TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Pauliina Inkeroinen ja Ulla Mattila

Derivaatasta ja differentiaalilaskennan kouluopetuksesta eri aikoina

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Huhtikuu 2008

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

INKEROINEN, PAULIINA JA MATTILA, ULLA: Derivaatasta ja differentiaalilaskennan kouluopetuksesta eri aikoina

Pro gradu -tutkielma, 54 s., 86 liites.

Matematiikka

Huhtikuu 2008

Tiivistelmä

Tarkastelemme tutkielmassamme erästä koulumatematiikan keskeistä osa-aluetta, differentiaalilaskentaa. Tutkielmamme on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisessä osassa esitämme derivaatan määritelmän ja taustaa niille derivaatan perusominaisuuksille, jotka sisältyvät nykyisiin lukion pitkän matematiikan kursseihin. Perusominaisuudet on jaettu algebrallisten ja transkendenttisten funktioiden käsittelyyn, kuten usein koulumatematiikassakin.

Toisessa osassa tarkastelemme differentiaalilaskennan kouluopetusta eri aikoina. Aloitamme tarkastelut 1940-luvulta, jolloin differentiaalilaskenta tuli koulumatematiikkaan. Tutkimme oppikirjojen, ylioppilastehtävien ja opetussuunnitelman perusteiden avulla, mitä asioita differentiaalilaskentaan on kuulunut eri aikoina. Lisäksi tarkastelemme oppikirjojen teoriaosuuksien, esimerkkien ja tehtävien avulla, miten differentiaalilaskentaa on opetettu eri vuosikymmeninä.

Kouluopetuksessa painotetut differentiaalilaskennan sisällöt ovat oppikirjojen ja opetussuunnitelmien perusteiden perusteella muuttuneet ajan kuluessa. 1970-luvulle asti oppimateriaali vain lisääntyi ja laajeni. Tämän jälkeen oppikirjojen teoriaosuuksia on kevennetty. Differentiaalilaskennan sisältö on kuitenkin laajentunut huomattavasti. Opetettaviin asioihin on tullut lisää matematiikan sovellutuksia ja erilaisia derivaatan käyttömahdollisuuksia. Lisäksi opiskelija voi syventää differentiaalilaskennan taitoja valinnaisella analyysin jatkokurssilla.

Esimerkkien määrä oppikirjoissa on lisääntynyt huomattavasti ja samalla myös soveltavien esimerkkien osuus on kasvanut. Sama kehitys on nähtävissä myös tehtävissä. Myös opiskelijakeskeisyys on lisääntynyt, mikä näkyy muun muassa havainnollisuuden ja johdattelevien esimerkkien lisääntymisenä.

Avainsanat: derivaatta, differentiaalilaskenta, opetus, lukio, pitkä matematiikka

Kiitokset

Haluamme osoittaa suuret kiitoksemme Jorma Merikoskelle saamastamme hyvästä ja monipuolisesta ohjauksesta työtä tehdessämme. Kiitämme myös Päivi Portaankorva-Koivistoa hyvistä kehittämisideoista. Lämpimät ja parhaat kiitoksemme puolisoillemme Petrille ja Arille sekä perheillemme runsaasta tuesta, jota olemme saaneet koko opiskelujemme ajan.

Sisältö

1 Johdanto

Viime aikoina on puhuttu paljon koulumatematiikan tason jatkuvasta laskemisesta. Tämä herätti mielenkiintomme tutkimaan onko todella näin? Differentiaalilaskenta on yksi keskeisimmistä matematiikan osa-alueista lukiossa nykyään ja pidämme sitä mielenkiintoisena ja tärkeänä. Siksi valitsimme tutkimuksemme kohteeksi juuri differentiaalilaskennan. Tutkimme oppikirjojen, opetussuunnitelman perusteiden ja ylioppilastehtävien avulla, mitä lukion differentiaalilaskentaan on sisältynyt eri aikoina. Tutkimme myös, miten oppikirjoissa on opetettu differentiaalilaskentaa niistä ajoista alkaen, kun differentiaalilaskenta on kuulunut lukion matematiikan oppisisältöön.

Olemme jakaneet tutkielmamme kahteen osaan. Ensimmäisessä osassa esitämme derivaatan määritelmän ja taustaa niille differentiaalilaskennan perusominaisuuksille, jotka sisältyvät nykyään lukion pitkän matematiikan oppimäärään. Toisessa osassa tutkimme lukion matematiikan pitkän oppimäärän kirjoja vuodesta 1946 alkaen vuoteen 2007 sekä differentiaalilaskennasta tehtyjä ylioppilastehtäviä kyseisiltä vuosilta. Näiden avulla pyrimme vastaamaan tutkimuskysymyksiimme.

Lukijalta edellytämme joidenkin analyysin ja algebran perusasioiden tuntemista. Edellytämme muun muassa, että lukija tuntee jatkuvuuden ja raja-arvon määritelmät sekä joitakin raja-arvon laskusääntöjä.

Osa I

Derivaatan määritelmä ja perusominaisuuksia

Tässä osassa esitämme derivaatan määritelmän ja joitain keskeisimpiä derivaatan ominaisuuksia. Esitettävät perusominaisuudet olemme valinneet sen mukaan, mitä nykyinen lukion pitkä matematiikka pitää sisällään. Tämän osan tarkoituksena on siis antaa taustatietoa lukiossa opetettavista differentiaalilaskennan asioista.

2 Derivoituvuudesta

Luvun ensimmäisessä kappaleessa käsittelemme derivaatan määritelmää ja esitämme lauseen, josta selviää, että derivoituvuus on vahvempi ominaisuus kuin jatkuvuus. Toisessa kappaleessa selvitämme derivoituvuuden ja differentioituvuuden välisen yhteyden.

2.1 Derivaatan määritelmä

Olkoon funktio f yhden reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty kohdan c eräässä ympäristössä. Funktion f keskimääräistä kasvunopeutta kohtien c ja $c+h$ välillä kuvaa sekantin kulmakerroin

$$k_s = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Tilannetta havainnollistaa kuva 1.

Kun $h \to 0$, sekantin kulmakerroin kuvaa yhä paremmin funktion kasvunopeutta kohdassa c. Tällöin sekantti lähestyy kohtaan c piirrettyä tangenttia, ja sen kulmakerroin lähestyy tangentin kulmakerrointa k_t. Siis

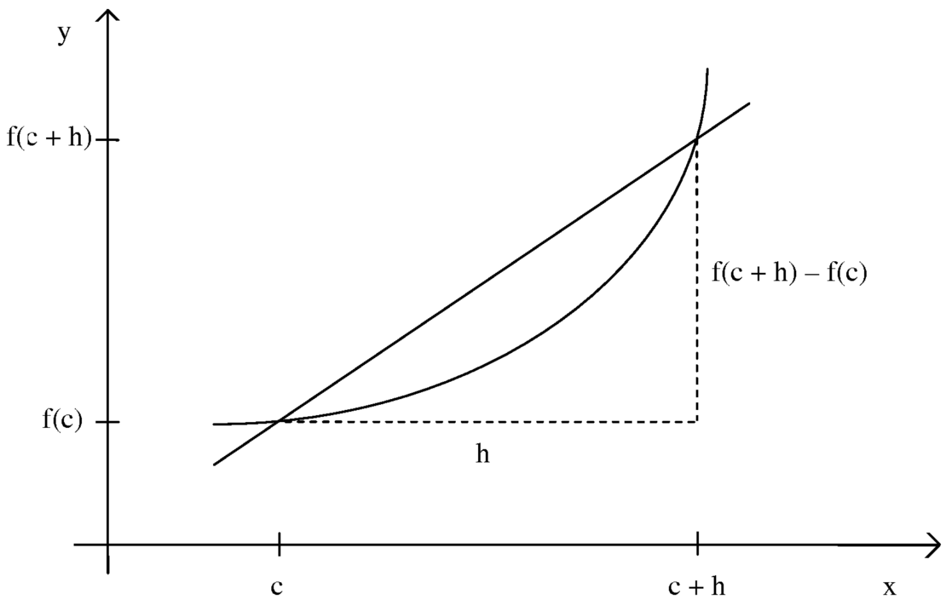
$$k_t = \lim_{h\to 0} k_s = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Lauseketta

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \qquad h \neq 0,$$

sanotaan funktion f *erotusosamääräksi* kohtien c ja $c+h$ välillä. Erotusosamäärän raja-arvoa

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \tag{1}$$



Kuva 1: Sekantin kulmakerroin.

sanotaan funktion *derivaataksi* kohdassa c ja merkitään $f'(c)$. Funktion $f(x)$ derivaattafunktio voidaan ilmaista myös derivointimerkin D avulla, jolloin $f'(x) = Df(x)$. Funktio f on *derivoituva* kohdassa c, jos erotusosamäärän raja-arvo (1) on olemassa. Geometrisesti tulkittuna derivaatta kohdassa c on siis funktion kuvaajan kohtaan c piirretyn tangentin kulmakerroin. Voimme esittää $f(x)$:n derivaatan kohdassa x myös muodossa

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Lause 1. *Jos funktio f on derivoituva kohdassa x, niin se on myös jatkuva kohdassa x.*

Todistus. Erotusosamäärä

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h.$$

Koska f on derivoituva kohdassa x, niin

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Raja-arvo $\lim_{h \to 0} h = 0$, joten saamme

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Tästä seuraa, että $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, ja täten f on jatkuva kohdassa x. $\square$

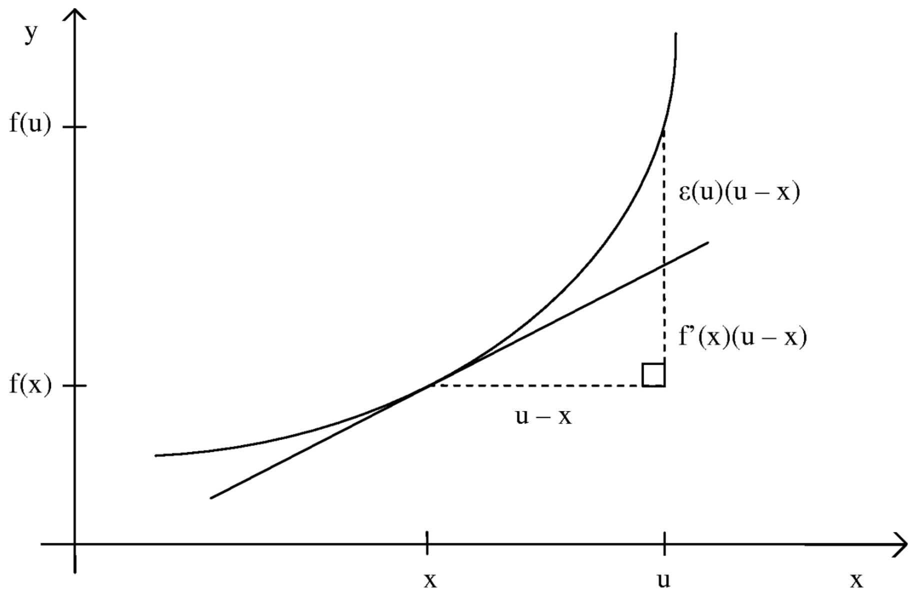
2.2 Differentiaalihajotelma

Olkoon funktio f määritelty välillä I ja olkoon $x \in I$. Jos on olemassa sellainen reaaliluku a ja sellainen kohdan x eräässä ympäristössä $U \subseteq I$ määritelty ja tässä kohdassa jatkuva funktio ϵ, että $\lim_{u\to x} \epsilon(u) = 0$ ja

$$f(u) - f(x) = a(u-x) + \epsilon(u)(u-x)$$

aina, kun $u \in U$, niin funktiolla f on *differentiaalihajotelma* kohdassa x ja f on *differentioituva* tässä pisteessä.

Kuva 2 havainnollistaa differentiaalihajotelmaa.



Kuva 2: Differentiaalihajotelma.

Lause 2. *Välillä I määritelty funktio f on pisteessä $x \in I$ derivoituva, jos ja vain jos se on differentioituva. Tällöin sen differentiaalihajotelmassa $f(u) - f(x) = a(u-x) + \epsilon(u)(u-x)$ on $f'(x) = a$.*

Todistus. Olkoon aluksi f differentioituva pisteessä x. Todistamme, että f on derivoituva pisteessä x.

Kun $u (\in I) \to x$, on

$$\frac{f(u)-f(x)}{u-x} = \frac{a(u-x)+\epsilon(u)(u-x)}{u-x} = a + \epsilon(u) \to a + \epsilon(x) = a + 0 = a,$$

joten f on derivoituva pisteessä x ja $f'(x) = a$.

Olkoon sitten f derivoituva pisteessä x. Todistamme, että f on differentioituva pisteessä x.

Kun $u \in I$ ja $u \neq x$, määrittelemme funktion ϵ seuraavasti

$$\begin{aligned} & f(u) - f(x) = f'(x)(u-x) + \epsilon(u)(u-x) \\ \Leftrightarrow \quad & \epsilon(u)(u-x) = f(u) - f(x) - f'(x)(u-x) \\ \Leftrightarrow \quad & \epsilon(u) = \frac{f(u)-f(x)}{u-x} - \frac{f'(x)(u-x)}{u-x} \\ \Leftrightarrow \quad & \epsilon(u) = \frac{f(u)-f(x)}{u-x} - f'(x). \end{aligned}$$

Kun $u \to x$, niin

$$\epsilon(u) = \frac{f(u)-f(x)}{u-x} - f'(x) \to 0.$$

Lisäksi määrittelemme $\epsilon(x) = 0$. Koska

$$f(u) - f(x) = f'(x)(u-x) + \epsilon(u)(u-x),$$

funktiolla f on pisteessä x differentiaalihajotelma, jossa $a = f'(x)$. $\square$

3 Derivoimissääntöjä

Olemme jakaneet derivoimissäännöt algebrallisten ja transkendenttisten funktioiden derivoimissääntöihin. Tätä jakoa on käytetty usein myös lukion oppikirjoissa eri aikoina. Algebralliset ja transkendenttiset funktiot muodostavat yhdessä alkeisfuktioiden joukon.

3.1 Algebrallisten funktioiden derivoimissääntöjä

Algebralliset funktiot voidaan esittää algebrallisten laskutoimitusten, joita ovat rationaaliset laskutoimitukset $+, -, *, /$ sekä juuren otto (potenssi $\in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$), avulla. Algebralliset funktiot koostuvat polynomi-, rationaali- ja irrationaalifunktioista.

3.1.1 Vakiofunktion derivaatta

Lause 3. *Jos $f(x) = C$, kun C on vakio, niin f on kaikkialla derivoituva ja $f'(x) = 0$.*

Todistus. Derivaatan määritelmän mukaan

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

□

3.1.2 Identtisen funktion derivaatta

Lause 4. *Jos $f(x) = x$, niin f on kaikkialla derivoituva ja $f'(x) = 1$.*

Todistus. Derivaatan määritelmän nojalla

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

□

3.1.3 Potenssifunktion derivaatta

Lause 5. *Jos $f(x) = x^n$, niin $f'(x) = nx^{n-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Erotusosamäärä on

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Merkitsemme $x + \Delta x = x_1$, joten $\Delta x = x_1 - x$. Tällöin

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

Kun jaamme osoittajan tekijöihin, saamme

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{(x_1 - x)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x_1 x^{n-2} + x^{n-1})}{x_1 - x} \\ &= x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x_1 x^{n-2} + x^{n-1}.\end{aligned}$$

Kun nyt $\Delta x \to 0$, niin $x_1 \to x$, joten kukin suluissa olevan polynomin jäsen $\to x^{n-1}$. Koska polynomissa on n jäsentä, niin se $\to nx^{n-1}$. Siis

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

□

Seuraavaksi esitämme potenssifunktion derivaatalle todistuksen, jossa käytämme apuna differentiaalihajotelmaa.

Todistus. Todistamme lauseen induktiolla.
Jos $n = 1$, niin differentiaalihajotelma on $(x + h) - x = 1 \cdot h + h \cdot 0$, mistä seuraa, että $f'(x) = 1$.
Induktio-oletus:

$$(x + h)^n - x^n = nx^{n-1} + h \cdot g(h),$$

josta seuraa

$$\begin{aligned}
(x + h)^{n+1} - x^{n+1} &= (x + h)(x + h)^n - x^{n+1} \\
&= (x + h)[x^n + nx^{n-1} \cdot h + h \cdot g(h)] - x^{n+1} \\
&= (n + 1)x^n \cdot h + h[(x + h) \cdot g(h) + nx^{n-1}h],
\end{aligned}$$

mistä näkyy, että kun $f(x) = x^{n+1}$, niin $f'(x) = (n + 1)x^n$. Induktiotodistus on siten suoritettu. □

Esimerkki 3.1. Todistamme derivaatan määritelmän perusteella, että $f'(a) = 2a$, kun $f(x) = x^2$ ja $a \in \mathbb{R}$.

Oletamme, että $a \in \mathbb{R}$. Funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärä kohdassa a on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

Sen raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = a + a = 2a.$$

Esimerkki 3.2. Määritämme potenssifunktion $f(x) = x^4$ derivaattafunktion.

Lauseen 5 mukaan $f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$.

3.1.4 Vakiotekijän siirtosääntö

Lause 6. *Olkoon f kaikkialla derivoituva. Tällöin $(Cf)'(x) = Cf'(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Derivaatan määritelmän mukaan

$$(Cf)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(Cf)(x + h) - (Cf)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{Cf(x + h) - Cf(x)}{h}.$$

Raja-arvon laskusääntöjen perusteella vakio voidaan sirtää raja-arvon eteen. Täten

$$(Cf)'(x) = C \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = Cf'(x).$$

□

3.1.5 Summan derivaatta

Lause 7. *Jos funktioilla f ja g on derivaatat kohdassa x, niin funktiolla $f+g$ on kohdassa x derivaatta*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Todistus. Funktion erotusosamääräksi saadaan

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.\end{aligned}$$

Derivaatan määritelmän mukaan

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \qquad \text{ja} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x).$$

Täten

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Siis $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. $\square$

Esimerkki 3.3. Määritämme polynomifunktion $f(x) = 3x^5 + 7x + 22$ derivaatan kohdassa $x = 3$.

Lauseen 7 mukaan

$$f'(x) = D3x^5 + D7x + D22.$$

Edelleen lauseiden 3 ja 6 perusteella

$$f'(x) = 3Dx^5 + 7Dx + 0.$$

Tämän saamme käyttämällä lauseita 4 ja 5 muotoon

$$f'(x) = 3\cdot 5x^4 + 7\cdot 1 = 15x^4 + 7.$$

Täten $f'(3) = 15\cdot 3^4 + 7 = 1222$.

3.1.6 Tulon derivaatta

Lause 8. *Jos funktioilla f ja g on derivaatat kohdassa x, niin funktiolla fg on kohdassa x derivaatta*

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Todistus. Merkitään $\Delta f = f(x+h) - f(x), \Delta g = g(x+h) - g(x)$. Tällöin erotusosamääräksi saadaan

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{(f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x)}{h} \\ &= f(x)\frac{\Delta g}{h} + g(x)\frac{\Delta f}{h} + \Delta f \frac{\Delta g}{h}.\end{aligned}$$

Koska f on lauseen 1 mukaan jatkuva kohdassa x, niin $\lim_{h\to 0} \Delta f = 0$. Nyt raja-arvon laskusääntöjen ja derivaatan määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}f(x)\frac{\Delta g}{h} + g(x)\frac{\Delta f}{h} + \Delta f \frac{\Delta g}{h} &\to f(x)g'(x) + g(x)f'(x) + 0 \cdot g'(x) \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x), \quad \text{kun} \quad h \to 0.\end{aligned}$$

Täten $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$. □

Esimerkki 3.4. Derivoimme kahdella tavalla funktion

$$h(x) = (ax+b)(cx+d),$$

missä a, b, c ja d ovat vakioita.

Merkitsemme aluksi, että

$$f(x) = ax + b \quad \text{ja} \quad g(x) = cx + d.$$

Tällöin $h(x) = f(x)g(x)$.

Ensiksi derivoimme funktion h käyttämättä lausetta 8. Aloitamme aukaisemalla sulut, jolloin

$$h(x) = acx^2 + bcx + adx + bd.$$

Lauseiden 3, 4, 5 ja 6 perusteella

$$h'(x) = 2acx + bc + ad.$$

Derivoimme seuraavaksi funktion h hyödyntäen lausetta 8. Sen nojalla

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = (ax+b)c + (cx+d)a = 2acx + bc + ad.$$

3.1.7 Osamäärän derivaatta

Lause 9. *Jos funktiolla g on derivaatta kohdassa x ja $g(x) \neq 0$, niin funktiolla $F = \frac{1}{g}$, jolle $F(x) = \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$, on kohdassa x derivaatta*

$$F'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Todistus. Erotusosamääräksi saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \frac{\frac{g(x+h)g(x)}{g(x+h)}-\frac{g(x+h)g(x)}{g(x)}}{g(x+h)g(x)h} \\
&= -\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}.
\end{aligned}$$

Lauseen 1 mukaan funktio g on jatkuva kohdassa x, joten

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x).$$

Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= -\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)} \\
&= -g'(x)\cdot\frac{1}{(g(x))^2} \\
&= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.
\end{aligned}$$

Täten

$$F'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

□

Lause 10. *Jos funktioilla f ja g on derivaatat kohdassa x, missä $g(x)\neq 0$, niin funktiolla $F=\frac{f}{g}$ on kohdassa x derivaatta*

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Todistus. Kun kirjoitamme $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$, on lauseiden 8 ja 9 perusteella

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(x) + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}.
\end{aligned}$$

□

Joissakin lukion oppikirjoissa osamäärän derivoimissääntö on johdettu virheellisesti. Tässä esitämme todistuksen, joka muuten etenee johdonmukaisesti, mutta mistä voimme tietää, että $h'(x)$ on olemassa?

Todistus. Olkoon $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, jolloin $f(x) = h(x)g(x)$.
Tulon derivoimissäännön mukaan $f'(x) = h'(x)g(x) + g'(x)h(x)$, joten

$$h'(x) = \frac{f'(x) - g'(x)h(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) - g'(x)\frac{f(x)}{g(x)}}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Siis

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

□

Esimerkki 3.5. Määritämme funktion

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

kuvaajan kohtaan $x = \frac{1}{2}$ piirretyn tangentin kulmakertoimen.

Lauseen 10 perusteella

$$f'(x) = \frac{D(2x+1) \cdot x - Dx \cdot (2x+1)}{x^2}.$$

Edelleen käyttämällä lauseita 3, 4, 6 ja 7 saamme

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x - 1 \cdot (2x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{kun } x \neq 0.$$

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = \frac{1}{2}$ on

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4.$$

3.1.8 Yhdistetyn funktion derivaatta

Merkitsemme, että $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Lause 11. *Olkoon funktio f määritelty kohdan x ympäristössä $W(x)$ ja derivoituva kohdassa x. Edelleen olkoon funktio g määritelty kohdan $y = f(x)$ ympäristössä $V(y)$ ja derivoituva kohdassa y. Tällöin yhdistetty funktio $g \circ f$ on derivoituva kohdassa x ja*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Todistus [28, s. 168]. Todistamme lauseen osoittamalla, että

$$\lim_{t \to x} \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{t - x} = g'(f(x))f'(x).$$

Aloitamme määrittelemällä apufunktion

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x))}{y-f(x)}, & \text{kun } y \neq f(x), \\ g'(f(x)), & \text{kun } y = f(x). \end{cases}$$

Funktio G on jatkuva kohdassa $f(x)$, koska

$$\lim_{y \to f(x)} G(y) = \lim_{y \to f(x)} \frac{g(y) - g(f(x))}{y - f(x)} = g'(f(x)) = G(f(x)).$$

Kun $t \neq x$, niin

$$\frac{g(f(t)) - g(f(x))}{t - x} = G(f(t)) \left[\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right]. \tag{2}$$

Huomaamme, että jos $f(t) = f(x)$, niin molemmat puolet saavat arvon 0. Jos $f(t) \neq f(x)$, niin

$$G(f(t)) = \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{f(t) - f(x)}.$$

Koska $f(x)$ on derivoituva kohdassa x, niin se on lauseen 1 perusteella myös jatkuva kohdassa x. Myös G on jatkuva kohdassa $f(x)$ ja siten $G \circ f$ on jatkuva kohdassa x. Siis funktion G määritelmän mukaan

$$\lim_{t \to f(x)} G(f(t)) = G(f(x)) = g'(f(x)).$$

Yhdistämällä tämän yhtälön (2) kanssa saamme

$$\lim_{t \to x} \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{t - x} = g'(f(x))f'(x).$$

$\square$

Todistamme seuraavaksi yhdistetyn funktion derivointisäännön käyttäen differentiaalihajotelmaa.

Todistus. (Vrt. [21, s. 114-115].) Koska f on derivoituva kohdassa x, se on siinä jatkuva lauseen 1 perusteella. On siis olemassa pisteen x sellainen ympäristö $U(x)$, että $U(x) \subseteq W(x)$ ja $f(U(x)) \subseteq V(y)$, joten yhdistetty funktio $g \circ f$ on määritelty tässä ympäristössä. Olkoon $u \in U(x)$ ja $v = f(u) \in V(y)$. Koska g on derivoituva kohdassa y, niin lauseen 2 perusteella on olemassa differentiaalihajotelma

$$g(v) - g(y) = g'(y)(v - y) + \epsilon(v)(v - y),$$

missä $\lim_{v \to y} \epsilon(v) = 0$. Lauseke

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u) - (g \circ f)(x) &= g(f(u)) - g(f(x)) = g(v) - g(y) \\ &= g'(y)(v - y) + \epsilon(v)(v - y).\end{aligned}$$

Erotusosamäärä

$$\begin{aligned}\frac{(g \circ f)(u) - (g \circ f)(x)}{u - x} &= g'(y)\frac{v - y}{u - x} + \frac{v - y}{u - x}\epsilon(v) \\ &= g'(f(x))\frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \frac{f(u) - f(x)}{u - x}\epsilon(v).\end{aligned}$$

Kun $u \to x$, $v - y = f(u) - f(x) \to 0$ ja myös $\epsilon(v) \to 0$. Erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{u \to x} \frac{(g \circ f)(u) - (g \circ f)(x)}{u - x} = g'(f(x))f'(x).$$

□

Joissakin lähteissä on esitetty seuraava paljon lyhempi todistus yhdistetyn funktion derivaatalle. Se on kuitenkin virheellinen, koska nimittäjä $f(x+h) - f(x)$ voi olla nolla. Virhe voidaan kuitenkin korjata tekemällä lisäoletus, että eräässä muuttujan x ympäristössä on $u \neq x \Rightarrow f(u) \neq f(x)$. Todistus on hoidettu tällä tavalla joissakin lukion oppikirjoissa (esim. [24], s.174).

Todistus. Funktion $g \circ f$ erotusosamääräksi saamme

$$\frac{(g \circ f)(x + h) - (g \circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h}.$$

Kun lavennamme tämän lausekkeella $f(x + h) - f(x)$, saamme

$$\frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{f(x + h) - f(x)} \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Merkitsemme sitten, että $y = f(x)$ ja $y + k = f(x + h)$. Funktio f on jatkuva, joten kun $h \to 0$, myös $k \to 0$. Siis

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y + k) - g(y)}{k} \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

□

Yhdistetyn funktion derivaattaa hyödyntämällä voimme laajentaa potenssifunktion derivaatan koskemaan myös rationaalipotenssin derivaattaa.

Lause 12. *Funktio $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$, on derivoituva. Derivaatta*

$$f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Todistus. Potenssin laskusääntöjen perusteella

$$f(x)^n = (x^{\frac{m}{n}})^n = x^{\frac{m}{n} \cdot n} = x^m,$$

joten $Df(x)^n = Dx^m$. Siis lauseiden 5 ja 11 perusteella

$$nf(x)^{n-1} f'(x) = mx^{m-1}.$$

Täten

$$f'(x) = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{f(x)^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1} f(x)}{f(x)^n} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1} x^{\frac{m}{n}}}{x^m} = \frac{m}{n} \frac{x^{\frac{m}{n}}}{x} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

$\square$

Esimerkki 3.6. Määritämme funktion

$$f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

derivaattafunktion ja tutkimme, millä muuttujan x arvoilla se on määritelty.

Lauseiden 11 ja 12 perusteella

$$f'(x) = D(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot D(x^2 - 1).$$

Käyttämällä lauseita 5 ja 7 saamme

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Saatu derivaattafunktio on määritelty, kun $x^2 - 1 > 0$ eli, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

3.1.9 Käänteisfunktion derivaatta

Lause 13. *Olkoon funktio f jatkuva ja aidosti kasvava välillä $[a, b]$. Tällöin funktiolla f on olemassa käänteisfunktio f^{-1}, joka on määritelty välillä $[f(a), f(b)]$. Käänteisfunktio f^{-1} on jatkuva ja aidosti kasvava välillä $[f(a), f(b)]$. Vastaavasti, jos f on jatkuva ja aidosti vähenevä.*

Todistus. (Vrt. [28, A-11].) Oletuksen mukaan funktio f on aidosti kasvava välillä $[a, b]$, joten se on aidosti monotoninen tällä välillä ja siten myös injektio. Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen (ks. esim. [3, s. 59-60]) perusteella f on myös surjektio. Koska f on sekä injektio että surjektio, se on myös bijektio. Jatkuvuuden perusteella f saa kaikki arvot väliltä $[f(a), f(b)]$. On siis olemassa välillä $[f(a), f(b)]$ määritelty käänteisfunktio f^{-1}.

Todistamme, että f^{-1} on aidosti kasvava. Toisin sanoen

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Oletamme, että $y_1 < y_2$. Teemme vastaoletuksen $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Oletuksen mukaan f on aidosti kasvava, joten $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$. Tästä seuraa $y_1 \geq y_2$, mikä on ristiriita. Siis vastaoletus on väärä ja f^{-1} on aidosti kasvava.

Seuraavaksi todistamme, että käänteisfunktio f^{-1} on jatkuva kohdassa $x = c$, missä $a < c < b$. Jos $c = a$ tai $c = b$, niin menettelemme vastaavasti tarkastelemalla toispuolisia raja-arvoja. Jatkuvuuden määritelmän perusteella

$$\lim_{x \to c} f^{-1}(x) = f^{-1}(c).$$

Silloin jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| f^{-1}(x) - f^{-1}(c) \right| < \epsilon.$$

Valitsemme $\epsilon > 0$. Oletamme, että ϵ on niin pieni, että

$$a < f^{-1}(c) - \epsilon < f^{-1}(c) < f^{-1}(c) + \epsilon < b.$$

Valitsemme $\delta = \min\{c - f(f^{-1}(c) - \epsilon), f(f^{-1}(c) + \epsilon) - c\}$. Oletamme, että $|x - c| < \delta$. Tällöin $f(f^{-1}(c) - \epsilon) < x < f(f^{-1}(c) + \epsilon)$. Koska f^{-1} on aidosti kasvava, niin

$$f^{-1}(f(f^{-1}(c) - \epsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(f^{-1}(c) + \epsilon)).$$

Siis

$$f^{-1}(c) - \epsilon < f^{-1}(x) < f^{-1}(c) + \epsilon,$$

josta saamme

$$\left| f^{-1}(x) - f^{-1}(c) \right| < \epsilon.$$

Tapaus, jossa f on jatkuva ja aidosti vähenevä, todistetaan vastaavasti. □

Lauseessa 13 käänteisfunktion olemassaoloa, jatkuvuutta ja aitoa kasvavuutta/vähenevyyttä koskeva osa on voimassa muillekin väleille kuin suljetuille (ks. esim. [21, s. 93-94]).

Seuraavassa lauseessa emme oleta, että väli I olisi avoinväli, toisin kuin lähteessämme [28, A-11 - A-12]. Jos päätepiste olisi mukana, niin tarkasteltaisiin vastaavia toispuoleisia derivaattoja.

Lause 14. *Olkoon funktio f bijektio ja derivoituva välillä I. Olkoon a välin I piste ja $f(a) = b$. Jos $f'(a) \neq 0$, niin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva kohdassa b ja*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Todistus [28, A-11 - A-12]. Valitsemme luvun $\epsilon > 0$ ja osoitamme, että on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t - b} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \epsilon.$$

Koska f on derivoituva kohdassa a, niin on olemassa sellainen luku $\delta_1 > 0$, että

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \epsilon.$$

Tästä seuraa

$$\left| \frac{x - a}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \epsilon.$$

Lauseen 13 perusteella f^{-1} on jatkuva kohdassa b. Siis on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow \left| f^{-1}(t) - f^{-1}(b) \right| = |x - a| < \delta_1,$$

ja edelleen

$$\left| \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t - b} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \epsilon.$$

$\square$

Lauseessa 14 voitaisiin olettaa vain, että f on määritelty, sillä on derivaatta pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$, ja että f^{-1} on olemassa pisteen $y = f(x)$ eräässä ympäristössä sekä on jatkuva pisteessä y (ks. esim. [21, s. 116-117]).

Esimerkki 3.7. Olkoon funktio $f(x) = \frac{3}{2}x^2+1$ määritelty silloin, kun $x > 0$. Osoitamme aluksi, että funktiolla f on käänteisfunktio. Osoitamme funktion f bijektioksi ekvivalenssiketjulla

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{3}{2}x_1^2 + 1 = \frac{3}{2}x_2^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{3}{2}x_1^2 = \frac{3}{2}x_2^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1^2 = x_2^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1 = x_2 \quad (x_1, x_2 > 0). \end{aligned}$$

Määritämme nyt derivaatan $(f^{-1})'(7)$ kahdella eri tavalla. Ensiksi käytämme lausetta 14. Tarvitsemme tätä varten arvon $x = (f^{-1})'(7)$. Saamme

$$\begin{aligned} & f(x) = 7 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{3}{2}x^2 + 1 = 7 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{3}{2}x^2 = 6 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 2 \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Lauseiden 5, 6 ja 7 nojalla $f'(x) = 3x$, joten $f'(2) = 3 \cdot 2 = 6$. Tällöin lauseen 14 perusteella

$$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{6}.$$

Toiseksi emme käytä lausetta 14. Muodostamme käänteisfunktion f^{-1} ratkaisemalla yhtälöstä $y = \frac{3}{2}x^2 + 1$ muuttujan x. Siis

$$\begin{aligned} & y = \frac{3}{2}x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{2}{3}y = x^2 + \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow\quad & x = \sqrt{\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Täten $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}}$, $y > 1$. Vaihtamalla muuttajan y tilalle muuttujan x, saamme $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}$, $x > 1$. Derivoimalla tämän käyttäen lauseita 3, 4, 5, 6, 7 ja 11 saamme

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= D\sqrt{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}} \\
&= D\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot D\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}}.
\end{aligned}
$$

Tällöin

$$
(f^{-1})'(7) = \frac{1}{3\sqrt{\frac{2}{3} \cdot 7 - \frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt{\frac{14}{3} - \frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt{\frac{12}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt{4}} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}.
$$

3.2 Transkendenttisten funktioiden derivoimissääntöjä

Transkendenttisia funktioita ovat trigonometriset funktiot ja niiden käänteisfunktiot eli niin sanotut arcusfunktiot, eksponentti- ja logaritmifunktiot sekä hyperboliset funktiot ja niiden käänteisfunktiot eli niin sanotut areafunktiot. Viimeisimpänä mainitut voidaan kuitenkin esittää eksponentti- ja logaritmifunktioiden avulla. Seuraavassa esitämme derivaattafunktiot osalle transkendenttisista funktioista.

3.2.1 Potenssisarjoista

Esitämme tässä kappaleessa joitakin potenssisarjojen perusominaisuuksia. Tarvitsemme näitä tietoja seuraavassa kappaleessa, jossa käsittelemme trigonometristen funktioiden derivaattoja.

Määritelmä 3.1. Sarja, jonka yleinen muoto on

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{3}
$$

missä luvut $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ovat sarjan *kertoimia* ja x_0 kiinteä x:n arvo, on *potenssisarja.*

Määritelmä 3.2. Olkoon S niiden pisteiden x joukko, joilla potenssisarja (3) suppenee. Tämän sarjan *suppenemissäde* on

$$r = \sup_{x \in S} |x - x_0|.$$

Jos $0 < r \leq \infty$, niin joukkoa $]x_0 - r, x_0 + r[$ sanotaan sarjan (3) *suppenemisväliksi.*

Lause 15. *Jos $r = 0$, sarja (3) suppenee vain arvolla x_0. Jos $r = \infty$, sarja (3) suppenee kaikkialla. Jos $0 < r < \infty$, sarja (3) suppenee arvoilla $|x - x_0| < r$ ja hajaantuu arvoilla $|x - x_0| > r$.*

Todistus. Ks. [22, s. 74]. □

Lause 16 (Suppenemissäteen suhdekaava)**.** *Jos potenssisarjan (3) kaikki kertoimet eroavat nollasta ja jos raja-arvo*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r$$

on olemassa, niin se on sarjan (3) suppenemissäde.

Todistus. Ks. [22, s. 75-76]. □

Lause 17. *Potenssisarjan summa on suppenemisvälillä jatkuva funktio.*

Todistus. Ks. [22, s. 79]. □

Lause 18. *Olkoon potenssisarjan*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

suppenemissäde $r > 0$. Tämän sarjan suppenemisvälillä $I =]x_0 - r, x_0 + r[$ määritelty funktio

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on derivoituva ja

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

kaikilla $x \in I$.

Todistus. Ks. [3, s. 90-91]. □

3.2.2 Trigonometriset funktiot ja niiden derivaatat

Joukossa $\mathbb{R}$ määritellään sinifunktio

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

ja kosinifunktio

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots .$$

Tarkastelemme sini- ja kosinifunktioiden sarjojen suppenemista suhdekaavalla. Sinifunktiolle suppenemissäde

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}}{\frac{(-1)^{m+1}}{((2m+1)+1)!}}\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\cdot\frac{(2m+2)!}{(-1)^{m+1}}\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(-1)^m}{(-1)^{m+1}}\cdot\frac{(2m+2)!}{(2m+1)!}\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}\left|(-1)^{m-(m+1)}\right|\left|\frac{(2m+1)!(2m+2)}{(2m+1)!}\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}\left|(-1)^{-1}\right|\left|2m+2\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}(2m+2) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Vastaavasti kosinifunktion suppenemissäde

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^m}{(2m)!}}{\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}}\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(-1)^m}{(2m)!}\cdot\frac{(2m+1)!}{(-1)^{m+1}}\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(-1)^m}{(-1)^{m+1}}\cdot\frac{(2m+1)!}{(2m)!}\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}\left|(-1)^{m-(m+1)}\right|\left|\frac{(2m)!(2m+1)}{(2m)!}\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}\left|(-1)^{-1}\right|\left|2m+1\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty}(2m+1) \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Siis lauseen 15 perusteella sini- ja kosinifunktioiden sarjat suppenevat kaikkialla. Lisäksi lauseiden 17 ja 18 perusteella sini ja kosini ovat jatkuvia ja niillä on derivaatat.

Lause 19. *Funktio $f(x) = \sin x$ on kaikkialla derivoituva ja $f'(x) = \cos x$.*

Todistus. Derivaattafunktio

$$f'(x) = D\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right).$$

Derivoidaan summa termeittäin. Tällöin

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}(2m+1)x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \cos x.$$

□

Lause 20. *Funktio $f(x) = \cos x$ on derivoituva ja $f'(x) = -\sin x$.*

Todistus. Derivaattafunktio

$$f'(x) = D\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}\right).$$

Derivoidaan summa termeittäin. Tällöin

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{2m}{(2m)!}x^{2m-1} = -\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \\
&= -\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1+1-1}}{(2m-1+1-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x.
\end{aligned}
$$

□

Sinin ja kosinin sarjoista voidaan johtaa kaikki sinin ja kosinin ominaisuudet. Esitämme tässä viisi perusominaisuutta, joista tyydymme todistamaan vain kohdan (iii). Sini- ja kosinifunktioilla on seuraavat perusominaisuudet ([22, s. 134-135]):

(i) $\sin x$ ja $\cos x$ ovat määriteltyjä joukossa $\mathbb{R}$.

(ii) $\sin 0 = 0$ ja $\cos 0 = 1$.

(iii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Kaikilla arvopareilla (x, y) ovat voimassa yhteenlaskukaavat

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \text{ ja } \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

(v) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Todistamme nyt kohdan (iii). Olkoon $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$. Käyttäen lausetta 11 saamme

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot D \sin x + 2 \cos x \cdot D \cos x.$$

Edelleen lauseiden 19 ja 20 perusteella

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x \sin x = 0.$$

Lauseen 3 mukaan $f(x)$ on vakiofunktio. Selvitämme vakiofunktion arvon sijoittamalla $x = 0$. Perusominaisuuden (ii) perusteella

$$f(0) = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 0 + 1 = 1.$$

Siis $f(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 3.3. ([3, s. 68] ja [21, s. 160-161].) Luku π on kaksi kertaa yhtälön $\cos x = 0$ pienin positiivinen juuri.

Esimerkki 3.8. Määritämme funktion $g(x) = \cos 5x + \sin^2 x$ derivaattafunktion arvon kohdassa $x = \frac{\pi}{2}$.

Lauseen 7 perusteella $g'(x) = D \cos 5x + D \sin^2 x$. Edelleen käyttämällä lauseita 11, 19 ja 20 saamme, että

$$g'(x) = -\sin 5x \cdot 5 + D(\sin x)^2 = -5 \sin 5x + 2 \sin x \cdot \cos x.$$

Koska $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ (ks. esim. [3, s. 68-69]), on

$$g'(x) = -5 \sin 5x + \sin 2x.$$

Sijoitamme saatuun derivaattafunktioon muuttujan arvoksi $\frac{\pi}{2}$, jolloin

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5 \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = -5 \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \sin \pi.$$

Sinifunktion jakso on 2π (ks. esim. [3, s. 69] tai [21, s. 162-163]), joten $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ja $\sin \pi = 0$. Siis

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5 \cdot 1 + 0 = -5.$$

Esimerkki 3.9. Derivoimme funktion $f(x) = \sin(4x+2) + x^5 \cos x$.

Lauseen 7 perusteella $f'(x) = D\sin(4x+2) + D(x^5 \cos x)$. Edelleen käyttämällä lauseita 8 ja 11 saamme, että

$$f'(x) = D\sin(4x+2) \cdot D(4x+2) + Dx^5 \cdot \cos x + D\cos x \cdot x^5.$$

Lauseiden 5, 6, 7, 19 ja 20 nojalla

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(4x+2) \cdot 4 + 5x^4 \cos x + (-\sin x)x^5 \\ &= 4\cos(4x+2) + 5x^4 \cos x - x^5 \sin x. \end{aligned}$$

Lause 21. *Olkoon $f(x) = \tan x$. Tällöin*

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Todistus. Olkoon $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Koska

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

niin osamäärän derivoimissäännön avulla saamme, että

$$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Edelleen perusominaisuuden (iii) perusteella

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

ja toisaalta

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

□

Johdamme sinin ja kosinin puolen kulman kaavat, joita tarvitsemme seuraavassa esimerkissä. Perusominaisuuden (iv) perusteella

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Edelleen perusominaisuuden (iii) mukaan

$$\begin{aligned}
& \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \\
\Leftrightarrow\quad & \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\frac{y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos y}{2}}.
\end{aligned}$$

Toisaalta perusominaisuuden (iii) nojalla myös

$$\begin{aligned}
& \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \\
\Leftrightarrow\quad & 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \\
\Leftrightarrow\quad & \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \\
\Leftrightarrow\quad & \sin\frac{y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos y}{2}}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.10. Määritämme funktion

$$f(x) = 2\tan x - \tan^2 x$$

deriavaatan nollakohdat.

Aloitamme määrittämällä funktion f derivaattafunktion. Käyttämällä lauseita 6, 11 ja 21 saamme

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2(1+\tan^2 x) - 2\tan x(1+\tan^2 x) \\
&= 2(1+\tan^2 x)(1-\tan x).
\end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat saamme ratkaisemalla yhtälön

$$2(1+\tan^2 x)(1-\tan x) = 0.$$

Tiedämme, että $(1+\tan^2 x) > 0$. Käyttämällä tulon nollasääntöä saamme yhtälön muotoon

$$\begin{aligned}
& 1 - \tan x = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \tan x = 1.
\end{aligned}$$

Määritelmän 3.3 perusteella $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Hyödyntäen edellä johdettuja sinin ja kosinin puolen kulman kaavoja saamme

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ja

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Täten

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1.$$

Siis $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, joten

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan\frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{\pi}{4} + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Funktio f on määritelty, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ ja $n \in \mathbb{Z}$. Koska tangentin jakso on π (ks. esim. [21, s. 163]), riittää tutkia esimerkiksi väliä $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Käyttämällä hyväksi tietoa $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ saamme lopulta $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$, jotka ovat funktion f derivaatan nollakohdat.

3.2.3 Eksponenttifunktio ja sen derivaatta

Joukossa $\mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktio

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots .$$

Tutkimme tämän sarjan suppemista suhdekaavalla. Suppenemissäde

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{1} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!(n+1)}{n!} \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} |n+1| \\
&= \lim_{n\to\infty} (n+1) \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Siis lauseen 15 perusteella eksponenttifunktion potenssisarja suppenee kaikkialla. Lisäksi lauseiden 17 ja 18 perusteella eksponenttifunktio on jatkuva ja sillä on derivaatta.

Eksponenttifunktiolle on voimassa yhteenlaskukaava $e^{x+y} = e^x e^y$ (ks. esim. [3, s. 65-66]). Sen avulla voidaan osoittaa, että eksponenttifunktio on kaikkialla positiivinen (ks. esim. [3, s. 66]).

Lause 22. *Funktio $f(x) = e^x$ on derivoituva ja $f'(x) = e^x$.*

Todistus. Derivaattafunktio

$$f'(x) = D\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right).$$

Derivoidaan termeittäin, jolloin

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad \text{kun } k = n-1.$$

□

Siis eksponenttifunktio on aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio.

3.2.4 Logaritmifunktio ja sen derivaatta

Logaritmifunktio $f(x) = \ln x$ on eksponenttifunktion käänteisfunktio.

Lause 23. *Olkoon $f(x) = \ln x, x > 0$. Tällöin $f'(x) = \frac{1}{x}$.*

Todistus. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = e^x$ ja $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \ln y$, missä $y = f(x)$. Tällöin käänteisfunktion derivoimissäännön perusteella

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Täten myös $f'(x) = \frac{1}{x}$. □

Esimerkki 3.11. Määritämme funktion

$$f(x) = x^x, \quad x > 0,$$

derivaattafunktion nollakohdat.

Olkoon $x > 0$. Koska $e^{\ln x} = x$, kun $x > 0$, on

$$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}.$$

Derivoimme tämän funktion käyttämällä ensin lausetta 11, jolloin saamme

$$f'(x) = De^{x \ln x} \cdot D(x \ln x).$$

Lauseiden 8 ja 22 nojalla

$$f'(x) = e^{x \ln x}(Dx \cdot \ln x + D \ln x \cdot x).$$

Hyödyntämällä lauseita 4 ja 23 saamme

$$f'(x) = x^x(1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x) = x^x(\ln x + 1).$$

Määritämme nyt saadun derivaattafunktion nollakohdat. Silloin

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) = 0.$$

Koska funktio f on määritelty, kun $x > 0$, niin $x^x > 0$, sillä tällöin $e^{x \ln x} > 0$. Käytämme tulon nollasääntöä, jolloin

$$\begin{aligned} & x^x(\ln x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \ln x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \ln x = -1. \end{aligned}$$

Logaritmin määritelmän perusteella $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

3.2.5 Yleinen eksponenttifunktio ja sen derivaatta

Määritellään, että $a^x = e^{x \ln a}$. Kaikki potenssin laskusäännöt säilyvät.

Lause 24. *Olkoon* $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$. *Tällöin* $f'(x) = a^x \ln a$.

Todistus. Eksponenttifunktion ominaisuuksia ja yhdistetyn funktion derivoimissääntöä apuna käyttäen saamme

$$Da^x = D(e^{\ln a})^x = De^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

□

Osa II

Differentiaalilaskenta kouluopetuksessa

Tutkielmamme toisessa osassa keskitymme differentiaalilaskennan opettamisen tutkimiseen.

4 Tutkimuskysymykset

Haluamme selvittää, mitä lukion differentiaalilaskentaan on kuulunut eri aikoina. Aineistolähtöisen tutkimuksemme kohteina ovat opetussuunnitelman perusteet, lukion pitkän matematiikan oppikirjat sekä differentiaalilaskennan ylioppilastehtävät. Tutkimme, mitä opetettavia asioita differentiaalilaskennasta on eri aikoina sisällytetty lukion oppikirjoihin ja missä järjestyksessä asioita on esitetty. Lisäksi olemme kiinnostuneita siitä, miten asioita ollaan esitetty oppikirjoissa. Kuinka oppikirjat huomioivat kirjan käyttäjän, opiskelijan, ja millaisia motivoinnin keinoja oppikirjoissa on käytetty?

Selvitämme tutkimuksessamme myös oppikirjojen tehtävätyyppejä: minkälaiset tehtävät ovat säilyneet oppikirjasta toiseen ja minkälaiset differentiaalilaskennan tehtävätyypit eivät ole vakiinnuttaneet asemaansa lukion matematiikan oppikirjoissa. Myös tehtävien käytännönläheisyys sekä merkitys ja sovellettavuus arkielämässä ovat tutkimuksemme kohteina. Mielenkiintoista on myös tarkastella, miten eri tekijöiden kirjat eroavat toisistaan. Poikkeavatko ne esimerkiksi asiasisällöllisesti toisistaan ja esitetäänkö asiat niissä mahdollisesti eri järjestyksessä.

Lukiossa opittuja asioita punnitaan lopulta ylioppilaskirjoituksissa, joten on luonnollista ottaa tässä tutkimuksessa huomioon myös ylioppilastehtävät. Selvitämme, miten ylioppilastehtävien eri tehtävätyypit ovat muuttuneet differentiaalilaskennan osalta 1940-luvulta tähän päivään. Näkyvätkö ylioppilastehtävissä eri oppikirjoissa esiintyvät tehtävätyypit? Tutkimme myös, miten oppikirjat ja ylioppilastehtävät ovat eri aikoina olleet sidoksissa keskenään.

Keskeisimmät tutkimuskysymyksemme ovat siis:

1)Mitä lukion pitkän matematiikan differentiaalilaskenta on sisältänyt eri vuosikymmeninä?

2)Miten oppikirjojen opetustavat ovat muuttuneet näinä vuosikymmeninä?

5 Tutkimustulokset

5.1 Taustaa

Koulujärjestelmän organisaatio on muuttunut aikojen saatossa, joten selvitämme aluksi sen joitakin keskeisimpiä muutoksia. 1990-luvun alkuun asti kouluhallitus vastasi perus- ja lukio-opetuksen kehittämisestä. Kouluhallituksen tehtävänä oli myös tarkastaa kaikki oppikirjat ennen niiden julkaisua. Tästä on kuitenkin luovuttu vuonna 1992. Vuonna 1991 perustettiin opetushallitus, kun silloiset kouluhallitus ja ammattikasvatushallitus yhdistettiin. Opetushallitus on elin, joka muotoilee ja vahvistaa kulloisetkin valtakunnalliset opetussuunnitelmien perusteet. Nämä asiakirjat on aiemmin tunnettu nimellä oppiennätykset.

1970-luvulta lähtien on noudatettu nykyisen kaltaista peruskoulujärjestelmää, jossa opiskellaan ensin alakoulun puolella kuusi vuotta ja sitten yläkoulun puolella kolme vuotta. Tämän jälkeen oppivelvollisuus on suoritettu, ja opiskelijalla on mahdollisuus jatkaa opintoja joko lukiossa tai muussa toisen asteen oppilaitoksessa. Ennen peruskoulujärjestelmää oppivelvollisuus suoritettiin kansakoulussa, joka oli alunperin kuusivuotinen. Viimeiset kaksi vuotta kantoivat kansakoulun jatkokurssin nimeä, ja ne oli mahdollista suorittaa vapaampana opiskeluna. Myöhemmin 1950-luvulla kansakoulua pidennettiin entisestään lisäämällä koulun loppuun kaksi vuotta pakollista jatko-opiskelua, jota kutsuttiin kansalaiskouluksi. Varsinaisen kansakoulun neljännen luokan jälkeen niillä, joilla oli siihen taloudelliset ja kyvylliset edellytykset, oli mahdollisuus pyrkiä oppikouluun. Kokonaisuutena oppikoulu oli kahdeksanvuotinen oppilaitos, joka jakautui viisivuotiseen keskikouluun ja kolmivuotiseen lukioon.

Ennen lukiot olivat yleensä linjajakoisia. Vaihtoehtoina oli tavallisesti kielilinja tai matematiikkalinja. Kummassakin opetettiin kyllä sekä vieraita kieliä että matematiikkaa, mutta tuntimäärät ja painotukset olivat erilaisia. Vuonna 1973 vahvistetussa opetussuunnitelmassa ei puhuta enää eri linjoista, mutta matematiikan opetus on jaettu pitkään ja lyhyeen kurssiin. Keskitymme tässä tutkielmassamme juuri lukion matematiikan pitkään oppimäärään, josta on käytetty vuosien 1981 ja 1985 opetussuunnitelmissa nimeä matematiikan laaja oppimäärä ja vuosien 1994 ja 2003 opetussuunnitelmissa termiä pitkä matematiikka.

5.2 Oppikirjat ja opetussuunnitelmat

Tässä luvussa esitämme tuloksia, joita olemme havainneet tutkiessamme useita lukion pitkän matematiikan oppikirjoja vuodesta 1946 alkaen. Tutkimusmenetelmässämme on piirteitä sisällönanalyysistä. Olemme käyneet läpi oppikirjojen sisältöjä, luokitelleet oppikirjojen aineistoa ja vertailleet eri aikojen oppikirjoja toisiinsa. Olemme tarkastelleet esimerkiksi tehtävien ja esimerkkien määriä ja laatua sekä opetettavia asioita ja niiden järjestystä. Lisäksi esitämme, minkälaisia ohjeita eri aikojen opetussuunnitelmat ovat antaneet kirjojen tekijöille.

5.2.1 Vuonna 1941 vahvistetut oppikoulun oppiennätykset

Vuonna 1941 vahvistettujen oppikoulujen oppiennätysten (ks. liite 1) mukaan vain derivaattakäsite ja sen alkeellinen soveltaminen on kuulunut matematiikan oppisisältöön, mutta varsinainen differentiaalilaskenta ei. Tuolloin matematiikan opiskeltavaan aineistoon kuuluivat aritmetiikan, algebran, geometrian ja trigonometrian osa-alueet. Vuoden 1941 oppiennätys asettaa matematiikan opetukselle hyvin kunnianhimoisia tavoitteita. Sen mukaan opetuksen päämääränä on kehittää oppilaita ajattelemaan johdonmukaisesti ja työskentelemään suunnitelmallisesti ja määrätietoisesti. Oppilaita myös totutetaan käsitteiden täsmälliseen käyttöön sekä selvään, lyhyeen ja kielellisesti hyvään esitystapaan.

Vanhin tutkimamme oppikirja on Kalle Väisälän kirjoittama, vuonna 1946 ilmestynyt *Algebran oppi- ja esimerkkikirja II* [29]. Se on ensimmäinen Suomessa ilmestynyt oppikirja, johon sisältyy differentiaali- ja integraalilaskentaa. Tosin käytössämme on kirjan kolmas painos vuodelta 1956, mutta kirja ei ole differentiaalilaskennan osalta muuttunut ensimmäisestä painoksesta. Väisälän oppikirja on siis differentiaalilaskennan uranuurtaja suomalaisessa kouluhistoriassa ja siinä käsitellään differentiaalilaskentaa huomattavasti laajemmin, mitä vuonna 1941 vahvistettu oppiennätys vaatisi. Alkusanoissaan Väisälä kirjoittaakin, että oppikirjan tarkoitus on edistää ja helpottaa differentiaali- ja integraalilaskennan alkeiden ottamista oppikoulujen matemaattisen linjan ohjelmaan.

Algebran oppi- ja esimerkkikirja II [29] on rakenteeltaan hyvin tiivis. Teoria on esitetty hyvin lyhyesti ja napakasti vain muutamien esimerkkien avulla. Väisälän oppikirjan differentiaalilaskennan osuus sisältää derivaatan määritelmän ja tutuimpien funktioiden derivoimissääntöjen lisäksi funktion kulkuun ja käyrän kuperuuteen liittyviä asioita. Derivaattaa lähestytään geometrisesti sekantin ja tangentin kulmakertoimien avulla. Kirjassa määritellään derivaatta myös erotusosamäärän raja-arvona, vaikka raja-arvon määritelmää ei oleteta lukijalle entuudestaan tutuksi eikä se kuulu Väisälän oppikirjan sisältöön.

Vanhimmissa oppikirjoissa differentiaalilaskenta on jaettu usein selkeästi kahteen osaan: algebrallisten ja transkendenttisten funktioiden käsittelyyn.

Tällainen jako on tehty myös *Algebran oppi- ja esimerkkikirja II*:ssa [29]. Tosin Väisälä kirjoittaa alkusanoissaan, että transkendenttisten funktioiden käsittely on suunnattu lähinnä matematiikkaa harrastaville ja matematiikan tai muita sellaisia jatko-opintoja suunnitteleville.

Seuraavaan asiaan johdattelevia esimerkkejä Väisälän kirjassa on hyvin vähän ja niissä on niukasti välivaiheita. Harjoitustehtävät löytyvät kirjan lopusta. Tehtäviä, joissa pyydetään vain derivoimaan jokin funktio, on melko vähän. Sovellusten painotus näkyy siinä, että oppikirjassa on yksi kappale, joka käsittelee derivaatan merkitystä mekaniikassa. Tässä kappaleessa on soveltavia esimerkkejä derivaatan käytöstä nopeuden ja kiihtyvyyden laskemisessa. Muuten kirjan soveltavissa tehtävissä painottuvat sellaiset tehtävät, joissa etsitään funktiolle tangentti jossakin pisteessä. Tyypillinen tällainen tehtävä on kirjan [29] harjoitustehtävä 725.

Esimerkki 5.1. Määrättävä käyrän $y = \frac{1}{8}x^3$ sen tangentin yhtälö, jonka sivuamispisteen oordinaatta $= \frac{1}{8}$. Tämä tangentti myös leikkaa käyrää. Mikä on leikkauspiste?

5.2.2 Vuonna 1960 vahvistetut oppikoulun oppiennätykset

Kouluhallituksen vuonna 1960 vahvistetut oppikoulun oppiennätykset antavat kirjan tekijöille ja opettajille hyvin tarkkoja metodisia ohjeita (ks. liite 2). Ne esimerkiksi kehottavat uuteen asiaryhmään siirryttäessä esittämään jonkin mielenkiintoisen tehtävän, jonka ratkaisemiseksi uusien asioiden käsittelyä tarvitaan. Tämä näkyy myös 70-luvun alkupuolella julkaistuissa oppikirjoissa. Lisäksi oppiennätyksissä kehotetaan opettajia ja kirjantekijöitä kiinnittämään kertauksiin vakavaa huomiota ja huomioimaan tehtävien valinnassa eritasoiset oppilaat. Vuoden 1960 oppiennätys siis painottaa sitä, että opetuksen tulisi olla entistä oppilaskeskeisempää, ja oppikirjoissa opiskelijat onkin otettu entistä paremmin huomioon.

1960-luvulta alkaen differentiaalilaskenta on kuulunut virallisesti lukion matemaattisen linjan oppiaineistoon. Tuolloin sitä on oppiennätysten mukaan opetettu seitsemännellä luokalla, joka vastaa nykyistä lukion toista luokkaa. Alkuaikoina differentiaalilaskennan oppisisältöön on oppiennätysten mukaan kuulunut raja-arvon käsite, alkeisfunktioiden derivaatat, funktion kulun tutkiminen, tangentin ja normaalin yhtälöt sekä ääriarvot ja käännepisteet.

Kalle Väisälän *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 2* [30] on uudistunut kuudennessa painoksessaan vuonna 1960 uuden oppiennätyksen vaatimusten mukaiseksi. Käytössämme oleva oppikirja on kymmenes painos, mutta sisällöltään kuudennen painoksen kaltainen. Keskeisimpänä muutoksena on, että funktion raja-arvo ja jatkuvuus esitetään ennen derivaattaa. Myös raja-arvon määritelmä mainitaan, mutta kirjoittaja huomauttaa, ettei se kuulu varsinaiseen oppisisältöön. Väisälä kuitenkin painottaa, että matematiikasta enemmän kiinnostuneiden on syytä paneutua huolellisesti myös raja-arvon määritelmään. Näitä lisäyksiä sekä muutaman lauseen mukaantuloa huomioimatta uudistettu painos on esimerkkejä myöten pitkälti edeltäjänsä [29] kaltainen. Myös asioiden esitysjärjestys on säilynyt samana.

1970-luvulla markkinoille alkoi ilmestyä eri kustantajien oppikirjoja. Meidän tarkastelussamme on Kalervo Pekkalan ja Heikki Oinas-Kukkosen vuonna 1970 ilmestyneet oppikirjat *Lukion algebra 2* [26] ja *Lukion algebra 3* [27] sekä Martti Apajalahden, Yrjö Laineen ja Raimo Tanskasen *Lukion matematiikka 1* [1]. Näitä eri tekijöiden kirjoja ei voi verrata aivan suoraan toisiinsa, sillä Pekkalan ja Oinas-Kukkosen kirjat perustuvat aiempaan opetussuunnitelmaan kuin Apajalahden, Laineen ja Tanskasen kirja, joka perustuu kouluhallituksen keväällä 1973 vahvistamaan opetussuunnitelmaan.

Oppiennätykset ohjaavat siis opettamaan differentiaalilaskentaa seitsemännellä luokalla. Oppikirjojen esipuheiden mukaan se on ymmärtääksemme sisällytetty *Lukion algebra 2*:ssa ja *Lukion algebra 3*:ssa kuitenkin vasta kahdeksannella luokalla opetettaviin asioihin. On varsin ihmeellistä, että kouluhallituksen hyväksymissä kirjoissa voisi olla näin suuri ero oppiennätyksiin.

Pekkalan ja Oinas-Kukkosen kirjoissa teoriaosuus on huomattavasti aikaisempia oppikirjoja kattavampi ja perusteellisempi. Esimerkiksi raja-arvoa ja jatkuvuutta käsitellään hyvin laajasti. Raja-arvon määritelmä esitetään täsmällisesti, ja kirjan tekijät kirjoittavat esipuheessaan [26], että funktion raja-arvot ja jatkuvuus on syytä lukea niin huolellisesti, että oppilaat saavat riittävät valmiudet niiden käsittelyyn. Myös raja-arvon määritelmä esitetään täsmällisesti, ja se kuuluu aikaisemmista oppikirjoista poiketen opiskeltavaan oppiainekseen. Differentiaalilaskennan sisältö on muutenkin lisääntynyt. Esimerkiksi differentiaalilaskennan peruslauseet, Rollen lause ja väliarvolause, kuuluvat opiskeltavaan aineistoon. Myös niiden todistukset on esitetty, mutta ne eivät kuulu opetussuunnitelman edellyttämiin asioihin. Ylimääräisenä aineistona *Lukion algebra 3*:ssa on ratkaisemattoman funktion derivointia käsittelevä kappale. ”Todista”- ja ”osoita”-esimerkkejä on enemmän kuin aikaisemmissa oppikirjoissa. 70-luvulla differentiaalilaskenta on siis ollut hyvin vaativaa jo lukiotasolla.

Samalla kun oppiaineksen vaativuus on lisääntynyt, on myös oppikirjojen oppilaskeskeisyys lisääntynyt huomattavasti. Noin puolet uusista teoriaosioista alkaa johdattelavalla esimerkillä, mikä saattaa helpottaa asian omaksumista. Esimerkkejä on hiukan enemmän kappaletta kohden kuin vanhemmissa oppikirjoissa. Myös välivaiheita on enemmän ja niiden ymmärtämistä on tuettu joskus myös sanallisesti. *Lukion algebra 2* ja *3* sisältävät hiukan enemmän soveltavia esimerkkejä kuin vanhemmat oppikirjat. Myös havainnollisuus ja kuvioiden käyttö opetuksen tukena ovat lisääntyneet huomattavasti.

Toisin kuin Väisälän kirjassa, harjoitustehtävät on sijoitettu erikseen jokaisen teoriaosuuden perään. Sellaiset perustehtävät, joissa pitää ratkaista vain funktion derivaatta tai tangentin kulmakerroin, ovat vähenemässä. Harjoitustehtävinä on paljon vanhoja ylioppilastehtäviä. Soveltavat tehtävät ovat monipuolistuneet ja differentiaalilaskennan soveltavat harjoitukset vaativat usein myös geometrian ymmärtämistä. Alla *Lukion algebra 2*:n [27] harjoitustehtävä 99.

Esimerkki 5.2. R-säteisen pallon sisään piirretään ympyrälieriöitä. Minkä lieriön a) tilavuus, b) vaippapinta on suurin?

5.2.3 Vuonna 1973 vahvistetut lukion matematiikan opetussuunnitelmat

Lukion matematiikan opetussuunnitelmia on uudistettu jälleen vuonna 1973 (ks. liite 3). Uudistuksen taustalla olivat korkeakouluopetuksen asettamat vaatimukset. Korkeakoulujen matematiikan uudistuminen oli jatkunut jo pitkään ja siten myös lukion matematiikan opetuksen oli uudistuttava. Lukion matematiikan yleistavoitteena olikin ”perusteellinen valmistavuus erilaisiin jatko-opintoihin ja harrastuneisuuden herättäminen matematiikan käsitemaailmaa kohtaan”. Matematiikan erityistavoitteet puolestaan olivat laskuteknisten valmiuksien hankkiminen, matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen ja matematiikan soveltaminen. Suurin muutos lukion matematiikassa vanhoihin oppiennätyksiin verrattuna tapahtui geometrisen aineiston käsittelyssä. Eukleideen mukaiselle systematiikalle perustuvasta esityksestä luovuttiin ja geometrisluonteisissa tarkasteluissa siirryttiin suurelta osin vektoreiden käyttöön. Tämä näkyi myös differentiaalilaskennassa siten, että geometriset tehtävät vähenivät huomattavasti.

Vuoden 1973 opetussuunnitelman mukaan differentiaalilaskenta on sisältynyt matematiikan pitkällä kurssilla yhdenteentoista kouluvuoteen, joka siis vastaa nykyistä lukion toista vuotta. Opetussuunnitelma antaa hyvin tarkat ohjeet differentiaalilaskennan käsittelyyn ja opetettavat asiat on listattu hyvin yksityiskohtaisesti. Vuonna 1973 vahvistetun opetussuunnitelmien perusteiden mukaisista oppikirjoista tarkastelussamme on Martti Apajalahden, Yrjö Laineen ja Raimo Tanskasen *Lukion matematiikka 1* [1].

Lukion matematiikka -kirjasarjan teokset ovat ulkoasultaan erilaisia kuin aiemmat kirjat. Niissä on ensimmäistä kertaa käytetty tehostuskeinoja. Värejä on käytetty opiskelijan huomion herättämiseksi. Lisäksi kaavat ja lauseet ovat laatikoissa, jolloin ne erottuvat hyvin muista asioista. Lauseita ei ole kuitenkaan nimetty, kuten *Lukion algebra* -kirjoissa, joissa kappaleiden nimetkin pohjautuvat yleensä lauseiden nimiin. *Lukion algebra* -kirjoissa kussakin kappaleessa keskitytäänkin lähinnä vain yhteen lauseeseen. *Lukion matematiikassa* sen sijaan yhdessä kappaleessa saattaa olla useita lauseita, jolloin kappaleet ovat usein epäselviä ja pitkiä. Tästä on toisaalta se etu, ettei opiskelija tiedä automaattisesti harjoitustehtäviä tehdessään, mitä kyseisen kappaleen lausetta tehtävässä tulisi hyödyntää.

Apajalahden, Laineen ja Tanskasen kirjat eivät poikkea differentiaalilaskennan osalta juurikaan aikaisemmista oppikirjoista. Asioiden esitysjärjestys sen sijaan on *Lukion matematiikka 2* -kirjassa erilainen kuin edellisissä oppikirjoissa. Suurin muutos on, että *Lukion algebra 3* -kirjassa transkendenttifunktioiden derivointi ja integrointi opetetaan yhdessä, kun taas *Lukion matematiikka* -kirjoissa nämä asiat opetetaan erikseen. Onko tämä kehitys sitten hyvä vai huono asia? Toisaalta se, että joidenkin funktioiden derivointi ja integrointi opetetaan samalla kertaa, tukee näiden kahden asian yhteenkuuluvuutta. Harjoitustehtäviäkään ei ole Lukion matematiikka -kirjoissa eritelty, jolloin opiskelijan tulee olla valppaana ja miettiä, mitä menetelmää milloinkin tulee käyttää päästäkseen toivottuun tulokseen. Lisämateriaalina *Lukion matematiikka 2* -kirjassa on muun muassa differentiaalihajotelma ja joitakin virheen arviointia koskevia osuuksia.

Lukion matematiikka 1 -kirjassa on huomattavasti vähemmän tehtäviä ja esimerkkejä kuin aikaisemmissa oppikirjoissa. Myös tehtävien luonne on osin muuttunut, ja esimerkiksi soveltavissa tehtävissä geometrian painotus alkaa vähetä. Tilalle nousee enemmän minimointi-, maksimointi- sekä ääriarvo- ja funktion kulkuun liittyviä tehtäviä. Näissä tehtävissä funktio annetaan yleensä valmiina toisin kuin geometrisissa tehtävissä, joissa opiskelijan tulee itse muodostaa funktio annetun geometrisen ongelman pohjalta. Vaikka derivaatan käyttö on näissä tehtävissä samankaltaista kuin geometrisissa tehtävissä, niin on ymmärrettävää, että ne eivät vaadi niin monipuolista matematiikan tuntemusta kuin enemmän geometriaa hyödyntävät tehtävät.

Pekkalan ja Oinas-Kukkosen kirjoissa on hyödynnetty ylioppilastehtäviä harjoitustehtävinä, mutta *Lukion matematiikka* -kirjoissa niitä on huomattavasti vähemmän. Tähän voi vaikuttaa se, että asioiden käsittelyjärjestystä on muutettu niin paljon. Differentiaalilaskentaa opetetaan vuoden 1973 opetussuunnitelman mukaan lukion toisena vuotena ja ilmeisesti ainakin Pekkalan ja Oinas-Kukkosen kirjoissa se on sisällytetty lukion viimeiselle vuodelle, jolloin sellaisia ylioppilastehtäviä, joita olisi voitu hyödyntää jo lukion toisella luokalla, ei välttämättä ole ollut niin paljon.

5.2.4 Vuonna 1981 vahvistettu lukion kurssimuotoinen oppimääräsuunnitelma

Vuonna 1981 opetushallitus on vahvistanut lukion matematiikan kurssimuotoisen oppimääräsuunnitelman (ks. liite 4), jonka vuoksi oppikirjatkin on alettu jaotella kurssien mukaan. Tällöin kurssilla kuusi käsiteltiin funktion jatkuvuutta, raja-arvoja ja derivaattaa. Seitsemännellä kurssilla syvennettiin derivoimistaitoja uusilla funktiolla ja tutustuttiin funktion kulkuun, ääriarvoihin, funktioiden piirtämiseen ja differentiaalilaskennan sovelluksiin. Vaikka opetus on muuttunut kurssimuotoiseksi, niin differentiaalilaskennassa opetettavat asiat ovat säilyneet samoina.

Ensimmäisistä kurssimuotoiseen opetussuunnitelmaan nojautuvista oppikirjoista aineistossamme on Heikki Oinas-Kukkosen, Jorma Merikosken ja Reijo Nivan oppikirja *Akseli 2* [24], Hannu Miinalan, Hannu Salimäen ja Mauno Vuorisen *Uuden lukion matematiikka 2: Laaja oppimäärä* [18] sekä Martti Apajalahden, Yrjö Laineen ja Raimo Tanskasen *Lukion matematiikka: Laaja oppimäärä, Kurssit 5-8* vuodelta 1983 [2]. Mielestämme suurin edistysaskel edeltäjiin nähden on huomattava oppilaskeskeisyyden lisääntyminen. Kirjojen ulkoasut ovat selkeät ja miellyttävät: tärkeitä asioita, kuten määritelmiä ja lauseita korostetaan kehyksillä, esimerkkejä on enemmän ja monipuolisemmin. Kirjoihin on sisällytetty myös kertaussivuja, joissa on koko kurssin tai yhden kokonaisuuden teoria lyhyesti. Lisäksi oppikirjoihin on sisällytetty kertaustehtäviä ja harjoituskokeita.

Myös opettaja otetaan huomioon paremmin ja hänelle annettava tuki on lisääntynyt. Jokaisen kurssin alussa on opettajalle ohjeita ja vinkkejä, miten asioita kannattaa opettaa ja mitä asioita kurssilla kannattaa painottaa. Näistä on toki hyötyä myös opiskelijoille, varsinkin jos he opiskelevat kurssia itsenäisesti.

Akseli 2:een on sisällytetty täydentävää oppiainesta, kuten esimerkiksi raja-arvon määritelmä ja väliarvolause, jotka on kirjoitettu pienemmällä fonttikoolla. Sen sijaan *Lukion matematiikan* ja *Uuden lukion matematiikan* vastaavissa kirjoissa [2] ja [18] raja-arvon täsmällinen määritelmä on esitetty varsinaiseen kurssiin kuuluvien asioiden mukana. Sen esittämisestä todetaan jopa näin ([2], s. 100): "Määritelmän käyttäminen havainnon rinnalla on usein hyödyllistä, ja joissakin tapauksissa on välttämätöntä perustaa käsittely määritelmään".

Myös väliarvolause on Apajalahden, Laineen ja Tanskasen kirjassa yleisesti opetettavien asioiden mukana, tosin sen todistusta ei enää sisällytetä varsinaiseen kurssiin. Rollen lauseen todistus on sivuutettu kokonaan. Miinalan, Salimäen ja Vuorisen teoksessa vuorostaan Rollen lause todistuksineen kuuluu yleisesti opetettaviin asioihin. Myös väliarvolause on yleisessä oppiaineksessa, mutta sen todistus sivuutetaan. *Akseli 2*:ssa väliarvolauseen todistuksen poisjättämistä perustellaan seuraavasti ([24], s. 203): ”Mutta koulukurssissa ei ole syytä korostaa matemaattisen teorian täsmällistä rakentamista sen vaikeuden vuoksi, joten otamme lähtökohdaksi geometrisen tarkastelun.” Kurssia koskevassa tavoitteet ja painotus -osiossa ([24], s. 201) kerrotaan, että ”Tulosten todistamista väliarvolauseen avulla ei koulukurssissa pitäisi korostaa, koska itse väliarvolause on kuitenkin tyydyttävä perustelemaan geometrisesti.” Joka tapauksessa on hyvä, että nämä asiat ovat oppikirjoissa - olivatpa sitten yleisessä osiossa tai täydentävänä oppiaineksena. Ne ovat hyvänä materiaalina lahjakkaille ja matematiikasta kiinnostuneille opiskelijoille. Ehkä ne lisäävät myös lahjakkaiden oppilaiden motivaatiota opiskeltavia asioita kohtaan.

Akseli 2:ssa ja *Uuden lukion matematiikassa* differentiaalilaskennan osuudella on keskimäärin noin viisi esimerkkiä kappaletta kohden. *Lukion matematiikka* -sarjan vastaavissa osissa esimerkkejä on noin puolet vähemmän, mutta kuitenkin enemmän kuin vanhemmassa vastaavassa kirjassa [1]. Soveltavia ja johdattelevia esimerkkejä on entistä enemmän ja lisäksi esimerkeissä todistetaan joitakin derivoimiskaavoja. Välivaiheet esimerkeissä ovat samantapaiset kuin aikaisemmissakin kirjoissa.

Kiinnostava uudistus esimerkeissä on Oinas-Kukkosen, Merikosken ja Nivan oppikirjan ”maskottien” Leenan ja Jussin keskustelut. Nämä ovat esimerkkejä, joissa Leena ja Jussi keskustelevat matemaattisista ongelmista. Keskustelujen aiheet ja kysymykset ovat sellaisia, joita opiskelija saattaa yksinään miettiä muutenkin. Keskusteluissa pohditaan esimerkiksi, että onko funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ jatkuva määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pohtiessaan Leena ja Jussi esittävät perusteluja, miksi kyseinen funktio olisi tai ei olisi jatkuva ja lopulta löytävät ratkaisun ongelmaan. Näiden keskustelujen avulla opiskelijalla on siis mahdollisuus löytää vastaus mielessä pyöriviin kysymyksiin. Joissakin kirjan tapauksissa vastaus selviää vasta seuraavassa teoriaosassa. Tällöin keskustelu toimii johdatteluna seuraavaan asiaan.

Akseli 2 -kirjan kuudennen kurssin osuudessa on kaksi kappaletta, joissa painotus on matemaattisissa ja käytännön sovellutuksissa. Tosin tekijät antavat ohjeeksi ([24], s. 111), että mikäli aikaa ei ole käytettävissä, niin soveltavat tehtävät voidaan jättää vähemmälle, koska niitä käsitellään perusteellisemmin 7. kurssissa. Tämä pitääkin paikkaansa; myös seitsemännen kurssin osuudessa on paljon soveltavia tehtäviä. Kirjassa on esimerkiksi erikseen kappale ääriarvosovelluksille. Alla esimerkki *Akseli 2* -kirjan soveltavasta esimerkistä.

Esimerkki 5.3. ([24], s. 228) Auton bensiininkulutus on nopeudella $v > 0$ ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$) ajettaessa $6 - 0,15v + 0,0025v^2$ ($\frac{\text{litraa}}{\text{h}}$). Millä nopeudella on taloudellisinta ajaa?

Soveltavissa tehtävissä on myös aivan uudenlaisia ulottuvuuksia. *Akseli 2*:ssa Derivaatan matemaattisia sovellutuksia -luvussa on Yhtälön ratkaiseminen Newtonin menetelmällä -kappale. Kappaletta ei ole merkitty ylimääräiseksi oppiaineeksi. Tosin, jos aikaa ei ole, niin tekijät kehottavat jättämään kyseisen kappaleen tehtävät tekemättä. Vaikka tämä ei niin keskeistä asiaa 6. kurssilla olekaan, niin on kuitenkin hyvä, että tällainenkin derivaatan sovellutus on otettu esille. Lisäksi Oinas-Kukkosen, Merikosken ja Nivan oppikirjan Ääriarvosovellutuksia -luvussa on Muita menetelmiä kuin derivaatta -kappale, joka varmaankin avartaa opiskelijan näkemään, että asioita voi tehdä monella tavalla.

Apajalahden, Laineen ja Tanskasen uudemmassa *Lukion matematiikkaa* -oppikirjassa [2] tehtävien määrän lisääntyminen näkyy ennen kaikkea siinä, että soveltavia tehtäviä on enemmän kuin aiemmin. Samalla myös tehtävien vaativuustaso on noussut. Nimenomaan vaikeita tehtäviä on tullut lisää ja rutiinia vaativat tehtävät ovat pysyneet pitkälti ennallaan. Tehtäviä on kuitenkin huomattavasti vähemmän kuin *Akseli 2*:ssa ja *Uuden lukion matematiikassa*, joissa suurempi tehtävien määrä mahdollistaa myös suuremman soveltavien tehtävien määrän sekä tehtävien monipuolisuuden.

Derivaattaa lähestytään nyt myös uudesta näkökulmasta. Ensimmäiseksi derivaatta esitellään Oinas-Kukkosen, Merikosken ja Nivan oppikirjassa [24] kasvunopeutena. Sen jälkeen derivaatalle annetaan geometrinen tulkinta ja sitä kautta siirrytään erotusosamäärän raja-arvoon. Miinalan, Salimäen ja Vuorisen kirjassa derivaattaan johdatellaan kuvaajan piirtämisellä ja funktion kasvusuunnalla. Kulmakertoimen kautta päästään erotusosamäärään eli "muuttumisnopeuteen" ja edelleen erotusosamäärän raja-arvoon ja derivaattaan. Apajalahden, Laineen ja Tanskasen uudemmassa *Lukion matematiikkaa* -oppikirjassa [2] sen sijaan derivaatta opetetaan hyvin samalla tavoin kuin heidän vanhemmassakin vastaavassa oppikirjassa [1], mutta mukaan on otettu myös esimerkki, jossa selvitetään vapaassa putoamisliikkeessä olevan kappaleen nopeus ja selitetään sen yhteys derivaattaan. *Akseli 2* ottaa opiskelijan hyvin huomioon ja soveltuu mielestämme hyvin myös itseopiskelumateriaaliksi.

5.2.5 Vuonna 1985 vahvistetut lukion opetussuunnitelman perusteet

Kouluhallituksen vuonna 1985 vahvistamat opetussunnitelmat perusteet (ks. liite 5) ovat oppisisällöiltään ja tavoitteiltaan pitkälti edellisen oppimääräsuunnitelman kaltaisia. Yllättävää kuitenkin on, että osamäärän derivaatta ei enää kuulu keskeisimpiin käsiteltäviin asioihin. Hämmennystä aiheuttaa myös tulon derivaatan puuttuminen kokonaan vuonna 1985 vahvistetuista opetussuunnitelmien perusteista. Tulon derivaatan puuttuminen lienee vahinko, mutta onko osamäärän derivaatan siirtyminen ylimääräiseksi aineistoksi ollut tarkoituksellista?

Myös vuonna 1990 julkaistu Oinas-Kukkosen, Merikosken ja Nivan *Akseli 2* [25] on hyvin pitkälti edeltäjänsä [24] kaltainen. Sekä tulon että osamäärän derivaatat kuuluvat kirjassa edelleen keskeisiin opetettaviin asioihin. Muuten kurssien sisältö on oppikirjassa monilta osin keventynyt ja karsiutunut. Uudesta painoksesta on poistettu muun muassa täydentävä oppimateriaali. Myös teoriaosia on tiivistetty ja selkeytetty edellisestä painoksesta. Esimerkit ovat muutamia poikkeuksia lukuun ottamatta samat kuin edellisessäkin kirjassa, mutta Leenan ja Jussin keskustelut on jätetty pois. Osa keskusteluesimerkeistä on korvattu täsmällisillä esimerkeillä.

5.2.6 Vuonna 1994 vahvistetut lukion opetussuunnitelman perusteet

Seuraava opetussuunnitelma on vahvistettu vuonna 1994 (ks. liite 6). Se antaa kirjantekijöille ja opettajille hyvin suuntaa antavia ohjeita differentiaalilaskennan käsittelyyn, mutta listaa silti käsiteltäviksi oppisisällöiksi jo aiemmista opetussuunnitelmista tuttuja asioita. Uusi opetussuunnitelma korostaa hyvin paljon matematiikan soveltamista ja pitkän matematiikan yleisiin tavoitteisiin on sisällytetty käytännön ongelmatilanteiden mallintaminen. Vuoden 1994 opetussuunnitelmaan perustuvista oppikirjoista aineistoomme kuuluu Jukka Kangasahon, Jukka Mäkisen, Juha Oikkosen, Johannes Paasosen ja Maija Salmelan *Pitkä matematiikka: Differentiaalilaskenta 1-2* [9, 10] sekä Jorma Merikosken, Timo Sankilammen ja Teuvo Laurinollin vuonna 2002 julkaistu *Matematiikan taito 6-7: Differentiaalilaskenta 1-2* [19].

Näissä oppikirjoissa on jonkin verran osioita, jotka eivät kuulu kurssin keskeisimpään sisältöön. Tällaisia ovat joidenkin lauseiden todistukset ja vaikeammat esimerkit. Merikosken, Sankilammen ja Laurinollin kirjaan on otettu tähdellä merkityksi ylimääräiseksi asiaksi myös Nopeus ja kiihtyvyys -kappale. Välillähän kokonaisuus oli oppikirjoista pois, mutta nyt se on sisällytetty kurssiin uudelleen, tosin vapaavalintaisena. Vaikka tähdellä merkityt asiat ovat vapaavalintaisia, niin tekijät kuitenkin painottavat esipuheessaan [19], että niiden osaaminen on tärkeää korkeisiin oppimistuloksiin pyrkiville. *Matematiikan taito* -kirjan lopussa on myös joihinkin kappaleisiin tutkimus- ja harrastustehtäviä, mielenkiintoinen Vuorovesi-kappale sekä koronkorkoesimerkkejä. Kirjoihin [9], [10] on sisällytetty ylimääräiseksi osioksi myös Rollen lause ja väliarvolause todistuksineen. Ohi opetussuunnitelman määräämien asioiden kirjassa on myös Osittaisderivaatat -kappale.

Pitkä matematiikka -sarjan *Differentiaalilaskenta 1* -kirjassa [9] jatkuvuutta on havainnollistettu ylimääräisiin oppisisältöihin kuuluvassa osuudessa pelillä. "Jatkuvuuden kyseenalaistaja (hyökkääjä) valitsee luvun funktion arvojen etäisyydeksi. Jatkuvuuden puolustajan on aina löydettävä niin pieni muuttujan arvojen etäisyys, että funktion arvojen etäisyys on pienempi kuin hyökkääjän valitsema luku. Funktio on jatkuva kohdassa a, jos puolustaja pystyy voittamaan tämän pelin. Funktio ei ole jatkuva, jos hyökkääjä pystyy voittamaan jatkuvuuspelin." Tämähän pohjautuu raja-arvon täsmälliseen määritelmään. On hienoa, että teoriasta on saatu kehitettyä näin käytännöllinen ja konkreettinen peli. Vaikka määritelmä on piilotettuna peliin, emme usko, että se heikentää määritelmän täsmällisyyttä - ideahan pelistä selviää kirkkaasti.

Merikosken, Sankilammen ja Laurinollin oppikirjassa kaikki kappaleet alkavat alkupaloilla, jotka johdattelevat kappaleen asiaan. Kirjoissa [9] ja [10] luvun aloittaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Alkupaloissa sekä johdattelevissa ongelmissa ja esimerkeissä uutta asiaa käsitellään lähinnä luvuilla, jolloin opiskelijoiden on ehkä helpompi ymmärtää käsiteltävä asia. Varsinkin uuteen asiaan tutustumisessa käytetään usein apuna myös graafista laskinta. Kirjoissa on runsaasti myös esimerkkejä ja tehtäviä, joissa tulkitaan ja tutkitaan kuvaajia. Opiskelija joutuu siis itse miettimään asioita ja tekemään itse johtopäätelmiä.

Differentiaalilaskenta 1 -kirjassa derivaattaa lähestytään monipuolisesti. Derivaatan geometrista tulkintaa lähestytään kasvunopeuden ja tangentin kulmakertoimen avulla. Seuraavaksi opetetaan, miten tangentti voidaan muodostaa kuvaajalle, mistä siirrytään edelleen raja-arvon käsitteeseen. Lopulta erotusosamäärän kautta päästään derivaatan määritelmään. *Matematiikan taito* -sarjan vastaavassa kirjassa [19] päämäärään päästään suoraviivaisemmin. Ensin kerrataan kulmakerroin, josta päästään luonnollisesti sekantin kulmakertoimeen. Seuraavaksi käsitellään erotusosamäärä ja keskimääräinen muutosnopeus. Tästä päästään edelleen tangenttiin ja sen kulmakertoimeen. Koska tangentin kulmakerroin on sekantin kulmakertoimen raja-arvo, on päästy derivaatan määritelmään. Kun vielä kerrataan derivaatan geometrinen merkitys - tangentin kulmakerroin ja muutosnopeus kohdassa x_0, niin johdattelun merkitys selviää.

Perinteisessä differentiaalilaskentaa hyödyntävässä geometrisessa tehtävässä pyritään ratkaisemaan jonkin alueen, kuten laitumen, mahdollisimman suuri ala, kun käytettävissä on tietty määrä aitauksen raaka-aineita. Pinta-alan suuruus riippuu alueen sivujen pituudesta. Tätä yhteyttä on havainnollistettu *Matematiikan taito* -kirjassa erittäin hyvin ruudutetulla kuvalla, johon on piirretty erikokoisia suorakulmioita. Vaikka yhteys tuntuu selvältä, on hyvä, että asiasta on tehty konkreettinen kuvien avulla, sillä tämän ymmärtämistä tarvitaan useissa tehtävissä. Tämä pieni havainnollistus on esimerkki siitä, miten hyvin oppikirjat sopivat myös itsenäiseen opiskeluun.

Pitkä matematiikka -kirjasarjassa tehtävät jaotellaan kahteen sarjaan. Ensimmäisessä sarjassa on perustehtäviä ja toisessa on sekä perustehtäviä että vaativampia tehtäviä. Perustehtävillä voidaan harjoitella uusia menetelmiä, jolloin ne tukevat uuden tiedon ymmärtämistä, mutta niiden avulla voi myös oppia soveltamaan tietoa. Toinen sarja sisältää syventävää tietoa, joka innostaa myös harrastamaan matematiikkaa.

Pitkän matematiikan kirjassa [9] korostetaan, että derivaatta on väline funktioiden tutkimisessa. Derivaatan monipuoliset käyttömahdollisuudet tulevat esille molemmissa oppikirjoissa mitä erilaisimmissa soveltavissa tehtävissä. Tehtävät eivät toistu samanlaisina, vaan tehtävätyyppejä on useita ja ratkaistavat ongelmat liittyvät erilaisiin käytännön tilanteisiin, kuten seuraavat esimerkit osoittavat. Ensimmäinen esimerkki havainnollistaa tehtävien konkreettisuutta.

Esimerkki 5.4. ([19], s. 126 T: 317) Kirjan sivulle ladotaan 200 cm^2 tekstiä. Sivun ylä- ja alareunaan jätetään 2 cm sekä molemmille reunoille 4 cm leveät marginaalit. Miten sivun leveys ja korkeus on valittava, jotta paperia kuluisi mahdollisimman vähän?

Matematiikan taidon tehtävä 90 osoittaa osaltaan tehtävien moninaisuutta.

Esimerkki 5.5. ([19], s. 45) Olkoon $f'(0) = a$ ja $f'(1) = b$. Määritä

$$\text{a)} \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}, \qquad \text{b)} \lim_{x\to 1} \frac{f(1)-f(x)}{x-1},$$
$$\text{c)} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}, \qquad \text{d)} \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h}.$$

5.2.7 Vuonna 2003 vahvistetut lukion opetussuunnitelman perusteet

Vuonna 2003 vahvistetut opetussuunnitelmien perusteet hajottavat differentiaalilaskennan opetuksen kolmeen kurssiin (ks. liite 7). Ensimmäisellä differentiaalilaskentaa käsittelevällä kurssilla opetetaan funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta, polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivaatat sekä polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen. Seuraavalla eli kahdeksannella kurssilla, opetetaan muun muassa juuri-, eksponentti-, logaritmi- ja yhdistetty funktio sekä näiden derivaatat. Käänteisfunktiokin opetetaan, mutta sen derivaatta ei enää kuulu keskeiseen sisältöön. Yhdeksännellä kurssilla käsitellään trigonometrisiä funktioita ja niiden derivaattoja.

Opetettavaa asiaa ei kuitenkaan ole tullut lisää, vaan samoilla kursseilla opetetaan funktioista sekä perusasiat että derivaatat. Täten funktiot käydään läpi kattavasti kerralla, kun niitä opetettaessa opetetaan myös kyseisten funktioiden derivaatat. Toisaalta tämän heikkous on se, ettei näitä funktioita voida hyödyntää kaikilla lukion matematiikan kursseilla, koska ne opetetaan verrattain myöhäisessä vaiheessa. Muuten matematiikan opetussuunnitelma ei ole juurikaan muuttunut aiempaan nähden ja oppisisällöt ovat säilyneet samoina.

Uusimpaan opetussuunnitelmaan nojautuvien oppikirjojen [11], [12], [13] sekä [4], [5] ja [6] pedagogiset periaatteet ovat samankaltaiset kuin vastaavien edeltäjien [9], [10] ja [19]. Opetussuunnitelman uudistuksista johtuen kirjojen sisällöt vaihtelevat ja käsittelyjärjestys on hiukan eri kuin aiemmin. Esitystapaa on myös kehitelty ja esimerkkejä on paranneltu verrattuna aiempiin teoksiin.

5.3 Ylioppilastehtävät

Tutkimme matematiikan pitkän oppimäärän ylioppilastehtäviä vuodesta 1946 vuoteen 2007. Aloitamme tarkastelun vuodesta 1946, koska silloin on ilmestynyt ensimmäinen suomalainen oppikirja, jossa on ollut differentiaalilaskentaa.

Vanhimmassa tutkimassamme ylioppilastehtäväkirjassa [17] ei vielä ollut erikseen luokiteltu tehtäviä otsikon "differentiaalilaskenta" alle, kuten myöhemmissä tarkastelemissamme kirjoissa. Kirjasta silti löytyy melko paljon differentiaalilaskentaan kuuluvia tehtäviä, jotka on sisällytetty "Maksimi- ja minimitehtäviä" -otsikon alle. 1940- ja 1950-luvun ylioppilastehtävissä ratkaistaan funktioiden suurimpia ja pienimpiä arvoja, minimoidaan ja maksimoidaan erilaisia funktioita ja ratkaistaan differentiaalilaskennan avulla esimerkiksi pienimpiä ja suurimpia mahdollisia pinta-aloja. Usein tehtävät ovat hyvin geometrisia, kuten seuraavassa kevään 1956 ylioppilastehtävässä 6.

Esimerkki 5.6. AB on k-korkuisen suorakulmion $ABCD$ kanta. Piste P on AB:n keskinormaalilla ja toisella puolen CD:tä kuin AB. Janat PA ja PB sekä sivut BC, CD ja DA rajoittavat kolme kolmiota. Määrää P:n etäisyys AB:stä siten, että näiden kolmioiden alojen summa on mahdollisimman pieni.

Mielenkiintoinen huomio on myöskin se, että vielä 40-luvun lopussa on joissain tehtävissä annettu eri ongelma sotilasylioppilaiden ja siviiliylioppilaiden ratkaistavaksi. Sotilaat ovat joutuneet lähtemään rintamalle kesken lukion. Siksi heidän ylioppilaskokeitaan on helpotettu.

1960-luvulla tehtävät olivat hyvin samanlaisia kuin aikaisemminkin. Edelleen geometria antoi monelle differentiaalilaskennan tehtävälle pohjan, ja ääriarvo-, minimointi- ja maksimointitehtävät olivat tyyppitehtäviä. Mielenkiintoinen huomio on, että lähdeteoksessamme [8] on maksimi- ja minimitehtävät erotettu aiheluokituksessa differentiaalilaskennan tehtävistä. Differentiaalilaskennan aihepiiriin kuuluvat perustehtävät, joissa derivoidaan jokin funktio, differentiaaliyhtälöt, kuvaajien piirtämiset ja niin edelleen olivat uudenlaisia tyyppitehtäviä.

Vuonna 1965 matematiikan ylioppilaskoe uudistui siten, että kokeessa oli aikaisemman kymmenen tehtävän sijaan kaksitoista tehtävää, joista sai valinnan mukaan ratkaista kymmenen. Kokeen kaksi viimeistä tehtävää olivat tavallisten koulukurssien ulkopuolelta annettuja ylimääräisiä tehtäviä lähinnä differentiaali- ja integraalilaskennan sekä todennäköisyyslaskennan piiristä. 1960-luvun lopussa matematiikan ylioppilastehtävien painopiste on muutenkin siirtynyt geometriasta algebrallis-analyyttisiä tehtäviä kohti. Tähän kiinnitetään huomiota myös lähteen [8] alkusanoissa.

1970-luvun loppupuolella uudenlaisiksi tyyppitehtäviksi nousivat funktion kulkuun liittyvät tehtävät. Näissä tehtävissä ratkaistiin muun muassa, milloin funktio on kasvava, milloin vähenevä, milloin funktion kuvaaja on x-akselin alapuolella jne. Lisäksi ylioppilaskokeisiin alkoi ilmestyä tehtäviä, joissa määritetään jonkin funktion käänteisfunktio tai ratkaistaan funktion derivaatta derivaatan määritelmän mukaan. Ylioppilaskokelaan tehtävänä saattoi olla myös osoittaa todeksi jokin väite, kuten seuraavassa syksyn 1978 tehtävässä kolme. 70-luvun alkupuolelta lähtien ovat myös transkendenttiset funktiot yleistyneet differentiaalilaskennan ylioppilastehtävissä.

Esimerkki 5.7. Osoita: Funktiolla $Ax+e^{-x}$ on yksi minimikohta, jos $A>0$, mutta ei lainkaan ääriarvokohtia, jos $A \leq 0$.

Vaikka kokeen tehtävät monipuolistuivat, minimointi- ja maksimointitehtävät sekä muut jo aikaisemmin kokeeseen tulleet tehtävät säilyttivät vankan asemansa.

Tangentin kulmakertoimeen liittyvät tehtävät nousivat uudenlaisiksi tyyppitehtäviksi 1980- ja 1990-lukujen taitteessa. Samaan aikaan myös minimointi- ja maksimointitehtävät muuttuivat osittain soveltavammiksi. Geometristen ongelmien rinnalle tuli myös arkielämän ongelmatilanteita ratkottavaksi. Esimerkkinä on syksyn 1988 ylioppilastehtävä 6a.

Esimerkki 5.8. Suoran ympyrälieriön muotoinen säiliö, jonka tilavuus on V, valmistetaan kahdesta eri materiaalista. Pohjiin käytettävän materiaalin hinta $(\frac{\mathrm{mk}}{\mathrm{m}^2})$ on 40% suurempi kuin vaipan materiaalin. Määritä lieriön korkeuden ja pohjan säteen suhde siten, että säiliön materiaalikustannukset ovat mahdollisimman pienet.

1990-luvun loppupuolelta alkaen tyypillisimpiä tehtäviä matematiikan ylioppilaskokeessa ovat differentiaalilaskennan osalta olleet perustehtävät, joissa määritetään funktion derivaatta laskusääntöjä käyttämällä, ääriarvo-, minimointi- ja maksimointitehtävät sekä käyrän tangenttiin tai funktion kulkuun liittyvät tehtävät. Vuonna 2000 matematiikan ylioppilaskoe uudistui siten, että kokeessa on tehtäviä viisitoista entisen kymmenen sijaan. Näistä ylioppilaskokelas saa ratkaista kymmenen. Täten kokeeseen on lisätty valinnaisuutta ja valinnaisten lisäkurssien asioita voidaan entistä paremmin sisällyttää ylioppilaskokeeseen. Valinnaisena lisäkurssina on ollut myös analyysin kurssi ja lähes jokaisesta ylioppilaskokeesta onkin löytynyt tehtävä, jossa pitää ratkaista differentiaaliyhtälö. Kokonaisuudessaan matematiikan ylioppilastehtävät ovat myöskin muuttuneet soveltavimmiksi. Tästä esimerkkinä kevään 2004 ylioppilastehtävä 15.

Esimerkki 5.9. Suoran ympyrälieriön muotoisen astian pohjassa on reikä, josta astiassa oleva vesi valuu ulos. Astiassa oleva vesimäärä ajanhetkellä t on $V(t) = \pi r^2 h(t)$, missä $r = 10$ cm on astian pohjan säde ja $h(t)$ pinnan korkeus hetkellä t; aika t on ilmaistu sekunteina. Vettä valuu ulos nopeudella $V'(t)$, joka on suoraan verrannollinen pinnankorkeuden neliöjuureen. Muodosta differentiaaliyhtälö vesimäärän tilavuudelle $V(t)$ ja ratkaise se. Laske, kauanko astian tyhjeneminen kestää, kun tiedetään, että vettä oli aluksi 10 litraa ja 30 sekunnissa vesimäärä oli vähentynyt puoleen.

Usein niin sanotut soveltavat tehtävät ovat kuitenkin hyvin keinotekoisia. Tällöin matematiikan sovellukset eivät yleensä ole kovin mielenkiintoisia. Tällainen tehtävä on esimerkiksi kevään 2000 ylioppilastehtävä 14.

Esimerkki 5.10. Kesätapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sinä hetkenä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö ja sen ratkaisuna hyttysten määrä mielivaltaisella hetkellä t. Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta?

6 Johtopäätökset

Oppikouluissa ja lukioissa opetetut asiat ovat hieman vaihdelleet eri aikoina. Derivaatan määritelmä ja tietyt derivaatan perusominaisuudet ovat säilyneet oppikirjoissa koko sen ajan, kun differentiaalilaskenta on kuulunut koulumatematiikkaan. Erilaiset derivaatan käyttömahdollisuudet sen sijaan ovat vaihdelleet eri vuosikymmeninä. Lisäksi se, miten asioita on käsitelty ja mitä asioita on pidetty keskeisinä on vaihdellut eri aikoina.

Kouluopetuksessa painotetut differentiaalilaskennan sisällöt ovat oppikirjojen ja opetussuunnitelmien perusteiden perusteella muuttuneet ajan kuluessa. Kun differentiaalilaskenta alkoi vakiinnuttaa asemaansa koulumatematiikassa, niin käsiteltävien asioiden määrä lisääntyi ja laajentui. Ensimmäiset tutkimamme oppikirjat koostuivat lähinnä täsmällisistä määritelmistä, lauseista ja muutamista esimerkeistä, mutta nykyään oppikirjojen teorian ymmärtämistä tuetaan useilla erilaisilla esimerkeillä, kuvioilla, taulukoilla ja muulla lisämateriaalilla. 1970-luvulle asti oppimateriaali vain lisääntyi ja laajeni. 1970-luvulla käsiteltiin hyvin vaativia asioita ja esimerkiksi lauseiden täsmälliset todistukset kuuluivat oppisisältöön. Tämän jälkeen oppikirjojen teoriaosuuksia on kevennetty; aluksi siirtämällä joitain asioita lisämateriaaleiksi ja vähitellen jättämällä ne kokonaan pois oppikirjoista. Mielestämme näiden asioiden säilyttäminen lisämateriaalina ei olisi haitannut mitään. Päinvastoin lisämateriaali olisi voinut motivoida lahjakkaita opiskelijoita ja antaa heille mahdollisuuden syventää tietojaan. Saamamme tiedon mukaan oppikirjoja on kuitenkin yleisesti kritisoitu liian laajoiksi, ja siksi kirjantekijät ovat karsineet ylimääräistä materiaalia pois. Differentiaalilaskennan lukion pitkän matematiikan oppisisältöä on siis karsittu 1970-luvun jälkeen, mutta toisaalta tilalle on tullut valinnainen analyysin kurssi. Tällä kurssilla käsitellään nykyään funktioiden jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkimista, jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia, funktioiden ja lukujonojen raja-arvoja äärettömyydessä sekä epäoleellisia integraaleja (ks. liite 6). Valinnaisenkin kurssin sisältöä on karsittu vuonna 1994 vahvistetun opetussuunnitelman mukaisesta kurssista. Valinnaisen kurssin myötä opiskelijoilla on kuitenkin nykyään mahdollisuus opiskella differentiaalilaskentaa melko monipuolisesti.

Differentiaalilaskenta tuli koulumatematiikkaan siis 1940-luvulla. Tällöin sitä alettiin käsitellä oppikirjassa suoraan derivaatan käsitteellä. Derivaatalle annettiin geometrinen tulkinta, jonka avulla opetettiin derivaatan käsitettä. Väisälän 1960 vuonna julkaistussa uudistetussa painoksessa [30] differentiaalilaskenta alkaa raja-arvon ja jatkuvuuden käsittelyllä, jolloin derivaattaakin on pystytty paremmin opettamaan niiden avulla. Raja-arvon ja jatkuvuuden lisääminen oppikirjaan oli mielestämme merkittävä parannus, koska jo ensimmäisessä painoksessa määriteltiin derivaatta erotusosamäärän raja-arvona, vaikka raja-arvon käsitettä ei tunnettu. Myöhemmin derivaatalle on annettu myös kasvunopeustulkinta, joka mielestämme lisää entisestään derivaatan ymmärtämistä.

Teorian ymmärtämistä on pyritty parantamaan oppikirjoissa havainnollisuutta lisäämällä. Tämä on havaittavissa selkeästi graafisten esitysten, kuvioiden ja kaavioiden jatkuvana lisääntymisenä. Oppikirjojen parannus on tuonut mukanaan myös yhteenvetoja ja kertaussivuja. Lisäksi oppikirjojen keskesiä asioita on korostettu erilaisilla tehostuskeinoilla, kuten väreillä ja kehyslaatikoilla. Asiaan johdattelevien esimerkkien määrä on selvästi lisääntynyt ja nykyään kappaleet alkavat usein esimerkeillä. Näin opiskelijat voivat tutustua uuteen opetettavaan asiaan etukäteen jo opetettujen asioiden avulla. Kun lausetta tai määritelmää edeltää jokin konkreettinen esimerkki, niin teoria on helpommin ymmärrettävissä. Nämä muutokset ovat lisänneet opiskelijoiden mahdollisuutta opiskella asioita myös itsenäisesti. Oppikirjoista on siis ajan myötä muotoutunut yhä oppilaskeskeisimpiä.

Samalla kun oppikirjojen teoriaosuuksien sisältöjä on kevennetty ovat jotkin esimerkit ja tehtävät kuitenkin havaintojemme mukaan muuttuneet yhä vaativimmiksi. Tosin helppojakin tehtäviä on edelleen paljon mukana. Kun 1940-luvulla monet esimerkit olivat lähinnä mekaanisia laskutoimituksia, niin nykyään esimerkit ovat hyvin monipuolisia ja hyödyntävät derivaattaa usealla eri tavalla. Esimerkkien määrä on lisääntynyt huomattavasti ja samalla myös soveltavien esimerkkien osuus on kasvanut. Sama kehitys on nähtävissä myös tehtävissä. 70-luvulta lähtien opiskelijoiden arjesta otetut esimerkit ovat huomattavasti lisääntyneet, mikä on lisännyt omalta osaltaan mielenkiintoa matematiikkaa kohtaan ja tehnyt matematiikasta konkreettisempaa. Vaikka aikaa on kulunut aineistomme vanhimman ja uusimman oppikirjan julkaisun välillä kuusi vuosikymmentä, niin jotakin on pysynyt samanakin. Oppikirjoissa nimittäin ensimmäinen esimerkki derivaatasta on otettu yleensä funktiosta $f(x) = x^2$, useimmiten vielä pisteestä $(1, 1)$.

Esimerkkien ja tehtävien määrä on kasvanut. Täten opettajilla on mahdollisuus valikoida sopivia tehtäviä tilanteen mukaan. Myös opiskelijat voivat keskittyä niihin tehtäviin, jotka tuntuvat mielenkiintoisilta tai joissa he tarvitsevat lisää harjoitusta. Toisaalta esimerkkien jatkuva lisääntyminen on saattanut johtaa siihen, että opiskelijoilla on ehkä liikaakin materiaalia, johon voi tukeutua tehtäviä tehdessään. Tällöin opiskelijoiden oma pohdinta ja ongelmanratkaisu voivat jäädä liian vähälle. Tehtävien runsaus saattaa myös johtaa siihen, että ratkomisesta tulee pelkää rutiinia.

1980-luvulla tuli uudenlainen esimerkkityyppi oppikirjoihin. Keskusteluesimerkit havainnollistivat oppimisprosessia. Harmiksemme keskusteluesimerkit eivät vakiinnuttaneet asemaansa oppikirjoissa. Keskustelu on nimittäin hyvä menetelmä opettaa asioita, koska siinä näkee ajatuksen kulun sekä ajatusprosessin. Sen avulla voi myös löytää virheitä ajatuksen kulussa, kun toinen oikaisee tai molemmat osapuolet huomaavat yhdessä vääristyneen käsityksen. Toisaalta esille tulleet väärinkäsitykset saattavat sekoittaa opiskelijaa. Mielestämme keskusteluesimerkit olisivat rikastuttaneet oppikirjojen sisältöä. Saamamme tiedon mukaan keskusteluesimerkkejä on kuitenkin pidetty lapsellisina ja siksi ne on karsittu pois.

Ylioppilastehtävät pohjautuvat pitkälti oppikirjoissa opetettaviin asioihin, ja tehtävätyypit ovat samoja kuin vastaavien aikojen oppikirjoissa. Sekä oppikirjoissa että ylioppilaskokeissa minimointi- ja maksimointi- sekä ääriarvoja funktion kulkuun liittyvät tehtävät ovat säilyneet 1940-luvulta tähän päivään. Geometrian osuus differentiaalilaskennassa oli aluksi hyvin vahva, mikä näkyi sekä oppikirjoissa että ylioppilaskokeissa. Geometriset tehtävät olivat hyvin soveltavia, mikä nosti differentiaalilaskennan tehtävien vaikeustasoa. Tämä on yllättävää ottaen huomioon sen, että differentiaalilaskenta vasta teki tuloaan kouluopetukseen.

Aina oppikirjoissa esitetyt asiat eivät kuitenkaan päädy ainakaan heti ylioppilaskokeeseen. Vanhimmissa oppikirjoissa oli runsaasti tehtäviä, joissa määritettiin käyrän tangentti derivaatan avulla. Kuitenkin vasta 90-luvulla käyrän tangenttiin liittyvät tehtävät alkoivat yleistyä ylioppilaskokeessa. Myös korkeamman kertaluvun derivaatta on kuulunut kautta aikojen lukion oppisisältöön, mutta ylioppilaskokeessa ei siihen liittyviä tehtäviä ole juurikaan ollut. Siten ei myöskään ole ylioppilastehtäviä, joissa määritetään käyrien kuperuutta ja käännepisteitä. Tehtäviä, joissa pyydetään derivoimaan annettu funktio, on ollut oppikirjoissa siitä asti, kun differentiaalilaskenta tuli kouluopetukseen, mutta ne yleistyivät ylioppilaskokeessa vasta 1970-luvulla.

Kaiken kaikkiaan differentiaalilaskennan teoria on keventynyt; täsmällisiä todistuksia ja joitakin lauseita on karsittu. Differentiaalilaskennan sisältö on kuitenkin laajentunut huomattavasti. Opetettaviin asioihin on tullut lisää matematiikan sovellutuksia ja erilaisia derivaatan käyttömahdollisuuksia. Lisäksi opiskelija voi nykyisin valita analyysin jatkokurssin, jossa differentiaalilaskennan taitoja lisätään. Tutkimustulostemme perusteella emme siis voi sanoa, että kirjojen matematiikan vaikeustaso olisi laskenut ainakaan differentiaalilaskennan osalta.

Oppimistulokset heikkenevät kuitenkin koko ajan. Markku Halmetoja [7] kirjoittaa: ”Tilanteen huonoutta kuvaa se, että ylioppilaskokeesta joudutaan päästämään läpi kahdeksalla pisteellä, tekniset korkeakoulut joutuvat järjestämään tukiopetusta, osa ammattikorkeakoulujen insinööriopiskelijoista ei ymmärrä edes peruslaskutoimituksia, ja, mikä pahinta, tulevat matematiikan aineenopettajat eivät hallitse alansa peruskäsitteitä, joita heidän oletetaan myöhemmin opettavan”. Hänen [7] mukaansa oppimistulosten heikkenemisen syynä on se, että nykyisin asiat pitää omaksua nopeammin. Aikaisemmin oppilaat jaettiin matematiikassa jo silloisen yläasteen aikana kolmeen tasoryhmään. Tällöin matematiikasta kiinnostuneiden oppisisältöihin kuului jo yläasteella monia asioita, jotka opiskellaan nykyään vasta lukiossa. Tasokurssien poistamisen ja opetussuunnitelmien muuttamisen myötä matematiikka on Halmetojan [7] mukaan kokonaan poistunut peruskoulusta ja korvautunut laskennolla. Tällöin samat asiat, jotka ennen opiskeltiin yläasteen ja lukion aikana, opiskellaan nykyisin ainoastaan lukion pitkässä matematiikassa.

Mielestämme Halmetoja nostaa esiin hyvin tärkeän asian. Olisi erittäin tärkeää keskustella laajemminkin nykyisen matematiikan opetuksen tilasta. Nykyisellä järjestelmällä jatkaen on vaarana, että oppimistulokset heikkenevät entisestään. Lukion pitkässä matematiikassa opiskellaan kyllä paljon asioita, mutta matematiikkaa hallitaan vain pintapuolisesti. Opiskelijat tarvitsevat nykyistä enemmän aikaa kaikkien lukiossa opetettavien asioiden omaksumiseen. Olisi siis tarpeellista miettiä uudelleen matematiikan opetuksen järjestämistä sekä peruskoulussa että lukiossa, jotta oppimistulokset paranisivat.

7 Lopuksi

Tutkimuksemme tekeminen oli hyvin mielenkiintoista ja syvensi ymmärrystämme differentiaalilaskennasta. Oli antoisaa perehtyä koulumatematiikan historiaan, vaikkakin vaan differentiaalilaskennan osalta. Uskomme, että tämän tutkielman tekemisen jälkeen pystymme itse opettamaan differentiaalilaskentaa entistä paremmin. Koulumatematiikan historiaa olisi toki ollut mukava tutkia laajemminkin. Tällöin olisimme saaneet paremman kuvan esimerkiksi mahdollisesta koulumatematiikan tason laskusta tai oppimistulosten heikkenemisestä.

Tutkimme eri aikojen oppikirjat ja ylioppilastehtävät melko tarkasti. Opetusuunnitelmat saimme useista yrityksistä huolimatta opetushallituksesta vasta viime metreillä, joten tyydyimme tarkastelemaan opetussuunnitelmia vain pintapuolisesti. Opetussuunnitelmia olisi ollut mukava tutkia enemmänkin ja tarkastella, miten opetussuunnitelmien sisällöt vastaavat oppikirjojen sisältöjä. Mielenkiintoista olisi ollut myös selvittää differentiaalilaskennan tuloa koulumatematiikkaan. Miksi ja miten se on saatu opiskeltaviin asioihin?

Viitteet

[1] M. Apajalahti, Y. Laine, R. Tanskanen, *Lukion matematiikka 2, pitkä kurssi*. Otava, 1974.

[2] M. Apajalahti, Y. Laine, R. Tanskanen, *Lukion matematiikka: Laaja oppimäärä, Kurssit 5-8*. Otava, 1983.

[3] A. Browder, *Mathematical Analysis: An Introduction*. Springer, 2000.

[4] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, T. Laurinolli, T. Sankilampi, *Matematiikan taito 7: Derivaatta*. 1. painos, WSOY, 2006.

[5] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, T. Laurinolli, T. Sankilampi, *Matematiikan taito 8: Juuri- ja logaritmifunktiot*. 1. painos, WSOY, 2006.

[6] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, T. Laurinolli, T. Sankilampi, M-L. Viilo, K. Väänänen, *Matematiikan taito 9: Trigonometriset funktiot ja lukujonot*. 1. painos, WSOY, 2007.

[7] M. Halmetoja, *Ei edelleenkään kuninkaantietä matematiikkaan*. Arkhimedes 5-6/2007, s.11.

[8] N. Kallio, P. Heinänen, P. Woivalin, *Matematiikan esimerkkikirja IV: ylioppilastehtävät 1961-1974*. WSOY, 1974.

[9] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, *Pitkä matematiikka: Differentiaalilaskenta 1*. 1.-4. painos, WSOY, 1996.

[10] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, *Pitkä matematiikka: Differentiaalilaskenta 2*. 1.-4. painos, WSOY, 1996.

[11] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka: Derivaatta*. 1. painos, WSOY, 2006.

[12] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka: Juuri- ja logaritmifunktiot*. 1.-2. painos, WSOY, 2007.

[13] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M. Salmela, J. Tahvanainen, *Pitkä matematiikka: Trigonometriset funktiot ja lukujonot*. 1. painos, WSOY, 2007.

[14] P. Kontkanen, J. Lehtonen, K. Luosto, J. Nurmi, R. Nurmiainen, S. Savolainen, *Pyramidi 3: matematiikan tietokirja.* Kirjayhtymä, 1999.

[15] A. Lahtinen, L. Myrberg, *Matematiikan ylioppilastehtävät ratkaisuineen 1992-2001.* MFKA-Kustannus, 2001.

[16] A. Lahtinen, L. Myrberg, *Matematiikan ylioppilastehtävät ratkaisuineen 1997-2006.* MFKA-Kustannus, 2006.

[17] R. Laurén, E.A. Kannisto, *Matemaattiset tehtävät ylioppilastutkinnoissa vuosina 1923-1957.* Gummerus, 1958.

[18] H. Miinala, H. Salimäki, M. Vuorinen, *Uuden lukion matematiikka 2: laaja oppimäärä.* WSOY, 1983.

[19] J. Merikoski, T. Sankilampi, T. Laurinolli, *Matematiikan taito 6-7: Differentiaalilaskenta 1-2.* WSOY, 2002.

[20] R. Metsänkylä, T. Pursiheimo, *Matematiikan tehtävät ylioppilastutkinnoissa 1988-95.* Otava, 1995.

[21] L. Myrberg, *Differentiaali ja -integraalilaskenta korkeakouluja varten, osa 1.* Kirjayhtymä, 1999.

[22] L. Myrberg, *Differentiaali ja -integraalilaskenta korkeakouluja varten, osa 2.* Kirjayhtymä, 2001.

[23] L. Myrberg, *Matematiikan ylioppilastehtävät ratkaisuineen.* MFKA-Kustannus, 1984.

[24] H. Oinas-Kukkonen, J. Merikoski, R. Niva, *Akseli 2.* Weilin + Göös, 1983.

[25] H. Oinas-Kukkonen, J. Merikoski, R. Niva, *Akseli 2.* Weilin + Göös, 1990.

[26] K. Pekkala, H. Oinas-Kukkonen, *Lukion algebra 2.* WSOY, 1970.

[27] K. Pekkala, H. Oinas-Kukkonen, *Lukion algebra 3.* WSOY, 1971.

[28] S. Salas, E. Hille, G.J. Etgen, *Calculus: One and several variables.* 9th Ed., Wiley, 2003.

[29] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja II.* WSOY, 1956.

[30] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 2.* WSOY, 1970.

Liitteet

Liite 1

niikan pääkohdat aaltoliike- ja lyhyt äänioppi niihin luettuina. Pääkohtia aurinkojärjestelmästämme sekä taivaankappaleista.

VII l u o k k a (2 tuntia). Fysiikka. Lämpöoppi. Sähkö- ja magnetismioppi.

VIII l u o k k a (2 tuntia). Fysiikka ja kemia. Säteilyopin ja atomifysiikan keskeisiä kohtia. Fysiikan ja kemian oppimäärän kertaus.

9-luokkaiset tyttölyseot.

V l u o k k a (3 tuntia), VI l u o k k a (3 tuntia), VII l u o k k a (2 tuntia), VIII l u o k k a (2 tuntia) ja IX l u o k - k a (2 tuntia). Oppiennätykset samat kuin 8-luokkaisten poika- ja yhteislyseoiden IV - VIII luokalla, paitsi että VIII luokalla ei lueta kemiaa.

7-luokkaiset tyttölyseot.

V l u o k k a (2 tuntia), VI l u o k k a (2 tuntia), VII l u o k k a (2 tuntia), VIII l u o k k a (2 tuntia) ja IX l u o k - k a (2 tuntia). Oppiennätykset samat kuin 8-luokkaisten poika- ja yhteislyseoiden IV - VIII luokalla, V ja VI luokalla kuitenkin jonkin verran supistettuina ja siten, että VIII luokalla ei lueta kemiaa.

Oppikoulujen oppiennätys, hyväksytty 6.6.1941

Matematiikka.

Opetuksen päämäärä.

Matematiikan opetuksen päämääränä on kehittää oppilaita ajattelemaan johdonmukaisesti ja työskentelemään suunnitelmallisesti ja määrätietoisesti. Tämän ohessa totutetaan oppilaita käsitteiden täsmälliseen käyttöön, selvään, lyhyeen ja kielellisesti hyvään esitystapaan, niin myös tehtävien, tulosten ja asiaan vaikuttavien tekijöiden objektiiviseen arvosteluun. Matematiikan opetuksen tarkoituksena on myös kehittää oppilaiden kykyä käsittää kvantitatiivisesti ympäröivän luonnon ja ihmiselämän esineitä ja ilmiöitä, kouluttaa heidän funktionaalista ajatustapaansa ja avaruuden käsittämiskykyään samoin kuin selvittää matematiikan merkitystä tieteelle, tekniikalle, talouselämälle ja maanpuolustukselle.

Matematiikan opetuksen tarkoituksena on lisäksi antaa oppilaille taito ja tottumus laskea määrätyillä ja yleisillä luvuilla sekä itsenäisesti ratkaista elämän ja eri tieteitten alalta valittuja yksinkertaisia, kvantitatiivista laatua olevia tehtäviä sekä perehdyttää heidät taso- ja avaruusgeometrian perusteisiin. Lukioluokkain opetuksen on pidettävä silmällä perustan luomista korkeakouluopintoja varten, jotta opetus korkeakouluissa voi suorastaan liittyä oppikoulun matematiikan opetukseen.

Oppiennätykset.

8-luokkaiset poika- ja yhteislyseot.

I l u o k k a (5 tuntia). Aritmetiikka. Lukujärjestelmä. Dekadiset mitat. Mittausharjoituksia. Merkitsevien numeroiden tarkkuuden käsite. Pylväs- ja janadiagrammeja. Kokonaisten ja desimaalilukujen yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Suhteen määrääminen. Käytännöllisiä ja lyhennettyjä laskutapoja. Laskutehtäviä. Runsaasti päässälaskemista.

II l u o k k a (3 tuntia). Aritmetiikka. Geometrisia peruskäsitteitä pinnan- ja tilavuudenmittojen yhteydessä. Alan ja tilavuuksien määräämistä. Ajan-, kulman-, kaaren- ja kappalemitat sekä niillä suoritettavia yksinkertaisia laskutoimituksia. Kokonaislukujen jaollisuus. Murtolukuoppi (käytetään vain sellaisia murtolukuja, joiden nimittäjänä on yksinkertainen luku). Prosenttikäsite sekä verto- ja prosenttiluvun määrääminen. Korkokäsite sekä koron ja kasvaneen pääoman määrääminen. Laskutehtäviä. Runsaasti päässälaskemista.

III l u o k k a (4 tuntia). Aritmetiikka. Suhde ja verranto. Funktiokäsite. Viivadiagrammi. Yksiehtoinen päätöslasku. Yksinkertaisia osituslaskuja. Laskutehtäviä. Runsaasti päässälaskemista.

Geometria. Valmistava oppimäärä, joka tutustaa oppilaat geometrian peruskäsitteisiin ja täydentää niitä geometrisia tietoja, joita oppilaat ovat jo aritmetiikan yhteydessä saaneet. Kulmien, kolmioiden ja ympyrän ominaisuuksia.

Algebra. Laskulakien käsittelyä yleisiä ja määrättyjä lukuja käyttäen. Yksinkertaisia ensimmäisen asteen yhtälöjä. Päässälaskemista.

IV l u o k k a (4 tuntia). Algebra. Laskulakien käsittelyä jatketaan. Suhde ja verranto. Graafisen esityksen perusteita. Laskutoimituksia polynomeilla. Yksinkertaisia ensimmäisen asteen yhtälöjä. Päässälaskemista.

Geometria. Suoraviivaisten kuvioiden ja ympyrän ominaisuuksien käsittelyä jatketaan. Yksinkertaisia konstruktiotehtäviä.

V l u o k k a (4 tuntia). Algebra ja aritmetiikka. Laskutoimituksia murtoluvuilla. Ensimmäisen asteen kokonaisfunktion, jossa on yksi muuttuja, graafinen esitys. Ensimmäisen asteen yhtälöt, joissa on yksi tuntematon. Yksinkertaisia probleemoja. Juuren käsite. Aritmetiikan kertaus, jonka yhteydessä prosentti- ja korkolasku täydentäen kerrataan sekä tutustetaan oppilaat postisiirtotiliin, šekkeihin, postilähetysvekseleihin sekä osake-, obligatio- ja diskonttolaskuihin. Tutustumista laskutaulukkoihin. Päässälaskemista.

Geometria. Ympyrän ominaisuuksia. Konstruktiotehtäviä, joista kolme piirretään puhtaaksi. Kolmioiden yhdenmuotoisuuden pääkohtia. Tutustumista terävien kulmien trigonometrisiin funktioihin ja niiden käyttöön. Pythagoraan väittämä. Alojen ja tilavuuksien täydentävä käsittely.

Matemaattinen linja.

VI l u o k k a (5 tuntia). Algebra. Potenssi- ja juurioppi. Irrationaaliset luvut. Imaginaari- ja kompleksilukujen määritelmä sekä kompleksilukujen graafinen esitys. Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen graafisesti ja algebrallisesti. [illegible]

[illegible]. Ensim-

Ensimmäisen asteen yhtälöt, joissa on kaksi tuntematonta, graafisesti ja algebrallisesti. Ensimmäisen asteen yhtälöt, joissa on enemmän kuin kaksi tuntematonta. Probleemoja. Sovellutuksia.

Geometria. Lyhyt verranto-opin täydennys. Yhdenmuotoisuusoppi. Geometristen tehtävien ratkaiseminen algebran avulla. Oppi monikulmioiden aloista. Sovellutuksia.

VII luokka (5 tuntia). Algebra. Yksinkertaisia toisen asteen yhtaikaisia yhtälöitä, joissa tuntemattomia on kaksi. Toiseen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia. Probleemoja. Syventävä ensimmäisen asteen funktion graafinen käsittely: ympyrän, paraabelin, ellipsin ja hyperbelin perusmuotoisten yhtälöiden johto. Derivaattakäsite ja sen soveltaminen lähinnä toisen asteen trinomiin. Minimi- ja maksimitehtäviä. Eksponentti- ja logaritmifunktioiden graafinen esitys. Logaritmioppi. Aritmeettinen ja geometrinen sarja. Koronkorkolaskuja. Sovellutuksia.

Geometria. Ympyränmitanto. Lyhyt katsaus avaruusgeometristen kuvioiden piirtämiseen. Avaruusgeometria. Sovellutuksia.

VIII luokka (5 tuntia). Algebra ja geometria. Oppimäärän kertaus.

Trigonometria. Suorakulmaisten kolmioiden ratkaisu. Trigonometristen funktioiden yleiset määritelmät. Goniometria. Vinokulmaisten kolmioiden ratkaisu. Sovellutuksia geometrian, fysiikan ja fyysillisen maantieteen alalta.

Kielilinja.

VI luokka (3 tuntia). Algebra. Potenssi- ja juurioppi lyhyesti. Irrationaaliset luvut. Imaginaarilukujen käsite. Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen graafisesti ja algebrallisesti. Yksinkertaisia probleemoja. Toisen asteen yhtälön juurien summa ja tulo.

Geometria. Lyhyt verranto-opin täydennys. Yhdenmuotoisuusoppi. Yksinkertaisten geometristen tehtävien ratkaiseminen algebran avulla. Sovellutuksia.

VII l u o k k a (3 tuntia). Algebra. Ensimmäisen asteen yhtälöt, joissa on kaksi tuntematonta, graafisesti ja algebrallisesti. Syventävä ensimmäisen asteen funktion graafinen käsittely (kahden pisteen etäisyys ja ympyrän yhtälö, yhdensuuntaiset ja toisiaan vastaan kohtisuorassa olevat suorat). Logaritmikäsite ja sen soveltaminen yksinkertaisiin laskutehtäviin ilman interpolaatiota.

Geometria. Oppi monikulmioiden aloista. Ympyränmitanto. Avaruusgeometria. (Valmistavat käsitteet. Tason normaalia, janan keskinormaalitasoa, diedrikulmaa, kohtisuoria tasoja, suoran kaltevuuskulmaa koskevat teoreemat. Suorien ja tasojen yhdensuuntaisuutta koskevien teoreemain pääsisältö. Sopen käsite. Kappaleiden ja tasojen leikkauskuvioita koskevat teoreemat havaintoon perustuen. Kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien mittalukuja koskevat teoreemat, joista särmiön tilavuutta koskeva kuitenkin vain havaintoon perustuen. Muut kappaleita koskevat teoreemat jätetään pois. Kuutio, säännöllinen tetraedri ja säännöllinen oktaedri.)

VIII l u o k k a (3 tuntia). Algebra ja geometria. Oppimäärän kertaus. Trigonometria. Suorakulmaisten kolmioiden ratkaisu.

6-luokkaiset poika- ja yhteislyseot.

III l u o k k a (4 tuntia). Aritmetiikka. Kansakoulussa luetun oppimäärän syventävä käsittely, jolloin päähuomio kiinnitetään murtolukuoppiin, verto- ja prosenttiluvun, koron ja kasvaneen pääoman määräämiseen, suhteeseen ja verrantoon sekä osituslaskuun. Laskutehtäviä. Päässälaskemista.

Algebra. Laskulakien käsittelyä yleisiä lukuja käyttäen. Päässälaskemista.

Geometria. Valmistava oppimäärä, joka tutustaa oppilaat geometrian peruskäsitteisiin ja täydentää niitä geometrisia tietoja, joita oppilaat ovat jo aritmetiikan yhteydessä saaneet.

IV l u o k k a (4 tuntia), V l u o k k a (4 tuntia), matemaattisen linjan VI l u o k k a (5 tuntia), VII l u o k k a (5 tuntia) ja VIII l u o k k a (5 tuntia) sekä kielilinjan VI l u o k k a (3 tuntia), VII l u o k k a (3 tuntia) ja VIII l u o k k a (3 tuntia). Oppiennätykset samat kuin 8-luokkaisten poika- ja yhteislyseoiden IV - VIII luokalla.

8-luokkaiset klassilliset lyseot.

I l u o k k a (5 tuntia), II l u o k k a (3 tuntia), III l u o k k a (4 tuntia), IV l u o k k a (4 tuntia) ja V l u o k k a (4 tuntia). Oppiennätykset samat kuin 8-luokkaisten poika- ja yhteislyseoiden I - V luokalla.

VI l u o k k a (3 tuntia), VII l u o k k a (3 tuntia) ja VIII l u o k k a (3 tuntia). Oppiennätykset samat kuin 8-luokkaisten poika- ja yhteislyseoiden kielilinjan VI - VIII luokalla.

9-luokkaiset tyttölyseot.

I l u o k k a (5 tuntia), II l u o k k a (3 tuntia) ja III l u o k k a (4 tuntia). Oppiennätykset samat kuin 8-luokkaisten poika- ja yhteislyseoiden I - III luokalla.

IV l u o k k a (3 tuntia). Algebra. Laskulakien käsittelyä jatketaan. Suhde ja verranto. Graafisen esityksen perusteita. Päässälaskemista.

Geometria. Suoraviivaisten kuvioiden ja ympyrän ominaisuuksien käsittelyä jatketaan. Yksinkertaisia konstruktiotehtäviä.

V l u o k k a (3 tuntia). Algebra. Laskutoimitukset polynomeilla ja murtoluvuilla. Päässälaskemista.

Geometria. Suoraviivaisten kuvioiden ja ympyrän ominaisuuksia. Konstruktiotehtäviä, joista kolme piirretään puhtaaksi.

VI l u o k k a (3 tuntia). Algebra ja aritmetiikka. Ensimmäisen asteen yhtälöt, joissa on yksi tuntematon, graafisesti ja algebrallisesti. Yksinkertaisia probleemoja. Juuren käsite. Aritmetiikan kertaus, jonka yhteydessä prosentti- ja korkolasku täydentäen kerrataan sekä tutustetaan oppilaat postisiirtotiliin, šekkeihin, postilähetysvekseleihin sekä osake-, obligatio- ja diskonttolaskuihin. Tutustumista laskutaulukkoihin. Päässälaskemista.

Geometria. Kolmioiden yhdenmuotoisuusopin pääkohtia. Tutustumista terävien kulmien trigonometrisiin funktioihin ja niiden käyttöön. Pythagoraan väittämä. Alojen ja tilavuuksien täydentävä käsittely.

Matemaattinen linja.

VII l u o k k a (4 tuntia), VIII l u o k k a (4 tuntia) ja VIII l u o k k a (4 tuntia). Oppiennätykset samat kuin 8-luokkaisten poika- ja yhteislyseoiden kielilinjalla.

Kielilinja.

VII l u o k k a (2 tuntia). Algebra. Potenssi- ja juuriopin pääkohdat. Neliöjuuri luvusta taulukkojen avulla. Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti. Yksinkertaisia probleemoja.

Geometria. Transversaaleista. Kolmioiden yhdenmuotoisuus. Mittakaava. Oppi monikulmioiden aloista.

VIII l u o k k a (2 tuntia). Algebra. Ensimmäisen asteen yhtälöt, joissa on kaksi tuntematonta, graafisesti ja algebrallisesti. Yksinkertaisia probleemoja. Logaritmioppi lyhyesti käyttämättä interpolaatiota.

Geometria. Ympyränmitanto. Kuution, suorakulmaisen särmiön, säännöllisen suoran pyramidin, suoran ympyräpohjaisen lieriön ja kartion sekä pallon pinta-alat ja tilavuudet käytännöllisine johtoineen.

IX l u o k k a (2 tuntia). Tilaston käsittelyn perusteita ja tilastotietojen graafista esittämistä. Prosenttilaskun soveltamista yhteiskunnallisiin ja taloudellisiin tehtäviin. Pankkitilit ja rahansiirtomuodot. Ulkomaitten rahat ja rahanvaihto. Osakkeet, obligatiot ja arvopaperipörssin toiminta. Vakuutusmuodot. Verotus. Koulun oppimäärän kertaus.

7-luokkaiset tyttölyseot.

III l u o k k a (4 tuntia). Oppiennätykset samat kuin 6-luokkaisten poika- ja yhteislyseoiden III luokalla.

IV l u o k k a (3 tuntia), V l u o k k a (3 tuntia), VI l u o k k a (3 tuntia), matemaattisen linjan VII l u o k k a (4 tuntia), VIII l u o k k a (4 tuntia) ja IX l u o k k a (4 tuntia) sekä kielilinjan VII l u o k k a (2 tuntia), VIII l u o k k a (2 tuntia) ja IX l u o k k a (2 tuntia). Oppiennätykset samat kuin 9-luokkaisten tyttölyseoiden IV - IX luokalla.

Toinen kotimainen kieli ja vieraat uudet kielet.

Opetuksen päämäärä.

Kaikessa kielenopetuksessa on, tuntimäärästä riippumatta, huolellisesti harjoitettava ääntämistä. Siinä laajuudessa kuin osoitettu tuntimäärä sallii, on oppilaita totutettava käyttämään kieltä puheessa ja kirjoituksessa, opetettava kielen kieliopillista tuntemista ja kartutettava sanavarastoa. Mitä pitemmälle opetus etenee, sitä enemmän on kiinnitettävä huomiota siihen, että oppilaat tutustuvat opetettavan kielen välittämiin kirjallisiin ja sivistyksellisiin arvoihin sekä kansallisiin erikoispiirteisiin.

Oppiennätykset.

Ruotsin kieli suomenkielisissä kouluissa.

8-luokkaiset poika- ja yhteislyseot.

I l u o k k a (4 tuntia). Ääntämisharjoituksia. Tutustumista oikeinkirjoitukseen. Luku-, kuuntelu-, keskustelu- ja käännösharjoituksia havainnon pohjalla ja alkeiskirjan johdolla sekä sopivissa kohdissa lyhyiden lukukappaleiden ja runojen esittämistä muistista. Tekstin yhteydessä kieliopin keskeisimmät kohdat, erikoisesti artikkelin ja preposition tehtävä. Opitun kieliaineksen harjoittelua alkeiskirjaan liittyvän harjoituskirjan avulla. Runsaasti kirjoitusharjoituksia luokan taululle ja vihkoihin.

II l u o k k a (3 tuntia). Luku-, käännös-, kuuntelu- ja keskusteluharjoituksia sekä sopivien lyhyiden lukukappaleiden ja runojen esittämistä muistista. Tekstin yhteydessä laajennetaan ja syvennetään keskeisten kieliopillisten seikkain tuntemista. Opitun kieliaineksen

Liite 1

Oppikouluos. n:o 2003
Kansanop.os. n:o 1412

K O U L U H A L L I T U S

Helsingissä heinäkuun 13 päivänä 1960.

Viite: Opetusministeriön kirje 3860/22.6.1960
Asia: lukion matematiikan oppiennätykset

Y l e i s k i r j e valtion ja yksityisten oppikoulujen sekä kansakoulun yhteydessä toimivien keskikoulujen rehtoreille.

Kouluhallitus lähettää oheisena lukion matematiikan oppiennätykset, metodiset ohjeet ja oppimäärän selvittelyn, jotka opetusministeriö on vahvistanut oppiennätysten osalta kesäkuun 22. päivänä 1960. Ne tulevat voimaan syksyllä 1960 luokka luokalta alkaen lukion ensimmäisestä luokasta. Soveltuvin kohdin niitä saadaan noudattaa muillakin lukioluokilla.

Kouluhallitus oheistaa ainakin kahdet oppiennätykset ja metodiset ohjeet, joista yhdet säilytetään koulun arkistossa ja muut annetaan asianomaisten opettajien käyttöön. Kaikkia kouluhallituksen hyväksymiä oppikirjoja voidaan käyttää uusia oppiennätyksiä seurattaessa.

Pääjohtaja R.H. Oittinen
R.H. Oittinen

Ylitarkastaja Kaarlo Hakama
Kaarlo Hakama

A. LUKION MATEMATIIKAN OPPIENNÄTYKSET

M a t e m a a t t i n e n   l i n j a

Algebra

VI luokka

Juuriopin täydentävä kertaus, irrationaali- ja kompleksiluvut.
Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti.
Yhtälön ratkaiseminen graafisesti.
Toisen asteen yhtälön juurien ja kertoimien välinen yhteys, toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin.
Yksinkertaisia yhtälöitä, joissa esiintyy juurilausekkeita.
Ensimmäisen asteen yhtälöryhmien täydentävä käsittely.
Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöihin palautuvia korkeamman asteen yhtälöitä.
Epäyhtälöt.
Yksinkertaisia yhtälöryhmiä, joissa esiintyy myös toisen asteen yhtälöitä.
Analyyttistä geometriaa: suora ja ympyrä.

VII luokka

Analyyttistä geometriaa: ellipsi, hyperbeli ja paraabeli.
Yleinen juurioppi, potenssikäsitteen laajennus, eksponentti- ja logaritmifunktiot, logaritmioppi, laskuviivain.
Aritmeettinen ja geometrinen sarja, yksinkertaisia koronkorkolaskuja ja sarjaopin sovellutuksia.
Raja-arvon käsite.
Algebrallisten ja trigonometristen funktioiden derivaatat sekä yhdistetyn ja käänteisfunktion, logaritmi- ja eksponenttifunktion derivaatta.
Funktion kulun tutkiminen, tangentin ja normaalin yhtälöt, ääriarvot ja käännepisteet.

VIII luokka

Integrointia derivoimissääntöjen avulla.
Määrätty integraali ja sen soveltaminen pinta-alojen ja tilavuuksien laskemiseen.
Oppimäärän kertaus.

Geometria ja trigonometria

VI luokka

Janojen verrannollisuus sekä kuvioiden yhdenmuotoisuus ja homotetia.
Pythagoraan teoreema, säännölliset monikulmiot ja janojen piirtäminen niiden mittalukujen avulla.
Tasokuvioiden alat (täydentävä käsittely).

VII luokka

Trigonometriset funktiot ja niiden välisiä kaavoja.
Trigonometristen taulujen käyttö, suora- ja vinokulmaisen kolmion ratkaiseminen, sovellutuksia.
Trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen.

VIII luokka

Avaruuskuvioiden ominaisuuksia.
Kappaleista sekä niiden aloista ja tilavuuksista.
Oppimäärän kertaus.

Kielilinja ja tyttölyseoiden matemaattinen linja

Algebra ja geometria

VI luokka

Neliöjuurioppi, irrationaaliluvut (täydentävä kertaus).
Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti sekä juurien ja kertoimien välinen yhteys, toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin.
Yhtälön ratkaiseminen graafisesti.
Yksinkertaisia yhtälöitä, joissa esiintyy juurilausekkeita.
Ensimmäisen asteen yhtälöryhmien täydentävä käsittely.
Epäyhtälöistä.
Yksinkertaisia yhtälöryhmiä, joissa esiintyy toisen asteen yhtälöitä.
Yhdenmuotoisuus sovellutuksineen (täydentävä kertaus).

VII luokka

Yleinen juurioppi, potenssiopin täydennys, logaritmioppi, laskuviivain.
Yksinkertaisia koronkorkolaskuja.
Trigonometrisia laskutehtäviä (täydentävä kertaus).
Geometrisiä laskutehtäviä (pääasiassa pinta-alalaskuja).
Analyyttistä geometriaa: suora, ympyrä ja parabeli.
Derivaatta.

VIII luokka
Jatketaan derivointia.
Avaruusgeometriaa (täydentävä kertaus, laskutehtäviä).
Oppimäärän kertaus.

T y t t ö l y s e o i d e n   k i e l i l i n j a

Albegra ja geometria

VII luokka
Suppea neliöjuuriopin täydennys.
Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti.
Yksinkertaisia probleemoja.
Janojen verrannollisuus ja kuvioiden yhdenmuotoisuus.
Pythagoraan teoreema ja sen laskennollisia sovellutuksia.

VIII luokka
Logaritmikäsite ja sen soveltaminen yksinkertaisiin laskutehtäviin ilman interpolaatiota.
Ympyrämitanto.
Kuution, suorakulmaisen särmiön, säännöllisen pyramidin, suoran ympyrälieriön ja -kartion sekä pallon pinta-alaa ja tilavuutta koskevat kaavat. Laskutehtäviä.
Tilastoinnin perusteita ja yhteiskunnallista matematiikkaa.

IX luokka
Oppimäärien kertaus.
Kertauksen yhteydessä mahdollisimman runsaasti yhteiskuntaelämään liittyviä tehtäviä.

T i l a s t o i n t i   ja   t o d e n n ä k ö i s y y s l a s k e n t o

On suotavaa, että käytetään noin 20 tuntia tilastoinnin ja todennäköisyyslaskennon alkeiden opettamiseen
1. matemaattisella linjalla, jos tällä on enemmän kuin 15 tuntia matematiikkaa
2. kielilinjalla, jos tällä on enemmän kuin 9 tuntia matematiikkaa

3. tyttölyseoiden matemaattisella linjalla.
Mikäli halutaan opettaa edellä mainittuja alkeita pienemmänkin tuntimäärän puitteissa, se on mahdollista kokeilumielessä.

Tilastoinnin ja todennäköisyyslaskennon perusteita käsiteltäessä selvitetään käsitteet todennäköisyys, keskiarvo, punnittu keskiarvo, normaalijakaantuminen, hajonta, keskivirhe ja korrelaatiokerroin. Mahdollisimman yksinkertaisia sovellutuksia.

B. METODISIA OHJEITA

Samoin kuin keskikouluasteella on myös lukion matematiikan opetuksessa jatkuvasti pidettävä silmällä oppilaiden kehitysastetta. Lisäksi on huomattava, että useimpien oppikoulujen lukioasteella on linjajako ja että valinnan perusteena eri linjoille siirryttäessä on monessa tapauksessa matematiikka. Näin ollen matemaattisella linjalla oppilasaines tulee olemaan keskimäärin matemaattisesti lahjakkaampaa kuin keskikouluasteella. Tämän huomioon ottaen opetus on kaikilla linjoilla järjestettävä niitten edellytysten mukaan, mitkä kunkin linjan oppilailla on, jotta harrastus matematiikan opiskeluun säilyy.

Oppilaat saavat tyydytystä matematiikan opiskelusta erikoisesti silloin, kun he osaavat ratkaista tehtäviä, joissa he joutuvat ponnistamaan ajatuskykyään. Sovellutuksia valittaessa onkin jatkuvasti kiinnitettävä huomiota siihen, että sekä heikommat että lahjakkaammat oppilaat saavat heille sopivia tehtäviä. Teoreettiset tarkastelut, joita lukiossa esiintyy enemmän kuin keskikouluasteella, on käsiteltävä kiirehtimättä ja selvästi sekä, mikäli mahdollista, riittävän valmistelun jälkeen. Erityisesti on tämä otettava huomioon korkeamman matematiikan alkeita opiskeltaessa.

Uuteen asiaryhmään siirryttäessä on, mikäli mahdollista, syytä esittää lyhyt historiallinen maininta sekä esittää jokin mielenkiintoinen tehtävä, jonka ratkaisemiseksi tarvitaan uusien asioiden käsittelyä. Tämä kaikki on omiaan herättämään odottavaa mielenkiintoa edessä oleviin uusiin kysymyksiin.

Uuden valmistamiseen käytetään yleensä pääosa tuntia. Tehtävän ilmoitus suoritetaan selvästi ja täsmällisesti, jotta oppilaat alunperin tietävät, mistä on kysymys. Opettajan on syytä suunnitella, miten hän havainnollisesti, numerolaskuin ja piirroksin, saa uuden asian käsitteineen hahmottumaan ja selkenemään. Oppilaat pidetään tällöin kiinteästi ja aktiivisesti toiminnassa mukana, ei kuitenkaan niin, että heidän aikansa menee esim. taululta kopioimiseen. Kun oppikirjoissa esim. analyyttinen geometria, logaritmioppi sekä differentiaali- ja integraalilaskenta aloitetaan esittämällä nopeassa tahdissa kokonaan uusia asioita, ei näitä ilman muuta anneta kotitehtäväksi kappale kappaleelta, vaan koetetaan esimerkein selvittää oppilaille perusajatus.

Matematiikassa vievät tehtävät huomattavan osan ajasta, Yleensä harjoittelu joudutaan suorittamaan kotona, sillä tunneilla jää vain niukasti aikaa harjoitteluun. Mutta toiselta puolen on tärkeätä, että perustehtäviä käsitellään myös tunnilla ja että opettaja yleensäkin antaa riittävästi ohjausta laskutehtävien suorittamisessa.

Kotilaskuja määrättäessä on pidettävä silmällä, että ne eivät vaadi oppilailta liian paljon aikaa, mutta että ne tehokkaasti edistävät keskeisten asioiden mieleen painumista. Ne on myös valittava luokan kehitystason mukaisesti ja siten, että kaikki oppilaat osaavat laskea ainakin jonkin tehtävän. Mukana voi tietenkin olla vaikeitakin tehtäviä, mutta oppilaille on hyvä etukäteen huomauttaa vaikeista tehtävistä, jotta heikommat oppilaat eivät käyttäisi niihin kohtuuttomasti aikaa. Kaikkialla on syytä välttää pitkiin laskutoimituksiin johtavia tehtäviä.

Laskuharjoittelun yhteydessä on jatkuvasti pidettävä yllä numeerista laskutaitoa ja kiinnitettävä huomiota likiarvolaskuun ja laskujen tarkistamiseen. Oppilaitten on tällöin hyvä tottua arvioimaan lausekkeen arvo myös päässälaskien. Heitä on opetettava käyttämään myös laskuviivainta.

Kotitehtävien tarkistamisesta on keskikoulun matematiikan metodisten ohjeiden yhteydessä esitetty eri menettelytapoja. Niitä voidaan soveltaa lukioluokillakin lähinnä silloin, kun on kysymys perusseikkoja koskevasta harjoittelusta. Jotta tehtävien tarkastelu ei kuitenkaan veisi liian paljon aikaa, on pääpaino kiinnitettävä vaikeampiin tehtäviin, varsinkin jos ne käsittelevät keskeisiä sovellutuksia. Oppilaita on totutettava myös yhtäjaksoisiin esityksiin taululla ja kiinnitettävä huomiota myös suullisen esitystaidon kehittämiseen.

Koska aikaisemman oppimäärän hallitseminen on matematiikassa välttämätön edellytys uuden oppimiselle, on kertauksiin kiinnitettävä vakavaa huomiota. Ennen kuin uuteen asiaryhmään siirrytään, on opettajan vakuuttauduttava siitä, että oppilaat riittävästi hallitsevat aikaisemman kurssin. Jos kuitenkin uutta käsiteltäessä ilmenee, että jonkin aikaisemman oppimäärän kohta tuottaa vaikeuksia, on se uudelleen lyhyesti kerrattava. Pitkän kesäloman jälkeen on lyhyt kertaus välttämätön.

Ylimmällä luokalla on koko oppimäärän kertaukseen kiinnitettävä erityistä huomiota. Tällöin ei ole tyydyttävä vain oppikirjan läpikäymiseen, vaan suoritettava myös yhteenvetoja, rinnastuksia ja sellaisia syventäviä teoreettisia tarkasteluja, joista alemmilla luokilla on luovuttu. Näin voidaan palauttaa mieleen esim. lukukäsitteen ja potenssikäsitteen eri laajentamiset.

Kertauksen yhteydessä olisi suotavaa ainakin matemaattisella linjalla käyttää muutama tunti matemaattisen järjestelmän selventämiseen. Voitaisiin lähteä jostakin sopivasti valitusta geometrian tai algebran teoreemasta ja tutkia, mihin aikaisempiin lauseisiin sen todistus nojautuu. Viimeksi mainittuja lauseita tutkittaisiin samalla tavoin. Täten mentäisiin järjestelmässä vähitellen alaspäin ja päädytään lopulta lauseisiin, joita ei enää voida todistaa aikaisempien lauseiden nojalla. Nämä lauseet ovat järjestelmän aksioomeja. Täten saataisiin aksioomain asema matemaattisessa järjestelmässä selvemmäksi. Jos aika riittää ja opettaja on kyllin perehtynyt asiaan, voitaisiin mainita tärkeimmät geometrian aksioomat. Erityisesti kiinnitettäisiin huomio parallelliaksiooman merkitykseen, sekä euklidiseen ja epäeuklidiseen geometriaan. Samalla tavalla voitaisiin tarkastella käsitteiden palautumista aikaisempiin käsitteisiin ja lopulta peruskäsitteisiin.

Koetehtävät valitaan huolellisesti ja niin, että joka kokeessa on sekä helppoja että vaikeampia tehtäviä ja että ne läheisesti liittyvät luettuun oppimäärään tai kertaavat sitä. Koetehtäviä suunniteltaessa opettajan on otettava huomioon oppilaiden käytettävissä oleva aika ja vältettävä suhteettoman pitkiin laskuihin johtavia tehtäviä, jotta ainakin parhaat oppilaat ehtivät käsittelemään kaikki. Oppilaita on neuvottava valitsemaan sellaisia menettelytapoja, joita käyttäen tulos saavutetaan mahdollisimman yksinkertaisesti.

Koetehtävien arvostelun voi perustaa suoraviivaiseen kuvaajaan. On syytä korjata koko luokan kokeet ensin, jotta nähdään, ovatko oppilaat riittävästi omaksuneet tarkistuksen alaisena olevan oppimäärän. Jos näin ei ole, on syytä leiventää arvostelua muuttamalla kuvaaja loivemmaksi. On kuitenkin paikallaan, että oppilaat tuntevat normaalisen arvosteluasteikon. Kokeita arvosteltaessa käytetään arvosanoja 1-10. Kokeisiin käytetään vähintään 10 % oppitunneista.

C. OPPIMÄÄRÄN SELVITTELYÄ

M a t e m a a t t i n e n l i n j a

Algebra

Juuriopin täydennys suoritetaan rajoittumalla lähinnä neliöjuuriin. Tulon ja osamäärän juurtamissäännöt voidaan kuitenkin todistaa yleisesti. Irrationaali- ja kompleksiluvut määritellään sekä suoritetaan niihin liittyviä yksinkertaisia laskuja. Myöhemmin logaritmioppia aloitettaessa murtopotenssia käsiteltäessä täydennetään juurioppia.

Toisen asteen yhtälön ratkaisu aloitetaan suorittamalla laskuja ilman kaavoja. Oppilaitten on harjaannuttava ratkaisemaan vaillinaiset yhtälöt lyhyintä tietä. Supistetun normaalimuodon ratkaisukaavaa kannattaa yleensä käyttää vain, kun x:n kerroin on parillinen luku. Kun oppilaat koulussa ollessaan joutuvat ratkaisemaan satoja toisen asteen yhtälöitä, on heidät opetettava kussakin tapauksessa käyttämään yksinkertaisinta mahdollista keinoa. Neliöjuuren juurrettavasta on pyrittävä erottamaan tekijöitä juurimerkin ulkopuolelle.

Yhtälöiden graafinen ratkaiseminen selvitetään yleisenä kaikkia yhtälöitä koskevana menetelmänä. Toisen asteen yhtälön ratkaisun yhteydessä käsitellään myös toisen asteen polynomin kuvaaja suorittamalla piirtämistä, jolloin tehtävät valitaan niin, että eri tapaukset tulevat esille ja voidaan suorittaa yhteenveto toisen asteen yhtälön reaalisten juurien lukumäärästä. Korkeamman asteen yhtälöitä ratkaistaessa ja tarvittavia kuvaajia piirrettäessä voidaan eräissä tapauksissa ordinaatan yksikkö valita lyhyemmäksi kuin abskissan, esim. 1/5 tai 1/10 siitä. Graafisesti määrätyn juuren tarkkuutta voidaan parantaa piirtämällä suurennettu kuvio juuren ympäristöstä.

Toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia käsiteltäessä rajoitutaan juurien ja kertoimien väliseen yhteyteen ja toisen asteen trinomin jakamiseen tekijöihin. Sovellutuksina lasketaan vain harvoja ja yksinkertaisia juurien ja kertoimien välisten yhtälöiden avulla välittömästi ratkaistavia tehtäviä.

Yhtälöistä, joissa esiintyy juurilausekkeita, käsitellään sellaisia, jotka sievennettäessä johtavat ensimmäisen tai toisen asteen yhtälöihin. Kiinnitetään huomiota siihen, että toiseen potenssiin korotettaessa voi yhtälölle tulla vieraita juuria.

Ensimmäisen asteen yhtälöryhmien käsittelyä täydennetään ottamalla huomioon myös yhtälöryhmät, joissa esiintyy useampia kuin kaksi yhtälöä ja tuntematonta. Käsitellään myös yhtälöryhmiä, joiden ratkaisemisessa käytetään aputuntemattomia.

Yhtälöiden ja yhtälöryhmien sovellutusten joukkoon otetaan myös yksinkertaisia algebrallisia probleemoja, mutta niiden käsittely rajoitetaan vähäiseksi.

Korkeamman asteen yhtälöistä ratkaistaan joitakin yksinkertaisia yhtälöitä. Kiinnitetään huomiota myös algebrallisten yhtälöiden juurien lukumäärään ja n:nnen asteen polynomin jakautumiseen ensimmäisen asteen tekijöihin.

Epäyhtälöt ratkaistaan tavanomaisin keinoin. Normaalimuodossa oleva toisen asteen epäyhtälö ratkaistaan määräämällä epäyhtälön vasemmalla puolella olevan funktion nollakohdat ja joko soveltamalla graafista ajattelutapaa funktion merkin tutkimiseksi tai jakamalla vasen puoli tekijöihinsä ja tutkimalla funktion merkkiä tekijöiden merkkien avulla. Tekijöihin jakamista voidaan soveltaa myös korkeamman asteen epäyhtälöitä ja murtolausekkeen sisältäviä epäyhtälöitä ratkaistaessa tarkastelemalla tekijöitten ja vastaavasti osoittajan ja nimittäjän etumerkkejä. Epäyhtälöitä on syytä käyttää myös toisen asteen yhtälön juurien reaalisuustarkasteluihin. Ääriarvojen määrääminen suoritetaan vain derivoimalla.

Sellaisia yhtälöryhmiä, joissa esiintyy myös toisen asteen yhtälöitä, ratkaistaessa ei taitokeinoja käsitellä laajasti, vaan pyritään selviytymään samoilla keinoilla kuin ensimmäisen asteen yhtälöryhmissä. Päähuomio kiinnitetään yhtälöryhmiin, joissa on yksi ensimmäisen asteen yhtälö ja yksi toisen asteen yhtälö, tai joissa on kaksi sellaista toisen asteen yhtälöä, joista voidaan johtaa ensimmäisen asteen tai homogeeninen toisen asteen yhtälö.

Analyyttistä geometriaa luettaessa käsitellään kahden pisteen välisen janan pituus, suoran yhtälö, kun tunnetaan suuntakulma tai kulmakerroin ja yksi piste, jonka kautta suora kulkee, kahden annetun pisteen kautta kulkevan suoran yhtälö, yhdensuuntaiset ja toisiaan vastaan kohtisuorassa olevat suorat sekä pisteen etäisyys suorasta. Sovellutuksena käsitellään ensimmäisen asteen yhtälöparin graafinen ratkaisu. Kartioleikkauksista kiinnitetään päähuomio ympyrään ja paraabeliin, jonka akseli on jommankumman koordinaattiakselin suuntainen. Näytetään, että toisen asteen polynomin kuvaaja on aina paraabeli. Ellipsiä ja hyperbeliä käsiteltäessä rajoitutaan perusmuotoisiin yhtälöihin keskipisteen ollessa origossa. Määritellään hyperbelin asymtootit. Ilman yksityiskohtaisia todistuksia selvitellään lopuksi toisen asteen yhtälön ja kartioleikkausten välinen yhteys, jolloin mainitaan myös xy-termin vaikutus.

Logaritmioppia aloitettaessa kerrataan potenssikäsitteen laajentaminen ja täydennetään se määrittelemällä murtopotenssi sekä potenssi, jonka eksponentti on irrationaalinen. Eksponenttifunktiota kuvattaessa todetaan potenssin määritelmien yhteensopivaisuus ja kuvaajan pisteitä laskettaessa käytetään myös positiivisia ja negatiivisia murtolukuja. Käänteisfunktion käsitteeseen nojautuen päädytään sitten logaritmifunktioon ja sen kuvaajaan. Logaritmiopissa käsitellään käytännöllisten laskujen lisäksi yksinkertaisia logaritmi- ja eksponenttiyhtälöitä sekä sovellutuksena mm. siirtyminen logaritmijärjestelmästä toiseen. Laskuissa käytetään tauluja, joissa numerus on annettu neli- ja mantissa viisinumeroisena. Interpolointia tarkastellaan kaikkiin taulukkoihin soveltuvana menetelmänä ja valaistaan sitä käytännöllisin esimerkein.

Laskuviivain voidaan ottaa käyttöön jo keskikoulussa, vaikka sen teoria esitetään vasta logaritmiopin yhteydessä. Yleensä rajoitutaan sen käytössä kerto- ja jakolaskuun, neliöön ja kuutioon korottamiseen sekä neliö- ja kuutiojuuren ottamiseen. Kuitenkin voidaan sitä jo keskikoulusta lähtien käyttää myös trigonometristen funktioiden arvojen määrittämiseen. Desimaalipilkku määritetään lyhennetyillä arvoilla laskien, tavallisesti päässälaskien. Erityistä huomiota kiinnitetään sopivimpaan lukujärjestykseen, ts. siihen, miten päästään vähimmällä kielen siirroilla. Tämä opetus edellyttää oppilaitten käytössä olevia viivaimia. On syytä totuttaa oppilaita käyttämään niitä likiarvojen laskemiseen silloin, kun tulosta ei tarvitse ilmoittaa tarkemmin kuin kolman merkitsevän numeron tarkkuudella erityisesti geometriassa, fysiikassa ja kemiassa.

Sarjaoppi aloitetaan aritmeettisella sarjalla, joka käsitellään lyhyesti. Päähuomio kiinnitetään geometriseen sarjaan. Korkoa korolle laskujen yhteydessä perehdytään myös yksinkertaisiin jaksollisiin suorituksiin. Erityistä huomiota kiinnitetään raja-arvon käsitteeseen ja päättymättömien geometristen sarjojen suuppenemistarkasteluihin.

Differentiaalilaskenta aloitetaan perehtymällä esimerkkien avulla argumentin ja funktion toisiaan vastaaviin muutoksiin ja niiden vertailuun erotusosamäärän avulla. Näin joudutaan derivaatan analyyttiseen määritelmään. Samalla esitetään derivaatan geometrinen tulkinta, jota valaistaan esimerkein.

Derivoimissäännöistä johdetaan ensin potenssin, summan ja polynomin derivoimissäännöt. Sen jälkeen ryhdytään soveltamaan derivoimista polynomehin, jotta oppilaat vähitellen tottuisivat tähän uuteen käsitteeseen ja huomaisivat sen käyttökelpoisuuden. Huomiota kiinnitetään derivaatan etumerkin antamiin tietoihin ja nimenomaan etumerkin vaihdoksiin. Näin voidaan käsitellä funktion kulku, ääriarvot ja käännepisteet sekä kuvaajan tangentti ja normaali. Myös selvitetään toisen derivaatan merkitys. Tämän jälkeen siirrytään vaikeampaan osaan ja johdetaan muut derivoimissäännöt. Käsitellään myös murtofunktioiden kuvaajien asymptoottien määrittämistä.

Integraalilaskenta aloitetaan perehtymällä esimerkkien avulla derivoimisen vastakkaiseen laskutoimitukseen. Integraalifunktio määritellään. Pinta-alafunktioon liittyen määritellään määrätty integraali. Sovellutuksena lasketaan pinta-aloja ja tilavuuksia. Sopivilla esimerkeillä valaistaan integraalilaskennan soveltuvuutta luonnonopillisten kysymysten käsittelyyn.

Geometria

Aluksi kerrataan ja täydennetään kolmioiden yhdenmuotoisuusoppia. Yleinen yhdenmuotoisuus ja homotetia käsitellään keskittyen suhteellisen harvoihin keskeisiin teoreemoihin.

Käsitellään janan harmooninen jako (sovellutuksena kolmion kulman ja sen vieruskulman puolittajia koskeva teoreema ja Apolloniuksen ympyrä), ympyrän kahden sekantin sekä sekantin ja tangentin leikkaamista koskevat teoreemat suorakulmaisen kolmion sivuja ja korkeutta koskevat verrannot ja Pythagoraan teoreema sekä yksinkertaisimpien ym yrän sisään piirrettyjen säännöllisten monikulmioiden sivujen mittaluvut (neliö, tasasivuinen kolmio, säännöllinen kuusikulmio ja säännöllinen kymmenkulmio). Sopivissa kohdissa voidaan käyttää trigonometrisia funktioita.

Janojen piirtämistä niiden mittalukujen avulla käsitellään lyhyesti ja sovelletaan joihinkin yksinkertaisiin piirtämistehtäviin esim. janan jakamiseen jatkuvaan suhteeseen.

Keskikoulussa luettu tasokuvioiden pinta-alaoppi kerrataan ja täydennetään. Huomiota kiinnitetään myös yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhteeseen. Voidaan ratkaista joitakin piirtämistehtäviä.

Trigonometriassa käsitellään trigonometristen funktioiden välisten peruskaavojen lisäksi trigonometristen funktioiden yhteenlasku- ja vähennyslaskukaavat sekä niistä välittömästi johdettavat kaavat. Päähuomio kiinnitetään kaavojen hyvään hallintaan sekä trigonometristen funktioiden riippuvuuteen argumentistaan ja niiden jaksollisuuteen. Tässä suhteessa tarjoaa trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen erinomaisen harjoituskeinon. Tehtäviä valittaessa on vältettävä isotöisiä tai muuten vaikeita yhtälöitä.

Vinokulmaiset kolmiot ratkaistaan sini- ja kosinilauseita käyttäen. Laskut suoritetaan edellä mainittujen taulujen avulla. Avaruusgeometrian opetus aloitetaan kuvioiden piirtämisharjoittelulla. Ennen kappaleiden ja niiden pinta-alojen ja tilavuuksien käsittelyä selvitetään ja määritellään keskeisimmät peruskäsitteet: kahden tason leikkaussuora, tason normaali, janan keskinormaalitaso, diedrikulma, kohtisuorat ja yhdensuuntaiset tasot, tason kanssa yhdensuuntaiset suorat sekä suoran ja tason välinen kaltevuuskulma. Selvittelyn yhteydessä voidaan todistaa joitakin teoreemia, esim. tason normaalia koskeva perusteoreema. Avaruusgeometrian valmistavaa osaa ei kuitenkaan ole esitettävä laajasti. Käsitellään kappaleiden aloja ja tilavuuksia jättäen integraalilaskennon sovellutuksiksi sinne sopivat kaavat. Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien suhteisiin kiinnitetään myös huomiota.

K i e l i l i n j a

Algebra

Neliöjuuria koskevaa juurioppia kerrataan ja täydennetään. Tarkastellaan erilaisten lukujen neliöjuuria. Irrationaaliluvat esitetään ja reaali- ja imaginaariluvut mainitaan.

Toisen asteen yhtälön ratkaisu aloitetaan käsittelemällä vaillinaisia yhtälöitä, minkä jälkeen perehdytään neliöksi täydentämiseen. Oppilaille esitetään sekä supistettu että yleinen normaalimuoto ja niiden ratkaisukaavat. Sovellutuksena käsitellään juurien ja kertoimien välinen yhteys sekä toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin.

Yhtälöiden graafinen ratkaiseminen käsitellään yleisenä kaikkiin yhtälöihin soveltuvana menetelmänä. Toisen asteen yhtälön ratkaisun yhteydessä otetaan esille erilaiset tapaukset reaalisten juurien lukumäärään nähden. Paraabelin huipun koordinaattien määrittäminen jätetään differentiaalilaskennan yhteyteen.

Yhtälöistä, joissa esiintyy juurilausekkeita käsitellään joitakin yksinkertaisia yhtälöitä, jotka sievennettyinä johtavat ensimmäisen tai toisen asteen yhtälöihin. Kiinnitetään huomiota siihen, että toiseen potenssiin korotettaessa voi yhtälölle tulla vieraita juuria.

Ensimmäisen asteen yhtäloryhmien käsittelyä täydennetään ottamalla huomioon myös yhtälöryhmät, joissa esiintyy kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta.

Yksinkertaisimmat ensimmäisen ja toisen asteen epäyhtälöt.

Yhtälöryhmistä, joissa esiintyy toisen asteen yhtälöitä, käsitellään vain sellaisia, kahden yhtälön muodostamia yhtälöryhmiä, joissa toinen yhtälö on ensimmäistä astetta, toinen toista astetta.

Yleisestä juuriopista luetaan lyhyesti tärkeimmät asiat ja käsitellään potensseja, joiden eksponentti on murtoluku tai irrationaaliluku.

Määritellään logaritmikäsite sekä sovelletaan sitä tulon, osamäärän, potenssin ja juuren määräämiseen. Laskuissa käytetään nelinumeroisia tauluja ilman interpolointia.

Laskuviivainta käsiteltäessä rajoitutaan kerto- ja jakolaskuun, neliöön ja kuutioon korottamiseen sekä neliö- ja kuutiojuuren ottamiseen. Vrt. myös matemaattisen linjan ohjeita.

Logaritmiopin sovellutuksena lasketaan yksinkertaisia koronkorkolaskuja.

Analyyttistä geometriaa luettaessa käsitellään kahden pisteen välisen janan pituus, suoran yhtälö, kun tunnetaan suuntakulma tai kulmakerroin ja yksi piste, jonka kautta suora kulkee, kahden annetun pisteen kautta kulkevan suoran yhtälö, yhdensuuntaiset ja toisiaan vastaan kohtisuorassa olevat suorat sekä ympyrä ja paraabeli $y = ax^2 + bc + c$.

Differentiaalilaskenta aloitetaan perehtymällä esimerkkien avulla argumentin ja funktion toisiaan vastaaviin muutoksiin ja niiden vertailuun erotusosamäärän avulla. Näin joudutaan derivaatan analyyttiseen määritelmään. Samalla esitetään derivaatan geometrinen tulkinta, jota valaistaan esimerkein.

Johdetaan yksinkertaiset derivoimissäännöt, jotta voidaan derivoida polynomeja. Derivaatan käsitettä sovelletaan funktion kulun tutkimiseen ja ääriarvojen määrittämiseen. Sovellutuksena voidaan myös johtaa tangentin ja normaalin yhtälöt. Erityistä huomiota kiinnitetään derivaatan etumerkin antamiin tietoihin ja nimenomaan etumerkin vaihdoksiin.

Tehtäviä valittaessa on ns. läpäisyperiaatteena pidettävä sitä, että mahdollisuuksien mukaan ne otetaan yhteiskunta- ja elinkeinoelämän piiristä käyttäen lähteenä mm. Tilastollista vuosikirjaa. Tilastollisia asioita valaistaan erilaisin graafisin menetelmin.

Geometria

Täydentäen kerrataan kolmioiden yhdenmuotoisuusoppi. Yleinen yhdenmuotoisuus määritellään.

Käsitellään kolmion kulman ja sen vieruskulman puolittajia koskeva teoreema, ympyrän kahden sekantin sekä sekantin ja tangentin leikkaamista koskevat teoreemat, suorakulmaisen kolmion sivuja ja korkeutta koskevat verrannot. Pythagoraan teoreema sekä yksinkertaisimpien ympyrän sisään piirrettyjen monikulmioiden sivut (neliö, tasasivuinen kolmio ja säännöllinen kuusikulmio).

Trigonometrian kurssi kerrataan ja sitä täydennetään. Luetaan trigonometristen funktioiden väliset perusyhtälöt. Suoritetaan harjoitehtäviä, joiden ratkaisu perustuu suorakulmaisen kolmion ratkaisemiseen.

Lasketaan myös yksinkertaisia pinta-alalaskuja. Harjoitustehtävät valitaan tähän lyhyempään oppimäärään liittyen ja niin, että ne voidaan suorittaa kielilinjaan kuuluvan algebran tai trigonometrian kurssin avulla.

Avaruusgeometrian opetus aloitetaan piirtämisharjoituksilla. Tärkeimmät peruskäsitteet määritellään malleja ja kuvia hyväksi käyttäen. Lasketaan tehtäviä, jotka käsittelevät säännöllisen särmiön ja pyramidin, suoran ympyrälieriön ja -kartion sekä pallon aloja ja tilavuuksia.

Vahvistettu opetusministeriössä oppiennätysten osalta 22 päivänä kesäkuuta 1960.

Hallitusneuvos Aulis Kohonen
Aulis Kohonen

Jäljennöksen oikeaksi todistaa:
Helsingissä, kouluhallituksessa, heinäkuun 22 päivänä 1960.
Apulaiskirjaaja Margit Snellman
Margit Snellman

Liite n:o 1.

Jäljennös.

Lukion matematiikan oppiennätykset ja metodiset ohjeet

Lukion matematiikan opetuksen tavoite

Lukion matematiikan opetuksen tarkoituksena on keskikoulussa annettua opetusta täydentäen ja syventäen kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua, laajentaa heidän matemaattisia tietojaan sekä lisätä heidän taitoaan käyttää matemaattisia menettelytapoja. Tällöin on pidettävä silmällä näiden tietojen ja taitojen tarvetta talous- ja yhteiskuntaelämässä ja korkeakouluopinnoissa.

Jäljennös.

Liite n:o 2.

T y t t ö l y s e o i d e n   k i e l i l i n j a

Tyttölyseoiden kielilinjan matematiikan opetuksen tarkoituksena on kerrata keskikoulussa opittu ja täydentää sitä silmällä pitäen matemaattisten tietojen soveltamista käytäntöön.

Uusina asioina tulevat toisen asteen yhtälön ratkaiseminen ja logaritmit. Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen aloitetaan vaillinaisista yhtälöistä, joista siirrytään neliöksi täydentämisen avulla supistetun normaalimuodon ratkaisemiseen. Käsitellään vain numerokertoimisia yhtälöitä. Logaritmeja käytetään vain hankalien kerto- ja jakolaskujen ja niiden avulla muodostettujen hankalien lausekkeiden sekä potenssiin korottamisien ja neliöjuurten laskemiseen.

Tilastoinnissa oppilaat tutustutetaan tilastojen graafiseen esittämiseen ja tilastotaulukkoihin esim. Tilastollisen vuosikirjan avulla. Yhteiskunnallisen matematiikan sovellutuksina lasketaan prosentti- ja korkolaskuja, käsitellään rahanvaihtoa, verotusta ja arvopapereita sekä tutustutaan indeksikäsitteeseen.

Jäljennöksen oikeaksi todistaa:
Helsingissä, kouluhallituksessa, heinäkuun
22 päivänä 1960.

Apulaiskirjaaja Margit Snellman
Margit Snellman

Liite 3

LUKION MATEMATIIKAN OPETUSSUUNNITELMAT 1973

JOHDANTO

OPETUSSUUNNITELMAN UUDISTAMISEN TAUSTAA

Matemaattisten menetelmien käytön levitessä yhä laajemmalle teknistyvässä yhteiskunnassamme on koulujen matematiikan opetuksen seurattava muuttuneita vaatimuksia. Korkeakouluissa on uudistuminen matematiikan osalta ollut voimakasta jo yli kymmenen vuoden ajan. Peruskoulun ja keskikoulun osalta on matematiikan opetus perustettu uudistetulle pohjalle. Nämä jo tapahtuneet muutokset ovat tehneet ajankohtaisiksi ja kiireellisiksi myös lukion opetussuunnitelmien uudistamisen ja ajanmukaistamisen.

TAVOITTEET

Lukion matematiikan opetuksen yleistavoitteena pidetään mahdollisimman *perusteellista valmistavuutta erilaisiin jatko-opintoihin* sekä yleensä *harrastuneisuuden herättämistä matematiikan käsitemaailmaa kohtaan.*

Pitkällä kurssilla pidetään sen luonteen mukaisesti lähinnä silmällä matemaattis-luonnontieteellisiä ja teknisiä jatko-opintoja.

Lyhyellä kurssilla puolestaan tähdätään lähinnä humanistisiin, yhteiskuntatieteellisiin sekä palvelu- ja kauppa-alan jatko-opintoihin ottaen kuitenkin huomioon fysiikan opetussuunnitelmien asettamat vaatimukset.

Erilaisten viikkotuntimäärien puitteissa on näiden erilaisten päämäärien myös ilmettävä eri kurssien sisällöissä ja työtavoissa.

Uudistamisen pohjana on pidetty lähinnä Pohjoismaisen Matematiikan Opetuksen Uudistamistoimikunnan (PMOU:n) ehdotuksia. Niistä ilmenevät lukion matematiikan opetuksen erityistavoitteet voidaan kiteyttää seuraavasti:

— laskuteknisten valmiuksien hankkiminen,
— matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen,
— matematiikan soveltaminen.

OPPIAINEKSEN VALINTA

Koska kursseja on jouduttu modernisoimaan ja tuomaan mukaan myös uutta oppiainesta, on jouduttu luopumaan osasta koulukursseihin perinteellisesti kuulunutta ainesta. Aineksen valinnasta ja karsimisesta päätettäessä on pidetty silmällä seuraavia oppiainekselle asetettavia vaatimuksia:

— hyödyllisyys erilaisten jatko-opintojen kannalta,
— liittyminen koulumatematiikan kokonaisstruktuuriin, mm. hyödyllisyys myöhemmin tulevien asioiden kannalta,
— opettavuus matemaattisen teorian- ja käsitteenmuodostuksen kannalta.

Edellä esitettyjen tavoitteiden perusteella tarkastellaan yleisesti uusiin kursseihin liittyviä näkökohtia.

Ehkä suurin muutos vanhoihin oppiennätyksiin verrattuna tapahtuu geometrisen aineksen käsittelyssä. Eukleideen mukaiselle systematiikalle perustuvasta esityksestä luovutaan ja geometrisluonteisissa tarkasteluissa siirrytään suurelta osin vektoreiden käyttöön. Samalla jätetään pois harppi-viivoitinkonstruktiot. Yksinkertaisten kapaleiden hahmottamiseen ja piirtämiseen sekä pinta-alojen ja tilavuuksien laskemiseen on edelleen syytä kiinnittää riittävästi huomiota. Tämä tapahtunee parhaiten vektorilaskennan, integraalilaskennan ja erilaisten sovellutusten yhteydessä.

Toisen asteen käyrien teoriaa supistetaan huomattavasti sen irrallisuuden ja raskauden takia. Trigonometristen sekä eksponentti- ja logaritmiyhtälöiden ratkaisemista harjoitellaan vain aivan perustapauksissa. Logaritmitaulujen käytön merkitys numerolaskuja suoritettaessa on nykyisin melkoisesti vähentynyt. Yleensä on kuitenkin erilaisten taulukoiden käyttöön syytä kiinnittää riittävästi huomiota; erityisesti lyhyellä linjalla tätä voidaan pitää suhteellisen tärkeänä.

Varsinaisena uutena asiana suunnitelmaan kuuluu sekä pitkällä että lyhyellä kurssilla tilastotieteen ja todennäköisyyslaskennan alkeita sekä vektorigeometriaa. Erikoiskurssien puitteissa voidaan tarpeen ja kiinnostuksen mukaan syventyä muihinkin matematiikan aloihin.

ERI KOULUVUOSIEN TARKASTELUA

10. kouluvuosi

Sekä pitkän että lyhyen kurssin 10. kouluvuosi on tarkoitus suurelta osin käyttää aikaisemmin opittujen tietojen ja taitojen syventämiseen ja varmistamiseen. Johdannon lopussa luetellaan ne matemaattiset valmiudet, jotka oppilailla edellytetään olevan heidän siirtyessään lukioon. Mikäli aikaisemman opiskelun pohjana ei ole ollut uudistettu oppiaines, on riittävästi aikaa käytettävä vektorien ja funktioiden sisäistämiseen. Nimenomaan lyhyen kurssin valinneilla saattaa taidoissaan olla suuriakin puutteita, ja näin ollen on syytä kiinnittää riittävästi huomiota peruslaskutoimitusten kertaamiseen. Yleisestikin on 10. kouluvuoden eräs tärkeä tavoite riittävän laskennallisen valmiuden saavuttaminen. Perusoperaatiot — yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen sekä polynomilaskennan pääpiirteet — on syytä hallita lähes automaattisesti. On kuitenkin huomattava, että teknisesti vaikeiden ja mutkallisten laskujen suorittamista sekä erikoismenetelmiin perustuvien tehtävien ratkaisemista ei voida pitää tarkoituksenmukaisena päämääränä. Tällä ei tietenkään kielletä myös vaativien laskutehtävien arvoa.

Lyhyen kurssin luonteen mukaisesti on sen puitteissa keskityttävä varsin yksinkertaisten laskuoperaatioiden harjaannuttamiseen ja myös sovellutusmahdollisuuksien esiintuomiseen. Lyhyt kurssi alkaa suppealla tilastomatematiikan johdannolla, jonka tarkoitus on esitellä oppilaille eräs matematiikan tärkeä sovellutusalue ja motivoida heitä. Jotta laskennalliset ja käsitteelliset hankaluudet eivät vaikuttaisi motivaatioon negatiivisesti, on syytä tässä yhteydessä pitäytyä aivan kuvaannolliseen ja havainnolliseen esitykseen.

Pitkällä kurssilla kiinnitetään enemmän huomiota asioiden perusteluihin sekä esityksen täsmällisyyteen ja käsitellään myös vaativampia laskuesimerkkejä ja -tehtäviä. 10. kouluvuoteen sisältyy geometrinen osa, jonka puitteissa

kehitetään vektorilaskennan pohjalta sellaisia taitoja, joiden avulla voidaan hallita tavallisimmat tasogeometriset laskutehtävät. Analyyttisen geometrian osalta käsitellään huolellisesti suora ja ympyrä. Esittelynomaisesti todetaan perusasiat muista toisen asteen käyristä.

Funktio-oppi saattaa pitkän kurssin osalta joissakin tapauksissa osittain siirtyä 11. kouluvuoteen. Kummallakin kurssilla on tärkeätä oppia esittämään funktioita koordinaatistossa ja tulkitsemaan niiden ominaisuuksia. Eksponentti- ja logaritmifunktiot esitetään melko havainnollisesti; tarkkoihin todisteluihin esimerkiksi eksponenttilaskusääntöjen pysyvyydestä ei tässä yhteydessä ole syytä ryhtyä.

11. kouluvuosi

11. kouluvuosi muodostaa sekä lyhyellä että pitkällä kurssilla sangen yhtenäisen differentiaali- ja integraalilaskennan esittelyn.

Analyysin peruskäsitteistä — raja-arvosta, derivaatasta ja määrätystä integraalista — on pyrittävä antamaan oppilaille selvä ja johdonmukainen käsitys, joka melko suuressa määrin voi perustua geometriseen tarkasteluun.

Sarjaopin osuutta vähennetään, mutta geometrinen sarja esitetään lukujonojen suppenemista tutkittaessa.

Tarkkuus määritelmissä ja todistuksissa on tilanteesta riippuvaa; ns. epsilon-tekniikan hallitsemista ei voi kohtuudella edellyttää oppilailta.

Yhtenä differentiaalilaskennan päämääränä on pidettävä funktion kulun tutkimista ääriarvoprobleemeineen sekä näiden sovellutuksia. Esimerkeissä ja harjoituksissa on pyrittävä teoriaa todella valaiseviin tapauksiin ja teknisesti kovin vaikeat laskut voidaan jättää vähemmälle.

Erityisesti on syytä vähentää huomattavasti perinteellisiä käyrän tangentteihin ja normaaleihin liittyviä sangen keinotekoisia laskuja.

Lyhyellä kurssilla pysytellään yksinkertaisissa ja selkeissä tapauksissa: derivoitavat ja integroitavat funktiot ovat lähes aina polynomeja.

12. kouluvuosi

12. kouluvuosi poikkeaa huomattavasti vanhasta opetussuunnitelmasta.

Osa ajasta käytetään tilastotieteen ja todennäköisyyslaskennan peruskäsitteiden selvittämiseen. Tämä muodostaa 6—10 viikon jakson kummallakin kurssilla, ja sen pääpaino on tilastollisen materiaalin käsittelyyn perehtymisellä. Mahdollisuuksien mukaan voidaan harjoitella suppean tilastollisen haastattelu- tms. tutkimuksen tekemistä.

Lukion kurssi päätetään syventävällä kertausjaksolla.

UUSIEN OPETUSSUUNNITELMIEN EDELLYTTÄMÄT POHJATIEDOT

Seraavassa on luettelomaisesti esitetty ne pohjatiedot, jotka oppilailta edellytetään lukion uusien opetussuunnitelmien mukaisesti opiskeltaessa. Jos asia ei sisälly ns. vanhamuotoiseen keskikoulukurssiin, on sulkeisiin liitetty viittaus siihen 10. kouluvuoden kohtaan, jossa ko. asia tulee esille. Tällöin siihen on perehdyttävä riittävässä määrin ja muita kohtia vastaavasti kevennettävä.

a) Laskutoimitukset rationaaliluvuilla; positiivisilla sekä negatiivisilla murtoluvuilla ja desimaaliluvuilla
b) Reaaliluvut kuvailtuna lukusuoran avulla. Suorakulmainen koordinaatisto
c) Potenssi eksponentin ollessa kokonaisluku. Alustava tutustuminen neliöjuuriin
d) Laskuviivaimen käyttö kerto- ja jakolaskuissa (pitkä kurssi 10.7.8; voidaan tarpeen vaatiessa käsitellä aikaisemminkin)
e) Laskutoimitukset yksinkertaisilla rationaalisilla lausekkeilla
f) Lineaaristen yhtälöiden ja yhtälöparien ratkaisu, mukaan luettuna graafinen ratkaisu. Toisen asteen yhtälön graafinen ratkaisu. Epäyhtälöiden laskusäännöt (lyhyt kurssi 10.3, pitkä kurssi 10.3)
g) Joukot ja joukkojen yksinkertaiset operaatiot, mm. tulojoukko. Yksinkertaiset joukkosymbolit (lyhyt kurssi 10.2, pitkä kurssi 10.1)
h) Relaation ja funktion käsitteet. Funktion kuvaaja. Yhden muuttujan lineaarinen funktio (lyhyt kurssi 10.4, pitkä kurssi 10.7.1—10.7.4)
i) Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus tasossa
j) Yksinkertaisten geometristen kuvioiden alkeelliset ominaisuudet tasossa. Pythagoraan lause
k) Pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

OPPIAINES

Seuraavassa oppiaineksen erittelyssä on eräät kohdat merkitty tähdellä (*). Tämä osoittaa, että kyseinen kohta ei kuulu varsinaiseen kurssiin, vaan se voidaan käsitellä, mikäli aikaa ja kiinnostusta riittää.

LYHYEN KURSSIN OPPIAINES

10. kouluvuosi

10.1 JOHDATUS TILASTOMATEMATIIKKAAN
10.1.1 Tilastotieteen alkeita
10.1.2 Esittely numeerisen aineiston käytöstä yhteiskunnassa. ATK-tietoutta

10.2 REAALILUVUT
10.2.1 Lukualueen laajennukset
10.2.2 Laskusäännöt
10.2.3 Neliöjuuri. Yleinen juurikäsite ja murtoeksponentti

10.3 YHTÄLÖOPPIA
10.3.1 Ensimmäisen asteen yhtälö ja epäyhtälö. Yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisuperiaatteet
10.3.2 Toisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

10.4 FUNKTIO-OPPIA
10.4.1 Funktiokäsite. Bijektio. Käänteisfunktio
10.4.2 Yhden muuttujan lineaarinen funktio. Polynomifunktioita. Paloittain määriteltyjä funktioita

10.5 TRIGONOMETRIAA
10.5.1 Trigonometristen funktioiden määritelmät
10.5.2 Funktioiden sin x ja cos x kuvaajat
10.5.3 Suorakulmaiseen kolmioon liittyviä laskuja

10.6 ANALYYTTISTA GEOMETRIAA
10.6.1 Janan keskipiste ja pituus
10.6.2 Suoran yhtälö. Suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus

10.7 TASON VEKTORIT
10.7.1 Käsitteiden kertaus tai esittely
10.7.2 Laskutoimitukset
10.7.3 Vektorin koordinaattiesitys
10.7.4 Skalaaritulo

11. kouluvuosi

11.1 RAJA-ARVO JA JATKUVUUS
11.1.1 Funktion raja-arvo sekä eräitä raja-arvon laskusääntöjä
11.1.2 Funktion jatkuvuus

11.2 DERIVAATTA
11.2.1 Derivaatan määritelmä ja geometrinen tulkinta
11.2.2 Potenssin, summan ja polynomin derivaatta
* 11.2.3 Tulon ja osamäärän derivaatta
11.2.4 Käyrän tangentin yhtälö
11.2.5 Funktion kulun tutkiminen
11.2.6 Yksinkertaisia ääriarvosovellutuksia

11.3 INTEGRAALILASKENTAA
11.3.1 Integraalifunktio
11.3.2 Polynomin integrointi
11.3.3 Määrätty integraali
11.3.4 Yksinkertaisia määrätyn integraalin sovellutuksia

11.4 EKSPONENTTI- JA LOGARITMIFUNKTIO
11.4.1 Eksponenttifunktio
11.4.2 Logaritmifunktio, logaritmiasteikko
11.4.3 Logaritmilaskennan sääntöjä. Laskuviivain

* 11.5 MATEMATIIKAN SOVELLUTUKSIA ERI KÄYTÄNNÖN ALUEILTA

12. kouluvuosi

12.1 TODENNÄKÖISYYSLASKENTAA
12.1.1 Todennäköisyyden käsite: klassinen ja empiirinen todennäköisyys
12.1.2 Laskusääntöjä
12.1.3 Normaalijakauma

12.2 TILASTOTIETEEN ALKEITA
12.2.1 Tunnuslukujen kertaus, keskihajonta
* 12.2.2 Otos. Keskiarvon keskivirhe
* 12.2.3 Esimerkkejä tilastollisesta päätöksenteosta

* 12.3 SOVELLUTUSJAKSO
12.3.1 Sovellutusprojekteja, joissa selvitellään opitun matematiikan käyttömahdollisuuksia eri aloilla
12.3.2 Joitakin sovellutusprojekteja, joissa käytetään erityisesti tilastollisia menetelmiä

12.4 KERTAUSJAKSO

HUOMAUTUKSIA LYHYEN KURSSIN ERI KOHDISTA

10. kouluvuosi

10.1.1 Taulukoiden laatimista ja graafista esitystä. Frekvenssi ja frekvenssijakauma
Keskiarvo, mediaani, tyyppiarvo
Käsitellään esittelynomaisesti

10.1.2 ATK-tietouden yhteydessä esitellään tietojenkäsittelyn eri vaiheita ja keskeistä terminologiaa. Demonstrointia mahdollisuuksien mukaan

10.2.1 Luonnolliset luvut, kokonaisluvut, rationaaliluvut, reaaliluvut

10.2.2 Kertauksena laskuja rationaaliluvuilla ja -lausekkeilla

10.2.3 Neliöjuuren yhteydessä itseisarvo ($\sqrt{a^2} = |a|$).

Merkintä $a^{\frac{m}{n}}$ ja sen käyttö

10.3.1 Käsitellään myös muotoa $|x - a| \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} b$ olevia yhtälöitä ja epäyhtälöitä. Ratkaisujoukko päätellään lukusuoraa käyttäen

10.3.2 Todetaan myös: $D < 0 \Rightarrow$ ei ole reaalijuuria. Käytetään paraabelia ratkaisujoukon havainnollistajana

10.4.1 Käsitteet havainnollisesti lähinnä joukkomalleja käyttäen

10.4.2 Lineaarinen funktio esimerkkinä monotonisesta funktiosta

10.5.1 Ei rajoiteta kulman suuruutta. Yksikkönä käytetään astetta. Voidaan käsitellä myös radiaani

10.6.2 Myös suoran yhtälön muodostaminen, kun tunnetaan piste ja kulmakerroin tai kaksi pistettä

10.7.1 Vektori suunnattuna janana. Vektorin suunta ja pituus eli itseisarvo. Nollavektori. Vastavektori

10.7.2 Yhteen- ja vähennyslasku. Kertominen skalaarilla

10.7.3 Vektori jaetaan komponentteihin. Vektori muodossa $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$.

10.7.4 Skalaaritulo kahden vektorin pituuden ja kulman kosinin avulla määriteltynä

11. kouluvuosi

11.1.1 Yksinkertainen havainnollinen käsittely, ei lauseiden todistuksia

11.1.2 Graafinen tarkastelu

Ehto: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Esitetään esimerkein tavallisimmat tyypit epäjatkuvista funktioista. Myös esimerkkejä paloittain määritellyistä funktioista

11.2.4 Yksinkertaisia esimerkkejä

11.2.5 Käytetään derivaatan merkkitarkastelua. Monotonisuus. Ääriarvot

11.3.3 Yhteys integraalifunktioon otetaan käyttöön ilman johtoa

11.4.1 Käsittely graafiseen esitykseen perustuen. Monotonisuus. Määrittely- ja arvojoukko

11.4.2 Eksponenttifunktion käänteisfunktiona. Logaritmipaperin käyttö

11.5 Sovellutusprojekteja, joissa pyritään käyttämään erilaisia matemaattisia menetelmiä. Voidaan valita esim. jokin talousalan tai fysiikan tilanne, jonka käsittelyssä sopivat opitut menetelmät. Kohteet voidaan valita myös ajankohtaisista aiheista (saastetutkimus tms.); oppilaat voivat suorittaa aihevalinnan

12. kouluvuosi

12.1.2 Yhteen- ja kertolaskusääntö. Toistokokeet. Binomitodennäköisyys ilman johtoa

12.1.3 Lyhyt kuvaajan esittely

12.2.2 Jakauman keskiarvon arvioiminen otoksen tunnuslukuja käyttäen

12.3 Sovellutusjakson yhteydessä voidaan valita yhteisiä projekteja mm. yhteiskuntaopin ja taloustiedon opetuksen kanssa

Tilastojen käyttöön liittyviä matemaattisia sovellutuksia yhteiskuntaelämän eri aloilta voidaan tässä yhteydessä käsitellä

12.4 Samalla, kun kerrataan tärkeimmät kohdat lukion kurssista, pyritään muodostamaan yleiskäsitys opitusta matematiikasta ja sen merkityksestä myöhemmän opiskelun kannalta. Varataan aikaa yksilölliselle harjoittelulle, jolloin oppilaat voivat valita oman suoritustasonsa mukaisia tehtäviä

PITKÄN KURSSIN OPPIAINES

10. kouluvuosi

10.1 JOUKKO-OPIN KERTAUS JA LOGIIKKAA

10.1.1 Joukkojen operaatiot. Loogiset konnektiivit

10.1.2 Lauseen totuusarvo. Ratkaisujoukko

10.1.3 Kvanttorit
10.1.4 Suora ja epäsuora todistusmenetelmä

10.2 LUKUALUEIDEN TÄYDENTÄVÄ KERTAUS
10.2.1 Reaalilukujen laskutoimitukset ja laskulait
10.2.2 Neliöjuuri

10.3 YHTÄLÖOPPIA
10.3.1 Ensimmäisen asteen yhtälöiden, yhtälöryhmien ja epäyhtälöiden ratkaiseminen
10.3.2 Toisen asteen yhtälö ja epäyhtälö
10.3.3 Polynomin jaollisuus
10.3.4 Korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä
10.3.5 Korkeamman asteen yhtälöryhmiä

10.4 TASON VEKTORIT
10.4.1 Käsitteiden kertaus tai esittely
10.4.2 Laskutoimitukset
10.4.3 Vektorin koordinaattiesitys
10.4.4 Skalaaritulo

10.5 GEOMETRISIA JA TRIGONOMETRISIA SOVELLUTUKSIA
10.5.1 Pythagoraan lause. Sinilause. Kosinilause
10.5.2 Geometrisia laskutehtäviä
10.5.3 Trigonometriaa

10.6 ANALYYTTISTA GEOMETRIAA
10.6.1 Suoran yhtälöt ja kulmakerroin
10.6.2 Pisteen etäisyys suorasta
10.6.3 Ympyrän yhtälö, tangentti
10.6.4 Toisen asteen käyrät pääpiirteittäin

10.7 FUNKTIO
10.7.1 Funktio relaationa ja tason pistejoukko funktion kuvaajana
10.7.2 Monotoniset funktiot
10.7.3 Käänteisfunktio

10.7.4 Yhdistetty funktio
10.7.5 Murtopotenssi ja irrationaalipotenssi
10.7.6 Eksponenttifunktio
10.7.7 Logaritmifunktio
10.7.8 Logaritmilaskentaa

11. kouluvuosi

11.1 REAALILUKUJEN JOUKON OMINAISUUDET
11.1.1 Algebralliset ominaisuudet. Täydellisyysominaisuus
11.1.2 Ympäristö

11.2 RAJA-ARVOT
11.2.1 Lukujonon raja-arvo
11.2.2 Sarja
11.2.3 Funktion raja-arvo
11.2.4 Summan, erotuksen, tulon, osamäärän ja yhdistetyn funktion raja-arvo

11.3 JATKUVUUS
11.3.1 Jatkuvuus annetussa pisteessä
11.3.2 Jatkuvuus annetulla välillä
11.3.3 Suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuuksia

11.4 DERIVAATTA
11.4.1 Erotusosamäärä
11.4.2 Funktion derivaatta annetussa pisteessä
11.4.3 Derivaattafunktio
11.4.4 Derivaatta ja tangentti

11.5 DERIVOIMISSÄÄNTÖJÄ
11.5.1 Funktioiden $f + g$ ja kf derivaatat
11.5.2 Potenssifunktioiden ax^n ja polynomin derivaatta
11.5.3 Tulon ja osamäärän derivaatta
11.5.4 Yhdistetyn funktion derivaatta
11.5.5 Käänteisfunktion derivaatta

11.6 TRANSSENDENTTISTEN ALKEISFUNKTIOIDEN DERIVAATAT

11.6.1 Trigonometristen funktioiden derivaatat
11.6.2 Logaritmi- ja eksponenttifunktion derivaatta

11.7 FUNKTION TUTKIMINEN DERIVAATAN AVULLA

11.7.1 Väliarvolause
* 11.7.2 Differentiaali. Likiarvolaskentaa
11.7.3 Derivaatta funktion monotonisuuden tutkimisessa
11.7.4 Lokaaliset ääriarvot
11.7.5 Globaaliset ääriarvot
11.7.6 Funktion kulun tutkiminen

11.8 INTEGRAALIFUNKTIO

11.8.1 Annetun funktion integraalifunktio
11.8.2 Alkeellisia integraalifunktioita
11.8.3 Yhdistetyn funktion derivaattaan perustuva integroiminen
* 11.8.4 Osittaisintegroiminen
* 11.8.5 Integroiminen sijoituksen avulla

11.9 MÄÄRÄTTY INTEGRAALI

11.9.1 Määrätyn integraalin määrittely ja ominaisuuksia
11.9.2 Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys
11.9.3 Pinta-ala- ja tilavuuslaskuja
* 11.9.4 Muuttujan vaihto määrätyssä integraalissa

12. kouluvuosi

12.1 TILASTOTIETEEN ALKEITA

12.1.1 Mitta-asteikkoja ja tunnuslukuja. Otos
12.1.2 Empiirinen jakauma ja tilaston esittämistapoja

12.2 TODENNÄKÖISYYSLASKENTAA

12.2.1 Klassinen ja empiirinen todennäköisyys
12.2.2 Laskusääntöjä. Toistokokeet ja binomitodennäköisyys
12.2.3 Satunnaismuuttuja. Diskreetti ja jatkuva jakauma
12.2.4 Normaalijakauma

12.3 SYVENTÄVÄÄ JA TÄYDENTÄVÄÄ KERTAUSTA

12.3.1 Kolmiulotteinen vektoriavaruus
* 12.3.2 Vektoritulo
12.3.3 Kompleksiluvut
12.3.4 Differentiaali- ja integraalilaskennan kertaus

HUOMAUTUKSIA PITKÄN KURSSIN ERI KOHDISTA

10. kouluvuosi

10.1.1 Kerrataan joukkojen unioni (yhdiste), leikkaus ja komplementti. Näihin liittyen loogiset konnektiivit

$\wedge$, $\vee$, $=>$, $<=>$, $\neg$

10.1.3 Symbolien $\forall$ ja $\exists$ merkitys ja käyttö

10.2.2 Neliöjuureen liittyen itseisarvo ($\sqrt{a^2} = |a|$) ja likiarvo. Neliöjuurilaskuja

Todetaan tarve laajentaa lukualuetta. Mainitaan imaginaariyksikkö

10.3.2 Käytetään paraabelia ratkaisujoukon havainnollistajana

10.3.3 Lause $P_n(x_1) = 0 <=> P_n(x) = (x-x_1)P_{n-1}(x)$ ja sen sovellutuksia

Huom. Kohtien 10.2 ja 10.3 esimerkeissä ja harjoituksissa käsitellään myös yksinkertaisia itseisarvolausekkeita

10.4.1 Vektorien muodollista käsittelyä ekvivalenssiluokkina ei ole syytä painottaa. Operaatioiden yhteydessä luokan edustajasta voidaan käyttää nimeä vektori. Vektorin suunta ja pituus eli itseisarvo. Nollavektori. Vastavektori

10.4.2 Yhteen- ja vähennyslasku. Kertominen skalaarilla. Laskulait

10.4.3 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$. Vektorikomponentti. Skalaarikomponentti

10.4.4 Skalaaritulo kahden vektorin pituuden ja kulman kosinin avulla määriteltynä. Skalaaritulon laskulait. Kahden koordinaattimuodossa ilmoitetun vektorin skalaaritulo

10.5.2 Käsitellään mediaanien leikkauspistelause, lause kolmion kulmien puolittajista sekä sovellutuksia. Kiinnitetään huomiota myös yhdenmuotoisuuden käyttöön

10.5.3 Radiaani
Trigonometristen funktioiden määritelmät, jaksollisuus ja kuvaajat. Trigonometriset funktiot toistensa avulla lausuttuina. Kahden kulman summan ja erotuksen kosinin ja sinin kaavat. Kaavat $\sin x + \sin y \ldots$
Trigonometristen yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemista. Ainakin tyyppiä $\sin kx = a$ olevat yhtälöt ja vastaavat epäyhtälöt on hallittava

10.6.1 Vektori- ja koordinaattimuotoiset yhtälöt

10.6.4 Koordinaattimuotoiset yhtälöt ilman uraominaisuuksiin perustuvia johtoja. Mainitaan, että toisen asteen käyrä $xy = a$ on hyperbeli

10.7.3 Käänteisrelaatio. Ehto sille, että käänteisrelaatio on funktio. Bijektio. Funktion ja sen käänteisfunktion keskinäinen yhteys

10.7.4 Määrittelyjoukkoon on kiinnitettävä erityisesti huomiota

10.7.5 Murtopotenssi lähinnä yhtälön $x^n = a$ ($n \in \mathbf{Z}$ $a > 0$) ratkaisuna ja tällaisten lukujen kokonaispotensseina. Juurikäsite. Laskulakeja ilman todistuksia

10.7.8 Logaritmilaskennan kaavat. Laskuviivain

11. kouluvuosi

11.1.1 Lyhyt kertauksenomainen esittely

11.1.2 Avoin väli keskipisteensä ympäristönä. Ympäristö, josta keskipiste poistettu

11.2.1 Käsitellään myös tapaus $a_n \to \infty$, kun $n \to \infty$. Lukujonojen tarkasteluun ei ole syytä liiemmälti syventyä, koska niiden käsittelyssä sovelletaan samoja menettelyjä kuin funktioiden raja-arvojen käsittelyssä

11.2.2 Lukujonon raja-arvon sovellutuksena päättymätön geometrinen sarja

11.2.3 Raja-arvo annetussa pisteessä. Määrittely ympäristöjen avulla. Ei raskasta 'epsilon-tekniikkaa'
Epäoleelliset raja-arvot

11.2.4 Todistuksia ei vaadita oppilailta

11.3.1 Graafinen tarkastelu
Ehto: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

11.3.2 Funktion jatkuvuus annetulla avoimella välillä
Jatkuvuus suljetun välin päätepisteissä. (Joudutaan siis jonkin verran tutkimaan toispuolista raja-arvoa ja toispuolista jatkuvuutta)

11.3.3 1) Jatkuvalla funktiolla on suljetulla välillä suurin ja pienin arvo
2) Jatkuva funktio saa suljetulla välillä kaikki suurimman ja pienimmän arvonsa välissä olevat arvot
3) Jatkuva funktio ei voi muuttaa merkkiään käymättä nollan kautta
Lauseet ilman todistuksia, graafisin perusteluin

11.4.1 Voidaan esittää geometrinen malli (sekantin kulmakerroin)

11.4.3 Funktion derivaattafunktio annetulla avoimella välillä

11.4.4 Tangentin ja normaalin yhtälöt

11.5.4 Ei yleisen tapauksen todistusta

11.5.5 Geometrinen tarkastelu

11.6.2 e:n määritelmä. Funktion $\ln x$ derivaatan johto
e^x:n derivaatta käänteisfunktion derivaattana

11.7.1 Voidaan käsitellä Rollen lause. Tämä ja väliarvolause ilman todistusta, geometrisin perusteluin
Sovellutuksena integraalilaskennan peruslause

11.7.4 Lokaaliset (paikalliset) ääriarvot
Ääriarvo on mahdollinen seuraavissa kohdissa:
a) epäjatkuvuuskohta
b) derivaatan epäjatkuvuuskohta
c) derivaatan nollakohta
d) välin päätepisteet
Ääriarvon laadun tutkiminen

11.7.5 Globaaliset ääriarvot — ts. suurin ja pienin arvo, jonka funktio saa määrittelyjoukossaan. Vrt. edellisen kohdan huomautuksia

11.7.6 Tässä yhteydessä käsitellään myös kuvaajan kuperuussuunta ja käännepisteet

11.8.1 Rajoitutaan tässä annetulla välillä jatkuviin funktioihin. Integraalikäyräparvi

11.9.1 Määrätyn integraalin määrittely ylä- ja alasummien avulla. Ei pyritä tarkkaan esitykseen
Additiivisuus a) funktioiden suhteen
b) osavälien suhteen

Vakiokerroin. Ylä- ja alarajan vaihto. Perustelu esim. pinta-alakäsitteeseen vedoten

11.9.2 Funktio $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ja tämän derivaatta

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

12. kouluvuosi

12.1.1 Voidaan käsitellä luokka- ja välimatka-asteikkoja sekä näihin liittyen tavallisimpia keski- ja hajontalukuja

12.2.2 Yhteen- ja kertolaskusääntö
Variaatioita, permutaatioita ja kombinaatioita ei tarvitse käsitellä binomitodennäköisyyden perustaksi

12.2.4 Normaalijakauman tiheysfunktion kuvaaja ja siihen liittyviä todennäköisyyksiä

12.3.1 Kerrataan vektorioppi käyttäen kolmiulotteisen avaruuden vektoreita
Voidaan käsitellä lineaariavaruuden aksiomisysteemi

12.3.3 Kompleksilukujen määrittely, laskutoimitukset ja koordinaattiesitys. Toisen asteen yhtälö

ERIKOISKURSSIT

Seuraavia erikoiskursseja suositellaan:
— funktio-opin täydennyskurssi
— differentiaaliyhtälöt
— sarjat
— euklidinen geometria
— deskriptiivinen geometria
— logiikka
— algebra
— matriisilaskenta
— ATK
— numeeriset ratkaisumenetelmät
— todennäköisyyslaskenta ja tilastotiede
— matematiikan eri alueiden esittely

Liite 4

Lukion matematiikan kurssimuotoinen oppimääräsuunnitelma

Oppimäärän laajuus	Kurssit 1 – 7 tai 1 – 11
Yhteinen yleinen oppimäärä	Kurssit 1 – 7
Yhteinen laaja oppimäärä	Kurssit 1 – 11
Valinnainen oppimäärä	Lisäkurssit 1 – 2

Kouluhallitus 1981

Lukion matematiikan kurssimuotoinen oppimääräsuunnitelma (yleinen ja laaja)

1 Johdanto

Yleistavoitteet

Luonnontiedeiden ja tekniikan tultua yhä keskeisemmiksi yhteiskunnassamme myös niiden perustana olevan matematiikan merkitys on korostunut. Samalla matemaattiset menetelmät ovat tulleet tärkeiksi apuvälineiksi yhä useammilla tieteen- ja elämänaloilla. On siis välttämätöntä, että kaikki oppilaat saavat riittävän matemaattisen pohjan niin perusasteen kuin keskiasteenkin koulutuksessa.

Lukion matematiikan opetus pyrkii osaltaan edistämään persoonallisuuden monipuolista kehittämistä. Matematiikan opetuksen yleistavoitteina pidetään

- sellaisten käyttökelpoisten tietojen ja valmiuksien omaksumista, jotka takaavat hyvän pohjan jatko-opinnoille
- harrastuneisuuden herättämistä matematiikan käsitemaailmaa kohtaan, mihin sisältyy myös käsityksen saaminen matematiikasta älyllisiä virikkeitä antavana sekä älyllistä ja esteettistä tyydytystä suovana tieteenalana
- sellaisen matemaattisen yleissivistyksen saavuttamista, joka edistää oppilaan kykyä uuden tiedon hankkimiseen, kriittiseen arvioimiseen, soveltamiseen ja välittämiseen.

Oppimäärät

Lukion matematiikan opetus on perinteisesti jakautunut kahdeksi erilliseksi ja erilaajuiseksi oppimääräksi. Myös Pohjoismaissa ja monissa muissa maissa lukion matematiikan opetus on jaettu kahdeksi tai useammaksi erilaajuiseksi oppimääräksi. Matematiikan sisältöalueen jakoa yleiseen ja laajaan oppimäärään puoltaa oppilaiden erilainen kiinnostus matematiikkaa kohtaan sekä jatko-opintojen edellyttämät erilaiset pohjatiedot; erityisesti eräät tekniset ja luonnontieteelliset jatko-opintoalat edellyttävät verraten syvällistä perehtymistä matematiikkaan jo kouluaikana. Nimitykset yleinen ja laaja oppimäärä vastaavat aikaisempia nimityksiä lyhyt ja pitkä oppimäärä.

Integroituminen muihin sisältöalueisiin

Matematiikan keskeinen asema yhteiskunnassamme johtuu sen tärkeästä välinearvosta mitä erilaisimmilla tieteen ja yhteiskuntaelämän aloilla.

Tähän asemaan pitäisi kouluopintojen aikana tutustua. Myös muiden aineiden opetuksessa on syytä käyttää mahdollisimman suuressa määrin hyväksi niitä tietoja ja valmiuksia, joita matematiikan opetuksessa on saavutettu.

Lukion matematiikan oppiaines muodostaa verrattain kiinteän ja johdonmukaisesti etenevän kokonaisuuden, jonka integroiminen esimerkiksi fysiikan tarpeisiin on kautta aikojen koettu ongelmalliseksi. Matemaattisten käsitteiden yhteyttä nimenomaan fysiikkaan on kuitenkin syytä mahdollisuuksien mukaan korostaa, ja harjoitusten sekä sovellusten yhteydessä on pyrittävä valaisemaan matematiikan käyttöä myös muilla tieteenaloilla kuten biologiassa, tilastotieteessä, taloustieteessä, tekniikassa, kemiassa, psykologiassa ja maantieteessä.

Niveltyminen peruskoulun opetussuunnitelmaan

Lukion matematiikan opetus pohjautuu peruskoulun matematiikan oppimäärään. Ensimmäisen vuoden kurssit ovat osaksi peruskoulutietoja kertaavia ja täydentäviä. Mikäli laajan oppimäärän valinneen oppilaan matematiikan opiskelu on peruskoulussa rajoittunut vähimmäisvaatimusten täyttämiseen, tämä edellyttää lukion alussa keskimääräistä tiiviimpää työskentelyä ja harjoittelua lukio-opetuksen omaksumisen varmentamiseksi.

Puutteellisten pohjatietojen täydentämiseksi järjestetään sekä ensimmäisellä että toisella lukioluokalla lukusuunnitelmassa mainittuja lisäkursseja. Voidaan myös käyttää tukiopetusta, jonka varsinainen tarkoitus on kuitenkin tilapäisten oppimisvaikeuksien voittaminen.

2 Yleinen oppimäärä

Tavoitteet

Lukion matematiikan yleisen oppimäärän opiskelun tavoitteena on saavuttaa tietyntasoisia laskuteknisiä valmiuksia, perehtyä matematiikan tavallisimpiin sovelluksiin sekä tutustua jossakin määrin myös matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen.

Laskuteknisten valmiuksien hankkiminen sisältää tavanomaisen numerolaskemisen lisäksi mm.
- kyvyn käsitellä yksinkertaisia rationaali- ja neliöjuurilausekkeita
- kyvyn ratkaista yhtälöitä ja epäyhtälöitä
- kyvyn derivoida ja integroida polynomifunktioita
- vektorien peruslaskutoimitusten hallitsemisen.

Matematiikan tavallisimmat sovellukset käsittävät mm.
- matemaattisten menetelmien käyttämistä eri elämänaloilla esiintyvien probleemien ratkaisemiseen, esimerkiksi sanallisten probleemien ratkaisemiseen yhtälöiden avulla tai minimointi- ja maksimointitehtävien ratkaisuun funktioiden ominaisuuksien perusteella tai differentiaalilaskentaa käyttäen
- todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen menetelmiin perehtymisen ja näiden soveltamisen käytännön ongelmiin

- soveltavien pinta-ala- ja tilavuuslaskujen suorittamisen
- tutustumisen matematiikan käyttöön muilla tieteenaloilla kuten fysiikassa, kemiassa, biologiassa, maantieteessä, tekniikassa ja psykologiassa sekä matematiikan asemaan kaupallisen, yhteiskuntatieteellisen ja palvelualan apuvälineenä
- tutustumisen automaattisen tietojenkäsittelyn mahdollisuuksiin ja rajoituksiin matemaattisia probleemoja ratkaistaessa.

Matematiikan loogiseen ja abstraktiin struktuuriin tutustutaan yleisessä oppimäärässä lähinnä kuvailemisen tasolla. Tällöin pyritään saamaan käsitys määrittelyn ja loogisen päättelyn asemasta matematiikassa ja totuttaudutaan käyttämään täsmällisiä ja oikeita merkintöjä sekä lukemaan matemaattista tekstiä. Myös matemaattisen käsitteenmuodostuksen eri tapojen esittely sekä viittaaminen yksinkertaiseen aksiomijärjestelmään sopivissa tilanteissa saattaa lisätä kiinnostusta ja antaa virikkeitä itsenäiseen, syvällisempään matematiikkaan perehtymiseen.

Opetusjärjestelyt

Opetuksen suunnitteluun ja toteutukseen liittyviä näkökohtia

Matematiikan opiskelussa korostuu enemmän kuin monissa muissa aineissa itsenäisen älyllisen ponnistelun osuus. Varsin suuri osa opiskelusta on välttämätöntä suorittaa perehtymällä itsenäisesti oppitunnilla esitettyyn asiaan, pyrkimällä omaksumaan ja sisäistämään uusia käsitteitä ja ajatustapoja sekä laskemalla harjoitustehtäviä.

Kyselevällä opetuksella on merkittävä osuus. Tärkeitä ovat niin ikään laskuharjoitusrupeamat ja -tunnit, jolloin suoritetaan tehtäviä itsenäisesti tai pienryhmissä ja tarkastetaan ja selvitetään ennalta laskettuja tehtäviä.

Yleisen oppimäärän valinneiden peruskoulutiedoissa ja -taidoissa saattaa olla puutteita. Näin ollen etenkin ensimmäisen luokan kursseissa on käytettävä riittävästi aikaa jatkossa tarpeellisen laskutaidon varmistamiseen. Yleisen oppimäärän tuntimäärä on huomattavasti pienempi kuin laajan ja yleisen oppimäärän valinneilla on osittain erilaisia jatko-opiskelusuunnitelmia kuin laajan oppimäärän valinneilla. Näiden erojen on ilmettävä myös opetusjärjestelyissä.

Käsitteiden määrittelyssä ja tarvittavien tietojen käyttöönotossa on syytä kiinnittää erityisesti huomiota konkreettisuuteen ja havainnollisuuteen, ja tällöin voidaan useimmiten käyttää esimerkkejä tai graafista tai muuta havainnollista johdattelua. Tärkeätä on yleisessäkin oppimäärässä pyrkiä perustelemaan esitetyt tulokset, jotta matematiikasta ei muodostuisi oppilaiden mielessä irrallisten mekaanisten laskusääntöjen kokoelmaa.

Jakso-opiskeluun liittyvän keskityksen mahdollisten haittojen torjumiseksi on varattava riittävästi aikaa opetetun asian omaksumiseen. Tärkeä opiskelumuoto on tunnilla opettajan valvonnan ja opastuksen alaisena tapahtuva harjoittelu, koska oppilaiden mahdollisesti puutteelliset pohjatiedot saattavat muuten tulla esteeksi kotitehtävien itsenäiselle suorittamiselle. Aikaisemmin opittujen asioiden tullessa uudelleen esille on varattava riittävästi aikaa myös kertaamiseen.

Erityisesti yleisessä oppimäärässä geometrisen aineksen asema on koettu ongelmalliseksi. Vähäisen tuntimäärän vuoksi ei yhtenäistä geometrista sisältöaluetta ole sisällytetty mihinkään kurssiin, vaan geometrisluontoisia tehtäviä on tarkoitus käsitellä sopivissa kohdissa eri kursseissa. Esimerkiksi yhtälöiden, vektorien, trigonometrian, ääriarvotehtävien ja integraalilaskennan yhteydessä on hyviä mahdollisuuksia myös geometristen tehtävien käsittelylle sekä geometrian tietojen kertaamiselle ja täydentämiselle.

Ehkä vieläkin tärkeämpää kuin laajassa oppimäärässä on yleisessä oppimäärässä matematiikan eri aloihin liittyvien sovellusten monipuolinen käsittely. Laajahkoihin soveltaviin tehtäviin on mahdollisuuksia esimerkiksi tilastotieteen ja todennäköisyyslaskennan sekä myös viimeisen kurssin yhteydessä, joka voidaan järjestää osittain eriytetysti oppilaiden harrastusten ja jatko-opiskelusuunnitelmien mukaan.

Nykyaikaisten teknisten apuvälineiden vaikutusta matematiikan soveltamisessa ja myös opettamisessa korostetaan esittelemällä sopivissa kohdin laskennallisiin menetelmiin ja esimerkiksi automaattiseen tietojenkäsittelyyn soveltuvia käsittelytapoja.

Kurssit ja niiden rakenne

Matematiikan yleinen oppimäärä koostuu seitsemästä 38 tunnin mittaisesta kurssista. Näiden ohella järjestetään lisäkursseja ja tukiopetusta sekä erikoiskursseja. Kurssit koostuvat usein eri aihepiireistä, jolloin kurssisuunnitelmissa on esitelty likimääräisesti eri asioiden käsittelyyn käytettävä aika. Tuntimäärissä on mukana kokeisiin varattu aika.

Kurssisuunnitelmat ovat osittain varsin yleisluontoisia. Näin ollen koulun ja opetusryhmän tasolla tapahtuvalle suunnittelulle on runsaasti tehtäviä ja mahdollisuuksia. Koulun erityispiirteet ja -resurssit voivat jossakin määrin muuttaa painotuksia ja käsittelyjärjestystä kurssien sisällä. Esimerkiksi monipuolisten tietojenkäsittelylaitteistojen käyttömahdollisuus saattaa vaikuttaa 1. kurssin muotoutumiseen.

Kurssien sisällöissä jotkin kohdat on merkitty tähdellä (*). Tämä osoittaa, että kyseinen kohta ei kuulu varsinaiseen kurssiin, vaan voidaan käsitellä, mikäli aikaa ja kiinnostusta riittää.

Kurssit 1—7 (yleinen oppimäärä)

1. kurssi Reaaliluvut. Johdatus tilastomatematiikkaan. Tietojenkäsittelyä

Tavoite

Oppilas hallitsee reaalilukujen perusominaisuudet sekä laskutoimitukset reaaliluvuilla. Oppilas tutustuu tilastomatematiikan hyödyntämiseen yhteiskunnassa ja osaa käyttää sen tarjoamia apuvälineitä. Oppilas saa yleiskuvan tietojenkäsittelystä, tuntee tietojenkäsittelyn peruskäsitteet sekä tutustuu tietojenkäsittelyn hyväksikäyttöön ongelmien selvittelyssä.

Sisältö

Reaaliluvut

- Lukualueen laajennukset
- Laskusäännöt, rationaalilausekkeilla laskeminen, itseisarvo, neliöjuuri ja neliöjuurilaskuja
- Ensimmäisen asteen yhtälö ja yhtälöpari

Tilastoaineksen esitystapoja ja tunnuslukuja

- Luokitteluasteikko, tyyppiarvo
- Välimatka-asteikko, mediaani, keskiarvo ja otoksen keskihajonta
- Korrelaatio
- Normaalijakauma esimerkkien avulla havainnollistettuna

Tietojenkäsittelytietoutta

- Tiedot ja tietojen esittäminen
- Tietojen käsittely ja sen kuvaaminen
- Tietokone ja sen käyttö
- Atk ja yhteiskunta

Opetusjärjestelyt

Reaalilukujen käsittelyyn käytetään aikaa noin 20 tuntia, tilastollisen aineksen käsittelyyn noin 10 tuntia ja tietojenkäsittelyyn noin 5 tuntia.

Ensimmäisen asteen yhtälö ja yhtälöpari voidaan käsitellä kertauksenomaisesti. Neliöjuurilausekkeiden kohdalla ei tässä yhteydessä ole tarkoitus painottaa monimutkaisten lausekkeiden sieventämisharjoittelua. Käsitellään myös neliöjuuren arvon laskemista iteroimalla.

Tilastollisten tunnuslukujen yhteydessä esitetään myös mahdollisuudet algoritmiseen ajatteluun ja atk:n käyttömahdollisuuksia tilastollisessa tutkimuksessa.

Käytetään mahdollisuuksien mukaan hyväksi laskimia.

2. kurssi Funktio-oppia. Yhtälö- ja epäyhtälöoppia

Tavoite

Oppilas tuntee keskeisimmät funktioon liittyvät käsitteet ja osaa tulkita funktion kuvaajaa. Oppilas osaa ratkaista yhtälöitä, epäyhtälöitä ja yhtälöryhmiä.

Sisältö

Funktio

- Funktion määritelmä
- Tason pistejoukko funktion kuvaajana

Ensimmäisen asteen polynomifunktio

- Suoran yhtälö
- Ensimmäisen asteen epäyhtälö
  * Yksinkertaisia itseisarvoyhtälöitä ja epäyhtälöitä

Toisen asteen polynomifunktio

- Toisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

Yhtälöryhmiä

Ympyrän yhtälö

Opetusjärjestelyt

Suoran yhteydessä käsitellään kahden pisteen kautta kulkevan suoran yhtälön muodostaminen ja suorien yhdensuuntaisuus. Funktiokäsitteen yhteydessä selvitetään lyhyesti yleinen kuvauksen käsite. Reaalifunktioiden kohdalla kiinnitetään erityistä huomiota nollakohtien ja merkin tutkimiseen kuvaajan perusteella. Ympyrän käsittelyssä rajoitutaan origokeskiseen ympyrään.

3. kurssi Trigonometriaa. Tason vektorit

Tavoite

Oppilas tuntee trigonometristen funktioiden perusominaisuudet ja osaa käyttää niitä yksinkertaisissa sovelluksissa. Oppilas hallitsee vektorien peruslaskutoimitukset ja osaa käyttää niitä yksinkertaisissa geometrisissa tehtävissä.

Sisältö

Trigonometriaa

- Funktioiden määritelmät yksikköympyrässä
- Funktioiden sin x ja cos x kuvaajat
  * Radiaani
- Suorakulmaiseen kolmioon liittyviä sovelluksia

Vektori

- Suunta, pituus, nollavektori, vastavektori

Vektorien laskutoimitukset

- Yhteen- ja vähennyslasku, reaaliluvulla kertominen, laskulait

Vektorin koordinaattiesitys

Skalaaritulo

Sovelluksia

- Janan keskipiste ja pituus
- Suorien kohtisuoruus
- Geometrisia sovelluksia

Opetusjärjestelyt

Trigonometriaan käytetään aikaa noin 10 tuntia, tason vektoreihin noin 15 tuntia ja sovelluksiin noin 10 tuntia.

4. kurssi Raja-arvo ja jatkuvuus. Derivaatta. Eksponentti- ja logaritmifunktio

Tavoite

Oppilas tuntee raja-arvon ja jatkuvuuden käsitteet ja osaa määrittää yksinkertaisia raja-arvoja. Oppilas tuntee derivaatan käsitteen ja osaa derivoida polynomifunktioita. Oppilas tuntee eksponentti- ja logaritmifunktiot sekä osaa käyttää niitä.

Sisältö

Funktion raja-arvo

- Raja-arvo annetussa pisteessä
- Raja-arvon määrittäminen

Funktion jatkuvuus

- Jatkuvuuden käsite
- Esimerkkejä jatkuvista ja epäjatkuvista funktioista

Derivaatta

- Funktion derivaatta annetussa pisteessä
- Derivaattafunktio
- Käyrän tangentti

Derivoimissääntöjä

- Funktioiden $f+g$ ja kf derivaatat (k vakio)
- Funktion x^n ja polynomifunktion derivaatat
  * Osamäärän derivaatta

Eksponenttifunktio

- Määrittely ja kuvaaja
- Laskusäännöt

Logaritmifunktio

- Määrittely ja kuvaaja
- Laskusäännöt
- Logaritmiasteikko

Opetusjärjestelyt

Raja-arvoon ja jatkuvuuteen käytetään aikaa noin 10 tuntia, derivaattaan noin 15 tuntia ja eksponentti- sekä logaritmifunktioon noin 10 tuntia.

Raja-arvon käsitettä voidaan havainnollistaa numeerisesti laskinta hyväksi käyttäen. Jatkuvuuden ja epäjatkuvuuden käsitteitä valaistaan myös käytännön elämän esimerkeillä.

Derivaatan tulkinnasta pyritään antamaan myös muita kuin käyrän tangenttiin liittyviä esimerkkejä.

5. kurssi Differentaali- ja integraalilaskentaa

Tavoite

Oppilas osaa tutkia polynomifunktioita differentiaalilaskentaa hyväksikäyttäen ja määrittää funktioiden ääriarvoja. Oppilas tuntee integraalifunktion ja määrätyn integraalin käsitteet, osaa integroida polynomifunktioita ja määrittää pinta-aloja määrättyä integraalia hyväksikäyttäen.

Sisältö

Funktion tutkiminen derivaatan avulla

- Funktion pienin ja suurin arvo suljetulla välillä
- Funktion monotonisuus
- Paikallisten ääriarvokohtien hakeminen
- Ääriarvojen laadun määrittäminen

Ääriarvosovelluksia

Integraalilaskentaa

- Integraalifunktio
- Polynomifunktion integrointi
- Määrätty integraali
- Yksinkertaisia pinta-alalaskuja

Opetusjärjestelyt

Differentiaalilaskentaan käytetään aikaa noin 20 tuntia ja integraalilaskentaan noin 15 tuntia.

Käsitellään myös sellaisia ääriarvotehtäviä, jotka voidaan luontevammin ratkaista ilman differentiaalilaskennan apua.

Pinta-alojen määrittämisen yhteydessä pyritään soveltamaan myös likimääräisiä mentelmiä.

6. kurssi Todennäköisyyslaskentaa ja tilastotiedettä

Tavoite

Oppilas tuntee todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet ja osaa suorittaa yksinkertaisia laskuja todennäköisyyslaskennan alalta. Oppilas tuntee normaalijakauman ja osaa tulkita empiirisiä jakaumia.

Sisältö

Todennäköisyys

- Empiirisen todennäköisyyden käsite
- Klassisen todennäköisyyden käsite
- Yhteen- ja kertolaskusääntö, komplementtitapauksen todennäköisyys
- Tuloperiaate, toistokokeet, binomitodennäköisyys ilman johtoa

Normaalijakauma ja sen käyttö

Empiirinen jakauma

- Otos, keskiarvon keskivirhe
- Esimerkkejä tilastollisesta päätöksenteosta

* Sovellusprojekteja, joissa käytetään etupäässä tilastollisia menetelmiä.

Opetusjärjestelyt

Kurssille luonteenomaista on todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen menetelmiin perehtyminen ja näiden soveltaminen käytännön ongelmien ratkaisemiseen. Koska kurssi liittyy läheisesti ensimmäisen kurssin sisältöön, kurssin aikana palautetaan mieleen ensimmäisen kurssin sisällöstä ainakin keskiarvo, keskihajonta ja korrelaatio.

Eri kohdissa valotetaan mahdollisuuksien mukaan automaattisen tietojenkäsittelyn käyttömahdollisuuksia.

7. kurssi Kertauskurssi

Oppilas kertaa lukion yleisen oppimäärän pääkohdat ja harjoittelee myös eritasoisten ja aikaisempaa laajempien tehtävien suorittamista. Oppilas muodostaa yleiskäsityksen opitusta matematiikasta ja sen merkityksestä myöhemmän opiskelun kannalta.

Kurssin yksityiskohtainen suunnittelu tehdään koulun tasolla kutakin opetusryhmää varten erikseen.

3 Laaja oppimäärä

Tavoitteet

Lukion matematiikan laajan oppimäärän tavoitteena on

- laskuteknisten valmiuksien hankkiminen
- matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen
- matematiikan tavallisimpiin sovelluksiin perehtyminen.

Laskuteknisten valmiuksien hankkiminen sisältää tavanomaisen numerolaskemisen lisäksi mm.
- kyvyn käsitellä rationaali-, itseisarvo-, juuri-, logaritmi- ja eksponenttifunktiolausekkeita sekä trigonometrisia lausekkeita ja käyttää asianomaisia laskusääntöjä
- kyvyn ratkaista yhtälöitä ja epäyhtälöitä
- kyvyn määrittää raja-arvoja ja derivoida ja integroida funktioita
- vektorien peruslaskutoimitusten hallitsemisen.

Matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen käsittää mm.
- kuvan saamisen määrittelyn ja todistamisen erikoisasemasta matematiikassa sekä tavallisimpiin todistusmenetelmiin tutustumisen
- tutustumisen matemaattiseen käsitteenmuodostukseen: induktiiviseen (erikoisesta yleiseen etenevään), deduktiiviseen (yleisestä erityiseen etenevään) sekä analogiseen (erilaisten tilanteiden yhteisiin ominaisuuksiin perustuvaan) ajattelutapaan
- alustavan tutustumisen aksiomaattisen järjestelmän erikoisasemaan matematiikassa
- totuttautumisen käyttämään täsmällisiä ja oikeita merkintöjä ja lukemaan matemaattista tekstiä.

Matematiikan tavallisimmat sovellukset käsittävät mm.
- matemaattisten menetelmien käyttämistä eri elämänalojen ongelmien ratkaisemiseen, esim. sanallisten probleemoiden ratkaisemiseen yhtälöiden avulla tai minimointi- ja maksimointitehtävien ratkaisuun funktioiden ominaisuuksien perusteella tai differentiaalilaskentaa käyttäen
- todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen menetelmiin perehtymisen ja näiden soveltamisen käytännön ongelmiin
- pinta-ala ja tilavuuslaskujen suorittamisen
- tutustumisen matematiikan käyttöön muilla tieteenaloilla kuten fysiikassa, kemiassa, biologiassa, maantieteessä, tekniikassa, tilastotieteessä ja psykologiassa
- tutustumisen automaattisen tietojenkäsittelyn mahdollisuuksiin ja rajoituksiin matemaattisia probleemoja ratkaistaessa.

Opetusjärjestelyt

Opetuksen suunnitteluun ja toteutukseen liittyviä näkökohtia

Matematiikan opiskelussa korostuu enemmän kuin monissa muissa aineissa itsenäisen älyllisen ponnistelun osuus. Varsin suuri osa opiskelusta on välttämätöntä suorittaa perehtymällä itsenäisesti oppitunnilla esitettyyn asiaan, pyrkimällä omaksumaan ja sisäistämään uusia käsitteitä ja ajatustapoja sekä laskemalla harjoitustehtäviä.

Kyselevällä opetuksella ja luentomaisella esityksellä on merkittävä osuus. Tärkeitä ovat niin ikään laskuharjoitusrupeamat ja -tunnit, joiden aikana suoritetaan yksilöllisesti tai pienryhmissä harjoitustehtäviä ja tarkastetaan ja selvitetään ennalta laskettuja tehtäviä. Säännöllinen kotityöskentely kuuluu oleellisena osana matematiikan opiskeluun.

Lukion laajan oppimäärän opiskelu poikkeaa käsitteellisyytensä ja myös vaikeustasonsa puolesta oleellisesti peruskoulun matematiikan opiskelusta. Lukio-opiskelun alussa mutta myöhemminkin oppilailla saattaa olla vaikeuksia käsitteiden hallinnassa ja laskutaidossa vaadittavan varmuuden saavuttamisessa. Peruskoulun ja lukion välisen kynnyksen menestyksellinen ylittäminen on yksi lukio-opetuksen keskeinen vaativa tehtävä. Paitsi että voidaan hyödyntää opetussuunnitelmassa tähän tarkoitukseen varattuja lisäkursseja, on myös opetusmenetelmällisesti helpotettava oppilaiden sopeutumista lukio-opiskeluun. Etenkin lukion alussa opetus on perustettava riittävän konkreetteihin lähtökohtiin ja pyrittävä käyttämään hyväksi runsaasti havainnollisia esimerkkejä. Matematiikan harrastuksen virittämiseksi oppilaille voidaan antaa toisen ja kolmannen kouluvuoden aikana yksilöllisesti tai ryhmissä suoritettavaksi laajempia ja kokoavia tehtäviä esimerkiksi kertauskurssin tai tilastokurssin yhteydessä.

Jos jakso-opiskelu on hyvin keskitettyä, esimerkiksi kuusi tuntia viikossa, tämä saattaa vaikeuttaa käsitteiden perusteellista omaksumista. Niinpä opetuksessa on vältettävä kiireen tuntua ja varattava riittävästi aikaa myös tunneilla, etenkin kaksoistunneilla, tapahtuvaan harjoitteluun. Omaksumisvaikeudet ja matematiikan opiskelun keskeytyminen ns. nollajaksojen aikana edellyttävät myös riittävän tehokasta kertaamista aikaisemmin opittuihin asioihin palattaessa.

Laajan oppimäärän luonteen mukaisesti on tärkeää, että oppilaat saavat kuvan matematiikan loogisesta ja deduktiivisesta luonteesta ja oppivat seuraamaan ja suorittamaan yksinkertaisia todistuksia. Toisaalta korkeakoulu- ja lukiomatematiikan välinen raja ei saa hämärtyä. Lukiossa ei ole tarkoitus rakentaa matematiikasta tiukan aksiomaattista struktuuria vaan luoda käsitteellinen ja laskennallinen pohja erilaisille jatko-opinnoille. Niinpä huomattava osa opetuksessa tarvittavista tiedoista voidaan ottaa käyttöön havainnon, graafisen mielikuvan tai analogiapäättelyn perusteella, jolloin kuitenkin on tärkeätä korostaa oppilaille sitovan todistuksen ja havainnollisen perustelun välistä eroa. Esimerkiksi oppikirjojen liitteissä tai muussa oheismateriaalissa voisi olla lisää esimerkkejä täsmällisistä perusteluista ja johdoista perusteellisempia tarkasteluja kaipaavia oppilaita varten.

Teknisesti kovin vaativien ja monimutkaisten laskujen ratkaisemiseen harjaantuminen ei ole lukion opetuksen päätavoitteita. Tällä ei suinkaan kielletä vaativien ja teoreettisten harjoitusten arvoa etenkin matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden kannalta. Oppikirjoissa voisi tällaisia eriyttäviä harjoituksia olla muusta tekstistä selvästi erillään. Näiden käyttöä edistäisivät melko yksityiskohtaiset ratkaisuvihjeet ja malliratkaisut.

Vähentämällä tarpeetonta teoreettisuutta ja formalismia sekä harkitsemalla tarkoin, millaiset esimerkit ovat todella valaisevia, lukion matematiikanopetusta voidaan keventää ja varmistaa opetettavan aineksen riittävän perusteellinen omaksuminen. Entistä suurempi paino olisi myös asetettava matematiikan sovellusten mahdollisimman monipuoliselle käsittelylle esimerkiksi yhtälöiden, trigonometrian, ääriarvojen ja integraalilaskennan yhteydessä. Samoin olisi pyrittävä siihen, että myös muissa aineissa käytettäisiin hyväksi matematiikassa opittuja menetelmiä ja tietoja.

Nykyaikaisten teknisten apuvälineiden vaikutusta matematiikan soveltamisessa ja myös opetuksessa korostetaan esittelemällä sopivissa kohdin laskennallisiin menetelmiin ja esimerkiksi automaattiseen tietojenkäsittelyyn soveltuvia käsittelytapoja.

Kurssit ja niiden rakenne

Matematiikan laaja oppimäärä koostuu yhdestätoista 38 tunnin mittaisesta kurssista. Näiden ohella järjestetään lisäkursseja ja tukiopetusta sekä erikoiskursseja. Kurssit koostuvat usein eri aihepiireistä, jolloin kurssisuunnitelmissa on esitelty likimääräisesti eri asioiden käsittelyyn käytettävä aika. Tuntimäärissä on mukana kokeisiin varattu aika.

Kurssisuunnitelmat ovat osittain varsin yleisluontoisia. Näin ollen koulun ja opetusryhmän tasolla tapahtuvalle suunnittelulle jää runsaasti tehtäviä ja mahdollisuuksia. Koulun erityispiirteet ja -resurssit voivat jossakin määrin muuttaa painotuksia ja käsittelyjärjestystä kurssien sisällä. Esimerkiksi monipuolisten tietojenkäsittelylaitteistojen käyttömahdollisuus saattaa vaikuttaa kurssin 1 muotoutumiseen.

Kurssien sisällöissä jotkin kohdat on merkitty tähdellä (*). Tämä osoittaa, että kyseinen kohta ei kuulu varsinaiseen kurssiin, vaan voidaan käsitellä, mikäli aikaa ja kiinnostusta riittää.

1. kurssi Reaaliluvut. Johdatus tilastomatematiikkaan. Tietojenkäsittelyä

Tavoite

Oppilas hallitsee reaalilukujen perusominaisuudet sekä laskutoimitukset reaaliluvuilla. Oppilas tutustuu tilastomatematiikan hyödyntämiseen yhteiskunnassa ja osaa käyttää sen tarjoamia apuvälineitä. Oppilas saa yleiskuvan tietojenkäsittelystä, tuntee tietojenkäsittelyn peruskäsitteet sekä tutustuu tietojenkäsittelyn hyväksikäyttöön ongelmien selvittelyssä.

Sisältö

Reaaliluvut

- Lukualueen laajennukset
- Laskusäännöt, rationaalilausekkeilla laskeminen, itseisarvo, neliöjuuri ja neliöjuurilaskuja
- Ensimmäisen asteen yhtälö ja yhtälöpari

Tilastoaineksen esitystapoja ja tunnuslukuja

- Luokitteluasteikko, tyyppiarvo
- Välimatka-asteikko, mediaani, keskiarvo ja otoksen keskihajonta
- Korrelaatio
- Normaalijakauma esimerkkien avulla havainnollistettuna

Tietojenkäsittelytietoutta

- Tiedot ja tietojen esittäminen
- Tietojen käsittely ja sen kuvaaminen
- Tietokone ja sen käyttö
- Atk ja yhteiskunta

Opetusjärjestelyt

Reaalilukujen käsittelyyn käytetään aikaa noin 20 tuntia, tilastollisen aineksen käsittelyyn noin 10 tuntia ja tietojenkäsittelyyn noin 5 tuntia.

Ensimmäisen asteen yhtälö ja yhtälöpari voidaan käsitellä kertauksenomaisesti. Neliöjuurilausekkeiden kohdalla ei tässä yhteydessä ole tarkoitus painottaa monimutkaisten lausekkeiden sieventämisharjoittelua. Käsitellään myös neliöjuuren arvon laskemista iteroimalla.

Tilastollisten tunnuslukujen yhteydessä esitetään myös mahdollisuudet algoritmiseen ajatteluun ja atk:n käyttömahdollisuuksia tilastollisessa tutkimuksessa.

Käytetään mahdollisuuksien mukaan hyväksi laskimia.

2. kurssi Yhtälö- ja epäyhtälöoppia

Tavoite

Oppilas osaa ratkaista yhtälöitä ja epäyhtälöitä

Sisältö

2. asteen yhtälö
1. ja 2. asteen epäyhtälöt
Korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä
Itsearvoyhtälöitä ja -epäyhtälöitä
Murtoyhtälöitä ja -epäyhtälöitä

Opetusjärjestelyt

Polynomin jaollisuutta käsitellään 2. ja korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisemisen yhteydessä. Käsitellään myös algoritmisia menetelmiä yhtälöiden juurien määrittämiseksi.

3. kurssi Vektorit. Geometriaa

Tavoite

Oppilas hallitsee vektoriopin ja tasogeometrian peruskäsitteet sekä tutustuu vektorien käyttöön todistustehtävissä. Oppilas selviytyy tavallisimmista tasogeometrisista laskutehtävistä.

Sisältö

Vektori

- Suunta, pituus, nollavektori, vastavektori

Vektorien laskutoimitukset

- Yhteen- ja vähennyslasku, reaaliluvulla kertominen, laskulait

Vektorin komponentit

- Koordinaattiesitys, vektoriyhtälöt, vektori- ja skalaarikomponentti

Skalaaritulo

- Määritelmä, skalaaritulon laskulait, kahden koordinaattimuodossa olevan vektorin skalaaritulo

Geometrian kertausta ja täydennystä

- Sini- ja kosinilause
- Tasokuvioiden ominaisuuksien kertaus
- Yhdenmuotoisuus
- Mediaanien leikkauspistelause, kulmanpuolittajalause, sekanttilause

Geometrisia sovelluksia

Opetusjärjestelyt

Vektoreihin käytetään aikaa noin 15 tuntia ja geometriseen osaan noin 20 tuntia. Peruskoulun trigonometrian tietoja täydennetään siinä määrin, kuin niitä tarvitaan vektorin komponenttien, skalaaritulon sekä sini- ja kosinilauseen käsittelyssä. Vektoreita käytetään hyväksi geometrian yhteydessä. Myös kolmiulotteisten vektorien koordinaattiesitystä voidaan käsitellä.

4. kurssi Analyyttistä geometriaa

Tavoite

Oppilas osaa muodostaa, tunnistaa, tulkita ja käsitellä tavallisimpien tasokäyrien yhtälöitä myöhempiä funktio-opillisia sovelluksia silmälläpitäen.

Sisältö

Janan pituus ja keskipiste

Suora

- Suoran yhtälö

- Kahden suoran leikkauspiste, kahden suoran välinen kulma, suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus
- Pisteen etäisyys suorasta

Ympyrä

- Ympyrän yhtälö
- Tangetti

Ellipsin, hyperbelin ja paraabelin yhtälöt

1. asteen yhtälöryhmä

Kahden muuttujan epäyhtälö

Sovelluksena lineaarisen opitimoinnin tehtäviä

Opetusjärjestelyt

Ellipsin, hyperbelin ja paraabelin yhtälöistä voidaan jokin johtaa malliksi.

Korkeamman asteen yhtälöryhmiä käsitellään 2. asteen käyrien leikkauspisteiden yhteydessä.

Käsitellään mahdollisuuksien mukaan atk:n käyttöä esimerkiksi yhtälöryhmien ja lineaarisen optimoinnin yhteydessä.

5. kurssi Funktio-oppia. Trigonometriaa

Tavoite

Oppilas tuntee kuvauksen käsitteen ja perehtyy reaalifunktioihin sekä osaa tulkita funktion ominaisuuksia kuvaajan perusteella. Oppilas tuntee juurikäsitteen ja murtopotenssin sekä eksponentti- ja logaritmifunktion tärkeimmät ominaisuudet. Oppilas hallitsee trigonometrian peruskäsitteet ja osaa käyttää funktiokäsitettä ja trigonometriaa sovelluksissa.

Sisältö

Kuvaus

- Kuvauksen määritelmä
- Bijektio ja käänteiskuvaus
- Kuvausten yhdistäminen

Reaalifunktiot

- Funktion kuvaaja
- Funktion nollakohdat ja merkin tutkiminen
- Monotoniset funktiot
- Yhdistetty funktio

Juurikäsite ja murtopotenssi

Eksponentti- ja logaritmifunktio

Trigonometriaa

- Radiaani
- Trigonometristen funktioiden määritelmät, jaksollisuus ja kuvaajat
- Trigonometristen funktioiden väliset peruskaavat
- Trigonometristen funktioiden yhteen- ja vähennyslaskukaavat
- Trigonometrisia yhtälöitä

Opetusjärjestelyt

Funktio-osa on peruskoulutietojen syventävää kertausta ja täydennystä. Bijektion yhteydessä käsitellään myös injektio ja surjektio. Funktio-osaan käytetään aikaa noin 10 tuntia, juurikäsitteen ja murtopotenssin sekä eksponentti- ja logaritmifunktion tarkasteluun noin 10 tuntia sekä trigonometriaan noin 15 tuntia.

Eksponentti- ja logaritmifunktioista esitetään määrittely, kuvaaja sekä laskusäännöt ja tarkastellaan yksinkertaisia yhtälöitä. Näihin funktioihin johtavista ilmiöistä annetaan esimerkkejä muista tieteistä ja yhteiskunnan eri aloilta.

Trigonometristen yhtälöiden ratkaisemisessa rajoitutaan suurelta osin tyyppiä $\sin kx = a$ oleviin yhtälöihin ja funktioiden välisten peruskaavojen avulla ratkeaviin yhtälöihin. Trigonometrian soveltamista harjoitellaan eri yhteyksiin luontevasti sopivien ongelmien ratkaisemisella.

6. kurssi Raja-arvot. Jatkuvuus. Derivaatta

Tavoite

Oppilas tuntee raja-arvon ja jatkuvuuden käsitteet ja osaa määrittää erilaisia raja-arvoja. Oppilas hallitsee jatkuvan funktion perusominaisuudet ja derivaatan käsitteen. Oppilas osaa derivoida polynomi- ja murtofunktioita ja tutustuu derivaatan käyttöön funktion pienimmän ja suurimman arvon määrityksessä.

Sisältö

Funktion raja-arvo

- Raja-arvo annetussa pisteessä
- Summan, erotuksen, tulon, osamäärän ja yhdistetyn funktion raja-arvot

Funktion jatkuvuus

- Jatkuvuus annetussa pisteessä
- Jatkuvuus annetulla välillä
- Suljetulla välillä jatkuvan funktion tärkeimmät ominaisuudet

Funktion derivaatta

- Derivaatta annetussa pisteessä
- Derivaattafunktio
- Derivaatan tulkinta

Derivoimissääntöjä

- Funktioiden f+g ja kf derivaatat (k vakio)
- Funktion x^n ja polynomifunktion derivaatat
- Tulon ja osamäärän derivaatat

Funktion pienimmän ja suurimman arvon määrittäminen suljetulla välillä

Opetusjärjestelyt

Funktion raja-arvoon ja jatkuvuuteen käytetään aikaa noin 15 tuntia ja derivaattaan noin 20 tuntia. Raja-arvosäännöistä todistetaan jokin esimerkinomaisesti. Toispuolisen raja-arvon ja toispuolisen derivaatan käsitteet esitetään esimerkkien avulla samoin kuin raja-arvo äärettömyydessä. Raja-arvon käsitettä voidaan havainnollistaa numeerisesti laskinta hyväksi käyttäen. Suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuudet perustellaan pääosin graafisesti.

Derivaatan tulkinnasta pyritään antamaan monipuolisia esimerkkejä. Funktion pienimmän ja suurimman arvon määrittämiseen pyritään jo derivoimissääntöjen johtamisen rinnalla.

7. kurssi Differentiaalilaskentaa

Tavoite

Oppilas osaa derivoida funktioita. Oppilas osaa tutkia funktioita, määrittää niiden ääriarvoja sekä piirtää niiden kuvaajia differentiaalilaskentaa hyväksi käyttäen. Oppilas tutustuu differentiaalilaskennan soveltamiseen eri elämänaloilla.

Sisältö

Väliarvolause

Funktion monotonisuus

Ääriarvot

- Paikalliset ääriarvot
- Ääriarvon laatu

Yhdistetyn funktion derivaatta

Trigonometristen funktioiden derivaatat

Käänteisfunktion derivaatta

Eksponentti- ja logaritmifunktion derivaatta

Yleinen potenssifunktio ja sen derivaatta

Differentiaalilaskennan sovelluksia

Opetusjärjestelyt

Väliarvolause perusteellaan geometrisesti. Ääriarvojen käsittelyn yhteydessä piirretään funktioiden kuvaajia. Eri funktioiden derivaattoja määritettäessä kerrataan näiden funktiotyyppien kuvaajat sekä tuodaan ilmi derivaatan merkitys funktion tutkimisessa.

Käsitellään myös sellaisia ääriarvotehtäviä, jotka voidaan luontevimmin ratkaista ilman differentiaalilaskennan apua. Funktion e^x derivaatta annetaan johtamatta. Sovelluksissa pyritään käsittelemään yhteiskunnallisia, geometrisia ja muihin tieteisiin liittyviä tehtäviä sekä myös teoreettisempia, esimerkiksi yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisujen olemassaoloon liittyviä tehtäviä.

8. kurssi Todennäköisyyslaskentaa ja tilastotiedettä. Lukujonot ja sarjat

Tavoite

Oppilas tuntee todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet ja osaa käyttää niitä yksinkertaisissa sovelluksissa. Oppilas tuntee lukujonon ja sarjan keskeisimmät ominaisuudet.

Sisältö

Todennäköisyys

- Empiirisen todennäköisyyden käsite
- Klassisen todennäköisyyden käsite
- Yhteen- ja kertolaskusääntö. Komplementtitapauksen todennäköisyys
- Tuloperiaate, kombinaatiot
- Toistokoneet ja binomitodennäköisyys
  *Todennäköisyyslaskennan aksiomit

Todennäköisyysjakauma

- Satunnaismuuttuja
- Diskreetti jakauma
- Jatkuva jakauma
- Normaalijakauma ja sen käyttö

Empiirinen jakauma

- Otos, keskiarvon keskivirhe
  * Esimerkkejä tilastollisesta päätöksenteosta

Lukujonot ja sarjat

- Lukujonon raja-arvo
- Sarjan suppeneminen
- Geometrinen sarja

Opetusjärjestelyt

Todennäköisyyslaskentaan ja tilastotieteeseen käytetään vähintään 25 tuntia. Kurssi painottuu yksinkertaisten todennäköisyyslaskentaan liittyvien tilanteiden hahmottamiseen ja käsittelyyn mm. laskusääntöjä soveltaen. Todennäköisyysjakaumien yhteydessä tutustutaan käsitteisiin odotusarvo ja keskihajonta painopisteen ollessa normaalijakaumassa ja sen käytössä. Jatkuvan jakauman tunnuslukuihin ja kertymäfunktioon palataan integraalilaskennan yhteydessä. Lukujonojen ja sarjojen kohdalla on pääpaino geometrisen sarjan avulla ratkeavien tehtävien käsittelyssä. Eri kohtien käsittelyn yhteydessä valotetaan mahdollisuuksien mukaan atk:n käyttöä.

9. kurssi Integraalilaskentaa

Tavoite

Oppilas hallitsee integraalifunktion ja määrätyn integraalin käsitteet. Oppilas osaa integroida yksinkertaisesti integroitavissa olevia funktioita. Oppilas osaa soveltaa määrättyä integraalia mm. pinta-ala- ja tilavuuslaskuihin.

Sisältö

Jatkuvan funktion integraalifunktio

Integroimissääntöjä

- Alkeisfunktioiden derivaattoihin perustuva integroiminen
- Yhdistetyn funktion derivaattaan perustuva integroiminen
  * Osittaisintegroiminen
  * Integroiminen sijoituksen avulla

Määrätyn integraalin käsite

- Havainnollinen määritelmä ylä- ja alasummia hyväksikäyttäen

Määrätyn integraalin laskusäännöt

- Lineaarisuus
- Additiivuus osavälien suhteen
- Ylä- ja alarajan vaihto

Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

Sovelluksia

- Pinta-ala ja tilavuuslaskuja
- Jatkuvan jakauman tunnusluvut ja kertymäfunktio

Opetusjärjestelyt

Pinta-aloja ja tilavuuksia laskettaessa pyritään esittämään myös likimääräisiä menetelmiä.

Jatkuvan jakauman yhteydessä tutustutaan epäoleellisen integraalin käsitteeseen.

10. kurssi Vektorilaskennan täydennys. Avaruusgeometriaa. Kompleksiluvut

Tavoite

Oppilas syventää vektorilaskennan tuntemustaan ja ulottaa sen myös kolmiulotteisen avaruuden vektoreihin sekä totuttautuu yksinkertaisiin avaruusgeometrisiin tarkasteluihin. Oppilas omaksuu perustiedot kompleksiluvuista.

Sisältö

Kolmiulotteinen vektoriavaruus

Avaruusgeometriaa

Kompleksiluvut

- Määrittely ja laskutoimitukset
- Kompleksitaso
- Toisen asteen yhtälön yleinen ratkaisu

Opetusjärjestelyt

Vektorilaskentaan ja avaruusgeometriaan käytetään aikaa noin 25 tuntia, mihin sisältyy esittelynomainen vektoritulon käsittely.

Avaruusgeometrian yhteydessä kerrataan avaruuskappaleiden piirtäminen ja ominaisuudet sekä ratkaistaan avaruusgeometrisia ääriarvotehtäviä. Käsiteltäviä kappaleita ovat kuutio, suorakulmainen särmiö, säännöllinen 3-sivuinen särmiö, säännöllinen tetraedri, säännöllinen 3- ja 4-sivuinen pyramidi, pyörähdyslieriö ja -kartio sekä pallo, joiden tilavuuksien laskukaavat myös kerrataan.

11. kurssi Kertauskurssi

Oppilas kertaa lukion laajan oppimäärän pääkohdat ja tutustuu myös entistä laajempiin, eri aihepiirien alueilta tietoja vaativiin tehtäviin. Oppilas muodostaa aikaisempaa jäsentyneemmän ja syvällisemmän kuvan lukion kurssin asioista ja harjaantuu niiden soveltamiseen.

Kurssin yksityiskohtainen suunnittelu tehdään koulun tasolla kutakin opetusryhmää varten erikseen.

Lisäkurssit

Lukion matematiikan opetus pohjautuu peruskoulun matematiikan oppimäärään. Ensimmäisen vuoden kurssit ovat sekä yleisellä että laajalla oppimäärällä osaksi peruskoulutietoja kertaavia ja täydentäviä. Jos kuitenkin oppilaan matematiikan opiskelu peruskoulussa on rajoittunut vain vähimmäisvaatimusten täyttämiseen, edellyttää tämä lukion alussa keskimääräistä tiiviimpää työskentelyä ja harjoittelua pohjatietojen täydentämisessä sekä laskuvalmiuksien parantamisessa lukio-opetuksen omaksumisen varmentamiseksi. Lukusuunnitelmassa mainitun ensimmäisen luokan lisäkurssin on lähinnä tarkoitus palvella juuri tämän päämäärän saavuttamista.

Koska pohjatiedoissa ja laskuvalmiuksissa mahdollisesti esiintyvät puutteellisuudet johtuvat varsin monista tekijöistä ja ovat näin ollen hyvin vaihtelevia, ei näiden puutteellisuuksien poistamiseksi järjestettävien lisäkurssien sisältöjä voida ennakolta juurikaan arvioida. Lisäkurssien sisällön suunnittelu on tarkoituksenmukaista tehdä aina vuosittain uudelleen ja ainakin yleisen ja laajan oppimäärän lukijoille erikseen. Suunnittelun pohjaksi on syytä diagnostisoida opetusryhmän oppilaiden tiedot ja taidot.

Edellä mainitusta lisäkurssin tavoitteesta johtuen on sen järjestäminen edullisinta jo syyslukukaudella ja mieluimmin vielä ennen oppimäärän ensimmäisen kurssin alkua, mikäli se vain on mahdollista.

Lisäkurssien pedagogiikan tulee mahdollisimman hyvin palvella niille asetettua tavoitetta. Sen vuoksi tulee työskentelyn näillä kursseilla olla hyvin yksilöllistä ja selvästi muusta opetuksesta poikkeavaa. Kurssin aikana tulisi eri tavoilla pyrkiä mahdollisimman hyvin pääsemään selville kunkin oppilaan henkilökohtaisista matematiikan opiskeluun liittyvistä vaikeuksista ja ohjaamaan häntä näiden voittamiseen. Lisäksi tulisi pyrkiä ylläpitämään ja lisäämään myönteistä asennoitumista matematiikan opiskelua ja sitä kautta koko lukion käyntiä kohtaan. Lisäkurssilla pitäisikin antaa myös matematiikan opiskelutekniikan ohjausta.

Matematiikan opiskelulle on tyypillistä mm. matematiikan kumulatiivisuudesta ja eksaktisuudesta johtuen se, että henkilökohtainen omaksumisaika vaihtelee varsin paljon ja opiskelun kuluessa oppimistulosten hajonta kasvaa. Tästä syystä on pohjatietojen ja laskuvalmiuksien varmentamiseen varattava mahdollisuus myöhemminkin lukio-opiskelun aikana. Toisen vuoden lisäkurssin tarkoitus onkin lähinnä korjata ensimmäisen lukiovuoden opiskelussa mahdollisesti syntyneitä puutteellisuuksia niin, että oppilas edelleenkin mahdollisimman hyvin pystyy seuraamaan lukion matematiikan opetusta.

Myös toisen lukioluokan lisäkurssin sisältö suunnitellaan koulussa vuosittain ja tähän suunnitteluun vaikuttaa paitsi opiskeluryhmä niin myös se ajankohta, jolloin kurssi järjestetään.

Lisäkurssien luonne on usein lähellä tukiopetusta varsinkin, jos tukiopetusta annetaan ennakolta. Tukiopetuksen varsinainen käyttötarkoitus on kuitenkin tilapäisten oppimisvaikeuksien voittaminen.

4 Arviointi

Arviointimenetelmät ja kurssiarvostelu

Suuri osa lukion matematiikan kokeista on summatiivisia kokeita, joilla pyritään tarkistamaan, että oppilas on saavuttanut riittävän tieto- ja valmiustason ja joiden perusteella kurssista annettava arvosana pääosin määräytyy. On tarkoituksenmukaista pitää lisäksi sopivissa tilanteissa lyhyitä formatiivisia kokeita. Näillä varmistetaan, että oppilaat ovat omaksuneet jonkin keskeisen asian, jonka hallinta on jatkoa varten oleellista. Lisäksi voidaan joissakin tapauksissa pitää kurssin alussa diagnostisia kokeita, joilla pyritään kartoittamaan oppilaan esitiedoissa mahdollisesti olevat puutteet. Koska lukioon tulevien oppilaiden lähtötaso vaihtelee, diagnostisten kokeiden merkitys on suuri juuri lukio-opintojen alussa. Näillä suoritetun lähtötason kartoituksen jälkeen voidaan tarkemmin suunnitella ensimmäisen luokan lisäkurssien ohjelma peruskoulutietojen syventämiseksi ja täydentämiseksi tai järjestää tukiopetusjakso.

Numeroarvosana annetaan kaikista kursseista lisäkursseja ja erikoiskursseja lukuunottamatta. Eri kurssit arvostellaan toisistaan riippumatta. Kuhunkin kurssiin sisältyy mahdollisuuksien mukaan yleensä kaksi kahden tunnin kestoista summatiivista koetta. Kurssiarvosanan määräytymisessä pidetään lähtökohtana summatiivisten kokeiden arvosanoja. Jatkuva näyttö voi vaikuttaa näin saatuun arvosanaan yhden numeron verran, yleensä korottavasti. Erikoiskursseista annetaan pelkkä suoritusmerkintä.

Summatiiviset kokeet

Nimenomaan kurssimuotoisessa opiskelussa on opiskelumotivaation ja käytännön järjestelyjen kannalta tarkoituksenmukaista, että pyritään saamaan kaikki oppilaat suorittamaan kurssit hyväksytysti. Summatiivisissa kokeissa tulisi olla vaikeustasoltaan erilaisia tehtäviä, jotka on asetettu suurin piirtein vaikeusjärjestykseen. Tehtävillä pitäisi myös pyrkiä mittaamaan matematiikan tiedollisten tavoitteiden eri osa-alueiden saavuttamista. Kokeiden arvostelu olisi mitoitettava siten, että jo perustehtävien suorittaminen takaa hyväksytyn arvosanan, esim. 8–9 pistettä 30 mahdollisesta. Toisaalta voitaneen korkein mahdollinen arvosana antaa myös sellaisesta suorituksesta, joka jää muutamia pisteitä vaille ennalta määritellyn maksimipistemäärän.

Koearvostelun yhtenäisyyden kannalta on myös hyvä pyrkiä siihen, että summatiivisissa kokeissa on yhtä monta tehtävää ja kokeiden vaikeustaso mahdollisimman vakio. Tällöin myös arvosanarajat voisivat olla melko muuttumattomat. Kertauskurssilla ja joskus muulloinkin saattaa kuitenkin olla hyödyllista pitää tehtävämäärältään ja myös kestoltaan tavanomaisia laajempia kokeita.

Kokeen merkitys opiskelun jatkuvuuden kannalta korostuu, mikäli siitä saatava palaute suunnitellaan tehokkaaksi. Mahdollisuuksien mukaan pyritään antamaan oppilaille oikeat ratkaisut koetilaisuuden jälkeen. Tämän lisäksi on syytä käyttää riittävästi aikaa tehtävien selittämiseen opettajan kokeita korjatessaan tekemien havaintojen perusteella.

Liite 5
Kouluhallitus. Lukion opetussuunnitelmien perusteet. 1985.

9.4.11 Matematiikka

Lukion matematiikan opetus on perinteisesti jakautunut kahdeksi erilliseksi ja erilaajuiseksi oppimääräksi. Myös Pohjoismaissa ja monissa muissa maissa lukion matematiikan opetus on jaettu kahdeksi tai useammaksi erilaajuiseksi oppimääräksi. Matematiikan sisältöalueen jakoa yleiseen ja laajaan oppimäärään puoltaa oppilaiden erilainen kiinnostus matematiikkaa kohtaan sekä jatko-opintojen edellyttämät erilaiset pohjatiedot.

Yleisen oppimäärän opiskelussa tähdätään lähinnä humanistisiin, yhteiskuntatieteellisiin sekä palvelu- ja kauppa-alan jatko-opintoihin. Laajalla oppimäärällä pidetään lähinnä silmällä matemaattis-luonnontieteellisiä ja teknisiä jatko-opintoja.

Tavoitteet

Yleistavoitteet

Lukion matematiikan opetus pyrkii osaltaan edistämään persoonallisuuden monipuolista kehittämistä. Matematiikan opetuksen yleistavoitteina pidetään

— sellaisten käyttökelpoisten tietojen ja valmiuksien omaksumista, jotka takaavat hyvän pohjan jatko-opinnoille

— harrastuneisuuden herättämistä matematiikan käsitemaailmaa kohtaan, mihin sisältyy myös käsityksen saaminen matematiikasta älyllisiä virikkeitä antavana sekä älyllistä ja esteettistä tyydytystä suovana tieteenalana

— sellaisen matemaattisen yleissivistyksen saavuttamista, joka edistää oppilaan kykyä uuden tiedon hankkimiseen, kriittiseen arvioimiseen, soveltamiseen ja välittämiseen

Yleisen oppimäärän tavoitteet

Lukion matematiikan yleisen oppimäärän opiskelun tavoitteena on saavuttaa tietyntasoisia laskuteknisiä valmiuksia, perehtyä matematiikan tavallisimpiin sovelluksiin sekä tutustua jossakin määrin myös matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen.

Laskuteknisten valmiuksien hankkiminen sisältää tavanomaisen numerolaskemisen lisäksi mm.

— kyvyn käyttää hyväkseen laskimia ja taulukoita sekä kyvyn arvioida tulosten suuruusluokkaa ja järkevyyttä

— kyvyn käsitellä yksinkertaisia rationaali- ja neliöjuurilausekkeita

— kyvyn ratkaista yhtälöitä ja epäyhtälöitä
— kyvyn derivoida ja integroida polynomifunktioita
— vektorien peruslaskutoimitusten hallitsemisen.

Matematiikan tavallisimmat sovellukset käsittävät mm.
— matemaattisten menetelmien käyttämistä eri elämänaloilla esiintyvien probleemien ratkaisemiseen, esimerkiksi sanallisten probleemien ratkaisemiseen yhtälöiden avulla tai minimointi- ja maksimointitehtävien ratkaisuun funktioiden ominaisuuksien perusteella tai differentiaalilaskentaa käyttäen
— todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen menetelmiin perehtymisen ja näiden soveltamisen käytännön ongelmiin
— soveltavien pinta-ala- ja tilavuuslaskujen suorittamisen
— tutustumisen matematiikan käyttöön muilla tieteenaloilla kuten fysiikassa, kemiassa, biologiassa, maantieteessä, tekniikassa ja psykologiassa sekä matematiikan asemaan kaupallisen, yhteiskuntatieteellisen ja palvelualan apuvälineenä
— tutustumisen automaattisen tietojenkäsittelyn mahdollisuuksiin ja rajoituksiin matemaattisia probleemoja ratkaistaessa.

Matematiikan loogiseen ja abstraktiin struktuuriin tutustutaan yleisessä oppimäärässä lähinnä kuvailemisen tasolla. Tällöin pyritään saamaan käsitys määrittelyn ja loogisen päättelyn asemasta matematiikassa ja totuttaudutaan käyttämään täsmällisiä ja oikeita merkintöjä sekä lukemaan matemaattista tekstiä. Myös matemaattisen käsitteenmuodostuksen eri tapojen esittely sekä viittaaminen yksinkertaiseen aksiomijärjestelmään sopivissa tilanteissa saattaa lisätä kiinnostusta ja antaa virikkeitä itsenäiseen, syvällisempään matematiikkaan perehtymiseen.

Laajan oppimäärän tavoitteet

Lukion matematiikan laajan oppimäärän tavoitteena on
— laskuteknisten valmiuksien hankkiminen
— matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen
— matematiikan tavallisimpiin sovelluksiin perehtyminen.

Laskuteknisten valmiuksien hankkiminen sisältää tavanomaisen numerolaskemisen lisäksi mm.
— kyvyn käyttää hyväkseen laskimia ja taulukoita sekä kyvyn arvioida tulosten suuruusluokkaa ja järkevyyttä
— kyvyn käsitellä rationaali-, itseisarvo-, juuri-, logaritmi- ja eksponenttifunktiolausekkeita sekä trigonometrisia lausekkeita ja käyttää asianomaisia laskusääntöjä
— kyvyn ratkaista yhtälöitä ja epäyhtälöitä
— kyvyn määrittää raja-arvoja sekä derivoida ja integroida funktioita
— vektorien peruslaskutoimitusten hallitsemisen.

Matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen käsittää mm.

— kuvan saamisen määrittelyn ja todistamisen erikoisasemasta matematiikassa sekä tavallisimpiin todistusmenetelmiin tutustumisen

— tutustumisen matemaattiseen käsitteenmuodostukseen: induktiiviseen (erikoisesta yleiseen etenevään), deduktiiviseen (yleisestä erityiseen etenevään) sekä analogiseen (erilaisten tilanteiden yhteisiin ominaisuuksiin perustuvaan) ajattelutapaan

— alustavan tutustumisen aksiomaattisen järjestelmän erikoisasemaan matematiikassa

— totuttautumisen käyttämään täsmällisiä ja oikeita merkintöjä ja lukemaan matemaattista tekstiä.

Matematiikan tavallisimmat sovellukset käsittävät mm.

— matemaattisten menetelmien käyttämistä eri elämänalojen ongelmien ratkaisemiseen, esim. sanallisten probleemoiden ratkaisemiseen yhtälöiden avulla tai minimointi- ja maksimointitehtävien ratkaisuun funktioiden ominaisuuksien perusteella tai differentiaalilaskentaa käyttäen

— todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen menetelmiin perehtymisen ja näiden soveltamisen käytännön ongelmiin

— pinta-ala ja tilavuuslaskujen suorittamisen

— tutustumisen matematiikan käyttöön muilla tieteenaloilla kuten fysiikassa, kemiassa, biologiassa, maantieteessä, tekniikassa, tilastotieteessä ja psykologiassa

— tutustumisen automaattisen tietojenkäsittelyn mahdollisuuksiin ja rajoituksiin matemaattisia probleemoja ratkaistaessa.

Oppisisällöt

Kurssit ja niiden rakenne

Matematiikan yleinen oppimäärä koostuu seitsemästä ja laaja oppimäärä yhdestätoista 38 oppitunnin pituisesta kurssista. Näiden ohella annetaan matematiikassa tukiopetusta sekä järjestetään erikoiskursseja.

Kurssisuunnitelmat ovat osittain varsin yleisluontoisia. Näin ollen tarjoutuu kunnissa koulun ja opetusryhmän tasolla tapahtuvalle suunnittelulle runsaasti tehtäviä ja mahdollisuuksia. Koulun erityispiirteet ja -resurssit voivat jossakin määrin muuttaa painotuksia ja käsittelyjärjestystä kurssien sisällä.

Kurssien sisällöissä on muutamia kohtia merkitty tähdellä (*). Nämä kohdat ovat oppimäärää syventävää ja täydentävää oppiainesta, jota on tarkoitus opetuksessa käsitellä, mutta jolle varattua aikaa voidaan tarvittaessa käyttää myös esimerkiksi perusasioiden harjoitteluun. Kokeissa tämän alueen tehtävien rinnalla on syytä olla myös vaihtoehtotehtäviä kurssin normaalista kohdasta.

Kurssien sisällöissä jotkut kohdat on merkitty kahdella tähdellä (**). Tämä osoittaa, että kyseinen kohta on ns. ylikurssia eikä kuulu varsinaiseen oppimäärään. Se voidaan käsitellä, mikäli aikaa ja kiinnostusta riittää. Silloinkin sen osaaminen oppitunnilla on harrastuspohjaista ja ylikurssiin liittyvät koetehtävät on katsottava vapaaehtoisiksi.

Yleinen oppimäärä

1. kurssi Reaaliluvut. Johdatus tilastomatematiikkaan

Tavoite

Oppilas hallitsee reaalilukujen perusominaisuudet sekä laskutoimitukset reaaliluvuilla. Oppilas tutustuu tilastomatematiikan hyödyntämiseen yhteiskunnassa ja osaa käyttää sen tarjoamia apuvälineitä.

Sisältö

Reaaliluvut
— Lukualueen laajennukset
— Laskusäännöt, polynomilaskennan kertaus, rationaalilausekkeilla laskeminen, itseisarvo, neliöjuuri ja neliöjuurilaskuja
— Ensimmäisen asteen yhtälö ja yhtälöpari

Tilastoaineksen esitystapoja ja tunnuslukuja
— Luokitteluasteikko, tyyppiarvo
— Välimatka-asteikko, mediaani, keskiarvo ja otoksen keskihajonta
— Korrelaatio
— Normaalijakauma esimerkkien avulla havainnollistettuna
— Esimerkkejä tilastojen tutkimisesta tietokoneella.

2. kurssi Funktio-oppia. Yhtälö- ja epäyhtälöoppia

Tavoite

Oppilas tuntee keskeisimmät funktioon liittyvät käsitteet ja osaa tulkita funktion kuvaajaa. Oppilas osaa ratkaista yhtälöitä, epäyhtälöitä ja yhtälöryhmiä ja soveltaa näitä käytännössä.

Sisältö

Funktio
— Funktion määritelmä
— Tason pistejoukko funktion kuvaajana.

Ensimmäisen asteen polynomifunktio
— Suoran yhtälö
— Suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus
— Ensimmäisen asteen epäyhtälö
** Yksinkertaisia itseisarvoyhtälöitä ja epäyhtälöitä

Toisen asteen polynomifunktio
— Toisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

Yhtälöryhmiä

Origokeskeisen ympyrän yhtälö

Sovelluksina yhtälöiden käyttöä ongelmien ratkaisemisessa.

3. kurssi Trigonometriaa. Tason vektorit

Tavoite

Oppilas tuntee trigonometristen funktioiden perusominaisuudet ja osaa käyttää niitä yksinkertaisissa sovelluksissa. Oppilas hallitsee vektorien peruslaskutoimitukset ja osaa käyttää niitä yksinkertaisissa geometrisissa tehtävissä.

Sisältö

Peruskoulun geometrian kertaus
— Yhdenmuotoisuus, mittakaava, tavallisimmat kuviot ja kappaleet sekä niiden piirtämistekniikka

Trigonometriaa
— Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa ja sen soveltamista
  * Trigonometristen funktioiden määritelmät yksikköympyrässä
  * Funktioiden sin x ja cos x kuvaajat
  ** Radiaani

Vektori
— Suunta, pituus, nollavektori, vastavektori

Vektorien laskutoimitukset
— Yhteen- ja vähennyslasku, reaaliluvulla kertominen, laskulait

Vektorin komponenttiesitys $x\bar{i} + y\bar{j}$
  ** Skalaaritulo

Sovelluksia
— Janan keskipiste ja pituus
— Geometrisia sovelluksia

4. kurssi Raja-arvo ja jatkuvuus. Derivaatta. Eksponentti- ja logaritmifunktio

Tavoite

Oppilas tuntee raja-arvon ja jatkuvuuden käsitteet ja osaa määrittää yksinkertaisia raja-arvoja. Oppilas tuntee derivaatan käsitteen ja osaa derivoida polynomifunktioita. Oppilas tuntee eksponentti- ja logaritmifunktiot sekä osaa käyttää niitä.

Sisältö

Funktion raja-arvo
— Raja-arvo annetussa pisteessä
— Raja-arvon määrittäminen

Funktion jatkuvuus
— Jatkuvuuden käsite
— Esimerkkejä jatkuvista ja epäjatkuvista funktioista

Derivaatta
— Funktion derivaatta annetussa pisteessä
— Derivaattafunktio
— Käyrän tangentti ja muita esimerkkejä derivaatan tulkinnasta

Derivoimissääntöjä
— Funktioiden $f+g$ ja kf derivaatat (k vakio)
— Funktion x^n ja polynomifunktion derivaatat
  ** Osamäärän derivaatta

Eksponenttifunktio
— Määrittely, kuvaaja ja ominaisuudet
  * Laskusäännöt
— Esimerkkejä eksponenttifunktion esiintymisestä

Logaritmifunktio
— Määrittely, kuvaaja ja ominaisuudet
  * Laskusäännöt
  * Logaritmiasteikko
— Esimerkkejä logaritmifunktion esiintymisestä.

5. kurssi Differentaali- ja integraalilaskentaa

Tavoite

Oppilas osaa tutkia polynomifunktioita differentiaalilaskentaa hyväksikäyttäen ja määrittää funktioiden ääriarvoja. Oppilas tuntee integraalifunktion ja määrätyn integraalin käsitteet, osaa integroida polynomifunktioita ja määrittää pinta-aloja määrättyä integraalia hyväksikäyttäen.

Sisältö

Funktion tutkiminen derivaatan avulla
— Funktion pienin ja suurin arvo suljetulla välillä
— Funktion monotonisuus
— Paikallisten ääriarvokohtien hakeminen
— Ääriarvojen laadun määrittäminen

Ääriarvosovelluksia

Integraalilaskentaa
— Integraalifunktio
— Polynomifunktion integrointi
— Määrätty integraali
— Yksinkertaisia pinta-alalaskuja.

6. kurssi Todennäköisyyslaskentaa ja tilastotiedettä

Tavoite

Oppilas tuntee todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet ja osaa suorittaa yksinkertaisia laskuja todennäköisyyslaskennan alalta. Oppilas tuntee normaalijakauman ja osaa tulkita empiirisiä jakaumia.

Sisältö

Todennäköisyys
— Empiirisen todennäköisyyden käsite
— Klassisen todennäköisyyden käsite
— Yhteen- ja kertolaskusääntö, komplementtitapauksen todennäköisyys
— Tuloperiaate, toistokokeet, binomitodennäköisyys ilman johtoa

Normaalijakauma ja sen käyttö

Empiirinen jakauma
 * Jakauman tunnuslukujen ja korrelaation kertaus
— Otos, keskiarvon keskivirhe
— Esimerkkejä tilastollisesta päätöksenteosta
 * Sovellusprojekteja, joissa käytetään etupäässä tilastollisia menetelmiä.

7. kurssi Yleisen oppimäärän syventävä ja täydentävä kurssi

Oppilas kertaa lukion yleisen oppimäärän pääkohdat ja harjoittelee myös eritasoisten ja aikaisempaa laajempien tehtävien suorittamista. Oppilas muodostaa yleiskäsityksen opitusta matematiikasta ja sen merkityksestä myöhemmän opiskelun kannalta.

Kurssin yksityiskohtainen suunnittelu tehdään koulun tasolla kutakin opetusryhmää varten erikseen.

Laaja oppimäärä

1. kurssi Reaaliluvut. Johdatus tilastomatematiikkaan

Tavoite

Oppilas hallitsee reaalilukujen perusominaisuudet sekä laskutoimitukset reaaliluvuilla. Oppilas tutustuu tilastomatematiikan hyödyntämiseen yhteiskunnassa ja osaa käyttää sen tarjoamia apuvälineitä.

Sisältö

Reaaliluvut
— Lukualueen laajennukset
— Laskusäännöt, polynomilaskennan kertaus, rationaalilausekkeilla laskeminen, itseisarvo, neliöjuuri ja neliöjuurilaskuja
— Ensimmäisen asteen yhtälö ja yhtälöpari

Tilastoaineksen esitystapoja ja tunnuslukuja
— Luokitteluasteikko, tyyppiarvo
— Välimatka-asteikko, mediaani, keskiarvo ja otoksen keskihajonta
— Korrelaatio
— Normaalijakauma esimerkkien avulla havainnollistettuna
— Esimerkkejä tilastojen tutkimisesta tietokoneella.

2. kurssi Yhtälö- ja epäyhtälöoppia

Tavoite

Oppilas osaa ratkaista yhtälöitä ja epäyhtälöitä sekä soveltaa näitä käytännössä.

Sisältö

2. asteen yhtälö

1. ja 2. asteen epäyhtälöt
— Polynomien jakolasku ja niiden jaollisuus

Korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä

Itseisarvoyhtälöitä ja -epäyhtälöitä
   * Neliöjuuriyhtälöitä

Murtoyhtälöitä ja epäyhtälöitä

Sovelluksina ongelmien ratkaisemista yhtälöillä ja epäyhtälöillä.

3. kurssi Vektorit. Geometriaa

Tavoite

Oppilas hallitsee vektoriopin ja tasogeometrian peruskäsitteet sekä tutustuu vektorien käyttöön todistustehtävissä ja geometriassa. Oppilas selviytyy tavallisimmista tasogeometrisista laskutehtävistä.

Sisältö

Vektori
— Suunta, pituus, nollavektori, vastavektori

Vektorien laskutoimitukset
— Yhteen- ja vähennyslasku, reaaliluvulla kertominen, laskulait
   * Koordinaattiesitys, vektoriyhtälöt, vektori- ja skalaarikomponentti.

Skalaaritulo
— Määritelmä, skalaaritulon laskulait, kahden komponenttimuodossa olevan vektorin skalaaritulo

Geometrian kertausta ja täydennystä
— Tylpän kulman sini ja kosini
— Sini- ja kosinilause
— Tasokuvioiden ominaisuuksien kertaus
— Yhdenmuotoisuus
  * Mediaanien leikkauspistelause, kulmanpuolittajalause

Geometrisia sovelluksia

. kurssi Analyyttistä geometriaa

Tavoite

Oppilas osaa muodostaa, tunnistaa, tulkita ja käsitellä tavallisimpien tasokäyrien yhtälöitä myöhempiä funktio-opillisia sovelluksia silmälläpitäen.

Sisältö

Janan pituus ja keskipiste

Suora
— Suoran yhtälö
— Kahden suoran leikkauspiste, kahden suoran välinen kulma, suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus
— Pisteen etäisyys suorasta

Ympyrä
— Ympyrän yhtälö
— Tangetti

Ellipsin, hyperbelin ja paraabelin yhtälöt

1. asteen yhtälöryhmä

Toisen asteen käyrän ja suoran leikkauspisteiden määrittäminen

Kahden muuttujan epäyhtälö

Sovelluksena lineaarisen optimoinnin tehtäviä.

5. kurssi Funktio-oppia. Trigonometriaa

Tavoite

Oppilas perehtyy reaalifunktioihin sekä osaa tulkita funktion ominaisuuksia kuvaajan perusteella. Oppilas tuntee juurikäsitteen ja murtopotenssin sekä eksponentti- ja logaritmifunktion tärkeimmät ominaisuudet. Oppilas hallitsee trigonometrian peruskäsitteet ja osaa käyttää funktiokäsitettä ja trigonometriaa sovelluksissa.

Sisältö

Reaalifunktiot
— Funktio ja funktion kuvaaja
— Funktion nollakohdat ja merkin tutkiminen
— Monotoniset funktiot
— Yhdistetty funktio

* Juurikäsite ja murtopotenssi

Eksponentti- ja logaritmifunktio
— Määrittely, kuvaaja, ominaisuudet sekä laskusäännöt
— Yksinkertaisia yhtälöitä
— Sovelluksia.

Trigonometriaa
— Radiaani
— Trigonometristen funktioiden määritelmät, jaksollisuus ja kuvaajat
— Trigonometristen funktioiden väliset peruskaavat
* Trigonometristen funktioiden yhteen- ja vähennyslaskukaavat
* Trigonometrisia yhtälöitä.

6. kurssi Raja-arvot. Jatkuvuus. Derivaatta

Tavoite

Oppilas tuntee raja-arvon ja jatkuvuuden käsitteet ja osaa määrittää erilaisia raja-arvoja. Oppilas hallitsee jatkuvan funktion perusominaisuudet ja derivaatan käsitteen. Oppilas osaa derivoida polynomi- ja murtofunktioita ja tutustuu derivaatan käyttöön funktion pienimmän ja suurimman arvon määrityksessä.

Sisältö

Funktion raja-arvo
— Raja-arvo annetussa pisteessä
— Summan, erotuksen, tulon, osamäärän ja yhdistetyn funktion raja-arvot

Funktion jatkuvuus
— Jatkuvuus annetussa pisteessä
— Jatkuvuus annetulla välillä
— Suljetulla välillä jatkuvan funktion tärkeimmät ominaisuudet

Funktion derivaatta
— Derivaatta annetussa pisteessä
— Derivaattafunktio
— Derivaatan tulkinta

Derivoimissääntöjä
— Funktioiden $f+g$ ja kf derivaatat (k vakio)
— Funktion x^n ja polynomifunktion derivaatat
— Tulon ja osamäärän derivaatat

Funktion pienimmän ja suurimman arvon määrittäminen suljetulla välillä.

7. kurssi Differentiaalilaskentaa

Tavoite

Oppilas osaa derivoida funktioita. Oppilas osaa tutkia funktioita, määrittää niiden ääriarvoja sekä piirtää niiden kuvaajia differentiaalilaskentaa hyväksi käyttäen. Oppilas tutustuu differentiaalilaskennan soveltamiseen eri elämänaloilla.

Sisältö

Väliarvolause

Funktion monotonisuus

Ääriarvot
— Paikalliset ääriarvot
— Ääriarvon laatu

Yhdistetyn funktion derivaatta

Trigonometristen funktioiden derivaatat

Käänteisfunktion derivaatta

Funktioiden e^x ja ln x derivaatat

* Yleisen potenssifunktion derivaatta

Differentiaalilaskennan sovelluksia.

8. kurssi Todennäköisyyslaskentaa ja tilastotiedettä. Lukujonot ja sarjat

Tavoite

Oppilas tuntee todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet ja osaa käyttää niitä yksinkertaisissa sovelluksissa. Oppilas tuntee lukujonon ja sarjan keskeisimmät ominaisuudet.

Sisältö

Todennäköisyys
— Empiirisen todennäköisyyden käsite
— Klassisen todennäköisyyden käsite
— Yhteen- ja kertolaskusääntö. Komplementtitapauksen todennäköisyys
— Tuloperiaate, kombinaatiot
— Toistokoneet ja binomitodennäköisyys
** Todennäköisyyslaskennan aksiomit

Todennäköisyysjakauma
— Satunnaismuuttuja
— Diskreetti jakauma
— Jatkuva jakauma
— Normaalijakauma ja sen käyttö
  * Empiirinen jakauma
  * Otos, keskiarvon keskivirhe
  ** Esimerkkejä tilastollisesta päätöksenteosta

Lukujonot ja sarjat
— Lukujonon raja-arvo
  ** Sarjan suppeneminen
— Aritmeettinen ja geometrinen summa
  * Geometrinen sarja.

9. kurssi Integraalilaskentaa

Tavoite

Oppilas hallitsee integraalifunktion ja määrätyn integraalin käsitteet. Oppilas osaa integroida yksinkertaisesti integroitavissa olevia funktioita. Oppilas osaa soveltaa määrättyä integraalia mm. pinta-ala- ja tilavuuslaskuihin.

Sisältö

Jatkuvan funktion integraalifunktio

Integroimissääntöjä
— Alkeisfunktioiden derivaattoihin perustuva integroiminen
— Yhdistetyn funktion derivaattaan perustuva integroiminen
  ** Osittaisintegroiminen
  ** Integroiminen sijoituksen avulla

Määrätyn integraalin käsite
— Havainnollinen määritelmä ylä- ja alasummia hyväksikäyttäen

Määrätyn integraalin laskusäännöt
— Lineaarisuus
— Additiivuus osavälien suhteen
— Ylä- ja alarajan vaihto.

Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

Sovelluksia
— Pinta-ala ja tilavuuslaskuja
— Jatkuvan jakauman tunnusluvut ja kertymäfunktio.

10. kurssi Vektorilaskennan täydennys. Avaruusgeometriaa. Kompleksiluvut

Tavoite

Oppilas syventää vektorilaskennan tuntemustaan ja ulottaa sen myös kolmiulotteisen avaruuden vektoreihin sekä totuttautuu yksinkertaisiin avaruusgeometrisiin tarkasteluihin. Oppilas tutustuu kompleksilukuihin.

Sisältö

Kolmiulotteinen vektoriavaruus

** Vektoritulo ja skalaarikolmitulo.

Avaruusgeometriaa
— Kappaleiden piirtäminen ja ominaisuudet
— Tilavuuksien laskukaavat
— Avaruusgeometrisia ääriarvotehtäviä.

* Kompleksiluvut
— Määrittely ja laskutoimitukset
— Kompleksitaso
— Toisen asteen yhtälön yleinen ratkaisu.

11. kurssi Laajan oppimäärän kokoava ja syventävä kurssi

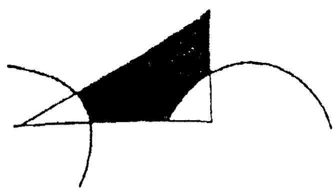
Oppilas kertaa lukion laajan oppimäärän pääkohdat ja tutustuu myös entistä laajempiin, eri aihepiirien alueilta tietoja vaativiin tehtäviin. Oppilas muodostaa aikaisempaa jäsentyneemmän ja syvällisemmän kuvan lukion kurssin asioista ja harjaantuu niiden soveltamiseen.

Kurssin yksityiskohtainen suunnittelu tehdään koulun tasolla kutakin opetusryhmää varten erikseen.

Liite 6

Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelmien perusteet. 1994.

3.3.4 MATEMATIIKKA



Matematiikan merkittävä asema aikamme kulttuurissa edellyttää valmiutta ymmärtää ja hyödyntää matemaattisesti esitettyä informaatiota. Tätä valmiutta tarvitaan niin työssä, opinnoissa kuin jokapäiväisessä elämässäkin.

Matematiikan opiskelu kehittää kykyä abstrahoida, tehdä olettamuksia ja perustella niitä loogisesti ja toisaalta kykyä soveltaa matemaattista tietoa ongelmien ratkaisuun. Matematiikan opetuksen päämääränä on saada opiskelijat ymmärtämään matemaattisen tiedon luonne, kehittämään matemaattista ajattelua ja perehtymään matematiikan peruskäsitteisiin ja -taitoihin.

Pitkän matematiikan opetuksen tehtävä on tarjota opiskelijoille mahdollisuudet hankkia sellaiset tiedot ja taidot, joita tarvitaan erityisesti matematiikan, luonnontieteiden ja tekniikan ammatillisissa- ja korkeakouluopinnoissa. Samalla pyritään siihen, että opiskelijat saavat kuvan matematiikasta kehittyvänä tieteenalana, näkemyksen matematiikan rakenteesta ja teoriamuodostuksesta sekä käsityksen matematiikan merkityksestä ja soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Lyhyen matematiikan opetuksen tehtävä on kehittää opiskelijoiden yleisiä kansalaisvalmiuksia matemaattisen tiedon hankkimisessa, käsittelyssä ja ymmärtämisessä sekä matematiikan käytössä elämän eri tilanteissa. Lisäksi tähdätään yleisten jatko-opintovalmiuksien hankkimiseen lähinnä humanistisia, yhteiskuntatieteellisiä ja kaupallisia aloja varten.

PITKÄ MATEMATIIKKA

Tavoitteet

Pitkän matematiikan opiskelun tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu arvostamaan ja ymmärtämään matematiikan asemaa yhteiskunnan kehityksessä ja päätöksenteossa sekä kansalaisen jokapäiväisessä elämässä,
- oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa sekä tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn; tässä tarkoituksessa häntä rohkaistaan kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin,
- oppii ymmärtämään ja käyttämään matematiikan kieltä, seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, keskustelemaan matematiikasta ja lukemaan matemaattista tekstiä sekä arvostamaan esittämisen täsmällisyyttä ja selkeyttä,
- kehittää monipuolisen harjoittelun avulla taidot käyttää laskenta- ja päättelytaitojaan, apuvälineitä ja tietolähteitä,

- osaa käyttää ja soveltaa matematiikkaa ongelmien ratkaisemiseen, harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita ja
- pystyy käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan täsmällisiä perusteluja sekä oppii arvioimaan esitettyjen perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä.

Pakolliset kurssit

Funktiot ja yhtälöt I

Opiskelijoita ohjataan tutkimaan todellisten ilmiöiden ominaispiirteitä kuvaavia matemaattisia malleja, siten että he tunnistavat ilmiöissä vaikuttavia riippuvuussuhteita ja mallin edellyttämiä olettamuksia ja yksinkertaistuksia. Harjaannutaan käyttämään matemaattisia menetelmiä ongelmien ratkaisuun sekä tulkitsemaan kriittisesti saatuja tuloksia. Tarkastellaan funktion kulkua graafisen havainnon pohjalta ja tutkitaan lähinnä polynomi- ja eksponenttifunktioita kuvaajien, yhtälöiden ja epäyhtälöiden sekä nykyaikaisten laskemisen ja grafiikan työkalujen avulla. Funktiokäsitettä täsmennetään monipuolisen tarkastelun avulla ja rakennetaan pohjaa matematiikassa keskeiselle funktio-opille.

Funktiot ja yhtälöt II

Kurssilla jatketaan polynomifunktioiden ja -yhtälöiden käsittelyä, selvitetään polynomien jaollisuutta ja polynomiyhtälöiden juurien ominaisuuksia. Harjoitellaan käyttämään, tulkitsemaan ja ratkaisemaan epäyhtälöitä. Kehitetään edelleen taitoa ratkaista ongelmia matemaattisten mallien avulla, tehdä johtopäätöksiä sekä perustella ja arvioida tulosten pätevyyttä. Funktioiden käsittelyä laajennetaan muihin algebrallisiin funktioihin ja logaritmifunktioon. Kurssilla käytetään ymmärtämistä helpottavia grafiikan ja laskemisen apuvälineitä, siten että oppiminen tapahtuu kiinteässä yhteydessä monipuolisiin sovelluksiin.

Geometria

Opiskelijoita ohjataan tekemään ympärillä olevasta maailmasta täsmällisiä havaintoja ja johtopäätöksiä sekä luokittelemaan ja perustelemaan kuvioihin liittyviä ominaisuuksia. Avaruudellista hahmottamiskykyä kehitetään tutkimalla kolmiulotteisia kappaleita. Niistä laaditaan erilaisia projektioita ja leikkauksia, joiden avulla ratkaistaan laskennollisia ja piirustuksellisia ongelmia. Mahdollisuuksien mukaan käytetään sopivia tietokoneohjelmia ja rakentelumalleja. Selvitetään geometristen kuvausten ominaisuuksia ja harjoitellaan todistamista esimerkiksi yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuusympäristössä.

Analyyttinen geometria

Perehdytään analyyttiseen geometriaan ja korostetaan sen merkitystä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välisten yhteyksien luomisessa.

Tutkitaan koordinaatiston pisteitä, suoria, ympyröitä ja paraabeleja, tutustutaan parametrin käyttöön sekä laajennetaan tarkastelua myös kolmiulotteisiin tapauksiin. Ratkaistaan kahden muuttujan yhtälöitä ja epäyhtälöitä sekä tutustutaan sovelluksena lineaariseen optimointiin.

Trigonometria ja vektorit

Perehdytään trigonometrisiin funktioihin ja niiden perusominaisuuksiin sekä käyttöön tavallisimmissa sovelluksissa. Tutustutaan vektori-käsitteeseen, selvitetään vektorien perusominaisuudet ja laskutoimitukset sekä harjaannutaan käyttämään kaksi- ja useampiulotteisia vektoreita erilaisissa yhteyksissä.

Differentiaalilaskenta I

Käsitellään raja-arvoon, jatkuvuuteen ja derivaattaan liittyviä käsitteitä ja tutkitaan niiden keskeisiä ominaisuuksia sekä perehdytään erilaisiin sovellusmahdollisuuksiin. Opiskelijat ohjataan sisäistämään derivaattakäsite, heidät totutetaan käyttämään derivaattaa monipuolisesti hyväksi polynomifunktioiden ja algebrallisten funktioiden tutkimisessa ja ongelmien ratkaisemisessa.

Differentiaalilaskenta II

Laajennetaan tarkasteltavien funktioiden joukkoa transsendenttisilla funktioilla sekä tutkitaan niiden ominaisuuksia, derivoituvuutta ja käyttöä. Sovelletaan matemaattista analyysiä opittujen funktioiden tutkimiseen sekä yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemiseen. Opiskellaan teorian soveltamista käytännön tilanteisiin.

Integraalilaskenta

Perehdytään integraalifunktion ja määrätyn integraalin käsitteisiin ja määrittämiseen. Opiskellaan alojen ja tilavuuksien laskeminen integrointia käyttäen. Tutustutaan myös muihin integraalilaskennan sovelluksiin ja menetelmiin laskea integraaleja numeerisesti käyttäen laskinta ja tietokoneita.

Tilastotiedettä ja todennäköisyyslaskentaa

Opiskelijat ohjataan tilastollisen aineiston käsittelyn eri vaiheisiin. Heitä ohjataan laatimaan ja tulkitsemaan tilastoja, arvioimaan kriittisesti niistä tehtyjä johtopäätöksiä sekä ymmärtämään sattuman tilastolliselle tiedolle antama epävarmuus. Tutustutaan klassisen ja tilastollisen todennäköisyyden käsitteisiin, näihin liittyviin laskusääntöihin ja todennäköisyyslaskennan sovelluksiin. Perehdytään empiiristen aineistojen pohjalta erilaisiin jakaumiin ja niiden ominaisuuksien kuvailutapoihin. Kurssilla käytetään monipuolisesti laskimia ja tietokoneita, käsitellään tiedotusvälineissä esille tulevaa ajankohtaista tilastollista informaatiota sekä tehdään projektitöitä.

Lukujonot ja sarjat

Opiskelijoita ohjataan tutkimaan ja käyttämään luonnollisten lukujen perusominaisuuksia mukaanlukien niiden induktio-ominaisuus. Tutkitaan lukujonoja ja sarjoja sekä sovelletaan niitä käytännön elämän tehtävien ratkaisuihin. Mahdollisuuksien ja kiinnostuksen mukaan kurssin sisältöä voidaan laajentaa esimerkiksi differenssiyhtälön käyttöön, verkkoteoriaan, algoritmeihin tai salakieliin.

LYHYT MATEMATIIKKA

Tavoitteet

Lyhyen matematiikan opiskelun tavoitteena on, että opiskelija

- osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän välttämättömänä apuvälineenä eteen tulevien tehtävien ja yhteiskunnassa esiintyvien ongelmien ratkaisemisessa,
- saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään ja oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa; tässä tarkoituksessa häntä rohkaistaan kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen,
- hankkii sellaisia käyttökelpoisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, joilla on mahdollisuus saavuttaa riittävän hyvä pohja jatko-opinnoille sekä
- sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla todellisuus voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä,
- kehittää valmiuksiaan jäsentää matemaattista tietoa ja ymmärtää sen loogista rakennetta,
- harjaantuu osana yleissivistystä vastaanottamaan, analysoimaan ja kriittisesti arvioimaan eri viestintälähteiden matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatiota.

Pakolliset kurssit

Tilastot ja todennäköisyys

Opiskellaan tilastojen tulkitsemista ja kriittistä analysointia, johon sisältyy myös johtopäätösten ja niiden oikeellisuuden arviointia. Kurssilla lisätään tiedon hallinnan taitoja. Opiskelijoita perehdytetään tilastollisen aineiston käsittelyn eri vaiheisiin tiedon omakohtaisesta keruusta sen havainnollistamiseen ja tulkitsemiseen. Tilastollisten muuttujien välisiä riippuvuuksia tutkitaan laskennallisin ja graafisin keinoin. Kurssin toisena pääteemana on todennäköisyyslaskenta, johon kuuluvat todennäköisyyslaskennan perusteet, laskulakeja sekä binomi- ja normaalijakauman käyttö sovelluksissa. Kurssille on tyypillistä laskinten ja tietokoneen monipuolinen käyttö sekä tiedotusvälineissä esille tulevan ajankohtaisen tilastollisen informaation käsittely.

Matemaattinen ongelmanratkaisu

Tutustutaan matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä sekä lukujen välisiin yhteyksiin ja lainalaisuuksiin. Harjaannutaan käyttämään matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja omien eteen tulevien ongelmien ratkaisemisessa, siten että opiskelija oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä. Totutaan ilmaisemaan suureiden välisiä riippuvuuksia lausekkeiden avulla, muotoilemaan ongelmia yhtälöiksi, ratkaisemaan näitä graafisesti ja algebrallisesti sekä perehdytään ratkaisujen tulkitsemiseen ja arvioimiseen.

Geometria

Opitaan hahmottamaan kaksi- ja kolmiulotteista tilaa sekä piirtämään tasokuvioita ja kolmiulotteisten kappaleiden kuvia. Näiden ominaisuuksiin perehdytään sekä laskennallisin menetelmin että tietokoneella havainnollistaen. Kurssilla opitaan liittämään visuaalinen näkemys osaksi opiskelijan matematiikan opiskelua. Käsitellään geometrisia kuvauksia. Harjoitellaan käytännön ongelmien ratkaisemista yhdenmuotoisuutta, trigonometriaa ja Pythagoraan lausetta hyväksi käyttäen. Tutustutaan koordinaatiston hyväksikäyttöön geometrisissa yhteyksissä.

Matemaattisia malleja

Kurssilla opitaan näkemään matemaattisten mallien merkitys ja tarve todellisissa tilanteissa sekä tutustutaan eri mahdollisuuksiin reaalimaailman ilmiöiden mallintamisessa. Käsitellään muuttujien välisiä riippuvuuksia ja tutustutaan tavanomaisimpiin funktioihin. Harjaannutaan soveltamaan lineaarista ja eksponentiaalista mallia sekä käyttämään näiden yhteydessä myös polynomi- ja potenssiyhtälöitä ja logaritmia. Totutaan myös arvioimaan mallien edellytyksiä, rajoituksia ja käyttöä.

Matemaattinen analyysi

Tutustutaan derivaatan käsitteeseen muutosnopeuden mittana käyttäen graafisia ja numeerisia lähestymistapoja. Perehdytään derivaatan käyttöön muutoksia tutkittaessa ja opitaan suurimman ja pienimmän arvon määrittämistä käyttäen sekä derivaattaa että muitakin menetelmiä käytännön tilanteisiin sovellettuina. Tutustutaan graafisiin ja numeerisin likimääräismenetelmiin.

Matemaattisia tutkimusmenetelmiä

Kurssilla kootaan yhteen ja täydennetään erilaisia matemaattisia tutkimusmenetelmiä sekä sovelletaan niitä eri laatuisiin tehtäviin. Opitaan tutkimaan lukujonoja ja summia sovellustilanteissa. Harjaannutaan käyttämään erilaisia funktioita matemaattisina malleina ja tutkimaan niitä yhtälöillä, graafisilla ja numeerisilla menetelmillä sekä derivaattaa käyttäen. Pyritään mahdollisuuksien mukaan laajempien sovelluskokonaisuuksien muodostamiseen. Kurssilla korostuu matematiikan asema ja merkitys muiden oppiaineiden, tieteenalojen ja yhteiskunnan apuvälineenä. Sovelluksia valitaan jokapäiväisen elämän eri tilanteista kaupan ja talouden, ympäristön ja luonnontieteiden sekä yksilön ja yhteiskunnan aihepiireistä.

Syventävät opinnot

Lukion matematiikan opintoja voidaan syventää joko **opiskelemalla laajemmin jotakin jo tuttua aluetta tai tutustumalla johonkin kokonaan uuteen matematiikan kohteeseen.**

Pitkässä matematiikassa kursseja voidaan suunnitella seuraavista aihepiireistä:

- **analyysi**, jossa laajennetaan tutkittavien funktioiden joukkoa, täydennetään integroimismenetelmiä, tutustutaan kahden muuttujan funktioihin, osittaisderivaattoihin sekä differentiaaliyhtälöihin ja tutkitaan käyräparvia;
- **numeeriset menetelmät**, joka toteutetaan laskinten ja tietokoneiden avulla ja jossa tutustutaan ratkaisualgoritmeihin ja likimääräismenetelmiin yhtälöiden ja yhtälöryhmien ratkaisussa sekä differentiaali- ja integraalilaskennassa;
- **lukuteoria ja logiikka**, jossa muun muassa tutustutaan Boolen algebraan, logiikan perusteisiin ja lukualueiden algebrallisiin struktuureihin.

Muita mahdollisia aihepiirejä ovat todennäköisyyslaskenta ja tilastollinen päättely sekä talousmatematiikka.

Lyhyessä matematiikassa kursseja voidaan suunnitella seuraavista aihepiireistä:

- **talousmatematiikassa** perehdytään indeksi-, kustannus-, rahaliikenne-, laina-, verotus- ja muihin sellaisiin laskelmiin sekä yksilön että yhteiskunnan kannalta. Lukujonojen ja sarjojen pohjalta kehitetään taloudellisiin tilanteisiin soveltuvia matemaattisia malleja. Tilastollisia menetelmiä sovelletaan erityisesti omakohtaisten aineistojen tai projektitehtävien käsittelyyn sekä muodostetaan kuvaa riskien ja kannattavuuden matemaattisesta hallinnasta. Tutustutaan lineaarisen optimoinnin periaatteisiin. Kurssi tarjoaa mahdollisuuksia yrittäjyyden ja taloustiedon opiskelussa.
- **todennäköisyyslaskennasta ja tilastotieteestä** suunnitellaan oma opintokokonaisuus lyhyen matematiikan opiskelijoille tai osallistutaan vastaavalle pitkän matematiikan kurssille.

Muita mahdollisia aihepiirejä ovat vektorit ja analyyttinen geometria sekä analyysin jatkokurssi.

Opiskelun luonne ja opetuksen lähtökohtia

Matematiikka ei lukiossakaan ole vain joukko tietoja eikä opiskelu vain valmiin matematiikan opettelua, vaan itse tekeminen ja uuden keksiminen, mahdollisimman usein, kuuluvat olennaisesti matematiikan oppimisprosessiin. Matematiikan oppimisessa on siten keskeistä uuden tiedon kytkeminen entiseen sekä yhteyksien rakentaminen matematiikan osien välille ja muihin oppiaineisiin.

Matematiikan opetuksessa korostetaan toisaalta matematiikan deduktiivista rakennetta, matematiikan käsitteiden hallintaa ja matematiikassa kehitettyjen menetelmien osaamista ja toisaalta reaalimaailman ilmiöiden matemaattista mallintamista ja ongelmanratkaisutaitoja. Tähän kuuluu myös numeeristen ja graafisten menetelmien hallinta, tietolähteiden käyttötaito, sekä taito analysoida muun muassa tilastollisia aineistoja, tehdä johtopäätöksiä ja arvioida esitettyjä tuloksia. Tekniset laitteet, tietokoneet ja laskimet antavat mahdollisuuden tutkivaan otteeseen ja omaehtoiseen opiskeluun.

Pitkän matematiikan opetuksessa painotetaan monipuolisen laskutaidon rinnalla päättelyä ja todistamista, matemaattista mallintamista, matemaattisen kielen käyttöä sekä määrätietoisen työskentelytavan oppimista.

Lyhyen matematiikan opetuksessa pyritään saamaan aikaan myönteinen ja opiskelijoita aktivoiva oppimisympäristö. Opetuksessa tuetaan kokeilevaa, tutkivaa ja keksivää oppimista, vaihdellaan työtapoja sekä käytetään opiskelussa monipuolisesti hyväksi laskimia, tietokoneita tai muita työskentelyä jouduttavia välineitä. Oppimisympäristöt tulee pyrkiä rakentamaan konkreettisten ongelmanratkaisutilanteiden tai todellisten sovelluskohteiden ympärille unohtamatta näistä abstrahoituja yleisiä matemaattisia lainalaisuuksia. Tämä motivoi opiskeluun ja lisää käsitteiden hyvää ymmärtämistä.

Liite 7
Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet. 2003.

5.6 MATEMATIIKKA

Matematiikan asema aikamme kulttuurissa edellyttää valmiutta ymmärtää, hyödyntää ja tuottaa matemaattisesti esitettyä tietoa. Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja.

Matematiikan opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. Erityisesti opiskelijaa ohjataan hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin.

Opiskelijaa myös kannustetaan kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin. Opetuksessa tutkitaan matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä sekä tietoisesti käytetään eteen tulevia mahdollisuuksia opiskelijan persoonallisuuden kehittämiseen, mikä tarkoittaa muun muassa hänen kiinnostuksensa ohjaamista, kokeiluihin kannustamista sekä tiedonhankintaprosessien kehittämistä.

Kurssikuvausten väljyyttä voidaan käyttää resurssien salliessa keskeisten sisältöjen syventämiseen ja eheyttävien kokonaisuuksien muodostamiseen.

Arviointi

Matematiikan opetuksessa arvioinnin tulee kehittää opiskelijan kykyä esittää ratkaisuja, tukea opiskelijaa matemaattisten käsitteiden muodostamisprosessissa ja arvioida kirjallista esitystä sekä opettaa opiskelijalle oman työnsä arvioimista. Osaamisen arvioinnissa kiinnitetään huomio laskutaitoon, menetelmien valintaan ja päätelmien täsmälliseen ja johdonmukaiseen perustelemiseen.

Oppimäärän vaihtaminen

Matematiikan oppimäärää vaihdettaessa pitkästä lyhyeen suositellaan hyväksi lukemisessa seuraavia vastaavuuksia: MAA1 → MAB1, MAA3 → MAB2, MAA6 → MAB5, MAA7 → MAB4 ja MAA8 → MAB3. Opetussuunnitelmassa voidaan määrätä myös lisänäyttöjä etenkin kurssin arvosanaa uudelleen arvioitaessa.

Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija
- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa

- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä.
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

PAKOLLISET KURSSIT

1. Funktiot ja yhtälöt (MAA1)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- vahvistaa yhtälön ratkaisemisen ja prosenttilaskennan taitojaan
- syventää verrannollisuuden, neliöjuuren ja potenssin käsitteiden ymmärtämistään
- tottuu käyttämään neliöjuuren ja potenssin laskusääntöjä
- syventää funktiokäsitteen ymmärtämistään tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita
- oppii ratkaisemaan potenssiyhtälöitä.

KESKEISET SISÄLLÖT
- potenssifunktio
- potenssiyhtälön ratkaiseminen
- juuret ja murtopotenssi
- eksponenttifunktio

2. Polynomifunktiot (MAA2)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita
- oppii ratkaisemaan toisen asteen polynomiyhtälöitä ja tutkimaan ratkaisujen lukumäärää
- oppii ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua
- oppii ratkaisemaan yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä.

KESKEISET SISÄLLÖT

- polynomien tulo ja binomikaavat
- polynomifunktio
- toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöitä
- toisen asteen yhtälön juurten lukumäärän tutkiminen
- toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin
- polynomiepäyhtälön ratkaiseminen

3. Geometria (MAA3)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa
- harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita
- ratkaisee geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa.

KESKEISET SISÄLLÖT

- kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus
- sini- ja kosinilause
- ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria
- kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

4. Analyyttinen geometria (MAA4)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää kuinka analyyttinen geometria luo yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille
- ymmärtää pistejoukon yhtälön käsitteen ja oppii tutkimaan yhtälöiden avulla pisteitä, suoria, ympyröitä ja paraabeleja
- syventää itseisarvokäsitteen ymmärtämystään ja oppii ratkaisemaan sellaisia itseisarvoyhtälöitä ja vastaavia epäyhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $|f(x)| = a$ tai $|f(x)| = |g(x)|$
- vahvistaa yhtälöryhmän ratkaisemisen taitojaan.

KESKEISET SISÄLLÖT

- pistejoukon yhtälö
- suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöt
- itseisarvoyhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen
- yhtälöryhmän ratkaiseminen
- pisteen etäisyys suorasta

5. Vektorit (MAA5)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää vektorikäsitteen ja perehtyy vektorilaskennan perusteisiin
- oppii tutkimaan kuvioiden ominaisuuksia vektoreiden avulla
- tutkii kaksi- ja kolmiulotteisen koordinaatiston pisteitä, etäisyyksiä ja kulmia vektoreiden avulla.

KESKEISET SISÄLLÖT

- vektoreiden perusominaisuudet
- vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku ja vektorin kertominen luvulla
- koordinaatiston vektoreiden skalaaritulo
- suorat ja tasot avaruudessa

6. Todennäköisyys ja tilastot (MAA6)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii havainnollistamaan diskreettejä ja jatkuvia tilastollisia jakaumia sekä määrittämään ja tulkitsemaan jakaumien tunnuslukuja
- perehtyy kombinatorisiin menetelmiin
- perehtyy todennäköisyyden käsitteeseen ja todennäköisyyksien laskusääntöihin
- ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteen ja oppii määrittämään jakauman odotusarvon ja soveltamaan sitä
- perehtyy jatkuvan todennäköisyysjakauman käsitteeseen ja oppii soveltamaan normaalijakaumaa.

KESKEISET SISÄLLÖT

- diskreetti ja jatkuva tilastollinen jakauma
- jakauman tunnusluvut
- klassinen ja tilastollinen todennäköisyys
- kombinatoriikka
- todennäköisyyksien laskusäännöt
- diskreetti ja jatkuva todennäköisyysjakauma
- diskreetin jakauman odotusarvo
- normaalijakauma

7. Derivaatta (MAA7)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa määrittää rationaalifunktion nollakohdat ja ratkaista yksinkertaisia rationaaliepäyhtälöitä

- omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta
- määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat
- osaa tutkia derivaatan avulla polynomifunktion kulkua ja määrittää sen ääriarvot
- osaa määrittää rationaalifunktion suurimman ja pienimmän arvon sovellusongelmien yhteydessä.

KESKEISET SISÄLLÖT

- rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö
- funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
- polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen
- polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen

8. Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- tuntee juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuudet ja osaa ratkaista niihin liittyviä yhtälöitä
- tutkii juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioita derivaatan avulla
- oppii yhdistetyn funktion derivoimisen
- tutkii aidosti monotonisten funktioiden käänteisfunktioita.

KESKEISET SISÄLLÖT

- juurifunktiot ja -yhtälöt
- eksponenttifunktiot ja -yhtälöt
- logaritmifunktiot ja -yhtälöt
- yhdistetyn funktion derivaatta
- käänteisfunktio
- juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat

9. Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii tutkimaan trigonometrisia funktioita yksikköympyrän symmetrioiden avulla
- oppii ratkaisemaan sellaisia trigonometrisia yhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $\sin f(x) = a$ tai $\sin f(x) = \sin g(x)$
- osaa trigonometristen funktioiden yhteydet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\tan x = \sin x / \cos x$
- tutkii trigonometrisia funktioita derivaatan avulla
- ymmärtää lukujonon käsitteen
- oppii määrittelemään lukujonoja palautuskaavojen avulla
- osaa ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja niistä muodostettujen summien avulla.

KESKEISET SISÄLLÖT

- suunnattu kulma ja radiaani
- trigonometriset funktiot symmetria- ja jaksollisuusominaisuuksineen
- trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen
- trigonometristen funktioiden derivaatat
- lukujono
- rekursiivinen lukujono
- aritmeettinen jono ja summa
- geometrinen jono ja summa

10. Integraalilaskenta (MAA10)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää integraalifunktion käsitteen ja oppii määrittämään alkeisfunktioiden integraalifunktioita
- ymmärtää määrätyn integraalin käsitteen ja sen yhteyden pinta-alaan
- oppii määrittämään pinta-aloja ja tilavuuksia määrätyn integraalin avulla
- perehtyy integraalilaskennan sovelluksiin.

KESKEISET SISÄLLÖT

- integraalifunktio
- alkeisfunktioiden integraalifunktiot
- määrätty integraali
- pinta-alan ja tilavuuden laskeminen

SYVENTÄVÄT KURSSIT

11. Lukuteoria ja logiikka (MAA11)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii formalisoimaan väitelauseita ja tutkimaan niiden totuusarvoja totuustaulujen avulla
- ymmärtää avoimen lauseen käsitteen ja oppii käyttämään kvanttoreita
- oppii todistusperiaatteita ja harjoittelee todistamista
- oppii lukuteorian peruskäsitteet ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin
- osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kokonaislukujen kongruenssin avulla
- osaa määrittää kokonaislukujen suurimman yhteisen tekijän Eukleideen algoritmilla.

KESKEISET SISÄLLÖT

- lauseen formalisoiminen
- lauseen totuusarvot
- avoin lause

- kvanttorit
- suora, käänteinen ja ristiriitatodistus
- kokonaislukujen jaollisuus ja jakoyhtälö
- Eukleideen algoritmi
- alkuluvut
- aritmetiikan peruslause
- kokonaislukujen kongruenssi

12. Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (MAA12)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- oppii ymmärtämään absoluuttisen ja suhteellisen virheen käsitteet ja niiden avulla likiarvolaskujen tarkkuutta koskevat säännöt peruslaskutoimitusten tapauksessa
- ymmärtää iteroinnin käsitteen ja oppii ratkaisemaan yhtälöitä numeerisesti
- oppii tutkimaan polynomien jaollisuutta ja määrittämään polynomin tekijät
- oppii algoritmista ajattelua
- harjaantuu käyttämään nykyaikaisia matemaattisia välineitä
- oppii määrittämään numeerisesti muutosnopeutta ja pinta-alaa.

KESKEISET SISÄLLÖT
- absoluuttinen ja suhteellinen virhe
- Newtonin menetelmä ja iterointi
- polynomien jakoalgoritmi
- polynomien jakoyhtälö
- muutosnopeus ja pinta-ala

13. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- syventää differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemustaan
- täydentää integraalilaskennan taitojaan ja soveltaa niitä muun muassa jatkuvien todennäköisyysjakaumien tutkimiseen
- tutkii lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia.

KESKEISET SISÄLLÖT
- funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen
- jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia
- funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä
- epäoleelliset integraalit

Matematiikan lyhyt oppimäärä

Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tehtävänä on tarjota valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija
- osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä
- saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään ja oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa, rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen
- hankkii sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille
- sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä
- saa käsityksen matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta
- harjaantuu vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatioita ja arvioimaan sen luotettavuutta
- tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä
- oppii käyttämään kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna.

PAKOLLISET KURSSIT

1. Lausekkeet ja yhtälöt (MAB1)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- harjaantuu käyttämään matematiikkaa jokapäiväisen elämän ongelmien ratkaisemisessa ja oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä
- ymmärtää lineaarisen riippuvuuden, verrannollisuuden ja toisen asteen polynomifunktion käsitteet
- vahvistaa yhtälöiden ratkaisemisen taitojaan ja oppii ratkaisemaan toisen asteen yhtälöitä.

KESKEISET SISÄLLÖT
- suureiden välinen lineaarinen riippuvuus ja verrannollisuus
- ongelmien muotoileminen yhtälöiksi
- yhtälöiden graafinen ja algebrallinen ratkaiseminen
- ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen
- toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen

2. Geometria (MAB2)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- harjaantuu tekemään havaintoja ja päätelmiä kuvioiden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista
- vahvistaa tasokuvioiden ja kolmiulotteisten kappaleiden kuvien piirtämisen taitojaan
- osaa ratkaista käytännön ongelmia geometriaa hyväksi käyttäen.

KESKEISET SISÄLLÖT
- kuvioiden yhdenmuotoisuus
- suorakulmaisen kolmion trigonometria
- Pythagoraan lause
- kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen
- geometrian menetelmien käyttö koordinaatistossa

3. Matemaattisia malleja I (MAB3)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- näkee reaalimaailman ilmiöissä säännönmukaisuuksia ja riippuvuuksia ja kuvaa niitä matemaattisilla malleilla
- tottuu arvioimaan mallien hyvyyttä ja käyttökelpoisuutta.

KESKEISET SISÄLLÖT
- lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin soveltaminen
- potenssiyhtälön ratkaiseminen
- eksponenttiyhtälön ratkaiseminen logaritmin avulla

4. Matemaattinen analyysi (MAB4)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- tutkii funktion muutosnopeutta graafisin ja numeerisin menetelmin
- ymmärtää derivaatan käsitteen muutosnopeuden mittana
- osaa tutkia polynomifunktion kulkua derivaatan avulla
- oppii sovellusten yhteydessä määrittämään polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon.

KESKEISET SISÄLLÖT
- polynomifunktion derivaatta
- polynomifunktion merkin ja kulun tutkiminen
- polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen
- graafisia ja numeerisia menetelmiä

5. Tilastot ja todennäköisyys (MAB5)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- harjaantuu käsittelemään ja tulkitsemaan tilastollisia aineistoja
- tutustuu laskinten ja tietokoneiden käyttöön tilastotehtävissä
- perehtyy todennäköisyyslaskennan perusteisiin.

KESKEISET SISÄLLÖT
- jatkuvien ja diskreettien tilastollisten jakaumien tunnuslukujen määrittäminen
- normaalijakauma ja jakauman normittaminen
- kombinatoriikkaa
- todennäköisyyden käsite
- todennäköisyyden laskulakien ja niitä havainnollistavien mallien käyttöä

6. Matemaattisia malleja II (MAB6)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- varmentaa ja täydentää yhtälöiden ratkaisutaitojaan
- osaa ratkaista käytännön tilanteisiin liittyviä lineaarisia optimointitehtäviä
- ymmärtää lukujonon käsitteen
- ratkaisee käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja summan avulla.

KESKEISET SISÄLLÖT
- kahden muuttujan lineaariset yhtälöt
- lineaarisen yhtälöparin ratkaiseminen
- kahden muuttujan epäyhtälön graafinen ratkaiseminen
- lineaarinen optimointi
- lukujono
- aritmeettinen ja geometrinen jono ja summa

SYVENTÄVÄT KURSSIT

7. Talousmatematiikka (MAB7)

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- oppii ymmärtämään talouselämässä käytettyjä käsitteitä
- saa matemaattisia valmiuksia oman taloutensa suunnitteluun
- saa laskennallisen pohjan yrittäjyyden ja taloustiedon opiskeluun
- soveltaa tilastollisia menetelmiä aineistojen käsittelyyn.