TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Soile Linja

Ketjumurtoluvuista

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Toukokuu 2007

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

LINJA, SOILE: Ketjumurtoluvuista

Pro gradu –tutkielma, 54 s.

Matematiikka

Toukokuu 2007

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan ketjumurtolukuja, niiden ominaisuuksia sekä yhtä ketjumurtolukujen sovellusta, Pellin yhtälöä.

Ensimmäisessä luvussa tutkitaan äärellisiä ketjumurtolukuja. Ensin esitetään näitä ketjumurtolukuja koskevia keskeisiä määritelmiä. Lopuksi todistetaan, että jokainen yksinkertainen äärellinen ketjumurtoluku esittää rationaalilukua ja että jokainen rationaaliluku taas vastaa yksinkertaista äärellistä ketjumurtolukua.

Toisessa luvussa määritellään ketjumurtolukujen konvergentit. Lisäksi todistetaan lause, joka antaa menetelmän konvergenttien muodostamiseksi. Toisen luvun lopussa tarkastellaan lauseita, joissa esitetään konvergenttien tärkeimpiä ominaisuuksia.

Kolmannessa luvussa käsitellään äärettömien ketjumurtolukujen sekä irrationaalilukujen vastaavuutta. Tässä luvussa osoitetaan, että jokainen yksinkertainen ääretön ketjumurtoluku vastaa irrationaalilukua ja että vastaavasti jokainen irrationaaliluku voidaan esittää yksikäsitteisesti yksinkertaisena äärettömänä ketjumurtolukuna. Kolmannen luvun lopuksi perehdytään irrationaalilukujen approksimointiin.

Neljännen luvun alussa määritellään kvadraattiset irrationaaliluvut ja tarkastellaan niiden ominaisuuksia. Luvun toisessa pykälässä osoitetaan kvadraattististen irrationaalilukujen ja jaksollisten ketjumurtolukujen välinen yhteys. Lisäksi neljännessä luvussa osoitetaan redusoitujen kvadraattisten irrationaalilukujen ja täysin jaksollisten ketjumurtolukujen vastaavuus.

Tutkielman viimeisessä luvussa perehdytään Pellin yhtälöön. Aluksi tarkastellaan, mikä asema ketjumurtolukujen konvergenteilla on Pellin yhtälöä ratkaistaessa. Lopuksi määritellään Pellin yhtälön perusratkaisu ja tutkitaan yhtälön kaikkien positiivisten ratkaisujen muodostamista.

Tutkielman päälähteinä on käytetty Kenneth H. Rosenin teosta Elementary Number Theory and Its Applications, Calvin T. Longin teosta Elementary Introduction to Number Theory sekä David M. Burtonin teosta Elementary Number Theory.

Sisältö

Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee ketjumurtolukuja ja niiden ominaisuuksia. Tutkielmassa keskitytään pääosin yksinkertaisiksi kutsuttuihin ketjumurtolukuihin.

Ensimmäisessä luvussa tutkitaan äärellisiä ketjumurtolukuja. Ensin esitetään näihin ketjumurtolukuihin liittyviä keskeisiä määritelmiä. Lopuksi todistetaan, että jokainen yksinkertainen äärellinen ketjumurtoluku esittää rationaalilukua ja että jokainen rationaaliluku taas vastaa yksinkertaista äärellistä ketjumurtolukua.

Toisessa luvussa tutkitaan ketjumurtolukujen konvergentteja. Ensin esitetään konvergenttien määritelmä sekä lause, joka antaa menetelmän konvergenttien muodostamiseksi. Toisen luvun lopussa tarkastellaan lauseita, joissa esitetään konvergenttien tärkeimpiä ominaisuuksia.

Kolmas luku käsittelee äärettömiä ketjumurtolukuja. Luvussa selvitetään erityisesti näiden ketjumurtolukujen sekä irrationaalilukujen vastaavuutta. Tässä luvussa osoitetaan, että jokainen yksinkertainen ääretön ketjumurtoluku kuvaa irrationaalilukua ja että vastaavasti jokainen irrationaaliluku voidaan esittää yksikäsitteisesti yksinkertaisena äärettömänä ketjumurtolukuna. Kolmannen luvun lopuksi perehdytään irrationaalilukujen approksimointiin. Ketjumurtoluvun konvergenteilla on merkittävä asema tässä approksimoinnissa.

Neljännen luvun alussa määritellään kvadraattiset irrationaaliluvut ja tarkastellaan niiden ominaisuuksia. Luvun toisessa pykälässä osoitetaan kvadraattisten irrationaalilukujen ja jaksollisten ketjumurtolukujen välinen yhteys. Kolmannessa pykälässä osoitetaan redusoitujen kvadraattisten irrationaalilukujen ja täysin jaksollisten ketjumurtolukujen vastaavuus. Lopuksi tarkastellaan luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesitystä. Tällöin oletetaan, että luku d on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole täydellinen neliö.

Tutkielman viimeisessä luvussa perehdytään Pellin yhtälöön. Pellin yhtälö, $x^2 - dy^2 = 1$, on yksi ketjumurtolukujen keskeisimmistä sovelluksista. Viidennen luvun alussa tutkitaan luvun $\sqrt{d}$ jaksollisen ketjumurtolukuesityksen konvergenttien ja Pellin yhtälön ratkaisujen välistä yhteyttä. Lopuksi tarkastellaan vielä Pellin yhtälön kaikkien ratkaisujen muodostamista. Tällöin hyödynnetään paitsi luvun $\sqrt{d}$ jaksollisen ketjumurtolukuesityksen konvergentteja myös esityksen jakson pituutta.

Lukijalta odotetaan lukuteorian peruskäsitteiden ja –tulosten tuntemista. Lisäksi oletetaan analyysin perusasioiden hallintaa. Tutkielman päälähteinä on käytetty Kenneth H. Rosenin teosta Elementary Number Theory and Its Applications, Calvin T. Longin teosta Elementary Introduction to Number Theory sekä David M. Burtonin teosta Elementary Number Theory.

1 Äärelliset ketjumurtoluvut

1.1 Äärellisiin ketjumurtolukuihin liittyviä käsitteitä

Tässä pykälässä esitetään määritelmiä, jotka koskevat äärellisiä ketjumurtolukuja. Lisäksi esitetään merkintä, jolla näitä äärellisiä ketjumurtolukuja voidaan kuvata lyhyemmin.

Määritelmä 1.1 *Äärellisellä ketjumurtoluvulla* tarkoitetaan lauseketta

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}, \tag{1}$$

missä a_0 on reaaliluku ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat positiivisia reaalilukuja.

Määritelmä 1.2 Lausekkeen (1) reaalilukuja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sanotaan ketjumurtoluvun *osanimittäjiksi*.

Määritelmä 1.3 Äärellistä ketjumurtolukua (1) sanotaan *yksinkertaiseksi*, jos a_0 on kokonaisluku ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat positiivisia kokonaislukuja.

Äärelliselle ketjumurtoluvulle (1) otetaan nyt käyttöön lyhyempi merkintätapa $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

1.2 Äärelliset ketjumurtoluvut ja rationaaliluvut

Seuraavaksi selvitetään äärellisten ketjumurtolukujen ja rationaalilukujen välistä yhteyttä. Voidaan nimittäin osoittaa, että yksinkertaiset äärelliset ketjumurtoluvut kuvaavat rationaalilukuja ja että rationaaliluvut taas voidaan kirjoittaa yksinkertaisina äärellisinä ketjumurtolukuina.

Lause 1.1. *Jokainen yksinkertainen äärellinen ketjumurtoluku esittää rationaalilukua.*

Todistus (vrt. [5, s. 469]). Todistetaan lause induktiolla. Kun $n=1$, yksinkertainen äärellinen ketjumurtoluku on muotoa

$$[a_0;a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}.$$

Koska lauseke $(a_0a_1+1)/a_1$ vastaa rationaalilukua, on väite tosi tässä tapauksessa. Oletetaan sitten, että kun k on positiivinen kokonaisluku, niin yksinkertainen ketjumurtoluku $[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_k]$ esittää rationaalilukua aina, kun a_0 on kokonaisluku ja $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Olkoon nyt a_0 kokonaisluku ja olkoot $a_1,a_2,\ldots,a_{k+1}$ positiivisia kokonaislukuja. Merkitään, että

$$[a_0;a_1,\ldots,a_{k+1}]=a_0+\frac{1}{[a_1;a_2,\ldots,a_k,a_{k+1}]}.$$

Induktio-oletuksen perusteella ketjumurtoluku $[a_1;a_2,\ldots,a_k,a_{k+1}]$ esittää rationaalilukua. Näin ollen on olemassa sellaiset kokonaisluvut r ja $s\ (\neq 0)$, että $[a_1;a_2,\ldots,a_k,a_{k+1}]=r/s$. Silloin siis

$$[a_0;a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}]=a_0+\frac{1}{r/s}=\frac{a_0r+s}{r}.$$

Selvästi nähdään, että lauseke $(a_0r+s)/r$ vastaa rationaalilukua, joten väite on tosi arvolla $k+1$. Induktioperiaatteen mukaan väite on siis tosi. □

Huomautus 1.1 Ks. [5, s. 469]. Lähdeteoksessa lauseen 12.7 todistuksessa (vrt. tutkielman lauseen 1.1 todistus) yhtälön

$$[a_0;a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_0}$$

tilalla pitäisi olla yhtälö

$$[a_0;a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}.$$

Lause 1.2 *Jokainen rationaaliluku voidaan esittää yksinkertaisena äärellisenä ketjumurtolukuna.*

Todistus (vrt. [1, s. 283-284]). Olkoon a/b rationaaliluku ja olkoon $b>0$. Tällöin Eukleideen algoritmin perusteella voidaan kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
a &= ba_0 + r_1, & 0 &< r_1 < b, \\
b &= r_1 a_1 + r_2, & 0 &< r_2 < r_1, \\
r_1 &= r_2 a_2 + r_3, & 0 &< r_3 < r_2, \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} a_{n-1} + r_n, & 0 &< r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} &= r_n a_n + 0.
\end{aligned}
$$

Näissä yhtälöissä luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat positiivisia kokonaislukuja, koska jokainen jakojäännös r_k on positiivinen kokonaisluku. Esittämällä yhtälöt murtolukumuodossa saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a_0 + \frac{r_1}{b} = a_0 + \frac{1}{b/r_1}, \\
\frac{b}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1} = a_1 + \frac{1}{r_1/r_2}, \\
\frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{r_3}{r_2} = a_2 + \frac{1}{r_2/r_3}, \\
&\vdots \\
\frac{r_{n-1}}{r_n} &= a_n.
\end{aligned}
$$

Kun toisessa yhtälössä esitetty lausekkeen b/r_1 arvo sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, voidaan merkitä

$$
\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{b/r_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{r_1/r_2}}. \tag{2}
$$

Sijoittamalla kolmannessa yhtälössä esitetty lausekkeen r_1/r_2 arvo yhtälöön (2) saadaan

$$
\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{r_2/r_3}}}.
$$

Jatkamalla tällä tavalla huomataan, että

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}.$$

Näin ollen $a/b = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, joten jokainen rationaaliluku voidaan esittää yksinkertaisena äärellisenä ketjumurtolukuna. □

Huomautus 1.2 Rationaaliluvun esitys yksinkertaisena äärellisenä ketjumurtolukuna ei ole yksikäsitteinen, sillä ketjumurtoluvun viimeistä termiä voidaan muuttaa. Jos $a_n > 1$, voidaan viimeinen termi kirjoittaa muodossa

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{1}.$$

Tätä yhtälöä käyttämällä voidaan edelleen merkitä, että

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1].$$

Jos $a_n = 1$, niin silloin

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1.$$

Näin ollen

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1].$$

Jokaisella rationaaliluvulla on kaksi ketjumurtolukuesitystä siten, että toisessa on parillinen määrä ja toisessa pariton määrä termejä. (Vrt. [1, s. 285].)

Tarkastellaan lausetta 1.2 havainnollistavaa esimerkkiä.

Esimerkki 1.1 Muodostetaan rationaaliluvun $9/23$ ketjumurtolukuesitys. Eukleideen algoritmin avulla saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} 23 &= 9 \cdot 2 + 5, \\ 9 &= 5 \cdot 1 + 4, \\ 5 &= 4 \cdot 1 + 1, \\ 4 &= 1 \cdot 4 + 0. \end{aligned}$$

Muokkaamalla yhtälöitä lauseen 1.2 todistuksessa esitetyllä tavalla ja sijoittamalla näin saadut yhtälöt havaitaan, että

$$\begin{aligned}\frac{9}{23} &= \frac{1}{23/9} = \frac{1}{2+5/9} \\ &= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9/5}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+4/5}} \\ &= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5/4}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}.\end{aligned}$$

Näin ollen $9/23 = [0;\ 2,\ 1,\ 1,\ 4]$. Huomautuksen 1.2 perusteella tiedetään, että

$$\frac{9}{23} = [0;\ 2,\ 1,\ 1,\ 4] = [0;\ 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1].$$

2 Konvergentit

2.1 Konvergenttien muodostaminen

Ketjumurtolukuesitys voidaan katkaista halutun termin jälkeen. Tämä katkaiseminen antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 2.1 Ketjumurtolukua $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$, missä $0 \le k \le n$, kutsutaan ketjumurtoluvun $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *k. konvergentiksi*. Tätä konvergenttia merkitään symbolilla C_k.

Seuraavassa lauseessa esitetään menetelmä, jolla ketjumurtolukujen konvergentteja voidaan muodostaa.

Lause 2.1 *Olkoon* a_0 *reaaliluku ja olkoot* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *positiivisia reaalilukuja. Määritellään jonot* $p_0, p_1, \ldots, p_n$ *ja* $q_0, q_1, \ldots, q_n$ *rekursiivisesti yhtälöillä*

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1, \\ p_1 &= a_0 a_1 + 1, & q_1 &= a_1 \end{aligned} \tag{3}$$

ja

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

kun $2 \le k \le n$*. Silloin k. konvergentti* C_k *toteuttaa yhtälön*

$$C_k = \frac{p_k}{q_k}.$$

Todistus (vrt. [5, s. 471-472]). Todistetaan lause induktiolla. Kun $k = 0$, niin

$$C_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}.$$

Kun $k = 1$, niin tällöin

$$C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Näin ollen väite on tosi, kun $k = 0$ ja $k = 1$.

Oletetaan sitten, että väite on tosi luvun k positiivisilla kokonaislukuarvoilla, joille pätee $2 \leq k < n$. Tällöin siis

$$C_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}. \tag{4}$$

Rekursioyhtälöiden (3) perusteella nähdään, että reaaliluvut p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1} ja q_{k-2} riippuvat ainoastaan luvuista $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Näin ollen reaaliluku a_k voidaan korvata arvolla $a_k + 1/a_{k+1}$ yhtälössä (4). Induktio-oletuksen perusteella saadaan siis

$$\begin{aligned}
C_{k+1} &= [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}] = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + 1/a_{k+1}] \\
&= \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{a_k p_{k-1} + \dfrac{p_{k-1}}{a_{k+1}} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + \dfrac{q_{k-1}}{a_{k+1}} + q_{k-2}} \\
&= \frac{a_{k+1} a_k p_{k-1} + p_{k-1} + a_{k+1} p_{k-2}}{a_{k+1} a_k q_{k-1} + q_{k-1} + a_{k+1} q_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\
&= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Väite on siis tosi arvolla $k+1$, joten induktioperiaatteen mukaan väite on tosi.

□

Huomautus 2.1 Luvut p_k ja q_k voidaan myös määritellä vaihtoehtoisesti yhtälöillä

$$p_{-2} = 0, \qquad q_{-2} = 1,$$
$$p_{-1} = 1, \qquad q_{-1} = 0$$

ja

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

kun $0 \leq k \leq n$ (vrt. [4, s. 214]).

Tarkastellaan konvergenttien muodostamista seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 2.1 Luvun $57/13$ ketjumurtolukuesitys on $[4;\, 2, 1, 1, 2]$. Tämän ketjumurtolukuesityksen kaikki konvergentit voidaan määrittää lauseessa 2.1 esitettyjen rekursioyhtälöiden (3) avulla. Tällöin

$$p_0 = 4, \qquad q_0 = 1,$$
$$p_1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9, \qquad q_1 = 2,$$
$$p_2 = 1 \cdot 9 + 4 = 13, \qquad q_2 = 1 \cdot 2 + 1 = 3,$$

$$p_3 = 1 \cdot 13 + 9 = 22, \qquad q_3 = 1 \cdot 3 + 2 = 5,$$
$$p_4 = 2 \cdot 22 + 13 = 57, \qquad q_4 = 2 \cdot 5 + 3 = 13.$$

Konvergentit C_k $(k = 0, 1, \ldots, 4)$ vastaavat siis yhtälöitä

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{4}{1} = 4,\ C_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{9}{2},\ C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{13}{3},$$
$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{22}{5} \text{ ja } C_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{57}{13}.$$

2.2 Konvergenttien ominaisuuksia

Tässä pykälässä esitetään konvergentteja koskevia lauseita. Esitettyjä tuloksia käytetään osittain myös muissa luvuissa.

Lause 2.2 *Olkoon* $C_k = p_k / q_k$ *ketjumurtoluvun* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *k. konvergentti. Silloin*

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1},$$

kun $1 \le k \le n$.

Todistus (vrt. [5, s. 473]). Todistetaan lause induktiolla. Kun $k = 1$, niin lauseen 2.1 rekursioyhtälöiden (3) perusteella saadaan

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) \cdot 1 - a_0 a_1 = 1 = (-1)^{1-1},$$

joten väite toteutuu tässä tapauksessa. Oletetaan sitten, että väite on tosi luvun k positiivisilla kokonaislukuarvoilla, joille pätee $1 \le k < n$. Tällöin siis

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}.$$

Rekursioyhtälöiden (3) sekä induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) \\ &= a_{k+1} p_k q_k + p_{k-1} q_k - a_{k+1} p_k q_k - p_k q_{k-1} \\ &= p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} = -(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) \\ &= -(-1)^{k-1} = (-1)^k, \end{aligned}$$

joten väite on tosi arvolla $k+1$. Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi. □

Tarkastellaan sitten lauseen 2.2 seurauksena saatavia tuloksia.

Seuraus 2.1 *Olkoon* $C_k = p_k/q_k$ *yksinkertaisen ketjumurtoluvun* $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ *k. konvergentti. Olkoot lisäksi kokonaisluvut* p_k *ja* q_k *määritelty, kuten lauseessa 2.1. Tällöin kokonaisluvut* p_k *ja* q_k *ovat suhteellisia alkulukuja.*

Todistus (vrt. [5, s. 473-474]). Olkoon $d = (p_k, q_k)$. Lauseen 2.2 perusteella tiedetään, että

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}.$$

Näin ollen

$$d \mid (-1)^{k-1},$$

jolloin siis $d \mid (-1)$ ja $d \mid 1$. Tästä seuraa, että $d = 1$. Koska siis $d = (p_k, q_k) = 1$, ovat luvut p_k ja q_k keskenään jaottomia. □

Seuraus 2.1 osoittaa, että yksinkertaisen ketjumurtoluvun konvergentit p_k/q_k ovat aina supistetussa muodossa. Tarkastellaan vielä toista lauseen 2.2 seurausta.

Seuraus 2.2 *Olkoon* $C_k = p_k/q_k$ *yksinkertaisen ketjumurtoluvun* $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ *k. konvergentti. Silloin*

$$C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}},$$

kun $1 \le k \le n$. *Lisäksi on voimassa*

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}},$$

kun $2 \le k \le n$.

Todistus (vrt. [5, s. 474]). Lauseen 2.2 mukaan $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$. Jakamalla tämä yhtälö puolittain luvulla $q_k q_{k-1}$ saadaan

$$C_k - C_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}},$$

joten ensimmäinen yhtälö on voimassa.

Tarkastelemalla erotusta $C_k - C_{k-2}$ huomataan, että

$$C_k - C_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k}{q_k q_{k-2}}. \tag{5}$$

Rekursioyhtälöiden (3) perusteella tiedetään, että $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ ja $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$. Lisäksi lauseen 2.2 perusteella tiedetään, että $p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1} = (-1)^{k-2}$. Näitä yhtälöitä käyttämällä saadaan yhtälön (5) oikeanpuoleisen lausekkeen osoittaja muotoon

$$\begin{aligned} p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k &= (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} - p_{k-2}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) \\ &= a_k p_{k-1} q_{k-2} + p_{k-2} q_{k-2} - p_{k-2} a_k q_{k-1} - p_{k-2} q_{k-2} \\ &= a_k (p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1}) \\ &= a_k (-1)^{k-2}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k (-1)^{k-2}}{q_k q_{k-2}} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}},$$

joten toinen yhtälö on voimassa. □

Huomautus 2.2 Ks. [5, s. 474]. Lähdeteoksen seurauksessa 12.10.2 (vrt. tämän tutkielman seuraus 2.2) esiintyneen yksinkertaisen ketjumurtoluvun $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ tilalla pitäisi olla ketjumurtoluku $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Seuraavaksi esitetään konvergenttien osoittajia ja nimittäjiä koskevat lauseet.

Lause 2.3 *Olkoon* $C_k = p_k / q_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$ *ketjumurtoluvun* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *k. konvergentti ja olkoon* $a_0 > 0$ *ja* $k \geq 0$. *Silloin on voimassa yhtälö*

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0].$$

Todistus (vrt. [4, s. 220 ja s. 285-286, harjoitustehtävä 3). Todistetaan lause induktiolla. Kun $k = 0$, niin huomautuksen 2.1 merkintöjen perusteella

$$[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{p_{-1}}.$$

Tässä tapauksessa väite on siis tosi.

Oletetaan sitten, että

$$\frac{p_m}{p_{m-1}} = [a_m; a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0],$$

missä luku m on kiinnitetty ja $0 \le m < k$. Tällöin induktio-oletuksen ja rekursiokaavojen (3) perusteella saadaan

$$\begin{aligned}[a_{m+1}; a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0] &= a_{m+1} + \frac{1}{[a_m; a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0]} \\ &= a_{m+1} + \frac{1}{p_m / p_{m-1}} = a_{m+1} + \frac{p_{m-1}}{p_m} \\ &= \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{p_m} = \frac{p_{m+1}}{p_m}.\end{aligned}$$

Siis induktioperiaatteen mukaan väite on tosi. □

Lause 2.4 *Olkoon* $C_k = p_k / q_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$ *ketjumurtoluvun* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *k. konvergentti ja olkoon* $k \ge 1$. *Silloin on voimassa yhtälö*

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

Todistus (vrt. [2, s. 7]). Todistetaan lause induktiolla. Kun $k = 1$, niin

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1}{1} = a_1 = [a_1].$$

Tässä tapauksessa väite on siis tosi. Oletetaan sitten, että $k > 1$ ja

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}; a_{k-2}, \ldots, a_1].$$

Rekursiokaavojen (3) ja induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\frac{q_k}{q_{k-1}} &= a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \frac{1}{q_{k-1} / q_{k-2}} \\ &= \left[a_k; \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} \right] = [a_k; a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1].\end{aligned}$$

Siis induktioperiaatteen mukaan väite on tosi. □

Lause 2.5 *Olkoon* q_k *yksinkertaisen ketjumurtoluvun* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *k. konvergentin nimittäjä. Silloin*

$$q_k \ge q_{k-1},$$

kun $1 \le k \le n$, *ja kun* $k > 1$, *niin erisuuruus on aito. Lisäksi* $q_k \ge k$ *aina, kun* $k \ge 0$.

Todistus (vrt. [4, s. 218]). Koska $q_0 = 1$, viimeinen väite on ensimmäisen väitteen selvä seuraus. Todistetaan lauseen alkuosa induktiolla. Koska

$$q_0 = 1 \le a_1 = q_1,$$

niin ensimmäinen väite on tosi, kun $k = 1$. Oletetaan sitten, että väite on tosi aina, kun k on sellainen kokonaisluku, että $1 \le k \le m$ ja $m < n$. Koska yksinkertaisen ketjumurtoluvun $(m+1)$. termi on positiivinen kokonaisluku, on voimassa epäyhtälö $a_{m+1} \ge 1$. Rekursiokaavojen (3) ja epäyhtälön $a_{m+1} \ge 1$ perusteella

$$q_{m+1} = a_{m+1} q_m + q_{m-1} > q_m + 0 = q_m,$$

joten väite on tosi arvolla $m+1$. Siis induktioperiaatteen mukaan väite on tosi. □

Seurauksen 2.2 ja lauseen 2.5 avulla voidaan todistaa seuraava parillisesti ja parittomasti indeksoituja konvergentteja koskeva tulos.

Lause 2.6 *Yksinkertaisen ketjumurtoluvun* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *konvergentit toteuttavat epäyhtälön*

$$C_0 < C_2 < \cdots < C_n < \cdots < C_3 < C_1.$$

Todistus (vrt. [4, s. 218-219]). Seurauksen 2.2 mukaan

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}},$$

kun $2 \le k \le n$. Kun luku k on parillinen, on yllä olevan yhtälön oikea puoli selvästi positiivinen. Tällöin on siis voimassa

$$C_k > C_{k-2},$$

joten parillisesti indeksoidut konvergentit muodostavat aidosti kasvavan jonon. Kun luku k on pariton, on yhtälön oikea puoli vastaavasti negatiivinen. Tällöin saadaan epäyhtälö

$$C_k < C_{k-2},$$

joten parittomasti indeksoidut konvergentit muodostavat aidosti vähenevän jonon. Konvergentti C_n on siis joko suurin parillisesti indeksoitu tai pienin parittomasti indeksoitu konvergentti, sitä mukaa kuin luku n on parillinen tai pariton. Oletetaan sitten, että luku h on pariton ja luku k parillinen. Jos $h < k$, niin $h \le k-1$. Koska $k-1$ on pariton luku, on voimassa epäyhtälö

$$C_h \geq C_{k-1}.$$

Seurauksen 2.2 perusteella

$$C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}} < 0,$$

koska luku k on parillinen ja lauseen 2.5 mukaan tulo $q_k q_{k-1}$ on > 0. Näin ollen saadaan epäyhtälöketju

$$C_h \geq C_{k-1} > C_k.$$

Jos oletetaan, että $h > k$, niin tällöin on voimassa $h - 1 \geq k$. Kun edellä esitetty perustelu toistetaan käyttämällä luvun k sijaan lukua h, saadaan jälleen

$$C_h > C_k.$$

Näin on siis osoitettu, että jokainen parittomasti indeksoitu konvergentti on jokaista parillisesti indeksoitua konvergenttia suurempi. □

Esimerkki 2.2 Tarkastellaan vielä esimerkin 2.1 ketjumurtoluvun $[4;\ 2, 1, 1, 2]$ konvergentteja. Kun konvergentit muutetaan desimaalimuotoon, saadaan

$$C_0 = 4,\ \ C_1 = \frac{9}{2} = 4{,}5,\ \ C_2 = \frac{13}{3} = 4{,}3333\ldots,$$
$$C_3 = \frac{22}{5} = 4{,}4 \ \text{ ja } \ C_4 = \frac{57}{13} = 4{,}3846\ldots.$$

Lauseen 2.6 mukaisesti on siis selvästi voimassa

$$C_0 = 4 < C_2 = 4{,}3333\ldots < C_4 = 4{,}3846\ldots < C_3 = 4{,}4 < C_1 = 4{,}5.$$

3 Äärettömät ketjumurtoluvut

Luvussa 3 perehdytään äärettömiin ketjumurtolukuihin ja tarkastellaan niiden ominaisuuksia aiemmin esitettyjen tulosten avulla. Tässä luvussa hyödynnetään etenkin konvergentteja koskevia lauseita.

3.1 Äärettömiin ketjumurtolukuihin liittyviä käsitteitä

Aluksi esitetään määritelmiä, jotka koskevat äärettömiä ketjumurtolukuja.

Määritelmä 3.1 *Äärettömällä ketjumurtoluvulla* tarkoitetaan lauseketta

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}},$$

missä $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ja $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ovat reaalilukuja.

Määritelmä 3.2 *Yksinkertaisella äärettömällä ketjumurtoluvulla* tarkoitetaan lauseketta

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \tag{6}$$

missä a_0 on kokonaisluku ja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ovat positiivisia kokonaislukuja.

Tässä luvussa käsitellään lausekkeen (6) kaltaisia yksinkertaisia äärettömiä ketjumurtolukuja. Näiden ketjumurtolukujen termejä $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kutsutaan osanimittäjiksi, kuten äärellisilläkin ketjumurtoluvuilla. Yksinkertaiselle äärettömälle ketjumurtoluvulle (6) otetaan nyt käyttöön merkintä $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

3.2 Äärettömät ketjumurtoluvut ja irrationaaliluvut

Pykälässä 1.2 käsiteltiin yksinkertaisten äärellisten ketjumurtolukujen ja rationaalilukujen vastaavuutta. Tässä pykälässä osoitetaan puolestaan yksinkertaisten äärettömien ketjumurtolukujen ja irrationaalilukujen välinen yhteys.

Aluksi todistamme lauseen, joka antaa aiheen määritellä konvergenttien raja-arvon yksinkertaisen äärettömän ketjumurtoluvun arvoksi. Tässä ensimmäisessä ja pykälän muissa todistuksissa voidaan hyödyntää luvussa 2 esitettyjä ketjumurtolukujen konvergentteja koskevia kaavoja, koska näiden kaavojen johtaminen oli riippumaton ketjumurtoluvun äärellisyydestä. Näin ollen kaavat ovat voimassa myös äärettömillä ketjumurtoluvuilla, kun indeksien ylärajat poistetaan.

Lause 3.1 *Olkoon* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *yksinkertainen ääretön ketjumurtoluku ja olkoon* C_n *sen* n*. konvergentti. Silloin on olemassa sellainen reaaliluku* α *, että*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} C_n .$$

Lisäksi määritellään, että $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Todistus (vrt. [4, s. 221-222]). Lauseen 2.6 perusteella tiedetään, että

$$C_0 < C_2 < C_4 < \cdots ,$$
$$C_1 > C_3 > C_5 > \cdots .$$

Lisäksi on voimassa epäyhtälö $C_h < C_k$, kun h on parillinen ja k on pariton luku. Tällöin jono $(C_{2k})_{k>0}$ parillisesti indeksoituja konvergentteja on aidosti kasvava ja ylhäältä rajoitettu luvulla C_1, joten se on suppeneva. Vastaavasti parittomasti indeksoidut konvergentit muodostavat aidosti vähenevän jonon $(C_{2k+1})_{k>0}$, joka on alhaalta rajoitettu luvulla C_0. Siis myös tämä jono on suppeneva. Näin ollen analyysin tulosten perusteella on olemassa sellaiset reaaliluvut α_1 ja α_2, että

$$\lim_{k\to\infty} C_{2k} = \alpha_1$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} C_{2k+1} = \alpha_2 .$$

Osoitetaan nyt raja-arvojen α_1 ja α_2 yhtäsuuruus. Tämän seurauksena

$$\lim_{k\to\infty} C_k = \alpha_1$$

ja luku α_1 voidaan määritellä äärettömän ketjumurtoluvun $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ arvoksi. Seurauksen 2.2 ja lauseen 2.5 mukaan on voimassa

$$0 < \left| C_{2k+1} - C_{2k} \right| = \left| \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \right| = \left| \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k+1} q_{2k}} \right| = \frac{1}{q_{2k+1} q_{2k}} \leq \frac{1}{(2k+1)2k}.$$

Siksi

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} \left| C_{2k+1} - C_{2k} \right| \leq 0,$$

joten on voimassa yhtälö $\alpha_1 = \alpha_2$. Merkitsemällä $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ on siis osoitettu, että kaikki konvergentit suppenevat kohti raja-arvoa α. Lisäksi voidaan määritellä, että $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. □

Lause 3.2 *Olkoon* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *yksinkertainen ääretön ketjumurtoluku ja merkitään, että* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. *Silloin luku* α *on irrationaaliluku.*

Todistus (vrt. [4, s. 222]). Lauseen 3.1 perusteella tiedetään, että luku α on aidosti kasvavan jonon $(C_{2k})_{k \geq 0}$ ja aidosti vähenevän jonon $(C_{2k+1})_{k \geq 0}$ yhteinen raja-arvo. Näin ollen luku α sijaitsee konvergenttien C_n ja C_{n+1} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ välissä. Tämän tiedon ja seurauksen 2.2 perusteella on voimassa

$$0 < \left| \alpha - C_n \right| < \left| C_{n+1} - C_n \right| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n} \right| = \frac{1}{q_{n+1} q_n}.$$

Tehdään sitten vastaoletus, että α on rationaaliluku. Merkitään, että $\alpha = a/b$, missä a ja b ovat kokonaislukuja ja $b > 0$. Tällöin saadaan

$$0 < \left| \frac{a}{b} - C_n \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Kertomalla epäyhtälö luvulla bq_n (> 0) saadaan edelleen

$$0 < \left| aq_n - bp_n \right| < \frac{b}{q_{n+1}}.$$

Koska $q_{n+1} \geq n+1$, niin

$$0 < \left| aq_n - bp_n \right| < \frac{b}{q_{n+1}} \leq \frac{b}{n+1}.$$

Valitsemalla kokonaisluku n, joka on $\geq b$, saadaan

$$0 < |aq_n - bp_n| < \frac{b}{q_{n+1}} \le \frac{b}{n+1} < 1 .$$

Tästä seuraa ristiriita, sillä erotus $aq_n - bp_n$ on kokonaisluku. Näin ollen vastaoletus on väärin. Luku α on siis irrationaalinen. □

Edellä on osoitettu, että jokainen yksinkertainen ääretön ketjumurtoluku vastaa irrationaalilukua. Tutkitaan sitten irrationaalilukujen esittämistä yksinkertaisten äärettömien ketjumurtolukujen avulla.

Lause 3.3 *Olkoon* α *irrationaaliluku ja merkitään, että* $\alpha = \alpha_0$. *Määritellään lisäksi jono* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *rekursiivisesti yhtälöillä*

$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor, \qquad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k},$$

kun $k \ge 0$. *Silloin luku* α *on yksinkertaisen äärettömän ketjumurtoluvun* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *arvo.*

Todistus (vrt. [5, s. 480-482]). Rekursiivisesta määritelmästä nähdään, että a_k on kokonaisluku kaikilla luvun k arvoilla. Induktiolla voidaan lisäksi osoittaa, että luku α_k on irrationaalinen aina, kun $k \ge 0$, ja että tämän seurauksena luku α_{k+1} on olemassa. Yhtälön $\alpha_0 = \alpha$ perusteella luku α_0 on irrationaalinen. Näin ollen on voimassa

$$\alpha_0 \ne a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor .$$

Käyttämällä rekursiivista määritelmää saadaan yhtälö

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} .$$

On siis osoitettu, että luku α_1 on olemassa.

Oletetaan sitten, että luku α_k on irrationaalinen. Tämän seurauksena luku α_{k+1} on olemassa. Voidaan helposti havaita, että myös luku α_{k+1} on irrationaalinen. Yhtälöstä

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

seuraa nimittäin, että

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} . \tag{7}$$

Jos α_{k+1} olisi rationaaliluku, niin myös α_k olisi rationaaliluku. Koska α_k on irrationaaliluku ja a_k on kokonaisluku, niin on voimassa ehto $\alpha_k \neq a_k$. Tällöin tiedetään, että

$$a_k < \alpha_k < a_k + 1.$$

Vähentämällä tästä epäyhtälöstä luku a_k saadaan

$$0 < \alpha_k - a_k < 1.$$

Edellä esitetyn perusteella on voimassa

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} > 1,$$

joten tällöin

$$a_{k+1} = \lfloor \alpha_{k+1} \rfloor \geq 1,$$

kun $k \geq 0$. Näin ollen kaikki kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots$ ovat positiivisia.

Käyttämällä toistuvasti kaavaa (7) havaitaan, että

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} &= [a_0; \alpha_1] \\
= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} &= [a_0; a_1, \alpha_2] \\
&\vdots \\
= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}}}} &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \alpha_{k+1}].
\end{aligned}$$

Seuraavaksi osoitetaan, että ketjumurtoluvun $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \alpha_{k+1}]$ arvo lähestyy lukua α, kun luku k kasvaa rajatta. Lauseen 2.1 todistuksen perusteella tiedetään, että

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_k, \alpha_{k+1}] = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}},$$

missä p_j / q_j on ketjumurtoluvun $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ j. konvergentti. Siksi

$$\alpha - C_k = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{\alpha_{k+1} p_k q_k + p_{k-1} q_k - \alpha_{k+1} p_k q_k - p_k q_{k-1}}{(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}) q_k}$$
$$= \frac{-(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)}{(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}) q_k} = \frac{-(-1)^{k-1}}{(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}) q_k},$$

missä osoittaja $-(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)$ on sievennetty käyttämällä lausetta 2.2. Koska

$$\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1} > a_{k+1} q_k + q_{k-1} = q_{k+1},$$

niin tiedetään, että

$$|\alpha - C_k| = \left| \frac{-(-1)^{k-1}}{(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}) q_k} \right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}) q_k}$$
$$< \frac{1}{(a_{k+1} q_k + q_{k-1}) q_k} = \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Lauseen 2.5 mukaan $q_k \geq k$. Näin ollen lauseke $1/(q_k q_{k+1})$ lähestyy arvoa 0, kun luku k kasvaa rajatta. Siksi $\lim_{k \to \infty} C_k = \alpha$, ts. luku α on yksinkertaisen äärettömän ketjumurtoluvun $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ arvo. □

Huomautus 3.1 Ks. [5, s. 480-482]. Lähdeteoksessa lauseen 12.15 todistuksen (vrt. tutkielman lauseen 3.3 todistus) lopussa on viitattu ehtoon $q_k > k$. Viittaus pitäisi olla ehtoon $q_k \geq k$.

Lause 3.4 *Jos kaksi yksinkertaista ääretöntä ketjumurtolukua* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *ja* $[b_0; b_1, b_2, \ldots]$ *esittävät samaa irrationaalilukua, niin* $a_k = b_k$, *kun* $k \geq 0$.

Todistus (vrt. [5, s. 482-483]). Olkoon $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Koska $C_0 = a_0$ ja $C_1 = a_0 + 1/a_1$, niin lauseen 3.1 perusteella tiedetään, että

$$a_0 < \alpha < a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

Koska kokonaisluku a_1 on ≥ 1, saadaan epäyhtälö edelleen muotoon

$$a_0 < \alpha < a_0 + 1.$$

Täten on voimassa $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. Lisäksi tiedetään, että

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \ldots]},$$

sillä

$$
\begin{aligned}
\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] &= \lim_{k\to\infty}[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_k]}\right) \\
&= a_0 + \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}[a_1; a_2, \ldots, a_k]} \\
&= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \ldots]}.
\end{aligned}
$$

Oletetaan, että

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [b_0; b_1, b_2, \ldots].$$

Tämän oletuksen ja käytettyjen merkintöjen perusteella huomataan, että

$$a_0 = b_0 = \lfloor \alpha \rfloor$$

ja

$$a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots]} = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, \ldots]}.$$

Näin ollen on voimassa

$$[a_1; a_2, \ldots] = [b_1; b_2, \ldots].$$

Oletetaan sitten, että $a_k = b_k$ ja $[a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots] = [b_{k+1}; b_{k+2}, \ldots]$. Käyttämällä samaa päättelyä kuin edellä havaitaan, että

$$a_{k+1} = b_{k+1}$$

ja

$$a_{k+1} + \frac{1}{[a_{k+2}; a_{k+3}, \ldots]} = b_{k+1} + \frac{1}{[b_{k+2}; b_{k+3}, \ldots]}.$$

Tällöin siis

$$[a_{k+2}; a_{k+3}, \ldots] = [b_{k+2}; b_{k+3}, \ldots].$$

Induktiota käyttäen on siis osoitettu, että $a_k = b_k$, kun $k \geq 0$. □

Huomautus 3.2 Ks. [5, s. 482-483]. Lähdeteoksessa lauseen 12.16 todistuksen (vrt. tutkielman lauseen 3.4 todistus) yhteydessä on viitattu lähdeteoksen lauseeseen 12.11 (vrt. tutkielman lause 2.6). Viittaus pitäisi olla teoksen lauseeseen 12.13 (vrt. tutkielman lause 3.1). Lisäksi todistuksessa pitäisi yhtälön

$$a_{k+1} + \frac{1}{[a_{k+2}; a_{k+3}, \ldots]} = b_{k+1} + \frac{1}{[b_{k+1}; b_{k+3}, \ldots]}$$

tilalla olla yhtälö

$$a_{k+1} + \frac{1}{[a_{k+2}; a_{k+3}, \ldots]} = b_{k+1} + \frac{1}{[b_{k+2}; b_{k+3}, \ldots]}.$$

Lauseiden 3.3 ja 3.4 perusteella osoittautuu, että jokainen irrationaaliluku voidaan esittää yksikäsitteisesti yksinkertaisena äärettömänä ketjumurtolukuna.

Esimerkki 3.1 Olkoon $\alpha = \sqrt{39}$. Muodostetaan tämän irrationaaliluvun ketjumurtolukuesitys käyttäen lauseen 3.3 rekursioyhtälöitä. Tällöin

$$\begin{aligned}
a_0 &= \lfloor \sqrt{39} \rfloor = 6, \\
\alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{39} - 6} = \frac{\sqrt{39} + 6}{39 - 36} = \frac{\sqrt{39} + 6}{3}, \\
a_1 &= \left\lfloor \frac{\sqrt{39} + 6}{3} \right\rfloor = 4, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{39}+6}{3} - 4} = \frac{1}{\frac{\sqrt{39}-6}{3}} = \frac{3}{\sqrt{39} - 6} = \frac{3(\sqrt{39} + 6)}{39 - 36} = \sqrt{39} + 6, \\
a_2 &= \lfloor \sqrt{39} + 6 \rfloor = 12, \\
\alpha_3 &= \frac{1}{\sqrt{39} + 6 - 12} = \frac{1}{\sqrt{39} - 6} = \frac{\sqrt{39} + 6}{39 - 36} = \frac{\sqrt{39} + 6}{3}.
\end{aligned}$$

Koska $\alpha_3 = \alpha_1$, niin $a_3 = a_1, a_4 = a_2, \ldots$ ja näin saadaan

$$\sqrt{39} = [6;\ 4,\ 12,\ 4,\ 12,\ 4,\ 12,\ \ldots].$$

Tämä ketjumurtoluku sisältää osanimittäjien jakson, joka toistuu jatkuvasti. Siksi sitä kutsutaan jaksolliseksi ketjumurtoluvuksi. Jaksollisiin ketjumurtolukuihin palataan luvussa 4.

3.3 Irrationaalilukujen approksimointi

Seuraavassa tarkastellaan irrationaalilukujen approksimointia rationaalilukujen avulla. Voidaan nimittäin osoittaa, että irrationaaliluvun α ketjumurtolukukehitelmän konvergentit ovat luvun α *parhaita rationaalisia approksimaatioita*. *Parhaalla rationaalisella approksimaatiolla* tarkoitetaan, että konvergentti p_k/q_k on lähin sellaisista luvun α rationaalisista approksimaatioista, joiden nimittäjä ei ole suurempi kuin kyseessä olevan konvergentin nimittäjä.

Lause 3.5 *Jos α on irrationaaliluku, niin on olemassa äärettömän monta sellaista rationaalilukua p/q, että*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Todistus (vrt. [5, s. 484]). Olkoon p_k/q_k luvun α ketjumurtolukuesityksen k. konvergentti. Tällöin lauseen 3.3 todistuksen perusteella tiedetään, että

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Koska lauseen 2.5 perusteella $q_k < q_{k+1}$, kun $k \geq 1$, niin edellä esitetty epäyhtälö saadaan muotoon

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{{q_k}^2}.$$

Näin ollen luvun α konvergentit p_k/q_k ($k = 1,2,\ldots$) vastaavat niitä rationaalilukuja, jotka täyttävät lauseen ehdot. □

Seuraavaksi esitetään ilman todistusta apulause, jota tarvitaan lauseen 3.6 todistuksessa.

Apulause 3.1 *Jos a, b ja c ovat sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $(a,b) = 1$ ja $a \mid bc$, niin $a \mid c$.*

Todistus. Ks. [5, s. 109].

Lause 3.6 *Olkoon α irrationaaliluku ja olkoot p_j/q_j ($j = 1,2,\ldots$) luvun α yksinkertaisen äärettömän ketjumurtolukuesityksen konvergentteja. Jos r ja s ovat kokonaislukuja ja $s > 0$ ja jos k on sellainen positiivinen kokonaisluku, että*

$$|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|,$$

niin $s \geq q_{k+1}$.

Todistus (vrt. [5, s. 484-485]). Tehdään vastaoletus, että $|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|$, mutta $1 \leq s < q_{k+1}$. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{aligned} p_k x + p_{k+1} y &= r, \\ q_k x + q_{k+1} y &= s. \end{aligned} \tag{8}$$

Kerrotaan ensimmäinen yhtälö luvulla q_k ja toinen luvulla p_k ja vähennetään tämän jälkeen toinen yhtälö ensimmäisestä. Tällöin saadaan

$$(p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1})y = rq_k - sp_k .$$

Lauseen 2.2 perusteella tiedetään, että $p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k$. Tätä yhtälöä käyttämällä havaitaan, että

$$y = (-1)^k (rq_k - sp_k) .$$

Kerrotaan sitten ensimmäinen yhtälö luvulla q_{k+1} ja toinen luvulla p_{k+1} ja vähennetään ensimmäinen yhtälö toisesta. Tällöin saadaan

$$(p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1})x = sp_{k+1} - rq_{k+1} .$$

Kun käytetään jälleen lauseen 2.2 tulosta, saadaan yhtälö

$$x = (-1)^k (sp_{k+1} - rq_{k+1}) .$$

Seuraavaksi osoitetaan, että $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Jos $x = 0$, niin silloin $sp_{k+1} = rq_{k+1}$. Koska $(p_{k+1}, q_{k+1}) = 1$, niin apulauseen 3.1 perusteella $q_{k+1} \mid s$. Tästä seuraa, että $q_{k+1} \leq s$, mikä on ristiriita. Näin ollen $x \neq 0$. Jos taas $y = 0$, niin tällöin ovat voimassa yhtälöt $r = p_k x$ ja $s = q_k x$. Näiden yhtälöiden sekä ehdon $|x| \geq 1$ nojalla saadaan

$$\begin{aligned} |s\alpha - r| &= |q_k x\alpha - p_k x| = |x(q_k\alpha - p_k)| \\ &= |x||q_k\alpha - p_k| \geq |q_k\alpha - p_k| . \end{aligned}$$

Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten $y \neq 0$.

Osoitetaan sitten, että luvut x ja y ovat erimerkkisiä. Oletetaan ensin, että $y < 0$. Yhtälöstä $q_k x = s - q_{k+1}y$ seuraa tällöin, että $x > 0$, koska $q_k x > 0$ ja $q_k > 0$. Jos taas oletetaan, että $y > 0$, niin epäyhtälöketjun $q_{k+1}y \geq q_{k+1} > s$ perusteella tiedetään, että $q_k x = s - q_{k+1}y < 0$. Näin ollen $x < 0$, sillä $q_k > 0$.

Lauseen 3.1 perusteella tiedetään, että luku α sijaitsee konvergenttien p_k/q_k ja p_{k+1}/q_{k+1} välissä. Tällöin on siis voimassa joko epäyhtälö $p_k/q_k < \alpha < p_{k+1}/q_{k+1}$ tai epäyhtälö $p_{k+1}/q_{k+1} < \alpha < p_k/q_k$. Kummassakin tapauksessa huomataan, että luvut $q_k\alpha - p_k$ ja $q_{k+1}\alpha - p_{k+1}$ ovat erimerkkisiä.

Yhtälöryhmän (8) perusteella tiedetään, että

$$\begin{aligned}|s\alpha - r| &= |(q_k x + q_{k+1} y)\alpha - (p_k x + p_{k+1} y)| \\ &= |x(q_k\alpha - p_k) + y(q_{k+1}\alpha - p_{k+1})|.\end{aligned}$$

Edellä esitettyjen päätelmien nojalla tiedetään, että luvut $x(q_k\alpha - p_k)$ ja $y(q_{k+1}\alpha - p_{k+1})$ ovat samanmerkkisiä. Näin ollen niiden summan itseisarvo on sama kuin itseisarvojen summa. Koska $|x| \geq 1$, niin nyt

$$\begin{aligned}|s\alpha - r| &= |x||q_k\alpha - p_k| + |y||q_{k+1}\alpha - p_{k+1}| \\ &\geq |x||q_k\alpha - p_k| \\ &\geq |q_k\alpha - p_k|.\end{aligned}$$

Tästä seuraa ristiriita oletuksen kanssa. On siis osoitettu, että vastaoletus on väärin ja väite oikein. □

Huomautus 3.3 Ks. [5, s. 484-485]. Lähdeteoksessa lauseen 12.18 todistuksessa (vrt. tutkielman lauseen 3.6 todistus) on tehty oletukset $s \neq 0$ ja $y \neq 0$. Oletusten kuuluisi olla muotoa $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Lisäksi todistuksen loppuosassa on viitattu teoksen lauseeseen 12.11 (vrt. tutkielman lause 2.6). Viittaus pitäisi olla lähdeteoksen lauseeseen 12.13 (vrt. tutkielman lause 3.1).

Seuraus 3.1 *Olkoon α irrationaaliluku ja olkoot p_j/q_j $(j = 1, 2, \ldots)$ luvun α yksinkertaisen äärettömän ketjumurtolukuesityksen konvergentteja. Jos r/s on rationaaliluku, missä r ja s ovat kokonaislukuja ja $s > 0$, ja jos k on sellainen positiivinen kokonaisluku, että*

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|,$$

niin $s > q_k$.

Todistus (vrt. [5, s. 485]). Tehdään vastaoletus, että $s \leq q_k$ ja

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|.$$

Kertomalla epäyhtälö luvulla s ja huomioimalla ehto $s \leq q_k$ havaitaan, että

$$s\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < q_k\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|.$$

Koska $s, q_k > 0$, niin edellä esitetyn perusteella on voimassa

$$|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|,$$

mistä seuraa ristiriita lauseen 3.6 päätelmän kanssa. Vastaoletus on siis väärin ja väite oikein. □

Tarkastellaan vielä, millä ehdolla irrationaaliluvun rationaalinen approksimaatio on tämän irrationaaliluvun yksinkertaisen äärettömän ketjumurtolukuesityksen konvergentti.

Lause 3.7 *Olkoon α irrationaaliluku ja olkoon r/s rationaaliluku, missä r ja s ovat kokonaislukuja, $s > 0$ ja $(r, s) = 1$. Jos rationaaliluku r/s toteuttaa ehdon*

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s^2},$$

niin r/s on luvun α yksinkertaisen ketjumurtolukuesityksen konvergentti.

Todistus (vrt. [5, s. 486]). Tehdään vastaoletus, että r/s ei ole luvun α ketjumurtolukuesityksen konvergentti. Näin ollen on olemassa sellaiset konvergentit p_k/q_k ja p_{k+1}/q_{k+1}, että $q_k \le s < q_{k+1}$. Lauseen 3.6 sekä oletuksen $|\alpha - r/s| < 1/(2s^2)$ perusteella tiedetään, että tällöin

$$|q_k\alpha - p_k| \le |s\alpha - r| = s\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s}.$$

Jakamalla epäyhtälö

$$|q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{2s}$$

puolittain luvulla q_k (> 0) saadaan

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2sq_k}.$$

Koska $r/s \ne p_k/q_k$, erotus $sp_k - rq_k$ on nollasta eroava kokonaisluku. Täten on voimassa epäyhtälö $|sp_k - rq_k| \ge 1$. Tämän tiedon ja kolmioepäyhtälön perusteella saadaan edelleen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{sq_k} &\le \frac{|sp_k - rq_k|}{sq_k} = \left|\frac{sp_k - rq_k}{sq_k}\right| \\
&= \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{r}{s}\right| = \left|\frac{p_k}{q_k} - \alpha + \alpha - \frac{r}{s}\right| \\
&\le \left|\frac{p_k}{q_k} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{r}{s}\right| = \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{r}{s}\right| \\
&< \frac{1}{2sq_k} + \frac{1}{2s^2}.
\end{aligned}
$$

Edellä esitetystä seuraa, että

$$\frac{1}{2sq_k} < \frac{1}{2s^2}.$$

Näin ollen on voimassa

$$2sq_k > 2s^2,$$

mistä seuraa, että $q_k > s$. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa. Vastaoletus on siis väärin ja väite oikein. □

4 Jaksolliset ketjumurtoluvut

Luvussa 3 sivuttiin esimerkin 3.1 yhteydessä sellaisia äärettömiä yksinkertaisia ketjumurtolukuesityksiä, joissa jakso ketjumurtolukuesityksen termejä toistuu jatkuvasti. Tässä luvussa selvitetään tarkemmin näiden jaksollisiksi ketjumurtoluvuiksi kutsuttujen esitysten ominaisuuksia.

4.1 Kvadraattiset irrationaaliluvut

Kvadraattisilla irrationaaliluvuilla on keskeinen asema jaksollisten ketjumurtolukujen käsittelyssä. Seuraavassa esitetään tällaisia irrationaalilukuja koskevia määritelmiä ja lauseita. Lisäksi esitetään luettelonomaisesti ilman todistuksia kaksi apulausetta, jotka helpottavat tämän pykälän pääaiheen ominaisuuksien tutkimista.

Määritelmä 4.1 Reaalilukua α sanotaan *kvadraattiseksi irrationaaliluvuksi*, jos se on irrationaalinen ja kokonaislukukertoimisen toisen asteen yhtälön juuri, ts.

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0,$$

missä A, B ja C ovat kokonaislukuja ja $A \neq 0$.

Apulause 4.1 *Kahden rationaaliluvun summa ja tulo ovat rationaalisia.*

Todistus. Ks. [5, s. 12 ja 617, harjoitustehtävä 3].

Apulause 4.2 *Olkoon luku α kokonaislukukertoimisen polynomin $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ juuri. Silloin α on joko kokonaisluku tai irrationaaliluku.*

Todistus. Ks. [5, s. 115].

Lause 4.1 *Reaaliluku α on kvadraattinen irrationaaliluku, jos ja vain jos on olemassa sellaiset kokonaisluvut $a, b(>0)$ ja $c(\neq 0)$, että luku b ei ole täydellinen neliö ja*

$$\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c}.$$

Todistus (vrt. [5, s. 491]). Oletetaan ensin, että α on kvadraattinen irrationaaliluku. Tällöin se on selvästi irrationaalinen. Lisäksi määritelmän 4.1 perusteella on olemassa sellaiset kokonaisluvut A, B ja C, että $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan perusteella tiedetään, että

$$\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Koska α on reaaliluku, niin luku $B^2 - 4AC$ on > 0. Toisaalta, koska α on irrationaalinen, luku $B^2 - 4AC$ ei ole täydellinen neliö ja ehto $A \neq 0$ on voimassa. Merkitsemällä joko $a = -B$, $b = B^2 - 4AC$ ja $c = 2A$ tai $a = B$, $b = B^2 - 4AC$ ja $c = -2A$ saadaan luvulle α haluttu esitys.

Oletetaan sitten, että luku α on muotoa

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{b}}{c},$$

missä a, b ja c ovat kokonaislukuja. Oletetaan lisäksi, että $b > 0$, $c \neq 0$ ja että luku b ei ole täydellinen neliö. Tällöin apulauseiden 4.1 ja 4.2 perusteella havaitaan, että luku α on irrationaaliluku. Koska

$$c^2\alpha^2 - 2ac\alpha + (a^2 - b) = 0,$$

on α kvadraattinen irrationaaliluku. □

Lause 4.2 *Jos* α *on kvadraattinen irrationaaliluku ja* r, s, t *ja* u *ovat kokonaislukuja, niin osamäärä* $(r\alpha + s)/(t\alpha + u)$ *on joko rationaaliluku tai kvadraattinen irrationaaliluku.*

Todistus (vrt. [5, s. 491-492]). Oletetaan, että α on kvadraattinen irrationaaliluku. Tällöin lauseen 4.1 mukaan on olemassa sellaiset kokonaisluvut $a, b(> 0)$ ja $c(\neq 0)$, että luku b ei ole täydellinen neliö ja

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{b}}{c}.$$

Tämän yhtälön perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\frac{r\alpha + s}{t\alpha + u} &= \left[\frac{r(a + \sqrt{b})}{c} + s\right] \Big/ \left[\frac{t(a + \sqrt{b})}{c} + u\right] \\ &= \frac{r(a + \sqrt{b}) + cs}{c} \cdot \frac{c}{t(a + \sqrt{b}) + cu} = \frac{ar + r\sqrt{b} + cs}{at + t\sqrt{b} + cu}\end{aligned}$$

$$= \frac{(ar+cs)+r\sqrt{b}}{(at+cu)+t\sqrt{b}} = \frac{[(ar+cs)+r\sqrt{b}][(at+cu)-t\sqrt{b}]}{[(at+cu)+t\sqrt{b}][(at+cu)-t\sqrt{b}]}$$

$$= \frac{[(ar+cs)(at+cu)-rtb]+[r(at+cu)-t(ar+cs)]\sqrt{b}}{(at+cu)^2-t^2b}.$$

Näin ollen lauseen 4.1 perusteella osamäärä $(r\alpha+s)/(t\alpha+u)$ on kvadraattinen irrationaaliluku. Jos luvun $\sqrt{b}$ kerroin on nolla, on osamäärä rationaaliluku. □

Edellä on esitetty kvadraattisia irrationaalilukuja koskevia tuloksia. Lauseessa 4.3 tarkastellaan vielä yhtä kvadraattisen irrationaaliluvun ominaisuutta.

Lause 4.3 *Olkoon α on kvadraattinen irrationaaliluku. Silloin luku α on muotoa*

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{d}}{Q},$$

missä P ja Q ovat kokonaislukuja, d on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole täydellinen neliö, $Q \neq 0$ ja $Q \mid (d-P^2)$.

Todistus (vrt. [5, s. 494-495]). Koska α on kvadraattinen irrationaaliluku, lauseen 4.1 mukaan luvulle α on voimassa yhtälö

$$\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c},$$

missä a, b ja c ovat kokonaislukuja, $b > 0$ ja $c \neq 0$. Kun tämä yhtälö lavennetaan luvulla $|c|$, saadaan se muotoon

$$\alpha = \frac{a|c|+|c|\sqrt{b}}{c|c|} = \frac{a|c|+\sqrt{bc^2}}{c|c|}.$$

Olkoon nyt $P = a|c|$, $Q = c|c|$ ja $d = bc^2$. Tällöin P, Q ja d ovat kokonaislukuja. Selvästi $Q \neq 0$, sillä $c \neq 0$. Vastaavasti $d > 0$, koska $b > 0$. Luku d ei ole täydellinen neliö, koska luku b ei ole täydellinen neliö. Lisäksi $Q \mid (d-P^2)$, sillä luku $d-P^2$ voidaan kirjoittaa muodossa $d-P^2 = bc^2 - a^2c^2 = c^2(b-a^2) = \pm Q(b-a^2)$. □

Seuraavaksi tarkastellaan kvadraattisiin irrationaalilukuihin liittyvää konjugaatin käsitettä sekä konjugaatteja koskevia laskusääntöjä.

Määritelmä 4.2 Olkoon kvadraattinen irrationaaliluku α muotoa

$$\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c}.$$

Tällöin luvun α *konjugaatti* α' määritellään yhtälöllä

$$\alpha' = \frac{a-\sqrt{b}}{c}.$$

Lause 4.4 *Jos kvadraattinen irrationaaliluku α on yhtälön $Ax^2 + Bx + C = 0$ juuri, niin yhtälön toinen juuri on luvun α konjugaatti α'.*

Todistus (vrt. [5, s. 492]). Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaan yhtälön $Ax^2 + Bx + C = 0$ juuret ovat muotoa

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Jos luku α on toinen näistä kahdesta juuresta, niin konjugaatti α' on toinen, sillä juurilausekkeen $\sqrt{B^2 - 4AC}$ etumerkki vaihdetaan muodostettaessa luvusta α lukua α'. □

Lause 4.5 *Olkoot kvadraattiset irrationaaliluvut α_1 ja α_2 muotoa $\alpha_1 = (a_1 + b_1\sqrt{d})/c_1$ ja $\alpha_2 = (a_2 + b_2\sqrt{d})/c_2$. Silloin*

(i) $(\alpha_1 + \alpha_2)' = \alpha_1' + \alpha_2'$,
(ii) $(\alpha_1 - \alpha_2)' = \alpha_1' - \alpha_2'$,
(iii) $(\alpha_1\alpha_2)' = \alpha_1'\alpha_2'$,
(iv) $(\alpha_1/\alpha_2)' = \alpha_1'/\alpha_2'$.

Todistus (vrt. [5, s. 492-493]). Todistetaan osamäärää koskeva sääntö. Muut säännöt todistetaan vastaavasti, joten niiden todistukset sivuutetaan tässä. Koska $\alpha_1 = (a_1 + b_1\sqrt{d})/c_1$ ja $\alpha_2 = (a_2 + b_2\sqrt{d})/c_2$, saadaan osamäärälle α_1/α_2 yhtälö

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{d})/c_1}{(a_2 + b_2\sqrt{d})/c_2} = \frac{c_2(a_1 + b_1\sqrt{d})}{c_1(a_2 + b_2\sqrt{d})} \\
&= \frac{c_2(a_1 + b_1\sqrt{d})(a_2 - b_2\sqrt{d})}{c_1(a_2 + b_2\sqrt{d})(a_2 - b_2\sqrt{d})} \\
&= \frac{c_2a_1a_2 - c_2a_1b_2\sqrt{d} + c_2a_2b_1\sqrt{d} - c_2b_1b_2d}{c_1(a_2^2 - b_2^2 d)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(c_2 a_1 a_2 - c_2 b_1 b_2 d) + (c_2 a_2 b_1 - c_2 a_1 b_2)\sqrt{d}}{c_1(a_2^2 - b_2^2 d)}.$$

Määritelmän 4.2 perusteella osamäärän α_1/α_2 konjugaatti $(\alpha_1/\alpha_2)'$ voidaan nyt esittää yhtälönä

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)' = \frac{(c_2 a_1 a_2 - c_2 b_1 b_2 d) - (c_2 a_2 b_1 - c_2 a_1 b_2)\sqrt{d}}{c_1(a_2^2 - b_2^2 d)}.$$

Konjugaattien osamäärä α_1'/α_2' taas vastaa määritelmän 4.2 mukaan yhtälöä

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'} &= \frac{(a_1 - b_1\sqrt{d})/c_1}{(a_2 - b_2\sqrt{d})/c_2} = \frac{c_2(a_1 - b_1\sqrt{d})(a_2 + b_2\sqrt{d})}{c_1(a_2 - b_2\sqrt{d})(a_2 + b_2\sqrt{d})} \\
&= \frac{c_2 a_1 a_2 + c_2 a_1 b_2\sqrt{d} - c_2 a_2 b_1\sqrt{d} - c_2 b_1 b_2 d}{c_1(a_2^2 - b_2^2 d)} \\
&= \frac{(c_2 a_1 a_2 - c_2 b_1 b_2 d) - (c_2 a_2 b_1 - c_2 a_1 b_2)\sqrt{d}}{c_1(a_2^2 - b_2^2 d)}.
\end{aligned}$$

Koska $(\alpha_1/\alpha_2)' = \alpha_1'/\alpha_2'$, on osamäärää koskeva sääntö tosi. □

Huomautus 4.1 Ks. [5, s. 492-493]. Lähdeteoksen apulauseen 12.4 (vrt. tutkielman lause 4.4) toisen laskusäännön kuuluisi olla $(\alpha_1 - \alpha_2)' = \alpha_1' - \alpha_2'$ eikä $(\alpha_1 + \alpha_2)' = \alpha_1' - \alpha_2'$.

4.2 Jaksollisten ketjumurtolukujen ominaisuuksia

Seuraavassa tutkitaan jaksollisia ketjumurtolukuja sekä erityisesti näiden ketjumurtolukujen ja kvadraattisten irrationaalilukujen välistä yhteyttä.

Määritelmä 4.3 Ääretöntä yksinkertaista ketjumurtolukua $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sanotaan *jaksolliseksi*, jos on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut N ja k, että aina, kun $n \geq N$, niin $a_n = a_{n+k}$. Jaksolliselle ketjumurtoluvulle

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots]$$

käytetään merkintää

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k-1}}].$$

Esimerkki 4.1 Ääretön ketjumurtoluku [7; 5, 4, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 3, 2, …] tarkoittaa jaksollista ketjumurtolukua $[7;5,\overline{4,3,2}]$. Vastaavasti esimerkin 3.1 ääretön ketjumurtoluku [6; 4, 12, 4, 12, 4, 12, …] voidaan kirjoittaa muodossa $[6;\overline{4,12}]$.

Lause 4.6 *Olkoon yksinkertainen jaksollinen ketjumurtoluku muotoa* $[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{N-1},\overline{a_N,a_{N+1},\ldots,a_{N+k}}]$ *ja olkoon sen arvo* α. *Silloin luku* α *on kvadraattinen irrationaaliluku.*

Todistus (vrt. [5, s. 493-494]). Oletuksen perusteella

$$\alpha = [a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{N-1},\overline{a_N,a_{N+1},\ldots,a_{N+k}}].$$

Merkitään, että

$$\beta = [\overline{a_N;a_{N+1},\ldots,a_{N+k}}],$$

mistä seuraa, että

$$\beta = [a_N;a_{N+1},\ldots,a_{N+k},\beta].$$

Näin ollen lauseen 2.1 todistuksen perusteella saadaan yhtälö

$$\beta = \frac{\beta p_k + p_{k-1}}{\beta q_k + q_{k-1}}, \tag{9}$$

missä p_k/q_k ja p_{k-1}/q_{k-1} ovat ketjumurtoluvun $[a_N;a_{N+1},\ldots,a_{N+k}]$ kaksi konvergenttia. Koska lukua β vastaava yksinkertainen ketjumurtoluku on ääretön, on β irrationaaliluku. Lisäksi, koska yhtälö (9) voidaan esittää muodossa

$$q_k\beta^2 + (q_{k-1} - p_k)\beta - p_{k-1} = 0,$$

määritelmän 4.1 perusteella luku β on kvadraattinen irrationaaliluku. Oletuksen ja esitettyjen merkintöjen perusteella tiedetään, että

$$\alpha = [a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{N-1},\beta].$$

Tästä saadaan lauseen 2.1 todistuksen mukaan yhtälö

$$\alpha = \frac{\beta p_{N-1} + p_{N-2}}{\beta q_{N-1} + q_{N-2}},$$

missä p_{N-1}/q_{N-1} ja p_{N-2}/q_{N-2} ovat ketjumurtoluvun $[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{N-1}]$ konvergentteja. Luku α on irrationaaliluku, sillä sen yksinkertainen ketjumurtolukuesitys on ääretön. Lisäksi, koska β on kvadraattinen irrationaaliluku, niin edellä esitetystä yhtälöstä nähdään lauseen 4.2 perusteella, että myös α on kvadraattinen irrationaaliluku. □

Esimerkki 4.2 Olkoon $x=[1;\,1,\overline{1,3}]$. Määritetään kvadraattisen irrationaaliluvun x arvo käyttäen apuna lauseen 4.6 todistusta. Merkitään, että $x=[1;\,1,\,y]$, missä $y=[\overline{1;3}]=[1;\,3,\,y]$. Näin ollen

$$y=1+\frac{1}{3+\frac{1}{y}}=1+\frac{1}{\frac{3y+1}{y}}=1+\frac{y}{3y+1}=\frac{4y+1}{3y+1},$$

mistä saadaan edelleen toisen asteen yhtälö

$$3y^2-3y-1=0.$$

Koska $y>0$, niin toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla saadaan

$$y=\frac{3+\sqrt{9-4\cdot 3\cdot(-1)}}{6}=\frac{3+\sqrt{21}}{6}.$$

Koska $x=[1;\,1,\,y]$, niin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}
x&=1+\frac{1}{1+\frac{1}{y}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3+\sqrt{21}}{6}}}=1+\frac{1}{1+\frac{6}{3+\sqrt{21}}}=1+\frac{1}{\frac{9+\sqrt{21}}{3+\sqrt{21}}}\\
&=1+\frac{3+\sqrt{21}}{9+\sqrt{21}}=1+\frac{(9-\sqrt{21})(3+\sqrt{21})}{9^2-21}=1+\frac{27+9\sqrt{21}-3\sqrt{21}-21}{60}\\
&=1+\frac{6+6\sqrt{21}}{60}=1+\frac{1+\sqrt{21}}{10}=\frac{11+\sqrt{21}}{10}.
\end{aligned}$$

Siis $x=(11+\sqrt{21})/10$.

Lauseen 4.6 todistus antoi keinon määrittää jaksollisia ketjumurtolukuja vastaavat kvadraattiset irrationaaliluvut. Seuraavassa lauseessa esitellään menetelmä, jolla puolestaan määritetään kvadraattisia irrationaalilukuja vastaavat ketjumurtoluvut.

Lause 4.7 *Olkoon α kvadraattinen irrationaaliluku. Lauseen 4.3 nojalla on olemassa sellaiset kokonaisluvut P_0, Q_0 ja d, että luku α voidaan kirjoittaa muodossa*

$$\alpha = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0},$$

missä $Q_0 \neq 0$, $d > 0$, *luku* d *ei ole täydellinen neliö ja* $Q_0 \mid (d - P_0^2)$. *Määritellään rekursiivisesti, että*

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k}, \\
a_k &= \lfloor \alpha_k \rfloor, \\
P_{k+1} &= a_k Q_k - P_k, \\
Q_{k+1} &= \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k},
\end{aligned} \tag{10}$$

kun $k \geq 0$. *Silloin* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Todistus (vrt. [5, s. 495-496]). Todistetaan ensin induktiolla, että luvut P_k ja Q_k ovat kokonaislukuja ja että $Q_k \neq 0$ ja $Q_k \mid (d - P_k^2)$. Tämä väite on lauseen oletusten perusteella selvästi tosi, kun $k = 0$. Oletetaan sitten, että P_k ja Q_k ovat kokonaislukuja ja että $Q_k \neq 0$ ja $Q_k \mid (d - P_k^2)$. Tällöin myös P_{k+1} on kokonaisluku, sillä se voidaan kirjoittaa kokonaislukujen erotuksena muodossa

$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k.$$

Luku Q_{k+1} voidaan kirjoittaa rekursiokaavojen (10) avulla muodossa

$$\begin{aligned}
Q_{k+1} &= \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k} \\
&= \frac{d - (a_k Q_k - P_k)^2}{Q_k} \\
&= \frac{d - a_k^2 Q_k^2 + 2a_k Q_k P_k - P_k^2}{Q_k} \\
&= \frac{d - P_k^2}{Q_k} + (2a_k P_k - a_k^2 Q_k).
\end{aligned}$$

Induktio-oletuksen mukaan $Q_k \mid (d - P_k^2)$. Erotus $2a_k P_k - a_k^2 Q_k$ on puolestaan kokonaisluku. Täten Q_{k+1} on kokonaisluku. Koska luku d ei ole täydellinen neliö, niin $d \neq P_{k+1}^2$. Tästä seuraa, että $Q_{k+1} = (d - P_{k+1}^2)/Q_k \neq 0$. Yhtälön

$$Q_k = \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_{k+1}}$$

perusteella tiedetään, että $Q_{k+1} \mid (d - P_{k+1}^2)$. Väitteen alkuosa on siis todistettu induktiolla.

Todistetaan sitten lausetta 3.3 käyttämällä, että kokonaisluvut $a_0, a_1, a_2, \ldots$ vastaavat luvun α ketjumurtolukukehitelmän $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ termejä. Jos voidaan osoittaa, että

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k},$$

kun $k \geq 0$, niin $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Rekursiokaavojen (10) perusteella saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
\alpha_k - a_k &= \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k} - a_k = \frac{\sqrt{d} - (a_k Q_k - P_k)}{Q_k} \\
&= \frac{\sqrt{d} - P_{k+1}}{Q_k} = \frac{(\sqrt{d} - P_{k+1})(\sqrt{d} + P_{k+1})}{Q_k(\sqrt{d} + P_{k+1})} \\
&= \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k(\sqrt{d} + P_{k+1})} = \frac{Q_k Q_{k+1}}{Q_k(\sqrt{d} + P_{k+1})} \\
&= \frac{Q_{k+1}}{\sqrt{d} + P_{k+1}} = \frac{1}{\alpha_{k+1}}.
\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että $\alpha_{k+1} = 1/(\alpha_k - a_k)$. Näin ollen $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. □

Huomautus 4.2 Ks. [5, s. 495-496]. Lähdeteoksessa lauseen 12.22 induktiotodistuksen (vrt. tutkielman lauseen 4.7 todistus) lopussa ehdon $d \neq P_k^2$ pitäisi olla $d \neq P_{k+1}^2$. Samoin todistettaessa, että $\alpha_{k+1} = 1/(\alpha_k - a_k)$, tulisi yhtälöketjussa olla lausekkeen

$$(\sqrt{d} - P_{k+1})(\sqrt{d} + P_{k+1}) / Q_k(\sqrt{d} + P_{k+1})$$

tilalla olla lauseke

$$(\sqrt{d} - P_{k+1})(\sqrt{d} + P_{k+1}) / (Q_k(\sqrt{d} + P_{k+1})).$$

Esimerkki 4.3 Määritetään kvadraattisen irrationaaliluvun $\alpha = (2 + \sqrt{3})/3$ ketjumurtolukuesitys käyttäen lauseen 4.7 rekursioyhtälöitä. Muodostetaan ensin aloitusarvot P_0, Q_0, d ja a_0. Selvästi $3 - 2^2 = -1$. Luku 3 ei kuitenkaan jaa lukua -1. Laventamalla lukua $\alpha = (2 + \sqrt{3})/3$ saadaan

$$\alpha = \frac{6 + \sqrt{27}}{9}.$$

Nyt $27 - 6^2 = -9$. Selvästi luku 9 jakaa luvun -9. Aloitusarvot ovat siis

$$P_0 = 6,\ Q_0 = 9,\ d = 27 \text{ ja } a_0 = \lfloor \alpha \rfloor = \left\lfloor \frac{6+\sqrt{27}}{9} \right\rfloor = 1.$$

Näiden arvojen ja rekursioyhtälöiden (10) perusteella saadaan

$$P_1 = a_0 \cdot Q_0 - P_0 = 1 \cdot 9 - 6 = 3, \qquad Q_1 = \frac{d - P_1^2}{Q_0} = \frac{27 - 3^2}{9} = 2,$$

$$\alpha_1 = \frac{P_1 + \sqrt{d}}{Q_1} = \frac{3+\sqrt{27}}{2}, \qquad a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{3+\sqrt{27}}{2} \right\rfloor = 4,$$

$$P_2 = a_1 \cdot Q_1 - P_1 = 4 \cdot 2 - 3 = 5, \qquad Q_2 = \frac{d - P_2^2}{Q_1} = \frac{27 - 5^2}{2} = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{P_2 + \sqrt{d}}{Q_2} = 5 + \sqrt{27}, \qquad a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = \lfloor 5 + \sqrt{27} \rfloor = 10,$$

$$P_3 = a_2 \cdot Q_2 - P_2 = 10 \cdot 1 - 5 = 5, \qquad Q_3 = \frac{d - P_3^2}{Q_2} = \frac{27 - 5^2}{1} = 2,$$

$$\alpha_3 = \frac{P_3 + \sqrt{d}}{Q_3} = \frac{5+\sqrt{27}}{2}, \qquad a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = \left\lfloor \frac{5+\sqrt{27}}{2} \right\rfloor = 5,$$

$$P_4 = a_3 \cdot Q_3 - P_3 = 5 \cdot 2 - 5 = 5, \qquad Q_4 = \frac{d - P_4^2}{Q_3} = \frac{27 - 5^2}{2} = 1,$$

$$\alpha_4 = \frac{P_4 + \sqrt{d}}{Q_4} = 5 + \sqrt{27}, \qquad a_4 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = \lfloor 5 + \sqrt{27} \rfloor = 10.$$

Koska $P_4 = P_2$ ja $Q_4 = Q_2$, niin algoritmi alkaa toistaa itseään. Näin ollen

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3} = [1;\ 4,\ 10,\ 5,\ 10,\ 5,\ 10,\ 5,\ \ldots] = [1;\ 4,\ \overline{10,5}].$$

Esimerkissä 4.3 osoittautui, että kvadraattisella irrationaaliluvulla on jaksollinen ketjumurtolukuesitys. Todistetaan nyt, että tämä pitää paikkansa yleisesti.

Lause 4.8 *Olkoon α kvadraattinen irrationaaliluku. Silloin sen yksinkertainen ääretön ketjumurtolukuesitys on jaksollinen.*

Todistus (vrt. [5, s. 497-498]). Lauseen 4.3 mukaan luku α voidaan kirjoittaa muodossa

$$\alpha = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0}.$$

Lisäksi lauseen 4.7 perusteella on voimassa yhtälö $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sekä rekursiokaavat

$$\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k},$$
$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor,$$
$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k,$$
$$Q_{k+1} = \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k},$$

kun $k \geq 0$.

Kun merkitään, että $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, \alpha_k]$, niin lauseen 2.1 todistuksen perusteella luvulle α saadaan yhtälö

$$\alpha = \frac{\alpha_k p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Tällöin luvun α konjugaatille α' on lauseen 4.5 mukaan voimassa yhtälö

$$\alpha' = \frac{\alpha_k' p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha_k' q_{k-1} + q_{k-2}}. \tag{11}$$

Yhtälöstä (11) saadaan edelleen konjugaatille α_k' arvo

$$\alpha_k' = \frac{-q_{k-2}}{q_{k-1}} \left(\frac{\alpha' - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}}{\alpha' - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}} \right).$$

Kun $k \to \infty$, niin $p_{k-2}/q_{k-2} \to \alpha$ ja $p_{k-1}/q_{k-1} \to \alpha$. Tämän seurauksena $\left(\alpha' - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right) \Big/ \left(\alpha' - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right) \to 1$. Näin ollen on olemassa sellainen kokonaisluku N, että $\alpha_k' < 0$, kun $k \geq N$. Koska $\alpha_k > 0$, kun $k > 1$, niin on voimassa

$$\alpha_k - \alpha_k' = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k} - \frac{P_k - \sqrt{d}}{Q_k} = \frac{2\sqrt{d}}{Q_k} > 0.$$

Täten $Q_k > 0$, kun $k \geq N$.

Rekursiokaavojen (10) perusteella nähdään, että $Q_k Q_{k+1} = d - P_{k+1}^2$. Kun $k \geq N$, on siis voimassa epäyhtälö

$$0 < Q_k \leq Q_k Q_{k+1} = d - P_{k+1}^2 \leq d .$$

Kun $k \geq N$, tiedetään myös, että

$$P_{k+1}^2 < d = P_{k+1}^2 + Q_k Q_{k+1} ,$$

minkä perusteella saadaan edelleen epäyhtälö

$$-\sqrt{d} < P_{k+1} < \sqrt{d} .$$

Tarkastellaan ehtoja $0 < Q_k \leq d$ ja $-\sqrt{d} < P_{k+1} < \sqrt{d}$, jotka ovat voimassa, kun $k \geq N$. Tällöin havaitaan, että kokonaislukuparille P_k, Q_k on olemassa vain äärellinen määrä mahdollisia arvoja, kun $k > N$. Toisaalta kokonaislukuindeksejä k , joille on voimassa $k \geq N$, on äärettömän monta. Näin ollen on olemassa myös sellaiset kokonaislukuindeksit i ja j , että $P_i = P_j$ ja $Q_i = Q_j$, kun $i < j$. Rekursiokaavojen (10) mukaan $\alpha_k = (P_k + \sqrt{d})/Q_k$, joten $\alpha_i = (P_i + \sqrt{d})/Q_i = (P_j + \sqrt{d})/Q_j = \alpha_j$. Tämän seurauksena saadaan $a_i = a_j$, $a_{i+1} = a_{j+1}$, $a_{i+2} = a_{j+2}, \ldots$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\alpha &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \ldots] \\ &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \overline{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}}],\end{aligned}$$

joten luvun α yksinkertainen ketjumurtolukuesitys on jaksollinen. □

Huomautus 4.3 Ks. [5, s. 497-498]. Lähdeteoksessa lauseen 12.21 todistuksessa (vrt. tutkielman lauseen 4.8 todistus) on viitattu teoksen lauseisiin 12.20 ja 12.11. Viittaukset pitäisi olla lähdeteoksen lauseisiin 12.22 ja 12.9 (vrt. tutkielman lauseet 4.7 ja 2.1). Samoin todistuksen lopussa epäyhtälön $P_{k+1}^2 \leq d = P_{k+1}^2 - Q_k Q_{k+1}$ tilalla pitäisi olla epäyhtälö $P_{k+1}^2 < d = P_{k+1}^2 + Q_k Q_{k+1}$. Vastaavasti epäyhtälön $0 \leq Q_k \leq d$ tilalla tulisi olla epäyhtälö $0 < Q_k \leq d$.

Lauseissa 4.6 ja 4.8 on osoitettu yksinkertaisten jaksollisten ketjumurtolukujen keskeinen ominaisuus. Yksinkertaiset jaksolliset ketjumurtoluvut vastaavat kvadraattisia irrationaalilukuja ja kvadraattisten irrationaalilukujen yksinkertaiset ketjumurtolukuesitykset ovat jaksollisia.

4.3 Täysin jaksollisten ketjumurtolukujen ominaisuuksia

Tässä pykälässä tutkitaan täysin jaksollisia ketjumurtolukuja. Täysin jaksollisilla ketjumurtoluvuilla jakso alkaa heti ketjumurtolukuesityksen alusta.

Määritelmä 4.4 Yksinkertaista ketjumurtolukua $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sanotaan *täysin jaksolliseksi*, jos on olemassa sellainen kokonaisluku n, että $a_k = a_{n+k}$, kun $k = 0, 1, 2, \ldots$. Tällöin

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [\overline{a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}}].$$

Määritelmä 4.5 Kvadraattista irrationaalilukua α sanotaan *redusoiduksi*, jos $\alpha > 1$ ja $-1 < \alpha' < 0$, missä luku α' on luvun α konjugaatti.

Seuraavissa lauseissa sekä esimerkissä 4.4 tarkastellaan redusoitujen kvadraattisten irrationaalilukujen ja täysin jaksollisten ketjumurtolukujen vastaavuutta.

Lause 4.9 *Olkoon* α *redusoitu kvadraattinen irrationaaliluku. Silloin sen yksinkertainen ääretön ketjumurtolukuesitys on täysin jaksollinen.*

Todistus (vrt. [5, s. 499-500]). Lauseen 3.3 perusteella luvun α ketjumurtolukuesityksen termeille on voimassa yhtälöt

$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor, \qquad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k},$$

kun $k \geq 0$. Lisäksi voidaan merkitä, että $\alpha = \alpha_0$. Täten tiedetään, että

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}} = \alpha_k - a_k.$$

Kun käytetään konjugaatteja α'_k ja α'_{k+1} sekä lausetta 4.5, saadaan edelleen yhtälö

$$\frac{1}{\alpha'_{k+1}} = \alpha'_k - a_k. \tag{12}$$

Todistetaan nyt induktiolla, että $-1 < \alpha'_k < 0$, kun $k \geq 0$. Koska α on redusoitu kvadraattinen irrationaaliluku ja yhtälö $\alpha = \alpha_0$ pätee, niin määritelmän 4.5 perusteella selvästi $-1 < \alpha'_0 < 0$, kun $k = 0$. Oletetaan sitten, että $-1 < \alpha'_k < 0$. Määritelmän 4.5 nojalla $\alpha > 1$, joten erityisesti $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = \lfloor \alpha \rfloor \geq 1$. Täten siis $a_k \geq 1$, kun $k \geq 0$. Tämän ehdon, induktio-oletuksen ja yhtälön (12) perusteella on voimassa

$$\frac{1}{\alpha'_{k+1}} = \alpha'_k - a_k < -1.$$

Näin ollen $-1 < \alpha'_{k+1} < 0$. Induktioperiaatteen mukaan väite on siis tosi.

Yhtälöstä (12) seuraa, että

$$\alpha_k' = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}'}.$$

Koska $-1 < \alpha_k' < 0$, niin edellä esitetyn perusteella on voimassa

$$-1 < a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}'} < 0.$$

Tästä saadaan epäyhtälö

$$-1 - \frac{1}{\alpha_{k+1}'} < a_k < -\frac{1}{\alpha_{k+1}'}.$$

Näin ollen

$$a_k = \left\lfloor -\frac{1}{\alpha_{k+1}'} \right\rfloor.$$

Koska α on kvadraattinen irrationaaliluku, niin tällöin lauseen 4.8 todistuksen perusteella on olemassa sellaiset ei-negatiiviset kokonaislukuindeksit i ja j ($i < j$), että $\alpha_i = \alpha_j$. Tämän seurauksena $-1/\alpha_i' = -1/\alpha_j'$. Koska $a_{i-1} = \lfloor -1/\alpha_i' \rfloor$ ja $a_{j-1} = \lfloor -1/\alpha_j' \rfloor$, niin $a_{i-1} = a_{j-1}$. Yhtälöiden $\alpha_{i-1} = a_{i-1} + 1/\alpha_i$ ja $\alpha_{j-1} = a_{j-1} + 1/\alpha_j$ perusteella tiedetään, että $\alpha_{i-1} = \alpha_{j-1}$. Jatkamalla tätä päättelyä havaitaan, että $\alpha_{i-2} = \alpha_{j-2}$, $\alpha_{i-3} = \alpha_{j-3}, \ldots$ ja että $\alpha_0 = \alpha_{j-i}$.
Tällöin

$$\begin{aligned}\alpha_0 = \alpha &= [a_0; a_1, \ldots, a_{j-i-1}, \alpha_{j-i}] \\ &= [a_0; a_1, \ldots, a_{j-i-1}, \alpha_0] \\ &= [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_{j-i-1}}],\end{aligned}$$

joten luvun α yksinkertainen ääretön ketjumurtolukuesitys on täysin jaksollinen. □

Huomautus 4.4 Ks. [5, s. 499-500]. Lähdeteoksessa lauseen 12.23 todistuksen (vrt. tutkielman lauseen 4.9 todistus) alussa on viitattu teoksen lauseeseen 12.18. Viittaus pitäisi olla lauseeseen 12.15 (vrt. tutkielman lause 3.3). Lisäksi päättelyketjussa tulisi yhtälön $\alpha_0 = \alpha_{j-1}$ tilalla olla yhtälö $\alpha_0 = \alpha_{j-i}$. Samoin yhtälön $\alpha_0 = \alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{j-i-1}, \alpha_{j-1}]$ tilalla tulisi olla yhtälö $\alpha_0 = \alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{j-i-1}, \alpha_{j-i}]$.

Esimerkki 4.4 Tarkastellaan kvadraattista irrationaalilukua $7 + \sqrt{50}$. Selvästi $7 + \sqrt{50} \approx 14{,}071 > 1$. Koska $7 - \sqrt{50} \approx -0{,}071$, niin $-1 < 7 - \sqrt{50} < 0$. Näin ollen luku $7 + \sqrt{50}$ on redusoitu kvadraattinen irrationaaliluku. Lauseen 4.9 perusteella tämän luvun ketjumurtolukuesitys on täysin jaksollinen.

Käyttämällä samaa menetelmää kuin esimerkissä 4.3 saadaan luvulle $7+\sqrt{50}$ ketjumurtolukuesitys $[\overline{14}]$.

Lause 4.10 *Olkoon α kvadraattinen irrationaaliluku. Olkoon lisäksi yksinkertainen täysin jaksollinen ketjumurtoluku muotoa $[\overline{a_0;a_1,a_2,\ldots,a_k}]$ ja olkoon sen arvo α. Silloin luku α on redusoitu kvadraattinen irrationaaliluku.*

Todistus (vrt. [5, s. 500-501] ja [3, s. 92, lauseen 8.1 todistus]). Oletuksen perusteella $\alpha=[\overline{a_0;a_1,a_2,\ldots,a_k}]$. Toisaalta voidaan merkitä, että $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_k,\alpha]$. Tällöin lauseen 2.1 todistuksen perusteella tiedetään, että

$$\alpha=\frac{\alpha p_k+p_{k-1}}{\alpha q_k+q_{k-1}}, \tag{13}$$

missä p_{k-1}/q_{k-1} ja p_k/q_k ovat luvun α ketjumurtolukukehitelmän $(k-1)$. ja k. konvergentti. Yhtälöstä (13) seuraa, että

$$q_k\alpha^2+(q_{k-1}-p_k)\alpha-p_{k-1}=0. \tag{14}$$

Olkoon sitten β sellainen kvadraattinen irrationaaliluku, että $\beta=[\overline{a_k;a_{k-1},\ldots,a_1,a_0}]$. Luvun β ketjumurtolukuesityksessä termit ovat luvun α ketjumurtolukuesitykseen verrattuna käännetyssä järjestyksessä. Merkitään, että $\beta=[a_k;a_{k-1},\ldots,a_1,a_0,\beta]$. Lauseen 2.1 todistuksen avulla saadaan edelleen, että

$$\beta=\frac{\beta p'_k+p'_{k-1}}{\beta q'_k+q'_{k-1}}, \tag{15}$$

missä p'_{k-1}/q'_{k-1} ja p'_k/q'_k ovat luvun β ketjumurtolukuesityksen $(k-1)$. ja k. konvergentti. Lauseiden 2.3 ja 2.4 perusteella tiedetään, että

$$\frac{p_k}{p_{k-1}}=[a_k;a_{k-1},\ldots,a_1,a_0]=\frac{p'_k}{q'_k}$$

ja

$$\frac{q_k}{q_{k-1}}=[a_k;a_{k-1},\ldots,a_2,a_1]=\frac{p'_{k-1}}{q'_{k-1}}.$$

Koska p'_{k-1}/q'_{k-1} ja p'_k/q'_k ovat konvergentteja, ne ovat seurauksen 2.1 perusteella supistetussa muodossa. Lauseen 2.2 perusteella tiedetään, että $p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^{k-1}$. Jos $d=(p_{k-1},p_k)$, niin $d \mid (-1)^{k-1}$. Samoin, jos $d=(q_{k-1},q_k)$, niin $d \mid (-1)^{k-1}$. Kummassakin tapauksessa $d=1$. Täten luvut

p_{k-1} ja p_k ovat keskenään jaottomia samoin kuin luvut q_{k-1} ja q_k. Siis myös luvut p_k / p_{k-1} ja q_k / q_{k-1} ovat supistetussa muodossa. Näin ollen

$$p'_k = p_k\,, \quad q'_k = p_{k-1}$$

ja

$$p'_{k-1} = q_k\,, \quad q'_{k-1} = q_{k-1}\,.$$

Sijoittamalla nämä arvot yhtälöön (15) saadaan

$$\beta = \frac{\beta p_k + q_k}{\beta p_{k-1} + q_{k-1}}\,.$$

Tästä seuraa, että

$$p_{k-1}\beta^2 + (q_{k-1} - p_k)\beta - q_k = 0\,.$$

Jakamalla tämä yhtälö puolittain luvulla $-\beta^2$ saadaan

$$q_k(-1/\beta)^2 + (q_{k-1} - p_k)(-1/\beta) - p_{k-1} = 0\,. \qquad (16)$$

Yhtälöiden (14) ja (16) perusteella havaitaan, että toisen asteen yhtälön

$$q_k x^2 + (q_{k-1} - p_k)x - p_{k-1} = 0$$

kaksi juurta ovat luvut α ja $-1/\beta$. Tällöin lauseen 4.4 perusteella $\alpha' = -1/\beta$.

Luvun α täysin jaksolliselle ketjumurtolukuesitykselle $[\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k}]$ on puhtaan jaksollisuuden vuoksi voimassa $a_0 = a_{k+1}$. Koska $a_{k+1} \geq 1$, niin myös $a_0 \geq 1$. Täten saadaan

$$\begin{aligned}\alpha &= [\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k}] = [a_0; a_1, \ldots, a_k, a_0, \ldots] \\ &= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots]} > a_0 \geq 1.\end{aligned}$$

Näin ollen $\alpha > 1$. Toisaalta myös luvun β ketjumurtolukuesitys on täysin jaksollinen ja sisältää luvun α ketjumurtolukuesityksen termit käännetyssä järjestyksessä. Nyt

$$\begin{aligned}\beta &= [\overline{a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0}] = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0, a_k, \ldots] \\ &= a_k + \frac{1}{[a_{k-1}; a_{k-2}, \ldots]} > a_k \geq 1,\end{aligned}$$

Siis myös $\beta > 1$. Lisäksi, koska $\alpha' = -1/\beta$, niin $-1 < \alpha' = -1/\beta < 0$. Näin ollen luku α on redusoitu kvadraattinen irrationaaliluku. □

Huomautus 4.5 Lauseen 4.10 todistuksesta seuraa, että jos redusoidun kvadraattisen irrationaaliluvun α ketjumurtolukuesitys on muotoa $[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_n}]$, niin luvun $-1/\alpha'$ ketjumurtolukuesitys on muotoa $[\overline{a_n; a_{n-1}, \ldots, a_0}]$.

Huomautus 4.6 Ks. [5, s. 500-501]. Lähdeteoksessa lauseen 12.23 todistuksessa (vrt. tutkielman lauseen 4.10 todistus) on viitattu kahdesti teoksen lauseeseen 12.11. Viittausten tulisi olla lähdeteoksen lauseeseen 12.9 (vrt. tutkielman lause 2.1). Lisäksi viittaus lauseeseen 12.12 tulisi olla viittaus teoksen lauseeseen 12.10 (vrt. tutkielman lause 2.2).

4.4 Luvun $\sqrt{d}$ jaksollinen ketjumurtolukuesitys

Seuraavaksi tarkastellaan luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesitystä soveltamalla edellisessä pykälässä esitettyjä tuloksia. Oletetaan, että luku d on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole täydellinen neliö.

Tutkitaan ensin lukua $\lfloor\sqrt{d}\rfloor + \sqrt{d}$ ja sen ketjumurtolukuesitystä. Luku $\lfloor\sqrt{d}\rfloor + \sqrt{d}$ on redusoitu kvadraattinen irrationaaliluku, sillä $\lfloor\sqrt{d}\rfloor + \sqrt{d} > 1$ ja $-1 < \lfloor\sqrt{d}\rfloor - \sqrt{d} < 0$, missä $\lfloor\sqrt{d}\rfloor - \sqrt{d}$ on luvun $\lfloor\sqrt{d}\rfloor + \sqrt{d}$ konjugaatti. Lauseen 4.9 mukaan luvulla $\lfloor\sqrt{d}\rfloor + \sqrt{d}$ on tällöin täysin jaksollinen ketjumurtolukuesitys. Tämän ketjumurtolukuesityksen ensimmäinen termi on $\lfloor\lfloor\sqrt{d}\rfloor + \sqrt{d}\rfloor = 2\lfloor\sqrt{d}\rfloor = 2a_0$, missä $a_0 = \lfloor\sqrt{d}\rfloor$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\lfloor\sqrt{d}\rfloor + \sqrt{d} &= [\overline{2a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n}] \\
&= [2a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots] \\
&= 2a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]}.
\end{aligned}$$

Vähentämällä edellä esitetystä yhtälöstä puolittain luku a_0 saadaan

$$\begin{aligned}
\sqrt{d} &= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]} \\
&= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0, \ldots] \\
&= [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0}].
\end{aligned}$$

Tutkitaan vielä luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesityksen osanimittäjien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ominaisuuksia tarkastelemalla luvun $-1/\left(\lfloor\sqrt{d}\rfloor - \sqrt{d}\right)$ ketjumurtolukuesitystä. Huomautuksen 4.5 perusteella luvun $-1/\left(\lfloor\sqrt{d}\rfloor - \sqrt{d}\right)$ ketjumurtolukuesitys saadaan luvun $\lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d}$ ketjumurtolukuesityksestä kääntämällä jälkimmäisen esityksen termit päinvastaiseen järjestykseen. Tällöin siis

$$\begin{aligned} -1/\left(\lfloor \sqrt{d} \rfloor - \sqrt{d}\right) &= 1/\left(\sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor\right) \\ &= [\overline{a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1, 2a_0}]\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Toisaalta, koska

$$\begin{aligned} \sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor &= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, \ldots, a_n, 2a_0, \ldots]} - a_0 \\ &= 0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, \ldots, a_n, 2a_0, \ldots]} \\ &= [0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0}]\,, \end{aligned}$$

niin luvun $\sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor$ käänteisluvulle $1/\left(\sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor\right)$ on voimassa yhtälö

$$1/\left(\sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor\right) = [\overline{a_1; a_2, \ldots, a_n, 2a_0}]\,. \tag{18}$$

Vertailemalla yhtälöitä (17) ja (18) havaitaan, että

$$a_1 = a_n, a_2 = a_{n-1}, \ldots, a_n = a_1\,.$$

Tämän perusteella luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesitys saadaan nyt muotoon

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}]\,.$$

Luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesityksen jaksollinen osuus on siis jakson ensimmäisestä termistä toiseksi viimeiseen termiin asti symmetrinen. Lisäksi jakson viimeinen termi on kaksi kertaa niin suuri kuin ketjumurtolukuesityksen ensimmäinen termi. (Vrt. [5, s. 501-502].)

Luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesitys voidaan muodostaa mm. käyttäen lauseen 3.3 rekursioyhtälöitä, kuten esimerkissä 3.1. Näitä ketjumurtolukuesityksiä löytyy myös valmiiksi taulukoituna kirjallisuudesta (ks. esim. [5, s. 616, taulukko E.5]).

Esimerkki 4.5 Lukujen $\sqrt{77}$ ja $\sqrt{82}$ ketjumurtolukuesitykset ovat

$$\sqrt{77} = [8; \overline{1,3,2,3,1,16}]$$

ja

$$\sqrt{82} = [9; \overline{18}]\,.$$

Ensimmäisen esityksen jakson pituus on 6. Jakson alkuosa on symmetrinen jakson ensimmäisestä termistä toiseksi viimeiseen termiin asti. Jakson viimeinen termi on suuruudeltaan kaksinkertainen verrattuna esityksen ensimmäiseen termiin. Toisen esityksen jakson pituus on 1, ja jakson symmetrinen alkuosa puuttuu. Myös nyt jakson viimeinen (ja ainoa) termi on kaksi kertaa niin suuri kuin esityksen ensimmäinen termi. (Ks. [5, s. 616, taulukko E.5].)

5 Pellin yhtälö

Pellin yhtälöksi kutsutaan Diofantoksen yhtälöä muotoa $x^2 - dy^2 = 1$, missä luku d on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole täydellinen neliö. Nimensä mukaisesti tälle yhtälölle etsitään kokonaislukuratkaisuja. Yhtälön triviaalinen kokonaislukuratkaisu on $x = 1$, $y = 0$. Tässä luvussa keskitytään kuitenkin etsimään tästä triviaalista poikkeavia positiivisia kokonaislukuratkaisuja x, y. Luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesityksellä on keskeinen sija näiden ratkaisujen muodostamisessa.

Tässä luvussa oletetaan, että luku d on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole täydellinen neliö.

5.1 Konvergentit ja Pellin yhtälö

Pykälässä 4.4 käsiteltiin luvun $\sqrt{d}$ jaksollista ketjumurtolukuesitystä. Kahdessa seuraavassa lauseessa tutkitaan, mikä merkitys on luvun $\sqrt{d}$ jaksollisen ketjumurtolukuesityksen konvergenteilla Pellin yhtälöä ratkaistaessa.

Lause 5.1 *Olkoon* p, q *Pellin yhtälön* $x^2 - dy^2 = 1$ *positiivinen kokonaislukuratkaisu. Silloin* p/q *on luvun* $\sqrt{d}$ *ketjumurtolukuesityksen konvergentti.*

Todistus (vrt. [1, s. 312]). Oletuksen perusteella tiedetään, että $p^2 - dq^2 = 1$. Tästä saadaan edelleen yhtälö

$$(p - q\sqrt{d})(p + q\sqrt{d}) = 1,$$

missä $p - q\sqrt{d} > 0$. Tällöin tiedetään, että $p > q\sqrt{d} > q$ ja että

$$\frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q(p + q\sqrt{d})}.$$

Koska

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q(p+q\sqrt{d})} < \frac{\sqrt{d}}{q(p+q\sqrt{d})} < \frac{\sqrt{d}}{q(q\sqrt{d}+q\sqrt{d})} = \frac{\sqrt{d}}{2q^2\sqrt{d}} = \frac{1}{2q^2},$$

niin lauseen 3.7 perusteella p/q on luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesityksen konvergentti. □

Lause 5.2 *Olkoon* p/q *luvun* $\sqrt{d}$ *ketjumurtolukuesityksen konvergentti. Silloin* $x = p, y = q$ *on yhden muotoa*

$$x^2 - dy^2 = k,$$

missä $|k| < 1 + 2\sqrt{d}$ *, olevan yhtälön ratkaisu.*

Todistus (vrt. [1, s. 312-313]). Koska p/q on luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesityksen konvergentti, niin lauseen 3.5 todistuksen perusteella on voimassa epäyhtälö

$$\left|\sqrt{d} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Tästä seuraa, että

$$\left|p - q\sqrt{d}\right| < \frac{1}{q}. \tag{19}$$

Käyttämällä kolmioepäyhtälöä ja epäyhtälöä (19) saadaan

$$\begin{aligned} \left|p + q\sqrt{d}\right| &= \left|(p - q\sqrt{d}) + 2q\sqrt{d}\right| \\ &\le \left|p - q\sqrt{d}\right| + \left|2q\sqrt{d}\right| \\ &< \frac{1}{q} + 2q\sqrt{d} \le (1 + 2\sqrt{d})q. \end{aligned} \tag{20}$$

Yhdistämällä edellä esitetyt epäyhtälöt (19) ja (20) saadaan

$$\begin{aligned} \left|p^2 - dq^2\right| &= \left|p - q\sqrt{d}\right|\left|p + q\sqrt{d}\right| \\ &< \frac{1}{q}(1 + 2\sqrt{d})q \\ &= 1 + 2\sqrt{d}. \end{aligned}$$

Väite seuraa tästä. □

Huomautus 5.1 Ks. [1, s. 312-313]. Lähdeteoksessa lauseen 14.11 todistuksessa (vrt. tutkielman lauseen 5.2 todistus) pitäisi epäyhtälöketjun

$$\begin{aligned}\left|p+q\sqrt{d}\right| &= \left|(p-q\sqrt{d})+2q\sqrt{d}\right| \\ &\leq \left|p-q\sqrt{d}\right| + \left|2q\sqrt{d}\right| \\ &< \frac{1}{q} + 2q\sqrt{d} < (1+2\sqrt{d})q\end{aligned}$$

tilalla olla epäyhtälöketju

$$\begin{aligned}\left|p+q\sqrt{d}\right| &= \left|(p-q\sqrt{d})+2q\sqrt{d}\right| \\ &\leq \left|p-q\sqrt{d}\right| + \left|2q\sqrt{d}\right| \\ &< \frac{1}{q} + 2q\sqrt{d} \leq (1+2\sqrt{d})q\,.\end{aligned}$$

5.2 Pellin yhtälön ratkaiseminen: perusratkaisu ja kaikki ratkaisut

Edellisessä pykälässä havaittiin, että Pellin yhtälön positiiviset kokonaislukuratkaisut ovat luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesityksen konvergentteja. Tässä pykälässä tarkastellaan, kuinka Pellin yhtälön ratkaisut voidaan kehittää.

Esitetään aluksi perusratkaisun määritelmä sekä apulause, jota tarvitaan Pellin yhtälön positiivisia ratkaisuja koskevan lauseen 5.3 todistamisessa.

Määritelmä 5.1 Pellin yhtälön *perusratkaisulla* tarkoitetaan yhtälön $x^2 - dy^2 = 1$ pienintä positiivista ratkaisua, ts. sellaista positiivista ratkaisua x_0, y_0, että $x_0 < x', y_0 < y'$ kaikilla muilla positiivisilla ratkaisuilla x', y'.

Apulause 5.1 *Olkoon p_k/q_k luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesityksen k. konvergentti. Jos n on tämän ketjumurtolukuesityksen jakson pituus, niin silloin on voimassa yhtälö*

$$p_{kn-1}^2 - dq_{kn-1}^2 = (-1)^{kn} \quad (k = 1,2,3,\ldots).$$

Todistus (vrt. [1, s. 314-315]). Kun $k \geq 1$, niin luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesitys voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sqrt{d} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{kn-1}, \alpha_{kn}],$$

missä

$$\begin{aligned}\alpha_{kn} &= [2a_0;\overline{a_1,\ldots,a_{n-1},2a_0}] \\ &= a_0+\sqrt{d}\ .\end{aligned}$$

Lauseen 2.1 todistuksen perusteella tiedetään, että

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha_{kn}p_{kn-1}+p_{kn-2}}{\alpha_{kn}q_{kn-1}+q_{kn-2}}\ .$$

Sijoittamalla $\alpha_{kn} = a_0+\sqrt{d}$ edellä esitettyyn yhtälöön saadaan

$$\sqrt{d} = \frac{(a_0+\sqrt{d})p_{kn-1}+p_{kn-2}}{(a_0+\sqrt{d})q_{kn-1}+q_{kn-2}},$$

joka sievenee edelleen muotoon

$$\sqrt{d}(a_0q_{kn-1}+q_{kn-2}-p_{kn-1}) = a_0p_{kn-1}+p_{kn-2}-dq_{kn-1}\,.$$

Koska luku $\sqrt{d}$ on irrationaalinen ja yhtälön oikea puoli taas rationaalinen, niin tällöin on voimassa

$$\begin{aligned}a_0q_{kn-1}+q_{kn-2} &= p_{kn-1}\,, \\ a_0p_{kn-1}+p_{kn-2} &= dq_{kn-1}\,.\end{aligned}$$

Kertomalla ensimmäinen yhtälö luvulla p_{kn-1} ja toinen luvulla $-q_{kn-1}$ ja laskemalla näin saadut yhtälöt yhteen saadaan

$$p_{kn-1}^2-dq_{kn-1}^2 = p_{kn-1}q_{kn-2}-q_{kn-1}p_{kn-2}\,.$$

Soveltamalla tähän yhtälöön lauseen 2.2 tulosta saadaan vaiheittain

$$\begin{aligned}p_{kn-1}^2-dq_{kn-1}^2 &= p_{kn-1}q_{kn-2}-p_{kn-2}q_{kn-1} \\ &= (-1)^{kn-2} \\ &= (-1)^{kn}\,.\end{aligned}$$

Väite on siis tosi. □

Sekä luvun $\sqrt{d}$ jaksollisen ketjumurtolukuesityksen konvergenteilla että tämän ketjumurtolukuesityksen jakson pituudella on tärkeä asema Pellin yhtälön positiivisia ratkaisuja muodostettaessa.

Lause 5.3 *Olkoon* p_k/q_k *luvun* $\sqrt{d}$ *ketjumurtolukuesityksen k. konvergentti ja olkoon* n *on tämän ketjumurtolukuesityksen jakson pituus.*

(i) *Jos n on parillinen kokonaisluku, niin Pellin yhtälön $x^2 - dy^2 = 1$ kaikki positiiviset ratkaisut ovat*

$$x = p_{kn-1}, \quad y = q_{kn-1} \quad (k = 1,2,3,\dots).$$

(ii) *Jos n on pariton kokonaisluku, niin Pellin yhtälön $x^2 - dy^2 = 1$ kaikki positiiviset ratkaisut ovat*

$$x = p_{2kn-1}, \quad y = q_{2kn-1} \quad (k = 1,2,3,\dots).$$

Todistus (vrt. [1, s. 315-316]). Lauseen 5.1 perusteella tiedetään, että mikä tahansa yhtälön $x^2 - dy^2 = 1$ positiivinen ratkaisu x_0, y_0 on muotoa $x_0 = p_k, y_0 = q_k$, missä p_k / q_k on luvun $\sqrt{d}$ ketjumurtolukuesityksen konvergentti.

Kun huomioidaan apulause 5.1, havaitaan, että $x = p_{kn-1}, y = q_{kn-1}$ on Pellin yhtälön ratkaisu, jos ja vain jos $(-1)^{kn} = 1$. Kun n on parillinen kokonaisluku, niin tämä ehto toteutuu kaikilla luvun k positiivisilla kokonaislukuarvoilla. Tällöin Pellin yhtälön kaikki positiiviset ratkaisut ovat siis $x = p_{kn-1}, y = q_{kn-1}$ ($k = 1,2,3,\dots$). Kun n on pariton kokonaisluku, niin kyseinen ehto toteutuu, jos ja vain jos k on parillinen kokonaisluku. Tällöin Pellin yhtälön kaikki positiiviset ratkaisut ovat $x = p_{2kn-1}, y = q_{2kn-1}$ ($k = 1,2,3,\dots$). □

Esimerkki 5.1 Tarkastellaan Pellin yhtälöä $x^2 - 28y^2 = 1$. Lauseessa 3.3 esitettyjen rekursiokaavojen avulla luvun $\sqrt{28}$ ketjumurtolukuesitykseksi saadaan $[5; \overline{3,2,3,10}]$. Koska esityksen jakson pituus on 4, yhtälön $x^2 - 28y^2 = 1$ positiiviset ratkaisut ovat lauseen 5.3 perusteella muotoa $x = p_{4k-1}, y = q_{4k-1}$ ($k = 1,2,3,\dots$). Perusratkaisu eli pienin positiivinen ratkaisu on $x_1 = p_3, y_1 = q_3$. Rekursioyhtälöiden (3) perusteella saadaan, että $p_3 = 127$ ja $q_3 = 24$, joten perusratkaisu on $x_1 = 127, y_1 = 24$.

Esimerkki 5.2 Tarkastellaan Pellin yhtälöä $x^2 - 10y^2 = 1$. Lauseessa 3.3 esitettyjen rekursiokaavojen avulla luvun $\sqrt{10}$ ketjumurtolukuesitykseksi saadaan $[3; \overline{6}]$. Koska esityksen jakson pituus on 1, yhtälön $x^2 - 10y^2 = 1$ positiiviset ratkaisut ovat lauseen 5.3 perusteella muotoa $x = p_{2k-1}, y = q_{2k-1}$ ($k = 1,2,3,\dots$). Perusratkaisu eli pienin positiivinen ratkaisu on $x_1 = p_1, y_1 = q_1$. Rekursioyhtälöiden (3) perusteella saadaan, että $p_1 = 19$ ja $q_1 = 6$, joten perusratkaisu on $x_1 = 19, y_1 = 6$.

Esitetään vielä, kuinka Pellin yhtälön kaikki positiiviset ratkaisut muodostetaan.

Lause 5.4 *Olkoon* x_1, y_1 *Pellin yhtälön* $x^2 - dy^2 = 1$ *perusratkaisu. Silloin kaikki positiiviset ratkaisut* x_k, y_k *saadaan yhtälöllä*

$$x_k + y_k\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Todistus (vrt. [5, s. 543-545] ja [1, s. 318-319]). Osoitetaan ensin, että x_k, y_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) on ratkaisu. Lauseen 4.5 perusteella tiedetään, että potenssin konjugaatti on konjugaatin potenssi. Näin ollen

$$[(x_1 + y_1\sqrt{d})^k]' = [(x_1 + y_1\sqrt{d})']^k = (x_1 - y_1\sqrt{d})^k.$$

Tällöin siis pätee

$$x_k - y_k\sqrt{d} = (x_k + y_k\sqrt{d})' = [(x_1 + y_1\sqrt{d})^k]' = [(x_1 + y_1\sqrt{d})']^k = (x_1 - y_1\sqrt{d})^k.$$

Koska x_1, y_1 on yhtälön $x^2 - dy^2 = 1$ ratkaisu, saadaan

$$\begin{aligned} x_k^2 - dy_k^2 &= (x_k + y_k\sqrt{d})(x_k - y_k\sqrt{d}) \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{d})^k (x_1 - y_1\sqrt{d})^k \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)^k \\ &= 1^k = 1. \end{aligned}$$

Edellä esitetyn perusteella x_k, y_k on ratkaisu.

Osoitetaan sitten, että jokainen positiivinen ratkaisu on muotoa x_k, y_k jollakin luvun k positiivisella kokonaislukuarvolla. Tehdään vastaoletus, että X, Y on positiivinen ratkaisu, joka ei ole muotoa x_k, y_k. Koska $x_1 + y_1\sqrt{d} > 1$, niin luvun $x_1 + y_1\sqrt{d}$ potenssin arvot kasvavat mielivaltaisen suuriksi. Näin ollen on olemassa sellainen kokonaisluku n, että

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n < X + Y\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1}.$$

Kertomalla tämä epäyhtälö luvulla $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n}$ saadaan

$$1 < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n}(X + Y\sqrt{d}) < x_1 + y_1\sqrt{d}.$$

Yhtälöstä $x_1^2 - dy_1^2 = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) = 1$ seuraa, että $x_1 - y_1\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-1}$. Näin ollen $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n} = [(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-1}]^n$ $= (x_1 - y_1\sqrt{d})^n$, jolloin edellä esitetty epäyhtälö saadaan muotoon

$$1 < (x_1 - y_1\sqrt{d})^n (X + Y\sqrt{d}) < x_1 + y_1\sqrt{d}\ .$$

Olkoon sitten

$$s + t\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n (X + Y\sqrt{d})\,.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} s^2 - dt^2 &= (s - t\sqrt{d})(s + t\sqrt{d}) \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{d})^n (X - Y\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^n (X + Y\sqrt{d}) \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)^n (X^2 - dY^2) \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Nyt siis s, t on yhtälön $x^2 - dy^2 = 1$ ratkaisu. Lisäksi tiedetään, että $1 < (x_1 - y_1\sqrt{d})^n (X + Y\sqrt{d}) = s + t\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$. Koska $s + t\sqrt{d} > 1$, niin $0 < (s + t\sqrt{d})^{-1} = s - t\sqrt{d} < 1$. Tästä seuraa, että

$$s = \frac{1}{2}\left[(s + t\sqrt{d}) + (s - t\sqrt{d})\right] > 0$$

ja

$$t = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[(s + t\sqrt{d}) - (s - t\sqrt{d})\right] > 0\,.$$

Täten s, t on positiivinen ratkaisu. Koska x_1, y_1 on pienin positiivinen ratkaisu, niin $s \geq x_1$ ja $t \geq y_1$. Tästä seuraa kuitenkin ristiriita epäyhtälön $s + t\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ kanssa. Siis vastaoletus on väärin ja väite oikein. Näin ollen ratkaisun X, Y täytyy olla muotoa x_k, y_k jollakin luvun k positiivisella kokonaislukuarvolla. □

Esimerkki 5.3 Etsitään Pellin yhtälön $x^2 - 10y^2 = 1$ kolme pienintä positiivista ratkaisua. Esimerkin 5.2 perusteella tiedetään, että pienin positiivinen ratkaisu on $x_1 = 19, y_1 = 6$. Soveltamalla lausetta 5.4 saadaan kaksi muuta positiivista ratkaisua. Tällöin siis

$$\begin{aligned} x_2 + y_2\sqrt{10} &= (19 + 6\sqrt{10})^2 \\ &= 721 + 228\sqrt{10}\ , \end{aligned}$$

joten $x_2 = 721, y_2 = 228$. Vastaavasti

$$\begin{aligned} x_3 + y_3\sqrt{10} &= (19 + 6\sqrt{10})^3 \\ &= 27379 + 8658\sqrt{10}\ , \end{aligned}$$

joten $x_3 = 27379, y_3 = 8658$.

Kirjallisuus

[1] Burton, David M.: Elementary Number Theory, Third Edition. WCB/McGraw-Hill, 1997.

[2] Khinchin, A. Ya.: Continued Fractions, Third Edition. Dover Publications, Inc., New York 1997.

[3] Kurittu, Lassi.: Ketjumurtoluvut, luentomoniste [Verkkodokumentti]. Jyväskylän yliopisto, 2006 [Viitattu 26.3.2007]. URL http://www.math.jyu.fi/~lkurittu/ketjumurtoluvut.pdf

[4] Long, Calvin T.: Elementary Introduction to Number Theory, Third Edition. Prentice-Hall, Inc., New Jersey 1987.

[5] Rosen, Kenneth H.: Elementary Number Theory and Its Applications, Fifth Edition. Addison-Wesley, 2005.