TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Petteri Laakkonen

Lineaaristen systeemien siirtonollat ja navat

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Toukokuu 2008

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LAAKKONEN, PETTERI: Lineaaristen systeemien siirtonollat ja navat

Pro gradu -tutkielma, 82 s., 15 liites.

Matematiikka

Toukokuu 2008

Tiivistelmä

Tässä työssä käsitellään lineaaristen systeemien siirtonollia ja napoja, jotka määritellään siirtofunktion nollina ja napoina. Siirtonollat ja navat ovat keskeinen käsite säätöteoriassa. Ne ovat keskeisessä asemassa esimerkiksi irtikytkemisongelmassa ja aiheuttavat tiettyjä rajoituksia mallien suunnittelussa.

Tässä työssä keskitytään siirtonollien ja napojen määrittelyyn. Työssä käsitellään sekä äärellisiä että äärettömiä siirtonollia ja napoja. Työssä esitellään varsin tarkasti äärellisulotteisten systeemien siirtonollat ja navat, jotka saadaan määriteltyä rationaalimatriisin nollina ja napoina. Siirtonollien ja napojen käsitteitä pyritään tämän jälkeen yleistämään ääretönulotteisille systeemeille. Työssä esitellään ääretönulotteisten systeemien siirtonollien ja napojen määritelmä systeemeille, joilla on äärellinen määrä sisäänmenoja ja ulostuloja. Määritelmää verrataan jo ennestään kirjallisuudessa esiintyviin määritelmiin.

Siirtonollien merkitystä säätöteoriassa esitellään muutamin esimerkein. Lisäksi tarkastellaan lähemmin siirtonollien ja napojen yhteyttä juuriuraan. Äärellisulotteisten systeemien siirtonollien ja napojen tapauksessa tunnetun yhteyden huomataan olevan voimassa myös tietyissä ääretönulotteisissa tapauksissa.

Asiasanat: Siirtonolla, napa, nolla äärettömyydessä, napa äärettömyydessä, lineaarinen systeemi, siirtofunktion rakenne, juuriura

Sisältö

1 Johdanto **1**
1.1 Taustaa 1
1.2 Tutkielman tavoitteet ja rakenne 3

2 Matriisirenkaista **4**
2.1 Unimodulaarisuus, suurin yhteinen tekijä ja matriisihajotelmat 4
2.2 Smith-McMillanin muoto 7

3 Rationaalimatriisin nollat ja navat **12**
3.1 Äärelliset nollat ja navat 12
3.1.1 Minorit ja rakenneindeksit 15
3.1.2 Äärelliset osoittajat ja nimittäjät 17
3.1.3 Similaarisuus ja rakenneindeksit 18
3.2 Nollat ja navat äärettömyydessä 20
3.2.1 Äärellisen ja äärettömän rakenteen yhteys 23

4 Lineaarisen systeemin siirtonollat ja navat **26**
4.1 Äärellisulotteisen systeemin nollat ja navat 28
4.1.1 Systeemimatriisin ja nollien yhteys 30
4.1.2 Takaisinkytkennän vaikutus nolliin 33
4.2 Ääretönulotteisen systeemin nollat ja navat 36
4.2.1 Callier-Desoer- algebra ja äärelliset nollat 42
4.2.2 Ääretönulotteisen systeemin äärettömät nollat 44
4.2.3 Yleisemmät ääretönulotteiset systeemit 46
4.3 Esimerkkejä lineaarisen systeemin nollien merkityksestä säätöteoriassa 49

5 Juuriura **55**
5.1 Juuriuran määrittäminen 55
5.2 Juuriuran yhteys nolliin ja napoihin 63
5.3 Ääretönulotteisten systeemien juuriura 74

6 Johtopäätökset ja jatkotutkimus **76**

Lähteet **78**

A Algebraa **83**
A.1 Algebrallisia struktuureita 83
A.1.1 Eukleideen alue $\mathbb{C}[s]$ 87
A.1.2 Eukleideen alue $\mathbb{C}_{pr}(s)$ 88

B Lineaarialgebraa **90**

C Newtonin diagrammi ja alaraja **92**

Merkinnät ja lyhenteet

Merkintä	Merkitys	Sivu
$\hat{\mathscr{B}}(\beta)$	Callier-Desoer -luokka	43
$\text{blockdiag}\,(\cdot)$	Blokkidiagonaalimatriisi	
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko	
$\mathbb{C}_{\beta+}$	Oikeapuolitaso $\mathbb{C}_{\beta+} = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \beta\}$	27
$\mathbb{C}_\infty$	Laajennettu kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	
$\mathbb{C}[s]$	Kompleksikertoimisten polynomien muodostama rengas	
$\mathbb{C}(s)$	Kompleksikertoimisten rationaalifunktioiden muodostama kunta	
$\mathbb{C}_{pr}(s)$	Aitojen kompleksikertoimisten rationaalifunktioiden joukko	21
$\text{card}\,\{S\}$	Äärellisen joukon S alkioiden lukumäärä	
$\deg(p(s))$	Polynomifunktion $p(s)$ aste	
$\text{diag}\,(\cdot)$	Diagonaalimatriisi	
$\mathbf{F}$	Kunta $\mathbf{F} = (R, +, \cdot)$	
$\hat{f}$	Funktion f Laplace-muunnos	27
$\mathscr{H}_{s_0,\epsilon}(s)$	Pisteen s_0 ϵ-säteisessä ympäristössä analyyttisten funktioiden joukko	37
$\mathscr{L}\,(V, W)$	Lineaaristen operaattoreiden joukko avaruudelta V avaruudelle W	
$\mathscr{L}\,(V)$	Lineaaristen operaattoreiden joukko avaruudelta V itselleen	
$\mathbf{L}_1(0, \infty)$	Lebesgue-mitallisten funktioiden joukko, joilla $\int_0^\infty \lvert f(t)\rvert dt < \infty$	42
$\mathscr{M}(\mathbf{R})$	Renkaan $\mathbf{R}$ matriisien joukko	

Merkintä	Merkitys	Sivu
$\mathscr{N}(A)$	Matriisin A ydin	
$\operatorname{nrank}(G(s))$	Rationaalimatriisin $G(s)$ normaaliaste	13
$\mathscr{O}\left((s-s_0)^k\right)$	Matriisi, joka voidaan esittää pisteen s_0 ympäristössä sarjana $\sum_{i=k}^{\infty}(s-s_0)^i A_i$	37
$\mathscr{O}_-\left(s^k\right)$	Matriisi, joka voidaan suurilla muuttujan arvoilla esittää sarjana $\sum_{i=k}^{\infty}(s-s_0)^i A_i$	37
$O\left((s-s_0)^k\right)$	Funktio, joka voidaan esittää pisteen s_0 ympäristössä sarjana $\sum_{i=k}^{\infty}(s-s_0)^i a_i$	37
$O_-\left(s^k\right)$	Funktio, joka voidaan suurilla muuttujan arvoilla esittää sarjana $\sum_{i=k}^{\infty}(s-s_0)^i a_i$	37
$q_i(s_0)$	Matriisin i. rakenneindeksi pisteessä s_0	14
$q_i(\infty)$	Matriisin i. rakenneindeksi äärettömyydessä	23
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko	
$\mathbb{R}_+$	Ei-negatiivisten reaalilukujen joukko	
$\mathbf{R}$	Rengas $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$	
$\overline{\mathbf{R}}$	Renkaan $\mathbf{R}$ virittämä osamääräkunta	
$S_G(s)$	Rationaalimatriisin $G(s)$ Smith-McMillanin äärellinen muoto	13
$S_G^{\infty}(s)$	Rationaalimatriisin $G(s)$ Smith-McMillanin muoto äärettömyydessä	21
$\mathbb{Z}$	Kokonaislukujen joukko	
$\mathbb{Z}_+$	Ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko	
$\delta_{s_0}(\cdot)$	s_0-valuaatio	13
$\delta_{\infty}(\cdot)$	∞-valuaatio	21
$\rho(A)$	Operaattorin A resolventtijoukko	
$\sigma(A)$	Operaattorin A spektri	
$\Sigma(A, B, C, D)$	Lineaarinen systeemi	26
$\nu_{s_0}^i(G(s))$	Minimi arvo s_0-valuaatiolle, yli matriisin $G(s)$ $i\times i$-minoreiden	15
$\nu_{\infty}^i(G(s))$	Minimi arvo ∞-valuaatiolle, yli matriisin $G(s)$ $i\times i$-minoreiden	24
$\lvert A\rvert_{\mathbf{r},\mathbf{c}}^i$	Matriisin A $i \times i$ minori	7
mimo	Useita sisäänmenoja ja ulostuloja	
siso	Yksi sisäänmeno ja ulostulo	

Luku 1

Johdanto

1.1 Taustaa

Nollien ja nollakohtien käsitteillä on hyvin keskeinen merkitys eri matematiikan osa-alueilla. Jos tarkastellaan esimerkiksi kompleksisia rationaalifunktioita, niin funktion osoittajan nollakohdassa rationaalifunktion arvo on nolla, kun taas nimittäjän nollakohtaa lähestyttäessä rationaalifunktio saa itseisarvoltaan mielivaltaisen suuria arvoja. Jos siis jokin muuttuja y saadaan rajoitetusta nollasta eroavasta muuttujasta rationaalifunktiolla kerrottuna, niin muuttuja y on nolla rationaalifunktion osoittajan nollakohdassa ja saa mielivaltaisen suuria arvoja nimittäjän nollakohdan läheisyydessä. Yksinkertaistettuna tätä tarkoitetaan lineaarisen systeemin siirtonollilla ja navoilla, joita tässä työssä tutkitaan. Useamman sisäänmenon ja ulostulon tapauksessa tilanne ei tietenkään ole aivan näin suoraviivainen. Taajuustasossa siirtonollat nollaavat tietyn sisäänmenon ja navat taas aiheuttavat ulostulossa mielivaltaisen suuria arvoja.

Lineaariset systeemit ja niiden siirtonollat ja navat ovat tärkeässä asemassa monissa säätöteorian ongelmissa. Erityisesti kompleksitason imaginaariakselilla ja sen oikealla puolella sijaitsevat siirtonollat aiheuttavat monia hankaluuksia, kuten artikkeleista [19, 11, 23] voidaan todeta. Lineaarisen systeemin äärettömät siirtonollat puolestaan ovat keskeisessä asemassa irtikytkemisongelmassa [9, 6, 28], ja mallien sovituksessa [24]. Lisäksi esimerkiksi artikkelissa [2] todetaan äärellisillä ja äärettömillä nollilla olevan läheinen yhteys juuriuran kanssa, joka on tunnettu säätöteorian työkalu.

Kun klassisia siso-systeemien (systeemi, jolla on yksi sisäänmeno ja ulos-

tulo) tuloksia alettiin yleistää mimo-systeemeille (systeemi, jolla on useita sisäänmenoja ja ulostuloja), syntyi myös tarve yleistää rationaalifunktioiden nollien ja napojen käsitteet rationaalimatriiseille. Tiettävästi ensimmäiset määritelmät lineaarisen mimo-systeemin äärellisille nollille antoi H. H. Rosenbrock kirjassaan [37] vuonna 1970. Tämän jälkeen äärellisulotteisten lineaaristen systeemien nollia tutkittiin intensiivisesti 1980-luvun puoleenväliin saakka. Erilaisten ongelmien yhteydessä syntyi erilaisia nollien määritelmiä, mikä johti nollan käsitteen moniselitteisyyteen ja kirjallisuuden terminologian epäyhtenäisyyteen. Nykyään terminologia on suurelta osin yhtenäistä. Osaltaan tähän ovat vaikuttaneet tutkielmat [29] ja [38] nollien ja napojen tutkimuksen etenemisestä, joista jälkimmäisestä löytyy kattava kirjallisuusluettelo aiheeseen liittyen.

Ääretönulotteisten systeemien siirtonollien tutkimus on ollut vielä varsin vähäistä. Siirtonollan käsitteen yleistykset rajoittuvat lähinnä tapauksiin, joissa lineaarisen systeemin ohjaus- ja mittausavaruudet ovat äärellisdimensionaalisia. Näissä tapauksissa äärellisulotteisten systeemien siirtonollien ja napojen ominaisuuksia on voitu yleistää ääretönulotteiseen tapaukseen. Artikkelissa [34] Pohjolainen määrittelee erään jakautuneen järjestelmän äärelliset siirtonollat juuriuran äärellisinä päätepisteinä ja yhdistää ne systeemioperaattoriin. Artikkelissa [3] Callier, Cheng ja Desoer käsittelevät siirtonollien merkitystä aikatasossa Callier-Desoer -luokassa, jossa siirtonollat on määritelty tietyssä oikeanpuoleisessa puolitasossa jaottomien hajotelmien avulla. Zwart ja Hof käsittelevät ääretönulotteisen siso-systeemin nollien sijaintia artikkelissaan [48]. Kirjassa [7] on koottu varsin kattavasti tuloksia ääretönulotteisten systeemien nollista. On huomattavaa, ettei mikään yllä esitellyistä lähestymistavoista määrittele äärellisten nollien asteita.

Ääretönulotteisten systeemien äärettömiä nollia on käsitelty vielä äärellisiä nolliakin vähemmän kirjallisuudessa. Useissa artikkeleissa on todettu äärettömien nollien tutkimisen olevan vaikeaa, koska siirtofunktio ei välttämättä ole äärettömyydessä analyyttinen, mikä on selkeä ero äärellisulotteisiin systeemeihin verrattuna. Artikkelissa [25] Malabre ja Rabah antavat useita erilaisia yhteneviä luonnehdintoja nollille äärettömyydessä tapauksessa, jossa systeemin operaattorit ovat rajoitettuja ja siirtofunktio äärettömyydessä analyyttinen. Tämän jälkeen Malabre ja Rabah ovat käsitelleet artikkeleissa [26, 27, 28] viiveellisiä systeemeitä, joiden siirtofunktio ei enää ole äärettömyydessä analyyttinen, ja määritelleet kaksi eri rakennetta äärettömyydessä, jotka ovat tietyllä tapaa suunnattuja.

1.2 Tutkielman tavoitteet ja rakenne

Tässä työssä käsitellään lineaaristen systeemien siirtonollia ja napoja. Siirtonollien ja napojen käsitteet esitellään aluksi äärellisulotteisten systeemien tapauksessa, joka kirjallisuudessa on tarkkaan käsitelty. Tätä tietämystä hyväksi käyttäen pyritään siirtonollien käsitettä yleistämään ääretönulotteisten systeemien tapaukseen. Esiteltäviä yleistyksiä vertaillaan muihin kirjallisuudessa jo esiintyviin tuloksiin.

Luvussa 2 esitellään matriisirenkaita. Luvun pääasiallinen tarkoitus on tarjota tarvittavat käsitteet ja työkalut mahdollisimman yleisiä algebrallisia rakenteita käyttäen myöhemmissä luvuissa käytettäväksi.

Luvussa 3 esitellään rationaalimatriisien napojen ja nollien sekä paikallisen rakenteen käsitteet. Nämä käsitteet esitellään sekä äärellisissä pisteissä että äärettömyydessä. Luvussa esitellään myös kuinka paikallinen rakenne saadaan laskettua käyttäen hyväksi minoreita tai Toepliz-matriiseja. Lisäksi yleistetään rationaalifunktion nimittäjän ja osoittajan käsitteet rationaalimatriiseille ja yhdistetään rationaalimatriisin nollat osoittajaan ja navat nimittäjään.

Luvussa 4 esitellään äärellisulotteisten lineaaristen systeemien siirtonollat ja navat käyttäen rationaalifunktion nollia ja napoja. Lisäksi esitellään siirtonollien yhteys esiteltävän systeemimatriisin nolliin sekä joitakin invarianttisuustuloksia. Siirtonollat ja navat esitellään jälleen sekä äärellisissä pisteissä että äärettömyydessä. Tämän jälkeen esitellään siirtonollien ja napojen käsitteet ääretönulotteisille systeemeille. Tässä työssä käytettävä lähestymistapa ei ole ainakaan kirjoittajan tiedon mukaan esiintynyt ennen kirjallisuudessa ääretönulotteisten systeemien yhteydessä. Määriteltyjä käsitteitä verrataan muihin jo kirjallisuudessa esiintyviin tuloksiin. Luvun lopuksi esitellään vielä esimerkein siirtonollien merkitystä säätöteoriassa.

Luvussa 5 esitellään juuriura ja sen yhteys siirtonolliin ja napoihin. Äärellisulotteisten systeemien tapauksessa tunnetun yhteyden huomataan olevan voimassa myös tietyissä ääretönulotteisessa tapauksessa. Myöskään tätä yhteyttä ei kirjoittajan tiedon mukaan tunneta aiemmin ääretönulotteisten systeemien tapauksessa.

Lukijalta oletetaan perustietämystä lineaarialgebrasta ja kompleksianalyysistä. Tarvittavat tiedot lineaarialgebrasta löytyvät kirjasta [35] ja kompleksianalyysistä kirjasta [12]. Tarvittavat algebran käsitteet esitellään liitteessä A. Lukijan olisi hyvä, joskaan ei välttämätöntä, tuntea myös säätöteorian peruskäsitteet. Tarvittavat säätöteorian käsitteet löytyvät kirjasta [7].

Luku 2

Matriisirenkaista

Tässä luvussa esitellään matriisirenkaiden ominaisuuksia ja Smith-McMillanin muoto. Lukijan oletetaan tuntevat algebran peruskäsitteet. Tarvittavat peruskäsitteet on koottu liitteeseen A. Lineaarialgebran perusteet oletetaan tunnetuksi. Perustiedot löytyvät esimerkiksi kirjasta [35].

Merkinnällä $\mathbf{R}^{n\times m}$ tarkoitetaan $n \times m$-matriisien joukkoa, joiden alkiot ovat vaihdannaisesta renkaasta $\mathbf{R}$. Voidaan puhua lyhyesti renkaan $\mathbf{R}$-matriisista, jonka alkiot ovat renkaasta $\mathbf{R}$, mutta jonka dimensiota ei ole kiinnitetty tai sen dimensio on selvä asiayhteydestä. Matriisien laskutoimitukset ja determinantti määritellään kuten reaalisille matriiseille, käyttäen renkaan yhteen- ja kertolaskuja. Tässä luvussa oletetaan myös, että renkaassa $\mathbf{R}$ on ykkösalkio 1, jolloin $n \times n$-identiteettimatriisi määritellään luonnollisesti diagonaalimatriisina $I_n = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$. Identiteettimatriisin dimension kertovaa alaindeksiä ei käytetä, mikäli se on selvää asiayhteydestä. Kaikkien $\mathbf{R}$-matriisien joukkoa, jossa siis dimensiolla ei ole väliä, merkitään $\mathscr{M}(\mathbf{R})$.

2.1 Unimodulaarisuus, suurin yhteinen tekijä ja matriisihajotelmat

Määritelmä 2.1.1 (Unimodulaarisuus)**.** *Matriisi $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on unimodulaarinen yli renkaan $\mathbf{R}$, jos sillä on käänteismatriisi $M^{-1} \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Korostaaksemme rengasta, jonka suhteen unimodulaarisuutta tarkastellaan, voimme puhua $\mathbf{R}$-unimodulaarisesta matriisista.*

Suoraan määritelmän perusteella on helppo todeta, että kahden unimo-

dulaarisen matriisin tulo on unimodulaarinen. Seuraavaksi esitellään lause, joka antaa ekvivalentin ehdon matriisin unimodulaarisuudelle sen determinantin avulla.

Lause 2.1.1. *Matriisi $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on $\mathbf{R}$-unimodulaarinen, jos ja vain jos* $\det(M)$ *on renkaan $\mathbf{R}$ yksikkö.*

Todistus: Todistus on kirjasta [45]. Oletetaan aluksi unimodulaarisuus. Tällöin siis $M^{-1} \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Siis

$$1 = \det(I) = \det(M)\det(M^{-1}) \Rightarrow (\det(M))^{-1} = \det(M^{-1}) \in \mathbf{R},$$

joten $\det(M)$ on renkaan $\mathbf{R}$ yksikkö.

Oletetaan seuraavaksi, että $\det(M)$ on renkaan $\mathbf{R}$ yksikkö. Voidaan osoittaa [45, s.393], että renkaiden tapauksessa matriisin $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja sen adjungoidun matriisin A^{adj} välillä on seuraava yhteys

$$AA^{adj} = A^{adj}A = \det(A)I.$$

Koska adjungoidun matriisin elementit on saatu minoreista etumerkkiä mahdollisesti muuttamalla, niin $M^{adj} \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Siis koska nyt $(\det(M))^{-1} \in \mathbf{R}$, niin $M^{-1} = (\det(M))^{-1}M^{adj} \in \mathbf{R}^{n\times n}$. □

Määritelmä 2.1.2 (Suurin yhteinen tekijä)**.** *Tarkastellaan matriiseja M ja N, joiden elementit ovat renkaasta $\mathbf{R}$ ja joilla on sama määrä m sarakkeita (rivejä). Matriisia $W \in \mathbf{R}^{m\times m}$, jonka determinantti* $\det W \neq 0$*, sanotaan matriisien M ja N yhteiseksi oikean (vasemman) puoleiseksi tekijäksi, jos löytyy sellaiset renkaan $\mathbf{R}$ matriisit $\overline{M}$ ja $\overline{N}$, että*

$$M = \overline{M}W \text{ ja } N = \overline{N}W \qquad (M = W\overline{M} \text{ ja } N = W\overline{N}).$$

Matriisi D on matriisien M ja N suurin yhteinen oikean (vasemman) puoleinen tekijä, mikäli kaikilla yhteisillä tekijöillä W löytyy sellainen renkaan $\mathbf{R}$ matriisi $\overline{W}$, että $W = \overline{W}D$ ($W = D\overline{W}$).

Määritelmä 2.1.3. *Matriisit M ja N, joiden elementit ovat vaihdannaisesta ykkösalkiollisesta renkaasta $\mathbf{R}$ ja joilla on sama määrä sarakkeita (rivejä), ovat oikealta (vasemmalta) jaottomia, jos löytyy sellaiset renkaan $\mathbf{R}$ matriisit X ja Y, että*

$$XM + YN = I \qquad (MX + NY = I).$$

Määritelmä 2.1.4 (Matriisihajotelma)**.** *Olkoon* $\mathbf{R}$ *rengas ja* $\overline{\mathbf{R}}$ *osamääräkunta yli renkaan* $\mathbf{R}$*. Oletetaan, että matriisi* $M \in \overline{\mathbf{R}}^{m\times n}$ *voidaan esittää muodossa*

$$M = ND^{-1} \tag{2.1}$$

missä $N \in \mathbf{R}^{n\times m}$*,* $D \in \mathbf{R}^{m\times m}$*,* $\det(D) \neq 0$ *ja* N *ja* D *ovat oikealta jaottomia. Kutsumme matriisiparia* (N, D) *matriisin* M *oikealta jaottomaksi hajotelmaksi.*

Jos oikealta jaoton hajotelma on olemassa, niin se ei ole yksikäsitteinen. Seuraava lause osoittaa, että kaikki oikealta jaottomat hajotelmat saadaan $\mathbf{R}$-unimodulaarisilla matriiseilla kertomalla.

Lause 2.1.2. *Olkoon* $\mathbf{R}$ *ykkösalkiollinen vaihdannainen rengas ja* $\overline{\mathbf{R}}$ *osamääräkunta yli renkaan* $\mathbf{R}$*. Olkoon* $M \in \overline{\mathbf{R}}^{n\times m}$ *ja olkoon* (N, D) *sen oikealta jaoton hajotelma. Jokainen matriisin* M *oikealta jaoton hajotelma on muotoa* (NU, DU)*, missä* U *on* $\mathbf{R}$*-unimodulaarinen matriisi.*

Todistus: Todistus on kirjasta [45]. Koska U on $\mathbf{R}$-unimodulaarinen, niin sillä on renkaassa käänteismatriisi $U^{-1} \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Koska N ja D ovat oikealta jaottomia, löytyy sellaiset matriisit X ja Y, että

$$XN + YD = I,$$

mistä kertomalla oikealta matriisilla U ja vasemmalta matriisilla U^{-1} saadaan

$$(U^{-1}X)(NU) + (U^{-1}Y)(DU) = I.$$

Koska lisäksi $\det(DU) \neq 0$ ja

$$M = ND^{-1} = (NU)(U^{-1}D^{-1}) = (NU)(DU)^{-1},$$

niin (NU, DU) on myös oikealta jaoton hajotelma.

Oletetaan nyt, että (N_0, D_0) on jokin toinen oikealta jaoton hajotelma, jolloin $\det(D_0) \neq 0$, $M = N_0D_0^{-1}$ ja löytyy sellaiset matriisit X_0 ja Y_0, että

$$X_0N_0 + Y_0D_0 = I,$$

mistä kertomalla oikealta matriisilla $D_0^{-1}D$ saadaan

$$D_0^{-1}D = X_0 \cdot \underbrace{N_0D_0^{-1}}_{=M=ND^{-1}} \cdot D + Y_0D = X_0N + Y_0D \in \mathbf{R}^{n\times n}.$$

Vastaavasti todetaan, että $D^{-1}D_0 \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Matriisi $D_0^{-1}D$ on matriisin $D^{-1}D_0$ käänteismatriisi, joten ne ovat $\mathbf{R}$-unimodulaarisia. Koska $D_0 = D(D^{-1}D_0)$ ja $N_0 = MD_0 = N(D^{-1}D_0)$, niin lause on todistettu. $\square$

Vasemmalta jaoton hajotelma määritellään vastaavalla tavalla kuin oikealta jaoton hajotelma ilmeisin muutoksin. Yllä olevia lauseita vastaavat tulokset pätevät myös tällöin. Voidaan osoittaa, että matriisihajotelma on olemassa aina, jos $\mathbf{R}$ on Bezout'n alue, eli alue, jossa jokainen äärellisen joukon generoima ideaali on pääideaali. Olemassaolon osoitamme Eukleideen alueessa myöhemmin Smith-McMillanin muodon avulla. Voimme siis kirjoittaa Bezout'n alueen matriisin M muodossa $M = N_r D_r^{-1} = D_l^{-1} N_l$. Esitys antaa luonnollisen tavan yleistää osoittajan ja nimittäjän käsite matriiseille. Kutsummekin matriisia N_r (N_l) osoittajaksi ja matriisia D_r (D_l) nimittäjäksi. Tämän määrittely osoittautuu järkeväksi myös yleistettäessä rationaalifunktion nollien ja napojen käsitettä rationaalimatriiseille.

2.2 Smith-McMillanin muoto

Tämän luvun ajan $\mathbf{R}$ tarkoittaa Eukleideen aluetta ja $\overline{\mathbf{R}}$ Eukleideen alueen $\mathbf{R}$ osamääräkuntaa. Tässä esitetyt tulokset ovat voimassa yleisemminkin kaikissa pääideaalialueissa. Jatkossa käytetään Smithin ja Smith-McMillanin muotoa Eukleideen alueissa $\mathbb{R}[s]$ ja $\mathbb{R}(s)$, joten tämän kappaleen tulokset todistetaan vain Eukleideen alueessa, missä on käytettävissä astefunktio, jota voidaan käyttää todistuksissa hyväksi. Smithin muodon todistuksessa polynomi- tai rationaalimatriiseille käytetäänkin yleensä hyväksi astefunktiota, kuten esimerkiksi kirjoissa [17] ja [41].

Olkoon A $n\times m$ matriisi. Merkinnällä $|A|^i_{\mathbf{r},\mathbf{c}}$ tarkoitetaan matriisin A $i\times i$-minoria ($i \leq \min(n,m)$), joka on saatu valitsemalla vektorin $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_i)$ osoittamat rivit ja vektorin $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_i)$ osoittamat sarakkeet.

Apulause 2.2.1. *Olkoon $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$, sekä $U \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja $V \in \mathbf{R}^{m\times m}$ unimodulaarisia matriiseja. Matriisien A ja UAV $i\times i$-minoreilla on sama suurin yhteinen tekijä.*

Todistus: Todistus tehdään kirjan [17] harjoitustehtävässä 6.3-11 ehdotetulla tavalla. Olkoon d alkio, joka jakaa jokaisen matriisin A $i\times i$-minorin. Tarkastellaan mielivaltaista matriisin UAV $i\times i$-minoria $|UAV|^i_{\mathbf{r},\mathbf{c}}$. Apulauseen

B.1 nojalla

$$|UAV|^i_{\mathbf{r},\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{m}} |U|^i_{\mathbf{l},\mathbf{r}} |A|^i_{\mathbf{r},\mathbf{c}} |V|^i_{\mathbf{c},\mathbf{m}},$$

mistä nähdään helposti, että d on minorin $|UAV|^i_{\mathbf{r},\mathbf{c}}$ tekijä. Siis d jakaa jokaisen matriisin UAV $i \times i$ minorin. Koska U ja V ovat unimodulaarisia, niin niillä on Eukleideen alueessa $\mathbf{R}$ käänteismatriisit. Vastaavasti kuten yllä todetaan, että jos d jakaa kaikki matriisin UAV $i \times i$-minorit, niin se jakaa kaikki matriisin $U^{-1}(UAV)V^{-1} = A$ $i \times i$-minorit.

Yllä olevasta seuraa, että d on matriisin A $i \times i$-minoreiden suurin yhteinen tekijä, jos ja vain jos d on matriisin UAV suurin yhteinen tekijä $i \times i$-minoreiden suurin yhteinen tekijä. □

Lause 2.2.1 (Smithin muoto)**.** *Jos $M \in \mathbf{R}^{n\times m}$ on astetta r, niin löytyy sellaiset $\mathbf{R}$-unimodulaariset matriisit $U \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja $V \in \mathbf{R}^{m\times m}$, että*

$$UMV = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä $x_i | x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$. Lisäksi $x_1 \cdots x_i$ on kaikkien $i \times i$-minoreiden suurin yhteinen tekijä ja alkiot x_i ovat yksiköllä kertomista vaille yksikäsitteiset.

Todistus: Tämä todistus on kirjasta [17], jossa tulos on todistettu polynomimatriisien tapauksessa. Todistuksena annetaan algoritmi, joka saattaa annetun matriisin $M \in \mathbf{R}$ haluttuun muotoon käyttäen elementaarisia rivi- ja sarakeoperaatioita. Kussakin vaiheessa muunnettua matriisia merkitään $M_0 = (m_{ij})$ ja sen alimatriisia, josta i ensimmäistä riviä ja saraketta on poistettu, merkitään M_i. Aluksi siis $M_0 = M$.

Koska käsiteltävät alkiot ovat Eukleideen alueesta, niin käytössä on astefunktio $\delta : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_+$. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $\delta(u) = 0$, kun u on yksikkö [45, s.385].

Tuodaan rivien ja sarakkeiden vaihto-operaatioilla matriisin M_0 paikkaan $(1,1)$ alkio, jonka aste on pienin. Nyt paikan $(1,2)$ alkio on 0, jolloin kyseiselle alkiolle ei tarvitse tehdä mitään, tai se on muotoa $m_{12} = qm_{11} + r$, missä $\delta(r) < \delta(m_{11})$ tai $r = 0$. Lisätään ensimmäinen sarake toiseen sarakkeeseen kerrottuna alkiolla $-q$, jolloin paikan $(1,2)$ alkioksi jää r. Jos $r = 0$, niin siirrytään eteenpäin, muussa tapauksessa vaihdetaan ensimmäinen ja toinen

sarake keskenään jolloin paikan $(1,1)$ alkioksi saadaan r ja paikan $(1,2)$ alkioksi m_{11}, eli molempien paikkojen alkioiden asteet pienenevät. Jatkamalla samanlaisia askelia, kuten yllä on kuvattu, on selvää, että paikan $(1,2)$ alkioksi saadaan 0. Vastaavasti saadaan myös muut ensimmäisen rivin alkiot nolliksi.

Kuten yllä sarakeoperaatioita käyttäen saadaan järjestettyä rivioperaatioilla ensimmäisen sarakkeen diagonaalin ulkopuoliset alkiot nolliksi. Koska kyseisen operaation aikana vaihdetaan rivejä on mahdollista, että ensimmäiseen riviin tulee nollasta eroavia alkioita. Jos näin käy, niin voidaan palata alkuun. Algoritmi etenee, koska paikan $(1,1)$ alkion aste pienenee. Jos aste jossain vaiheessa on 0, niin paikan $(1,1)$ alkio on yksikkö ja rivien tai sarakkeiden vaihtoja ei enää tarvita tässä vaiheessa.

Nyt M_0 on muotoa

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}.$$

Jos m_{11} ei jaa jokaista matriisin M_1 alkiota, niin löytyy sellainen alkio m_{ij}, $i,j > 1$, että $m_{ij} = qm_{11} + r$. Nyt lisäämällä ensimmäinen sarake j. sarakkeeseen ja sen jälkeen lisäämällä ensimmäinen rivi alkiolla $-q$ kerrottuna i. riviin saadaan paikan (i,j) alkioksi r. Siirrytään takaisin alkuun. Huomataan, että yllä mainitut toimenpiteet vähentävät käsiteltävän alkion astetta, joten on helppo vakuuttua siitä, että algoritmi etenee.

Jos m_{11} jakaa jokaisen matriisin M_1 alkion, niin vastaavasti kuin algoritmin aluksi, voidaan matriisille M_0 tehdä elementaarisia operaatioita, joilla järjestetään alimatriisin M_1 diagonaalin ulkopuoliset ensimmäisen rivin ja sarakkeen alkiot nolliksi. Huomaa, että tässä vaiheessa ei tarvita elementaarisia operaatioita, jotka muuttaisivat ensimmäistä riviä tai saraketta.

Jatkamalla vastaavasti kuten edellä, siirrytään aina vain pienempään oikean alakulman alimatriisiin ja saavutetaan lopulta äärellisellä määrällä askelia haluttu muoto. Matriisit U ja V saadaan määritettyjä rivi- ja sarakeoperaatioita vastaavien matriisien avulla. Syntyvän diagonaalimatriisin diagonaalin alkioiden jaollisuusominaisuus on selvää edellä olevan perusteella.

Apulauseen 2.2.1 nojalla $\operatorname{syt}\{|M|_{i,i}\} = \operatorname{syt}\{|UMV|_{i,i}\}$. Koska $x_i | x_{i+1}$, niin $\operatorname{syt}\{|UMV|_{i,i}\} = x_1 x_2 \cdots x_i$. Apulauseen A.1.1 nojalla suurin yhteinen tekijä on yksikäsitteinen yksiköllä kertomista vaille, mistä seuraa alkioiden x_i yksikäsitteisyys yksiköllä kertomista vaille. $\square$

Lause 2.2.2 (Smith-McMillanin muoto)**.** *Jos $M \in \overline{\mathbf{R}}^{n\times m}$ on astetta r, niin*

löytyy sellaiset $\mathbf{R}$*-unimodulaariset matriisit* $U \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *ja* $V \in \mathbf{R}^{m\times m}$*, että*

$$UMV = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\frac{x_1}{y_1}, \ldots, \frac{x_r}{y_r}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

missä alkioparit (x_i, y_i) *ovat keskenään jaottomia kaikilla* $i = 1, \ldots, r$ *ja seuraavat jaollisuusominaisuudet ovat voimassa*

(i) $x_i | x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$.

(ii) $y_{i+1} | y_i$, $i = 1, \ldots, r-1$.

Lisäksi y_1 *on matriisin* M *kaikkien redusoidussa muodossa esitettyjen elementtien nimittäjien pienin yhteinen jaettava.*

Todistus: Tämä todistus löytyy kirjasta [17] polynomimatriisien tapauksessa. Oletetaan siis, että $M \in \overline{\mathbf{R}}^{n\times m}$, jolloin jokainen matriisin M elementti m_{ij} voidaan apulauseen A.1.3 nojalla kirjoittaa redusoidussa muodossa $m_{ij} = \frac{n_{ij}}{d_{ij}}$. Olkoon $d = \operatorname{pyj}_{i,j}\{d_{ij}\}$ redusoidussa muodossa, jolloin $dM \in \mathbf{R}^{n\times m}$ ja lauseen 2.2.1 nojalla löytyy sellaiset $\mathbf{R}$-unimodulaariset $n \times n$- ja $m \times m$-matriisit U ja V, että

$$U(dM)V = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Merkitään alkion $\frac{z_i}{d}$ redusoitua muotoa $\frac{x_i}{y_i}$. Tällöin

$$UMV = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\frac{x_1}{y_1}, \ldots, \frac{x_r}{y_r}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jaollisuusominaisuudet (i) ja (ii) alkioille x_i ja y_i seuraavat helposti alkioiden z_i jaollisuusominaisuuksista.

Täytyy osoittaa vielä, että $y_1 = ud$, missä u on yksikkö. Tehdään vastaoletus, että $y_1 \neq ud$ kaikilla yksiköillä u. Koska $\frac{x_1}{y_1} = \frac{z_1}{d}$, niin alkioilla z_1 ja d on välttämättä yksiköstä eroava yhteinen tekijä. Koska z_1 on kaikkien matriisin dM nollasta eroavien alkioiden suurin yhteinen tekijä, niin alkiolla d on yksiköstä eroava yhteinen tekijä jokaisen matriisin dM nollasta eroavan alkion kanssa. Olkoon tämä yhteinen tekijä x, jolloin $\frac{d}{x}M \in \mathbf{R}^{n\times m}$. Siis $d_{ij} | \frac{d}{x} \in \mathbf{R}$ kaikilla i ja j, mikä on ristiriita, koska d on matriisin M nimittäjien pienin yhteinen jaettava. $\square$

Apulause 2.2.2. *Olkoon $M \in \overline{\mathbf{R}}^{n\times m}$ sekä $U \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja $V \in \mathbf{R}^{m\times m}$ $\mathbf{R}$-unimodulaariset matriisit. Matriisien M ja UMV Smith-McMillanin muodot ovat samat.*

Todistus: Jos U_0 ja V_0 ovat sellaiset $\mathbf{R}$-unimodulaariset matriisit, jotka saattavat matriisin A Smith-McMillanin muotoon, eli

$$U_0 M V_0 = S.$$

Koska U ja V ovat $\mathbf{R}$-unimodulaarisia, niin niillä on olemassa käänteismatriisi renkaassa $\mathbf{R}$. Voidaan siis kirjoittaa

$$U_0 U^{-1} U M V V^{-1} V_0 = S,$$

missä matriisit $U_0 U^{-1}$ ja $V^{-1} V_0$ ovat selvästi unimodulaarisia. Täten S on matriisin UMV Smith-McMillanin muoto. □

Apulause 2.2.3. *Olkoon $\mathbf{R}$ Eukleideen alue ja matriisin $M \in \overline{\mathbf{R}}^{n\times m}$ Smith-McMillanin muoto yhtälön (2.2) mukainen. Määritellään matriisit $N \in \mathbf{R}^{n\times m}$ ja $D \in \mathbf{R}^{m\times m}$ seuraavasti:*

$$N = U^{-1} \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = V \operatorname{diag}(y_1, \ldots, y_r, 1, \ldots, 1).$$

Matriisipari (N, D) on matriisin M oikealta jaoton hajotelma.

Todistus: Todistus löytyy kirjasta [45, s.77]. Selvästi $M = ND^{-1}$ ja $\det(D) \neq 0$. Koska x_i ja y_i ovat keskenään jaottomia kaikilla $i = 1, \ldots, r$, niin pääideaalialueessa $\mathbf{R}$ on apulauseen A.1.2 nojalla olemassa sellaiset alkiot a_i ja b_i, että

$$a_i x_i + b_i y_i = 1.$$

Määritellään nyt matriisit $X \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ja $Y \in \mathbf{R}^{m\times m}$ seuraavasti

$$X = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U, \qquad Y = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_r, 1 \ldots, 1)\, V^{-1}.$$

Suoraan laskemalla voidaan todeta, että

$$XN + YD = I,$$

eli N ja D ovat oikealta jaottomia. □

Luku 3

Rationaalimatriisin nollat ja navat

3.1 Äärelliset nollat ja navat

Rationaalifunktion äärelliset nollat ja navat ovat yksinkertaisesti osoittajan ja nimittäjän polynomifunktioiden nollakohdat, kun yhteiset tekijät ensin sievennetään pois. Napojen ja nollien kertaluvut ovat nollakohtien kertaluvut. Yleistettäessä nollan käsitettä rationaalimatriiseille ei ole syytä vaatia, että koko rationaalimatriisi on nollamatriisi jossain pisteessä, vaan on järkevämpää hakea sellaisia pisteitä, joissa jokin osa matriisista nollautuu. Tällöin rationaalimatriisin aste putoaa kyseisessä pisteessä alle sen normaaliasteen. Tässä luvussa esitellään nollien ja napojen käsitteiden yleistys matriiseille ja näytetään, että rationaalimatriisien tapauksessakin nollien ja napojen käsitteet ovat hyvin samankaltaiset kuin rationaalifunktion tapauksessa. Ennen varsinaista määrittelyä tarvitaan kuitenkin sopiva muoto, jonka avulla navat ja nollat saadaan määriteltyä luontevasti.

Aluksi esitellään Smith-McMillanin muoto rationaalimatriiseille, jota kutsutaan äärelliseksi Smith-McMillanin muodoksi. Kyseistä muotoa käytetään äärellisten nollien määrittelyyn. Koska kompleksikertoimisten polynomien rengas $\mathbb{C}[s]$ on Eukleideen alue ja kompleksikertoimisten rationaalifunktioiden rengas $\mathbb{C}(s)$ osamääräkunta yli renkaan $\mathbb{C}[s]$, niin voidaan käyttää lausetta 2.2.2. Polynomeja, joiden korkeinta astetta olevan termin kerroin on yksi, kutsutaan pääpolynomeiksi.

Lause 3.1.1 (Äärellinen Smith-McMillanin muoto)**.** *Olkoon* $G(s)$

$n \times m$-rationaalimatriisi. On olemassa sellaiset $\mathbb{C}[s]$-unimodulaariset matriisit $U(s) \in \mathbb{C}[s]^{n\times n}$ ja $V(s) \in \mathbb{C}[s]^{m\times m}$, että

$$U(s)G(s)V(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\frac{x_1(s)}{y_1(s)}, \ldots, \frac{x_r(s)}{y_r(s)}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S_G(s), \tag{3.1}$$

missä alkioparit $x_i(s)$ ja $y_i(s)$ ovat keskenään jaottomia pääpolynomeja kaikilla $i = 1, \ldots, r$ ja seuraavat jaollisuusominaisuudet ovat voimassa:

(i) $x_i(s)|x_{i+1}(s)$, $i = 1, \ldots, r-1$,

(ii) $y_{i+1}(s)|y_i(s)$, $i = 1, \ldots, r-1$.

Lisäksi $y_1(s)$ on matriisin $G(s)$ kaikkien elementtien nimittäjien pienin yhteinen jaettava. Matriisia $S_G(s)$ kutsutaan äärelliseksi Smith-McMillanin muodoksi ja se on yksikäsitteinen.

Todistus: Tulos seuraa suoraan lauseesta 2.2.2 kun huomataan, että jokainen lauseessa esiintyvä $x_i(s)$ ja $y_i(s)$ on yksikäsitteinen yksiköllä, eli tässä tapauksessa nollasta eroavalla vakiolla, kertomista vaille. Siis $x_i(s)$ ja $y_i(s)$ voidaan valita pääpolynomeiksi, jolloin kyseinen muoto on yksikäsitteinen. □

Huomaa, että lähes kaikissa pisteissä $s \in \mathbb{C}$ matriisin $G(s)$ aste on sama kuin Smith-McMillanin muodon diagonaalin nollasta eroavien alkioiden määrä, jota kutsutaan matriisin rationaalimatriisin normaaliasteeksi. Normaaliaste määritellään seuraavassa käyttämättä Smith-McMillanin muotoa.

Määritelmä 3.1.1 (Normaaliaste)**.** *Rationaalimatriisin $G(s)$ normaaliaste on k jos löytyy sellainen s_0, että* rank $G(s_0) = k$ *ja kaikilla $s \in \mathbb{R}$* rank $G(s) \leq k$. *Merkitään* nrank $(G(s)) = k$.

Määritelmä 3.1.2 (s_0-valuaatio)**.** *Olkoon $g(s)$ rationaalifunktio ja $s_0 \in \mathbb{C}$. Kirjoitetaan $g(s) = (s - s_0)^{q_{s_0}} \frac{n(s)}{d(s)}$, missä $(s - s_0)$ ei ole tekijänä polynomeissa $n(s)$ ja $d(s)$, ja määritellään kuvaus $\delta_{s_0} : \mathbb{C}(s) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ seuraavasti:*

$$\textit{Jos } g(s) \equiv 0, \textit{ niin } \delta_{s_0}(g(s)) = \infty, \textit{ muuten } \delta_{s_0}(g(s)) = q_{s_0}.$$

Kuvausta δ_{s_0} sanotaan s_0-valuaatioksi.

Edellisen määritelmän funktiolle δ_{s_0} nimi s_0-valuaatio on oikeutettu, sillä on helppo todeta, että

$$\delta_{s_0}(g(s)h(s)) = \delta_{s_0}(g(s)) + \delta_{s_0}(h(s)) \tag{3.2}$$

ja

$$\delta_{s_0}(g(s) + h(s)) \geq \min\left\{\delta_{s_0}(g(s)), \delta_{s_0}(h(s))\right\}. \tag{3.3}$$

Tarkastellaan rationaalimatriisin $G(s)$ äärellisen Smith-McMillanin muodon $S_G(s)$ diagonaalin alkioita $g_i(s) = \frac{x_i(s)}{y_i(s)}$. Jos $\delta_{s_0}(g_i(s)) > 0$, niin s_0 on osoittajan $x_i(s)$ nollakohta, koska $x_i(s)$ ja $y_i(s)$ ovat keskenään jaottomia. Tällöin matriisin $S_G(s)$ aste ja siten myös matriisin $G(s)$ aste putoaa, eli matriisin ytimen dimensio kasvaa pisteessä s_0. Jos taas $\delta_{s_0}(f(s)) < 0$, niin s_0 on nimittäjän $y_i(s)$ nollakohta ja funktion $g_i(s)$ napa. Jos siis matriisilla $S_G(s)$ kerrotaan sopivaa luonnollisen kannan vektoria e_i ja s lähestyy arvoa s_0, niin vektorin $S_G(s)e_i$ i. alkio kasvaa mielivaltaisen suureksi. Näitten havaintojen perusteella seuraava määritelmä on luonteva.

Määritelmä 3.1.3 (Äärelliset nollat ja navat)**.** *Olkoon rationaalimatriisin $G(s)$ Smith-McMillanin muoto $S_G(s)$ yhtälön* (3.1) *mukainen. Merkitään $\delta_{s_0}\left(\frac{x_i(s)}{y_i(s)}\right) = q_i$.*

Jos $q_i > 0$, niin matriisilla $G(s)$ on pisteessä $s = s_0$ astetta q_i oleva nolla. Jos $q_i < 0$, niin matriisilla $G(s)$ on pisteessä $s = s_0$ astetta $-q_i$ oleva napa. Joukkoa $\{q_1, \ldots, q_r\}$, jossa sama luku voi esiintyä useasti, sanotaan rakenneindeksien joukoksi pisteessä $s = s_0$.

Huomaa, että yllä olevassa määritelmässä polynomifunktioiden $x_i(s)$ ja $y_i(s)$ jaollisuusominaisuudet takaavat, että $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_r$. Nollat olisi voitu määritellä vain funktioiden $x_i(s)$ ja navat funktioiden $y_i(s)$ juurina, mutta tällöin olisi menetetty tieto nollien ja napojen asteista. On täysin mahdollista, että rationaalimatriisilla $G(s)$ on pisteessä s_0 sekä napoja, että nollia. Selvyyden vuoksi rakenneindeksien joukkoa pisteessä s_0 merkitään $\{q_1(s_0), \ldots, q_r(s_0)\}$ ja sitä voidaan kutsua lyhyesti rakenteeksi pisteessä s_0.

Esimerkki 3.1.1. Tarkastellaan rationaalimatriisia

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & s^{-2} & s-1 \\ s^{-1} & 0 & s^2 \\ (s-2)^2 & 0 & s^2 \end{bmatrix}.$$

Määritellään matriisit

$$U(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s(s-2)^2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad V(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & s^3 \\ 1 & 0 & s^2(s-1) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

jolloin

$$U(s)G(s)V(s) = \operatorname{diag}\left(s^{-2}, s^{-1}, s^2(s-1)\left(s^2 - 3s + 1\right)\right).$$

Apulauseen 2.1.1 nojalla $U(s)$ ja $V(s)$ ovat unimodulaarisia, koska $\det(U(s)) = 1 = \det(V(s))$. Matriisi $S_G(s) = U(s)G(s)V(s)$ on siis matriisin $G(s)$ äärellinen Smith-McMillanin muoto.

Määritelmän mukaisesti rationaalimatriisilla $G(s)$ on pisteessä $s = 0$ astetta 2 ja 1 olevat navat ja astetta 2 oleva nolla. Lisäksi pisteissä $s = 1$ ja $s = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ on astetta 1 oleva nolla. ■

3.1.1 Minorit ja rakenneindeksit

Seuraavaksi esitellään yleinen tapa laskea rakenneindeksit pisteessä s_0 suoraan ilman Smith-McMillanin muotoa. Tämä keino on esitelty esimerkiksi kirjoissa [17] ja [41]. Merkitään

$$\nu^i_{s_0}(G(s)) = \min\{\delta_{s_0}(g(s)) : g(s) \text{ on matriisin } G(s)\ i \times i\text{−minori}\} \tag{3.4}$$

Olkoon $A(s)$ ja $B(s)$ mielivaltaisia rationaalimatriiseja ja oletetaan, että matriisin $B(s)$ jokaisella $i \times i$-minorilla on voimassa $\delta_{s_0}(|B(s)|^i_{\mathbf{r},\mathbf{c}}) \geq 0$. Binet-Cauchyn kaavan B.1 ja yhtälöiden (3.2) ja (3.3) nojalla

$$\begin{aligned}
\nu^i_{s_0}(A(s)B(s)) &= \min_{\mathbf{r},\mathbf{c}}\left\{\delta_{s_0}\left(|A(s)B(s)|^i_{\mathbf{r},\mathbf{c}}\right)\right\} \\
&= \min_{\mathbf{r},\mathbf{c}}\left\{\delta_{s_0}\left(\textstyle\sum_{\mathbf{l}}\left[|A(s)|^i_{\mathbf{r},\mathbf{l}}|B(s)|^i_{\mathbf{l},\mathbf{c}}\right]\right)\right\} \\
&\geq \min_{\mathbf{r},\mathbf{c},\mathbf{l}}\left\{\delta_{s_0}\left(|A(s)|^i_{\mathbf{r},\mathbf{l}}|B(s)|^i_{\mathbf{l},\mathbf{c}}\right)\right\} \\
&= \min_{\mathbf{r},\mathbf{c},\mathbf{l}}\left\{\delta_{s_0}\left(|A(s)|^i_{\mathbf{r},\mathbf{l}}\right) + \delta_{s_0}\left(|B(s)|^i_{\mathbf{l},\mathbf{c}}\right)\right\} \\
&\geq \min_{\mathbf{r},\mathbf{l}}\left\{\delta_{s_0}(|A(s)|^i_{\mathbf{r},\mathbf{l}})\right\} \\
&= \nu^i_{s_0}(A(s)).
\end{aligned}$$

$\mathbb{C}[s]$-unimodulaarisen matriisin $U(s)$ alkiot ovat polynomifunktioita, joten sen kaikilla $i \times i$-minoreilla on voimassa $\delta_{s_0}(|U(s)|^i_{\mathbf{r},\mathbf{c}}) \geq 0$. Koska lisäksi

$U(s)$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on myös $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarinen, niin edellisen tarkastelun nojalla

$$\nu^i_{s_0}(G(s)) \leq \nu^i_{s_0}(G(s)U(s)) \leq \nu^i_{s_0}(G(s)U(s)U^{-1}(s)) = \nu^i_{s_0}(G(s)).$$

Vastaavasti voidaan osoittaa, että

$$\nu^i_{s_0}(G(s)) = \nu^i_{s_0}(V(s)G(s)),$$

mikäli $V(s)$ on $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarinen. Jos siis rationaalimatriisin $G(s)$ äärellinen Smith-McMillanin muoto on $S_G(s)$, niin

$$\nu^i_{s_0}(G(s)) = \nu^i_{s_0}(S_G(s)).$$

Olkoon $g_i(s) = \frac{x_i(s)}{y_i(s)}$, $i = 1, \ldots r$ äärellisen Smith-McMillanin muodon nollasta eroavat diagonaalin alkiot. Nyt $x_i | x_{i+1}$ ja $y_{i+1} | y_i$, joten välttämättä

$$\delta_{s_0}(g_i(s)) \leq \delta_{s_0}(g_{i+1}(s)).$$

Siis $\min_{\mathbf{r},\mathbf{c}} \left\{ \delta_{s_0} \left(|S_G(s)|^i_{\mathbf{r},\mathbf{l}} \right) \right\}$ saavutetaan aina valitsemalla i ensimmäistä riviä ja saraketta. Täten yhtälön (3.2) nojalla

$$\begin{aligned} \nu^i_{s_0}(S(s)) &= \delta_{s_0}\left(g_1(s) \cdots g_i(s)\right) \\ &= \delta_{s_0}\left(g_1(s)\right) + \cdots + \delta_{s_0}\left(g_i(s)\right) \\ &= q_1(s_0) + \cdots + q_i(s_0). \end{aligned}$$

On todistettu seuraava lause:

Lause 3.1.2. *Olkoon* $\operatorname{nrank}(G(s)) = r$. *Rationaalimatriisin* $G(s)$ *rakenneindeksit pisteessä* s_0 *ovat*

$$\begin{aligned} q_1(s_0) &= \nu^1_{s_0}(G(s)) \\ q_2(s_0) &= \nu^2_{s_0}(G(s)) - \nu^1_{s_0}(G(s)) \\ &\vdots \\ q_r(s_0) &= \nu^r_{s_0}(G(s)) - \nu^{r-1}_{s_0}(G(s)). \end{aligned}$$

Esimerkki 3.1.2. Tarkastellaan edelleen esimerkin 3.1.1 matriisia $G(s)$. Laskemalla todetaan, että

$$\nu^1_0(G(s)) = -2, \qquad \nu^2_0(G(s)) = -3 \qquad \text{ja} \qquad \nu^3_0(G(s)) = -1.$$

Lauseen 3.1.2 mukaisesti matriisilla $G(s)$ on pisteessä $s = 0$ rakenneindeksit -2, -3-(-2)=-1 ja -1-(-3)=2, jotka ovat samat kuin aiemmin suoraan määritelmää käyttäen saadut. ■

3.1.2 Äärelliset osoittajat ja nimittäjät

Seuraavaksi tarkastellaan kuinka rationaalifunktion osoittajan ja nimittäjän käsitteet yleistyvät rationaalimatriiseille. Havaitaan, että nollat saadaan osoittajan nollina ja navat nimittäjän nollina, kuten rationaalifunktioiden tapauksessakin.

Tarkastellaan nyt rationaalimatriisia $G(s)$ ja sen äärellistä Smith-McMillanin muotoa, joka on yhtälön (3.1) mukainen. Apulause 2.2.3 ja lause 2.1.2 yhdessä takaavat, että jokainen oikealta jaoton hajotelma on muotoa

$$(N(s)W(s), D(s)W(s)),$$

missä

$$N(s) = U^{-1}(s) \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(x_1(s), \ldots, x_r(s)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

ja

$$D(s) = V(s)\operatorname{diag}(y_1(s), \ldots, y_r(s), 1, \ldots, 1) \tag{3.6}$$

ja $W(s)$ on $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarinen matriisi. Selvästi matriisin $N(s)$ äärelliset nollat ovat täsmälleen matriisin $G(s)$ äärelliset nollat ja matriisin $D(s)$ äärelliset nollat matriisin $G(s)$ äärelliset navat. On helppo huomata, että matriiseilla $N(s)$ ja $D(s)$ ei ole äärellisiä napoja. Yleisesti matriisia $N(s)W(s)$ sanotaan rationaalimatriisin $G(s)$ osoittajaksi ja matriisia $D(s)W(s)$ taas nimittäjäksi. Seuraava lause on voimassa edellisen tarkastelun nojalla.

Lause 3.1.3. *Olkoon $(N(s), D(s))$ jokin rationaalimatriisin $G(s)$ oikealta jaoton hajotelma. Matriisin $G(s)$ äärelliset nollat ovat täsmälleen samat kuin osoittajan $N(s)$ äärelliset nollat ja äärelliset navat täsmälleen samat kuin nimittäjän $D(s)$ äärelliset nollat.*

Tarkastellaan yhtälöillä (3.5) ja (3.6) määriteltyjä polynomimatriiseja. Huomataan, että rationaalimatriisilla $G(s)$ on pisteessä $s = s_0$ napa jos ja vain jos matriisin $D(s)$ aste putoaa alle täyden asteen. Matriisi $N(s)$ ei ole välttämättä täyttä astetta millään muuttujan s arvolla. Kuitenkin on helppo havaita, että matriisin $N(s)$ aste putoaa alle sen normaaliasteen, jos ja vain jos matriisilla $G(s)$ on pisteessä $s = s_0$ nolla. Koska kaikki oikealta jaottomat matriisin $G(s)$ hajotelmat ovat muotoa $(N(s)W(s), D(s)W(s))$, missä $W(s)$ on unimodulaarinen ja siksi kaikilla muuttujan arvoilla täyttä astetta, niin yllä oleva päättely pätee kaikilla oikealta jaottomilla hajotelmilla.

3.1.3 Similaarisuus ja rakenneindeksit

Seuraavaksi osoitetaan, että kertominen normaaliasteeltaan täydellä rationaalimatriisilla, jolla ei ole pisteessä s_0 nollia tai napoja, ei muuta kerrotun matriisin rakenneindeksejä pisteessä s_0. Tarkastelu on artikkelista [40].

Olkoon rationaalimatriisilla $G(s)$ pisteessä $s_0 \in \mathbb{C}$ Laurentin sarja

$$G(s) = \sum_{j=k}^{\infty} (s - s_0)^j G_j, \qquad G_k \neq 0.$$

Olkoon $i \geq k$. Käytetään matriisin $G(s)$ pisteen s_0 Toeplitz-matriiseille merkintää

$$T_i(G, s_0) = \begin{bmatrix} G_k & G_{k+1} & \cdots & G_{i-1} & G_i \\ 0 & G_k & \cdots & G_{i-2} & G_{i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & G_k \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Määritelmä 3.1.4 (Asteindeksit)**.** *Matriisin $G(s)$ asteindeksit*

$$\rho_i(G, s_0) = \operatorname{rank} T_i(G, s_0) - \operatorname{rank} T_{i-1}(G, s_0),$$

kun $i > k$ ja $\rho_k(G, s_0) = \operatorname{rank} G_k$.

Määritelmä 3.1.5 (Similaarisuus)**.** *Olkoon $G(s)$ ja $H(s)$ $n \times m$ rationaalimatriiseja. Jos löytyy sellaiset $n \times n$- ja $m \times m$-rationaalimatriisit $L(s)$ ja $R(s)$, että ne ovat kääntyviä pisteessä $s_0 \in \mathbb{C}$ ja*

$$G_1(s) = L(s)G_2(s)R(s),$$

niin matriisit $G_1(s)$ ja $G_2(s)$ ovat similaariset pisteessä s_0.

Huomaa, että yllä oleva similaarisuuden määritelmä poikkeaa tutusta vakiomatriisien similaarisuuden määritelmästä. Jatkon kannalta tällä ei kuitenkaan ole merkitystä.

Apulause 3.1.1. *Jos $n \times m$-rationaalimatriisit $G(s)$ ja $H(s)$ ovat similaariset pisteessä s_0, niin niiden asteindeksit ovat samat pisteessä s_0.*

Todistus: Olkoon $L(s)$ ja $R(s)$ kuten määritelmässä 3.1.5. Koska $L_0 = L(s_0)$ ja $R_0 = R(s_0)$ ovat kääntyviä, niin matriisit $L(s)$ ja $R(s)$ voidaan esittää pisteen s_0 ympäristössä Taylorin sarjoina

$$L(s) = L_0 + (s - s_0)L_1 + (s - s_0)^2 L_2 + \cdots$$

ja

$$R(s) = R_0 + (s - s_0)R_1 + (s - s_0)^2 R_2 + \cdots$$

Matriisien $G(s)$ ja $H(s)$ Laurentin sarjat pisteessä s_0 ovat

$$G(s) = \sum_{i=k}^{\infty} (s - s_0)^i G_i \quad \text{ja} \quad H(s) = \sum_{i=k}^{\infty} (s - s_0)^i H_i.$$

Suoraan laskemalla voidaan todeta, että

$$\begin{aligned} G_{k+j} &= \sum_{\substack{l+n+m=j \\ l,m,n \geq 0}} L_l H_{k+n} R_m \\ &= [L_0, L_1, \ldots, L_j] \begin{bmatrix} H_k & H_{k+1} & \cdots & H_{k+j} \\ 0 & H_k & \cdots & H_{k+j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_j \\ R_{j-1} \\ \vdots \\ R_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

joten on helppo todeta, että

$$T_{k+j}(G, s_0) = \begin{bmatrix} L_0 & L_1 & \cdots & L_j \\ 0 & L_0 & \cdots & L_{j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_0 \end{bmatrix} T_{k+j}(H, s_0) \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_j \\ 0 & R_0 & \cdots & R_{j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_0 \end{bmatrix}.$$

Koska L_0 ja R_0 ovat kääntyviä, niin matriisien $L(s)$ ja $R(s)$ Toeplitz-matriisit ovat myös. Täten edellä olleesta yhtälöstä voimme päätellä, että

$$\text{rank } T_{k+j}(G, s_0) = \text{rank } T_{k+j}(H, s_0)$$

kaikilla $j \geq 0$, mistä väitös seuraa asteindeksien määritelmän perusteella.□

$\mathbb{C}[s]$-unimodulaarisen matriisin determinantti on aina nollasta eroava vakio kaikilla muuttujan s arvoilla, joten se on kaikissa äärellisissä pisteissä kääntyvä. Siis apulauseesta 3.1.1 seuraa suoraan

Seuraus 3.1.1. *Rationaalimatriisilla $G(s)$ on samat asteindeksit, kuin sen Smith-McMillanin muodolla $S_G(s)$.*

Olkoon rationaalimatriisin $G(s)$ Smith-McMillanin muoto

$$S_G(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}\left(\frac{x_1(s)}{y_1(s)}, \ldots, \frac{x_r(s)}{y_r(s)}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kirjoitetaan diagonaalin alkiot muodossa $\frac{x_i(s)}{y_i(s)} = (s - s_0)^{q_i} f_i(s)$, missä $q_1, \ldots, q_r$ ovat pisteeseen s_0 liittyvät rakenneindeksit. Siis rationaalifunktiolla $f_i(s)$ ei ole nollia tai napoja pisteessä s_0. Merkitään

$$\Lambda(s) = \operatorname{diag}\left((s - s_0)^{q_1}, \ldots, (s - s_0)^{q_r}, 0 \ldots, 0\right)$$

ja

$$F(s) = \operatorname{diag}\left(f_1(s), \ldots, f_r(s), 1 \ldots, 1\right),$$

jolloin

$$\Lambda(s)F(s) = S_G(s).$$

Matriisi $F(s)$ on kääntyvä pisteessä s_0, joten apulauseen 3.1.1 ja seurauksen 3.1.1 nojalla matriisien $G(s)$ ja $\Lambda(s)$ asteindeksit ovat samat.

Matriisin $\Lambda(s)$ Laurentin sarja pisteessä s_0 on

$$\Lambda(s) = \sum_{j=1}^{r} (s - s_0)^{q_j} \Lambda_j,$$

missä Λ_j on diagonaalinen ja mahdollisesti nollamatriisi. Koska Λ on annettua diagonaalimuotoa, niin on helppo todeta että $\rho_j(\Lambda, s_0) - \rho_{j-1}(\Lambda, s_0) = \operatorname{rank} \Lambda_j$. Koska $\operatorname{rank} \Lambda_j$ kertoo kuinka monta astetta j olevaa nolla tai napaa matriisilla Λ on pisteessä s_0 ja matriisilla $G(s)$ on samat rakenneindeksit kuin matriisilla $\Lambda(s)$, niin on saatu todistetuksi seuraava lause:

Lause 3.1.4. *Pisteessä s_0 similaarisilla matriiseilla on pisteessä s_0 samat rakenneindeksit.*

3.2 Nollat ja navat äärettömyydessä

Rationaalifunktion käyttäytyminen äärettömyydessä, toisin sanoen kun muuttuja kasvaa itseisarvoltaan rajatta, riippuu funktion osoittajan ja nimittäjän asteiden erotuksesta. Rationaalifunktion arvot kasvavat itseisarvoltaan äärettömän suuriksi jos osoittajan aste on nimittäjän astetta suurempi ja lähenevät nollaa jos nimittäjän aste on suurempi. Äärettömien nollien käsitteet yleistyvät rationaalimatriiseille hyvin samalla tavalla kuin äärellisten nollien käsitteet. Tarvitaan kuitenkin uusi Smith-McMillanin muoto, sillä äärellisen Smith-McMillanin muodon määrittelyssä käytetyillä $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarisilla matriiseilla voi olla äärettömyydessä nollia tai napoja ja

siksi äärellinen Smith-McMillanin muoto ei kerro rationaalimatriisin käyttäytymistä kun muuttujan arvo kasvaa rajatta.

Luvun aluksi esitellään Smith-McMillanin muoto äärettömyydessä, jonka käyttäytyminen on suurilla muuttujan arvoilla halutunlaista. Tätä varten tarvitaan sopiva rationaalifunktioiden joukko, joksi osoittautuu aitojen rationaalifunktioiden joukko. Ääretöntä Smith-McMillanin muotoa käytetään myöhemmin lineaarisen systeemin äärettömien nollien määrittelyssä.

Määritelmä 3.2.1 (∞-valuaatio)**.** *Jos $t(s) \not\equiv 0$, niin kirjoitetaan $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{C}(s)$, missä $n(s), d(s) \in \mathbb{C}[s] \setminus \{0\}$. Merkitään polynomifunktion $p(s)$ astetta* $\deg(p(s))$*. Määritellään kuvaus $\delta_\infty : \mathbb{C}(s) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ seuraavasti:*

$$\textit{Jos } t(s) \equiv 0, \textit{ niin } \delta_\infty(t(s)) = \infty, \textit{ muuten } \delta_\infty(t(s)) = \deg(d(s)) - \deg(n(s)).$$

Kuvausta δ_∞ kutsutaan ∞-valuaatioksi.

Määritelmä 3.2.2 (Aidot rationaalifunktiot)**.** *Rationaalifunktio $t(s) \not\equiv 0$ on aito, jos $\delta_\infty(t(s)) \geq 0$. Aitojen kompleksikertoimisten rationaalifunktioiden joukkoa merkitään $\mathbb{C}_{pr}(s)$.*

Artikkelissa [42] on osoitettu, että jokainen rationaalimatriisi $G(s)$ voidaan saattaa $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaarisilla matriiseilla kertomalla diagonaalimuotoon, jota kutsutaan Smith-McMillanin muodoksi äärettömyydessä. Seuraavassa lauseessa esitellään kyseinen tulos.

Lause 3.2.1 (Smith-McMillanin muoto äärettömyydessä)**.** *Olkoon $G(s)$ $n \times m$-rationaalimatriisi. Tällöin on olemassa sellaiset $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaariset $n \times n$- ja $m \times m$-matriisit $U(s)$ ja $V(s)$, että*

$$U(s)G(s)V(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(s^{q_1}, \ldots, s^{q_r}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S_G^\infty(s) \tag{3.8}$$

missä $q_i \in \mathbb{Z}$ ja $q_i \leq q_{i+1}$. Matriisia $S_G^\infty(s)$ kutsutaan Smith-McMillanin muodoksi äärettömyydessä ja se on yksikäsitteinen.

Todistus: Tiedetään, että $\mathbb{C}_{pr}(s)$ on Eukleideen alue, joten voidaan käyttää tulosta 2.2.2. Sen mukaan on olemassa sellaiset $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaariset $n \times n$- ja $m \times m$-matriisit $U(s)$ ja $V(s)$, että

$$U(s)G(s)V(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\frac{x_1(s)}{y_1(s)}, \ldots, \frac{x_r(s)}{y_r(s)}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä $x_i(s), y_i(s) \in \mathbb{C}_{pr}(s)$. Voidaan kirjoittaa $x_i(s) = u_{x,i}(s)s^{q_{x,i}}$ ja $y_i(s) = u_{y,i}(s)s^{q_{y,i}}$, missä $u_{x,i}(s)$ ja $u_{y,i}(s)$ ovat yksikköjä. Koska esityksessä jokainen $x_i(s)$ ja $y_i(s)$ on yksiköllä kertomista vaille yksikäsitteinen, niin voidaan valita sellaiset alkiot, $x_i(s)$ ja $y_i(s)$, että $u_{x,i}(s) = 1 = u_{y,i}(s)$, jolloin päädytään yksikäsitteiseen muotoon.

Koska $x_i|x_{i+1}$ ja $y_{i+1}|y_i$, niin

$$\begin{aligned} q_i &= \delta_\infty\left(\tfrac{x_i(s)}{y_i(s)}\right) \\ &\leq \delta_\infty\left(\tfrac{x_{i+1}(s)}{y_i(s)}\right) \\ &\leq \delta_\infty\left(\tfrac{x_{i+1}(s)}{y_{i+1}(s)}\right) \\ &= q_{i+1}. \end{aligned}$$

Matriisin $U(s)G(s)V(s)$ diagonaalin i. alkio, $i = 1, \ldots, r$, on nyt muotoa s^{q_i}, missä $q_i \in \mathbb{Z}$ ja $q_i \leq q_{i+1}$. $U(s)G(s)V(s)$ on siis haluttua muotoa. $\square$

Olkoon rationaalimatriisin $G(s)$ Smith-McMillanin muoto äärettömyydessä $S_G^\infty(s) = U(s)G(s)V(s)$. Olkoon $u_i(s)$ matriisin $U^{-1}(s)$ i. sarake ja $v_{(j)}(s)$ matriisin $V^{-1}(s)$ j. rivi, jolloin $G(s)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$G(s) = \sum_{i=1}^{t} s^{q_i} u_i(s)v_{(i)}(s) + \sum_{i=t+1}^{k} u_i(s)v_{(i)}(s) + \sum_{i=k+1}^{r} s^{q_i} u_i(s)v_{(i)}(s),$$

missä $q_1 \leq \cdots \leq q_t < 0 = q_{t+1} = \cdots = q_k < q_{k+1} \leq \cdots \leq q_r$.

Jokainen rationaalimatriisi $u_i(s)v_{(i)}(s)$ suppenee kaikilla $i = 1, \ldots, r$ kohti matriisia U_i, jonka aste on yksi. Havaitaan, että muuttujan s kasvaessa edellisen esityksen summa $\sum_{i=t+1}^{k} u_i(s)v_{(i)}(s)$ suppenee kohti vakiomatriisia, jonka aste on $k - t$. Esityksen osa $s^{q_i}u_i(s)v_{(i)}(s)$, kun $i = k+1, \ldots, r$, taas hajaantuu kohti ääretöntä potenssin q_i määräämällä nopeudella. Osa $s^{q_i}u_i(s)v_{(i)}(s)$, kun $i = 1, \ldots, t$, puolestaan suppenee kohti nollamatriisia nopeudella, jonka määrää potenssi q_i. Koska Smith-McMillanin muoto äärettömyydessä on olemassa jokaisella rationaalimatriisilla, niin seuraavat määritelmät ovat mielekkäitä edellisen tarkastelun valossa.

Määritelmä 3.2.3 (Nollat ja navat äärettömyydessä)**.** *Tarkastellaan rationaalimatriisia $G(s)$ ja olkoon sen Smith-McMillanin muoto äärettömyydessä yhtälön* (3.8) *mukainen.*

Jos $q_i < 0$, niin rationaalimatriisilla $G(s)$ on äärettömyydessä astetta $-q_i$ oleva nolla. Jos $q_i > 0$, niin rationaalimatriisilla $G(s)$ on äärettömyydessä

astetta q_i oleva napa. Indeksijoukkoa $\{-q_1, \ldots, -q_r\}$, missä sama luku voi esiintyä useamman kerran, sanotaan rakenneindeksien joukoksi äärettömyydessä.

Määriteltyä rakenneindeksien joukkoa äärettömyydessä merkitään selvyyden vuoksi $\{q_1(\infty), \ldots, q_r(\infty)\}$, missä siis $q_i(s_0) = -q_i$. Näin nollille saadaan positiiviset ja navoille negatiiviset rakenneindeksit, kuten äärellisissä pisteissäkin. Kuten äärellisessä tapauksessakin, voidaan äärettömyydessäkin määritellä osoittajien ja nimittäjien käsitteet.

Lause 3.2.2. *Olkoon $(N(s), D(s))$ jokin rationaalimatriisin $G(s)$ oikealta jaoton hajotelma yli renkaan $\mathbb{C}_{pr}(s)$. Rationaalimatriisin $G(s)$ nollat äärettömyydessä ovat samat kuin osoittajan $N(s)$ nollat äärettömyydessä ja äärettömät navat samat kuin nimittäjän $D(s)$ nollat äärettömyydessä.*

Todistus: Kuten lauseen 3.1.3 todistus, mutta käsittely tapahtuu renkaan $\mathbb{C}[s]$ sijasta yli renkaan $\mathbb{C}_{pr}(s)$. $\square$

3.2.1 Äärellisen ja äärettömän rakenteen yhteys

Seuraavaksi osoitetaan, että äärettömien nollien ja napojen tarkastelu voidaan palauttaa äärellisten nollien ja napojen tarkasteluun ja äärellisestä pisteestä äärettömyyteen.

Lause 3.2.3. *Rationaalimatriisin $G(s)$ rakenneindeksien joukko äärettömyydessä on täsmälleen sama kuin rationaalimatriisin $G\left(\frac{1}{w}\right)$ rakenneindeksien joukko pisteessä $w = 0$.*

Todistus: Olkoon rationaalimatriisin $G(s)$ Smith-McMillanin muoto äärettömyydessä

$$U(s)G(s)V(s) = S_G^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(s^{-q_1}, \ldots, s^{-q_r}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$S_G^{\infty}\left(\frac{1}{w}\right) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(w^{q_1}, \ldots, w^{q_r}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lauseen 2.1.1 nojalla aito rationaalimatriisi $M(s)$ on $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaarinen täsmälleen silloin, kun sen determinantti on yksikkö renkaassa $\mathbb{C}_{pr}(s)$.

Tämä tarkoittaa sitä, että $\det(M(s))$ on rationaalifunktio, jonka nimittäjän ja osoittajan asteet ovat samat. Täten $\det(M(s))$ suppenee kohti jotain nollasta eroavaa skalaaria, kun s lähestyy ääretöntä, mikä tarkoittaa, että matriisi lähestyy jotain kääntyvää vakiomatriisia, kun s lähestyy ääretöntä.

Koska $U(s)$ ja $V(s)$ ovat $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaarisia matriiseja, niin matriisit $U\left(\frac{1}{w}\right)$ ja $V\left(\frac{1}{w}\right)$ ovat kääntyviä pisteessä $w = 0$. Nyt väite seuraa lauseesta 3.1.4. $\square$

Yllä oleva tarkastelu olisi voitu tehdä käyttäen muuttujanvaihtoa $s = \frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}$, missä $\gamma \neq 0 \neq \alpha\delta - \beta\gamma$. Tällöin ääretön struktuuri siirretään pisteeseen $w = -\frac{\delta}{\gamma}$. Pisteen $-\frac{\delta}{\gamma}$ nollat ja navat puolestaan siirtyvät äärettömiksi nolliksi ja navoiksi.

Kuten äärellisessä tapauksessakin saadaan äärettömässä tapauksessa ääretön nollastruktuuri lasketuksi minoreiden avulla ilman Smith-McMillanin muotoa. Kun merkitään

$$\nu_\infty^i(G(s)) = \min\{\delta_\infty(g(s)) \ : \ g(s) \text{ on matriisin } G(s) \ i \times i\text{−minori}\} \tag{3.9}$$

niin voidaan todistaa seuraava tulos

Lause 3.2.4. *Olkoon* $\operatorname{nrank}(G(s)) = r$*, jolloin rationaalimatriisin* $G(s)$ *äärettömät rakenneindeksit ovat*

$$\begin{aligned} q_1(\infty) &= \nu_\infty^1(G(s)) \\ q_2(\infty) &= \nu_\infty^2(G(s)) - \nu_\infty^1(G(s)) \\ &\vdots \\ q_r(\infty) &= \nu_\infty^r(G(s)) - \nu_\infty^{r-1}(G(s)). \end{aligned}$$

Todistus: Olkoon $g(s)$ rationaalifunktio. Merkitään

$$g(s) = \frac{n_m s^m + n_{m-1}s^{m-1} + \cdots + n_0}{d_k s^k + d_{k-1}s^{k-1} + \cdots + d_0},$$

missä $d_k \neq 0 \neq n_m$. Funktion $g(s)$ ääretön valuaatio on siis

$$\delta_\infty(g(s)) = k - m.$$

Tekemällä sijoitus $s = \frac{1}{w}$ saadaan

$$g\left(\frac{1}{w}\right) = w^{k-m}\frac{n_m + n_{m-1}w + \cdots + n_0 w^m}{d_k + d_{k-1}w + \cdots + d_0 w^k},$$

joten rationaalifunktion $g\left(\frac{1}{w}\right)$ äärellinen valuaatio pisteessä $w = 0$ on

$$\delta_0\left(g\left(\frac{1}{w}\right)\right) = k - m = \delta_\infty(g(s)).$$

Nyt tulos seuraa suoraan lauseista 3.1.2 ja 3.2.3. $\square$

Luku 4

Lineaarisen systeemin siirtonollat ja navat

Tässä luvussa esitellään lineaaristen systeemeiden siirtonollien ja napojen käsitteet. Alussa selvitetään mitä lineaarisilla systeemeillä ja lineaarisen systeemin siirtofunktiolla tarkoitetaan tässä työssä. Äärellisulotteisten lineaaristen systeemeiden siirtonollat ja navat, jotka tunnetaan hyvin kirjallisuudessa, esitellään ja käsitteitä pyritään yleistämään ääretönulotteisille systeemeille. Lopuksi esitellään vielä esimerkkejä siirtonollien merkityksestä säätöteoriassa. Säätöteorian peruskäsitteiden oletetaan olevan tuttuja lukijalle ja sen vuoksi niitä ei anneta tässä yhteydessä. Käsitteiden määritelmät löytyvät kirjasta [7].

Jatkossa käsitellään lineaarisia normiavaruuksia, mutta puhumme vain lineaarisista avaruuksista. Lineaaristen avaruuksien V ja W välillä olevien lineaaristen operaattoreiden $L : V \to W$ joukolle käytetään merkintää $\mathscr{L}(V, W)$. Jos $V = W$, niin merkittään vain $\mathscr{L}(V)$. Rajoitetuille lineaarisille operaattoreille käytetään vastaavasti merkintöjä $\mathscr{B}(V, W)$ ja $\mathscr{B}(V)$. Tässä työssä käsiteltävät lineaariset systeemit annetaan tilaesitysmuodossa. Merkinnällä $\Sigma(A, B, C, D)$ tarkoitetaan lineaarista tilaesitysmuodossa annettua systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{cases}$$

Ellei toisin mainita oletetaan alkutilan olevan $x(0) = 0$ ja se jätetään merkitsemättä tilaesitysmuodon yhteydessä. Yllä $u(t) \in U$, $x(t) \in X$ ja $y(t) \in Y$, missä U ohjausavaruus, X tila-avaruus ja Y mittausavaruus. Lisäksi $A \in \mathscr{L}(X)$, $B \in \mathscr{L}(U, X)$, $C \in \mathscr{L}(X, Y)$ ja $D \in \mathscr{L}(U, Y)$, ellei toi-

sin mainita. Jos $D = 0$, niin merkitään lineaarista systeemiä $\Sigma(A, B, C)$. Mikäli ohjaus-, tila- ja mittausavaruudet ovat kaikki äärellisulotteisia, niin puhutaan äärellisulotteisesta systeemistä. Muussa tapauksessa systeemi on ääretönulotteinen. Tilaesitysmuoto ei välttämättä ole ratkeava annetulla alkutilalla. Tässä työssä ei käsitellä tilaesitysmuodon yhtälöiden ratkeavuutta tarkemmin, vaan oletamme systeemin määrittävien yhtälöiden olevan ratkeavia.

Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ Laplace-muunnokselle käytetään merkintää

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Huomaa, että jos yllä oleva integraali on olemassa jollain s_0, niin se on olemassa kaikilla s, joilla $\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_0)$. Siis jos Laplace-muunnos on ylipäätänsä olemassa, niin se on määritelty jossain kompleksitason oikeassa avoimessa puolitasossa $\mathbb{C}_{\beta+} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \beta\}$ tai koko kompleksitasossa.

Laplace muuntamalla lineaarisen systeemin $\Sigma(A, B, C, D)$ määrittelevät yhtälöt puolittain ja ottamalla huomioon Laplace-muunnoksen lineaarisuus ja ominaisuus $\hat{\dot{x}}(t) = s\hat{x}(t) - x(0)$, missä oletetaan $x(0) = 0$, saadaan

$$\begin{cases} (sI - A)\hat{x}(t) &= B\hat{u}(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + D\hat{u}(t) \end{cases}$$

ja edelleen

$$\hat{y}(t) = \Big(C(sI - A)^{-1}B + D\Big)\,\hat{u}(t).$$

Viimeisessä yhtälössä tarvitaan operaattorin $sI - A$ kääntyvyyttä. Äärellisulotteisessa tapauksessa on selvää, että $sI - A$ on kääntyvä täsmälleen silloin, kun s ei ole matriisin operaattorin A ominaisarvo. Ääretönulotteisessa tapauksessa tilanne ei ole yhtä suoraviivainen, vaan $(sI - A)^{-1}$ täytyy tulkita määritellyksi sopivassa tila-avaruuden X osajoukossa. Resolventtijoukolle, määritelmä kirjassa [7, s.608, määritelmä A.4.1], käytetään merkintää $\rho(A)$ ja tässä joukossa määriteltyä operaattoria $(sI - A)^{-1}$ kutsutaan resolventtioperaattoriksi. Joukkoa

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kutsutaan operaattorin A spektriksi.

Määritelmä 4.0.4. *Systeemin $\Sigma(A, B, C, D)$ karakteristinen funktio on kuvaus*

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Karakteristinen funktio siis antaa kuvauksen lineaarisen systeemin Laplace-muunnettujen sisään- ja ulostulon välille. Karakteristinen funktio on määritelty kaikilla $s \in \rho(A)$.

Puhuttaessa muuntamattomasta systeemistä tarkastellaan sitä aikatasossa, kun taas Laplace-muunnettua esitystä ja erityisesti siirtofunktiota tarkasteltaessa systeemiä tarkastellaan taajuustasossa. Siis Laplace-muunnoksella ja sen käänteismuunnoksella voidaan siirtyä aikatason tarkastelusta taajuustason tarkasteluun ja päinvastoin.

Kirjallisuudessa karakteristista funktiota kutsutaan yleisesti siirtofunktioksi, mutta koska käsittelemme myöhemmin ääretönulotteisia systeemejä erotamme nämä käsitteet toisistaan. Artikkelin [47] mukaisesti määrittelemme siirtofunktion seuraavasti:

Määritelmä 4.0.5. *Oletetaan, että $x(0) = 0$ ja olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että on olemassa sellainen funktio $H : \{s \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(s) > \alpha\} \to \mathscr{L}(U, Y)$, että kaikilla joukossa $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$ Laplace-muuntuvilla sisään- ja ulostuloilla $u(t)$ ja $y(t)$ pätee*

$$\hat{y}(s) = H(s)\hat{u}(s), \text{ kun } \mathrm{Re}(s) > \alpha.$$

Funktiota $H(s)$ kutsutaan systeemin siirtofunktioksi.

Annetun siirtofunktion määrittelyjoukkoa voidaan laajentaa analyyttisesti jatkamalla. Analyyttisestä jatkosta lisää esimerkiksi kirjoissa [20] ja [21]. Kuten artikkelissa [47] todetaan, voidaan äärellisulotteisen systeemin siirtofunktio jatkaa analyyttisesti joukkoon $\rho(A)$ ja siirtofunktio on yksikäsitteisesti karakteristinen funktio. Toisaalta artikkelissa todetaan, että ääretönulotteisessa tapauksessa tilanne ei ole yhtä selvä. Tähän palataan takaisin kun käsitellään ääretönulotteisen systeemin napoja ja nollia.

4.1 Äärellisulotteisen systeemin nollat ja navat

Seuraavaksi tarkastellaan äärellisulotteisia systeemejä, joilla $U = \mathbb{C}^m$, $X = \mathbb{C}^p$ ja $Y = \mathbb{C}^n$. Aiemmin on määritelty karakteristinen funktio $G(s)$, joka on määritelty kaikilla $s \in \rho(A)$. Kuten jo aiemmin on todettu, on siirtofunktio on yksikäsitteisesti karakteristinen funktio äärellisessä tapauksessa.

Koska jokaisella lineaarisella kuvauksella Euklidisten avaruuksien välillä on matriisiesitys, niin voidaan puhua matriiseista A, B, C ja D.

Koska siirtofunktio on nyt aina rationaalifunktio, voidaan määritellä siirtofunktion nollat ja navat käyttäen rationaalifunktion nollien ja napojen määritelmää. Matriisin $sI - A$ käänteismatriisi lähestyy selvästi nollamatriisia, kun s kasvaa rajatta. Täten siirtofunktio $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ lähestyy matriisia D. Koska tarkastellaan vain tilaesitysmuodossa

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

annettuja lineaarisia systeemejä, niin lineaarisilla systeemeillä ei ole äärettömiä napoja ja jätämme äärettömät navat määrittelemättä.

Jos käsiteltäisiin myös yleistetyssä tilaesitysmuodossa annettua systeemiä

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases}$$

missä matriisin E ei tarvitse olla kääntyvä, niin tällöin siirtofunktio olisi muotoa $G(s) = C(sE - A)^{-1}B + D$. Jokainen rationaalifunktio voidaan esittää muodossa $C(sE - A)^{-1}B + D$, kuten esimerkiksi artikkelissa [43] todetaan. Täten yleistetyssä tilaesitysmuodossa annetun systeemin siirtofunktiolla voi olla äärettömiä napoja.

Määritelmä 4.1.1 (Systeemin siirtonollat ja navat)**.** *Lineaarisen systeemin äärelliset siirtonollat ja navat ovat sen siirtofunktiomatriisin määritelmän 3.1.3 mukaiset äärelliset nollat ja navat. Lineaarisen systeemin äärettömät siirtonollat ovat sen siirtofunktiomatriisin $G(s)$ määritelmän 3.2.3 mukaiset nollat äärettömyydessä.*

Koska tässä työssä käsitellään tarkemmin vain siirtonollia, niin siirtonollista puhutaan lyhyesti nollina. Muun tyyppisistä nollista, joita jatkossa esitellään, käytetään aina niille annettua nimitystä.

Tässä työssä siirtonollia ja napoja käsitellään puhtaasti taajuustasossa. Aikatasossa äärellisen systeemin äärellinen nolla nollaa täysin tietyn tyyppisen sisäänmenon. Sen sijaan ääretönulotteisilla systeemeillä tilanne ei ole näin selvä. Kiinnostunut lukija voi tutustua artikkeleihin [8, 3].

4.1.1 Systeemimatriisin ja nollien yhteys

Seuraavaksi osoitetaan, että nollat voidaan määrittää varsin yleisesti myös käyttämällä Rosenbrockin määrittelemää systeemimatriisia. Lineaarisen systeemin $\Sigma\,(A, B, C, D)$ systeemimatriisi on

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Huomaa, että systeemimatriisi on polynomimatriisi ja siksi sen käyttö voi olla miellyttävämpää nollia laskettaessa. Polynomimatriiseilla ei ole äärellisiä napoja, mutta äärettömiä napoja kylläkin. Ennen kuin voidaan siirtyä tarkastelemaan tarkemmin milloin systeemimatriisia voidaan käyttää nollien määrittelyyn tarvitaan id- ja od-nollien käsitteet. Nimet tulevat englanninkielisistä termeistä input- ja output-decoupling zeros.

Määritelmä 4.1.2 (Systeemi-, id- ja od-nollat nollat)**.** *Systeemin $\Sigma\,(A, B, C, D)$ systeeminollat ovat sen systeemimatriisin $P(s)$ määritelmän 3.1.3 mukaiset nollat.*

Systeemin $\Sigma\,(A, B, C, D)$ id-nollat ovat polynomimatriisin

$$M_i(s) = [sI - A\ B]$$

ja od-nollat ovat polynomimatriisin

$$M_o(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

määritelmän 3.1.3 mukaiset nollat.

Lauseen 3.1.3 nojalla on selvää, että polynomimatriisien nollakohdissa matriisin aste putoaa alle sen normaaliasteen. Siis systeemillä on id-nolla pisteessä s_0, jos rank $M_i(s_0) < p$, ja od-nolla, jos rank $M_o(s_0) < p$, missä p on tila-avaruuden dimensio. Esittelemme vielä yksinkertaisen tavan laskea id- ja od-nollien määrän.

Lause 4.1.1. *Tarkastellaan systeemiä $\Sigma\,(A, B, C, D)$, jonka tila-avaruuden dimensio on p. Id-nollien määrä on*

$$p - \text{rank}\ \left[B, AB, \ldots, A^{p-1}B\right]$$

ja od-nollien määrä on

$$p - \text{rank}\ \left[C^T, (CA)^T, \ldots, (CA^{p-1})^T\right]^T.$$

Todistus: Katso [37, s. 85, lause 8.1].

Systeemiteoriaa tunteva huomaa, että edellinen tulos liittyy läheisesti ohjattavuuteen ja tarkkailtavuuteen. Tässä työssä lähtökohtaisesti on oletettu tarkasteltava systeemi annetuksi. Toisaalta voidaan haluta rakentaa systeemi, jolla on annettu siirtofunktio. Siirtofunktiolla on useita realisaatioita, joista osa on tietyssä mielessä minimaalisia.

Määritelmä 4.1.3. *Realisaatiota sanotaan minimaaliseksi tai pienintä astetta olevaksi, jos sillä ei ole id- eikä od-nollia.*

Lause 4.1.2. *Tarkastellaan minimaalista systeemiä $\Sigma(A, B, C, D)$. Systeemin äärelliset siirtonollat ovat samat kuin systeemimatriisin $P(s)$ äärelliset nollat ja äärelliset navat ovat samat kuin matriisin $sI - A$ äärelliset nollat.*

Todistus: Katso [37, s. 111, lause 4.1].

Esimerkki 4.1.1. Tarkastellaan systeemiä $\Sigma(A, b, c)$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ ja } c = [0 \; 1].$$

Nyt systeemimatriisi on

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc|c} s-1 & 1 & -1 \\ 0 & s-1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

mistä suoraan nähdään, että systeemillä on od-nolla pisteessä $s = 1$. Systeemimatriisin Smithin muoto on $\operatorname{diag}(1, 1, s-1)$, joten sillä on pisteessä $s = 1$ yksi nolla. Matriisin $sI - A$ Smithin muoto on $\operatorname{diag}(1, (s-1)^2)$ joten sillä on pisteessä $s = 1$ toista astetta oleva nolla.

Suora laskutoimitus antaa siirtofunktioksi

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b = (s-1)^{-1},$$

joten siirtofunktiolla on astetta yksi oleva napa pisteessä $s = 1$.

Huomataan, että siirtofunktion nollat ja navat eroavat polynomimatriisien $sI - A$ ja $P(s)$ antamista nollista ja navoista. Tämä johtuu siitä, että pisteessä $s = 1$ oleva nolla ja napa kumoavat siirtofunktiossa toisensa. ■

Seuraava tulos on todistettu artikkelissa [43], jossa käsitellään yleistetyssä tilaesitysmuodossa annettuja systeemejä. Sen vuoksi kyseisessä artikkelissa seuraavan lauseen todistus on vaikeampi kuin tässä esitettävä. Artikkelissa on myös jouduttu esittämään oletuksia, joita tässä ei tarvita.

Lause 4.1.3. *Lineaarisen systeemin $\Sigma(A, B, C, D)$ nollat äärettömyydessä ovat täsmälleen sen systeemimatriisin $P(s)$ nollat äärettömyydessä.*

Todistus: Käyttämällä kaavaa B.1 todetaan, että mikäli systeemillä on sama määrä sisäänmenoja ja ulostuloja, saadaan systeemimatriisille esitys

$$\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C(sI - A)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & 0 \\ 0 & C(sI - A)^{-1}B + D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & -(sI - A)^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Koska $(sI - A)^{-1} \to 0$, kun $s \to \infty$, niin matriisit

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C(sI - A)^{-1} & I \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} I & -(sI - A)^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

ovat $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaarisia.

Apulauseen 2.2.2 nojalla $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaarisella matriisilla kertominen ei vaikuta matriisin äärettömiin nolliin, joten matriisin

$$\begin{bmatrix} sI - A & 0 \\ 0 & C(sI - A)^{-1}B + D \end{bmatrix}$$

nollastruktuuri äärettömyydessä on sama kuin systeemimatriisin. Koska polynomimatriisilla $sI - A$ ei ole äärettömiä nollia, niin systeemimatriisin äärettömät nollat ovat matriisin $C(sI - A)^{-1}B + D$ äärettömät nollat, eli siirtofunktion nollat.

Mikäli systeemillä on enemmän sisäänmenoja kuin ulostuloja, voidaan systeemimatriisiin alapuolelle lisätä sopiva määrä rivejä, joiden alkiot ovat nollia, jolloin systeemimatriisi saadaan neliömatriisiksi. Nollarivien lisääminen ei muuta nollastruktuuria äärettömyydessä, koska Smith-McMillanin muotoon ilmestyy vain lisää nollarivejä. Nollarivien lisäämisen jälkeen voidaan käyttää hajotelmaa 4.2. Kuten edellä päätellään, että systeemimatriisin nollastruktuuri äärettömyydessä on identtinen matriisin

$$\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} C(sI - A)^{-1}B + D \\ 0 \end{bmatrix}$$

kanssa, jonka nollastruktuuri äärettömyydessä on identtinen siirtofunktion kanssa.

Vastaavanlainen tarkastelu voidaan tehdä tapauksessa, jossa ulostuloja on enemmän kuin sisääntuloja. Tällöin systeemimatriisiin lisätään sopiva määrä nollasarakkeita. □

4.1.2 Takaisinkytkennän vaikutus nolliin

Lause 4.1.4. *Minimaalisella systeemillä $\Sigma(A, B, C, D)$ äärelliset nollat ovat invariantteja tilatakaisinkytkennän suhteen.*

Todistus: Käytetään systeemiin tilatakaisinkytkentää

$$u = v + Fx,$$

jolloin saadaan systeemi $\Sigma(A + BF, B, C + DF, D)$, jonka systeemimatriisi on

$$P_c(s) = \begin{bmatrix} sI - (A + BF) & -B \\ C + DF & D \end{bmatrix},$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$P_c(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix} = P(s)V,$$

missä V on kääntyvä vakiomatriisi ja näin ollen $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarinen. Koska apulauseen 2.2.2 mukaan $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarisella matriisilla kertominen ei muuta äärellisiä nollia, niin systeemimatriisien $P(s)$ ja $P_c(s)$ äärelliset nollat ovat samat. Lauseen 4.1.2 nojalla systeemin nollat ovat sen systeemimatriisi nollat. □

Esimerkki 4.1.2. Tarkastellaan edelleen esimerkin 4.1.1 systeemiä. Systeemillä yksi napa ja nolla osuivat päällekkäin ja kumosivat toistensa vaikutuksen. Käytetään nyt systeemiin tilatakaisinkytkentää $u = v + [-1\ -1]x$, jolloin saadaan suljettu systeemi $\Sigma(A + bf, b, c)$, jonka siirtofunktioksi saadaan

$$G_c(s) = c(sI - (A + bf))^{-1}b = \frac{s - 1}{(s - i\sqrt{2})(s + i\sqrt{2})}.$$

Siis systeemillä on siirtonolla pisteessä $s = 1$ ja navat pisteissä $\pm i\sqrt{2}$. Kun tarkastellaan suljetun systeemin systeemimatriisia

$$P_c(s) = \left[\begin{array}{cc|c} s & -2 & -1 \\ 1 & s & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

huomataan, että suljetulla systeemillä ei ole id- tai od-nollia, joten systeemimatriisilla $P_c(s)$ on nolla pisteessä $s = 1$ ja matriisilla $sI - (A + bf)$ on nollat pisteissä $s = \pm i\sqrt{2}$. Koska systeemi on nyt minimaalinen, niin sen siirtonolliin ei voida enää vaikuttaa tilatakaisinkytkentää käyttäen. ■

Lause 4.1.5. *Systeemin $\Sigma\,(A, B, C, D)$ äärettömät nollat ovat invariantteja tilatakaisinkytkennän suhteen.*

Todistus: Kuten lauseen 4.1.4 todistus, mutta käytetään lopuksi lauseen 4.1.2 sijasta lausetta 4.1.3. □

Lause 4.1.6. *Systeemin muuntaminen kääntyvällä esi- tai jälkikompensaattorilla ei vaikuta äärellisiin ja äärettömiin nolliin.*

Todistus: Tarkastellaan systeemiä $\Sigma\,(A, B, C, D)$ ja käytetään siihen kääntyviä esi- ja jälkikompensaattoreita K ja P. Kun v ja w ovat uuden systeemin sisään- ja ulostulo, niin $u = Kv$ ja $Py = w$. Muunnettu systeemi on muotoa

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + BKv \\ w &= PCx + PDKv \end{cases}$$

ja sen siirtofunktio on

$$PC(sI - A)^{-1}BK + PDK = P(C(sI - A)^{-1}B + D)K.$$

Koska P ja K kääntyvinä vakiomatriiseina ovat $\mathbb{C}_{pr}(s)$- ja $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarisia, niin uuden systeemin äärelliset ja äärettömät nollat ovat samat kuin rationaalimatriisin $C(sI - A)^{-1}B + D$, eli täsmälleen alkuperäisen systeemin äärelliset ja äärettömät nollat. □

Seuraavaksi käsitellään ulostulotakaisinkytkennän vaikutusta systeemin nolliin. Ulostulotakaisinkytkennässä esiintyvä matriisi F valitaan siten, että voidaan puhua suljetun systeemin siirtofunktiosta. Tämän takia matriisin $I - G(s)F$ voidaan olettaa olevan kääntyvä.

Lause 4.1.7. *Systeemin äärelliset nollat eivät muutu, kun systeemiin sovelletaan ulostulotakaisinkytkentää*

$$u = v + Fy \tag{4.3}$$

missä v on uusi sisääntulo ja F on vakiomatriisi.

Todistus: Todistuksen idea on artikkelista [10], jossa kyseinen tulos on äärettömille nollille yleistetyn tilaesitysmuodon tapauksessa. Todistuksessa jaottomat hajotelmat otetaan yli renkaan $\mathbb{C}[s]$.

Tarkastellaan systeemiä $\Sigma\,(A, B, C, D)$. Siis tilatakaisinkytkentää (4.3) käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} y = G(s)u = G(s)(v + Fy) \quad &\Rightarrow (I - G(s)F)y = G(s)v \\ &\Rightarrow y = (I - G(s)F)^{-1}G(s)v, \end{aligned}$$

joten suljetun systeemin siirtofunktio on

$$G_c(s) = (I - G(s)F)^{-1}G(s). \tag{4.4}$$

Rationaalimatriisi $G(s)$ voidaan esittää lauseen 2.1.4 nojalla muodossa $G(s) = D^{-1}(s)N(s)$, missä $N(s)$ ja $D(s)$ ovat vasemmalta jaottomia. Nyt siis yhtälön 4.4 suljetun systeemin siirtofunktion esitys saadaan muotoon

$$G_c(s) = (I - D^{-1}(s)N(s)F)^{-1}D^{-1}(s)N(s) = (D(s) + N(s)F)^{-1}N(s).$$

Koska $N(s)$ ja $D(s)$ ovat vasemmalta jaottomia, niin löytyy sellaiset $X(s), Y(s) \in \mathbb{C}[s]$, että

$$N(s)X(s) + D(s)Y(s) = I.$$

Valitsemalla $X_0(s) = X(s) - FY(s)$ saadaan

$$N(s)X_0(s) + (D(s) + N(s)F)Y(s) = N(s)X(s) + D(s)Y(s) = I,$$

joten $D(s) + N(s)F$ ja $N(s)$ ovat vasemmalta jaottomia. $D(s) + N(s)F$ on kääntyvä lähes kaikilla $s \in \mathbb{C}$, joten sen determinantti ei ole identtisesti nolla. Pari $(N(s), D(s) + N(s)F)$ on siis vasemmalta jaoton hajotelma suljetulle systeemille. Lauseen 3.1.3 nojalla rationaalimatriisien $G(s)$ ja $G_c(s)$ äärelliset nollat ovat matriisin $N(s)$ äärelliset nollat. $\square$

Lause 4.1.8. *Systeemin äärettömät nollat eivät muutu, kun systeemiin sovelletaan ulostulotakaisinkytkentää*

$$u = v + Fy \tag{4.5}$$

missä v on uusi sisääntulo ja F on vakiomatriisi.

Todistus: Kuten lauseen 4.1.7 todistus, mutta hajotelma otetaan yli renkaan $\mathbb{C}_{pr}(s)$ ja lauseen 3.1.3 sijasta käytetään lausetta 3.2.2. □

4.2 Ääretönulotteisen systeemin nollat ja navat

Äärellisulotteisen systeemin nollien ja napojen käsitteet ovat tunnettuja ja niiden merkitys säätöteoriassa hyvin tiedossa. Tilanne on toinen ääretönulotteisten systeemien kohdalla. Osaltaan tähän on syynä sopivien työkalujen, kuten Smith-McMillanin muodon ääretönulotteisen vastineen puute. Seuraavaksi esitellään varsin kattavasti se mitä ääretönulotteisten systeemien nollista tiedetään ja esitellään tulos, jonka avulla voidaan yleistää äärellisen ja äärettömän struktuurin käsitteet ääretönulotteisille systeemeille tietyissä tapauksissa.

Tässä luvussa käsittelemme systeemejä, joilla $U = \mathbb{C}^m$, $Y = \mathbb{C}^n$ ja X on Banach-avaruus, ellei toisin mainita. Jatkossa tehdään tarvittaessa oletuksia operaattoreista A, B ja C. Huomaa, että operaattoria D voidaan tehdyillä oletuksilla käsitellä vakiomatriisina.

Ääretönulotteisen systeemin nollia käsiteltäessä törmäämme välttämättä ongelmiin, joita äärellisulotteisten systeemien tapauksessa ei ole. Ongelmaksi osoittautuu jo siirtofunktion määritelmä. Artikkelissa [47] osoitetaan, että karakteristinen funktio $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ on siirtofunktio määrittelyjoukossaan, mutta kun tarkastellaan jotain kiinnitettyä oikeanpuoleista puolitasoa, niin voidaan mahdollisesti löytää muitakin siirtofunktion määritelmän toteuttavia funktioita. Täten voimme siis joissakin tapauksissa tarkastella siirtofunktiota vain jossain oikeanpuoleisessa puolitasossa. Toisaalta esimerkiksi artikkelissa [16] siirtofunktiolla tarkoitetaan nimenomaan karakteristista funktiota, joten on perusteltua myös tutkia pelkästään sen käyttäytymistä määrittelyjoukossaan.

Ääretönulotteisen systeemin siirtofunktio ei yleisesti ottaen ole rationaalifunktio ja siksi nollia ja napoja määriteltäessä ei voida käyttää enää rationaalimatriisin nollien ja napojen määritelmää. Toisaalta monessa tapauksessa siirtofunktio voidaan esittää Laurentin sarjana tutkittavan pisteen ympäristössä. Siksi seuraavaksi esitellään Laurentin sarjojen avulla saatava muoto, jonka avulla nähdään funktion käyttäytymisen valitun pisteen s_0 lähellä. Tämä tarkastelu on luonteeltaan paikallinen, toisin kuin Smith-McMillanin muodon käyttö rationaalimatriisin äärellisten nollien määrittelyssä. Sen sijaan äärettömien nollien määrittelyssä tarkastelu on jo aiemmin ollut luonteeltaan paikallinen.

Seuraavassa tarkastelussa merkinnällä $\mathscr{O}\left((s-s_0)^t\right)$ tarkoitetaan jotain sellaista matriisia, jonka pisteen s_0 Laurentin sarjan johtavan termi on korkeintaan astetta $t \in \mathbb{Z}$. Merkinnällä $\mathscr{O}_-\left(s^t\right)$ tarkoitetaan jotain matriisia, joka muuttujan vaihdon $s = \frac{1}{w}$ jälkeen on $\mathscr{O}\left((w-w_0)^{-t}\right)$ pisteessä $w_0 = 0$. Merkinnät $O\left((s-s_0)^t\right)$ ja $O_-\left(s^t\right)$ ovat vastaavat merkinnät funktioille. Merkinnällä $\mathscr{H}_{s_0,\epsilon}(s)$ tarkoitetaan niiden funktioiden joukkoa, jotka ovat analyyttisiä pisteen s_0 ϵ-säteisessä ympäristössä. Tämä joukko yhdessä normaalien yhteen ja kertolaskun kanssa muodostavat renkaan, eli voidaan puhua $\mathscr{H}_{s_0,\epsilon}(s)$-unimodulaarisesta matriisista.

Lause 4.2.1. *Olkoon $G(s)$ $n \times m$-matriisi, jonka alkiot voidaan pisteen $s_0 \in \mathbb{C}$ läheisyydessä esittää muodossa $\sum_{k=q}^{\infty} c_k(s-s_0)^k$, missä $q \in \mathbb{Z}$. Löytyy sellainen $\epsilon > 0$ ja $\mathscr{H}_{s_0,\epsilon}(s)$-unimodulaariset matriisit $L(s)$ ja $R(s)$, että*

$$\begin{aligned} L(s)G(s)R(s) &= \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(y_1(s), y_2(s), \ldots, y_r(s)\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= H_{G,s_0}(s) \end{aligned}$$

missä $y_i(s) = a_i(s-s_0)^{k_i} + O\left((s-s_0)^{k_i+1}\right)$ ja $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_r$, sekä r on matriisin $G(s)$ normaaliaste.

Todistus: Olkoon $G(s)$ lauseen oletukset täyttävä matriisi. Väite todistetaan esittelemällä algoritmi, joka redusoi matriisin $G(s)$ haluttuun muotoon elementaarisilla rivi- ja sarakeoperaatioilla. Voidaan olettaa, että $s_0 = 0$, sillä muussa tapauksessa voitaisiin tehdä sijoitus $w = s - s_0$ ja tarkastella matriisia $G(w)$ pisteessä 0.

Kussakin vaiheessa muunnettua matriisia merkitään yhdellä merkinnällä

$G'(s)$ ja sen alkioita merkitään

$$f_{ij}(s) = \sum_{k=q_{ij}}^{\infty} c_{ij}^{(k)} s^k, \text{ missä } c_{ij}^{(q_{ij})} \neq 0.$$

Merkitään $\delta(f_{ij}(s)) = q_{ij}$, kun $f_{ij}(s) \not\equiv 0$, eli q_{ij} on alkion sarjakehitelmän johtavan termin aste. Lisäksi matriisin $G'(s)$ alimatriisia, joka saadaan poistamalla t ensimmäistä riviä ja saraketta, merkitään $G_t(s)$. Aluksi $G'(s) = G(s)$. Algoritmissa jokaisessa vaiheessa käsittely tapahtuu jossain tarpeeksi pienessä ympäristössä.

Askel 1: Tuodaan rivin ja sarakkeen vaihto-operaatioin matriisin $G'(s)$ paikkaan (1,1) alkio, jolla $\delta(f_{ij}(s))$ on pienin. Määritellään funktio $g_{11}(s) = s^{-q_{11}} f_{11}(s)$, joka eroaa nollasta jossain pisteen s_0 ympäristössä. Lisätään ensimmäinen sarake j. sarakkeeseen kerrottuna termillä

$$h_{1j}(s) = -s^{-q_{11}} (g_{11}(s))^{-1} f_{1j}(s).$$

Koska $q_{11} \leq q_{ij}$, niin $h_{1j} \in \mathscr{H}_{0,\epsilon}(s)$ jollain $\epsilon > 0$. Lisäksi

$$\delta(f_{i1}(s) h_{1j}(s)) > \delta(f_{i1}(s)) \geq q_{11}.$$

Siis tämä operaatio ei voi vähentää ensimmäisen rivin ja sarakkeen ulkopuolisten alkioiden johtavien termien asteita alle arvon q_{11}. Ensimmäisen rivin j. alkio on nyt

$$f_{1j}(s) - \underbrace{s^{-q_{11}} f_{11}(s)}_{g_{11}(s)} (g_{11}(s))^{-1} f_{1j}(s) = 0.$$

Näin saadaan ensimmäisen rivin diagonaalin ulkopuoliset alkiot nollaksi käyttäen elementaarisia sarakeoperaatioita. Vastaavilla rivioperaatioilla saadaan ensimmäisen sarakkeen diagonaalin ulkopuoliset alkiot nollaksi. On selvää, että tämän askeleen jälkeen matriisin $M_1(s)$ alkioiden sarjakehitelmien johtavien termien aste on vähintään q_{11}.

Yleinen askel: Matriisi on askelen alussa muotoa

$$G'(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(f_{11}(s), \ldots, f_{pp}(s)) & 0 \\ 0 & M_p(s) \end{bmatrix},$$

missä $\delta(f_{11}(s)) \leq \cdots \leq \delta(f_{pp}(s))$ ja matriisin $M_p(s)$ alkioiden johtavien termien asteet ovat vähintään $\delta(f_{pp}(s))$. Jos $M_p(s) = 0$ tai $p = \min\{m, n\}$, niin

algoritmi päättyy. Muussa tapauksessa matriisille $G'(s)$ tehdään operaatiot, jotka nollaavat matriisin $M_p(s)$ ensimmäisen rivin ja sarakkeen diagonaalin ulkopuoliset alkiot. Operaatiot ovat vastaavat kuin ensimmäisessä askeleessa tehdyt. On selvää, ettei tässä vaiheessa tarvittavat rivi- ja sarakeoperaatiot vaikuta jo käsiteltyihin riveihin ja sarakkeisiin. On helppo vakuuttua, että askeleen jälkeen diagonaalin alkio $f_{p+1,p+1}(s)$ johtavan termin aste on suurempaa tai yhtä suurta kuin alkion $f_{pp}(s)$.

Algoritmin päättyminen: Koska jokaisessa vaiheessa siirrytään käsittelemään aina vain pienempää oikean alakulman blokkia ja jokaisessa askelessa tarvitaan vain äärellinen määrä rivi- ja sarakeoperaatioita, niin algoritmi päättyy äärellisen monen operaation jälkeen. Koska jokaisessa vaiheessa tarkastelu voidaan tehdä pisteen s_0 riittävän pienessä ympäristössä ja operaatioita tehdään äärellinen määrä, niin löytyy lauseen mukainen $\epsilon > 0$. Matriisi $L(s)$ saadaan kertomalla elementaarisia rivioperaatiota vastaavat matriisit keskenään ja $R(s)$ vastaavasti kertomalla sarakeoperaatioita vastaavat matriisit. Elementaarisia rivi- ja sarakeoperaatioita vastaavat matriisit ovat $\mathscr{H}_{0,\epsilon}(s)$-unimodulaarisia, joten myös matriisit $L(s)$ ja $R(s)$ ovat. $\square$

Jos $f\left(\frac{1}{s}\right) \in \mathscr{H}_{0,\epsilon}(s)$, niin merkitään $f(s) \in \mathscr{H}_{\infty,M}(s)$, missä $M = \frac{1}{\epsilon}$. Näin ollen funktio $f(s) \in \mathscr{H}_{\infty,M}(s)$, voidaan kirjoittaa sarjana

$$\sum_{k=q}^{\infty} c_k s^{-k}, \text{ kun } |s| > M.$$

Myös $\mathscr{H}_{\infty,M}(s)$ on rengas kun yhteen- ja kertolasku määritellään normaaliin tapaan pisteittäin.

Lause 4.2.2. *Olkoon $G(s)$ $n \times m$-matriisi, jonka alkiot voidaan suurilla muuttujan s arvoilla esittää muodossa $\sum_{k=q}^{\infty} c_k s^{-k}$. Löytyy sellainen $M > 0$ ja sellaiset $\mathscr{H}_{\infty,M}(s)$-unimodulaariset matriisit $L(s)$ ja $R(s)$, että*

$$\begin{aligned} L(s)G(s)R(s) &= \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(y_1(s), y_2(s), \ldots, y_r(s)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= H_{G,\infty}(s), \end{aligned}$$

missä $y_i(s) = a_i s^{-k_i} + O_-\left(s^{-k_i-1}\right)$ ja $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_r$, sekä r on matriisin $G(s)$ normaaliaste.

Todistus: Käytetään lauseen 4.2.1 todistuksen algoritmia matriisiin $G\left(\frac{1}{s}\right)$ pisteessä $s_0 = 0$. $\square$

Koska rationaalifunktio $f(s)$ voidaan esittää pisteen s_0 ympäristössä muodossa $f(s) = \sum_{k=q}^{\infty} c_k(s-s_0)^k$, niin lausetta 4.2.1 voidaan soveltaa rationaalimatriisiin $G(s)$. Siis voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} L(s)G(s)R(s) &= \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(y_1(s), y_2(s), \ldots, y_r(s)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= H_{G,s_0}(s), \end{aligned}$$

missä $y_i(s) = a_i(s-s_0)^{k_i} + O\left((s-s_0)^{k_i+1}\right)$ ja $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_r$, sekä r on matriisin $G(s)$ normaaliaste. Lauseen 4.2.1 algoritmissa käytettävät funktiot ovat tässä tapauksessa rationaalisia, joten $H_{G,s_0}(s)$, $L(s)$ ja $R(s)$ ovat rationaalimatriiseja. Koska $L(s)$ ja $R(s)$ ovat $\mathscr{H}_{s_0,\epsilon}(s)$-unimodulaarisia matriiseja, niin ne ovat kääntyviä pisteessä s_0. Siis matriisien $G(s)$ ja $H_{G,s_0}(s)$ rakenneindeksit ovat samat lauseen 3.1.4 nojalla. Kuten samaisen lauseen todistuksessa voidaan todeta matriisin $H_{G,s_0}(s)$ asteindeksien avulla, että sen rakenneindeksit ovat $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Siis matriisin $H_{G,s_0}(s)$) johtavien termien asteesta nähdään suoraan matriisin $G(s)$ nollat ja navat pisteessä s_0. Lauseen 3.2.3 avulla on helppo nähdä, että tulos pätee myös pisteessä $s = \infty$. Annetaan tulokset vielä lauseina.

Lause 4.2.3. *Olkoon $G(s)$ rationaalimatriisi ja*

$$H_{G,s_0}(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(y_1(s), y_2(s), \ldots, y_r(s)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kuten lauseessa 4.2.1, eli $y_i(s) = a_i(s-s_0)^{k_i} + O\left((s-s_0)^{k_i+1}\right)$. Tällöin matriisin $G(s)$ rakenneindeksit pisteessä s_0 ovat

$$q_1(s_0) = k_1, q_2(s_0) = k_2, \ldots, q_r(s_0) = k_r.$$

Lause 4.2.4. *Olkoon $G(s)$ rationaalimatriisi ja*

$$H_{G,\infty}(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(y_1(s), y_2(s), \ldots, y_r(s)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kuten lauseessa 4.2.2, eli $y_i(s) = a_i s^{-k_i} + O_-\left(s^{-k_i-1}\right)$. *Tällöin matriisin* $G(s)$ *rakenneindeksit äärettömyydessä ovat*

$$q_1(\infty) = k_1, q_2(\infty) = k_2, \ldots, q_r(\infty) = k_r.$$

Lauseet 4.2.1 ja 4.2.2 tarjoavat Smith-McMillanin muodon vastineen rationaalimatriisien joukkoa laajemmassa joukossa. Kirjoittajan tiedon mukaan kyseiseisten lauseiden tulokset eivät ole esiintyneet aiemmin kirjallisuudessa. Lauseet siis tarjoavat uuden tavan määritellä äärelliset ja äärettömät nollat ja navat asteineen yleisemmässä tapauksessa kuin Smith-McMillanin muoto mahdollistaa. Kyseiset nollien ja napojen luonnehdinnat ovat yhtenevät rationaalimatriisin tapauksessa. Luvun lopuksi annetaan vielä systeemin paikallisen rakenteen määritelmä ääretönulotteisille systeemeille lauseiden 4.2.1 ja 4.2.2 avulla.

Määritelmä 4.2.1. *Oletetaan, että ääretönulotteisen lineaarisen systeemin siirtofunktio toteuttaa pisteessä* $s_0 \in \mathbb{C}$ *lauseen 4.2.1 oletukset. Olkoon* $k_1, \ldots, k_r$, *kuten lauseessa 4.2.1. Indeksijoukkoa* $\{k_1, \ldots, k_r\}$ *kutsutaan systeemin rakenneindeksien joukoksi pisteessä* s_0. *Jos* $k_i > 0$, *niin systeemillä sanotaan olevan pisteessä* s_0 *astetta* k_i *oleva nolla. Jos* $k_i < 0$, *niin systeemillä sanotaan olevan pisteessä* s_0 *astetta* $-k_i$ *oleva napa.*

Määritelmä 4.2.2. *Oletetaan, että ääretönulotteisen lineaarisen systeemin siirtofunktio toteuttaa äärettömyydessä lauseen 4.2.2 oletukset. Olkoon* $k_1, \ldots, k_r$, *kuten lauseessa 4.2.2. Indeksijoukkoa* $\{k_1, \ldots, k_r\}$ *kutsutaan systeemin rakenneindeksien joukoksi pisteessä* s_0. *Jos* $k_i > 0$, *niin systeemillä sanotaan olevan äärettömyydessä astetta* k_i *oleva nolla. Jos* $k_i < 0$, *niin systeemillä sanotaan olevan äärettömyydessä astetta* $-k_i$ *oleva napa.*

Huomautus 4.2.1. *Tulokset 3.1.1, 3.1.1 ja 3.1.4 yleistyvät käsittämään myös pisteen* $s_0 = \infty$ *rationaalimatriisien tapauksessa [36]. Koska kyseisten tulosten todistuksissa tarvitaan ainoastaan sopivaa Laurentin sarjan olemassaoloa, niin tulokset yleistyvät edelleen määritelmien 4.2.1 ja 4.2.2 tilanteisiin, joissa käsiteltävät matriisit eivät välttämättä ole enää rationaalimatriiseja ja Smith-McMillanin muodon asemasta käytetään lauseiden 4.2.1 ja 4.2.2 muotoa ja sitä kautta saatavia rakenneindeksejä.*

Seuraavissa luvuissa käsitellään tapauksia, joissa lauseita 4.2.1 ja 4.2.2 voidaan käyttää siirtonollien ja napojen määrittelyyn, ja pohditaan mitä voidaan tehdä mikäli lauseiden todistukset eivät ole voimassa. Kirjoittajan tiedon mukaan ääretönulotteisille systeemeille ei ole aiemmin määritelty rakennetta äärellisissä pisteissä. Sen sijaan, kuten tullaan huomaamaan, rakenteelle äärettömyydessä löytyy määritelmä kirjallisuudessa, joka on luonteeltaan erilainen kuin tässä esitetty, mutta on yhtenevä tässä esitetyn määritelmän kanssa.

4.2.1 Callier-Desoer- algebra ja äärelliset nollat

Kirjassa [7] esitellään funktioluokka, joka nimetään Callier-Desoer -luokaksi. Tämä luokka on esimerkki tapauksesta, jossa lausetta 4.2.1 voi soveltaa määrittämään äärelliset nollat tietyssä oikeanpuoleisessa puolitasossa. Seuraavaksi esitämme lyhyesti kyseisen luokan määrittelyn ja muutaman sitä koskevan tarpeellisen tuloksen ilman todistuksia. Merkinnällä $\mathbf{L}_1(0,\infty)$ tarkoitetaan Lebesgue-mitallisten funktioiden joukkoa, jonka alkioilla $\int_0^\infty |f(t)|dt < \infty$.

Määritelmä 4.2.3. *Olkoon $\beta \in \mathbb{R}$. Määritellään, että $f \in \mathscr{A}(\beta)$, jos f voidaan esittää muodossa*

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \delta(t - t_n), & \text{kun } t \geq 0 \\ 0, & \text{kun } t < 0, \end{cases},$$

missä $t_n \in [0,\infty)$, $t_1 = 0$, $t_n > 0$, kun $n \geq 2$, $\delta(t - t_n)$ on t_n keskinen delta-distribuutio, $f_n \in \mathbb{C}$, $e^{-\beta t} f_0(t) \in \mathbf{L}_1(0,\infty)$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| e^{-\beta t_n} < \infty$.

Funktiojoukko $\mathscr{A}(\beta)$ on Banach-algebra tavallisen yhteenlaskun suhteen, kun normiksi valitaan

$$\|f\|_\beta = \int_0^\infty e^{-\beta t} |f_0(t)| dt + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| e^{-\beta t_n}.$$

Merkitään kaikkien joukon $\mathscr{A}(\beta)$ Laplace-muunnettujen funktioiden joukkoa $\hat{\mathscr{A}}(\beta)$. Algebralliset ominaisuudet säilyvät Laplace-muunnoksessa.

Määritelmä 4.2.4. *Määritellään algebran $\hat{\mathscr{A}}(\beta)$ alialgebrat $\hat{\mathscr{A}}_-(\beta)$ ja $\hat{\mathscr{A}}_\infty(\beta)$ seuraavasti:*

$$\hat{\mathscr{A}}_-(\beta) = \left\{ \hat{f} : \hat{f} \in \hat{\mathscr{A}}(\beta_0) \text{ jollain } \beta_0 < \beta \right\}$$

ja

$$\hat{\mathscr{A}}_\infty(\beta) = \left\{ \hat{f} \ : \ \hat{f} \in \hat{\mathscr{A}}_-(\beta) \text{ ja } \exists \rho > 0 : \inf_{\{s \in \overline{\mathbb{C}_\beta^+} \,|\, |s| \geq \rho\}} |\hat{f}(s)| > 0 \right\}$$

Määritelmä 4.2.5. *Määritellään Callier-Desoer luokka $\hat{\mathscr{B}}(\beta)$:*

$$\hat{\mathscr{B}}(\beta) = \left\{ \hat{f} = \hat{n}\hat{d}^{-1} \ : \ \hat{n} \in \hat{\mathscr{A}}_-(\beta) \text{ ja } \hat{d} \in \hat{\mathscr{A}}_\infty(\beta) \right\}$$

Apulause 4.2.1. *Funktio $\hat{f} \in \hat{\mathscr{B}}(\beta)$ on meromorfinen joukossa $\mathbb{C}_{\beta_0}^+$, jollain $\beta_0 < \beta$, ja sillä on joukossa $\overline{\mathbb{C}_\beta^+}$ ainoastaan äärellinen määrä napoja, jotka ovat äärellistä astetta. Funktiolla $\hat{f}$ ei välttämättä ole meromorfista laajennusta koko kompleksitasoon.*

Todistus: Katso [7, s. 340, ominaisuus 7.1.7].

Apulause 4.2.2. *Matriisilla $G \in \mathscr{M}\left(\hat{\mathscr{B}}(\beta)\right)$ on vasemmalta ja oikealta jaottomat hajotelmat*

$$G = D_l^{-1} N_l \quad \text{ja} \quad G = N_r D_r^{-1},$$

missä $D_l,\ D_r,\ N_l,\ N_r \in \mathscr{M}\left(\hat{\mathscr{A}}_-(\beta)\right)$.

Todistus: Katso [7, s. 353, lause 7.2.8].

Määritelmä 4.2.6. *Olkoon matriisin $G \in \mathscr{M}\left(\hat{\mathscr{B}}(\beta)\right)$ oikealta jaoton hajotelma $G = ND^{-1}$.*

Piste $s_0 \in \overline{\mathbb{C}_\beta^+}$ on napa, jos $\det(D(s_0)) = 0$, *ja nolla, jos* $\operatorname{rank} N(s_0) < q$, *missä q on suurin mahdollinen matriisin $N(s)$ neliöalimatriisin koko, jonka determinantti ei ole identtisesti nolla.*

Esitelty tapa määritellä Callier-Desoer -luokan siirtofunktiomatriisin nollat ja navat on luonnollinen kun muistetaan lauseen 3.1.3. Huomautetaan vielä, että yllä olevassa määritelmässä esiintyvä q on matriisin N normaaliaste. Odotetusti navat ja nollat eivät riipu valitusta hajotelmasta. Seuraavaksi esitetään nollien yhteys systeemioperaattoriin, joka on odotettu lauseen 4.1.2 yleistys. Systeemin $\Sigma(A, B, C, D)$ systeemioperaattori on

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} : \ \mathrm{D}(A) \oplus \mathbb{C}^m \to X \oplus \mathbb{C}^n.$$

Lause 4.2.5. *Jos systeemi $\Sigma(A, B, C, D)$ on β-eksponentiaalisesti stabiloituva ja havaittava, niin $s_0 \in \overline{\mathbb{C}_\beta^+}$ on nolla jos ja vain jos systeemioperaattorin $P(s)$ nolla-avaruus pisteessä s_0 on ei-triviaali.*

Todistus: Katso [7, s. 382, tehtävä 7.26].

Huomataan, että nollat ja navat tunnetaan Callier-Desoer -luokassa ainakin osittain. Nollien ja napojen paikat tunnetaan, mutta niiden asteita ei määritellä. Apulauseen 4.2.1 nojalla voidaan jokainen karakteristisen funktion $G(s)$ alkio kirjoittaa muodossa $f(s) = \sum_{i=q}^{\infty} a_i(s - s_0)^i$, kun $s_0 \in \overline{\mathbb{C}_\beta^+}$. Täten voidaan käyttää lausetta 4.2.1 ja sitä kautta määrittää pisteessä s_0 paikallinen rakenteen.

4.2.2 Ääretönulotteisen systeemin äärettömät nollat

Tarkastellaan ääretönulotteista systeemiä $\Sigma(A, B, C, D)$, missä A on rajoitettu operaattori. Lähteessä [18, s.176-177] todetaan, että operaattorin A resolventtioperaattori on holomorfinen äärettömyydessä ja se voidaan täten kirjoittaa muodossa

$$(sI - A)^{-1} = s^{-1}A_1 + s^{-2}A_2 + \cdots ,$$

missä kaikilla $i = 1, 2, \ldots A_i \in \mathscr{B}(X)$. Siis karakteristinen funktio on muotoa

$$G(s) = D + \sum_{i=1}^{\infty} s^{-i} B A_i C,$$

missä BA_iC voidaan esittää vakiomatriisina. Täten nollat voidaan määritellä äärettömyydessä käyttäen lausetta 4.2.2.

Jos $A \notin \mathscr{B}(X)$, niin lausetta voidaan mahdollisesti käyttää. Lähteessä [18, s. 177] todetaan, että mikäli operaattorin A spektri on rajoitettu, niin operaattorin A resolventtioperaattorilla on äärettömyydessä oleellinen singulariteetti ja lause 4.2.2 ei ole käyttökelpoinen. Jos spektri ei ole rajoitettu, niin lauseen käyttökelpoisuus täytyy tutkia tapauskohtaisesti.

Kirjallisuudesta löytyy määritelmä ääretönulotteisen systeemin äärettömille nollille artikkelista [25]. Nollat on määritelty tapauksessa, jossa A, B ja C ovat rajoitettuja operaattoreita, $D = 0$ ja X on Hilbert-avaruus. Lisäksi oletetaan yleisyyttä rajoittamatta, että systeemimatriisin normaaliaste on $\min\{n, m\}$. Artikkelin määritelmä perustuu lähes invariantteihin aliavaruuksiin. Tätä geometrista lähestymistapaa ei tässä käsitellä tarkemmin. Kiinnostunut lukija voi tutustua artikkelin [25] lisäksi seuraavaksi lueteltaviin

artikkeleihin. Äärellisulotteisten systeemien äärellisten siirtonollien geometrinen määrittely löytyy kirjasta [46] ja äärettömien siirtonollien määrittely artikkeleista [4, 5], joista jälkimmäisessä esitellään lyhyesti myös äärellisten nollien geometrinen määrittely.

Artikkelissa [25] Malabre ja Rabah antavat geometrisen määritelmän lisäksi myös tässä esiteltävän yhtäpitävän määrittelyn. Tutkitaan systeemiä $\Sigma(A, B, C)$ edellä esiteltyjen oletusten ollessa voimassa. Määritellään seuraava indeksijoukko

$$p_{i+1} = \max_{j>0}\{\rho_j\} - \rho_i,$$

missä ρ_i on määritelmän 3.1.4 mukainen asteindeksin vastine äärettömyydessä. Kun $G(s)$ kirjoitetaan riittävän suurilla muuttujan s arvoilla Laurentin sarjana

$$G(s) = \sum_{i=1}^{\infty} s^{-i} G_i = \sum_{i=1}^{\infty} s^{-i} C A^{i-1} B,$$

niin

$$\rho_i = T_i(G, \infty) - T_{i-1}(G, \infty), \tag{4.6}$$

missä $T_i(G, \infty)$ on kuten yhtälössä 3.7 ja $\rho_0 = 0$. Äärellisen joukon S alkioiden lukumäärälle käytetään merkintää $\operatorname{card}\{S\}$.

Määritelmä 4.2.7. *Systeemillä $\Sigma(A, B, C)$ on $r = \min\{m, n\}$ kappaletta nollia äärettömyydessä. Niiden asteet ovat $q_i = \operatorname{card}\{p_j \geq i\}$, $i = 1, \ldots, r$.*

Huomataan, että nollien asteet äärettömyydessä saadaan laskettua käyttäen Toeplitz-matriiseja. Itseasiassa määritelmät 4.2.7 ja 4.2.2 osoittautuvat yhtäpitäviksi tässä tapauksessa, kuten seuraavassa lauseessa osoitetaan, ja siksi toinen tulisi antaa lauseena.

Lause 4.2.6. *Olkoon systeemillä $\Sigma(A, B, C)$ äärettömyydessä määritelmän 4.2.7 mukainen nollarakenne $\{q_1, \ldots, q_r\}$. Lauseessa 4.2.2 esiintyvä matriisi $H_{G,\infty}(s)$ on nyt muotoa*

$$H_{G,\infty}(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(y_1(s), y_2(s), \ldots, y_r(s)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä $y_i(s) = s^{-q_{r-i+1}} + O_-(s^{-q_{r-i+1}-1})$.

Todistus: Huomautuksen 4.2.1 nojalla käytämme todistuksessa tuloksia 3.1.1, 3.1.1 ja 3.1.4. On suoraviivaista todeta, että matriisilla $H_{G,\infty}(s)$ on määritelmän 4.2.7 oletuksin r nollasta eroavaa diagonaalialkiota.

Seurauksen 3.1.1 nojalla matriisin $H_{G,\infty}(s)$ ja siirtomatriisin $G(s)$ asteindeksit ρ_i ovat samat. Matriisin $H_{G,\infty}(s)$ johtavien termien asteet saadaan selville Toeplitz-matriisien avulla samalla tavalla kuin lauseen 3.1.4 todistuksessa saadaan selville rationaalimatriisien nollarakenne. Siis yhtälöllä (4.6) määriteltyjen asteindeksien avulla voidaan, todeta että jos $\rho_j - \rho_{j-1} \neq 0$, niin matriisin $H_{G,\infty}(s)$ diagonaalilla on $\rho_j - \rho_{j-1}$ kappaletta muotoa $y(s) = s^{-j} + O_-\left(s^{-j-1}\right)$ olevia alkioita.

Huomaa, että määritelmässä $p_i \geq p_{i+1}$, sillä $\rho_i \geq \rho_{i-1}$. Olkoon l pienin sellainen indeksi, että $p_{l+1} = 0$. Määritelmän mukaan $q_1 = l$, sillä

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_l \geq 1 > p_{l+1}.$$

Jos astetta l olevia nollia on t_1 kappaletta, niin välttämättä $t_1 = p_l$, joten $p_l - p_{l+1} = t_1$. Koska $p_l - p_{l+1} = \rho_l - \rho_{l-1}$, niin t_1 viimeistä matriisin $D(s)$ diagonaalin alkiota ovat haluttua muotoa.

Edelleen jos astetta $l-1$ olevia nollia on $t_2 \geq 0$ kappaletta, niin $t_1 + t_2 = p_{l-1}$, joten $p_{l-1} - p_l = \rho_{l-1} - \rho_{l-2} = t_2$, joten t_2 seuraavaa diagonaalin alkiota ovat myös haluttua muotoa.

Jatkamalla samalla tavalla huomataan, että kaikki matriisin $H_{G,\infty}(s)$ diagonaalin alkiot ovat haluttua muotoa ja lause on todistettu. □

Edellisen lauseen nojalla meillä on rajoitettujen operaattoreiden tapauksessa kaksi yhtenevää määrittelyä äärettömille nollille. Lause 4.2.2 on tapauksessa, jossa käsiteltävä matriisilla on äärettömyydessä ääretöntä kertalukua olevia napoja. Matriisin ei siis tarvitse olla äärettömyydessä analyyttinen, joten lauseen 4.2.2 on voimassa yleisemmässä tapauksessa kuin artikkelin [25] määrittely ja on siten käyttökelpoisempi.

4.2.3 Yleisemmät ääretönulotteiset systeemit

Edellä on tarkasteltu ääretönulotteisia systeemejä joiden äärellinen tai ääretön rakenne saadaan määriteltyä käsiteltävässä pisteessä vain äärellistä kertalukua olevia napoja sisältävien äärellisten matriisien avulla. Yleisesti ei tietenkään päädytä tällaiseen matriisiin, vaan siirtofunktiolla voi olla jossain pisteessä oleellinen erikoispiste. Siirtofunktion käyttäytymistä oleellisen erikoispisteen läheisyydessä voi olla erittäin vaikea tutkia, joskaan ei mahdotonta. Seuraavaksi tutkimme tilannetta viiveellisten systeemien valossa, joilla on äärettömyydessä oleellinen erikoispiste, mutta joiden rakenne äärettömyydessä on silti tietyssä mielessä olemassa, kuten artikkelissa [26] osoitetaan.

Viiveellinen systeemi on esimerkki tapauksesta, jossa rakenne saadaan määritettyä koko kompleksitasossa, mutta ei äärettömyydessä. Rajoitutaan tarkastelemaan viiveellisiä systeemejä $\Sigma_v\,(A_0, A_1, B, C)$, jotka määritellään yhtälöparilla

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-1) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{cases}$$

Ohjaus-, mittaus- ja tila-avaruudet ovat $U = \mathbb{C}^m$, $Y = \mathbb{C}^n$ ja $X = \mathbb{C}^p$. Tällaisen systeemin siirtofunktion todetaan artikkelissa [26] olevan

$$G_v(s) = C(sI - A_0 - e^{-s}A_1)^{-1}B = T_0(s) + \sum_{j=0}^{\infty} e^{-js}T_j(s), \qquad (4.7)$$

missä $T_j(s)$, $j = 0, 1, \ldots$, ovat aitoja rationaalimatriiseja. Selvästi $sI - A_0 - e^{-s}A_1$ on singulaarinen vain äärellisessä määrässä pisteitä, joissa siirtofunktiolla on napa. Siirtofunktion rakenne voidaan määrittää äärellisissä pisteissä määritelmää 4.2.1 käyttäen. Sen sijaan siirtofunktio ei ole lauseen 4.2.2 vaatimaa muotoa, vaan sillä on äärettömyydessä oleellinen erikoispiste.

Esimerkki 4.2.1. Tarkastellaan viiveellistä siso-systeemiä, missä

$$-A_0 = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ja } c = [1\ 0].$$

Siirtofunktio on nyt $G_v(s) = \frac{-1}{s^2}(1 - e^{-s})$. Siirtofunktio kasvaa nopeammin kuin mikään polynomifunktio, kun $\mathrm{Re}(s) \to -\infty$. Kun $\mathrm{Re}(s) \to \infty$, niin siirtofunktio suppenee kohti nollaa termin s^{-2} määräämää nopeutta. Kun äärettömyyttä kohti siirrytään pitkin imaginaariakselia, niin myös tällöin termi s^{-2} määrää suppenemisnopeuden, koska $|1 - e^{-s}| \leq 2$ ja $1 - e^{-ik}$ on jaksollinen, kun $k \in \mathbb{R}$. ■

Esimerkki 4.2.1 ja siirtofunktion esitysmuoto (4.7) viittaavat siihen, että voimme määrittää rakenteen, joka kertoo kuinka siirtofunktio käyttäytyy, kun s kasvaa kohti ääretöntä eri reittejä pitkin. Artikkelissa [26] Malabre ja Rabah osoittavat, että viiveellisen systeemin $\Sigma_v\,(A_0, A_1, B, C)$ siirtofunktiolla on kanoninen muoto

$$\Lambda(s, e^s) = \begin{bmatrix} \mathrm{blockdiag}\,(\Lambda_0(s), e^{-s}\Lambda_1(s), \ldots, e^{-qs}\Lambda_q(s)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä

$$\Lambda_i(s) = \operatorname{diag}\left(s^{-n_{i1}}, s^{-n_{i2}}, \ldots, s^{-n_{ip_i}}\right), \text{ kun } i = 0, 1, \ldots, q,$$

ja $n_{i1} \leq n_{i2} \leq \cdots \leq n_{ip_i}$. Lisäksi $n_{01} \geq 0$. Tämä kanoninen muoto saadaan käyttäen unimodulaarisia muunnoksia, kun unimodulaarisuus on ensin määritelty tilanteeseen sopivalla tavalla. Johtuen unimodulaarisuuden määrittelystä kanoninen muoto kertoo käyttäytymisestä, kun $\mathrm{Re}(s) \to \infty$. Myöhemmin artikkelissa [28] Malabre ja Rabah määrittelevät unimodulaarisuuden hiukan toisin ja saavat yllä olevaa muotoa olevan kanonisen muodon, joka kuvaa siirtofunktion käyttäytymistä kun $s \in \mathbb{R}$ ja $s \to \infty$. Huomataan, että artikkeleissa esitetyt muodot antavat vain osittaisen kuvan funktion käyttäytymisestä äärettömyydessä. Artikkeleissa [26, 27, 28] Malabre ja Rabah käyttävät esittelemiään kanonisia muotoja ratkaisemaan erilaisia ongelmia, joten jo osittaisen käyttäytymisen tunteminen voi riittää.

Tähän asti ohjaus- ja mittausavaruuksien dimensiot ovat olleet äärellisiä. Tietenkään näin ei tarvitse olla, mistä seuraa vaikeuksia jo siirtofunktion nollakohdan määrittelyssä. Äärellisulotteisen systeemin nollien valossa on järkevää ajatella, että nollakohta siirtofunktiolla $H(s)$ tarkoittaa pistettä s_0, jossa $H(s_0)$ ydin on tavallista laajempi. Jos ydin on normaalisti äärellisulotteinen, niin nollakohta tarkoittaisi tietenkin sitä, että operaattorin $H(s_0)$ ytimen dimensio kasvaisi tässä pisteessä. Ongelmalliseksi tilanne tulee, mikäli ydin on ääretönulotteinen. Tällöin nollakohtaa ei voida enää määritellä ytimen dimension kautta. Tällöin nollakohta voidaan määritellä mahdollisesti osajoukkojen kautta. Nolla tarkoittaisi pistettä s_0, jossa $\mathscr{N}(H(s))$ on joukon $\mathscr{N}(H(s_0))$ aito osajoukko, jossain pisteen s_0 ympäristössä.

Lisää hankaluuksia tuottaa paikallisen rakenteen määrittäminen. Koska kaikki edellä esitellyt algoritmit käyttävät hyväksi avaruuksien äärellisdimensionaalisuutta paikallisen rakenteen määrittämisessä, ne eivät sovellu ääretönulotteisten ohjaus- ja mittausavaruuksien kohdalla. Joissain tapauksissa voidaan tietenkin rajoittua vain tiettyihin sisään- ja ulostuloavaruuksien äärellisiin aliavaruuksiin, joissa edellä esiteltyjä lauseita voidaan mahdollisesti käyttää ja saada näin ainakin osittainen informaatio systeemin käyttäytymisestä.

4.3 Esimerkkejä lineaarisen systeemin nollien merkityksestä säätöteoriassa

Tähän asti on keskitytty vain lineaarisen systeemin nolliin ja napoihin ja niiden ominaisuuksiin, mutta ei olla esitelty miksi ne ovat säätöteorian kannalta tärkeitä. Seuraavaksi annamme muutaman esimerkin ongelmista, joissa nollilla on keskeinen rooli. Kappaleen lopussa esitetään artikkelin [16] tulos äärettömien nollien avulla ilmaistuna.

Esimerkki 4.3.1 (Irtikytkentä)**.** Tarkastellaan systeemiä $\Sigma(A, B, C)$, jonka ohjaus-, mittaus- ja tila-avaruudet ovat $U = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ ja $X = \mathbb{R}^n$. Systeemin siirtofunktiolla oletetaan olevan täysi riviaste. Irtikytkentäongelmassa (englanniksi *decoupling problem*) halutaan löytää äärellisulotteiselle systeemille sellainen tilatakaisinkytkentä

$$u = Kx + Lv,$$

missä v on uusi sisäänmeno ja L kääntyvä matriisi, että suljetun systeemin $\Sigma(A + BK, BL, C)$ kuhunkin ulostuloon vaikuttaa täsmälleen yksi sisääntulo. Sovellusten kannalta tällainen tilanne on tietysti hyvin miellyttävä.

Systeemin $\Sigma(A, B, C)$ äärettömien nollien asteita merkitään q_i, $i = 1, \ldots, m$. Systeemin $\Sigma(A, B, c_i)$, missä c_i on matriisin C i. rivi, äärettömän nollan astetta merkitään k_i, $i = 1, \ldots, m$. Artikkelissa [9] Dion ja Commault antavat seuraavan yksinkertaisen riittävän ja välttämättömän ehdon äärettömien nollien avulla ongelman ratkeavuudelle: Irtikytkentäongelma on ratkeava, jos ja vain jos $\sum_{i=1}^{m} q_i = \sum_{i=1}^{m} k_i$.

Esimerkki 4.3.2 (Alitus)**.** On annettu äärellisulotteinen lineaarinen sisosysteemi $\Sigma(A, b, c)$. Tarkastellaan tilannetta, jossa reaalinen ulostulo $y(t)$ halutaan tilasta $y(0) = 0$ tavoitetilaan $y_r \neq 0$ käyttäen rajoitettuja sisäänmenoja u. Tämä ei välttämättä ole mahdollista äärellisessä ajassa, joten tyydytään siihen, että $|y_r - y(t)| < \epsilon < |y_r|$ jostain ajanhetkestä T alkaen. Siirtymävaiheessa voi itseisarvo $|y_r - y(t)|$ aluksi kasvaa. Tätä kutsutaan alitukseksi (englanniksi *undershoot*).

Oletetaan, että käsiteltävällä systeemillä ei ole nollia origossa ja avoimen oikean puolitason nollien määrä on pariton. Artikkelissa [30] Mita ja Yoshida osoittavat, että tällöin tapahtuu alitus. Samaisessa artikkelissa osoitetaan, myös että mimo-systeemeillä alitus ei ole sidoksissa nollien määrään.

Oletetaan edelleen, että systeemillä on vain yksi nolla avoimessa oikeassa puolitasossa, jota merkitään λ. Määritellään suhteellinen alitus

$$r_u = -\inf_{t\in(0,\infty)} \left\{ \frac{y(t)}{y_r} \right\}$$

ja ratkaisuaika

$$T_\epsilon = \inf \left\{ T : t > T > 0 \Rightarrow |y_r - y(t)| < \epsilon \right\}.$$

Arvot r_u ja T_ϵ ovat ulostulosta $y(\cdot)$ riippuvia.

Nyt on voimassa

$$r_u \geq \left(1 - \frac{\epsilon}{|y_r|}\right) \frac{1}{e^{\lambda T_\epsilon} - 1}.$$

Tulos on artikkelin [23] proposition II.1 suoraviivainen yleistys. Huomataan, että haluttaessa siirtyä nopeasti alkutilasta tavoitetilaan $|y_r|$ kasvaa myös suhteellinen alitus, mikä ei kaikissa käytännön tilanteissa ole toivottua. Artikkelissa [23] havaitaan sama ilmiö myös tapauksessa, jossa avoimessa oikeassa puolitasossa on kaksi nollaa. Lisäksi artikkelissa esitetään keinoja, joilla suhteellista alitusta voidaan pienentää.

Tarkastellaan vielä Immosen ja Pohjolaisen artikkelia [16]. Artikkelissa tarkastellaan lineaarista systeemiä

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + d(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{cases}$$

Mittausavaruus on $U = \mathbb{C}$. Ohjaus- ja tila-avaruudet Y ja X oletetaan kompleksisiksi separoituviksi Hilbert-avaruuksiksi. Systeemin alkutila on $x(0) = x_0 \in X$, joka ei välttämättä kuulu operaattorin A määrittelyjoukkoon. Siksi ensimmäinen systeemin määrittelevä yhtälö täytyy ymmärtää laajemmassa mielessä (katso [7], *mild solution.*). Operaattori A generoi tila-avaruudessa X C_0-puoliryhmän $T_A(t)$. Oletetaan, että $B \in \mathscr{B}(U, X)$, $C \in \mathscr{B}(X, Y)$ ja $D \in \mathscr{B}(U, Y)$. Lisäksi pari (A, B) oletetaan eksponentiaalisesti stabiloituvaksi, eli löytyy sellainen $K \in \mathscr{B}(X, U)$, että $A + BK$ generoi eksponentiaalisesti stabiloituvan C_0-puoliryhmän. Häiriösignaali $d(t)$ määritellään myöhemmin.

Separoituvuuden, C_0-puoliryhmän ja eksponentiaalisen stabiloituvuuden käsitteillä ei ole tässä esitettävän tarkastelun kannalta merkitystä, joten niitä

ei määritellä erikseen. Käsitteiden määritelmät löytyvät lähteestä [7]. Lisäksi lähteestä löytyvät määritelmät suljetulle, sekä tiheästi määrätylle operaattorille, joita jatkossa tarvitaan.

Käytetään seuraavaa merkintää $\ell^2 = \{(x_i)_{i\in I} \,:\, \sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty\}$, missä $I \subseteq \mathbb{Z}$.

Määritelmä 4.3.1. *Olkoon $I \subseteq \mathbb{Z}$, $p > 0$ ja $\omega_n = \frac{2\pi n}{p}$, kun $n \in I$. Olkoon $(f_n)_{n\in I} \subset \mathbb{R}$ sellainen lukujono, että $f_n \geq 1$ kaikilla $n \in I$ ja $(f_n^{-1})_{n\in I} \in \ell^2$. Sobolev-avaruus $H(f_n, \omega_n)$ on joukko $\{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, u(t) = \sum_{n\in I} a_n e^{i\omega_n t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in I} |f_n|^2 |a_n|^2 < \infty$ ja $(a_n)_{n\in I} \subset \mathbb{C}\}$.*

Tästä eteenpäin lukujonot $(\omega_n)_{n\in I}$ ja $(f_n)_{n\in I}$ ovat kiinnitetyt. Valitaan Hilbert-avaruus W, jolla on ortonormaali kanta $(\phi_n)_{n\in I}$. Avaruuden W sisätuloa merkitään $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Määritellään operaattorit

$$S = \sum_{n\in I} i\omega_n \langle \cdot, \phi_n \rangle \phi_n \text{ ja } F = \sum_{n\in I} f_n \langle \cdot, \phi_n \rangle \phi_n,$$

joiden määrittelyjoukoiksi asetetaan

$$D(S) = \left\{ w \in W \,:\, \sum_{n\in I} |\omega_n|^2 |\langle w, \phi_n \rangle|^2 < \infty \right\}$$

ja

$$D(F) = \left\{ w \in W \,:\, \sum_{n\in I} |f_n|^2 |\langle w, \phi_n \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

Operaattori S generoi avaruudessa W C_0-puoliryhmän

$$T_S(t) = \sum_{n\in I} e^{i\omega_n t} \langle \cdot, \phi_n \rangle \phi_n$$

ja F on lineaarinen, suljettu ja tiheästi määritelty operaattori avaruudessa W. Lisäksi $F^{-1} \in \mathscr{B}(W)$.

Määritellään edelleen $\langle x, y \rangle_F = \langle Fx, Fy \rangle$ kaikilla $x, y \in D(F)$, jolloin $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ on sisätulo ja $W_F = (D(F), \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ Hilbert-avaruus. Kuvaus $i : W_F \to W$, joka määritellään $i(w) = w$, on lineaarinen ja rajoitettu. Lisäksi W_F on avaruuden W tiheä osajoukko. Rajoittuma $T_S(t)|_{W_F}$ on C_0-puoliryhmä avaruudessa W_F. Tämän puoliryhmän generaattoria avaruudessa W_F merkitään S_F.

Referenssisignaalin y_r ja häiriösignaalin d generoiva ulkoinen systeemi määritellään tila-avaruudessa W_F seuraavasti:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) &= S_F w(t), \quad w(0) = w_0 \in W_F, \\ y_r(t) &= Qw(t), \quad t \geq 0, \\ d(t) &= Pw(t). \end{cases}$$

Operaattori $P \in \mathscr{B}(W_F, Z)$ on jokin tunnettu häiriöoperaattori. Yllä ensimmäinen yhtälöistä täytyy jälleen ymmärtää laajemmassa mielessä. Määritelty ulkoinen systeemi kykenee generoimaan täsmälleen ne referenssisignaalit, jotka ovat Sobolev-avaruudesta $H(f_n, \omega_n)$.

Artikkelin käsittelemä ongelma on seuraava: Etsi sellainen takaisinkytkentä

$$u(t) = Kx(t) + Lw(t),$$

että

1) $K \in \mathscr{B}(X, U)$ ja $L \in \mathscr{B}(W_F, U)$

2) $A + BK$ generoi avaruudessa X eksponentiaalisesti stabiloituvan C_0-puoliryhmän $T_{A+BK}(t)$

3) Suljetun systeemin

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + (BL + P)w(t), \\ \dot{w}(t) &= S_F w(t) \end{cases}$$

virhetermi

$$e(t) = y(t) - y_r(t) = (C + DK)x(t) + (DL - Q)w(t)$$

suppenee kohti nollaa kaikilla alkuarvoilla $x_0 \in X$ ja $w_0 \in W_F$, kun $t \to \infty$.

Artikkelin mukaisesti esitettyä ongelmaa kutsutaan (f_n, ω_n)-säätöongelmaksi. Systeemin karakteristinen funktio on kuten aiemminkin

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

ja suljetun systeemin karakteristinen funktio on

$$G_c(s) = (C + DK)(sI - (A + BK))^{-1}B + D.$$

Määritellään

$$H_d(n) = (C + DK)(sI - (A + BK))^{-1} P\phi_n \in \mathbb{C} \text{ kaikilla } n \in I.$$

Luvut $H_d(n)$ aiheutuvat häiriösignaalista. Artikkelissa on esitetty siso-systeemin tapauksessa seuraava tulos:

Lause 4.3.1. *Oletetaan, että $G_c(i\omega_n) \neq 0$ kaikilla $n \in I$. Määritellään*

$$L = \sum_{n \in I} G_c(i\omega_n)^{-1} \left(1 - H_d(n)\right) \langle \cdot, \phi_n \rangle . \tag{4.8}$$

Takaisinkytkentä $u(t) = Kx(t) + Lw(t)$ ratkaisee (f_n, ω_n)-säätöongelman, jos ja vain jos

$$\left(G_c(i\omega_n)^{-1} \left(1 - H_d(n)\right) f_n^{-1}\right)_{n \in I} \in \ell^2. \tag{4.9}$$

Tarkastellaan ehtoa (4.9). Koska $(f_n^{-1})_{n \in I} \in \ell^2$, niin on selvää, että ehto on voimassa jos $|G_c(i\omega_n)^{-1} \left(1 - H_d(n)\right)| < M$ jollain $M \in \mathbb{R}_+$. Siis ehto on selvästi voimassa, mikäli $G_c(i\omega_n)$ ei suppene kohti nollaa, eikä $|H_d(n)|$ saa mielivaltaisen suuria arvoja, kun $n \to \pm\infty$. Nyt huomataan, että ratkeavuus on selvästi yhteydessä suljetun systeemin käyttäytymiseen äärettömyydessä. Koska tarkastellaan siso-systeemiä, niin äärettömyydessä voi olla vain yksi nolla. Seuraavaksi esitetään lauseen 4.3.1 tuloksen kanssa yhtäpitävä ehto, joka saadaan, kun tunnetaan siirtofunktion nollan kertaluku äärettömyydessä. Tulos ei ole ennen esiintynyt kirjallisuudessa annetussa muodossa.

Lause 4.3.2. *Oletetaan, että $G_c(i\omega_n) \neq 0$ kaikilla $n \in I$. Lisäksi oletetaan, että suljetulla systeemillä on äärettömyydessä astetta r oleva nolla. Olkoon L kuten yhtälössä (4.8). Takaisinkytkentä $u(t) = Kx(t) + Lw(t)$ ratkaisee (f_n, ω_n)-säätöongelman, jos ja vain jos*

$$\left(n^r \left(1 - H_d(n)\right) f_n^{-1}\right)_{n \in I} \in \ell^2. \tag{4.10}$$

Todistus: Koska suljetulla systeemillä on äärettömyydessä astetta r oleva nolla, niin

$$\lim_{s \to \infty} |s^r G_c(s)| = a > 0.$$

Valitaan $0 < \epsilon < a$. Koska $\omega_n \to \pm\infty$, kun $n \in I$ ja $n \to \pm\infty$, niin löytyy sellainen $N \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\begin{aligned} |n| > N \quad &\Rightarrow \quad |(i\omega_n)^r G_c(i\omega_n) - a| < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad 0 < a - \epsilon < |i\omega_n|^r |G_c(i\omega_n)| < a + \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{|i\omega_n|^r}{a-\epsilon} > |G_c(i\omega_n)|^{-1} > \tfrac{|i\omega_n|^r}{a+\epsilon}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $\omega_n = \frac{2\pi n}{p}$ ja merkataan $m = \frac{(2\pi)^r}{p^r(a+\epsilon)}$ ja $M = \frac{(2\pi)^r}{p^r(a-\epsilon)}$. Nyt edellisen perusteella

$$\begin{aligned} m^2 \textstyle\sum_{n\in I} |n^r (1 - H_d(n)) f_n^{-1}|^2 \quad &< \quad \textstyle\sum_{n\in I} |G_c(i\omega_n)^{-1} (1 - H_d(n)) f_n^{-1}|^2 \\ &< \quad M^2 \textstyle\sum_{n\in I} |n^r (1 - H_d(n)) f_n^{-1}|, \end{aligned}$$

mistä tulos seuraa. □

Edellä esitelty ehto saadaan häiriöttömässä tapauksessa, eli kun häiriöoperaattori $P = 0$, yksinkertaiseen muotoon $(n^r f_n^{-1})_{n\in I} \in \ell^2$. Artikkelissa osoitetaan vielä, että mikäli $A + BK$ generoi eksponentiaalisesti stabiilin C_0-puoliryhmän, niin ratkeavuusehdossa (4.9) voidaan $G_c(i\omega_n)^{-1}$ korvata termillä $G(i\omega_n)^{-1}$. Äärellisten systeemien tapauksessa tämä seuraa lauseesta 4.1.4. Lauseessa 4.3.2 esiintyvä r on siis esitettyjen ehtojen vallitessa alkuperäisen systeemin äärettömän nollan aste.

Luku 5

Juuriura

Tässä luvussa käsitellään juuriuraa ja lähinnä sen yhteyttä systeemin siirtonolliin. Aluksi rajoitutaan äärellisulotteisiin systeemeihin, joilla on sama määrä sisäänmenoja ja ulostuloja ja lopuksi esitellään juuriuraa ääretönulotteisten systeemien tapauksessa.

5.1 Juuriuran määrittäminen

Tarkastellaan äärellisulotteista systeemiä $\Sigma\,(A, B, C, D)$, jolla $U = Y = \mathbb{C}^n$. Lisäksi oletetaan, että $\det\,(G(s)) \not\equiv 0$. Systeemiin, jolla on sama määrä sisäänmenoja ja ulostuloja, voidaan soveltaa ulostulotakaisinkytkentää

$$u = kF(v - y), \tag{5.1}$$

missä k on skalaari, v uusi sisäänmeno ja F kääntyvä vakiomatriisi. Juuriura määritellään syntyneen suljetun systeemin napojen avulla. Juuriura on kompleksitason jälki, joka syntyy kun piirretään kompleksitasoon suljetun systeemin navat muuttujan k kasvaessa arvosta 0 kohti ääretöntä. Yleensä tehdään valinta $F = I$. Valinta on järkevä, koska matriisin F voidaan katsoa jo kuuluvan matriiseihin B ja D, eli $B = B_0F$ ja $D = D_0F$.

Osa navoista suppenee kohti äärellistä pistettä ja osa hajaantuu äärettömyyteen. Jatkossa havaitaan että juuriura alkaa alkuperäisen systeemin navoista ja päätyy sen nolliin.

Suljetun systeemin navat saadaan tilamatriisin

$$A_c(k) = A - kBF(I + kDF)^{-1}C$$

ominaisarvoina, eli juuriura voidaan määrittää yhtälöstä

$$\det(sI - A_c(k)) = \det(sI - A + kBF(I + kDF)^{-1}C) = 0 \tag{5.2}$$

ratkaisemalla s muuttujan k suhteen. Tästä eteenpäin oletetaan, että $F = I$ ellei muuta mainita.

Esimerkki 5.1.1. Tarkastellaan yksinkertaista lineaarista systeemiä Σ_1

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Systeemin siirtofunktiomatriisi on

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & (s-1)^{-2} \\ (s-1)^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Juuriura voidaan siis määrittää yhtälöstä

$$\det(I + kG_1(s)) = 1 - \frac{k^2}{(s-1)^3} = 0,$$

mistä ratkaisuksi muuttujan s suhteen saadaan

$$s = 1 + \left|k^{\frac{2}{3}}\right| e^{\frac{2}{3}\pi l i}, \qquad l = 0, 1, 2.$$

Juuriuran graafinen esitys kompleksitasossa on siis kuvan 5.1 mukainen.

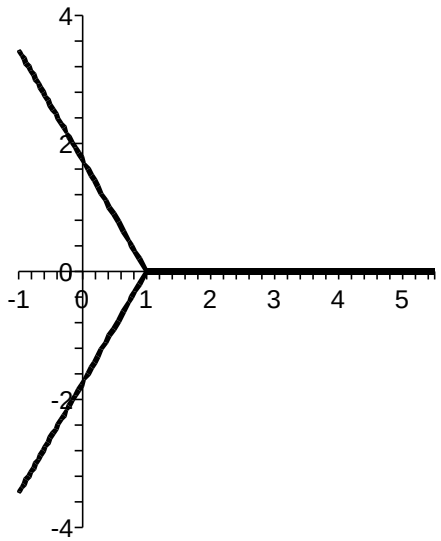
■

Käyttämällä yhtälön (B.1) mukaista hajotelmaa, saadaan

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & kB \\ -C & I + kD \end{bmatrix} = \det(sI - A)\det(I + kG(s)).$$

Toisaalta liitteen B yhtälön (B.2) mukaisen hajotelman nojalla

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & kB \\ -C & I + kD \end{bmatrix} = \det(I + kD)\det(sI - A_c(k)).$$



Kuva 5.1: Esimerkin 5.1.1 systeemin Σ_1 juuriura

Yhdistämällä edellä annetut tulokset, saadaan

$$\det(sI - A_c(k)) = \det(sI - A)\det(I + kG(s))\det(I + kD)^{-1} \tag{5.3}$$

Tarkastellaan juuriuran kulkua yhtälön (5.3) valossa. Kun $k = 0$, niin yhtälö (5.2) toteutuu, kun s on matriisin A ominaisarvo, eli systeemin äärellinen napa. Nämä ratkaisut eivät riipu muuttujasta k, joten ne eivät ole jatkossa kiinnostavia. Yhtälöstä (5.3) nähdään myös, että matriisin D negatiiviset ominaisarvot voivat vaikuttaa juuriuran kulkuun. Mikäli k_0 on matriisin D reaalisen ja negatiivisen ominaisarvon käänteisluku, niin $\det(I + kD)^{-1}$ lähestyy ääretöntä pistettä k_0 lähestyttäessä. Artikkelissa [22] osoitetaan, että juuriurassa matriisin D negatiivinen ominaisarvo näkyy siten, että jotkin tai mahdollisesti kaikki yhtälön (5.2) ratkaisut s lähestyvät ääretöntä, kun k lähestyy äärellistä pistettä k_0.

Esimerkki 5.1.2. Tarkastellaan systeemiä Σ_2, joka on muuten kuten systeemi Σ_1 esimerkissä 5.1.1, mutta siinä sisäänmenot vaikuttavat ulostuloihin suoraan matriisin $D = \mathrm{diag}\,(0, -1)$ välityksellä. Nyt suljetun systeemin tila-

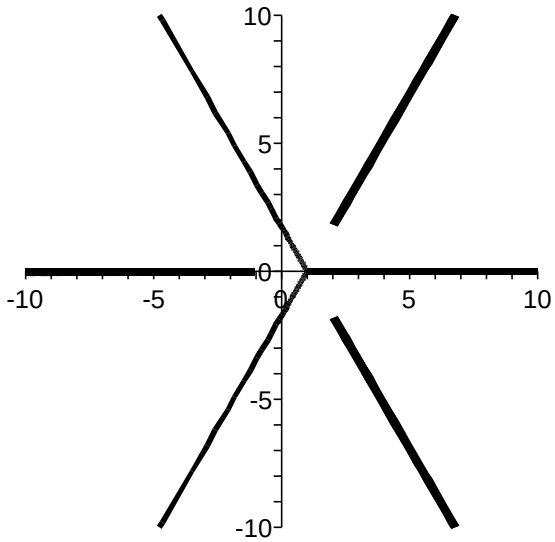
matriisi on

$$A_c = A - kB(I + kD)^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k}{1-k} \\ -k & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

joten juuriura saadaan yhtälöstä

$$\det(A_c) = (s-1)^3 - \frac{k^2}{k-1} = 0 \Rightarrow s = \left| \sqrt[3]{\frac{k^2}{1-k}} \right| e^{\frac{2}{3}\pi l i} + 1, \qquad l = 0, 1, 2.$$

Nyt juuriuran jälki kompleksitasossa on kuvan 5.2 mukainen. Juuriuran kolme erillistä haaraa siis käyvät äärettömyydessä, kun $k = 1$. Sen jälkeen juuriuran haarat alkavat kompleksitason toiselta laidalta ja palaavat kahden yksikön päähän kompleksitason pisteestä 1, jonka jälkeen ne palaavat samaa reittiä äärettömyyteen. ■



Kuva 5.2: Esimerkin 5.1.2 systeemin Σ_2 juuriura

Koska ollaan kiinnostuneita juuriuran yhteydestä napoihin ja nolliin, niin riittää tarkastella juuriuran käyttäytymistä pisteiden $k = 0$ ja $k = \infty$ läheisyydessä. Kun huomataan, että matriisin D ominaisarvoilla ei ole merkitystä hyvin suurilla tai pienillä muuttujan k arvoilla, niin voidaan keskittyä tarkastelemaan vain yhtälöä

$$\det(I + kG(s)) = 0. \tag{5.4}$$

Tämä saadaan muotoon

$$\det(gI - G(s)) = 0 \tag{5.5}$$

sijoittamalla $k = -\frac{1}{g}$ ja sieventämällä. Usein juuriura määritellään suoraan yhtälön (5.5) kautta. Tästä muodosta nähdään, että kun $g \to \infty$, niin muuttujan s täytyy lähestyä jotain siirtofunktion napaa, ja kun $g \to 0$, niin muuttujan s täytyy lähestyä jotain siirtofunktion nollaa.

Olkoon $(N(s), D(s))$ siirtofunktion $G(s)$ vasemmalta jaoton hajotelma. Lauseen 4.1.7 todistuksessa on todettu, että $(N(s), D(s) + kN(s))$ on suljetun systeemin siirtofunktion vasemmalta jaoton hajotelma, joten suljetun systeemin navat saadaan matriisin $D(s) + kN(s)$ nollina. Sijoituksen $k = -\frac{1}{g}$ jälkeen voidaan todeta, että juuriura voidaan määritellä yhtälöstä

$$\Gamma(s, g) = \det(gD(s) - N(s)) = 0. \tag{5.6}$$

Kyseisen muodon merkitys on siinä, että $\Gamma(s, g)$ on muuttujien g ja s polynomi ja päästään käyttämään algebrallisten funktioiden teoriaa, joka tunnetaan varsin hyvin. Tässä tarvittavat tiedot algebrallisista funktioista löytyy esimerkiksi kirjasta [13]. Merkitään

$$\Gamma(s, g) = a_n(s)g^n + a_{n-1}(s)g^{n-1} + \cdots + a_0(s), \tag{5.7}$$

missä $a_i(s)$ ovat polynomeja. Myöhemmin tarvitaan yhteyttä

$$\det(gI - G(s)) \det(D(s)) = \det(gD(s) - N(s)) \tag{5.8}$$

yhtälöiden (5.5) ja (5.6) välillä, joka huomataan helposti kun yhtälön oikealle puolelle sijoitetaan $gI = gD^{-1}(s)D(s)$ ja $G(s) = D^{-1}(s)N(s)$.

Seuraava apulause on yleisesti tunnettu. Sitä käytetään esimerkiksi artikkeleissa [39] ja [2]. Todistus lauseelle on suoraviivainen, kun determinantti kirjoitetaan permutaatioiden summalausekkeena [14, s. 8]. Tarkka todistus olisi kuitenkin varsin pitkä, joten se sivuutetaan.

Apulause 5.1.1. *Olkoon M $m \times m$-matriisi. Tällöin matriisin $gI - M$ determinantti voidaan esittää muodossa*

$$\det(gI - M) = g^m + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i d_i g^{m-i},$$

missä d_i on matriisin M $i \times i$-pääminoreiden summa.

Tarkastellaan yhtälöä (5.6) apulauseen 5.1.1 valossa. Koska $\det(G(s)) \not\equiv 0$ ja $\det(D(s)) \not\equiv 0$, niin on helppo todeta yhtälön (5.8) avulla, että $a_n(s) \not\equiv 0$ ja $a_0(s) \not\equiv 0$. Muuttuja s voidaan ratkaista yhtälöstä muuttujan g suhteen. Ratkaisu voidaan tietyssä tarkasteltavan pisteen ympäristössä esittää Puiseux-sarjoina [13].

Newtonin diagrammi on graafinen menetelmä Puiseux-sarjojen johtavien termien asteiden määrittämiseen. Newtonin diagrammi polynomille

$$\alpha(s, g) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} g^i s^j \tag{5.9}$$

muodostetaan pisteessä s_0 seuraavasti:

1) Kirjoitetaan kahden muuttujan polynomi muodossa

$$\alpha(s, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} g^i (s - s_0)^j.$$

2) Merkitään xy-koordinaatistoon pisteet (i, j), joilla $c_{ij} \neq 0$.

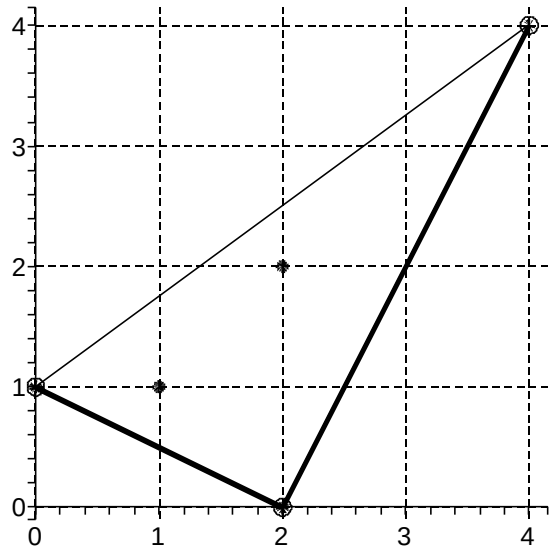
3) Newtonin diagrammi on pienin mahdollinen konveksi polygoni, joka sisältää kaikki merkatut pisteet.

Newtonin polygoni pisteessä $s_0 = \infty$ saadaan tarkastelemalla algebrallista polynomia $s^m \alpha(\frac{1}{s}, g)$ pisteessä $s_0 = 0$. Newtonin diagrammin alarajaa kutsutaan Newtonin alarajaksi. Joissakin tapauksissa Newtonin diagrammi voi olla yksi jana. Liitteessä C on esitelty tarkemmin Newtonin diagrammin käyttöä Puiseux-sarjojen johtavien termien asteiden määrittämisessä.

Esimerkki 5.1.3. Kuvassa 5.3 on piirretty kahden muuttujan polynomin

$$\alpha(s, g) = (s - 1) - 4(s - 1)g + ((s - 1)^2 + 1)g^2 + 2(s - 1)^4 g^4$$

Newtonin polygoni pisteessä $s_0 = 1$. Newtonin alaraja on piirretty kuvaan paksummalla viivalla. ■



Kuva 5.3: Esimerkin 5.1.3 polynomin $\alpha(s, g)$ Newtonin diagrammi.

Systeemin juuriuraa tarkasteltaessa on päädytty yhtälöön (5.7), missä $a_m(s) \not\equiv 0$ ja $a_0(s) \not\equiv 0$, joten Newtonin diagrammissa on aina jotkin muotoa $(0, j_0)$ ja (m, j_m) olevat pisteet. Nyt voidaan esitellä m kappaletta indeksejä, joita kutsutaan juuriuraindekseiksi.

Määritelmä 5.1.1 (Juuriuraindeksit)**.** *Tarkastellaan yhtälön* (5.6) *pisteeseen s_0 piirrettyä Newtonin diagrammia. Olkoon $(0, j_0), (1, j_1), \ldots, (m, j_m)$ Newtonin alarajan pisteet, joiden x-koordinaatti on kokonaisluku. Systeemin juuriuraindeksit pisteessä s_0 ovat*

$$j_0 - j_1, j_1 - j_2, \ldots, j_{m-1} - j_m.$$

Artikkeleissa [2] ja [39] todetaan, että mikäli pisteessä s_0 on l kappaletta positiivisia juuriuraindeksejä $\gamma = \frac{t}{l}$, niin pisteeseen s_0 päätyy t juuriuran haaraa. Kun $g \to 0$ tai vastaavasti $k \to \infty$, niin juuriuran haarat lähestyvät pistettä s_0 pitkin asymptootteja, joista vierekkäiset muodostavat keskenään $\frac{2\pi}{t}$ radiaanin kulman. Vastaavasti jos pisteessä s_0 on l kappaletta negatiivisia

juuriuraindeksejä $\gamma = -\frac{t}{l}$, niin t juuriuran haaraa lähestyy pistettä s_0 $\frac{2\pi}{t}$ radiaanin välein olevia asymptootteja pitkin, kun $g \to \infty$ tai vastaavasti $k \to 0$. Siis pisteestä s_0 alkaa t juuriuran haaraa.

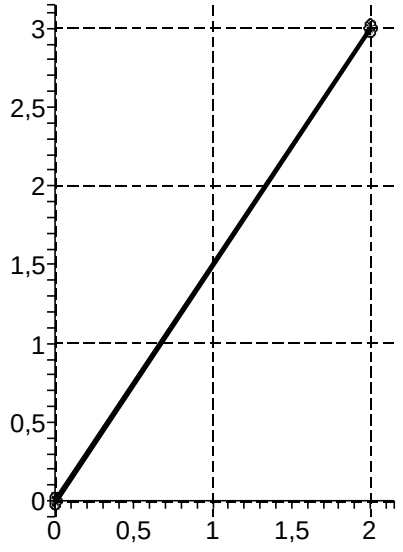
Esimerkki 5.1.4. Jatketaan esimerkin 5.1.1 systeemin Σ_1 juuriuran tarkastelua. Systeemin siirtofunktiolle löytyy helposti vasemmalta jaoton hajotelma $(I, D(s))$, missä

$$D(s) = \begin{bmatrix} 0 & s-1 \\ (s-1)^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Täten juuriura saadaan määritettyä myös yhtälöstä

$$\det\left(gD(s) - I\right) = 1 - g^2(s-1)^3 = 0.$$

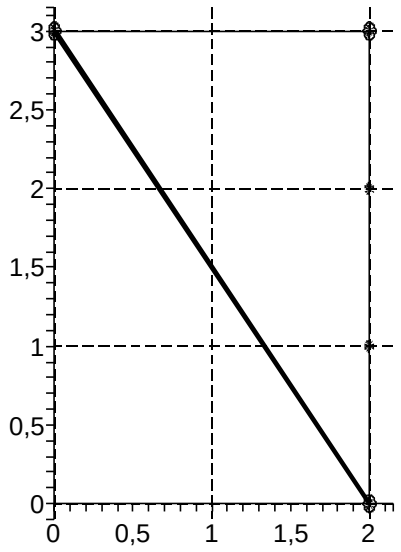
Saadun yhtälön Newtonin diagrammi pisteessä $s = 1$ on esitetty kuvassa 5.4 ja pisteessä $s = \infty$ kuvassa 5.5.



Kuva 5.4: Systeemin Σ_1 Newtonin diagrammi pisteessä $s_0 = 1$.

Juuriuraindeksit pisteissä $s_0 = 1$ ja $s_0 = \infty$ ovat siis

$$\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = -\frac{3}{2} \quad \text{ja} \quad \gamma_1(\infty) = \gamma_2(\infty) = \frac{3}{2}.$$



Kuva 5.5: Systeemin Σ_1 Newtonin diagrammi pisteessä $s_0 = \infty$.

Kun tarkastellaan kuviota 5.1, niin huomataan, että pisteestä $s = 1$ lähtee ja pisteeseen $s = \infty$ päätyy kolme juuriuran haaraa kuten juuriuraindekseistä nähdään. ■

Edellä on selvitetty kuinka juuriura käyttäytyy pienillä ja suurilla muuttujan k arvoilla. Lisäksi on määritelty joukko indeksejä, jotka kertovat juuriuran haarautumiskuvion ja juuriuran haaran suppenemisnopeuden pienillä ja suurilla muuttujan k arvoilla. Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan lähemmin juuriuran yhteyttä systeemin äärellisiin ja äärettömiin nolliin.

5.2 Juuriuran yhteys nolliin ja napoihin

Yleisesti systeemin juuriuraindeksit ja rakenneindeksit eivät ole samat, kuten esimerkistä 5.1.1 on helppo todeta. Artikkelissa [33] Owens liittää äärettömyyteen hajaantuvien juuriuran haarojen käyttäytymisen Morsen artikkelissa [31] määrittelemiin indekseihin. Verghese ja Kailath toteavat artikkelissa [44] niiden olevan rakenneindeksit äärettömyydessä. Artikkelista [15] Hung ja

MacFarlane käsittelevät juuriuran äärettömyyteen hajaantuvaa osaa ehdon $\det(G(s)) \not\equiv 0$ ja tietyn Markovin parametrien nollaominaisarvoon liittyvän oletuksen vallitessa. Nollarakenteen äärettömyydessä osoitetaan vastaavan juuriuran äärettömyyteen hajaantuvaa osaa. Kyseisessä artikkelissa käsitellään myös esimerkein, mitä voi tapahtua jos esitetyistä oletuksista luovutaan.

Edellä mainituissa artikkeleissa käsittely on koskenut vain tapauksia, joissa $D = 0$ ja ainoastaan juuriuran äärettömyyteen hajaantuvaa osaa. Byrnesin ja Stevensin artikkelissa [2] annetaan yleisempi käsittely, jossa sallitaan myös tapaus $D \neq 0$. Artikkelissa käsitellään samalla myös äärellinen osa juuriurasta ja annetaan riittävä ja välttämätön ehto juuriuraindeksien ja rakenneindeksien yhtenevyydelle tarkasteltavassa pisteessä. Artikkelissa [39] Smith käyttää samaa lähestymistapaa kuin Byrnes ja Stevens ja antaa riittävän ehdon paikallisen rakenteen ja juuriuraindeksien yhtenevyydelle tiettyjen polynomien avulla.

Seuraavaksi lähdetään tutkimaan juuriuraindeksien ja rakenneindeksien välistä yhteyttä tarkemmin. Tarkastelu on artikkelin [2] mukainen. Ennen varsinaista tulosta esitellään kuitenkin vielä yksi apulause.

Apulause 5.2.1. *Olkoon $G(s)$ sellainen $n \times n$-rationaalimatriisi, että $\det(G(s)) \not\equiv 0$. Todistuksessa esiintyvien nollaominaisarvoihin liittyvien rakenneoletusten vallitessa, löytyy sellaiset $\mathbb{C}[s]$-unimodulaariset matriisit $L(s)$ ja $R(s)$, vakiomatriisi T ja indeksijoukko $\{k_1, \dots k_r\}$, että*

$$L(s)T^{-1}G(s)TR(s) = \operatorname{blockdiag}\left((G_1(s), \dots, G_r(s)\right) + \mathscr{O}\left((s - s_0)^{k_r+1}\right),$$

$k_1 < k_2 < \cdots < k_r$, $\lim_{s \to s_0} s^{k_i} G_i(s) = Q_i$ on kääntyvä $d_i \times d_i$-vakiomatriisi ja $d_1 + d_2 + \cdots d_r = n$.

Todistus: Kyseinen tulos on esitetty artikkelissa [32] pisteessä $s_0 = \infty$ aidoille rationaalimatriiseille ja seuraava tarkastelu seuraakin pääpiirteissään artikkelin tarkastelua. Tässä kuitenkin tarkastelu tehdään äärellisessä pisteessä s_0 ja rationaalimatriisilla saa olla tarkasteltavassa pisteessä napoja.

Annettu rationaalimatriisi voidaan esittää pisteen s_0 ympäristössä Laurentin sarjana, jonka singulaariosa on äärellinen. Siis voidaan kirjoittaa

$$G(s) = (s - s_0)^{k_1} A_{k_1} + \mathscr{O}\left((s - s_0)^{k_1+1}\right),$$

missä A_{k_1} on $n \times n$-vakiomatriisi ja k_1 mahdollisesti negatiivinen kokonaisluku. Oletetaan, että matriisin A_{k_1} Jordanin kanoninen muoto on seuraavaa

muotoa

$$T_1^{-1} A_{k_1} T_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

missä Q_1 on matriisin A_{k_1} nollasta eroaviin ominaisarvoihin liittyvistä Jordanin blokeista muodostuva blokkidiagonaalimatriisi. Oletetaan siis matriisin A_1 nollaominaisarvoihin liittyvän rakenteen olevan yksinkertainen. Matriisi Q_1 on kääntyvä vakiomatriisi.

Suoraan laskemalla voidaan todeta, että

$$T_1^{-1} G(s) T_1 = \begin{bmatrix} G_1(s) & \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+1}\right) \\ \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+1}\right) & \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+1}\right) \end{bmatrix},$$

missä $\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^{k_1} G_1(s) = Q_1$, eli $G_1(s)$ on haluttua muotoa. Vasemman alakulman blokin matriisi on nyt muotoa $(s-s_0)^{k_1+1} B_1 + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+2}\right)$. Määritellään $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarinen matriisi

$$L_1^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -(s-s_0) B_1 Q_1^{-1} & I \end{bmatrix},$$

jolloin

$$L_1(s) T_1 G(s) T_1 = \begin{bmatrix} G_1(s) & \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+1}\right) \\ \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+2}\right) & \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+1}\right) \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että kyseinen unimodulaarisella matriisilla kertominen lisäsi vasemman alakulman blokin astetta yhdellä, mikäli B_1 ei satu olemaan nollamatriisi. Nollamatriisin tapauksessa $L_1(s) = I$ ja vasemman alakulman blokin johtavan termin aste on jo valmiiksi vähintään $k_1 + 2$. Nyt vasemman alakulman blokin matriisi on muotoa $(s-s_0)^{k_1+2} B_2 + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+3}\right)$ Määritellään $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarinen matriisi

$$L_1^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -(s-s_0)^2 B_2 Q_1^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan laskemalla todeta, että matriisin $L_1^{(1)}(s) T_1 G(s) T_1$ kertominen vasemmalta matriisilla $L_1^{(2)}(s)$ pudottaa edelleen vasemman alakulman blokin astetta yhdellä. Valitaan jokin kokonaisluku $k > k_1$. On selvää, että jatkamalla vastaavasti voimme muodostaa $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarinen matriisit $L_1^{(i)}$,

$i = 1, \ldots, k - k_1 - 1$, jotka kukin pudottavat vasemman alakulman blokin astetta yhdellä tai ovat identiteettimatriiseja. Merkitään

$$L_1(s) = L_1^{(k-k_1-1)}(s) \cdots L_1^{(1)}(s),$$

jolloin

$$L_1(s)T_1^{-1}G(s)T_1 = \begin{bmatrix} G_1(s) & \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+1}\right) \\ \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k}\right) & \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+1}\right) \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti voidaan muodostaa $\mathbb{C}[s]$-unimodulaariset matriisit $R_1^{(1)}(s), \ldots, R_{k-k_1-1}^{(1)}(s)$, jotka ovat muotoa

$$R_1^{(i)}(s) = \begin{bmatrix} I & C_i(s) \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

missä $C_i(s)$ on sopiva polynomimatriisi, ja joilla vasemmalta kertominen vähentää oikean yläkulman blokin astetta yhdellä. Määritellään

$$R_1(s) = R_1^{(1)}(s) \cdots R_1^{(k-k_1-1)}(s).$$

Nyt siis

$$L_1(s)T_1^{-1}G(s)T_1R_1(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_1+1}\right) \end{bmatrix} + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k}\right).$$

Matriisit $L_1(s)$ ja $R_1(s)$ ovat $\mathbb{C}[s]$-unimodulaaristen matriisien tulona myös $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarisia.

Syntyneen matriisin oikean alakulman matriisi $M_2(s)$ voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$M_2(s) = (s-s_0)^{k_2}A_{k_2} + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_2+1}\right),$$

missä A_{k_2} ei ole nollamatriisi. Voidaan olettaa, että $k > k_2$, koska muussa tapauksessa voidaan aloittaa alusta ja valita riittävän suuri luku k.

Edelleen oletetaan, että matriisilla A_{k_2} on yksinkertainen nollarakenne, eli

$$T_2^{-1}A_{k_2}T_2 = \begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.11}$$

missä Q_2 on kääntyvä Jordanin blokeista muodostuva vakiomatriisi. Matriisi T_2 voidaan olettaa olevan identiteetti matriisi sopivalla matriisin T_1 valinnalla. Kuten edellä voidaan löytää sellaiset matriisit $L_{2*}(s)$ ja $R_{2*}(s)$, että

$$L_{2*}(s)M_2(s)R_{2*}(s) = \begin{bmatrix} G_2(s) & 0 \\ 0 & \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_2+1}\right) \end{bmatrix} + \mathscr{O}\left((s-s_0)^k\right)$$

ja $\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^{k_1}G_2(s) = Q_2$ on kääntyvä vakiomatriisi. Määritellään

$$L_2(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L_{2*}(s) \end{bmatrix} \text{ ja } R_2(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_{2*}(s) \end{bmatrix},$$

jolloin laskemalla voidaan todeta, että

$$\begin{aligned} &L_2(s)L_1(s)T_1^{-1}G(s)T_1R_1(s)R_2(s) \\ &\quad = \operatorname{blockdiag}\left(G_1(s), G_2(s), \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_2+1}\right)\right) + \mathscr{O}\left((s-s_0)^k\right). \end{aligned}$$

Matriisit $L_2(s)$ ja $R_2(s)$ ovat $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarisia matriiseja.

Haluttu muoto saavutetaan jatkamalla edellä kuvatunlaisia askelia. Yleisessä askeleessa tarkasteltava matriisi on muotoa

$$\operatorname{blockdiag}\left(G_1(s), \ldots, G_t(s), M_{t+1}(s)\right) + \mathscr{O}\left((s-s_0)^k\right).$$

Voidaan olettaa, että $M_{t+1}(s) = (s-s_0)^{k_{t+1}}Q_{k_{t+1}} + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_{t+1}+1}\right)$ ja $k > k_{t+1}$. Jos olisi $k < k_{t+1}$, niin aloitettaisiin alusta ja ensimmäisessä askeleessa valittaisiin suurempi kokonaisluku k. Jälleen oletetaan matriisin Q_{t+1} nollarakenteen yksinkertaisuus. On helppo todeta, että alusta tarvitsee aloittaa vain äärellisen monta kertaa. Määritellään sellaiset $\mathbb{C}[s]$-unimodulaariset matriisit $L_{t+1,*}(s)$ ja $R_{t+1,*}(s)$, että

$$\begin{aligned} &L_{t+1,*}(s)M_{t+1}(s)R_{t+1,*}(s) \\ &\quad = \begin{bmatrix} G_{t+1}(s) & 0 \\ 0 & \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_{t+1}+1}\right) \end{bmatrix} + \mathscr{O}\left((s-s_0)^k\right), \end{aligned}$$

missä $\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^{k_{t+1}}G_{t+1}(s) = Q_{t+1}$ on kääntyvä vakiomatriisi. Asetetaan

$$L_{t+1}(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L_{t+1,*}(s) \end{bmatrix} \text{ ja } R_{t+1}(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_{t+1,*}(s) \end{bmatrix}.$$

Koska jokaisessa askeleessa tarkastelemme aina vain pienempää oikean alakulman blokkia, niin lopulta algoritmi päättyy. Olkoon viimeinen mahdollinen askel r. Määritellään

$$L(s) = L_r(s) \cdots L_1(s) \text{ ja } R(s) = R_1(s) \cdots R_r(s).$$

On löydetty sellaiset matriisit $L(s)$, $R(s)$ ja $T = T_1$, että

$$L(s)T^{-1}G(s)TR(s) = \text{blockdiag}\left(G_1(s), \ldots, G_r(s)\right) + \mathscr{O}\left((s - s_0)^{k_r+1}\right).$$

Määrittelyn perusteella $\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^{k_i}G_i(s) = Q_i$ on jokin kääntyvä $d_i \times d_i$-vakiomatriisi kaikilla $i = 1, \ldots, r$ ja $k_1 < \cdots < k_r$ ja $L(s)$ ja $R(s)$ ovat $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarisia matriiseja $\mathbb{C}[s]$-unimodulaaristen matriisien tulona. Oletus $\det(G(s)) \not\equiv 0$ takaa, ettei kyseisen muodon blokkidiagonaalimatriisin loppuun tule nollablokkeja ja $d_1 + d_2 + \cdots d_r = n$. $\square$

Huomaa, että yllä määritelty matriisi $L(s)$ on alakolmiomatriisi, jonka diagonaalilla on ykkösiä sen määrittelyn perusteella. Vastaavasti matriisi $R(s)$ on yläkolmiomatriisi, jonka diagonaalilla on ykkösiä. Tämän vuoksi on helppo todeta, että $\mathbb{C}[s]$-unimodulaarisista matriiseista $L(s)$ ja $R(s)$ tulee sijoituksella $s = \frac{1}{w}$ $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaarisia matriiseja.

Apulause 5.2.2. *Olkoon $G(s)$ sellainen rationaalimatriisi, että $\det(G(s)) \not\equiv 0$. Todistuksessa esiintyvien nollaominaisarvoihin liittyvien rakenneoletusten vallitessa, löytyy sellaiset $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaariset matriisit $L(s)$ ja $R(s)$ ja indeksijoukko $\{k_1, \ldots k_r\}$, että*

$$L(s)G(s)R(s) = \text{blockdiag}\left((G_1(s), \ldots, G_r(s)\right) + \mathscr{O}_-\left(s^k\right),$$

$k_1 > k_2 > \cdots > k_r$, $\lim_{s\to s_0} s^{k_i}G_i(s) = Q_i$ on kääntyvä $d_i \times d_i$-vakiomatriisi ja $d_1 + d_2 + \cdots + d_r = n$.

Todistus: Saadaan apulauseen 5.2.1 todistuksesta tarkastelemalla matriisia $G\left(\frac{1}{s}\right)$ pisteessä $s_0 = 0$ ja huomaamalla, että $\mathbb{C}[s]$-unimodulaariset matriiseista $L(s)$ ja $R(s)$ saadaan $\mathbb{C}_{pr}(s)$-unimodulaariset matriisit $L\left(\frac{1}{s}\right)$ ja $R\left(\frac{1}{s}\right)$.$\square$

Tässä vaiheessa huomautetaan, että yllä kuvattu muunnos pisteessä $s_0 \in \mathbb{C}_\infty$ muuttaa Laurentin sarjan r ensimmäistä kerroinmatriisia muotoon

$$\left\{ \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & Q_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & * & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & Q_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

missä tähdet edustavat mielivaltaisia matriiseja.

Lause 5.2.1. *Lineaarisen systeemin juuriuraindeksit ja rakenneindeksit ovat samat pisteessä $s_0 \in \mathbb{C}$, jos ja vain jos sen siirtofunktiomatriisi toteuttaa apulauseessa 5.2.1 esitetyt ehdot. Vastaavasti juuriuraindeksit ja rakenneindeksit pisteessä $s_0 = \infty$ ovat samat, jos ja vain jos apulauseessa 5.2.2 esiintyvät ehdot toteutuvat.*

Todistus: Todistuksen idea on sama kuin artikkelissa [2]. Loppuosan perustelut, koskien saatavien juuriura- ja rakenneindeksien yhtenevyyttä, poikkeavat artikkelissa esitetystä. Tässä todistetaan lause vain äärellisen pisteen tapauksessa, koska äärettömän pisteen tapauksessa todistus on samanlainen.

Olkoon $G(s)$ annetun lineaarisen systeemin $n \times n$-siirtofunktiomatriisi. Oletetaan aluksi, että matriisi toteuttaa apulauseessa 5.2.1 esitetyt ehdot pisteessä s_0. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} Q(s) &:= L(s)T^{-1}G(s)TR(s) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{r}(s-s_0)^{k_1}\mathrm{blockdiag}\,(\underbrace{*,\ldots,*}_{i-1\ kpl}, Q_i, 0, \ldots, 0\,) + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_r+1}\right), \end{aligned}$$

missä $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ ja matriisit Q_i ovat kääntyviä $d_i \times d_i$-matriiseja, sekä $d_1 + d_2 + \cdots + d_r = n$.

Huomataan, että juuriura saadaan määrättyä käyttämällä rationaalimatriisia $L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)$ rationaalimatriisin $G(s)$ tilalla, sillä

$$\det(gI - G(s)) = \det(gI - L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)).$$

Apulauseen 5.1.1 nojalla voidaan kirjoittaa

$$\Gamma_0(s,g) = \det\left(gI - L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)\right) = g^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i d_{n-i}(s)g^{n-i},$$

missä $d_{n-i}(s)$ on kaikkien matriisin $L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)$ $i \times i$-pääminoreiden summa. joten matriisin $L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)$ pääminorit määräävät Newtonin alarajan.

Jos $(N(s), D(s))$ on jokin matriisin $L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)$ vasemmalta jaoton hajotelma, niin yhtälön (5.8) nojalla yhtälöstä $\det(gD(s) - N(s)) = 0$ saatava Newtonin alarajan muoto saadaan määrättyä yhtälöstä $\det(gI - L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)) = 0$ Laurentin sarjojen johtavia termejä käyttäen. Koska

vain alarajan muodolla on merkitystä, niin jatkamme matriisin $L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)$ pääminoreita tutkimalla.

Matriisin $L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)$ $m\times m$-pääminorit ovat Binet-Cauchy lauseen B.1 nojalla muotoa

$$|L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)|^m_{\mathbf{r},\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{l}}\sum_{\mathbf{k}} |L^{-1}(s)|^m_{\mathbf{r},\mathbf{l}}|Q(s)|^m_{\mathbf{l},\mathbf{k}}|R^{-1}(s)|^m_{\mathbf{k},\mathbf{r}}.$$

Tarkastellaan $m \times m$-minoria $|Q(s)|^m_{\mathbf{l},\mathbf{k}}$, joka saadaan valitsemalla rivit $l_1, \ldots, l_m$ ja sarakkeet $c_1, \ldots, c_m$. Merkitään $d_0 = 0$. Tarkastelemalla matriisin $Q(s)$ rakennetta on helppo todeta, että jos $d_i < l_n \leq d_{i+1}$, niin kyseisen rivin alkiot ovat kaikki muotoa $c(s-s_0)^{k_{i+1}} + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_{i+1}}\right)$, missä c on mahdollisesti nolla. Olkoon $m = d_1 + d_2 + \cdots + d_r + r_0$, missä $0 \leq r_0 < d_{r+1}$. Koska $k_i < k_{i+1}$, niin on selvää, että minorin $|Q(s)|^m_{\mathbf{l},\mathbf{k}}$ johtavan termin aste on vähintään $d_1k_1 + d_2k_2 + \cdots + d_rk_r + r_0k_{r+1}$ Matriisien $L^{-1}(s)$ ja $R^{-1}(s)$ alkiot ovat $O\left((s-s_0)^0\right)$, joten $|L^{-1}(s)|^m_{\mathbf{r},\mathbf{l}}$ ja $|R^{-1}(s)|^m_{\mathbf{k},\mathbf{r}}$ ovat $O\left((s-s_0)^0\right)$. Siis huomataan, että $|L^{-1}(s)Q(s)R^{-1}(s)|^m_{\mathbf{r},\mathbf{r}}$ on $O\left((s-s_0)^{d_1k_1+d_2k_2+\cdots+d_tk_t+r_0k_{t+1}}\right)$, kun $m = d_1 + d_1 + \cdots + d_t + r_0$.

Osoitetaan, että pisteet $(d_1k_1 + d_2k_2 + \cdots + d_tk_t, m-d)$ ovat Newtonin alarajalla, jolloin edellä olevan tarkastelun nojalla kaikki Newtonin alarajan mahdolliset kokonaislukupisteet ovat

$$(d_1k_1 + d_2k_2 + \cdots + d_rk_t + r_0k_{t+1}, n-m),$$

kun $m = d_1 + d_1 + \cdots + d_t + r_0$.

Merkitään $m = d_1+d_2+\cdots+d_t$, missä $t \leq r$. Tarkastellaan tapausta, jossa $\mathbf{l} = \mathbf{k} = \mathbf{r} = (1, 2, \ldots, m)$. Koska $L^{-1}(s)$ on ala- ja $R^{-1}(s)$ yläkolmiomatriisi, jonka diagonaalilla on ykkösiä, niin

$$|L^{-1}(s)|^d_{\mathbf{r},\mathbf{l}} = |R^{-1}(s)|^d_{\mathbf{k},\mathbf{r}} = 1,$$

eli

$$|L^{-1}(s)|^d_{\mathbf{r},\mathbf{l}}|Q(s)|^d_{\mathbf{l},\mathbf{k}}|R^{-1}(s)|_{\mathbf{k},\mathbf{r}} = |Q(s)|^d_{\mathbf{l},\mathbf{k}}.$$

Matriisin $Q(s)$ alimatriisi, joka saadaan kun valitaan d ensimmäistä riviä ja saraketta on muotoa

$$\text{blockdiag}\left\{(s-s_0)^{k_i}Q_i + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_i+1}\right),\ i = 1, \ldots, t\right\} + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_t+1}\right).$$

Koska matriisit Q_i, $i = 1, \ldots, t$, ovat kääntyviä matriiseja, niin välttämättä tämän alimatriisin determinantti on muotoa

$$(s-s_0)^{d_1k_1+d_2k_2+\cdots+d_rk_r}c_r + O\left((s-s_0)^{d_1k_1+d_2k_2+\cdots+d_rk_r+1}\right).$$

Koska lisäksi on osoitettu, että kaikkien $m \times m$-minoreiden summa on $O\left((s-s_0)^{d_1k_1+d_2k_2+\cdots+d_rk_r}\right)$, niin piste $(d_1k_1+d_2k_2+\cdots+d_rk_r, n-m)$ on Newtonin alarajalla.

Saadaan juuriuraindekseiksi

$$\underbrace{k_1,\ldots,k_1}_{d_1\ kappaletta},\underbrace{k_2,\ldots,k_2}_{d_2\ kappaletta},\ldots,\underbrace{k_r,\ldots,k_r}_{d_r\ kappaletta}.$$

Koska matriisit $L(s)T^{-1}$ ja $TR(s)$ ovat kääntyviä, kun $s=s_0$, niin lauseen 3.1.4 nojalla matriisien $G(s)$ ja $Q(s)$ rakenneindeksit ovat samat. Yllä on todettu, että matriisin $Q(s)$ $m \times m$-minoreiden Laurentin sarjojen johtavien termien asteet ovat vähintään $d_1k_1+d_2k_2+\cdots+d_tk_t+r_0k_{t+1}$, kun $m = d_1+d_2+\cdots+d_t+r_0$. Matriisin $Q(s)$ rakenteen perusteella on selvää, että löytyy sellainen $m\times m$-minori, jolla johtavan termin aste on täsmälleen $d_1k_1+d_2k_2+\cdots+d_tk_t+r_0k_{t+1}$. Lauseen 3.1.2 nojalla rakenneindeksit ovat samat kuin juuriuraindeksit.

Oletetaan seuraavaksi, että apulauseen 5.2.1 nollaominaisarvoihin liittyvä oletus ei ole voimassa. Tällöin apulauseen todistusta vastaavalla tarkastelulla osoitetaan, että annettu rationaalimatriisi $G(s)$ voidaan saattaa muunnoksilla $L(s)$ ja $R(s)$, sekä similaarisuusmuunnoksella T muotoon

$$L(s)T^{-1}G(s)TR(s) = \text{blockdiag}\left(G_1(s),\ldots,G_r(s),(s-s_0)^{k_r}J\right) = Q_0(s),$$

missä $G_i(s) = (s-s_0)^{k_i} + \mathscr{O}\left((s-s_0)^{k_i+1}\right)$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$, matriisit Q_i ovat kääntyviä ja matriisi J muodostuu tarkastelun viimeisessä vaiheessa, jossa nollarakenne ei ole enää yksinkertainen, syntyvistä ominaisarvoon nolla liittyvistä Jordanin blokeista. Siis J on muotoa

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä * on joko 1 tai 0. Kuten aiemminkin voidaan todeta, että kun $m = d_1+d_2+\cdots+d_l+r_0$, missä $l \le r$ ja $0 \le r_0 < d_{l+1}$, piste $(d_1k_1+d_2k_2+\cdots+d_lk_l+r_0k_{l+1}, n-m)$ on Newtonin alarajalla ja siten ensimmäiset juuriuraindeksit ovat

$$\underbrace{k_1,\ldots,k_1}_{d_1\ kappaletta},\underbrace{k_2,\ldots,k_2}_{d_2\ kappaletta},\ldots,\underbrace{k_r,\ldots,k_r}_{d_r\ kappaletta}.$$

Nämä ovat myös ensimmäiset rakenneindeksit.

Tarkastellaan funktion $\Gamma_0(s,g)$ termin $g^{n-(d_1+d_2+\cdots+d_r+h)}$ kerrointa. Merkitään $d = d_1 + d_2 + \cdots + d_r$, jolloin kerroin on kaikkien matriisin $G(s) = L^{-1}(s)Q_0(s)R^{-1}(s)$ $(d+h)\times(d+h)$ pääminoreiden summa. Ottamalla huomioon matriisin $Q_0(s)$ rakenteen, on helppo huomata, että sen nollasta eroavien pääminoreiden Laurentin sarjojen johtavien termien aste on vähintään $d_1k_2 + d_2k_2 + \cdots + d_rk_r + hk_r + 1$. Täten matriisin $G(s)$ $(d+h)\times(d+h)$-pääminoreiden summan Laurentin sarjan johtavan termin aste on vähintään $d_1k_2 + d_2k_2 + \cdots + d_rk_r + hk_r + 1$. Newtonin alarajalle ei siis kuulu pistettä $(d_1k_1 + d_2k_2 + \cdots + d_rk_r + k_r, m - d_1 + d_2 + \cdots + d_r + 1)$. Täten seuraava juuriuraindeksi ei voi olla k_r.

Matriisin $Q_0(s)$ rakenteen nojalla on selvää, että löytyy sellainen $(d+1)\times(d+1)$-minori, jonka Laurentin sarjan johtavan termin aste on $d_1k_2 + d_2k_2 + \cdots + d_rk_r + k_r$. Toisaalta kaikkien $(d+1)\times(d+1)$-minoreiden aste on vähintään sama, joten $\nu_{s_0}^{(d+1)}(G(s)) = d_1k_2 + d_2k_2 + \cdots + d_rk_r + k_r$. Kuten edellä voidaan todeta, että $\nu_{s_0}^{(d)}(G(s)) = d_1k_2 + d_2k_2 + \cdots + d_rk_r$, joten lauseen 3.1.2 nojalla seuraava rakenneindeksi on k_r. Siis juuriuraindeksit ja rakenneindeksit eroavat toisistaan. □

Edellä on käsitelty vain tapausta, jossa ulostulotakaisinkytkennässä 5.1 on tehty valinta $F = I$. Jos juuriuraindeksit ja paikallinen rakenne eivät ole samat jossain pisteessä, niin aina voidaan valinnan $F = I$ sijasta tehdä valinta $F = K$ ja saada samat juuriuraindeksit ja rakenneindeksit. Artikkelissa [2] osoitetaan vielä, että apulauseiden 5.2.1 ja 5.2.2 oletukset yksinkertaisesta nollaominaisarvoon liittyvästä rakenteesta ovat voimassa lähes millä tahansa kääntyvän matriisin K valinnalla. Siis mikäli $\det(G(s)) \not\equiv 0$ voidaan aina valita sellainen kääntyvä K, että juuriuraindeksit ulostulotakaisinkytkennällä

$$u = kK(r - y)$$

antavat paikallisen rakenteen. Toisin sanottuna aste- ja juuriuraindeksit saadaan aina yhteneviksi käyttämällä lähes mitä tahansa kääntyvää esikompensaattoria. Lauseen 4.1.6 nojalla esikompensaattori ei vaikuta systeemin rakenneindekseihin ja siksi rakenneindeksit saadaan aina juuriuraindekseistä sopivaa esikompensaattoria käyttäen.

Esimerkki 5.2.1. Jatketaan esimerkin 5.1.1 systeemin Σ_1 tarkastelua. Käyttäen esikompensaattoria

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

saadaan systeemi $\Sigma_3(A, BK, C)$. Nyt siirtofunktio on

$$G_3(s) = G_1(s)K = \begin{bmatrix} (s-1)^{-2} & 0 \\ 0 & (s-1)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Systeemien Σ_1 ja Σ_3 rakenneindeksit pisteessä $s_0 = 1$ ovat $q_1(1) = -2$ ja $q_2(1) = -1$. Pisteessä $s_0 = \infty$ rakenneindekseiksi saadaan $q_1(\infty) = 1$ ja $q_2(\infty) = 2$.

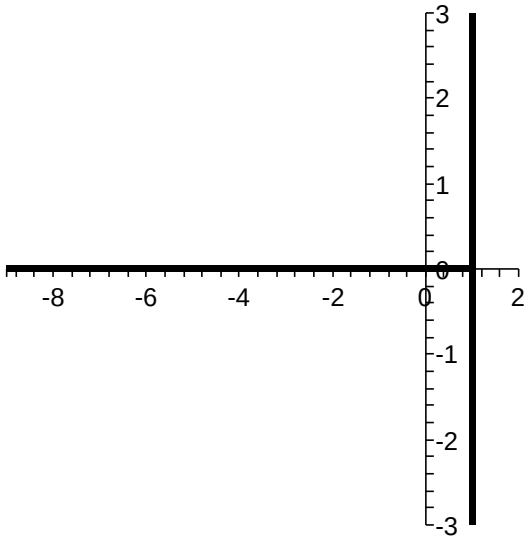
Systeemin Σ_3 juuriura saadaan yhtälöstä

$$\det(I + kG_3(s)) = (1 + k(s-1)^{-1})(1 + k(s-1)^{-2}) = 0,$$

mistä saadaan

$$s = 1 - k \ \text{ tai } \ s = 1 \pm i|\sqrt{k}|.$$

Kuvassa 5.6 on graafinen esitys systeemin Σ_3 juuriurasta.



Kuva 5.6: Esimerkin 5.2.1 systeemin Σ_3 juuriura

Esimerkissä 5.1.4 lasketut systeemin Σ_1 juuriuraindeksit eroavat rakenneindekseistä pisteissä $s_0 = 1$ ja $s_0 = \infty$. On helppo todeta, että systeemin Σ_3 juuriuraindeksit pisteissä $s_0 = 1$ ovat sen rakenneindeksit. Esikompensaattoria K käyttäen siis saatiin systeemistä Σ_1 systeemi, jolla on samat

rakenne- ja juuriuraindeksit. ■

5.3 Ääretönulotteisten systeemien juuriura

Juuriuraa voidaan tutkia samaan tapaan kuin edellä myös ääretönulotteisten systeemien tapauksessa. Tällöin juuriuran haaroja on ääretön määrä. Artikkelissa [34] Pohjolainen käsittelee yksinkertaista jakautunutta järjestelmää, jonka karakteristinen yhtälö on analyyttinen resolventtijoukossaan. Artikkelissa [1] Byrnes, Gilliam ja He tutkivat myös jakautuneen järjestelmän juuriuraa, mutta tässä tapauksessa systeemi on siso-systeemi ja siirtofunktio kuuluu Callier-Desoer -luokkaan. Molemmissa artikkeleissa havaitaan, että äärettömyyteen suppenevien juuriuran haarojen käyttäytymisestä on hyvin vaikeaa sanoa mitään yleistä. Yleisesti ottaen tämä johtuu siitä, että ääretönulotteisen systeemin siirtofunktio, vaikka olisikin äärellisissä pisteissä analyyttinen, ei ole analyyttinen äärettömyydessä, kuten äärellisulotteisen systeemin siirtofunktio.

Seuraavaksi tarkastellaan vielä lähemmin artikkelin [34] tuloksia ja äärellisulotteisessa tapauksessa havaittua yhteyttä siirtonollien ja juuriuraindeksien välillä. Artikkelissa tarkastellaan jakautunutta järjestelmää $\Sigma(A, B, C)$, jonka tila-avaruus X on ominaisvektoreiden $\{\phi_n\}$ virittämä kompleksinen Hilbert-avaruus. Ominaisarvojen on oletettu olevan yksinkertaisia ja negatiivisia reaalilukuja. Operaattori $B \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^p, X)$ määritellään lineaarisesti riippumattomien vektoreiden $b_i \in X$ avulla

$$B = [b_1, b_2, \ldots, b_p].$$

Operaattori $C : D(C) \to \mathbb{C}^p$, missä $D(A) \subseteq D(C) \subseteq X$, oletetaan lineaariseksi ja A-rajoitetuksi. A-rajoittuneisuuden määritelmä löytyy esimerkiksi kirjasta [18, s.190]. Operaattori C määritellään tila-avaruuden X sisätulon $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ja lineaarisesti riippumattomien vektoreiden $c_i \in D(A)$ avulla

$$Cx = \begin{bmatrix} \langle Ax, Ac_1 \rangle \\ \langle Ax, Ac_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle Ax, Ac_p \rangle \end{bmatrix}$$

kaikilla $x \in D(A)$. Yhtälön 5.1 mukaisella takaisinkytkennällä saadaan suljettu systeemi, jonka tilaoperaattori on $A - kBC$. Artikkelissa [34, s.203]

osoitetaan, että suljetun systeemin tilaoperaattorin ominaisarvot riippuvat jatkuvasti muuttujasta k ja ne ominaisarvot λ, jotka eivät kuulu operaattorin A spektriin saadaan määrättyä analyyttisestä funktiosta

$$\det\left(\frac{1}{k}I - C(\lambda I - A)^{-1}B\right).$$

Siis juuriura voidaan tässäkin tapauksessa määrittää käyttäen yhtälöä

$$\det\left(gI - G(s)\right) = 0. \tag{5.12}$$

Artikkelissa osoitetaan, että $\lambda \notin \sigma(A)$ on juuriuran päätepiste, jos ja vain jos $\det\left(G(\lambda)\right) = 0$, kun oletus $\det\left(G(s)\right) \not\equiv 0$, $s \in \rho(A)$, on voimassa. Lauseen 4.2.1 antama diagonaalimatriisi on pisteen λ ympäristössä täyttä astetta ja on helppo todeta, että aste putoaa pisteessä λ.

Lause 4.2.1 antaa paikallisen rakenteen pisteessä $\lambda \notin \sigma(A)$. Liitteessä C todetaan, että koska $G(s)$ on analyyttinen pisteessä $\lambda \notin \sigma(A)$, niin yhtälölle 5.12 voidaan määrittää Newtonin alaraja ja sitä kautta juuriuraindeksit, kuten määritelmässä 5.1.1 pisteessä λ. Huomaa, että apulause 5.2.1 voidaan yleistää myös tähän tapaukseen ja edelleen lauseen 5.2.1 tulos antaa yhteyden määritellyn paikallisen rakenteen ja juuriuraindeksien välille.

Yllä on käsitelty erästä yksinkertaista ääretönulotteista systeemiä ja sen juuriuran ja paikallisen rakenteen yhteyttä. On osoitettu, että lauseen 4.2.1 antaman paikallisen rakenteen ja juuriuran välillä on vastaava yhteys kuin äärellisessä tapauksessa. Käsittely täytyy kuitenkin rajoittaa vain tiettyyn osaan kompleksitasoa ja esimerkiksi äärettömyyteen hajaantuvista juuriuran haaroista ei voida sanoa mitään, sillä äärettömyydessä ei saada määriteltyä tässä työssä esitellyin keinoin paikallista rakennetta tai juuriuraindeksejä. Tässä käsitellyn erikoistapauksen tulokset ovat todennäköisesti voimassa myös yleisemmin niissä tapauksissa, joissa karakteristinen yhtälö on analyyttinen käsiteltävässä pisteessä $s_0 \in \mathbb{C}_\infty$. Yleisemminkin, mikäli lauseiden 4.2.1 4.2.2 avulla saadaan määriteltyä paikallinen rakenne ja, kuten Callier-Desoer -luokan systeemeillä, jaottomat hajotelmat ovat käytössä, niin äärellisulotteista tapausta vastaavassa tarkastelussa ei pitäisi olla ongelmia tietyn pisteen ympäristössä. Tässä tyydytään vain esittämään nämä ideat äärellisulotteisen teorian yleistämisestä ääretönulotteiseen tapaukseen.

Luku 6

Johtopäätökset ja jatkotutkimus

Tässä työssä käsiteltiin lineaarisen systeemin siirtonollia ja napoja eli siirtofunktioiden nollia ja napoja. Yhdessä pisteessä tarkasteltuna siirtonollat ja navat antavat paikallisen rakenteen, joka kertoo siirtofunktion käyttäytymisen lähestyttäessä kyseistä pistettä. Äärellisulotteisten systeemien siirtofunktiot ovat rationaalimatriiseja ja niiden rakenne tunnetaan hyvin. Sen sijaan ääretönulotteisten systeemien kohdalla tilanne on toinen. Työn tavoitteena oli yleistää lineaarisen systeemin siirtofunktion nollien ja napojen käsitteitä ääretönulotteisten systeemien tapaukseen.

Aluksi esiteltiin tarvittavia käsitteitä ja työkaluja, kuten Smith-McMillanin muoto. Käsitteet esiteltiin mahdollisimman yleisiä algebrallisia rakenteita käyttäen. Tämä lähestymistapa osoittautui järkeväksi, koska yleisissä renkaissa määritellyt käsitteet saatiin käyttöön kuhunkin tilanteeseen sopivassa renkaassa.

Rationaalimatriisin äärellisten ja äärettömien nollien ja napojen käsitteet määriteltiin käytettäväksi myöhemmin lineaaristen systeemien siirtonollien ja napojen yhteydessä. Tämä tehtiin käyttäen Smith-McMillanin muotoa. Äärellisiä nollia ja napoja määriteltäessä tarvittavaksi Eukleideen alueeksi, jonka suhteen Smith-McMillanin muoto otettiin, osoittautui polynomifunktioiden muodostama Eukleideen alue. Äärettömien nollien tapauksessa sopiva algebrallinen rakenne oli aitojen rationaalifunktioiden muodostama Eukleideen alue. Rationaalimatriisien nollien ja napojen käsitteet osoittautuivat hyvin samankaltaisiksi kuin rationaalifunktioiden nollien ja napojen käsitteet. Esimerkiksi osoittajien ja nimittäjien käsitteet yleistyvät rationaalifunktioilta

rationaalimatriiseille.

Äärellisulotteisten lineaaristen systeemien siirtonollat ja navat saatiin määriteltyä rationaalifunktioiden nollien ja napojen avulla. Työssä esiteltiin siirtonollien yhteys systeemimatriisiin sekä tuloksia niiden invarianttiudesta erilaisten takaisinkytkentöjen suhteen. Tämän jälkeen esiteltiin Smith-McMillanin muodon vastine tapauksessa, jossa matriisin alkiot voitiin esittää Laurentin sarjana, jonka singulaariosa on äärellinen. Tätä muotoa käyttäen saatiin määriteltyä paikallinen rakenne joissakin ääretönulotteisissa tapauksissa. Esimerkiksi Callier-Desoer -algebran jo aiemmin kirjallisuudessa määriteltyihin nolliin pystytään kyseistä rakennetta käyttäen liittämään asteet. Havaittiin myös, että kirjallisuudessa aiemmin esiintyvä ääretönulotteisten systeemien äärettömien nollien määritelmä, joka on luonteeltaan erilainen ja voimassa rajoitetummassa tapauksessa, yhtyy tässä työssä esiteltyyn määritelmään. Täten tavoitteessa yleistää siirtonollien ja napojen käsitettä onnistuttiin ainakin osittain. Toisaalta selvittämättä vielä jäi, miten siirtonollien ja napojen asteet saadaan määriteltyä systeemeille, joiden ohjaus- ja mittausavaruudet ovat ääretönulotteisia. Tämä on yksi mahdollinen jatkotutkimuksen kohde. Viiveellisillä systeemeillä, joilla yleistä nollarakennetta äärettömyydessä ei voida määrittää, voidaan määrittää tietyllä tapaa suunnattu nollarakenne. Tällaisen suunnatun nollarakenteen määrittäminen ja käyttökelpoisuuden tutkiminen eri yhteyksissä voisi olla toinen jatkotutkimuksen kohde.

Määriteltyjen lineaaristen systeemien siirtonollien merkitystä systeemiteoriassa esiteltiin lyhyesti muutamalla esimerkillä ja Immosen ja Pohjolaisen tuoreen artikkelin [16] tulos koskien siso-systeemin regulointia kirjoitettiin uusiksi käyttäen ääretöntä rakennetta. Eräs tutkimuksen kohde jatkossa voisi olla sen selvittäminen, tarjoaako tässä työssä määritelty nollarakenne tavan yleistää äärellisulotteisten systeemien napoja ja nollia käyttäviä tuloksia ääretönulotteisille systeemeille.

Työssä esiteltiin myös juuriura, joka saadaan suljetun systeemin napojen piirtämänä jälkenä kompleksitasossa. Haarojen havaittiin alkavan systeemin navoista ja päätyvän sen nolliin. Haarojen haarautumisen napojen ja nollien lähellä havaittiin olevan suoraan yhteydessä äärelliseen ja äärettömään rakenteeseen tiettyjen ehtojen vallitessa. Työssä onnistuttiin esittämään kyseinen äärellisillä systeemeillä tunnettu yhteys erään yksinkertaisen ääretönulotteisen systeemin tapauksessa. Jatkossa voitaisiin tutkia miten yleisesti kyseinen yhteys on voimassa lineaarisilla systeemeillä.

Kirjallisuutta

[1] Byrnes, C. I., D. S. Gilliam ja J. He: *Root-locus and boundary feedback design for a class of distributed parameter systems.* SIAM journal on control and optimization, 32, 1994.

[2] Byrnes, C. I. ja P. K. Stevens: *The McMillan and Newton polygons of a feedback system and the construction of root loci.* International journal of control, 35, 1982.

[3] Callier, F. M., V. H. Cheng ja C. A. Desoer: *Dynamic Interpretation of Poles and Transmission Zeros for Distributed Multivariable Systems.* IEEE Transaction on Circuits and Systems, 28, 1981.

[4] Commault, C. ja J. M. Dion: *Structure at infinity of linear systems a geometric approach.* 20th IEEE CDC, San Diego, 1981.

[5] Commault, C. ja J. M. Dion: *Structure at infinity of linear systems: a geometric approach.* IEEE Transactions on Automatic Control, 27, 1982.

[6] Commault, C., J. M. Dion ja J. A. Torres: *Minimal structure in the block decoupling problem with stability.* Automatica, 27, 1991.

[7] Curtain, Ruth F. ja Hans J. Zwart: *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[8] Desoer, C. A. ja J. D. Schulman: *Zeros and poles of matrix transfer functions and their dynamical interpretation.* IEEE Transaction on Circuits and Systems, 21, 1974.

[9] Dion, J. M. ja C. Commault: *Feedback decoupling of structured systems.* IEEE Transactions on automatic control, 38, 1993.

[10] Ferreira, Pedro. M. G.: *Invariance of infinite zeros under feedback.* International journal of control, 35, 1982.

[11] Freudenberg, J. S. ja D. B. Looze: *Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems.* IEEE Transactions on automatic control, 30, 1985.

[12] Hille, Einar: *Analytic function theory, Volume 1.* Ginn and Company, 1959.

[13] Hille, Einar: *Analytic function theory, Volume 2.* Ginn and Company, 1962.

[14] Horn, Roger A. ja Charles R. Johnson: *Matrix Analysis.* Cambridge university press, 1985.

[15] Hung, Y. S. ja A. G. J. MacFarlane: *On the relationships between the unbounded asymptote behaviour of multivariable root loci, impulse response and infinite zeros.* International journal of control, 34, 1981.

[16] Immonen, E. ja S. Pohjolainen: *What periodic signals can an exponentially stabilizable linear feedforward control system asymptotically track?* SIAM Journal of Control and Optimization, 44, 2006.

[17] Kailath, Thomas: *Linear Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[18] Kato, Tosio: *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, New York, 1966.

[19] Kimura, H.: *Perfect and subperfect regulation in linear multivariable control systems.* Automatica, 18, 1982.

[20] Knopp, Konrad: *Theory of Functions, Part I.* Dover Publications, 1945.

[21] Knopp, Konrad: *Theory of Functions, Part II.* Dover Publications, 1975.

[22] Kouvaritakis, B.: *Asymptotic multivariable root-locus behaviour for nonproper systems.* International journal of control, 28, 1978.

[23] Lau, K., R. H. Middleton ja J. H. Braslavsky: *Undershoot and settling time tradeoffs for nonminimum phase systems.* IEEE Transactions on automatic control, 48, 2003.

[24] Malabre, M. ja V. Kučera: *Infinite structure and exact model matching problem: A geometric approach.* IEEE Transactions on automatic control, 29, 1984.

[25] Malabre, M. ja R. Rabah: *Zeros at infinity for infinite dimensional systems.* Proceedings of the International Symposium MTNS-89 Vol. 1: Realization and Modelling in System Theory Series: Progress in Systems and Control Theory, Vol. 3, 1990.

[26] Malabre, M. ja R. Rabah: *Structure at infinity, model matching and disturbance rejection for linear systems with delays.* Kybernetika, 29, 1993.

[27] Malabre, M. ja R. Rabah: *Structure at infinityof linear delay systems with application to the disturbance decoupling problem.* Kybernetika, 35, 1999.

[28] Malabre, M. ja R. Rabah: *Weak structure at infinity and row-by-row decoupling for linear delay systems.* Kybernetika, 40, 2004.

[29] McFarlane, A. G. J. ja N. Karcanias: *Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory.* International journal of control, 24, 1976.

[30] Mita, T. ja H. Yoshida: *Undershooting phenomenon and its control in linear multivariable servomechanisms.* IEEE Transactions on automatic control, 26, 1981.

[31] Morse, A. S.: *Structural Invariants of Linear Multivariable Systems.* SIAM Journal on Control and Optimization, 11, 1973.

[32] Owens, D. H.: *Dynamic transformations and the calculation of multivariable root-loci.* International journal of control, 28, 1978.

[33] Owens, D. H.: *On structural invariants and the root-loci of linear multivariable systems.* International journal of control, 28, 1978.

[34] Pohjolainen, S.: *Computation of transmission zeros for distributed parameter systems.* International journal of control, 33, 1981.

[35] Poole, David: *Linear Algebra: A Modern Introduction, 2nd edition.* Thomson Brooks/Cole, 2006.

[36] Pugh, A. C., E. R. L. Jones, O. Demianczuk ja G. E. Hayton: *Infinite-frequency structure and a certain matrix Laurent expansion.* International journal of control, 1989.

[37] Rosenbrock, H. H.: *State-Space and Multivariable Theory.* Thomas Nelson and Sons Ltd., 1970.

[38] Schrader, C. B. ja M. K. Sain: *Research on system zeros: A survey.* International journal of control, 50, 1989.

[39] Smith, M. C.: *Multivariable root-locus behaviour and the relationship to transfer-function pole-zero structure.* International journal of control, 43, 1986.

[40] Van Dooren, P., P. Dewilde ja J. Vandewalle: *On the Determination of the Smith-McMillan Form of a Rational Matrix From Its Laurent Expansion.* IEEE Transaction on circuits and systems, 26, 1979.

[41] Vardulakis, A. I. G.: *Algebraic Analysis and Synthesis Methods.* John Wiley & Sons, 1991.

[42] Vardulakis, A. I. G., D. N. J. Limebeer ja K. Karcanias: *Structure and Smith-MacMillan form of a rational matrix at infinity.* International journal of control, 35, 1982.

[43] Verghese, G., P. Van Dooren ja T. Kailath: *Properties of the system matrix of a generalized state-space system.* International journal of control, 30, 1979.

[44] Verghese, G. ja T. Kailath: *Comments on 'On structural invariants and the root-loci of linear multivariable systems'.* International journal of control, 29, 1979.

[45] Vidyasagar, M.: *Control System Synthesis: A Factorization Approach.* MIT Press, 1985.

[46] Wonham, W. Murray: *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach, 2. edition.* Springer-Verlag, New York, 1979.

[47] Zwart, H.: *Transfer functions for infinite-dimensional systems.* Systems & control letters, 52, 2004.

[48] Zwart, H. ja M. B. Hof: *Zeros of infinite-dimensional systems.* IMA Journal of Mathematical Control and Information, 14, 1997.

Liite A

Algebraa

Tässä liitteessä esitellään tarvittavia algebran peruskäsitteitä ja lauseita. Laskutoimituksesta $+$ käytetään nimeä yhteenlasku ja laskutoimituksesta $\cdot$ taas kertolasku. Luvun tulokset löytyvät todistuksineen lähteestä [45].

A.1 Algebrallisia struktuureita

Määritelmä A.1.1 (Rengas)**.** *Olkoon R epätyhjä joukko ja $+$ ja $\cdot$ sen laskutoimituksia. Kolmikko $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$ on rengas jos seuraavat ehdot toteutuvat:*

$(r1)$ $(R, +)$ *on Abelin ryhmä, eli*

- (a) $x + (y + z) = (x + y) + z \;\; \forall x, y, z \in R$
- (b) $x + y = y + x \;\; \forall x, y \in R$
- (c) $\exists 0 \in R : x + 0 = x \;\; \forall x \in R$
- (d) $\forall x \in R : \exists - x \in R : x + (-x) = 0$

$(r2)$ $(R, \cdot)$ *on puoliryhmä, eli*

- (a) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \;\; \forall x, y, z \in R$

$(r3)$ *Kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen, eli*

- (a) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \;\; \forall x, y, z \in R$
- (b) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \;\; \forall x, y, z \in R$

Jatkossa laskutoimitukselle $x \cdot y$ käytetään lyhennemerkintää xy. Samoin merkitään lyhyemmin $x + (-y) = x - y$.

Määritelmä A.1.2. *Rengas* $\mathbf{R}$ *on vaihdannainen, jos* $ab = ba$ *kaikilla* $a, b \in \mathbf{R}$. *Renkaalla* $\mathbf{R}$ *on ykkösalkio jos on olemassa sellainen alkio* $1 \in \mathbf{R}$, *että kaikilla* $x \in \mathbf{R}$ $1x = x1 = x$.

Määritelmä A.1.3 (Kokonaisalue)**.** *Olkoon* x *ja* y *renkaan* $\mathbf{R}$ *alkioita. Rengas* $\mathbf{R}$ *on kokonaisalue, jos sillä ei ole nollan tekijöitä, eli*

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ tai } y = 0.$$

Määritelmä A.1.4 (Yksikkö)**.** *Olkoon* $\mathbf{R}$ *rengas, jolla on ykkösalkio. Alkio* $x \in \mathbf{R}$ *on yksikkö, jos löytyy sellainen alkio* $y \in \mathbf{R}$, *että* $xy = yx = 1$.

Edellisessä määritelmässä alkio y voidaan osoittaa helposti yksikäsitteiseksi ja sitä sanotaan käänteisalkioksi ja merkitään x^{-1}

Määritelmä A.1.5 (Kunta)**.** *Vaihdannainen rengas* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$, *jolla on ykkösalkio, on kunta jos se toteuttaa ehdot*

($k1$) F *sisältää vähintään kaksi alkiota*

($k2$) *Jokaisella alkiolla* $x \in F \setminus \{0\}$ *on olemassa käänteisalkio* $x^{-1} \in F$

Määritelmä A.1.6 (Ideaali)**.** *Vaihdannaisen renkaan* $\mathbf{R}$ *osajoukko* $\mathbf{I}$ *on ideaali, jos se toteuttaa ehdot*

($i1$) $\mathbf{I}$ *on additiivisen ryhmän* $\mathbf{R}$ *aliryhmä, eli*

  (a) $0 \in \mathbf{I}$

  (b) *Jos* $x, y \in \mathbf{I}$, *niin* $x \pm y \in \mathbf{I}$

($i2$) *Jos* $a \in \mathbf{I}$ *ja* $x \in \mathbf{R}$, *niin* $xa \in \mathbf{I}$.

On helppo todeta, että vaihdannaisessa renkaassa $\mathbf{R}$ joukko

$$\mathbf{I} = \{ax \ : \ a \in \mathbf{R}\},$$

missä x on kiinteä renkaan alkio, on ideaali. Seuraava määritelmä on siis mielekäs.

Määritelmä A.1.7 (Pääideaali)**.** *Olkoon* $\mathbf{R}$ *vaihdannainen rengas. Ideaalia* $\mathbf{I} = \{ax \ : \ a \in \mathbf{R}\}$*, missä* x *on kiinteä, kutsutaan alkion* x *generoimaksi pääideaaliksi.*

Määritelmä A.1.8 (Pääideaalialue)**.** *Vaihdannainen kokonaisalue* $\mathbf{R}$ *on pääideaalialue, jos sen jokainen ideaali on pääideaali.*

Määritelmä A.1.9 (Jakaja, monikerta)**.** *Sanotaan, että alkio* $x \neq 0$ *on alkion* y *jakaja, jos löytyy sellainen alkio* z*, että* $y = xz$*. Tätä merkitään* $x|y$*. Alkion* y *sanotaan olevan alkion* x *monikerta.*

Määritelmä A.1.10 (Eukleideen alue)**.** *Vaihdannainen kokonaisalue* $\mathbf{R}$ *on Eukleideen alue, jos on olemassa astefunktio* $\delta : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_+$*, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

(e1) Jokaisella $x, y \in \mathbf{R}$*,* $y \neq 0$*, on olemassa sellainen* $q \in \mathbf{R}$*, että* $r := x - qy$ *on 0 tai* $\delta(r) < \delta(y)$*.*

(e2) Jos $x|y$*, niin* $\delta(x) \leq \delta(y)$*.*

Lause A.1.1. *Jokainen Eukleideen alue on pääideaalialue.*

Todistus: Katso [45, s.386].

Seuraavaksi määritellään alueeseen liittyvä osamääräkunta. Tässä ei osoiteta esiteltävää relaatiota ekvivalenssirelaatioksi, eikä yhteen ja kertolaskuja hyvin määritellyiksi. Todistukset löytyvät lähteestä [45].

Olkoon $\mathbf{M}$ renkaan $\mathbf{R}$ sellainen osajoukko, että

(a) $1 \in \mathbf{M}$

(b) Jos $a, b \in \mathbf{M}$, niin $ab \in \mathbf{M}$

(c) Jos $a \in \mathbf{M}$ ja $ab = 0$, niin $b = 0$.

Merkinnällä $\mathbf{N}$ tarkoitamme joukkoa, joka koostuu niistä renkaan $\mathbf{R}$ alkioista, jotka toteuttavat ehdon (c).

Määritellään joukon $\mathbf{R} \times \mathbf{M}$ ekvivalenssirelaatio $\sim$ kaavalla

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Ekvivalenssiluokkien $\mathbf{R} \times \mathbf{M}/\sim$ joukossa ekvivalenssiluokkaa, jonka edustaja on (a, b), merkitään $\frac{a}{b}$. Ekvivalenssiluokkien joukossa määritellään yhteenlasku + kaavalla

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

ja kertolasku $\cdot$ kaavalla

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Määritelmä A.1.11 (Osamääräkunta)**.** *Olkoon* $\mathbf{R}$ *kokonaisalue, jolloin* $\mathbf{N} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$*. Joukko* $\mathbf{R} \times \mathbf{N}/\sim$ *on määriteltyjen yhteen ja kertolaskun kanssa kunta, jota kutsumme alueeseen liittyväksi osamääräkunnaksi ja merkitsemme* $\overline{\mathbf{R}}$*.*

Määritelmä A.1.12 (Suurin yhteinen tekijä)**.** *Olkoon* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *joukko nolla-alkiosta eroavia vaihdannaisen, ykkösalkiollisen renkaan* $\mathbf{R}$ *alkioita. Alkio* d *on joukon* X *suurin yhteinen tekijä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:*

$(s1)$ $d|x_i$ *kaikilla* $i = 1, \ldots, n$

$(s2)$ $c|x_i$ *kaikilla* $i = 1, \ldots, n \Rightarrow c|d$

Apulause A.1.1. *Vaihdannaisessa ykkösalkiollisessa alueessa suurin yhteinen tekijä on yksiköllä kertomista vaille yksikäsitteinen.*

Todistus: Katso [45].

Määritelmä A.1.13. *Vaihdannaisen ykkösalkiollisen renkaan* $\mathbf{R}$ *alkiot* x *ja* y *ovat keskenään jaottomia, jos niiden suurin yhteinen tekijä on yksikkö.*

Apulause A.1.2. *Pääideaalialueen* $\mathbf{R}$ *alkiot* x *ja* y *ovat keskenään jaottomat, jos ja vain jos löytyy sellaiset* $a, b \in \mathbf{R}$*, että*

$$ax + by = 1.$$

Todistus: Katso [45].

Apulause A.1.3 (Redusoitu muoto)**.** *Pääideaalialueen* $\mathbf{R}$ *osamääräkunnan* $\overline{\mathbf{R}}$ *alkio* $\frac{x}{y}$ *voidaan esittää redusoidussa muodossa* $\frac{f}{g}$*, missä* f *ja* g *ovat keskenään jaottomia.*

Todistus: Katso [45].

Määritelmä A.1.14 (Pienin yhteinen jaettava)**.** *Olkoon* $\mathbf{R}$ *ykkösalkiollinen ja vaihdannainen rengas ja* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *joukko nolla-alkiosta eroavia renkaan* $\mathbf{R}$ *alkioita. Alkio* d *on joukon* X *pienin yhteinen jaettava, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:*

$(p1)$ $x_i | d$ *kaikilla* $i = 1, \ldots, n$

$(p2)$ $x_i | c$ *kaikilla* $i = 1, \ldots, n \Rightarrow d | c$

A.1.1 Eukleideen alue $\mathbb{C}[s]$

Merkitään kompleksikertoimisten polynomifunktioiden joukkoa $\mathbb{C}[s]$. On helppo osoittaa, että $\mathbb{C}[s]$ on vaihdannainen kokonaisalue normaalin pisteittäisen yhteen- ja kertolaskun suhteen. Osoitetaan, että se on Eukleideen alue.

Merkitään polynomin $p(s)$ astetta $\deg(p(s))$. Seuraavaksi osoitetaan, että $\deg(\cdot)$ on määritelmän A.1.10 mukainen astefunktio, jolloin siis $\mathbb{C}[s]$ on Eukleideen alue.

Valitaan $x(s), y(s) \in \mathbb{C}[s]$. Oletetaan lisäksi, että $y(s) \neq 0$. Osoitetaan, että löytyy sellainen $q(s) \in \mathbb{C}[s]$, että $r(s) = x(s) - q(s)y(s) \equiv 0$ tai $\deg(r(s)) < \deg(y(s))$.

Jos $x(s) \equiv 0$ tai $\deg(x(s)) < \deg(y(s))$, niin voidaan valita $q(s) \equiv 0$. Oletetaan, että $\deg(x(s)) \geq \deg(y(s)) \geq 0$. Kirjoitetaan

$$x(s) = x_n s^n + x_{n-1} s^{n-1} + \cdots + x_1 s + x_0$$

ja

$$y(s) = y_m s^m + y_{m-1} s^{m-1} + \cdots + y_1 s + y_0,$$

missä siis $n \geq m$ ja $x_n \neq 0 \neq y_m$. Asetetaan $n_0 = n$, $x(s) = r_0(s)$ ja valitaan $q_1(s) = \frac{x_n}{y_m} s^{n-m}$, jolloin

$$q_1(s)y(s) = x_n s^n + c_{n-1}^{(1)} s^{n-1} + \cdots + c_{n-m}^{(1)} s^{n-m}$$

ja

$$\begin{aligned} r_1(s) &= r_0(s) - q_1(s)y(s) \\ &= x_n s^n + x_{n+1} s^{n+1} + \cdots + x_0 - x_n s^n - c_{n-1}^{(1)} s^{n-1} - \cdots - c_{n-m}^{(1)} s^{n-m} \\ &= d_{n_1}^{(1)} s^{n_1} + d_{n_1-1}^{(1)} s^{n_1-1} + \cdots d_1^{(1)} s + d_0^{(1)}, \end{aligned}$$

missä $n_1 < n_0$. Jos nyt $\deg(r_1(s)) < \deg(y(s))$, niin $q(s) = q_1(s)$ on sopiva valinta. Muuten $\deg(r_1(s)) \geq \deg(y(s))$, jolloin valitaan $q_2(s) = \frac{d_{n_1}^{(1)}}{y_m} s^{n_1-m}$ ja saadaan

$$q_2(s)y(s) = d_{n_1}^{(1)} s^{n_1} + c_{n_1-1}^{(2)} s^{n_1-1} + \cdots + c_{n_1-m}^{(2)} s^{n_1-m}$$

ja

$$\begin{aligned} r_2(s) &= r_1(s) - q_2(s)y(s) \\ &= x(s) - (q_1(s) + q_2(s))y(s) \\ &= d_{n_2}^{(2)} s^{n_2} + d_{n_2-1}^{(2)} s^{n_2-1} + \cdots d_1^{(2)} s + d_0^{(2)}, \end{aligned}$$

missä $n_2 < n_1$. Jos $\deg(r_2(s)) = n_2 < \deg(p_2(s))$, niin $q(s) = q_1(s) + q_2(s)$ on sopiva valinta. Muuten jatketaan kuten edellä. Yleisessä askeleessa tehdään siis valinta $q_k(s) = \frac{d_{m_{k-1}}^{(k-1)}}{y_m} s^{n_{k-1}-m}$. Koska jokaisella askeleella jäännöstermin $r_k(s)$ aste putoaa vähintään yhdellä, niin jollain $t \leq n+1$ $r_t(s) \equiv 0$ tai $\deg(r_t(s)) < \deg(y(s))$. Täten sopiva valinta on $q(s) = q_t(s) + q_{t-1}(s) + \cdots + q_1(s)$. Täten määritelmän A.1.10 ehto (e1) on voimassa.

Selvästi, jos $x(s)|y(s)$, eli $y(s) = x(s)p(s)$, niin $\deg(x(s)) \leq \deg(y(s))$, joten määritelmän A.1.10 ehto (e2) on myös voimassa ja $\mathbb{C}[s]$ on Eukleideen alue.

A.1.2 Eukleideen alue $\mathbb{C}_{pr}(s)$

Merkitään kaikkien kompleksikertoimisten rationaalifunktioiden joukkoa $\mathbb{C}(s)$ ja aitojen kompleksikertoimisten aitojen rationaalifunktioiden joukkoa $\mathbb{C}_{pr}(s)$.

Joukko $\mathbb{C}_{pr}(s)$ on helppo osoittaa vaihdannaiseksi alueeksi, kun yhteen- ja kertolasku määritellään normaalisti pisteittäin. Seuraavaksi osoitetaan, että määritelmässä 3.2.1 annettu ∞-valuaatio on renkaassa $\mathbb{C}_{pr}(s)$ määritelmän A.1.10 mukainen astefunktio. Huomaa, että koska käsiteltävät rationaalifunktiot ovat aitoja, niin niiden ∞-valuaation arvo on aina ei-negatiivinen.

Olkoon $x(s), y(s) \in \mathbb{C}_{pr}(s)$. Merkitään $x(s) = \frac{n_x(s)}{d_x(s)}$ ja $y(s) = \frac{n_y(s)}{d_y(s)}$. On helppo todeta, että

$$\delta_\infty(x(s)y(s)) = \delta_\infty(x(s)) + \delta_\infty(y(s)),$$

joten jos $x(s)|y(s)$, eli $y(s) = x(s)v(s)$, niin

$$\delta_\infty(y(s)) = \delta_\infty(x(s)v(s)) = \delta_\infty(x(s)) + \delta_\infty(v(s)) \geq \delta_\infty(x(s)).$$

Siis ehto (e2) on voimassa. Osoitetaan, että myös ehto (e1) on voimassa. Oletetaan, että $y(s) \not\equiv 0$. Jos $x(s) \equiv 0$ tai $\delta_\infty(x(s)) < \delta_\infty(y(s))$, niin tällöin voidaan valita $q(s) \equiv 0$.

Oletetaan, että $\delta_\infty(x(s)) > \delta_\infty(y(s))$, jolloin

$$\delta_\infty\left(\frac{x(s)}{y(s)}\right) = \delta_\infty\left(\frac{n_x(s)}{d_x(s)} \cdot \frac{d_y(s)}{n_y(s)}\right) = \delta_\infty(x(s)) - \delta_\infty(y(s)) > 0.$$

Siis voidaan valita $q(s) = \frac{x(s)}{y(s)} \in \mathbb{C}_{pr}(s)$, jolloin

$$x(s) - y(s)q(s) = 0.$$

Täten siis ehto (e1) on myös voimassa.

Liite B

Lineaarialgebraa

Tässä liitteessä esitellään ilman tarkempaa todistusta joitakin tarvittavia lineaarialgebran tuloksia. Lukijalla oletetaan olevan perustietämys lineaarialgebrasta. Tarvittavat tiedot löytyvät esimerkiksi kirjasta [35].

Olkoon A ja D neliömatriiseja ja B ja C sopivan dimensioisia matriiseja. Jos A on kääntyvä, niin suoraan laskemalla voidaan todeta, että

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

ja jos D on kääntyvä, niin

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

Apulause B.1 (Binet-Cauchy -kaava)**.** *Olkoon A $n \times m$- ja B $m \times p$-matriisi ja $1 \leq r \leq \min(n, m, p)$. Nyt*

$$|AB|^i_{\mathbf{r},\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{l}} |A|^i_{\mathbf{r},\mathbf{l}} |B|^i_{\mathbf{l},\mathbf{c}},$$

missä summa otetaan yli kaikkien mahdollisten monikkojen $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_i)$.

Todistus: Katso [37, s. 5, lause 1.3].

Jordanin blokeiksi kutsutaan neliömatriiseja, jotka ovat muotoa

$$J_n(a) = aI_n + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apulause B.2 (Jordan)**.** *Olkoon A kompleksinen $n \times n$-matriisi. Löytyy sellainen kääntyvä matriisi S, että*

$$A = S \,\mathrm{blockdiag}\left(J_{n_1}(a_1), \ldots, J_{n_r}(a_r)\right) S^{-1},$$

missä Jordanin blokkien koot toteuttavat $n_1 + \cdots + n_r = n$.

Todistus: Katso [14, s. 126, Lause 3.1.11].

Liite C

Newtonin diagrammi ja alaraja

Tässä liitteessä käydään läpi lähteestä [13, s. 105-109] löytyvä Newtonin diagrammin esittely. Käsitellään kahden muuttujan yhtälöä

$$F(s,g) := \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}s^i g^j = 0 \tag{C.1}$$

joka voidaan esittää myös muodoissa

$$F(s,g) := \sum_{i=0}^{n} p_i(g)s^i = 0 \tag{C.2}$$

ja

$$F(s,g) := \sum_{j=0}^{m} q_j(s)g^j = 0, \tag{C.3}$$

missä $p_i(g)$ ja $q_j(s)$ ovat polynomeja. Jatkossa huomataan, että Newtonin diagrammimenetelmää voidaan käyttää sopivin muutoksin myös tilanteessa, jossa $n = \infty$, eli funktiot $q_j(s)$ ovat analyyttisia funktioita. Ennen diagrammin esittelyä esitellään tarvittava implisiittifunktiolause.

Lause C.1 (Implisiittifunktiolause)**.** *Olkoon kahden muuttujan funktio $F(z,w)$ holomorfinen pisteen (z_0,w_0) ympäristössä. Olkoon funktion sarjaesitys pisteen (z_0,w_0) tarpeeksi pienessä ympäristössä*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(z-z_0)^i(w-w_0)^j,$$

missä $a_{00} = 0$ ja $a_{01} \neq 0$. Tällöin löytyy sellainen yksikäsitteinen funktio $f(z)$, joka on holomorfinen sopivassa pisteen z_0 ympäristössä $|z - z_0| < \rho$, että $f(z_0) = w_0$ ja

$$F(z, f(z)) \equiv 0, \text{ kun } |z - z_0| < \rho.$$

Todistus: Katso [12, s.269, lause 9.4.4].

Tutkitaan yhtälöä (C.1). Oletetaan, että kahden muuttujan polynomia $F(s, g)$ ei voida esittää usean muuttujien s ja g polynomien tulona, sillä muutoin tarkastelu jakaantuu useaksi erilliseksi tarkasteluksi, joissa tehty oletus on voimassa. Lisäksi oletetaan, että $p_n(s) \not\equiv 0$.

Halutaan ratkaista yhtälöstä muuttuja s muuttujan g suhteen. Ratkaisuja on normaalisti n kappaletta, paitsi äärellisessä määrässä kriittisiä pisteitä. Erityisesti ollaan kiinnostuneita, mitä tapahtuu kun g on pieni tai g on mielivaltaisen suuri. Ratkaisut voidaan pisteen $g = g_0$ ympäristössä esittää Puiseux-sarjoina. Newtonin diagrammi on graafinen apuväline, jonka avulla voidaan määrittää Puiseux-sarjojen johtavien termien asteet. Newtonin diagrammi yhtälölle C.1 piirretään pisteessä $s = s_0$ seuraavasti:

1) Kirjoitetaan yhtälö (C.1) muodossa

$$F(s, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(s - s_0)^i g^j = 0.$$

2) Merkitään xy-koordinaatistoon pisteet (i, j), joilla $c_{ij} \neq 0$.

3) Newtonin diagrammi on pinta-alaltaan pienin mahdollinen konveksi polygoni, joka sisältää kaikki merkityt pisteet.

Newtonin diagrammi pisteessä $s_0 = \infty$ saadaan tarkastelemalla algebrallista funktiota $z^m \alpha(\frac{1}{z}, g)$. Newtonin diagrammin alarajaa kutsutaan Newtonin alarajaksi. Newtonin alaraja pisteessä s_0 piirrettynä antaa sellaisten Puiseux-sarjojen johtavien termien asteet, jotka suppenevat kohti pistettä s_0, kun g lähestyy nollaa ja tai ääretöntä.

Seuraavaksi esitetään, kuinka Newtonin diagrammista saadaan Puiseux-sarjojen johtavien termien asteet. Tässä käsitellään tarkemmin vain tapausta, jossa g lähestyy nollaa ja $s_0 = 0$. Oletetaan, että Newtonin diagrammin

kärkipisteet ovat (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, N$ ja että ne ovat luetellut vastapäivään kiertäen. Lisäksi oletetaan, että $x_0 \leq \min\{x_i \ : \ 1 \leq i \leq N\}$ ja, että (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, M \leq N$ ovat kaikki sellaiset pisteet, joilla $x_i < x_{i+1}$ ja $y_i > y_{i+1}$. Pisteet (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, M$ muodostavat siis sen Newtonin alarajan osan, jonka määrittävien janojen kulmakertoimet ovat negatiiviset. Koska oletimme, että polynomia $F(s, g)$ ei voida esittää muuttujien s ja g polynomien tulona, niin $x_0 = 0$ ja $y_M = 0$. Jotta seuraava tarkastelu olisi mielekäs oletetaan, että $M > 0$. Kutsutaan jatkossa tätä Newtonin alarajan osaa alarajan vasemmaksi osaksi, sekä y_0 vasemman osan korkeudeksi ja erotusta x_M vasemman osan leveydeksi.

Pisteiden (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) kautta kulkeva suora kirjoitetaan muodossa

$$px + qy = r,$$

missä $p \leq y_0$ ja $q \leq x_M$ ovat keskenään jaottomia. Käsiteltävän janan päätepiste (x_1, y_1) voidaan kirjoittaa nyt muodossa $(\mu_1 q, y_0 - \mu_1 p)$, missä μ_1 on kokonaisluku, joka on yhtä pienempää kuin tarkasteltavalla janalla olevien kokonaislukupisteiden määrä.

Tehdään sijoitukset

$$g = z^p \quad \text{ja} \quad s = z^q w, \tag{C.4}$$

jolloin yhtälö (C.1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{i,j} a_{ij} z^{ip+jq} w^j = 0. \tag{C.5}$$

Koska kaikki merkatut Newtonin diagrammin pisteet ovat joko suoralla $xp + yq = r$ tai sen yläpuolella, niin yhtälön (C.5) jakaminen termillä z^r antaa yhtälön

$$H(z, w) := \sum_{ip+jq=r} a_{ij} z^{ip+jq} w^j + \sum_{ip+jq>r} a_{ij} z^{ip+jq} w^j = 0, \tag{C.6}$$

missä ensimmäinen summassa on termit, jotka ovat suoralla $xp + yq = r$ ja loput jälkimmäisessä summassa. Ensimmäinen summa voidaan kirjoittaa muodossa

$$w^{y_0 - \mu_1 p} P_1(w^p), \tag{C.7}$$

missä $P_1(v)$ on astetta $\mu_1 \leq \min\left\{\frac{y_0 - y_1}{p}, \frac{x_1 - x_0}{q}\right\}$ oleva polynomi ja $P_1(0) \neq 0$. Merkataan polynomin $P_1(v)$ juuria

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu_1}.$$

Oletetaan toistaiseksi, että juuret ovat erillisiä. Koska kahden muuttujan polynomia $F(s,g)$ ei voida esittää usean muuttujien s ja g polynomien tulona, niin $0 \not\equiv \sum_{ip+jq>r} a_{ij} z^{ip+jq} w^j = zG_1(z,w)$, missä $G_1(z,w)$ on muuttujien z ja w polynomi. Yhtälö (C.6) on nyt muotoa

$$H_1(z,w) = w^{y_0-\mu_1 p} P_1(w^p) + zG_1(z,w) = 0.$$

Nyt $H_1(0,\beta_i) = 0$ kaikilla $i = 1,\ldots,\mu_1$, kun β_i on jokin polynomin $P_1(v)$ juuren α_i p. juuri. Lisäksi $\frac{\partial H}{\partial w}(0,\beta_i) \neq 0$. Implisiittifunktiolauseen C.1 nojalla yhtälöllä (C.6) on μ_1 erillistä ratkaisua, jotka voidaan esittää sarjana

$$w_i(z) = \beta_i + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} z^k.$$

Siirtymällä takaisin alkuperäisiin muuttujiin saadaan

$$s_i(g) = g^{\frac{q}{p}} \left(\beta_i + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} g^{\frac{k}{p}} \right),$$

missä $i = 1,\ldots,\mu_1$. Siis saadaan μ_1 sykliä, joissa on p haaraa kussakin.

Luovutaan nyt oletuksesta, että polynomin $P_1(v)$ juuret ovat erillisiä ja oletetaan, että β^p on ω kertainen juuri. Siis $P_1(v)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$P_1(v) = (v - \beta^p)^\omega Q_0(v),$$

missä $Q_0(\beta^p) = b \neq 0$. Sijoitus $w = w_1 + \beta$ yhtälöön (C.6) antaa yhtälön

$$H_2(z,w_1) := ((w_1+\beta)^p - \beta^p)^\omega \, Q_0\left((w_1+\beta)^p\right) + tG_1(t, w_1+\alpha) = 0.$$

Huomataan helposti, että

$$((w_1+\beta)^p - \beta^p)^\omega \, Q_0\left((w_1+\beta)^p\right) = w_1^\omega Q_1(w_1),$$

missä $Q_1(0) \neq 0$. Tarkastellaan polynomin $H_2(z,w_1)$ Newtonin diagrammia. Sen alarajalla on edellisen perusteella piste $(0,\omega)$. Tehdään oletus, että $G_1(0,\beta) = c \neq 0$. Tällöin polynomin $H_2(z,w_1)$ Newtonin alarajan vasemmanpuoleisen osan muodostaa ainoastaan yksi jana, jonka päätepisteet ovat $(0,\omega)$ ja $(1,0)$. Tehdään sijoitusta (C.4) vastaava sijoitus polynomiin $H_2(z,w_1)$, joka tässä tapauksessa on

$$z = z_2^\omega \quad \text{ja} \quad w_1 = z_2 w_2.$$

Jakamalla tulos termillä s^ω saadaan

$$H_3(z_2, w_2) := w_2^\omega Q_1(z_2 w_2) + G_1(z_2^\omega, \beta + z_2 w_2) = 0.$$

Kun $s = 0$, niin saadaan

$$b w_2^\omega = -c \neq 0.$$

Implisiittifunktiolause takaa, että löytyy sellainen analyyttinen funktio $w_2(s)$, että

$$H_3(z_2, w_2(z_2)) \equiv 0$$

jossain pisteen $s = 0$ ympäristössä ja $w_2(z_2) = \left(-\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{\omega}}$. Tämä tarkoittaa, että saamme alkuperäisiin muuttujiin siirtymällä sarjakehitelmän

$$s_i(g) = g^{\frac{q}{p}} \left(\beta_i + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} g^{\frac{k}{p\omega}} \right).$$

Jos $G_1(t, \beta) = 0$, niin polynomin $H_2(z, w_1)$ vasemman puoleinen alaraja voi muodostua useista janoista, joista jokainen täytyy tutkia erikseen samaan tapaan kuin aiemmin. Kun jatkamme yllä kuvailtua prosessia tarpeeksi kauan saamme jossain vaiheessa vaiheen (C.7) mukaisen polynomin, jolla on erilliset juuret, sillä jokaisessa vaiheessa tämän polynomin aste on aidosti pienempää kuin edellisessä.

Edellä on käsitelty vain ensimmäistä Newtonin alarajan janaa. Määritellään kutakin M eri janaa kohti luvut p_i, q_i ja μ_i, kuten aiemmin ensimmäiselle janalle. Edellä esitellyllä tavalla saamme jokaisesta alarajan vasemmanpuoleisen osan janasta Puiseux-sarjat, joiden johtavien termien asteet ovat q_i/p_i, eli janan kulmakertoimen käänteisluvun vastalukuja, ja jotka muodostavat μ_i sykliä, joissa on kussakin p_i haaraa. Diagrammista nähdään suoraan, että $\sum_{i=1}^{M} \mu_i p_i = y_0$, joten näin saadaan kaikki mahdolliset haarat, jotka suppenevat kohti nollaa, kun g lähestyy nollaa.

Newtonin alarajan oikeanpuoleisella osa puolestaan antaa nollaa lähestyvien Puiseux-sarjojen johtavat termit, kun g kasvaa rajatta. Tämän voi perustella tekemällä sijoituksen $k = \frac{1}{g}$ ja kertomalla termillä g^m. Tällöin Newtonin diagrammin vasen- ja oikeapuoli vaihtavat paikkaa.

Aiemmin on oletettu, että yhtälössä (C.1) n on äärellinen luku. Yllä esitetty tarkastelu voidaan tehdä samalla tavalla myös siinä tapauksessa, että n on ääretön. Tällöin ei voida puhua polygonista, mutta alaraja voidaan määritellä samaan tapaan kuin yllä. Yllä havaittiin, että vain polygonin alarajalla

on merkitystä tehdyn tarkastelun kannalta. Yhtälön (C.3) Newtonin alaraja voidaan määrittää pisteessä s_0 aina, kun funktiot $q_i(s)$ ovat analyyttisiä pisteessä s_0 ja yllä olevan perusteella voimme esittää muuttujan s muuttujan g avulla Puiseux-sarjoina jossakin pisteen s_0 ympäristössä, kun g on tarpeeksi pieni tai suuri.