TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Eero Niemelä

Fourier-muunnoksesta

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Matematiikka

Huhtikuu 2008

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

NIEMELÄ, EERO: Fourier-muunnoksesta

Pro gradu -tutkielma, 39 s.

Matematiikka

Huhtikuu 2008

Tiivistelmä

Tutkielman aiheena on Fourier-muunnoksen esittely. Tarkoituksena on erityisesti johdatella lukija Fourier-sarjan ja -muunnoksen käsitteisiin. Fourier-muunnosten teoria kuuluu yleisempään Fourier-analyysin aihepiiriin. Fourier-analyysin keskiössä on tulos, jonka mukaan tietyt ehdot täyttävää funktiota voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti niin sanotun Fourier-sarjan avulla.

Osoitamme, että 2π-jaksollisen funktion Lebesgue-neliöintegroituvuus takaa suppenevan Fourier-sarjakehitelmän olemassaolon. Tällöin funktion Fourier-sarja on painotettu summa kompleksisia eksponenttifunktioita, jotka muodostavat ortogonaalisen kannan Lebesgue-neliöintegroituvien funktioiden avaruudelle L^2. Määrittelemme Fourier-muunnoksen myös ei-jaksolliselle funktiolle $f \in L^2$. Lisäksi esittelemme lyhyesti diskreetin Fourier-muunnoksen.

Tutkielman tärkeimpien tulosten kannalta on erittäin keskeistä, että L^2 on Hilbertin avaruus. Esimerkiksi kompleksisten eksponentiaalifunktioiden joukon ortogonaalisuus ei ole luontevasti määriteltävissä ilman Hilbertin avaruuden käsitettä. Todistamme myös, että Fourier-muunnos on isomorfismi avaruudelta L^2 avaruuteen L^2.

Sisältö

Johdanto

Fourier-sarjojen ja -muunnosten teorialla on monia sovelluksia useilla eri teknisillä aloilla, kuten esimerkiksi digitaalisessa signaalinkäsittelyssä. Teknisten alojen peruskurssien oppikirjallisuudessa Fourier-muunnosta käsitelläänkin usein lähinnä sovellusten näkökulmasta. Fourier-analyysin hyödylliset sovellukset kuitenkin perustuvat taustalla olevaan syvällisempään Hilbertin avaruuksien teoriaan. Tässä tutkielmassa pyrimme tarkastelemaan Fourier-muunnoksen määrittelyä ja ominaisuuksia tavalla, jonka tarkoitus on syventää sovelluslähtöistä näkökulmaa.

Aluksi käymme läpi normi- ja sisätuloavaruuksien yleisiä ominaisuuksia. Tämän jälkeen esitämme määritelmät funktion integroituvuudelle ja neliöintegroituvuudelle. Tutkielman aiheen kannalta on välttämöntä käyttää integroituvuuden määrittelemisessä Lebesgue-integroituvuuden käsitettä. Emme kuitenkaan tarkastele itse Lebesgue-integraalia tai Lebesgue-integroituvuutta syvällisemmin, vaan käsittelemme aihetta vain siltä osin kuin se on välttämätöntä tarvittavan käsitteistön määrittelemiseksi.

Luvussa 2 käsittelemme vektori- ja funktiojonojen suppenemista. Osoitamme esimerkkien avulla, että ääretönulotteisten normiavaruuksien tutkiminen eroaa olennaisesti äärellisulotteisista tapauksista. Tämän jälkeen määrittelemme kaksi suppenemiskäsitettä ääretönulotteisessa normiavaruudessa, jonka jälkeen esittelemme Hilbertin ja Banachin avaruuden käsitteet. Seuraavaksi todistamme joitakin hyödyllisiä funktiojonojen suppenemista koskevia lauseita. Sen jälkeen todistamme, että rajoitetulla reaalilukuvälillä Lebesgue-neliöintegroituvien funktioiden avaruus $L^2([a,b])$ on Hilbertin avaruus.

Luvussa 3 todistamme aluksi, että kompleksisten eksponenttifunktioiden joukko on täydellinen avaruudessa $L^2(T)$, missä T on jokin 2π-mittainen reaalilukuväli. Osoittautuu, että tämän täydellisyysominaisuuden nojalla jokainen funktio $f \in L^2(T)$ on esitettävissä niin sanotun *Fourier-sarjakehitelmän* avulla. Fourier-sarjan kertoimia nimitetään lyhyemmin *Fourier-kertoimiksi.* Yleistettyä Fourier sarjaa käsittelevän alaluvun yhteydessä osoitamme, että jokaista Lebesgue-neliöintegroituvaa funktiota kohti on olemassa suppeneva jono, jonka termit saadaan tämän funktion Fourier-kertoimista.

Luvussa 4 esitämme Fourier-muunnoksen määritelmän. Tässä yhteydessä tuomme lyhyesti esille Fourier-muunnoksen olemassaoloa koskevaa problematiikkaa. Ongelmat liittyvät lähinnä muunnoksen määrittelevän integraalin suppenemiseen. Tämän jälkeen esittelemme Fourier-muunnoksen tärkeimpiä ominaisuuksia. Osoitamme, että jokainen neliöintegroituva funktio on jonkin neliöintegroituvan funktion Fourier-muunnos. Lopuksi esittelemme lyhyesti Fourier-muunnoksen laskennallisten sovellusten kannalta tärkeän diskreetin Fourier-muunnoksen.

Lukijalta edellytetään lineaarialgebran, analyysin ja kompleksilukujen perustietojen hallinta. Lebesgue-integraalin tunteminen on lukijalle eduksi, mutta ei välttämätöntä. Koska Hilbertin avaruuden käsite on tarkasteluissamme erityisen tärkeä, sivuaa tutkielma hieman myös funktionaalianalyysin aihepiiriä. Lineaarialgebraa voidaan pitää oppina äärellisulotteisista vektoriavaruuksista sekä niiden välisistä lineaarikuvauksista. Funktionaalianalyysin katsotaan olevan erityisesti täydellisten normi- ja sisätuloavaruuksien omiaisuuksia tutkiva matematiikan osa-alue, jonka piiriin kuuluvat myös ääretönulotteiset avaruudet. Funktionaalianalyysin näkökulmasta ääretönulotteisia normi- ja sisätuloavaruuksia voidaan nimittää myös funktioavaruuksiksi. Emme kuitenkaan tässä tutkielmassa eksplisiittisesti käytä tätä nimitystä, vaikka tosiasiallisesti tulkitsemmekin ääretönulotteisen normi- tai sisätuloavaruuden alkioita funktioiksi.

Tutkielman päälähteenä on Lokenath Debnathin ja Pjotr Mikusinskin kirja *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, jonka sisältöä on pyritty tarpeen mukaan soveltamaan tutkielman asiayhteyteen ja lähestymistapaan sopivaksi.

1 Valmistelevia tarkasteluja

1.1 Normi- ja sisätuloavaruuksista

Määritelmä 1.1. Olkoon V vektoriavaruus yli kunnan $\mathbb{C}$. Funktiota $\|\cdot\|\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sanotaan *normiksi*, jos seuraavat ehdot pätevät jokaiselle u, $v \in V$ ja skalaarille $c \in \mathbb{C}$:

$$\text{(N1)} \qquad \|u\| = 0 \iff u = \mathbf{0}$$

(N2) $$\|cu\| = |c|\|u\|$$

(N3) $$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Vektoriavaruutta, jossa on määritelty normi, kutsutaan *normiavaruudeksi*. Vektoreita $u \in V$, joille $\|u\| = 1$, sanotaan *yksikkövektoreiksi*. Ehtoa (N3) kutsutaan yleisesti *kolmioepäyhtälöksi*.

Määritelmä 1.2. Olkoon V vektoriavaruus yli kunnan $\mathbb{C}$ ja olkoot $x, y \in V$. Funktiota $\langle x,\, y\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ sanotaan *sisätuloksi*, jos seuraavat ehdot pätevät jokaiselle $u,\, v,\, w \in V$ ja skalaarille $c \in \mathbb{C}$:

(ST1) $$\langle u,\, u\rangle \geq 0$$

(ST2) $$\langle u,\, u\rangle = 0 \iff u = \mathbf{0}$$

(ST3) $$\langle u+v,\, w\rangle = \langle u,\, w\rangle + \langle v,\, w\rangle$$

(ST4) $$\langle cu,\, v\rangle = c\,\langle u,\, v\rangle$$

(ST5) $$\langle u,\, v\rangle = \overline{\langle v,\, u\rangle}.$$

Vektoriavaruutta, jossa on määritelty sisätulo, kutsutaan *sisätuloavaruudeksi*.

Vektoriavaruuden *kannalla* tarkoitetaan vektoriavaruuden lineaarisesti riippumatonta osajoukkoa, joka virittää vektoriavaruuden. Kannan alkioiden lukumäärää kutsumme niiden virittämän vektoriavaruuden *dimensioksi*. Monien vektoriavaruuden ominaisuuksien kannalta ratkaisevaa on se, onko kanta äärellinen vai ääretön.

Määritelmä 1.3. Olkoon V sisätuloavaruus. Vektorit u ja $v \in V$ ovat *ortogonaaliset* sisätulon $\langle \cdot,\, \cdot\rangle$ suhteen, jos

$$\langle u,\, v\rangle = 0.$$

Vektorijoukkoa $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\} \in V$ sanotaan *ortonormaaliksi*, jos sen alkiot ovat keskenään ortogonaalisia yksikkövektoreita.

Lineaarialgebran perusteista tiedetään, että jokainen vektoriavaruuden alkioista on ilmaistavissa yksikäsitteisesti kannan vektoreiden lineaarikombinaationa. Äärellisulotteisessa tapauksessa meillä on käytettävissämme seuraava tulos, joka ilmaisee yhteyden lineaarikombinaation ja avaruudessa määritellyn sisätulon välillä.

Lause 1.1. *Olkoon* $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ *sisätuloavaruuden* V *ortonormaali kanta. Jos*

$$v = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k,$$

niin $c_k = \langle v,\, \varphi_k \rangle$.

Todistus. Koska $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ on ortonormaali,

$$\langle \varphi_i,\, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{kun } i \neq j, \\ 1, & \text{kun } i = j. \end{cases}$$

Nyt ehtojen (ST3) ja (ST4) perusteella

$$\langle v,\, \varphi_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k,\, \varphi_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle \varphi_k,\, \varphi_i \rangle = c_i \|\varphi_i\|^2 = c_i.$$

□

Tässä työssä olemme kiinnostuneita mahdollisuudesta laajentaa edellinen tulos koskemaan myös ääretönulotteisia vektoriavaruuksia. Ääretönulotteisessa tapauksessa on kuitenkin kiinnitettävä huomiota lineaarikombinaation määrittelevän sarjan suppenemista koskeviin kysymyksiin. Näitä kysymyksiä tarkastelemme myöhemmin. Tässä vaiheessa otamme esille esimerkin, jossa määrittelemme sisätulon ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa.

Esimerkki 1.1. Olkoon $C(a,b)$ välillä $[a,b] \in \mathbb{R}$ määriteltyjen jatkuvien kompleksiarvoisten funktioiden joukko. Nyt funktio

$$\langle f,\, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

määrittelee sisätulon joukossa $C(a,b)$.

Jokainen sisätuloavaruus on myös normiavaruus, jossa normi määritellään

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,\, u \rangle}.$$

Helposti huomataan, että ehto (N1) seuraa ehdosta (ST2). Lisäksi huomataan, että sisätulon ominaisuuksien perusteella

$$\|cu\| = \sqrt{\langle cu,\, cu \rangle} = \sqrt{c\bar{c}\,\langle u,\, u \rangle} = |c|\|u\|,$$

joten myös ehto (N2) on voimassa sisätuloavaruudessa. Jäljellä on kolmioepäyhtälön voimassaolo, jota varten todistamme ensin seuraavan *Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön.*

Lause 1.2. *Olkoon V sisätuloavaruus ja olkoot $u, v \in V$. Tällöin*

$$|\langle u,\, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Todistus (Ks. [2, s. 90]). Jos $v = 0$, väite seuraa suoraan. Oletetaan siis, että $v \neq 0$. Sisätulon ominaisuuksien perusteella

$$0 \leq \langle u + cv,\, u + cv\rangle = \langle u,\, u\rangle + \bar{c}\,\langle u,\, v\rangle + c\,\langle v,\, u\rangle + |c|^2\,\langle v,\, v\rangle\,. \tag{1.1}$$

Olkoon nyt $c = -\langle u,\, v\rangle\,\langle v,\, v\rangle^{-1}$. Tekemällä sijoitus ja kertomalla epäyhtälö puolittain sisätulolla $\langle v,\, v\rangle$ saadaan

$$0 \leq \langle u,\, u\rangle\,\langle v,\, v\rangle - |\langle u,\, v\rangle|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u,\, v\rangle|^2,$$

joten $|\langle u,\, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. □

Lause 1.3. *Olkoon V sisätuloavaruus ja olkoot $u, v \in V$. Tällöin*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Todistus (Ks. [2, s. 91]). Kun $c = 1$, saadaan lauseke (1.1) muotoon

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 = \langle x + y,\, x + y\rangle &= \langle x,\, x\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle x,\, y\rangle + \langle y,\, y\rangle \\
&\leq \langle x,\, x\rangle + 2|\langle x,\, y\rangle| + \langle y,\, y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \text{ (Lauseen 1.2 nojalla)} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

□

Kolmioepäyhtälössä yhtäsuuruus on voimassa silloin, kun vektorit x ja y ovat ortogonaaliset. Tällöin saadaan Pythagoraan lauseen yleistys ortogonaaliselle vektorijoukolle.

Lause 1.4. *Olkoon V sisätuloavaruus ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ keskenään ortogonaalisia vektoreita. Silloin*

$$\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Todistus. Väite seuraa induktiolla luvun n suhteen, ks. [2, s. 91]. □

Seuraava esimerkki osoittaa, että ääretönluotteisen sisätuloavaruuden tapauksessa on mielekästä puhua myös ortgonaalisista funktioista.

Esimerkki 1.2. Tarkastellaan sisätuloavaruutta $C(-\pi,\pi)$. Olkoot $f(t)=\sin(mt)$ ja $g(t)=\cos(nt)$, missä $m,n\in\mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\langle f,\, g\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt)\cos(nt)dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt+nt)-\sin(mt-nt)dt\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m-n)t}{m-n}-\frac{\cos(m+n)t}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0,\end{aligned}$$

kun $m\neq n$ ja $m\neq -n$. Toisaalta jos $m=n$ tai $m=-n$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt)\cos(nt)dt &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt+nt)-\sin(mt-nt)dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2mt)dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2mt)}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.\end{aligned}$$

Funktiot $f(t)=\sin(mt)$ ja $g(t)=\cos(nt)$ ovat siis ortogonaalisia sisätulon $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ suhteen.

Seuraavaksi otamme esimerkin muodossa esille tuloksen, joka osoittautuu merkittäväksi tarkastelujemme myöhemmässä vaiheessa.

Esimerkki 1.3 (vrt. [1, s. 108, Esim. 5.5])**.** Tarkastellaan välillä $[-\pi,\pi]$ määriteltyjen jatkuvien kompleksiarvoisten funktioiden joukkoa $C(-\pi,\pi)$. Funktio

$$\langle f,\, g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$$

määrittelee sisätulon joukossa $C(-\pi,\pi)$. Olkoon $\phi_k(t)=\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}$, $k\in\mathbb{Z}$. Nyt

$$\langle\phi_m,\,\phi_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{imt}e^{-int}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)t}dt=\begin{cases}0,\text{kun}\ \ m\neq n\\ 1,\text{kun}\ \ m=n\end{cases}$$

Funktiot $\{\phi_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ovat siis ortonormaaleja joukossa $C(-\pi,\pi)$.

Esimerkin 1.3 kompleksisten eksponenttifunktioiden ortonormaali joukko on tulevien tarkastelujen kannalta keskeinen. Merkitsemmekin tästä eteenpäin

$$\phi_k(t)=\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Määritelmä 1.4. Olkoon $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ sisätuloavaruuden V ortonormaali osajoukko, ja olkoon $u \in V$. Vektorin u *ortogonaaliprojektio* joukon $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ virittämään aliavaruuteen on vektori

$$P_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle u,\ \varphi_k\rangle\, \varphi_k.$$

Lause 1.5. *Olkoon V sisätuloavaruus yli kunnan $\mathbb{C}$ ja $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ sen ortonormaali osajoukko. Olkoon vielä $u \in V$. Nyt*

$$\min_{\gamma_k \in F} \|u - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_k\| = \|u - \sum_{k=1}^{n} \langle u,\ \varphi_k\rangle\, \varphi_k\| = \|u - P_n(u)\|.$$

Ortogonaaliprojektio $P_n(u)$ on siis paras mahdollinen approksimaatio avaruuden alkiolle u siinä mielessä, että se minimoi normin $\|u - P_n(u)\|$.

Todistus (ks. [1, s. 110]). Valitaan vektori $u \in V$ ja merkitään $\langle u,\ \varphi_k\rangle = c_k$. Nyt

$$\begin{aligned}
&\|u - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k\|^2 = \left\langle u - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k,\ u - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k \right\rangle \\
&= \langle u,\ u\rangle - \left\langle u,\ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k,\ u \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k,\ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k \right\rangle \\
&= \langle u,\ u\rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma}_k \langle u,\ \varphi_k\rangle - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \langle \varphi_k,\ u\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_k\overline{\gamma}_j \langle \varphi_k,\ \varphi_j\rangle \\
&= \langle u,\ u\rangle - \sum_{k=1}^{n} (\overline{\gamma}_k c_k + \gamma_k \overline{c}_k) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\overline{\gamma}_k \\
&= \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k\overline{\gamma}_k - \overline{\gamma}_k c_k - \gamma_k\overline{c}_k + c_k\overline{c}_k) - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \\
&= \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Tämä saa pienimmän arvonsa, kun $\gamma_k = c_k$. □

Lauseen 1.5 todistuksen perusteella huomaamme, että

$$\|u - P_n(u)\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle u,\ \varphi_k\rangle|^2.$$

Selvästi siis

$$\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle u,\, \varphi_k\rangle|^2 \geq 0.$$

Järjestämällä epäyhtälön termit uudelleen ja antamalla $n \to \infty$ saamme seuraavan *Besselin epäyhtälön.*

Lause 1.6. *Olkoon* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *sisätuloavaruuden* V *ortonormaali osajoukko. Nyt jokaiselle* $u \in V$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u,\, \varphi_k\rangle|^2 \leq \|u\|^2.$$

Besselin epäyhtälön mukaan sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u,\, \varphi_k\rangle|^2$$

on siis ylhäältä rajoitettu. Sarja on myös positiiviterminen, joten se suppenee.

1.2 Integroituvuus ja neliöintegroituvuus

Olemme edellä todenneet, että jokainen sisätuloavaruus on normiavaruus ja että normi on määriteltävissä sisätulon avulla. Esimerkin 1.1 perusteella voimmekin kirjoittaa

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,\, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} = \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt\right]^{1/2}.$$

Tätä normia kutsutaan L^2*-normiksi.* Tässä vaiheessa mainitsemme *yleistetyn* L^p*-normin*

$$\|f\|_p = \sqrt{\langle f,\, f\rangle} = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p}$$

käsitteen, mutta tulemme jatkossa tarkastelemaan tapausta $p = 2$, ellei toisin mainita. Merkitsemme jatkossakin L^2-normia $\|\cdot\|_2$ ilman alaindeksiä.

Koska sisätulo on määritelty funktion f integraalin avulla, herää tässä vaiheessa kysymys siitä, milloin tämä integraali on olemassa. Kysymys on olennainen myös jatkossa, joten esitämme tämän integraalin olemassaoloon liittyvän määritelmän. Integroituvuudella tarkoitamme Lebesgue-integroituvuutta, joka on Riemann-integroituvuutta yleisempi integroituvuuden käsite. Tarkoituksenamme on mahdollistaa Riemann-integroituvia funktioita laajemman funktiojoukon tarkasteleminen. Tämä on tarpeellista, sillä Lebesgue-integraalilla on joitakin tarkastelujemme kannalta keskeisiä ominaisuuksia, joita Riemann-integraalilla ei ole. Lebesgue-integraalin lähempi käsittely on kuitenkin aihepiirimme ulkopuolella [1].

Määritelmä 1.5. Funktio f on *integroituva* joukossa I, jos

$$\int_I |f(t)|dt < \infty.$$

Edelleen funktio f on *neliöintegroituva*, jos $|f|^2$ on integroituva. Tässä integraalilla $\int_I$ tarkoitetaan Lebesgue-integraalia joukon I yli. Merkitsemme kaikkien joukossa I integroituvien funktioiden joukkoa $L^1(I)$. Neliöintegroituvien funktioiden joukkoa merkitsemme vastaavasti $L^2(I)$.

Voidaan osoittaa, että jokainen Riemann-integroituva funktio on myös Lebesgue-integroituva ja että integraalit ovat tällöin samat (ks. [2, s. 64]). Merkinnällä $\int f$ tarkoitamme integraalia reaalilukujen joukon yli.

Esimerkki 1.4 (ks. [2, s. 86, teht. 35])**.** Olkoot $I = [0, 1]$ ja $f = 1/\sqrt{t}$. Nyt integraali

$$\int_{[0,1]} |f(t)|^2 dt = \int_{[0,1]} \frac{1}{t} dt$$

hajaantuu. Siispä $f \notin L^2(I)$. Kuitenkin $f \in L^1(I)$, sillä

$$\int_{[0,1]} |f(t)|dt = \int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \Big[2\sqrt{t} - t\Big]_0^1 = 2.$$

Esimerkki 1.5 (ks. [2, s. 86, teht. 37])**.** Olkoon $f,\ g \in L^2([a, b])$, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\int_{[a,b]} |f(t)\overline{g(t)}|dt = |\langle f,\ g\rangle| \leq \|f\|\|g\| = \sqrt{\int_{[a,b]} |f(t)|^2 dt}\sqrt{\int_{[a,b]} |g(t)|^2 dt}.$$

Olkoon $g(t) = 1$ kaikilla $t \in [a, b]$. Nyt

$$\int_{[a,b]} |f(t)|dt \leq \sqrt{\int_{[a,b]} |f(t)|^2 dt}\sqrt{b-a} < \infty,$$

joten $f \in L^1([a, b])$. Siis jos $f \in L^2([a, b])$, niin $f \in L^1([a, b])$.

[1] Lisää Lebesgue-integraalista, ks. esim. [2, s. 37].

Seuraavaksi määrittelemme *nollafunktion* (engl. *null function*) ja *nollajoukon* (engl. *null set*) (vrt. [2, s. 52 ja s. 54]).

Määritelmä 1.6. Funktiota f sanotaan *nollafunktioksi*, jos f on integroituva ja

$$\int |f| = 0.$$

Määritelmä 1.7. Joukkoa $I \subset \mathbb{R}$ sanotaan *nollajoukoksi* tai *nollamittaiseksi*, jos sen *karakteristinen funktio*

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in I \\ 0, & \text{kun } x \notin I \end{cases}$$

on nollafunktio. Tyhjä joukko ja kaikki numeroituvat joukot ovat esimerkkejä nollajoukoista. Jos funktiolla f on jokin ominaisuus kaikkialla muualla paitsi nollajoukossa, sanotaan tämän ominaisuuden olevan voimassa *melkein kaikkialla*, jonka kirjoitame lyhyemmin *m.k.*

Esimerkki 1.6. Rationaalilukujen karakteristinen funktio välillä $[0, 1]$

$$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

on nollafunktio ja joukko $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ on nollamittainen joukko.

Lebesgue-integraaliin ja mittateoriaan tutustunut lukija saattaa huomata, että edellä esitetty nollamittaisuuden määritelmän esitysmuoto poikkeaa tavanomaisesta. Tarkoituksenamme onkin määritellä nollamittaisuuden käsite ilman, että Lebesgue-integraalin ja mittateorian syvällisempi käsittely tulee tarpeelliseksi.

Tarkastelujemme ulottaminen Riemann-integroituvia funktioita laajempaan luokkaan tekee kuitenkin tarpeelliseksi seuraavan täsmennyksen. Esimerkissä 1.1 oletimme funktion f jatkuvaksi. Toisaalta olemme määritelleet normin Lebesguen mielessä integroituville ja neliöintegroituville funktioille, jotka eivät välttämättä ole jatkuvia. Esimerkiksi funktion

$$f\colon\ [-1, 1] \to \{0, 1\}\,,\ f(t) = \begin{cases} 1, \text{ kun } t = 0, \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$$

normi on nolla, vaikka funktio f ei olekaan identtisesti nolla, kuten määritelmän 1.2 kohta ($ST2$) näyttäisi edellyttävän. Ongelma on kuitenkin ratkaistavissa, sillä voimme tarkastella funktioita $f \in L^1(\mathbb{R})$ ekvivalenssirelaation

$$f \sim g \Leftrightarrow \left\{ g \in L^1(\mathbb{R})\colon \sqrt{\int |f-g|} = 0 \right\}$$

määräämänä ekvivalenssiluokkina. Tällainen konstruktio on tarpeen, jotta Lebesgue-integraalin avulla määrittelemämme normi todella on normi (ks. [2, s. 52] ja [1, s. 115]). Kuitenkin käytännössä integroituvan tai neliöintegroituvan funktion normia voidaan jatkossa tarkastella tavalliseen tapaan ilman, että tulkitsemme funktioita ekvivalenssiluokiksi.

Kutsumme funktioita f ja g *ekvivalenteiksi*, jos $f-g$ on nollafunktio. Keskenään ekvivalentit funktiot ovat samaistettavissa käytössä olevan normin suhteen. Jos funktiot f ja g ovat ekvivalentit, voimme määritelmän 1.7 perusteella merkitä $f = g$ m.k.

2 Vektori- ja funktiojonojen suppenemisesta

2.1 Täydellisyys ja suppeneminen

Sekä reaali- että kompleksilukujen kunnissa täydellisyys on tärkeä ominaisuus. Kysymys täydellisyydestä ja Cauchyn jonojen suppenemisesta on olennainen myös vektoriavaruudessa. Suppeneminen vektoriavaruudessa on luontevasti määriteltävissä normin avulla. Voidaan osoittaa, että äärellisulotteinen vektoriavaruus on täydellinen minkä tahansa normin suhteen. On kuitenkin olemassa ääretönulotteisia normiavaruuksia, jotka eivät ole täydellisiä. Tämän osoitamme myöhemmin esimerkin avulla. Myös ääretönulotteisen normiavaruuden tapauksessa täydellisyys normin suhteen määritellään Cauchyn jonojen suppenemisen avulla. (Ks. [3, s. 274]).

Määritelmä 2.1. Olkoon $\|\cdot\|$ sisätuloavaruudessa V määritelty normi. Vektorijono $\{\varphi_k\}$ on *Cauchyn jono* normin $\|\cdot\|$ suhteen, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa positiivinen kokonaisluku N_ε siten, että

$$m,n > N_\varepsilon \Rightarrow \|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon.$$

Määritelmä 2.2. Olkoon $\|\cdot\|$ sisätuloavaruudessa V määritelty normi. Vektorijono $\{\varphi_k\}$ *suppenee* kohti vektoria $\varphi \in V$ normin $\|\cdot\|$ suhteen, jos $\|\varphi_k - \varphi\| \to 0$, kun $k \to \infty$. Avaruus on *täydellinen*, jos avaruuden jokainen Cauchyn jono suppenee.

Samoin kuin reaali- ja kompleksiluvuilla, myös normiavaruudessa määritelty sarja suppenee, jos sen osasummien jono suppenee.

Jatkossa tulemme tarvitsemaan suppenemisen normin suhteen lisäksi myös toista suppenemiskäsitettä.

Määritelmä 2.3. Olkoon funktiojono $\{f_n\} \in L^1(\mathbb{R})$. Sanomme, että jono $\{f_n\}$ *suppenee melkein kaikkialla* kohti funktioita $f \in L^1(\mathbb{R})$, jos $f_n(x) \to f(x)$ kaikkialla paitsi nollamittaisessa joukossa. Tällöin merkitsemme $f_n \to f$ m.k.

Olemme edellä todenneet, että on olemassa ääretönulotteisia normiavaruuksia, joissa Cauchyn jonot eivät välttämättä suppene. Seuraava esimerkki osoittaa, että näin todellakin on.

Esimerkki 2.1 (ks. [3, s. 274])**.** Tarkastellaan välillä $[0, 1]$ määriteltyjen jatkuvien reaalisten funktioiden joukkoa $C(0, 1)$. Joukko $C(0, 1)$ on vektoriavaruus, jossa on määritelty L^1-normi

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Olkoon $\{f_k\}$ funktiojono

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, \text{ kun } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{k}, \\ \frac{k}{2}\left(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right), \text{ kun } \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{k}, \\ 1, \text{ kun } \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Olkoon $m \geq n$. Silloin kaikille $t \in [0, 1]$ pätee

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leq |f_m(t)| + |f_n(t)| \leq 2.$$

Valitaan $\varepsilon > 0$. Olkoon N_ε sellainen luku, että $\frac{1}{N_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{4}$. Kun $m \geq n \geq N_\varepsilon$, niin $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{4}$. Nyt

$$\begin{aligned}\|f_m(t) - f_n(t)\|_1 &= \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)| dt \\ &= \int_{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} |f_m(t) - f_n(t)| dt \leq \int_{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} 2dt = \frac{4}{n} < \varepsilon,\end{aligned}$$

joten jono $\{f_k\}$ on Cauchyn jono. Kuitenkin jono suppenee kohti funktiota

$$f(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \ t = \frac{1}{2} \\ 1, \ \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

joka ei ole jatkuva. Päättelemme, että $C(0,1)$ ei ole täydellinen.

Ääretönulotteisten normiavaruuksien tarkasteleminen aiheuttaa myös muita hankaluuksia äärellisulotteiseen tapaukseen verrattuna. Voidaan nimittäin osoittaa, että äärellisulotteisessa tapauksessa kaikki normit ovat ekvivalentteja (ks. esim. [3, s.272]). Toisin sanoen ne määrittelevät saman suppenemiskäsitteen. Ääretönulotteisessa normiavaruudessa tilanne ei ole näin yksinkertainen. Havainnollistamme tätä esimerkin avulla.

Esimerkki 2.2. Olkoon jono $f_k(t) = k^{-1}\chi_{[k,2k]}$, missä $\chi_{[k,2k]}$ on välin $[k, 2k]$ karakteristinen funktio ja $k \in \mathbb{N}$. Selvästi $f_k \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Jono f_k suppenee L^2-normin suhteen, sillä

$$\|f_k\|_2 = \left[\int_k^{2k} |f_k(t)|^2 dt\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{k^2}\int_k^{2k} dt\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

joten selvästi $\|f_k\|_2 \to 0$, kun $k \to \infty$. Kuitenkin $\|f_k\|_1 \nrightarrow 0$, sillä

$$\|f_k\|_1 = \int_k^{2k} |f_k(t)| dt = \frac{1}{k}\int_k^{2k} dt = 1.$$

Esimerkissä 2.1 osoitimme, että $C(0,1)$ ei ole täydellinen normin L^1 suhteen. Toisaalta olemme juuri todenneet, että ääretönulotteisessa tapauksessa kaikki normit eivät välttämättä ole ekvivalentteja. Avaruudessa $C(0,1)$ onkin mahdollista määritellä normi, jonka suhteen tämä avaruus on täydellinen (ks. [2, s. 22]).

Määritelmä 2.4. Täydellistä normiavaruutta kutsutaan *Banachin avaruudeksi*. Täydellistä sisätuloavaruutta kutsutaan *Hilbertin avaruudeksi.*

Lause 2.1. *$L^1(\mathbb{R})$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Ks. [2, s. 58]. $\square$

Seuraava myöhempien tarkastelujemme kannalta erittäin keskeinen avaruus on Hilbertin avaruus.

Määritelmä 2.5. Niiden kompleksilukujonojen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ joukkoa, joille pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2 < \infty,$$

kutsutaan *l^2-avaruudeksi.*

Avaruus l^2 on vektoriavaruus (ks. [2, s. 6]), jossa voidaan määritellä sisätulo

$$\langle a_n,\ b_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}.$$

Sisätulon avulla voidaan määritellä l^2-normi

$$\|z\| = (\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|^2)^{1/2}.$$

Lause 2.2. *Avaruus l^2 on Hilbertin avaruus.*

Todistus (ks. [2, s. 19]). Oletamme siis tunnetuksi, että l^2 on sisätuloavaruus. On siis vielä osoitettava, että l^2 on myös täydellinen. Olkoon jono

$$a_n = \{\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots\}\,,\ n = 1, 2, \ldots$$

Cauchyn jono avaruudessa l^2. Silloin jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa luku M_ε siten, että kun $m, n > M_\varepsilon$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{m,k} - \alpha_{n,k}|^2 < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Silloin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ jono $\{\alpha_{n,k}\}$ on Cauchyn jono joukossa $\mathbb{C}$, joten se suppenee. Merkitään nyt

$$\alpha_k = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k} \text{ ja } a = \{\alpha_n\}\,.$$

On siis osoitettava, että $a \in l^2$ ja että $a = \lim_{n\to\infty} \{\alpha_n\}$. Kohdan (2.1) perusteella jokaiselle luvulle k_0 pätee

$$\sum_{k=1}^{k_0} (|\alpha_{m,k}| - |\alpha_{n,k}|)^2 \leq \sum_{k=1}^{k_0} |\alpha_{m,k} - \alpha_{n,k}|^2 < \varepsilon.$$

Kun $m \to \infty$ ja $k_0 \to \infty$, saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k| - |\alpha_{n,k}|)^2 \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Koska

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{n,k}|^2 < \infty,$$

seuraa kolmioepäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2} &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k| - |\alpha_{n,k}| + |\alpha_{n,k}|)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k| - |\alpha_{n,k}|)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{n,k}|^2} < \infty.\end{aligned}$$

Tämä osoittaa, että $a \in l^2$. Koska epäyhtälö (2.2) pätee mielivaltaiselle luvulle ε, on

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k| - |\alpha_{n,k}|)^2} = 0,$$

joten

$$a = \lim_{n\to\infty} \{\alpha_n\}.$$

□

Tarkastellessamme määritelmiä 1.2 ja 1.3 huomaamme, että ortogonaalisuus ei ole luontevasti määriteltävissä Banachin avaruudessa. Koska ortogonaalisuuden käsite on keskeinen Fourier-muunnosten teoriassa, on Hilbertin avaruuden käsite aiheemme kannalta välttämätön. Pian osoitamme, että $L^2([a, b])$ on Hilbertin avaruus. Sitä ennen tarvitsemme kuitenkin joitakin funktiojonojen suppenemista koskevia tuloksia.

2.2 Konvergenssilauseita

Edellä olemme määritelleet sekä suppenemisen normin suhteen että suppenemisen melkein kaikkialla. Seuraava esimerkki osoittaa, että näitä kahta suppenemiskäsitettä ei voida samaistaa.

Esimerkki 2.3 (ks. [2, s. 56]). Olkoon

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ kun } x \in [-n, n], \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Nyt $f_n(x) \to 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten $f_n \to 0$ m.k. Toisaalta

$$\|f_n(x)\|_1 = \int_{-n}^{n} |f_n(x)| dx = 2\sqrt{n} \to \infty,$$

joten jono f_n ei suppene L^1-normin suhteen.

Lause 2.3 kuitenkin ilmaisee yhteyden normin suhteen suppenemisen sekä melkein kaikkialla suppenevan osajonon olemassaolon välillä.

Lause 2.3. *Jos $f_n \to f$ normin suhteen, niin silloin on olemassa jonon $\{f_n\}$ osajono $\{f_{p_n}\}$, jolle pätee $f_{p_n} \to f$ m.k.*

Todistus. Ks. [2, s. 58]. □

Seuraavasta lauseesta käytetään yleisesti nimitystä monotonisen konvergenssin lause eli MK-lause. Funktiojono on *monotoninen*, jos se on ei-kasvava tai ei-vähenevä.

Lause 2.4. *Olkoot $f_n \in L^1(\mathbb{R})$. Olkoon vielä jono $\{f_n\}$ monotoninen ja olkoon $|\int f_n| \leq M$ jollekin vakiolle M ja kaikille $n \in \mathbb{N}$. Silloin on olemassa funktio $f \in L^1(\mathbb{R})$, jolle $f_n \to f$ normin suhteen ja $f_n \to f$ m.k. Lisäksi tällöin $|\int f| \leq M$.*

Todistus. Ks. [2, s. 59]. □

Lause 2.5 tunnetaan yleisesti Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseena tai lyhyemmin pelkkänä dominoidun konvergenssin lauseena eli DK-lauseena. Lauseen mukaan jokainen integroituvien funktioiden jono, jota rajoittaa ylhäältä integroituva funktio, suppenee normin suhteen kohti integroituvaa funktioita.

Lause 2.5. *Olkoot $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ ja olkoon $h \in L^1(\mathbb{R})$. Jos $f_n \to f$ m.k. ja $|f_n| \leq h$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, niin silloin $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja $f_n \to f$ normin suhteen.*

Todistus (Ks. [2, s. 60]). Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ ja olkoon

$$g_{m,n} = \max\{|f_m|, \ldots, |f_{m+n}|\}.$$

Valitaan $m \in \mathbb{N}$. Nyt jono $\{g_{m,1}, g_{m,2}, \ldots\}$ on ei-vähenevä. Koska

$$\left|\int g_{m,n}\right| = \int g_{m,n} \leq \int h < \infty,$$

on lauseen 2.4 perusteella olemassa sellainen integroituva funktio g_m, että kun $n \to \infty$, $g_{m,n} \to g_m$ m.k. Jono $\{g_n\}$ on ei-kasvava ja $0 \leq g_n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. On siis olemassa sellainen funktio g, että $g_n \to g$ kaikkialla, joten monotonisen konvergenssin lauseen nojalla f on integroituva ja $g_n \to g$ normin suhteen.

Osoitetaan ensin, että lauseen väite pätee kun $f = 0$. Olkoon siis $f = 0$. Silloin $f_n \to 0$ m.k., joten $g_n \to 0$ m.k. Koska jono g_n suppenee myös normin suhteen, on oltava $g_n \to 0$ normin suhteen. Siispä

$$\int |f_n| \leq \int g_n \to 0,$$

joten $f_n \to 0$ normin suhteen ja täten lause on tosi, kun $f = 0$.

Olkoon sitten $f \neq 0$. Jokaiselle kasvavalle jonolle positiivisia kokonaislukuja $\{p_n\}$ pätee

$$h_n = f_{p_{n+1}} - f_{p_n} \to 0 \text{ m.k.}$$

Edelleen jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee $|h_n| \leq 2h$. Todistuksen ensimmäisen osan perusteella seuraa, että $h_n \to 0$ normin suhteen. Jono $\{f_n\}$ on Cauchyn jono, joten lauseen 2.1 perusteella on olemassa sellainen $b \in L^1(\mathbb{R})$, että $f_n \to b$. Nyt lauseen 2.3 perusteella on olemassa sellainen jonon $\{f_n\}$ osajono $\{f_{q_n}\}$, että $f_{q_n} \to b$ m.k. Toisaalta $f_{q_n} \to f$ m.k., joten $f = b$ m.k. Selvästi nyt $f_n \to f$ normin suhteen, sillä

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_1 &= \int |f_n - f| = \int |f_n - b - f + b| \leq \int |f_n - b| + \int |f - b| \\ &= \int |f_n - b| = \|f_n - b\|_1 \to 0,\end{aligned}$$

joten lause on tosi myös silloin kun $f \neq 0$. □

Dominoidun konvergenssin lauseen tulos esitetään usein myös seuraavassa muodossa. Oletetaan, että lauseen 2.5 oletukset ovat voimassa. Nyt $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Osoitamme, että tämä tulos seuraa lauseen 2.5 väitteestä. Lauseen 2.5 mukaan $f_n \to f$ normin suhteen, eli

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n - f| = 0.$$

Toisaalta on oletettu, että $f_n \to f$ m.k., eli $\lim_{n\to\infty} |f_n(t) - f(t)| = 0$ melkein kaikilla $t \in \mathbb{R}$. On siis oltava

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Suppenemisesta normin suhteen siis seuraa, että raja-arvon ja integraalin järjestys voidaan vaihtaa. Suppenemisella melkein kaikkialla ei ole tätä ominaisuutta ([2, s . 59]).

Seuraava *Fatoun lemma* seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta.

Lause 2.6. *Olkoot $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ ja olkoon $\{f_n\}$ jono ei-negatiivisia funktioita, joille pätee $\int f_n \leq M$ jollekin vakiolle M ja kaikille $n \in \mathbb{N}$. Jos $f_n \to f$ m.k., niin silloin $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\int f \leq M$.*

Todistus (ks. [2, s. 61]). Olkoon $\gamma_{n,k} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+k}\}$, missä $n, k \in \mathbb{N}$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$. Nyt jono $\{\gamma_{n,1}, \gamma_{n,2}, \ldots\}$ on ei-kasvava jono integroituvia funktioita. Lisäksi

$$|\int \gamma_{n,k}| \leq \int \gamma_{n,1} < \infty.$$

Nyt monotonisen konvergenssin lauseen nojalla $\gamma_{n,k} \to \gamma_n$ m.k., joten $\gamma_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$ m.k. Selvästi siis

$$\int \gamma_n \leq \int f_n \leq M.$$

Koska $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \ldots$, on jono $\{\gamma_n\}$ ei-vähenevä. Nyt monotonisen konvergenssin lauseen nojalla on olemassa sellainen integroituva funktio f, että $\gamma_n \to f$ ja

$$\int f \leq M.$$

$\square$

Lause 2.7. *$L^2([a,b])$, $a, b \in \mathbb{R}$, on Hilbertin avaruus.*

Todistus (ks. [2, s. 94]). Oletamme tässä tunnetuksi, että $L^2([a,b])$ on normiavaruus, joten osoitamme, että se on myös täydellinen. Olkoon $\{f_n\}$ avaruudessa $L^2([a,b])$ määritelty Cauchyn jono. Silloin

$$\int_a^b |f_m - f_n|^2 \to 0,$$

kun $m, n \to \infty$. Kun $m, n \to \infty$, seuraa Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\int_a^b |f_m - f_n| \leq \sqrt{\int_a^b 1}\sqrt{\int_a^b |f_m - f_n|^2} = \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b |f_m - f_n|^2} \to 0.$$

Siispä $\{f_n\}$ on Cauchyn jono myös avaruudessa $L^1([a,b])$. Koska $L^1([a,b])$ on täydellinen, on olemassa funktio $f \in L^1([a,b])$, jolle pätee

$$\int_a^b |f - f_n| \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Lauseen 2.3 nojalla on olemassa sellainen jonon $\{f_n\}$ osajono $\{f_{p_n}\}$, että $f_{p_n} \to f$ m.k. Selvästi kaikille $\varepsilon > 0$

$$\int_a^b |f_{p_m} - f_{p_n}|^2 < \varepsilon,$$

kun m ja n valitaan riittävän suuriksi. Siispä kun $n \to \infty$,

$$\int_a^b |f_{p_m} - f|^2 \leq \varepsilon$$

lauseen 2.6 nojalla. Tämä osoittaa, että $f \in L^2([a,b])$. Lisäksi

$$\int_a^b |f - f_n|^2 \leq \int_a^b |f - f_{p_n}|^2 + \int_a^b |f_{p_n} - f_n|^2 < 2\varepsilon,$$

kun n on riittävän suuri. Päättelemme, että $f_n \to f$ normin suhteen myös avaruudessa $L^2([a,b])$, joten $L^2([a,b])$ on täydellinen. □

3 Fourier-sarja

Lauseen 1.1 yhteydessä totesimme, että äärellisulotteisen vektoriavaruuden alkiot ovat esitettävissä ääärellisenä lineaarikombinaationa. Olemme kiinnostuneita mahdollisuudesta ilmaista vektoriavaruuden alkioita summien avulla myös ääretönulotteisessa tapauksessa. Äärellisten lineaarikombinaatioden sijaan joudumme kuitenkin käsittelemään äärettömiä summia, jolloin esiin nousee kysymys sarjan suppenemisesta. Edellä olemme huomanneet, että avaruudella L^2 on ominaisuuksia, jotka ovat hyödyllisiä suppenemistarkastelujen näkökulmasta. Osoittautuukin, että avaruudessa L^2 voimme tietyin rajoituksin esittää funktion ns. *Fourier-sarjan* avulla.

Tässä luvussa esitämme Fourier-sarjan määritelmän. Sen jälkeen esitämme joitakin huomioita Fourier-sarjan suppenemisesta. Esittelemme myös Fourier-sarjan reaalisen version. Tässä kappaleessa tarkastelumme rajoittuvat jaksollisiin funktioihin, joiden jakson pituus on 2π.

Määritelmä 3.1. Olkoon f joukossa $\mathbb{R}$ määritelty funktio. Funktio f on *jaksollinen*, jos on olemassa sellainen luku $P \in \mathbb{R}$ $(\neq 0)$, että

$$f(t) = f(t+P) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lukua P sanotaan funktion f *jakson pituudeksi*. Kun $P = 2\pi$, merkitsemme funktion määrittelyjoukon mitä tahansa 2π-mittaista väliä kirjaimella T.

3.1 Täydellisistä ortogonaalisista joukoista

Tässä alaluvussa osoitamme, että eksponenttifunktioiden joukko $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ on täydellinen avaruudessa $L^2(T)$. Tämä tulos on erittäin keskeinen, sillä se mahdollistaa neliöintegroituvan funktion esittämisen Fourier-sarjakehitelmän avulla.

Esimerkissä 1.3 osoitimme, että kompleksisten eksponenttifunktioiden joukko $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali määrittelemämme sisätulon suhteen. Seuraavaksi määrittelemme, mitä tarkoitamme ortonormaalin joukon täydellisyydellä.

Määritelmä 3.2. Olkoon H Hilbertin avaruus. Ortonormaali joukko $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ on *täydellinen*, jos jokaiselle $f \in H$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f,\, \varphi_k \rangle\, \varphi_k.$$

Olemme pian valmiit todistamaan eksponenttifunktioiden joukon täydellisyyden avaruudessa $L^2(T)$. Tätä todistusta varten tarvitsemme seuraavan tuloksen.

Lause 3.1. *Jos funktio $f \in L^1(T)$ ja $\langle f,\, \phi_n \rangle = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $f = 0$ melkein kaikkialla.*

Todistus. Ks. [2, s. 116]. $\square$

Lause 3.2. *Joukko $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ on täydellinen avaruudessa $L^2(T)$.*

Todistus (vrt. [2, s. 116]). Olkoon $f \in L^2(T)$. Merkitään nyt

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f,\, \phi_k \rangle \, \phi_k$$

ja osoitetaan, että summa on olemassa joukossa $L^2(T)$. Koska $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali joukko, Pythagoraan lauseen (lause 1.4) perusteella

$$\|\sum_{k=1}^{n} \langle f,\, \phi_k \rangle \, \phi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\langle f,\, \phi_k \rangle \, \phi_k\|^2,$$

ja edelleen

$$\sum_{k=1}^{n} \|\langle f,\, \phi_k \rangle \, \phi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle f,\, \phi_k \rangle \, \overline{\langle f,\, \phi_k \rangle} \|\phi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle f,\, \phi_k \rangle|^2.$$

Besselin epäyhtälön (lause 1.6) nojalla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f,\, \phi_k \rangle|^2$$

suppenee, joten jono

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \langle f,\, \phi_k \rangle \, \phi_k$$

on Cauchyn jono. Koska $L^2(T)$ on Hilbertin avaruus ja siten täydellinen, sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f,\, \phi_k \rangle \, \phi_k$$

suppenee.

Sitten osoitamme, että $y = f$ m.k. Koska $f \in L^2(T)$, niin esimerkin 1.5 perusteella $f \in L^1(T)$. Selvästi kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} \langle f - y,\, \phi_n \rangle &= \langle f,\, \phi_n \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f,\, \phi_k \rangle \, \phi_k,\, \phi_n \right\rangle \\ &= \langle f,\, \phi_n \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle f,\, \phi_k \rangle \, \langle \phi_k,\, \phi_n \rangle = \langle f,\, \phi_n \rangle - \langle f,\, \phi_n \rangle = 0, \end{aligned}$$

joten lauseen 3.1 perusteella $f - y = 0$ m.k. Siispä

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f,\ \phi_k \rangle\, \phi_k.$$

$\square$

Seuraava *Parsevalin yhtälö* on välttämätön ja riittävä ehto ortonormaalin joukon täydellisyydelle Hilbertin avaruudessa.

Lause 3.3. *Hilbertin avaruuden H ortonormaali osajoukko $\{\varphi_n\}$ on täydellinen, jos ja vain jos jokaiselle $u \in H$*

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u,\ \varphi_n \rangle|^2. \tag{3.1}$$

Todistus (ks. [2, s. 108]). Olkoon $u \in H$. Lauseen 1.5 todistuksen perusteella jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\|u - \sum_{k=1}^{n} \langle u,\ \varphi_k \rangle\, \varphi_k\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle u,\ \varphi_k \rangle|^2. \tag{3.2}$$

Oletetaan ensin, että $\{\varphi_n\}$ on täydellinen. Silloin

$$\lim_{n \to \infty} \|u - \sum_{k=1}^{n} \langle u,\ \varphi_k \rangle\, \varphi_k\|^2 = 0.$$

Siispä kaavan (3.2) perusteella

$$\lim_{n \to \infty} \left[\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle u,\ \varphi_k \rangle|^2 \right] = 0,$$

joten (3.1) on voimassa.

Oletetaan sitten, että (3.1) pätee. Kun $n \to \infty$, kaavan (3.2) perusteella

$$\lim_{n \to \infty} \|u - \sum_{k=1}^{n} \langle u,\ \varphi_k \rangle\, \varphi_k\|^2 = 0,$$

joten $\{\varphi_n\}$ on täydellinen. $\square$

3.2 Fourier-sarja

Lauseen 3.2 keskeinen sisältö on, että neliöintegroituvaa funktiota voidaan approksimoida sarjakehitelmällä mielivaltaisen tarkasti. Tämä tarkoittaa, että kaikki joukon $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ lineaarikombinaatiot muodostavat sarjan, joka suppenee kohti jotakin funktiota $f \in L^2(T)$. Olemme siis osoittaneet, että lauseen 1.1 tulos on käytettävissämme myös ääretönulotteisen avaruuden $L^2(T)$ tapauksessa.

Olkoon $f \in L^2(T)$. Lauseen 3.2 ja esimerkin 1.3 perusteella voidaan merkitä

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\phi_k,$$

missä

$$c_k = \langle f,\, \phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_T f(t)e^{-ikt}dt.$$

Määritelmä 3.3. Olkoon $f \in L^2(T)$. Kertoimia

$$c_k(f) = \langle f,\, \phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_T f(t)e^{-ikt}dt,\ k \in \mathbb{Z}$$

kutsutaan funktion f *Fourier-kertoimiksi*. Sarjaa

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\phi_k$$

kutsutaan funktion f *Fourier-sarjaksi*. Kun haluamme sanoa, että funktiolla f on tietty Fourier-sarjakehitelmä, merkitsemme

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\phi_k.$$

Koska reaaliarvoisen funktion Fourier-sarjan määritteleminen kompleksisten eksponenttifunktioiden avulla ei ole kovinkaan luontevaa, johdamme seuraavaksi reaalisen Fourier-sarjan. Reaalisen funktion Fourier-sarjan termit $c_k\phi_k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ilmaistaan usein sinien ja kosinien avulla seuraavasti (vrt. [1, s. 75]). Huomataan, että

$$\begin{aligned} c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int} &= c_n(\cos nt + i\sin nt) + c_{-n}(\cos nt - i\sin nt) \\ &= (c_n + c_{-n})\cos nt + i(c_n - c_{-n})\sin nt, \end{aligned}$$

missä $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta huomataan, että

$$c_k\phi_k = \frac{c_k e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Merkitäänkin seuraavaksi

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{\sqrt{2\pi}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_T f(t)e^{-int}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_T f(t)e^{int}dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\cos(nt)dt,\ n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

Samoin voidaan merkitä

$$b_n = \frac{i(c_n - c_{-n})}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\sin(nt)dt,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Todetaan vielä, että kun $k = 0$,

$$c_0\phi_0 = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_T f(t)dt.$$

Toisaalta jos $n = 0$, niin

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_T f(t)dt,$$

joten $a_0 = 2c_0\phi_0$. Kompleksisen Fourier-sarjan

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\phi_k$$

termiä $c_0\phi_0$ vastaa siis reaalisessa Fourier-sarjassa termi $\frac{a_0}{2}$. Lisäksi selvästi $b_o = 0$. Nyt funktion f Fourier-sarja voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)).$$

Esimerkki 3.1. Olkoon

$$f(t) = \begin{cases} -1,\ \text{kun } -\pi < t < 0, \\ 1,\ \text{kun } 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Funktion f Fourier-sarja on

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)),$$

missä

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_T f(t) \cos(nt) dt$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_T f(t) \sin(nt) dt, \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Kun $n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} dt = 0.$$

Olkoon sitten $n \neq 0$. Nyt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = 0.$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} -\sin(nt) dt + \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n}, \end{aligned}$$

kun $n = 2k - 1$ ($k = 1, 2, \ldots$). Samoin huomataan, että $b_n = 0$ kun $n = 2k$, joten

$$b_n = \frac{4}{\pi(2k-1)}.$$

Funktion f Fourier-sarja on siis

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}.$$

Esimerkki 3.2 (ks. [1, s. 116])**.** Olkoon $f \in L^2(T)$. Tarkastellaan funktion f ortogonaaliprojektiota avaruuden $L^2(T)$ n-ulotteiseen aliavaruuteen, jonka virittää joukko $\{\phi_k\}_{k=1}^{n}$. Se on

$$P_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \ \phi_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \ \phi_k \rangle \phi_k = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k,$$

missä

$$c_k = \langle f, \ \phi_k \rangle \|\phi_k\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T f(t) e^{-ikt} dt = c_k(f).$$

Fourier-sarjan suppenemista normin suhteen ei tule sekoittaa pistettäiseen suppenemiseen. Suppeneminen normin suhteen määritellään integraalina funktion koko periodin T yli, eikä siitä voida vetää johtopäätöksiä sarjakehitelmän suppenemisesta periodin yksittäisessä pisteessä,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f,\, \phi_n \rangle\, \phi_n(x).$$

Pisteittäistä suppenemista koskeva tulos onkin huomattavasti vahvempi. Lennart Carleson todisti vuonna 1966, että neliöintegroituvan funktion Fourier-sarja suppenee melkein kaikkialla. Todistus on erittäin vaativa.

3.3 Yleistetty Fourier-sarja

Edellisessä alaluvussa osoitimme, että kaikki joukon $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ lineaarikombinaatiot suppenevat kohti jotakin funktiota $f \in L^2(T)$. Lauseesta 1.5 ja esimerkistä 3.2 huomataan, että Fourier-sarjakehitelmä on tietyssä mielessä paras approksimaatio tälle funktiolle. Osoittautuu, että tulos on voimassa myös yleiselle ortonormaalille joukolle $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ja Hilbertin avaruudelle H.

Olkoon $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ Hilbertin avaruuden H ortonormaali osajoukko. Besselin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u,\, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|u\|^2,$$

joten sarja suppenee jokaiselle $u \in H$. Toisin sanoen, jono $\{\langle u,\, \varphi_k \rangle\} \in l^2$. Voidaan sanoa, että ortonormaali joukko $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ avaruudessa H indusoi kuvauksen avaruudelta H avaruuteen l^2. Sarjakehitelmää

$$u \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle u,\, \varphi_k \rangle\, \varphi_k$$

kutsutaan alkion $u \in H$ *yleistetyksi Fourier-sarjaksi*. Vastaavasti kertoimia $\langle u,\, \varphi_k \rangle$ kutsutaan ortonormaalin joukon $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ määräämiksi *yleistetyiksi Fourier-kertoimiksi*. Avaruuden H täydellisyys takaa sarjan suppenemisen.

Lause 3.4. *Olkoon jono $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ avaruuden H ortonormaali osajoukko ja olkoon $\{\alpha_k\}$ jono kompleksilukuja. Sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$$

suppenee, jos ja vain jos $\{a_k\} \in l^2$. *Silloin myös*

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_k|^2}.$$

Todistus (ks. [2, s. 106]). Olkoot $m > n > 0$. Pythagoraan lauseen perusteella

$$\|\sum_{k=n}^{m} a_k \varphi_k\| = \sqrt{\sum_{k=n}^{m} |a_k|^2}. \tag{3.3}$$

Jos $\{a_k\} \in l^2$, niin selvästi sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$ suppenee avaruuden H täydellisyyden nojalla. Oletetaan sitten, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$ suppenee. Kohdan (3.1) nojalla myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ suppenee, sillä sarjan osasummien jono $S_m = \sum_{k=1}^{m} |a_k|^2$ on Cauchyn jono joukossa $\mathbb{R}$. Kun $k = 1$ ja $m \to \infty$ yhtälössä (3.3), saadaan

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_k|^2}.$$

□

Määritelmä 3.4. Olkoot H_1 ja H_2 Hilbertin avaruuksia. Avaruus H_1 on *isomorfinen* avaruuden H_2 kanssa, jos on olemassa sellainen lineaarikuvaus $\mathcal{L} \colon H_1 \to H_2$, että $\mathcal{L}$ on bijektio ja

$$\langle \mathcal{L}(x),\, \mathcal{L}(y) \rangle = \langle x,\, y \rangle$$

jokaiselle $x, y \in H_1$. Tällöin kuvausta $\mathcal{L}$ kutsutaan *isomorfismiksi* avaruudelta H_1 avaruuteen H_2.

Olkoon nyt H Hilbertin avaruus jossa voidaan määritellä ortonormaali joukko $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Todistamme seuraavaksi, että H on isomorfinen avaruuden l^2 kanssa ja että isomorfismin määrittää kuvaus $\mathcal{T} \colon H \to l^2$, missä $\mathcal{T}(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\alpha_k = \langle x,\, \varphi_k \rangle$ ja $k \in \mathbb{N}$. Selvästi $\mathcal{T}$ on lineaarikuvaus. Aloitamme osoittamalla, että kuvaus $\mathcal{T}$ on bijektio.

Olkoot U ja V sisätuloavaruuksia ja olkoon $\mathcal{L}\colon U \to V$ lineaarikuvaus. Lineaarikuvauksen L *nolla-avaruus* on joukko

$$\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \{u \in U \colon \mathcal{L}(u) = \mathbf{0}\}.$$

Lineaarialgebrasta tiedetään, että lineaarikuvaus $\mathcal{L}$ on injektio, jos ja vain jos $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \mathbf{0}$. Selvästi nyt lineaarikuvaus $\mathcal{T}$ on injektio, sillä avaruuden H täydellisyyden nojalla jokaiselle $x \in H$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x,\, \varphi_k\rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k,$$

joten jos $\alpha_k = 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, on tällöin oltava $x = \mathbf{0}$. Edelleen $\mathcal{T}$ on surjektio, sillä lause 3.4 pätee mielivaltaiselle jonolle $\{a_k\} \in l^2$.

Lause 3.5. *Olkoon H ääretönulotteinen Hilbertin avaruus, jolla on täydellinen ortonormaali osajoukko. Avaruus H on isomorfinen avaruuden l^2 kanssa.*

Todistus (ks. [2, s. 126]). Olkoon jono $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ avaruuden H täydellinen ortonormaali osajoukko ja olkoon $x \in H$. Olkoon vielä lineaarikuvaus $\mathcal{T}$ kuten edellä. On jo osoitettu, että $\mathcal{T}$ on bijektio. Riittää siis osoittaa, että $\langle \mathcal{T}(x),\, \mathcal{T}(y)\rangle = \langle x,\, y\rangle$. Merkitään $\beta_k = \langle y,\, \varphi_k\rangle$. Nyt

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{T}(x),\, \mathcal{T}(y)\rangle &= \langle (\alpha_1, \alpha_2, \ldots),\, (\beta_1, \beta_2, \ldots)\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x,\, \varphi_k\rangle\, \overline{\langle y,\, \varphi_k\rangle} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle x,\, \langle y,\, \varphi_k\rangle \varphi_k\rangle = \left\langle x,\, \sum_{k=1}^{\infty} \langle y,\, \varphi_k\rangle \varphi_k \right\rangle = \langle x,\, y\rangle .
\end{aligned}$$

□

Olemme siis osoittaneet, että jokainen ääretönulotteinen Hilbertin avaruus, jossa voidaan määritellä täydellinen ortonormaali joukko, on isomorfinen avaruuden l^2 kanssa. Fourier-sarjojen kannalta tulos tarkoittaa sitä, että jokaista jonoa $\{a_k\} \in l^2$ kohti on olemassa sellainen funktio $f \in L^2(T)$, että

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

missä $a_k = \langle f,\, \varphi_k\rangle$ (ks. myös huomautus [1, s. 121]). Tätä tulosta kutsutaan usein *Rieszin-Fischerin lauseeksi.*

4 Fourier-muunnos

4.1 Fourier-muunnoksen määritelmä

Edellä olemme osoittaneet, että jokaiselle jakson T yli neliöintegroituvalle jaksolliselle funktiolle f on olemassa L^2-normin suhteen suppeneva Fourier-sarjakehitelmä. Sarjan kertoimet ovat määritelmän 3.3 mukaan

$$c_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T f(t) e^{-ikt} dt,$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Määritellään nyt funktio

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Tätä funktiota kutsutaan 2π-*jaksollisen funktion Fourier-muunnokseksi.* Huomataan, että jaksollisen funktion tapauksessa Fourier-muunnos on määritelty vain kokonaislukuarvoille.

Tässä luvussa määrittelemme Fourier-muunnoksen myös ei-jaksollisille funktioille. Käytännössä tämä tapahtuu antamalla funktion jakson pituuden kasvaa rajatta (ks. esim. [1, s. 165]). Ongelmaksi muodostuvat ei-jaksollisen funktion Fourier-muunnoksen olemassaoloa koskevat ehdot. Intergaalin

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt} dt$$

käyttäminen neliöintegroituvien funktioiden Fourier-muunnoksen määritelmänä on ongelmallista, sillä kaikki neliöintegroituvat funktiot eivät ole integroituvia reaalilukujen joukossa. Toisaalta olemme jo aiemmin esimerkissä 2.2 huomanneet, että suppenemista L^1- ja L^2-normien suhteen ei voida samaistaa. Jos siis määrittelisimme Fourier-muunnoksen erikseen joukoissa $L^1(\mathbb{R})$ ja $L^2(\mathbb{R})$, emme voisi olla varmoja näiden määritelmien vastaavuudesta (ks. [2, s. 198]). Käytännössä voimme kuitenkin määritellä Fourier-muunnoksen joukossa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ sekä joukoissa $L^1(\mathbb{R})$ ja $L^2(\mathbb{R})$, kunhan olemme tietoisia näistä rajoituksista. Tarkempi syventyminen näihin kysymyksiin ei ole mahdollista tämän tutkielman puitteissa.

Määritelmä 4.1. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Funktion f *Fourier-muunnos* on funktio

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Määrittelemme Fourier-muunnoksen samoin myös joukoissa $L^1(\mathbb{R})$ ja $L^2(\mathbb{R})$. Tällöin oletamme muunnoksen määrittelevän integraalin suppenevan. Funktion f Fourier-muuunnoksesta käytetään myös merkintää $\mathcal{F}(f)$.

Esimerkki 4.1. Olkoon f funktio

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, \text{ kun } t \geq 0, \\ -e^{t}, \text{ kun } t < 0. \end{cases}$$

Funktion f Fourier-muunnos on

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} -e^{t} e^{-ikt} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-ikt} dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b \to \infty} \left[\int_{-b}^{0} -e^{-(ik-1)t} dt + \int_{0}^{b} e^{-(ik+1)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1 - e^{(ik-1)b}}{ik-1} - \frac{e^{-(ik+1)b} - 1}{ik+1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{ik-1} + \frac{1}{ik+1} \right] = \frac{-2ik}{\sqrt{2\pi}(k^2+1)}. \end{aligned}$$

4.2 Fourier-muunnoksen ominaisuuksia

Seuraavat ominaisuudet seuraavat helposti suoraan määritelmästä 4.1.

Lause 4.1. *Olkoot $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ja $a \in \mathbb{C}$. Silloin*

(a) $$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$

(b) $$\mathcal{F}(af) = a\mathcal{F}(f)$$

(c) $$\mathcal{F}\left\{\overline{f}(t)\right\} = \overline{\mathcal{F}\left\{f(-t)\right\}}$$

(d) $$\mathcal{F}\left\{f(t-u)\right\} = \mathcal{F}\left\{f(t)\right\} e^{-iku}$$

(e) $$\mathcal{F}\left\{f(at)\right\} = (1/a)\mathcal{F}\left\{f(t/a)\right\}, \ a > 0.$$

Lause 4.2. *Integroituvan funktion Fourier-muunnos on jatkuva funktio.*

Todistus (ks. [2, s. 194]). Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja olkoot $k, h \in \mathbb{R}$. Silloin

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(k+h) - \hat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}(e^{iht} - 1) f(t) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iht} - 1||f(t)| dt.
\end{aligned}
$$

On siis osoitettava, että

$$
\lim_{h \to 0} |\hat{f}(k+h) - \hat{f}(k)| = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iht} - 1||f(t)| dt = 0.
$$

Huomataan, että $|e^{iht} - 1||f(t)| \leq 2|f(t)|$ ja että $\lim_{h \to 0} |e^{iht} - 1| = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Nyt dominoidun konvergenssin lauseen (lause 2.5) perusteella

$$
\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iht} - 1||f(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \to 0} |e^{iht} - 1||f(t)| dt = 0.
$$

$\square$

Määritelmä 4.2. Olkoot $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Funktioiden f ja g *konvoluutio* $f * g$ on

$$
\begin{aligned}
(f * g)(t) = f * g(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - y) g(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(t - y) dy.
\end{aligned}
$$

Seuraava *konvoluutiolause* ilmaisee yhden Fourier-muuunnoksen hyödyllisimmistä ominaisuuksista. Konvoluutio on nimittäin muunnettavissa kertolaskuksi Fourier-muunnoksen avulla.

Lause 4.3. *Olkoot* $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. *Silloin*

$$
\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).
$$

Todistus (ks. [1, s. 177]). Esitämme tässä luonnoksen todistukselle. Konvoluution $f * g$ integroituvuus ja integrointijärjestyksen vaihtaminen kohdassa (*) perustuvat *Fubinin lauseeseen* (ks. [2, s. 78]). Fourier-muunnoksen ja konvoluution määritelmien perusteella

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)dy\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)dy\right)dt \\
(*) \qquad &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}f(t-y)dtdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(t+y)}f(t)dtdy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky}dy\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}f(t)dt = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).
\end{aligned}
$$

□

Olemme aiemmin todistaneet Parsevalin yhtälön Fourier-sarjoille. Vastaava tulos on voimassa myös jatkuvan Fourier-muunnoksen tapauksessa.

Lause 4.4. *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Silloin*

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Todistus (ks. [2, s. 197]). Oletetaan ensin, että $f = 0$ kaikkialla välin $[-\pi, \pi]$ ulkopuolella. Nyt määritelmän 3.3 perusteella

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikt},$$

missä

$$c_k(f) = \langle f,\, e^{ikt}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Lauseen 3.3 perusteella

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2.$$

Olkoon sitten $g(t) = e^{-i\xi t}f(t)$. Samoin funktiolle g pätee

$$
\begin{aligned}
\|g\|_2^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ikt}dt\right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(k+\xi)t}dt\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k+\xi)|^2.
\end{aligned}
$$

Selvästi $\|f\|_2^2 = \|g\|_2^2$, joten

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k+\xi)|^2. \tag{4.1}$$

Integroimalla lauseke (4.1) puolittain muuttujan ξ suhteen välin $[0,1]$ yli saadaan

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\hat{f}(k+\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_2^2.$$

Jos $f \neq 0$ välin $[-\pi,\pi]$ ulkopuolella, voidaan valita sellainen luku $\lambda > 0$, että funktio $g(t) = f(\lambda t) = 0$ kaikkialla välin $[-\pi,\pi]$ ulkopuolella. Nyt lauseen 4.1 kohdan (e) nojalla

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\lambda}\hat{f}\left(\frac{k}{\lambda}\right),$$

joten

$$\|f\|_2^2 = \lambda\|g\|_2^2 = \lambda\|\hat{g}\|_2^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_2^2.$$

$\square$

Esimerkki 4.2 (ks. [1, s. 182, teht. 7.23])**.** Lasketaan epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx.$$

Esimerkin 4.1 perusteella funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, \text{ kun } t \geq 0, \\ -e^{t}, \text{ kun } t < 0 \end{cases}$$

Fourier-muunnos on

$$\hat{f}(k) = \frac{-2ik}{\sqrt{2\pi}(k^2+1)}.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\int_{-b}^{0} e^{2t} dt + \int_0^{b} e^{-2t} dt \right) \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-2b}\right) = 1. \end{aligned}$$

Parsevalin yhtälön perusteella $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, joten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-2ik}{\sqrt{2\pi}(k^2+1)} \right|^2 dk = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} dk = 1.$$

Siispä

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Lause 4.5. *Jos $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, niin*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)g(t)dt.$$

Todistus. Ks. [2, s. 199]. □

Seuraava apulause on tarpeellinen käänteisen Fourier-muunnoksen määrittelemiseksi.

Lemma 4.1. *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ja olkoon $g = \overline{\hat{f}}$. Silloin $f = \overline{\hat{g}}$.*

Todistus (ks. [2, s. 200]). Olkoon $g = \overline{\hat{f}}$. Nyt lauseiden 4.4 ja 4.5 perusteella

$$\left\langle f,\, \overline{\hat{g}} \right\rangle = \left\langle \hat{f},\, \overline{g} \right\rangle = \left\langle \hat{f},\, \hat{f} \right\rangle = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Edelleen Parsevalin yhtälön nojalla

$$\|\hat{g}\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Saadaan

$$\|f - \overline{\hat{g}}\|_2^2 = \left\langle f - \overline{\hat{g}},\, f - \overline{\hat{g}} \right\rangle = \|\hat{f}\|_2^2 - \langle f,\, \hat{g} \rangle - \overline{\langle f,\, \hat{g} \rangle} + \|\hat{g}\|_2^2 = 0,$$

joten $f = \overline{\hat{g}}$. □

Lause 4.6. *Olkoon $f \in L^2(\mathbb{R})$. Silloin*

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} dk,$$

missä suppeneminen on määritelty L^2-normin suhteen.

Todistus (ks. [2, s. 201]). Jos $g = \overline{\hat{f}}$, niin silloin lemman 4.1 perusteella

$$\begin{aligned} f(t) = \overline{\hat{g}(t)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \overline{e^{-ikt} g(k)} dk \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{ikt} \overline{g(k)} dk \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{ikt} \hat{f}(k) dk. \end{aligned}$$

□

Edellisen lauseen perusteella huomataan, että kun $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, yhtäsuuruus

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} \hat{f}(k) dk$$

on voimassa melkein kaikkialla joukossa $\mathbb{R}$. Lauseessa määriteltyä muunnosta kutsutaan *käänteiseksi Fourier-muunnokseksi*. Funktio f ja sen Fourier-muunnos muodostavat ns. *Fourier-muunnosparin*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt} dt, \\ \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt} dk. \end{aligned}$$

Olemme aiemmin osoittaneet, että jokainen ääretönulotteinen Hilbertin avaruus, jossa voidaan määritellä täydellinen ortonormaali jono, on isomorfinen avaruuden l^2 kanssa. Yleistetyn Fourier-sarjan tarkastelemisen yhteydessä havaitsimme, että yleistettyjen Fourier-kertoimien joukko indusoi isomofismin avaruudesta H avaruuteen l^2. Osoittautuu, että Fourier-muunnos indusoi isomorfismin avaruudesta $L^2(\mathbb{R})$ avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$. Seuraava lause osoittaa, että Fourier-muunnos säilyttää sisätulon.

Lause 4.7. *Jos $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, niin*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} dk.$$

Todistus. Ks. [2, s. 201]. □

Lause 4.8. *Fourier-muunnos $\mathcal{F}$ on isomorfismi avaruudelta $L^2(\mathbb{R})$ avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$.*

Todistus (ks. [2, s. 202]). Lauseen 4.7 perusteella

$$\langle \mathcal{F}(f),\, \mathcal{F}(g)\rangle = \langle f,\, g\rangle\,.$$

Jos $\mathcal{F}(f) = \mathbf{0}$, niin selvästi funktion f on oltava nollafunktio. Tällöin siis $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \mathbf{0}$, joten kuvaus $\mathcal{F}$ on injektio. On vielä osoitettava, että kuvaus $\mathcal{F}$ on surjektio. Olkoon $f \in L^2(\mathbb{R})$ ja olkoot $h = \overline{f}$ ja $g = \hat{\overline{h}}$. Nyt lemman 4.1 nojalla $\overline{f} = h = \overline{\hat{g}}$, joten $f = \hat{g}$. □

Olemme siis todistaneet, että kuvaus $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ on isomorfismi. Tämä osoittaa, että jokainen neliöintegroituva funktio on jonkin neliöintegroituvan funktion Fourier-muunnos. Toisaalta lauseessa 3.5 osoitimme, että jokainen ääretönulotteinen Hilbertin avaruus on isomorfinen avaruuden l^2 kanssa. Voidaan siis sanoa, että tietyssä mielessä on olemassa vain yksi ääretönulotteinen Hilbertin avaruus.

4.3 Diskreetti Fourier-muunnos

Tähän mennessä olemme tarkastelleet jaksollisen funktion Fourier-sarjaa sekä yleisemmän funktion Fourier-muunnosta. Tässä alaluvussa esittelemme diskreetin Fourier-muunnoksen, joka on aiheemme numeeristen sovellusten kannalta kenties tärkein muunnostyyppi.

Kuten Fourier-sarjaa käsittelevässä osuudessa myös tässä alaluvussa rajoitamme tarkastelumme koskemaan reaalilukuväliä T, jonka pituus on 2π. Oletamme lisäksi, että T on väli $[0, 2\pi]$. Olkoon nyt

$$G_N = \left\{\frac{2\pi k}{N}\colon k = 0, 1, 2, \ldots, N-1\right\} = \{x_k\colon k = 0, 1, 2, \ldots, N-1\}$$

välin T jako ja olkoon l_N joukko funktioita $f\colon G_N \to \mathbb{C}$. Joukko l_N on vektoriavaruus yli skalaarikunnan $\mathbb{C}$. Tälle vektoriavaruudelle voidaan helposti konstruoida luonnollinen kanta. Olkoon

$$e_n(x_k) = \begin{cases} 1, \text{ kun } k = n, \\ 0, \text{ kun } k \neq n. \end{cases}$$

Selvästi $\{e_n\}_{n=0}^{N-1}$ on lineaarisesti riippumaton joukko. Lisäksi kaikille funktioille $f \in l_N$ pätee

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e_k,$$

joten joukko $\{e_n\}_{n=0}^{N-1}$ on avaruuden l_N kanta ja avaruuden l_N dimensio on N.

Avaruudessa l_N voidaan määritellä sisätulo

$$\langle f,\, g\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\overline{g(x_k)}. \tag{4.2}$$

Olkoon $\omega = \omega_N = e^{(2\pi i/N)}$ ja määritellään funktio

$$\psi_n(x_k) = e^{\left(in\frac{k}{N}2\pi\right)} = \omega^{nk}.$$

Työmme tähän asti keskeisimipä tuloksia on se, että joukko $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ on avaruuden $L^2(T)$ täydellinen ortnonormaali osajoukko. Tämä mahdollistaa funktion $f \in L^2(T)$ esittämisen Fourier-sarjakehitelmän avulla. Huomaamme, että vastaavasti funktiojoukko $\psi_n(x_k)$ muodostaa ortogonaalisen kannan avaruudelle l_N.

Lause 4.9. *Joukko $\{\psi_n\}_{n=0}^{N-1}$ on avaruuden l_N ortogonaalinen kanta. Lisäksi $\|\psi_n\|^2 = N$.*

Todistus (ks. [1, s. 244]). Koska joukon $\{\psi_n\}_{n=0}^{N-1}$ alkioiden lukumäärä on N, riittää osoittaa, että joukko on ortogonaalinen kohdassa (4.2) määritellyn sisätulon suhteen. Olkoon $0 \leq m, n \leq N-1$. Silloin

$$\langle \psi_m,\, \psi_n\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{mk}\omega^{-nk} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{(m-n)k}.$$

Kun $m = n$ väite seuraa suoraan, sillä $\langle \psi_m,\, \psi_n\rangle = \|\psi_n\|^2 = N$. Olkoon siis $m \neq n$. Silloin

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{(m-n)k}$$

on geometrinen summa, jonka suhdeluku on $\omega^{(m-n)} \neq 1$. Geometrisen summan kaavan perusteella

$$\langle \psi_m,\, \psi_n\rangle = \frac{1-\omega^{(m-n)N}}{\omega^{(m-n)}} = \frac{1-e^{2\pi i(m-n)}}{\omega^{(m-n)}} = 0.$$

$\square$

Nyt voimme menetellä olennaisesti samoin kuin jatkuvan 2π-jaksollisen funktion Fourier-muunnoksen yhteydessä ja määritellä diskreetin Fourier-muunnoksen seuraavasti. Lauseen 1.1 perusteella mielivaltainen funktio $f \in l_n$ voidaan nyt esittää lineaarikombinaationa

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \psi_k,$$

missä

$$c_k = \frac{\langle f,\, \psi_k \rangle}{\langle \psi_k,\, \psi_k \rangle} = \frac{1}{N} \langle f,\, \psi_k \rangle .$$

Määritelmä 4.3. Olkoon funktio $f \in l_N$. Nyt funktion f *diskreetti Fourier-muunnos* on funktio

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-i2\pi kn/N}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Diskreetin Fourier-muunnoksen *käänteismuunnos* on vastaavasti

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{i2\pi kn/N}.$$

Lukujonoille voidaan määritellä *konvoluutio*

$$f(x_k) * g(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) g(x_{k-n}).$$

Kahden lukujonon konvoluutio on olennainen operaatio esimerkiksi digitaalisessa signaalinkäsittelyssä. Signaalin suodattaminen perustuu juuri konvoluutioon. Voidaan osoittaa, että myös diskreetin Fourier-muunnoksen tapauksessa

$$\widehat{(f * g)}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n).$$

Laskennallisten sovellusten näkökulmasta tämä on merkittävää, sillä diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseksi on olemassa nopeita niin sanottuja FFT-algoritmeja. Kun lukujonojen diskreetit Fourier-muunnokset on ensin laskettu FFT-algoritmilla, on lukujonojen konvoluutio yksinkertaisesti lukujonojen Fourier-muunnosten tulo. Diskreetti Fourier-muunnos siis mahdollistaa nopean konvoluution, jonka laskennallinen kompleksisuus on huomattavasti muita menetelmiä pienempi.

Viitteet

[1] Vretblad, A. *Fourier Analysis and Its Applications*, Springer-Verlag New York, 2003

[2] Debnath, L. & Mikusinski, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Academic press inc. San Diego, 1990

[3] Horn, R. & Johnson, C. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1999 (1985)