafi B sisältää joukon $\mathcal{P}_{ij}$, missä on k kappaletta erillisiä $A_i - A_j$-polkuja, joilla ei ole sisäsolmuja graafissa A, kaikilla luvuilla $1 \leq i \leq j \leq m$ k-punoksen määritelmän perusteella. Nämä joukot $\mathcal{P}_{ij}$ kutistuvat hiukan ja niitä muokataan myöhemmin, mutta niissä on aina 'paljon' erillisiä $A_i - A_j$-polkuja.

Yksi mahdollisuus todistuksessa on löytää sellaisia yksittäisiä polkuja $P_{ij} \in \mathcal{P}_{ij}$, jotka ovat erillisiä eri pareilla ij ja siten yhdistävät joukot A_i muodostaen graafin G minorin K^m. Jos se ei onnistu, niin esitellään kaksi sellaista tiettyä joukkoa $\mathcal{P}_{ij}$ ja $\mathcal{P}_{pq}$, että useat joukon $\mathcal{P}_{ij}$ poluista kohtaavat usean joukon $\mathcal{P}_{pq}$ poluista muodostaen niiden välille $r \times r$-ruudukon kuten lauseessa 3.21.

Muodostetaan lineaarinen järjestys indeksipareille ij kiinnittämällä mielivaltainen bijektio $\sigma : \{ij \mid 1 \leq i < j \leq m\} \to \left\{0, 1, \ldots, \binom{m}{2} - 1\right\}$. Tarkastellaan paria pq, kun $\sigma(pq) = \ell$ luvuilla $\ell = 0, 1, \ldots$. Valitaan sellainen

$A_p - A_q$-polku P_{pq}, joka on erillinen verrattuna aiemmin valittuihin polkuihin eli polkuihin P_{st}, kun $\sigma(st) < \ell$. Samaan aikaan korvataan kaikki 'myöhemmät' joukot $\mathcal{P}_{ij}$, tai mitä niistä on tullut, pienemmillä joukoilla, jotka sisältävät vain polkuun P_{pq} verrattuna erillisiä polkuja. Täten määritellään jokaista paria ij kohti jono $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_{ij}^0, \mathcal{P}_{ij}^1, \ldots$ yhä vain pienempiä polkujoukkoja, joka lopulta luhistuu joukoksi $\mathcal{P}_{ij}^\ell = \{P_{ij}\}$, kun ℓ on kasvanut luvuksi $\ell = \sigma(ij)$.

Tarkemmin sanoen, olkoon $\ell^* \leq \binom{m}{2}$ sellainen suurin kokonaisluku, että kaikilla luvuilla $0 \leq \ell < \ell^*$ ja $1 \leq i < j \leq m$ on olemassa joukot $\mathcal{P}_{ij}^\ell$, jotka täyttävät seuraavat ehdot.

(i) $\mathcal{P}_{ij}^\ell$ on epätyhjä joukko erillisiä $A_i - A_j$-polkuja graafissa B, jotka kohtaavat graafin A vain päätepisteissään.

Aina, kun joukko $\mathcal{P}_{ij}^\ell$ on määritelty, merkitään sen polkujen yhdistettä $H_{ij}^\ell = \bigcup \mathcal{P}_{ij}^\ell$.

(ii) Jos $\sigma(ij) < \ell$, niin joukolla $\mathcal{P}_{ij}^\ell$ on täsmälleen yksi alkio P_{ij} ja polku P_{ij} ei kohtaa mitään joukon $\mathcal{P}_{ij}^\ell$ polkua, kun $ij \neq st$.

(iii) Jos $\sigma(ij) = \ell$, niin $\left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right| = k/c^{2\ell}$.

(iv) Jos $\sigma(ij) > \ell$, niin $\left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right| = k/c^{2\ell+1}$.

(v) Jos $\ell = \sigma(pq) < \sigma(ij)$, niin millekään särmälle $e \in E\left(H_{ij}^\ell\right) \setminus E\left(H_{pq}^\ell\right)$ ei ole $k/c^{2\ell+1}$ kappaletta erillisiä $A_i - A_j$-polkuja graafissa $\left(H_{pq}^\ell \cup H_{ij}^\ell\right) - e$.

Huomataan, että ehdon (iv) perusteella ehdossa (v) tarkasteltavat polut ovat olemassa polussa H_{ij}^ℓ. Ehdon (v) tarkoituksena on pakottaa kyseiset polut uudelleen käyttämään särmiä polusta H_{pq}^ℓ aina kun mahdollista, käyttäen uusia särmiä $e \notin H_{pq}^\ell$ vain tarvittaessa. Lisäksi huomataan, että koska $\sigma(ij) < \binom{m}{2}$ bijektion σ määritelmän perusteella, niin ehdoista (iii) ja (iv) seuraa, että $\left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right| \geq c^2$, kun $\sigma(ij) \geq \ell$.

Jos $\ell^* = \binom{m}{2}$, niin ehtojen (i) ja (ii) perusteella graafilla G on minori K^m, jonka oksajoukot ovat $A_1, \ldots, A_m$. Oletetaan sitten, että $\ell^* < \binom{m}{2}$. Osoitetaan, että $\ell^* > 0$. Olkoon $pq = \sigma^{-1}(0)$ ja asetetaan $\mathcal{P}_{pq}^0 = \mathcal{P}_{pq}$. Joukon $\mathcal{P}_{ij}^0$ määrittämiseksi, kun $\sigma(ij) > 0$, asetetaan $H_{ij} = \bigcup \mathcal{P}_{ij}$. Lisäksi olkoon $F \subseteq E(H_{ij}) \setminus E\left(H_{pq}^0\right)$ sellainen maksimaalinen joukko, että graafissa $\left(H_{pq}^0 \cup H_{ij}\right) - F$ on vielä k/c kappaletta erillisiä $A_i - A_j$-polkuja, sekä olkoon

$\mathcal{P}_{ij}^0$ sellainen joukko polkuja. Koska graafin $A_p \cup A_q$ solmujen aste graafissa $H_{pq}^0 \cup H_{ij}$ on yksi, elleivät ne ole myös graafissa $A_i \cup A_j$, niin näillä poluilla ei ole sisäsolmuja graafissa A. Tällöin valitut joukot $\mathcal{P}_{ij}^0$ toteuttavat ehdot (i)-(v), kun $\ell = 0$.

Tarkastellaan nyt tilannetta, kun $\ell = \ell^* - 1$. Tällöin ehdot (i)-(v) täyttyvät luvulle ℓ, mutta eivät luvulle $\ell + 1$. Olkoon $pq = \sigma^{-1}(\ell)$. Olkoon joukossa $\mathcal{Q}_{ij}$ jotkin $\left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right|/c$ kappaletta polkuja joukosta $\mathcal{P}_{ij}^\ell$ kaikilla indekseillä ij, kun $\sigma(ij) > \ell$. Jos joukko $\mathcal{P}_{pq}^\ell$ sisältää sellaisen polun P, joka väistää joukon $\mathcal{Q}_{ij}$, niin voidaan määritellä joukko $\mathcal{P}_{pq}^{\ell+1}$ kaikille indekseille ij, mistä seuraa ristiriita, kuten aiemminkin. Olkoon siis $st = \sigma^{-1}(\ell+1)$ ja asetetaan $\mathcal{P}_{st}^{\ell+1} = \mathcal{Q}_{st}$. Kun $\sigma(ij) > \ell + 1$, niin merkitään, että $H_{ij} = \bigcup \mathcal{Q}_{ij}$. Olkoon $F \subseteq E(H_{ij}) \setminus E\left(H_{st}^{\ell+1}\right)$ sellainen maksimaalinen joukko, että graafissa $\left(H_{st}^{\ell+1} \cup H_{ij}\right) - F$ on vielä vähintään $\left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right|/c^2$ kappaletta erillisiä $A_i - A_j$-polkuja, sekä olkoon $\mathcal{P}_{ij}^{\ell+1}$ sellainen joukko polkuja. Asettamalla, että $\mathcal{P}_{pq}^{\ell+1} = \{P\}$ ja $\mathcal{P}_{ij}^{\ell+1} = \mathcal{P}_{ij}^\ell = \left\{P_{ij}^\ell\right\}$, kun $\sigma(ij) < \ell$, saadaan joukkojen $\mathcal{P}_{ij}^{\ell+1}$ perhe, joka on ristiriidassa luvun ℓ^* maksimaalisuuden kanssa.

Näin ollen jokaista polkua $P \in \mathcal{P}_{pq}^\ell$ kohti on olemassa sellainen pari ij, jolle pätee $\sigma(ij) > \ell$, että polku P väistää vähemmän kuin $\left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right|/c$ kappaletta joukon $\mathcal{P}_{ij}^\ell$ poluista. Joillekin $\left\lceil \left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right| / \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \right\rceil$ kappaleelle näistä poluista P tämä pari ij on sama. Olkoon nyt $\mathcal{P}$ niiden polkujen P joukko ja pidetään paria ij kiinnitettynä. Huomataan, että ehtojen (iii) ja (iv) perusteella

$$|\mathcal{P}| \geq \left|\mathcal{P}_{pq}^\ell\right| / \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} = c\left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right| / \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Etsitään, kuten lauseessa 3.22, sellaiset joukot $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{pq}^\ell$ ja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}_{ij}^\ell$, että

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}| &\geq \frac{1}{2}|\mathcal{P}| \ \left(\geq \frac{c}{m^2}\left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right|\right) \\ |\mathcal{H}| &= r^2 \end{aligned}$$

ja jokainen joukon $\mathcal{V}$ polku kohtaa joukon $\mathcal{H}$ jokaisen polun. Tarkistetaan, ettei sillä kaksijakoisella graafilla, jonka solmujoukkoja ovat $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{P}_{ij}^\ell$, ole liikaa särmiä. Tässä kaksijakoisessa graafissa polut $P \in \mathcal{P}$ ja $Q \in \mathcal{P}_{ij}^\ell$ ovat yhteydessä aina, kun $P \cap Q\emptyset$. Koska jokaisessa polussa $P \in \mathcal{P}$ on joukon $\mathcal{P}$ määritelmän mukaan vähemmän kuin $\left|\mathcal{P}_{ij}^\ell\right|/c$ solmua, niin tässä graafissa on korkeintaan

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}|\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|/c &\leq |\mathcal{P}|\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|/6r^2 \\
&\leq \lfloor |\mathcal{P}|/2 \rfloor \left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|/2r^2 \\
&\leq \lfloor |\mathcal{P}|/2 \rfloor \left(\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|/r^2 - 1\right) \\
&= \left(|\mathcal{P}| - \lceil |\mathcal{P}|/2 \rceil\right)\left(\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right| - r^2\right)/r^2
\end{aligned}$$

särmää, mitä vaadittiinkin. Tällöin joukot $\mathcal{V}$ ja $\mathcal{H}$ ovat olemassa kuten väitettiin.

Vaikka kaikki joukon $\mathcal{V}$ polut kohtaavat joukon $\mathcal{H}$ polut, ne eivät välttämättä risteä kuten lauseessa 3.21. Jotta saadaan jaettua joukon $\mathcal{H}$ polut osiin ja valittua joukon $\mathcal{V}$ polut, jotka ne kohtaavat oikeissa osissa, valitaan ensin jokin polku $Q \in \mathcal{H}$ mittatikuksi seuraavasti.

(i) Jaetaan polku Q osiin, jotka kohtaavat useita joukon $\mathcal{V}$ polkuja.

(ii) Valitaan näistä pystysuuntaisista poluista 'risteämätön' osajoukko $V_1, \ldots, V_d$, yksi kustakin osasta.

(iii) Lopuksi jaetaan muut vaakatasoiset polut indusoiduiksi osiksi.

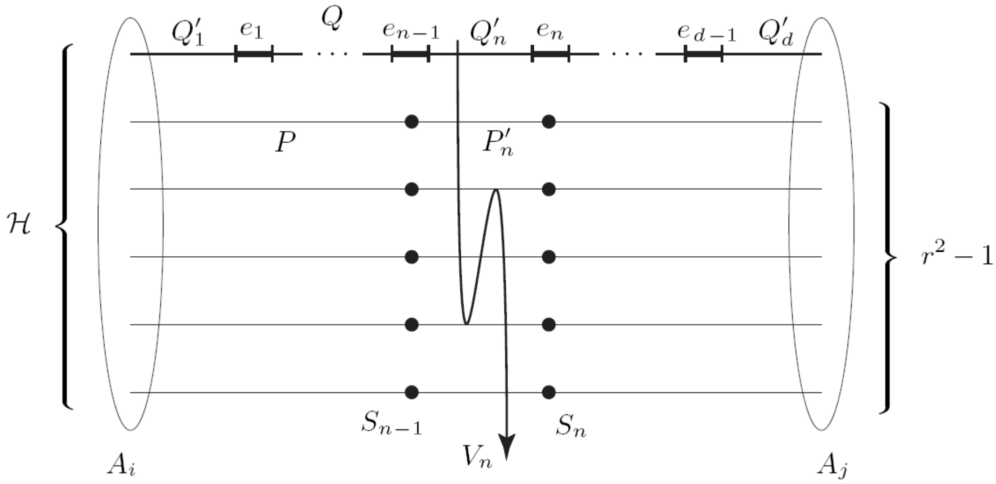
Joten valitaan polku $Q \in \mathcal{H}$ ja asetetaan

$$d = \left\lfloor \sqrt{c}/m \right\rfloor = \left\lfloor r^{2r+4}/m \right\rfloor \geq r^{2r+2}.$$

Huomataan, että $|\mathcal{V}| \geq (c/m^2)\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right| \geq d^2\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|$.

Olkoon e_n sellainen polun Q ensimmäinen särmä, että graafin $Q - e_n$ ensimmäinen komponentti Q_n kohtaa vähintään $nd\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|$ eri polkua joukosta $\mathcal{V}$, luvuilla $n = 1, 2, \ldots, d-1$. Lisäksi vaaditaan, että e_n ei ole polun H_{pq}^{ℓ} särmä. Kun jokin särmä, joka ei kuulu polkuun H_{pq}^{ℓ}, separoi jotkin graafin Q solmut, jotka ovat eri poluilla joukossa $\mathcal{V}$, niin molemmat näistä komponenteista Q_n kohtaavat täsmälleen $nd\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|$ kappaletta joukon $\mathcal{V}$ poluista. Asetetaan, että $Q_0 = \emptyset$ ja $Q_d = Q$. Koska $|\mathcal{V}| \geq d^2\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|$, niin tällöin graafi Q on jaettu d kappaleeseen peräkkäiseen erilliseen osaan $Q_n' = Q_n - Q_{n-1}$ $(n = 1, \ldots, d)$, joista jokainen kohtaa vähintään $d\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|$ polkua joukosta $\mathcal{V}$.

Lauseesta 3.14 sekä ehdoista (iv) ja (v) seuraa, että graafilla $H_{pq}^{\ell} \cup H_{ij}^{\ell}$ on sellainen joukko S_n, missä on $\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right| - 1$ kappaletta solmuja, että graafissa $\left(H_{pq}^{\ell} \cup H_{ij}^{\ell}\right) - e_n - S_n$ ei ole polkua joukosta A_i joukkoon A_j kaikilla luvuilla $n = 1, \ldots, d-1$. Merkitään joukolla S kaikkien tällaisten joukkojen S_n yhdistettä. Tällöin $|S| < d\left|\mathcal{P}_{ij}^{\ell}\right|$, joten jokainen osa Q_n' kohtaa vähintään yhden sellaisen polun $V_n \in \mathcal{V}$, joka välttää joukon S.



Kuva 18: Polku V_n kohtaa jokaisen vaakasuuntaisen polun, mutta välttää joukon S.

Selvästi jokainen joukko S_n on sellainen valikoima solmuja, että niissä on täsmälleen yksi solmu x jokaisesta polusta $P \in \mathcal{P}_{ij}^{\ell} \setminus \{Q\}$. Olkoon graafin $P - x$ ensimmäinen komponentti P_n, ja asetetaan, että $P_0 = \emptyset$ ja $P_d = P$. Olkoon nyt $P_n' = P_n - P_{n-1}$ kaikilla luvuilla $n = 1, \ldots, d$. Joukkojen S_n separointiominaisuudesta seuraa nyt, että $V_n \cap P \subseteq P_n'$ luvuilla $n = 1, \ldots, d$. Näin ollen erityisesti $P_n' \neq \emptyset$ eli $P_{n-1} \subset P_n$. Polku V_n ei voi kohdata polkua P_{n-1}, koska silloin polku $P_{n-1} \cup V_n \cup (Q - Q_{n-1})$ sisältäisi $A_i - A_j$-polun polulla $\left(H_{pq}^{\ell} \cup H_{ij}^{\ell}\right) - e_{n-1} - S_{n-1}$. Samoin, kun tarkastellaan joukkoa S_n, polku V_n ei voi kohdata polkua $P - P_n$. Näin ollen polku V_n kohtaa jokaisen polun $P \in \mathcal{H} \setminus \{Q\}$ täsmälleen sen n:nnessä osassa P_n'. Nyt sovelletaan lausetta 3.21 polkusysteemeihin $\mathcal{H} \setminus \{Q\}$ ja $\{V_1, \ldots, V_d\}$, mikä tuottaa halutun ruudukkominorin. □

Lause 3.24 (Robertson & Seymour 1986)**.** *Kun graafi H on annettu, niin graafeilla, joilla ei ole graafia H minorinaan, on rajoitettu puuleveys, jos ja vain jos graafi H on tasograafi.*

Todistus (vrt. [3, s. 328])*.* Tämän lauseen todistamiseksi osoitetaan, että kieltämällä minkä tahansa tasograafin H minorius, rajoitetaan tarkasteltavan graafin puuleveyttä. Riittää jopa osoittaa, että tämä pätee siinä erikoistapauksessa, kun graafi H on ruudukko, koska jokainen tasograafi on jonkin ruudukon minori. Näin ollen tämä lause seuraa suoraan lauseesta 3.23. □

3.5 Minorilause

Määritelmä 3.21. Graafin G puuhajotelman $\left(T, (V_t)_{t\in T}\right)$ *vartaloita* ovat ne graafit H_t $(t \in T)$, jotka on saatu graafista $G[V_t]$ lisäämällä siihen kaikki sellaiset särmät xy, että $x, y \in V_t \cap V_{t'}$ joillakin solmun t naapureilla t' puussa T.

Määritelmä 3.22. Graafin G *lineaarinen hajotelma* on solmujoukkojen perhe $(V_i)_{i\in I}$, joka on indeksoitu sellaisella lineaarisella järjestyksellä I, että $\bigcup_{i\in I} V_i = V(G)$ ja $V_i \cap V_k \subseteq V_j$ aina kun $i < j < k$. Kun graafi G on äärellinen, niin niin tämä on vain puuhajotelma, jonka puu onkin polku. Tällöin sitä sanotaan *polkuhajotelmaksi.*

Määritelmä 3.23. Olkoon S' pinnan S sellainen aliavaruus, joka on saatu poistamalla äärellinen määrä erillisien suljettujen kiekkojen sisäpuolia, joita rajaavat piirit ovat $C_1, \ldots, C_k$. Tämä avaruus määritellään homomorfismiksi pinnalla S ja luvulla k, ja se merkitään $S - k$. Jokainen piiri C_i on jatkuvan injektiivisen kuvauksen $f_i : [0,1] \to S'$ kuva, mutta $f_i(0) = f_i(1)$. Nyt piirit $C_1, \ldots, C_k$ ovat aliavaruuden S' *reunuksia* ja pisteet $f_1(0), \ldots, f_k(0)$ niiden *juuria.*

Huomautus. Muut reunuksien C_i pisteet ovat kuvauksen f_i lineaarisesti järjestämiä välin $(0,1)$ kuvia. Kun myöhemmin käytetään reunuksia lineaaristen hajotelmien indeksijoukkoina, niin silloin viitataan näihin lineaarisiin järjestyksiin.

Määritelmä 3.24. Olkoot H graafi, S pinta ja luku $k \in \mathbb{N}$. Sanotaan, että graafi H on *lähes k-upotettava* pinnassa S, jos sillä on sellainen korkeintaan k solmua sisältävä joukko X, että $H - X$ voidaan esittää muodossa $H_0 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_k$, ja seuraavat ehdot täyttyvät.

(N1) On olemassa upotus $\sigma : H_0 \hookrightarrow S - k$, joka kuvaa vain solmuja reunuksiksi eikä yhtään solmua reunuksen juureksi.

(N2) Graafit $H_1, \ldots, H_k$ ovat pareittain erillisiä ja $H_0 \cap H_i = \sigma^{-1}(C_i)$ kaikilla luvuilla i.

(N3) Jokaisella graafilla H_i, kun $i \geq 1$, on sellainen lineaarinen hajotelma $(V_z^i)_{z\in C_i \cap \sigma(H_0)}$, jonka leveys on korkeintaan k, että $z \in V_z^i$ kaikilla solmuilla z.

Seuraava on rakennelause graafeille, joilla ei ole graafia K^n minorinaan. Sen jälkeen esitellään *minorilause*, jota kohti tämä tutkielma on kulkenut. Näiden lauseiden yksityiskohtaiset todistukset sivuutetaan ymmärrettävästä syystä: Neil Robertson ja Paul Seymour esittelivät ne kaksikymmenosaisessa julkaisusarjassaan, joka käsittää kaikkiaan yli 500 sivua. Minorilauseen todistuksesta esitellään kuitenkin hahmotelma.

Lause 3.25 (Robertson & Seymour 2003)**.** *Jokaiselle luvulle $n \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen luku $k \in \mathbb{N}$, että jokaisella graafilla G, jolla ei ole minorinaan graafia K^n, on puuhajotelma, jonka vartalot ovat lähes k-upotettavia pinnassa, jossa graafi K^n ei ole upotettava.*

Lause 3.26 (Robertson & Seymour 1986-2004)**.** *Äärelliset graafit ovat kvasihyvin järjestettyjä minorirelaation $\preccurlyeq$ suhteen.*

Todistuksen hahmotelma (vrt. [3, s. 347]). Lauseen osoittamiseksi täytyy todistaa, että jokainen ääretön jono

$$G_0, G_1, G_2, \ldots$$

äärellisiä graafeja sisältää hyvän parin, eli kaksi graafia joille pätee, että $G_i \preccurlyeq G_j$, kun $i < j$. Voidaan olettaa, että $G_0 \not\preccurlyeq G_i$ kaikilla luvuilla $i \geq 1$, koska graafi G_0 muodostaa hyvän parin minkä tahansa graafin G_i kanssa, jonka minori se on. Näin ollen graafit $G_1, G_2, \ldots$ ovat joukossa $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(G_0)$ ja voidaan käyttää näille graafeille tavallista rakennetta hyvän parin etsimisessä.

On jo todettu, kuinka tämä toimii, kun G_0 on tasograafi. Silloin lauseen 3.24 mukaan graafeilla joukossa $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(G_0)$ on rajoitettu puuleveys ja ne ovat siksi kvasihyvin järjestettyjä lauseen 3.12 perusteella. Koska $G_0 \preccurlyeq K^n$, kun asetetaan $n = |G_0|$, niin voidaan olettaa, että $K^n \not\preccurlyeq G_i$ kaikilla luvuilla $i \geq 1$. Näin ollen riittää tarkastella sellaisia tilanteita, kun $G_0 = K^n$.

Taas graafit joukossa $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ voidaan kuvata puuhajotelmillaan ja niiden puurakenne auttaa, kuten Kruskalin lauseen (3.5) todistuksessa, kvasihyvän järjestyksen osoittamisessa. Näiden puuhajotelmien osia ei enää rajoita järjestyksen ehdot, mutta niitä rajoitetaan monimutkaisemmilla rakenteellisilla ehdoilla. Karkeasti sanottuna, jokaista lukua n kohti on olemassa sellainen äärellinen pintajoukko $\mathcal{S}$, että jokaisella graafilla, jolla ei ole graafia K^n minorina, on puuhajotelma sellaisiin osiin, jotka ovat 'lähes' upotettavia jossakin pinnassa $S \in \mathcal{S}$ kuten lauseessa 3.25. Nyt lauseen 3.12, näin ollen Kruskalin lauseen (3.5), perusteella riittää todistaa, että näiden puuhajotelmien kaikkien osien joukko on kvasihyvin järjestetty, koska tällöin ne graafit, jotka näiksi osiksi hajotetaan, ovat myös kvasihyvin järjestettyjä. Koska joukko $\mathcal{S}$ on äärellinen, niin jokaisella äärettömällä jonolla näitä osia, on ääretön osajono, jonka kaikki jäsenet ovat (lähes) upotettavia samassa pinnassa $S \in \mathcal{S}$. Näin ollen täytyy vain osoittaa, kun pinta S on annettu, että kaikki pinnassa S upotettavat graafit ovat kvasihyvin jäjestettyjä minorirelaation suhteen.

Tämä osoitetaan induktiolla pinnan S Eulerin genuksen suhteen. Jos $H_0, H_1, H_2, \ldots$ on ääretön jono pinnassa S upotettavia graafeja, niin voidaan olettaa, ettei yhdelläkään graafilla $H_1, H_2, \ldots$ ole graafia H_0 minorinaan. Jos $S = S^2$, niin tilanne on se, että H_0 on tasograafi, joten induktio alkaa. Induktioaskelta varten oletetaan, että $S \neq S^2$. Nyt graafin H_0 minoriuden poissulkeminen rajoittaa graafien $H_1, H_2, \ldots$ rakennetta topologisesti. Jokaisella graafilla H_i, kun $i \geq 1$, on upotus pinnassa S, joka kohtaa jonkin sellaisen piirin $C_i \subseteq S$, joka ei rajoita mitään pinnan S kiekkoa enempää kuin rajoitetun määrän solmuja eikä yhtään särmää. Olkoon se solmujoukko $X_i \subseteq V(H_i)$. Luvun $|X_i|$ raja riippuu graafista H_0 mutta ei graafista H_i. Leikkaamalla pitkin reunuksia C_i ja peittämällä reikä tai reiät saadaan yksi tai kaksi uutta pintaa, joiden Eulerin genus on pienempi. Jos leikkaus tuottaa vain yhden uuden pinnan S_i, niin graafin $H_i - X_i$ upotus käy silti graafin H_i lähes-upotuksesta pinnassa S_i, koska X_i on pieni. Jos näin käy äärettömän monella luvulla i, niin silloin äärettömän monta pintaa S_i ovat myös samoja, ja induktio-oletuksen perusteella saadaan vastaavien graafien H_i joukosta hyvä pari. Jos toisaalta saadaan kaksi pintaa S_i' ja S_i'' (yleisyyttä rajoittamatta ne voivat olla samoja) äärettömän monella luvulla i, niin graafi H_i näin ollen jakaantuu aligraafeiksi H_i' ja H_i'', jotka on upotettu näissä pinnoissa, kun $V(H_i' \cap H_i'') = X_i$. Kaikkien tällaisten aligraafien joukko on taas kvasihyvin järjestetty induktio-oletuksen perusteella, ja näin ollen ovat myös parit (H_i', H_i'') lauseen 3.4 perusteella. Sitten käytetään sen lauseen tarkennusta, joka ei ainoastaan ota huomioon itse graafeja H_i' ja H_i'' vaan myös sen, kuinka joukko X_i niissä on. Näin saadaan lopulta indeksit i ja j, joilla $H_i' \preccurlyeq H_j'$ ja $H_i'' \preccurlyeq H_j''$. Nämä indeksit ovat lisäksi sellaisia, että minoriupotukset laajenevat halutuiksi graafin H_i minoriupotuksiksi graafissa H_j, mikä näin saattaa loppuun minorilauseen todistuksen! $\square$

Minorilause ei laajene graafeille, joiden mahtavuus on mielivaltainen, mutta se saattaa laajeta numeroituville graafeille. Se, että tapahtuuko näin vai ei, osoittautuu vaikeaksi ongelmaksi. Ongelma voi liittyä seuraavaan otaksumaan, josta minorilause äärellisille graafeille seuraa. Se olisikin tämän tutkielman luonnollinen ja mielenkiintoinen jatke.

Määritelmä 3.25. Graafi H on graafin G *aito minori*, jos graafi G sisältää sellaisen graafin luokasta $M(H)$, jolla on vähintään yksi epätriviaali oksajoukko.

Itseminoriotaksuma (Seymour 1980-luku)**.** Jokainen numeroituvasti ääretön graafi on itsensä aito minori.

Viitteet

[1] Anderson, Sabra S. *Graph Theory and Finite Combinatorics*, Markham Publishing Company 1970

[2] Biggs, Norman L. ja Lloyd, E. Keith ja Wilson, Robin J. *Graph Theory 1736-1936*, korjattu uusintapainos 1977, Oxford University Press 1976. ISBN 0-19-853901-0

[3] Diestel, Reinhard *Graph Theory*, Electronic edition 2005, Springer-Verlag Heidelberg, New York 1997, 2000, 2005. URL http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/GraphTheoryIII.pdf

[4] Gould, Ronald *Graph Theory*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1988. ISBN 3-8053-6030-1

[5] Harary, Frank *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[6] Marshall, Cliffrd W. *Applied Graph Theory*, John Wiley and Sons, Inc. 1971. ISBN 0-471-57300-0

[7] Koivisto, Pertti & Niemistö, Riitta *Graafiteoriaa*, 1. painos, Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto, B54, marraskuu 2001, ISBN 951-44-5249-6, ISSN 1456-3177