JORMA JOUTSENLAHTI

Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä

1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä

■

AKATEEMINEN VÄITÖSKIRJA
Esitetään Tampereen yliopiston
kasvatustieteiden tiedekunnan suostumuksella
julkisesti tarkastettavaksi Tampereen yliopiston
opettajankoulutuslaitoksen auditoriossa,
Erottajakatu 12, Hämeenlinna.
lauantaina 5. päivänä helmikuuta 2005 klo 12.

English abstract

Acta Universitatis Tamperensis 1061

AKATEEMINEN VÄITÖSKIRJA
Tampereen yliopisto
Opettajankoulutuslaitos

Myynti
Tiedekirjakauppa TAJU
PL 617
33014 Tampereen yliopisto

Puh. (03) 215 6055
Fax (03) 215 7685
taju@uta.fi
www.uta.fi/taju
http://granum.uta.fi

Kannen suunnittelu
Juha Siro

Painettu väitöskirja
Acta Universitatis Tamperensis 1061
ISBN 951-44-6203-3
ISSN 1455-1616

Sähköinen väitöskirja
Acta Electronica Universitatis Tamperensis 411
ISBN 951-44-6204-1
ISSN 1456-954X
http://acta.uta.fi

Tampereen Yliopistopaino Oy – Juvenes Print
Tampere 2005

Esipuhe

Perinteisen suomalaisen sananparren mukaan ”*Hiljaa hyvä tulee, ajatellen aivan kaunis*”. Kyseinen sananparsi on lohduttanut tämän työn tekijää, kun tutkimuksen valmistuminen on siirtynyt syystä tai toisesta suunnittelemastani aikataulusta. En osaa itse arvioida tuliko työstä ´hyvä´ tai ´aivan kaunis´. Toivon kuitenkin, että oma noin 15 vuoden matematiikan opettajan kokemus sekä peruskoulussa että lukiossa on tuonut mukaan tutkimukseen niitä opettajan työn 'hiljaisen tiedon' elementtejä, jotka tekevät työni tulokset uskottaviksi nuorten parissa opetus- ja tutkimustyötä harjoittaville lukijoille.

Tutkimukseni on jatkoa lisensiaatintyölleni. Sekä lisensiaatintyössäni että väitöskirjatyöni alkuvaiheessa minua ohjasi asiantuntevasti ja kannustavasti professori emeritus Jarkko Leino. Tämän johdosta haluan osoittaa hänelle mitä lämpimimmät kiitokset.

Työni valmistumiseen vaikutti enemmän kuin arvaakaan ohjaajani koulutusjohtaja, filosofian tohtori Harry Silfverberg, jonka huolellinen paneutuminen työhöni sekä asiantunteva ohjaus asettivat minut pohtimaan tekemiäni ratkaisuja työssäni. Ohjaajan rakentava kritiikki ja kannustus ovat tärkeimpiä tekijöitä väitöskirjatyön loppuunsaattamisessa. Näistä haluan häntä erityisen lämpimästi kiittää!

Työni esitarkastajat professori Erkki Pehkonen ja dosentti Pekka Kupari tekivät asiantuntevia ja yksityiskohtaisia tutkimukseeni kohdistuvia parannusehdotuksia, joiden johdosta osoitan heille lämpimät kiitokseni. Tässä yhteydessä haluan kiittää myös valtakunnallista matematiikan, fysiikan ja kemian tutkijakoulua, jossa olen saanut esitellä tutkimustani ja keskustella tutkijakollegojen kanssa siihen liittyvistä ratkaisuistani.

Tärkeä tekijä työni valmistumisessa on ollut kollegojeni tuki molemmissa työyhteisöissäni: Tervakosken lukiossa ja Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksessa Hämeenlinnassa. Lukuisat keskustelut työtovereiden kanssa tutkimusaiheestani ovat tuoneet minulle uusia näkökulmia ja siten osaltaan parantaneet työtäni. Mainitsematta ketään teistä erityisesti haluan osoittaa sydämelliset kiitokset tuestanne. Kiitän lämpimästi työtoveriani ja edeltäjääni nykyisessä virassani dosentti Sinikka Lindgreniä lukuisista keskusteluista matematiikan didaktiikan saralta ja saamistani asiantuntevista sekä kannustavista kommenteista työni eri vaiheissa. Erikoistutkija Simo K. Kivelä antoi korvaamatonta apua LaTeX-ongelmiini ja yliopiston lehtori (ma) Jorma Vainionpää konsultoi minua tilastojen käsittelyssä. Tästä osoitan heille kiitokset! Tärkeän osan työstä muodostavat kielenhuolto ja kieliasun tarkistaminen. Näistä kiitän lämpimästi dosentti Marja-Liisa Pynnöstä ja filosofian maisteri Jorma Viitasta, jotka paneutuivat työhöni asiantuntevasti ja perusteellisesti.

Työni valmistumiseen on oleellisesti vaikuttanut myös saamani taloudellinen tuki. Kiitän tässä yhteydessä saamistani apurahoista Suomen Kulttuurirahaston Hämeen rahastoa ja Tampereen Yliopiston Tukisäätiön Ammattikasvatuksen rahastoa.

Jos tutkimustyö on koettelemus tekijälleen, niin on se vähintäänkin yhtä suuri piina tutkijan läheisille. Perheeni on myötäelänyt väitöskirjatyön eri vaiheet ja ollut aina tukenani uskoen työn valmistumiseen. Suurimmassa kiitollisuudenvelassa olen puolisolleni Helenalle, joka on joutunut kantamaan suurta vastuuta perheen jokapäiväisestä elämästä isän ollessa linnoittautuneena tietokoneen viereen. Poikani Mikko on ollut lukiolaisena hyvä opponentti pitkän matematiikan opiskelijoiden näkökulman arvioinnissa. Tyttäreni Marjukka on osoittanut kiinnostusta isänsä työhön ja esittänyt mielenkiintoisia kommentteja. Lämpimät kiitokset perheelleni! Omistan työni perheelleni ja vanhemmilleni. Edesmenneellä isälläni lehtori Esa Joutsenlahdella on ollut suurin vaikutus kehittyessäni opettajaksi.

Tervakoskella 18.12.2004

Jorma Joutsenlahti

Tiivistelmä

Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä

Tutkimuksen teoreettisen viitekehyksen keskeisin käsite on matemaattinen ajattelu, jolle ei ole ainedidaktisessa kirjallisuudessa vakiintunutta kuvausta. Työssä tarkastellaan erilaisia lähestymistapoja matemaattisen ajattelun käsitteeseen: yksilön kykyrakenne, kulttuuriympäristö, yksilön uskomukset, matematiikan rakenteiden opettaminen, matematiikan ymmärtäminen, ongelmanratkaisu ja informaation prosessointi. Matemaattinen ajattelu kuvataan tutkimuksessa metakognitioiden ohjaamana informaation prosessointina, joka ymmärretään konnektionismin mukaisina aivon toimintoina. Yksilön uskomukset vaikuttavat ratkaisevasti ajatteluprosessien ohjaukseen metakognitioiden kautta. Yksilön matemaattinen tieto kuvataan proseduraalisena, konseptuaalisena tai strategiatietona. Näiden tiedon lajien avulla kuvataan taidon ja ymmärtämisen käsitteet matematiikassa. Asenteet ja tunnetilat kuuluvat osana uskomuksia, joita tässä työssä käsitellään yksilön matematiikkakuvan kautta.

Tutkimuksen empiirisessä osassa tarkastellaan pitkän matematiikan opiskelijan matemaattista ajattelua kolmesta eri näkökulmasta: yhteiskunnan, opettajan ja opiskelijan. Pääongelmana on pitkän matematiikan opiskelijan tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun kuvaaminen, johon etsitään vastausta kolmesta mainitusta näkökulmasta arvioimalla ja kuvaamalla opiskelijan matemaattista osaamista sekä matematiikkakuvaa. Alaongelmina tarkastellaan opiskelijoiden matemaattista osaamista ja matematiikkakuvaa eri sukupuolten, eri opetussuunnitelmien mukaan opiskelleiden ja pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittaneiden ryhmissä.

Yhteiskunnan näkökulmassa tarkastellaan pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksia ja niiden tuloksia sekä valtakunnallisten opetussuunnitelmien perusteissa asetettujen tavoitteita. Opettajan näkökulma tuo koulun tasolla tapahtuvan arvioinnin yhdessä lukiossa. Opiskelijan näkökulmassa tulee esille opiskelijan matematiikkakuva, joka sisältää hänen uskomuksensa matematiikasta, itsestään matematiikan oppijana ja taitajana, matematiikan opetuksesta sekä oppimisesta.

Empiirinen aineisto muodostuu 1990-luvun keväiden (paitsi 1994) pitkän (laajan) matematiikan kirjoittaneiden ylioppilaskokeista (n=89804), Tervakosken lukion pitkän (laajan) matematiikan opiskelijoiden (n=103) suorituksista 1990-luvulla sekä haastatteluista (n=6) ja kahdeksan lukion pitkän matematiikan opiskelijoille (n=384) tehdystä uskomuskyselystä vuonna 1999. Tutkimusmenetelmänä ylioppilaskokeiden tuloksien ja koulussa tehtyjen arviointien suhteen käytettiin regressioanalyysin pohjalta muodostettua nelikenttää. Matematiikkakuvaa tutkittiin frekvenssi- ja faktorianalyysin avulla sekä nelikentän avulla.

Nelikentästä erottuivat tunnusmerkilliset ryhmät: ”Menestyjät”, ”Kypsyjät”, ”Suoriutujat” ja sen alaryhmänä ”Luovuttajat” sekä ”Pettyjät”. Opiskelijan matemaattista ajattelua on tarkasteltu viiden matemaattisen osaamisen piirteen kautta: käsitteellinen ymmärtäminen, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely, proseduraalinen sujuvuus ja matematiikkakuva. Nelikentän ryhmiin kuuluvien opiskelijoiden matemaattista ajattelua voi kuvata kolmessa kategoriassa: sisältörajoittunut, laaja-alainen ja suppea matemaattinen ajattelu. Pitkän matematiikan kursseissa tarkoin rajatulla sisältöalueella hyvin menestyneet, mutta matematiikan ylioppilaskirjoituksissa heikosti menestyvät muodostivat ryhmän ”Pettyjät” ja heidän matemaattista ajatteluaan voidaan kuvata sisältörajoittuneeksi. Alaryhmä ”Luovuttajat” on pääosin syntynyt vuoden 1996 ylioppilaskirjoitusuudistuksen jälkeen, jossa pitkän matematiikan kirjoittaminen tuli vapaaehtoiseksi. Pitkän matematiikan pakollisena kirjoittavien ja ylimääräisenä kirjoittavien erot tehtäväorientoituneessa matemaattisessa ajattelussa ovat merkittävät kaikkien kolmen näkökulman kannalta. Uskomustutkimusten pitkittäistarkastelussa tuli esille opiskelijoiden pitkäjänteisyyden väheneminen pitkän matematiikan opiskelussa.
Avainsanat: Matemaattinen ajattelu, matemaattinen osaaminen, pitkä matematiikka, lukio, matematiikkakuva

Abstract

Characteristics of task–oriented mathematical thinking among students in upper–secondary school

The most important and perhaps the most difficult concept in the theoretical framework of the study is ´mathematical thinking´, which is defined in many different ways in the literature. The study examines approaches to the concept of mathematical thinking. The approaches are students´ beliefs, students' mathematical abilities, the anthropological perspective, problem solving and the information process. In the study mathematical thinking is described as the information process monitored by one´s metacognition. The information process is understood in the same way as in the theory of connectionism. The role of students' beliefs as part of one´s metacognition is crucial in the monitoring of thinking processes. Student's mathematical knowledge is described as procedural, conceptual and strategic knowledge. The concepts of ´skill´ and ´understanding´ are defined by three kinds of knowledge. In the study attitudes and emotions are part of beliefs, which form part of student's view of mathematics.

In the empirical part of the study examines upper-secondary school students' mathematical thinking in the longer course in mathematics from three perspectives: the perspective of society, the teacher's and the student's perspective. The main problem in the study is to describe features of the student's test–oriented mathematical thinking. The description from the three study perspectives consists of features of students' mathematical proficiency and view of mathematics. The subproblems consider what kind of differences exist in the mathematical proficiency and in the view of mathematics between genders, between students who studied according to different curricula and between students who chose a compulsory test or an optional test in the matriculation examination.

In the societal perspective the focus is on the test of the longer course in mathematics in the matriculation examination and the curricula. The teacher's perspective consists of studies of evaluation of mathematics learning in Tervakoski Upper-Secondary School. Students' views of mathematics are studied from the student's perspective. The view of mathematics includes student's beliefs about mathematics, beliefs about oneself as a learner and as a user of mathematics, beliefs about mathematics teaching and beliefs about mathematics learning.

The empirical data of the study were collected throughout the 1990s (except 1994). The empirical data consist of test results (n=89804) of matriculation examinations in mathematics, students' (n=103) test results in the longer courses of mathematics and students' interviews (n=6) in Tervakoski Upper–Secondary School. In addition, students (n=384) in eight secondary schools answered the questionnaire. The questionnaire included 46 Likert-scaled statements. The empirical data on the matriculation examination and of Tervakoski Upper–Secondary School were analysed using usual statistical analysis. Using regression analysis especially a two-by-two frequency table was formed. Students' view of mathematics was researched using frequency and factor analyses.

Found four groups were identified in the two-by-two frequency table. They are "Successful students", "Mature students", "´Just doing´ students" and its subgroup "Losers" and "Disappointed students". Students' mathematical thinking is described through five features of mathematical proficiency: conceptual understanding, strategic competence, adaptive reasoning, procedural fluency and the view of mathematics. Students' mathematical thinking in the two-by-two frequency table is divided into three categories: (1) contents bound mathematical thinking (2) broad mathematical thinking and (3) narrow mathematical thinking. The group "Disappointed students" consist of students who have had success in the specific substance of the longer course in mathematics, but who failed in the mathematics test in the matriculation examination. "Disappointed students" have contents bound mathematical thinking. The subgroup "Losers" has grown mostly after the reform of the matriculation examination in 1996 when the longer course in mathematics became optional. The differences in mathematical thinking between those who had chosen a compulsory test or who had chosen an optional test in the matriculation examination are observable in every one of the three perspectives. In the research on students' beliefs the result was that students´perseverance in studies has diminished.

Keywords: Mathematical thinking, mathematical proficiency, view of mathematics, longer course in mathematics, upper-secondary school

Sisältö

Taulukot

Kuvat

Lyhenteet

Lyhenne	Merkitys
A	Approbatur
B	Lubenter approbatur
C	Cum laude approbatur
DIF	Differentiaalimatematiikan kurssit lukion opetussuunnitelman perusteissa 1985 ja 1994
GEO	Geometrian kurssit lukion opetussuunnitelman perusteissa 1985 ja 1994
I	Improbatur
IEA	International Association for the Evaluation of Educational Achievement
L	Laudatur
LOPS1985	Lukion opetussuunnitelman perusteet vuodelta 1985. Kouluhallitus 1985.
LOPS1994	Lukion opetussuunnitelman perusteet vuodelta 1994. Opetushallitus 1994.
LUMA	Luonnontieteiden ja matematiikan opetuksen kehittämishanke
M	Magna cum laude approbatur
MAOL	Matemaattisten aineiden opettajien liitto
NAEP	National Assessment of Educational Progress
NAGB	National Assessment Governing Board
OPH	Opetushallitus
OPM	Opetusministeriö
ops	Opetussuunnitelma
PISA	Programme for International Student Assessment
SIMS	The Second International Study of Mathematics
TIMSS	The Third International Mathematics and Science Study
TNLU	Todennäköisyyslaskennan, tilastotieteen ja lukujonojen kurssit lukion opetussuunnitelman perusteissa 1985 ja 1994
TUT93	Vuonna 1993 tehty uskomustutkimus, jossa oli mukana kaksi lukiota.
TUT99	Vuonna 1999 tehty uskomustutkimus, jossa oli mukana kahdeksan lukiota.
YHT	Funktioita ja yhtälöitä käsittelevät kurssit lukion opetussuunnitelman perusteissa 1985 ja 1994
YTL	Ylioppilastutkintolautakunta

Luku 1

Johdanto

> *Hyvin monet opiskelijat tuntevat, etteivät kykene milloinkaan ymmärtämään matematiikkaa, mutta että he voivat oppia tarpeeksi pettääkseen tenttijät luulemaan heidän ymmärtävän. He ovat kuin sanansaattaja, jonka on toistettava lause hänelle tuntematonta kieltä – täynnä huolta saada sanoma ilmoitetuksi, ennen kuin muisti pettää, hän saattaa tehdä mitä kummallisempia virheitä. Sellainen opiskelu on selvästi ajantuhlaamista. Matemaattinen ajattelu on työkalu.* (Sawyer 1958, 7–8)

1.1 Tutkimuksen lähtökohtia

1.1.1 Opettaja ja opiskelijan matemaattinen ajattelu

Suomen lukioissa otetaan käyttöön uudistetut opetussuunnitelman perusteet 1.8.2005. Johdannon alkuun poimittu Sawyerin sitaatti sisältää yhä ajankohtaisen huolen koulumatematiikan opiskelusta, mikä on otettava huomioon opetussuunnitelmia kehitettäessä. Lukion pitkän matematiikan opetussuunnitelmien laatijat ja kehittäjät joutuvat jälleen kerran pohtimaan matematiikan opiskelun tavoitteita ja sisältöjä, jotta opiskelijat osaamisen lisäksi ymmärtäisivät matematiikan keskeisen oppisisällön entistä paremmin. Tämän tutkimuksen aineistot ajoittuvat vuosien 1985 ja 1994 opetussuunnitelmien perusteiden voimassaoloaikaan. 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden suoritusten ja näkemysten analyysi on perustana 2000-luvun opetussuunnitelmien uudistamistyölle. Tutkimuksen kohteena on opiskelijan matemaattinen ajattelu, jonka kehittäminen on nähty opetussuunnitelmien perusteissa yhdeksi matematiikan opetuksen keskeiseksi tehtäväksi.

Olen opettanut matematiikkaa 1980-luvun alkupuolelta lähtien peruskoulun yläasteella ja lukiossa. Etenkin lukiossa pitkän matematiikan opettajana pohdin toistuvasti rooliani opetussuunnitelman toteuttajana ja toisaalta opiskelijoiden oppimisprosessin tukijana. Abiturienttien valmistautuminen matematiikan ylioppilaskirjoituksiin ja heidän lukion koesuorituksensa antoivat viitteitä kyseisestä sanansaattaja-metaforasta. Luokaton lukio ja pitkän matematiikan kirjoittamisen salliminen vapaaehtoisena 1990-luvulla eivät muuttaneet tilannetta opettajan näkökulmasta ainakaan parempaan suuntaan. Pelkäsin, että pitkän matematiikan kirjoittajien tilanne alkaa muistuttaa lyhyen matematiikan tilannetta. Lyhyessä matematiikassa oli vapaaehtoisen kirjoittamisen myötä syntynyt luokattomassa lukiossa opiskelijaryhmiä, jotka tuntuivat opettajan näkökulmasta hallitsevan matemaattista tietoa lukion päättövaiheessa heikommin kuin he hallitsivat lukion alkuvaiheessa (Joutsenlahti 1996). Heidän matemaattinen ajattelunsa näytti taantuneen lukioaikana kehittymisen sijasta.

Matemaattisen ajattelun käsite on tullut opettajille tutuksi sekä lukion opetussuunnitelmien (1985 ja 1994) perusteista että ainedidaktisesta kirjallisuudesta. Lähtiessäni selvittämään tarkemmin kyseisen käsitteen sisältöä huomasin, että sen määrittely tai kuvailu jätetään useimmissa yhteyksissä pois ja annetaan kunkin lukijan toimia mielikuviensa pohjalta. Kirjallisuudessa esitetyt matemaattisen ajattelun määritelmät eivät ole vakiintuneet, mikä hankaloittaa mainitun käsitteen käyttöä.

Tutkimuksen viitekehyksessä joudun siis paneutumaan matemaattisen ajattelun käsitteen analysointiin, sillä kyseiseen käsitteeseen on useita lähestymistapoja (Sternberg 1996). Eri lähestymistavoista olen valinnut informaation prosessoinnin kuvaamaan matemaattista ajattelua. Sen taustalla on konnektionismi. Tämän valinnan myötä matemaattisen tiedon käsite nousee keskeiseksi tarkastelun kohteeksi. Kaikessa inhimillisessä toiminnassa mukaan lukien matematiikka ovat affektiiviset tekijät merkittävässä asemassa. Tämän vuoksi opiskelijoiden uskomukset, asenteet ja emootiot on huomioitava arvioitaessa heidän toimintaansa.

Opiskelijan matemaattista ajattelua ei voi havainnoida suoraan. Lukiossa matemaattinen ajattelu ilmenee muun muassa uusien käsitteiden oppimisprosesseissa ja ongelmien ratkaisujen yhteydessä. Rajaan lukiolaisten matemaattisen ajattelun tutkimisen tehtävien ratkaisemisessa ilmenevään ajatteluun, sillä aineistoni koostuu pääosin opiskelijoiden koesuorituksista. Tehtäväorientoituneella matemaattisella ajattelulla tarkoitan opiskelijan tehtävien ratkaisuprosesseissa käyttämää matemaattista ajattelua, jota ohjaavat opiskelijan omaksumat ratkaisustrategiat.

Suomalaisten lukiolaisten matemaattista ajattelua ei ole kovin paljon tutkittu. Suomen lukiolaiset osallistuivat kansainvälisiin koulusaavutustutkimuksiin vuosina 1964 ja 1981. Näissä tutkimuksissa arvioitiin pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen ajattelun tasoa. Yrjönsuuri (1989, 1990) on tutkinut lukiolaisten opiskeluorientaatiota ja menestymistä matematiikassa sekä matemaattisen ajattelun oppimista. Matemaattista ajattelua on tarkasteltu näissä tutkimuksissa tehtäväorientoituneena prosessina, jolloin tehtävien suorituksista pääteltiin niiden ratkaisemiseen tarvittavan matemaattisen ajattelun piirteitä.

Opiskelijan matemaattinen ajattelu saattaa ilmetä eri tavoilla näkökulman valinnasta riippuen. Opettajan näkökulma koulun tasolla ei tuo riittävän monipuolisesti esille tutkittavan ilmiön piirteitä ja siksi on syytä valita muitakin näkökulmia. Tällaisiksi näkökulmiksi olen valinnut valtakunnalliset ylioppilaskirjoitukset ja opiskelijan omat näkemykset.

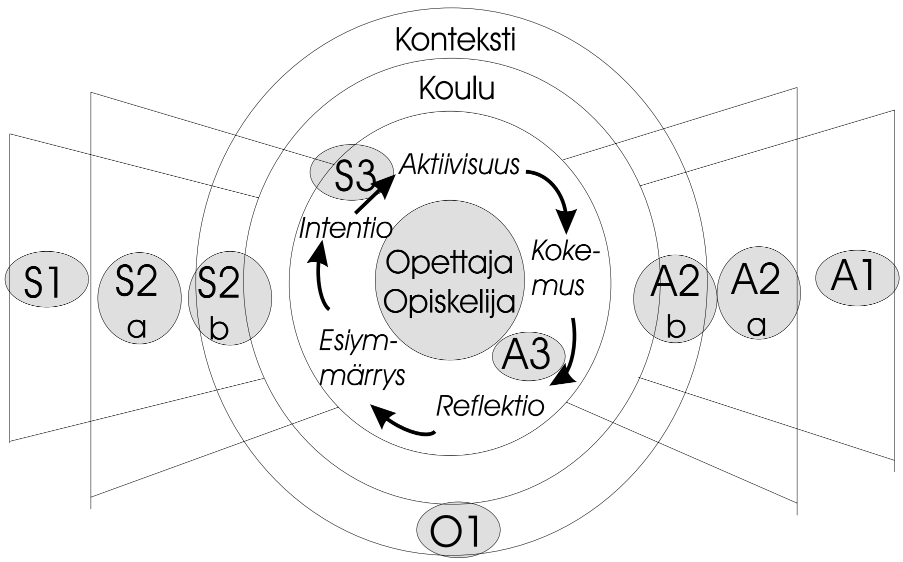
Tutkimuksen tarkoitus on kuvata minkälainen on lukion pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen ajattelu lukion päättyessä. Tarkastelu tapahtuu mainituista kolmesta näkökulmasta. Näissä näkökulmissa tutkin, millaisia eroja matemaattisessa ajattelussa on tyttöjen ja poikien välillä, pitkän matematiikan pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien välillä sekä vuosien 1985 ja 1994 opetussuunnitelmien perusteiden aikana opiskelleiden välillä.

1.1.2 Kouludidaktiikka ja koulumatematiikka

Tutkimukseni kuuluu matematiikan didaktiikan alueeseen, joka luetaan Suomessa kasvatustieteen osa-alueeksi (Ahtee & Pehkonen 2000, 9). Uljens (1997) on kehittänyt kouludidaktiikan reflektiivisen mallin (kuvio 1.1), joka sisältää opetuksen suunnittelun, opetus-opiskelu-oppiminen prosessin ja arvioinnin. Kouludidaktinen malli on rajoittunut opetuksen ja kasvatuksen kysymyksiin institutionaalisessa koululaitoksessa ja on siten yleisen didaktiikan osa-alue. Kouludidaktiikka sisältää ainedidaktiikan. (mt., 91–92.)

Opiskelija ja opettaja ovat intentionaalisesti ja reflektoiden toimivat keskeiset tekijät Uljensin mallissa (kuvio 1.1), joka sisältää kollektiivisen tason suunnittelun ja arvioinnin sekä opettajan tekemän suunnittelun, opetuksen ja arvioinnin. Mallissa on lisäksi huomioitu opiskelijan tekemä opetuksen arviointi ja itsearviointi. (mt., 66.)

Kollektiivisen tason suunnittelua (S1) edustaa lukiossa opetussuunnitelman perusteet, johon on kirjattu muun muassa pitkän matematiikan opiskelun tavoitteet ja sisällöt. Valtakunnalliset opetussuunnitelman perusteet on niin



S1: Suunnittelu (intentiot) virallisella kollektiivisella tasolla.
S2a: Opettajan opintojaksoa edeltävä suunnittelu suhteessa kollektiivisen tason suunnitteluun.
S2b: Opettajan opintojaksoa edeltävä suunnittelu suhteessa yksilön, paikallisen kulttuurin ja koulun kontekstiin.
S3: Opettajien ja opiskelijoiden jatkuva tilannekohtainen suunnittelu.
A1: Arviointi virallisella kollektiivisella tasolla.
A2a: Opettajien opintojakson arviointi suhteessa opetussuunnitelmiin ja kollektiivisen tason arviointiin.
A2b: Opettajien opetusprosessin ja sen tulosten arviointi suhteessa yksilön, paikallisen kulttuurin ja koulun kontekstiin.
A3: Opettajien ja oppilaiden jatkuva tilannekohtainen reflektoiva opetus- ja oppimiskokemusten arviointi.
O1: Opiskelijan koulua koskeva esiymmärrys, intentiot ja kokemukset.
Koulu: Luokka ja paikallinen kouluympäristö.
Konteksti: Kasvatuksen epävirallinen kulttuuriympäristö.

KUVIO 1.1: Pedagogisen toiminnan tasot ja muodot Uljensin kouludidaktiikan reflektiivisessä mallissa (Uljens 1997, 65).

sanottu *kirjoitettu opetussuunnitelma*, jossa on kuvattu opetuksen ja koulukasvatuksen tavoitteet yleisesti. Opettaja suunnittelee kirjoitetun opetussuunnitelman pohjalta kullekin opetusryhmälle oppitunnilla *toimeenpantavan opetussuunnitelman* (S2a), joka sisältää oppitunnilla tehtävät toimenpiteet ja opetettavat asiat. Opetuksen jälkeen opettaja pohtii *toteutunutta opetussuunnitelmaa* ja opiskelijat pohtivat *kokemaansa opetussuunnitelmaa* (S3)[1]. (Ahtee & Pehkonen 2000, 20–21.)

Uljensin mallissa nousee suunnittelun lisäksi esille arviointi kollektiivisen, opettajan ja opiskelijan tason arviointina (Uljens 1997, 82). Tutkimuksessani kollektiivinen arviointi (A1) on pitkän matematiikan valtakunnalliset ylioppilaskirjoitukset. Opettajan arviointi on opintojaksojen arviointia kurssikokeilla ja kurssiarvosanoilla (A2). Opiskelijan arviointi on itsearviointia (A3). Tutkimuksessani jää vähälle huomiolle mallissa esitetty koulu- ja paikallinen kulttuuriympäristö, sillä niiden vaikutusta opiskelijan matemaattiseen ajatteluun on vaikea arvioida.

Matematiikan näkökulmasta kouluissa opiskeltava matematiikka koostuu opetussuunnitelmassa mainituista käsitteistä ja operaatioista sekä tietyn tyyppisten valmiiksi annettujen ongelmien ratkaisemisesta (Dreyfus & Eisenberg 1996, 254). Voimme nimittää edellä kuvattua matematiikkaa *koulumatematiikaksi*. Siinä tarvitaan sekä laskutaitoa että ymmärtämistä[2], mutta muun muassa matematiikalle tyypillinen todistusajattelu on vähäistä. Molemmat mainitut koulumatematiikan osa-alueet ovat esillä kaikissa lukion opetussuunnitelman perusteissa, mutta niiden painotukset ovat vaihdelleet.

Opiskelijan matemaattinen ajattelu tulee esille koulumatematiikan ongelmien ratkaisuprosesseissa sekä matemaattisten käsitteiden opiskelussa.

1.2 Katsaus aikaisempiin tutkimuksiin

1.2.1 Peruskoulun oppilaiden matematiikan tiedot ja taidot sekä oppilaiden ja opettajien uskomukset

Peruskoulu antaa valmiudet matematiikan lukio-opintoihin. Peruskoulun matematiikan opetuksessa luodaan tieto-, taito- ja uskomusperusta lukion pitkän matematiikan opiskelulle. Tämän vuoksi on syytä tarkastella viimeaikaisia suomalaisen peruskoulun yläastetta käsitteleviä kansainvälisiä ja kansalli-

[1] Vrt. Kangasniemi 1989, 45–46.
[2] Ks. Pehkonen 2000, 375.

sia matematiikan arviointitutkimuksien tuloksia. Esittelen lyhyesti kansainvälisistä tutkimuksista TIMSS[3]- ja PISA[4]-tutkimukset sekä kansallisista tutkimuksista Opetushallituksen arvioinnin perusopetuksen päättövaiheen matematiikan oppimistuloksista. Esitän lisäksi lyhyen katsauksen Soron (2002) tutkimukseen, jossa on selvitetty peruskoulun matematiikan opettajien uskomuksia tytöistä ja pojista matematiikassa. Koska sekä peruskoulun että lukion matematiikan opettajilla on aineenopettajan koulutus, niin uskoisin Soron (2002) tutkimuksen tulosten antavan viitteitä myös niistä lukion matematiikan opettajien uskomuksista, joiden mukaan sukupuoli vaikuttaa matematiikan opiskeluun. Vastaavaa tutkimusta ei ole tehty lukion matematiikan opettajista. Tässä yhteydessä jää käsittelemättä huomattava joukko peruskoulun matematiikan opiskeluun liittyviä tutkimuksia, koska ne eivät kuulu läheisesti tämän työn aihepiiriin. Tällaisia ovat esimerkiksi MODEM[5]-projektiin kuuluvat tutkimukset (Haapasalo 1998, 200-221) sekä Silfverbergin (1999) ja Hannulan (2002, 2004) tutkimukset.

Peruskoulun seitsemäsluokkalaiset osallistuivat vuonna 1999 TIMSS-tutkimukseen, jossa suomalaisten tulokset olivat OECD-maiden hyvää keskitasoa. Tutkimuksen tuloksiin Suomen osalta vaikutti, että osa tutkimuksen matematiikan tehtävistä oli aihepiiriltään sellaisia, joita ei ollut käsitelty Suomessa 7. luokkaan mennessä. Suomalaisten osaaminen oli kuitenkin tutkituilla matematiikan alueilla keskimääräistä parempaa. Affektiivisen puolen tuloksista voidaan todeta, että suomalaisten peruskoululaisten luottamus matematiikan taitoihinsa on kansainvälisesti arvioiden korkea ja pojilla on tyttöjä vahvempi itseluottamus matematiikassa. (OPH 2002, 24–29.)

PISA-tutkimusohjelmaan osallistui suomalaisia yhdeksäsluokkalaisia vuosina 2000 ja 2003. Vuonna 2000 matematiikka oli sivualue pääpainon ollessa lukutaidon mittaamisessa. Vuoden 2003 arviointitutkimukseen, jossa päähuomio kohdistui matematiikan osaamiseen, osallistui 41 maata. Matematiikan osaamisella (*mathematical literacy*) tarkoitetaan tässä yhteydessä ”*oppilaiden kykyä hyödyntää matemaattisia tietojaan ja taitojaan suhteessa tulevaisuuden haasteisiin*” (Kupari & Korhonen 2000, 10). Tulevaisuuden haasteisiin kuuluu muun muassa omien matemaattisten ajatusten viestiminen toisille ja matemaattisten ongelmien asettaminen, muotoileminen ja ratkominen erilaisissa tilanteissa (mt., 10). Matematiikan osaamisessa Suomi kuului OECD-maiden parhaaseen neljännekseen vuonna 2000. Vuoden 2003 PISA-tutkimuksessa Suomi oli OECD-maiden paras ja toiseksi paras kaikista osallistujista (Kupari ym. 2004). Vuoden 2000 PISA-tutkimuksessa oppilaiden osaaminen oli

[3] *The Third International Mathematics and Science Study.*

[4] *Programme for International Student Assessment.*

[5] Matematiikan Opetuksen Didaktis-Empiirisiä Malleja.

sisällöllisesti tasaista, mutta esimerkiksi yleistämistä ja perusteluja vaativissa tehtävissä vastaamatta jättäneiden osuus oli suuri (21 %–55 %). Suomalaisilla oppilailla oli oman opiskelun kontrollointi selvästi muiden OECD-maiden keskitasoa alhaisempi. Tämä tuli esille esimerkiksi suomalaisten muita vastaajia negatiivisemmassa suhtautumisessa väitteeseen *”opiskellessani yritän selvittää, mitä asioita en ole vielä selvästi ymmärtänyt”*. (Välijärvi ym. 2001, 24 – 40.) Vuoden 2003 PISA-tutkimuksessa suomalaisten nuorten osaaminen oli hyvätasoista kaikilla tutkittavilla osa-alueilla[6](Kupari ym. 2004, 10). Molemmissa PISA-tutkimuksissa tyttöjen ja poikien erot suorituksissa olivat vähäiset kuten TIMSS-tutkimuksessakin. PISA 2003–tutkimuksessa tuli ilmi, että suomalaisten nuorten luottamus omaan osaamiseen oli hieman alle OECD:n keskitason ja että Suomessa pojat luottivat itseensä huomattavasti enemmän kuin tytöt (mt., 45). Tuloksia alueellisesti tarkasteltaessa voitiin todeta koulujen välisten erojen olevan Suomessa pieniä. Suomessa maan sisäinen osaamisen vaihtelu oli muihin osallistujamaihin verrattuna hyvin vähäistä (mt., 12).

Korhonen (2001) on esitellyt perusopetuksen päättövaiheen matematiikan oppimistuloksia kansallisessa arvioinnissa, joka tehtiin vuonna 2000. Vaikka nämä oppilaat eivät kuulu tämän tutkimuksen lukioikäluokkiin, niin he ovat opiskelleet vuoden 1994 opetussuunnitelmien perusteiden mukaan, ja siksi arvioinnin tulokset ovat suuntaa antavia myös 1990-luvun loppupuolella peruskoulunsa käyneille ikäluokille. Arvioinnin tuloksena todetaan, että matematiikkaa osataan keskimäärin opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti. Oppilaita, jotka eivät selviydy hyväksyttävästi matematiikan opinnoistaan, on noin 4 % ja vastaavasti kiitettävään tai erinomaiseen suoritukseen yltäviä on noin 25 % kaikista päättövaiheen oppilaista. Päättövaiheen oppilailla on vaikeuksia matematiikassa ongelmanratkaisutehtävissä ja matematiikan osa-alueista algebrassa. Algebran vaikeudet keskittyvät nimenomaan perusrakenteiden hallintaan. Tyttöjen suoritusten keskiarvo oli parempi kuin poikien, mutta ei tilastollisesti merkitsevästi. Kuitenkin poikien asenteet matematiikkaa kohtaan olivat myönteisemmät kuin tyttöjen. Samoin käsitys itsestä matematiikan oppijana oli pojilla tilastollisesti merkitsevästi parempi kuin tytöillä.

Soro (2002) on selvittänyt peruskoulun yläasteen matematiikan opettajien uskomuksia tytöistä, pojista ja tasa-arvosta matematiikassa. Sekä lukion että peruskoulun yläasteen matematiikan opettajilla on useimmiten samankaltainen aineenopettajan koulutus, joten Soron tutkimuksen tuloksia yläasteen matematiikan opettajista voi pitää ainakin suuntaa antavina myös lukion

[6]Tutkittavat osa-alueet olivat: määrällinen ajattelu, tila ja muoto, muutos ja yhteydet sekä epävarmuus.

matematiikan opettajille. Peruskoulun matematiikan opettajan arvioilla oppilaasta matematiikan oppijana saattaa olla huomattava vaikutus oppilaan lukiovalintoihin. Soron tutkimuksen opettajilla oli stereotypioita sukupuolista. Yli 70 % opettajista oli sitä mieltä, että tytön useammin kuin pojan menestys perustuu enemmänkin tunnontarkkaan harjoitteluun kuin ymmärtämiseen ja että hiljainen puurtaja ja työtä oppimisen eteen tekevä on useammin tyttö kuin poika. Opettajista 86 % oli sitä mieltä, että laiskuuden takia alisuoriutuva on useammin poika kuin tyttö. Opettajien mukaan poika useammin kuin tyttö selviää lukion pitkästä matematiikasta helpommin. Viidennes opettajista oli sitä mieltä, että vaativampaan matemaattiseen ajatteluun kykeneviä ja matemaattisesti lahjakkaita esiintyi poikien joukossa useammin kuin tyttöjen joukossa. (Soro 2002, 126–128.)

Peruskoulua koskevista tutkimuksista voidaan kootusti todeta, että lukion pitkän matematiikan opiskelun kannalta oppilaiden kontrollistrategioiden puutteellisuus on ongelmallista. Omien metakognitioiden tiedostaminen ja omaehtoinen pyrkimys selvittää epäselvät asiat ovat tärkeitä taitoja lukio-opiskelussa. Pitkän matematiikan opiskelun kannalta on huolestuttavaa Korhosen (2001) havainto, että peruskoululaisilla on ongelmia algebrassa perusrakenteiden kanssa. Niiden heikko hallinta hidastaa lukiossa pitkän matematiikan opiskelun alkua, kun jo peruskoulussa käydyt algebran alkeet joudutaan käymään uudelleen läpi. Tätä puutetta on jouduttu paikkaamaan lukioissa muun muassa peruskoulua kertaavilla ja täydentävillä matematiikan aloituskursseilla (nollakursseilla). Vasta tämän jälkeen on voitu aloittaa opetussuunnitelman perusteiden mukaiset pakolliset kurssit. Vaikka tytöt menestyvät hyvin peruskoulun matematiikassa, he eivät luota itseensä matematiikan oppijoina. Tyttöjen heikko itsetunto ohjaa heidän lukiovalintojaan, joten vain pieni joukko heistä ottaa opiskellakseen pitkää matematiikkaa. Opettajien näkemyksillä, joita ei välttämättä lausuta ääneen, on mitä ilmeisemmin osuutensa tyttöjen lukiovalintoihin.

1.2.2 Lukiolaisten matematiikan tiedot ja taidot

Lukiolaisten matemaattista ajattelua on kuvattu tutkimuksissa mittaamalla tietoja ja taitoja eritasoisilla tehtävillä. Niitä mitataan vuosittain ylioppilaskirjoituksissa, joita tarkastelen myöhemmin. Tässä esittelen lyhyesti kansainvälisen arviointitutkimuksen tuloksia Suomen osalta sekä lisäksi Yrjönsuuren (1989, 1990), Haapasalon (1998) ja Merenluodon (2001) tutkimustuloksia.

Suomi on osallistunut IEA:n[7] kansainvälisiin arviointitutkimuksiin 1960-

[7] *International Association for the Evaluation of Educational Achievement.*

luvulta lähtien. Suomalaisten lukiolaisten matematiikan osaamista mitattiin viimeksi 1981 SIMS[8]-tutkimuksessa. Kangasniemi (1989, 2000) on esitellyt ja analysoinut tämän tutkimuksen suomalaisia tuloksia. Suomesta osallistui 1550 lukion 3. luokan pitkän matematiikan opiskelijaa 81 lukiosta. Parhaiten he menestyivät matematiikan osa-alueista algebrassa ja huonoiten geometriassa. Tutkimuksessa arvioitiin opiskelijoiden matemaattisen ajattelun tasoa. Wilsonin mallin[9] perusteella jaotelluista tehtävistä he osasivat laskutaitotason tehtävistä keskimäärin 69 %, ymmärtämistehtävistä 66 %, soveltamistehtävistä 49 % ja analysoimista vaativista tehtävistä 34 %. Pitkää matematiikkaa opiskelevien poikien koulusaavutukset olivat parempia kuin tyttöjen niin matematiikan eri osa-alueilla kuin matemaattisen ajattelun eri tasoillakin. Tulokset olivat kaikilla matematiikan osa-alueilla paremmat tai yhtä hyvät kuin vuoden 1964 IEA-tutkimuksessa. Huomioitava on, että pitkä matematiikka tuli vuonna 1966 pakolliseksi ylioppilaskirjoituksissa. Sitä ennen se oli matemaattisen linjan opiskelijoille valinnainen reaalin kanssa. (Kangasniemi 1989, IV–XIII). Suomen lukiolaiset eivät ole tämän jälkeen toistaiseksi osallistuneet kansainvälisiin koulusaavutustutkimuksiin.

Yrjönsuuri (1989, 1990) on tutkinut lukiolaisten opiskeluorientaatioita ja menestymistä matematiikassa sekä lukiolaisten matemaattisen ajattelun oppimista. Tuloksina hän sai muun muassa, että laajan matematiikan opiskelijoiden kurssiarvosanojen parhaat selittäjät olivat ongelmanratkaisuun suuntautuminen ja luopuminen. Kaikissa tutkittavissa ryhmissä, joiden jakoperuste oli matematiikan ylioppilaskirjoituksiin osallistumisen laatu (laaja, yleinen, ei kirjoita), matematiikan opiskelusta luopuminen ilmeni kiinnostumattomuutena ja välinpitämättömyytenä oppia ymmärtämään matematiikkaa. Yrjönsuuri (1990) tutki yleisen matematiikan opiskelijoiden matemaattisen ajattelun oppimista. Hän tarkasteli matemaattista ajattelua neljänä hierarkkisena tasona: symbolien ja operaatioiden käyttäminen, käsitteiden ominaisuuksien tietäminen, matemaattisten rakenteiden yleistäminen ja ongelmanratkaisun koettelu. Kognitiivisen taidon käyttämistä kuvaavat kaksi ensimmäistä ominaisuutta ja kaksi viimeistä reflektoivaa ajattelua. Kognitiivisen taidon käyttämisellä oli vahvempi yhteys matematiikan arvosanaan kuin reflektoivalla ajattelulla. Tutkimuksen mukaan matematiikan rakenteiden oppiminen ja käsitteiden tietäminen onnistuivat puolelle yleisen matematiikan kirjoituksiin osallistuvista ja neljäsosalle siihen osallistumattomista.

Lisensiaatintutkimuksessani (Joutsenlahti 1996) tarkastelin lukion yleisen ja laajan matematiikan opiskelijoiden matemaattisen ajattelun kehittymis-

[8] *The Second International Study of Mathematics.*

[9] Tehtävien Wilsonin mallin tasot: laskutaito, ymmärtäminen, soveltaminen ja analysointi.

tä. Tutkimuskohteena olivat Tervakosken lukion opiskelijat. Asennemittariin vastasi myös Laitilan lukion opiskelijoita. Laajan matematiikan opiskelijoilla tapahtui tutkimuksen mukaan selvää matemaattisen ajattelun kehittymistä. Tutkimuksessa tarkasteltiin yleisen matematiikan opiskelijoiden lukion matematiikan päättöarvosanan ja yleisen matematiikan ylioppilaskirjoituspistemäärän välistä riippuvuutta regressioanalyysin avulla. Suoritusten keskiarvojen avulla luotiin nelikenttä. Siitä löytyi alaryhmiä, joille löytyi yhteisiä piirteitä asenteista ja uskomuksista. Erityisesti yleisen matematiikan ylioppilaskirjoituksissa ylimääräisenä kirjoittavat ja opiskelijat, jotka eivät kirjoita ollenkaan matematiikkaa, muodostivat ominaisuuksiltaan homogeenisia ryhmiä.

Haapasalon (1998, 208–218) MODEM- tutkimusprojektissa on useita tutkimuksia, joista pääosa koskee peruskoulun matematiikan opetusta. Lukio on ollut mukana muun muassa suoran jyrkkyyden opetuskokeilussa ja raja-arvon, jatkuvuuden sekä derivaatan käsitteiden oppimistutkimuksissa. Tutkimuksessa "Miten lukiolaiset hallitsevat raja-arvon käsitteen?"(Haapasalo ym. 1995) kartoitettiin lukiolaisten raja-arvon käsitteen ymmärtämistä ja kykyä soveltaa sitä. Tutkimukseen kuului myös analyysi oppikirjoista ja yliopiston opettajien raja-arvoon liittyvistä näkemyksistä. Tutkimus osoitti, että lukion 2. luokan oppilaat hallitsevat raja-arvon käsitteen varsin huonosti. Tutkimuksessa käytetyn testin suoritusten keskiarvo oli 45,8 ja hajonta 18,9 pistettä maksimipistemäärän ollessa 120 pistettä (mt., 37).

Merenluoto (2001) on selvittänyt lukiolaisten reaalilukukäsitettä. Tutkimuksessa tarkasteltiin käsitteellisiä muutoksia. Näissä muutoksissa aikaisempi tieto ohjaa uuden tiedon rakentumista, mutta se saattaa tuottaa myös systemaattisia väärinkäsityksiä uuteen tietoon. Lukukäsitteen laajentamista rationaalilukuihin ja irrationaalilukuihin rajoittaa useimmilla tutkituilla opiskelijoilla ”seuraava luku” -ajattelu, joka perustuu luonnollisten lukujen käsitteeseen. Tutkimuksen päätulos lukiolaisten kohdalta oli, että suurin osa tutkituista laajaa matematiikkaa opiskelleista (n=640) näyttää olleen alkuvaiheessa lukukäsitteen laajentamisen suhteen. Tutkimustulosten perusteella näyttää siltä, että lukujen hierarkiaan ja lukujoukkojen keskinäisiin eroihin liittyvä tietämys on lukiolaisille suurimmaksi osaksi ulkoa opeteltavaa faktatietoa. Lukukäsitteeseen liittyvät tiedot näyttävät jääneen useimmilla opiskelijoilla irrallisiksi tiedon osiksi. (Merenluoto 2001, 157–159.)

1.2.3 Lukiolaisten uskomukset ja asenteet matematiikan opiskelussa

Lukiolaisten uskomuksia ja asenteita on tutkittu useissa eri yhteyksissä, sillä niiden avulla voidaan ymmärtää paremmin eroja oppijoiden ajattelussa ja suorituksissa (esimerkiksi Robitaille 1989, 178). Kangasniemi (1989, 2000) on analysoinut Suomen osalta SIMS-tutkimuksessa mitattuja laajan matematiikan opiskelijoiden asenteita ja uskomuksia. Esittelen lisäksi lyhyesti Sarasen (1992) ja Koposen (1994) tutkimustuloksia sekä lisensiaattityöni tuloksia (Joutsenlahti 1996).

SIMS-tutkimuksessa olivat kohdejoukkona Suomessa lukion 3. luokan laajan matematiikan opiskelijat. He uskoivat, että matematiikka auttaa ajattelemaan loogisesti ja että arviointikyky on tärkeä matemaattinen taito. Lisäksi opiskelijat näkivät, että matematiikka ei ole suurimmaksi osaksi ulkoa oppimista ja että matematiikka ei ole vain joukko sääntöjä. Opiskelijat kuitenkin uskoivat, että aina on olemassa sääntö, jota voi soveltaa annettuun tehtävään. 1980-luvun alun laajan matematiikan opiskelijoilla oli melko hyvä kuva itsestään matematiikan taitajana. Matematiikkaa ei koettu vaikeaksi, vaikka vähemmän kuin puolet vastaajista piti itseään hyvänä matematiikassa. Opiskelijan aikaisempi koulumenestys näytti vaikuttaneen hänen asenteisiinsa koulumatematiikkaan ja matemaattiseen minäkuvaansa (Kangasniemi 2002, 65–66). Pojat ilmoittivat tyttöjä useammin ymmärtävänsä sen, mitä matematiikan tunnilla käsitellään. Tytöt tekivät keskimäärin puoli tuntia kauemmin kotitehtäviä kuin pojat. Lukion 3. luokan laajan matematiikan opiskelijoista tytöt ponnistelivat poikia enemmän oppimistulosten saavuttamiseksi (Kangasniemi 1989, 279–281).

Sarasen (1992) tutkimuskohteena oli lyhyen matematiikan abiturienttivaiheessa olevien opiskelijoiden asenteiden mittaaminen. Hän käytti pitkälti samoja väitteitä, joita oli käytetty SIMS-tutkimuksessa. Saranen (1992, 54) tutki vastausjakaumia matematiikan ylioppilaskirjoituksiin osallistuvien ja osallistumattomien ryhmissä ja totesi merkittäviä eroja sekä aineen hallinnassa että suhtautumisessa matematiikkaan. Kaikilla matematiikan sisältöalueilla sekä tiedollisen tason (laskutaidon, ymmärtämisen ja soveltamisen tasoilla) mukaan tarkasteltuna erot olivat matematiikan kirjoituksiin osallistuvien hyväksi. Tällä ryhmällä oli selvästi positiivisempi käsitys matematiikan hyödyllisyydestä ja omasta itsestään matematiikan opiskelijana kuin matematiikan kirjoituksiin osallistumattomilla. Nämä tulokset ovat oman tutkimukseni kannalta siinä mielessä mielenkiintoisia, että vuoden 1996 jälkeen pitkänkin matematiikan on voinut jättää kirjoittamatta ylioppilaskirjoituksissa, vaikka olisi suorittanut oppimäärään kuuluvat kurssit.

Koponen (1994) on yhdistänyt yläasteen ja lukion oppilaiden asennekyselyn tulokset. Vastaajia, joiksi valikoitui sekä yleisen että laajan matematiikan opiskelijoita, oli yhteensä 512, heistä lukiolaisia oli 94. Kyselyn vastaajista 75 % ilmoitti yleensä ymmärtävänsä, mitä matematiikan tunneilla käsitellään. Vastaavasti 11 % ei ymmärtänyt. Ymmärtääkseen uuden asian matematiikassa 72 % vastaajista oli valmis työskentelemään pitkänkin aikaa. Sama prosenttimäärä ei hyväksynyt väitettä ”*vaikka yrittäisin kuinka, en siitä huolimatta menesty matematiikassa*”. Väitteen ”*en halua käyttää kovin paljon aikaani matematiikan opiskelemiseen*” kanssa samaa mieltä oli 34 % ja eri mieltä 33 % vastaajista. Vaikean matematiikan tehtävän koki mieluisaksi haasteeksi 44 % ja epämieluisaksi 33 % vastaajista. (Koponen 1994, 123–124.)

Lisensiaatintyöhöni (Joutsenlahti 1996) kuului myös uskomus- ja asennetesti. Testin väittämät olivat suurimmaksi osaksi samat kuin SIMS-tutkimuksessa ja Sarasen (1992) tutkimuksessa. Tutkimukseeni otti osaa 84 lukiolaista eri luokilta. Suurin osa opiskeli laajaa matematiikkaa. Vastausjakaumat väittämiin olivat samansuuntaiset kuin Sarasella (1992) ja SIMS-tutkimuksessa.

1.2.4 Lukion päättävien matematiikkaan liittyvät opiskeluvalmiudet korkeakouluissa

Lukio-opetuksen pitää antaa opiskeluvalmiudet korkeakouluopiskeluun (Lukiolaki 1998). Välijärvi (1997) on selvittänyt korkeakouluopettajien näkemyksiä lukiolaisten matemaattisista opiskeluvalmiuksista korkeakouluissa. Opiskelijan korkeakouluvalmiuteen sisältyvät korkeakoulun opettajien mukaan ainakin riittävät yleistiedot ja opiskeltavan alan perustietämys, opiskelussa tarvittavat taidot sekä myönteinen perusasenne. Viimeksi mainitun ominaisuuden puuttuessa opiskelija ei pysty menestyksekkäästi opiskelemaan, vaikka hänellä olisikin riittävät perustiedot ja -taidot.

Matematiikan osalta on tärkeää, että opiskelijalle on tullut lukiosta oikea käsitys matematiikan luonteesta, sen struktuureista ja eksaktin päättelyn menetelmistä. Erityisesti on tärkeää, että opiskelija näkee matematiikan deduktiivisena tieteenä, jossa systemaattisen todistamisen merkitys on keskeistä. Todistamisen taito yhdessä matematiikan perusteiden hallinnan kanssa luo edellytykset matematiikan opiskelulle jatkossa. Tärkeitä menestyvän opiskelijan ominaisuuksia olivat halu työntekoon ja tavoitteellisuus. (mt., 8 – 11.)

Tavoitteellinen työnteko ei kuitenkaan riitä korkeakoulussa, sillä eräs korkeakoulun opettaja totesi matematiikan lukio-opinnoista:

> *Mikäli oppiminen on perustunut pelkkään ulkolukuun ja kaavojen*

> *käyttöön esimerkkien avulla, ei siitä ole paljon hyötyä. Matematiikan tulisi opettaa ajattelemaan, oppilaiden tulisi hallita laajasti se tietomäärä, joka heille on opetettu, niin että he pystyvät yhdistelemään heille opetettua tietoa ja käyttämään sitä.* (Välijärvi 1997, 9.)

Matematiikan opiskelijoiden perustiedot matematiikasta ovat korkeintaan kohtuulliset ja muutos aiempaan on korkeakouluopettajien mielestä negatiivinen. Erityisesti geometrian osa-alueen taidot ovat heikot. Syyksi heikkoon perustietämykseen korkeakouluopettajat arvelevat, että vaikka matematiikkaa opetetaan lukiossa määrällisesti paljon, niin mihinkään aiheeseen ei ehditä paneutua kunnolla. Opiskelijat eivät ole lukiossa ymmärtäneet matematiikan keskeisiä käsitteitä riittävän syvällisesti, ja jopa laskurutiinien hallinta on puutteellista. Lukio ei anna riittävästi tietoa nuorille matematiikan eri mahdollisuuksista soveltaa matemaattisia teorioita luonnontieteelliseen tietoon. (mt., 20.)

Matemaattinen tieto opitaan lukiossa näkemään taulukkokirjojen kaavakokoelmien vuoksi ikään kuin tietosanakirjaksi, joka tuottaa vastauksen oikeasta kohdasta avattuna. Kaikki se, mikä liittyy kaavojen ja niiden käytön perusteluun, ei näyttäisi olevan kovin merkityksellistä lukion opiskelussa. Kaavakokoelmien lisäksi kehittyneiden laskinten korostunut käyttö lisää kuilua lukio- ja korkeakouluopiskelun välillä. (mt., 28.)

Korkeakoulujen näkökulmasta lukion matematiikan opiskelun keskeisiä ongelmia lukiossa ovat Välijärven tutkimuksen (1997, 41–42) mukaan perusteiden ohut hallinta ja ulkoaoppiminen. Muita ongelmia ovat apuvälineisiin luottaminen selkeän ajattelun kustannuksella sekä tottumattomuus pitkäjänteiseen työskentelyyn taitojen kehittämiseksi.

Luku 2

Lukion matematiikan opetukseen 1990-luvulla vaikuttaneita tekijöitä

2.1 Johdanto

Opetussuunnitelmat ja ylioppilaskirjoitukset ohjailevat lukion matematiikan opetusta. Opetussuunnitelmissa kuvaillaan opetuksen tavoitteet ja määritetään opetettavat sisällöt. Opetussuunnitelmien perusteissa määrätään tuntiresurssit, joilla tavoitteet olisi saavutettava. Ylioppilaskirjoitukset ohjaavat ja motivoivat lukiolaisen pitkän matematiikan opiskeluun (vrt. LOPS 1985, 14)[1]. Ylioppilaskirjoitukset on valtakunnallinen tasomittari, jossa opiskelijan menestyminen auttaa häntä pääsemään jatko-opintoihin. Toisaalta menestyminen on myönteinen palaute matematiikan opettajalle hänen tekemästään työstä. Useat opiskelijat ja opettajat kokevat lukion matematiikan opintojen yhdeksi keskeiseksi tavoitteeksi mahdollisimman hyvän menestyksen ylioppilaskirjoituksissa. Kirjoitukset muodostavat siis eräänlaisen piilo-opetussuunnitelman varsinaisen opetussuunnitelman rinnalle siitäkin huolimatta, että ylioppilaskirjoitukset pohjautuvat aina voimassaoleviin opetussuunnitelmiin.

Muita huomioon otettavia tekijöitä 1990-luvulla olivat pitkän matematiikan suosio lukiovalinnoissa ja valtakunnallinen LUMA-hanke[2]. Peruskoulun jälkeen nuoret valitsevat pääsääntöisesti lukio- ja ammatillisen koulutuksen

[1] Käytän lyhennettä LOPS 1985 vuoden 1985 lukion opetussuunnitelman perusteista.
[2] LUMA on lyhenne luonnontieteiden ja matematiikan opetuksen kehittämishankkeelle.

väliltä. LUMA-hankkeella päättäjät kiinnittivät valtakunnallisesti huomiota matemaattisten aineiden opetukseen. Matematiikan opettajien täydennyskoulutusmahdollisuudet lisääntyivät, ja useissa kunnissa vahvistettiin matemaattisten aineiden opetuksen resursseja: kouluihin hankittiin ajanmukaisia opetusvälineitä matemaattisten aineiden opetukseen. Matemaattisten aineiden opetusta kehittämällä haluttiin nostaa näiden aineiden suosiota lukiolaisten ainevalinnoissa niin lukio-opinnoissa kuin kirjoituksissakin.

2.2 Matematiikan opetussuunnitelmat 1990-luvulla

2.2.1 Matematiikan opetussuunnitelmien kehityslinjoja

Oppikoulujen toiminnan loputtua 1970-luvulla tuli lukioille oma opetussuunnitelmansa. Kurssimuotoisen lukion kokeiluja oli vuodesta 1976 lähtien, mutta vasta vuodesta 1981 lähtien tuli valtakunnallisesta opetussuunnitelmasta kurssimuotoinen. (Malinen 1985, 28–29.) Luokattomuus tuli lukioon vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden myötä.

Kupari (1999, 44–53) on esitellyt peruskoulun matematiikan opetussuunnitelmien vaiheita koko Suomen tunnetun kouluhistorian ajalta. Vastaavat vaiheet ovat löydettävissä myös lukion opetussuunnitelmien perusteissa, sillä lukion ja peruskoulun opetussuunnitelmia on muutettu samaan aikaan. Opetussuunnitelmavaiheet ovat olleet yhtäläisiä USA:n vastaaviin vaiheisiin, mutta vuosien viiveellä. Suomessa erotettavat vaiheet olivat viime vuosikymmeninä: ”uusi matematiikka”[3] (noin 1970–1976), ”takaisin perusteisiin”[4] (noin 1974–1985), ”ongelmanratkaisu”[5] (noin 1983–) ja ”kansalliset päättötavoitteet” (noin 1994–). Näistä kaksi viimeistä vaihetta näkyvät lukion opetussuunnitelmissa 1990-luvulla.

Keskeinen käsite opetussuunnitelmia rakennettaessa on yleissivistys, jonka sisältöjen valitseminen ja kuvaaminen ovat kullekin aikakaudelle ominaisia. Esimerkiksi vuoden 1985 lukion opetussuunnitelmien perusteissa pidetään eräänä matematiikan yleistavoitteena ”- - *matemaattisen yleissivistyksen saavuttamista* - -” (LOPS 1985, 283). Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitea (ns. Leikolan komitea) tulkitsee, että yleissivistykseen kuuluu sekä ammattisivistykseen kuuluvia asioita että jokaisen

[3] *”New Mathematics”.*
[4] *”Back to basics”.*
[5] *”Problem Solving”.*

kansalaisen ammatin ulkopuolella elämässään tarvitsemia tietoja ja taitoja (Komiteanmietintö 1988, 26–27). Tämän vuoksi Leikolan komitea ottaa käyttöön käsitteen 'perussivistys', joka kattaa yleissivistyksen molemmat aspektit. Leikolan komitea kuvailee välimietinnössään matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen seuraavasti:

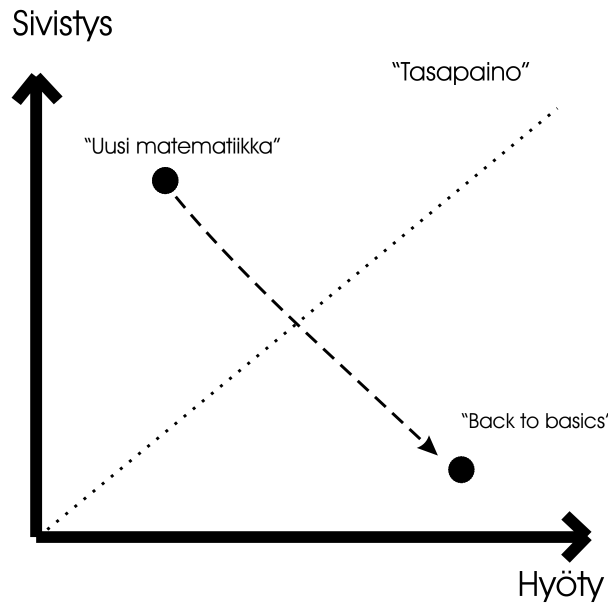
> *Matemaattis-luonnontieteellinen perussivistys käsittää lähinnä matematiikan eri osien perusteet ja matematiikan käyttötaidon, tietämyksen luonnon ilmiöistä ja niitä hallitsevista laeista sekä näiden sovelluksista tähtitieteen, fysiikan, kemian ja biologian piirissä, tietämyksen ihmisestä luonnontieteellisenä ilmiönä ja ihmisen ja muun luonnon välisistä suhteista sekä tietämyksen matemaattis-luonnontieteellisistä tutkimusmenetelmistä ja kyseisten tieteenalojen historiasta* (Komiteanmietintö 1988, 29).

Matemaattis-luonnontieteellinen perussivistys koostuu matematiikan osalta edellä olleen perusteella joukosta tietoja ja taitoja, joiden väliset suhteet jäävät kuvauksen ulkopuolelle kuten affektiivinen komponentti.

Perussivistyksen kunkin aikakauden määrittely ohjaa opetussuunnitelmien rakenteita ja sisältöjä. Gjone (2001) on tarkastellut opetussuunnitelmia hyöty- ja sivistysdimensioiden kannalta. Hyötynäkökulmassa korostuu matematiikan välinearvo (Gjone 2001, 105). Esimerkiksi kuviossa 2.1 hahmottuu "uuden matematiikan" ja sitä seuranneen "back to basics" vaiheiden sijoittuminen tähän kenttään. Keskellä oleva katkoviiva esittää sivistys- ja hyötynäkökulman välistä tasapainoa. Tasapaino lienee tavoiteltava, jotta "heiluriliike" näiden kahden näkökulman painotuksien suhteen vaimenisi. Kuparin kuvaamat opetussuunnitelmien kehityksen kaksi viimeistä vaihetta ilmeisesti osuvat lähemmäksi tasapainotilaa kuin Gjonen esimerkit kuviossa 2.1, sillä vuosien 1985 ja 1994 opetussuunnitelmien perusteiden sisällölliset muutokset eivät ole niin suuria kuin Gjonen esimerkkien suuntauksissa.

Tietokäsityksen muutokset ovat näkyneet ja vaikuttaneet koulutyöskentelyyn sekä opetussuunnitelmatyön että opettajakoulutuksen kautta. Mouwitz (2003) erottelee kolme erilaista lähestymistapaa tiedon käsitteeseen koulumaailmassa: esimoderni, moderni ja myöhäismoderni.

Esimodernissa lähestymistavassa koulussa tarvittava tieto ilmaistaan dikotomiana tiedot ja taidot. Koulun oppiaineet on jaettu teoreettisiin ja käytännön oppiaineisiin. Koulu antaa opiskelijoille valmiiksi paloitellut ja ryhmitellyt tiedon palaset, jotka ovat usein faktatietoa ja teorioita. Nämä tiedot koulu on valinnut etukäteen ja niiden oletetaan olevan tosia sekä relevantteja oppilaan tulevaisuuden suhteen. Opiskelijat oppivat koulussa toistamalla



KUVIO 2.1: Opetussuunnitelmat hyöty- ja sivistysperspektiivissä (Gjone 2001, 105)

opettajan antamaa mallia ja taitoja lisäksi "drillataan", kunnes ne osataan toistaa. Opiskelijan pitää osata kokeessa toistaa ne uudelleen kokeen laatijan haluamassa järjestyksessä. (Mouwitz 2003.) Koulumatematiikassa esimoderni lähestymistapa on edelleen tyypillinen opettajan toimeenpanemassa opetussuunnitelmassa. Opettaja painottaa usein opetuksessaan niitä matemaattisia tietoja ja taitoja, joita suurella todennäköisyydellä tarvitaan esimerkiksi ylioppilaskokeista selviytymiseen.

Modernia lähestymistapaa voi luonnehtia yrityksenä säilyttää edellä esitetyt vanhat käsitykset ja yhdistää ne uusiin. Tällöin hyväksytään faktatiedon ja teorioiden ongelmallinen luonne ja lisäksi otetaan mukaan korostetusti hiljaisen tiedon käsite. Ymmärtämisen ja reflektion käsitteet ovat mukana, jotta näkemys kontekstisidonnaisen tiedon transferista kouluopetuksessa voitaisiin selittää uudella tavalla. Affektiivisilla tekijöillä nähdään olevan tärkeä rooli oppimisessa, mutta ne eristetään omaksi joukokseen kognitiivisista tekijöistä. Oppilasarvioinnissa oppilaan pitää osoittaa eri tavoilla ymmärtäneensä oppimansa. Tässä lähestymistavassa korostuu toisaalta perinteinen käsitys koulusta tiedon jakajana ja toisaalta korostuu oppilaan oma kontekstisidonnainen tiedon konstruktio. (Mouwitz 2003.) Koulumatematiikan kirjoitetuissa opetussuunnitelmissa tulevat esille ymmärtämisen ja soveltamisen merkitys[6].

Myöhäismodernissa lähestymistavassa se, mitä tiedetään koulussa, ilmaistaan kompetenssien joukkona. Koulu on yksi paikka muiden joukossa, missä oppilaat voivat kehittää kompetenssejaan selviytyäkseen ennustamattomasta ja nopeasti muuttuvasta tulevaisuudesta. Kaikki tieto on epävarmaa, ja tiedon palasilla on vain rajoittunut pragmaattinen arvo. Kompetenssi sisältää itsearvioinnin ja kyvyn käsitellä ennalta arvaamattomia tilanteita. Tässä lähestymistavassa ei ole tarvetta luokitella erilaisia tiedon muotoja kuten edellä olleissa lähestymistavoissa, vaan jokainen kompetenssi sisältää kaikenlaisen tiedon, johon myös affektiiviset tekijät vaikuttavat. Oppilasarviointi on ensisijaisesti elämässä tarvittavien kompetenssien arviointia eikä perinteistä koulumaista sisältöjen kuulustelemista. (Mouwitz 2003.) Myöhäismodernin lähestymistavan piirteitä ei ole juurikaan havaittavissa 1990-luvulla voimassa olleissa opetussuunnitelman perusteissa.

2.2.2 Käsitykset matematiikan oppimisesta 1990-luvun opetussuunnitelmissa

Konstruktivismia on pidetty 1990-luvulla hallitsevana oppimiskäsityksenä. Se on lähestymistapa oppimistilanteeseen, jossa oppilas itse on vastuullisena tietojensa rakentajana. Konstruktivismi kattaa useita teorioita, joilla on sama kognitiivinen perusnäkökulma oppimiseen (Watts & Pope 1989, 327). Piaget'n teorian voidaan katsoa jo sisältäneen konstruktivismin perusajatukset, vaikka siinä korostettiinkin enemmän geneettisyyttä ja strukturalismia kuin konstruktivismissa (Seinelä 1992; Leino 1993).

Konstruktivismissa on 1990-luvulla syntynyt lukuisia erityyppisiä lähestymistapoja oppimisprosessin mallintamiseen. Niiden pohjana on aikaisempien vuosikymmenien oppimisteorioita tai aivan uusimpien tutkimuksien näkemyksiä. Ernest (1995, 466–482) näkee seuraavien seitsemän paradigman vaikuttaneen eniten käsitykseen oppimisesta: traditionaalinen empirismi, informaatio-prosessi -teoria, triviaali konstruktivismi, sosiokulturaalinen kognitio, radikaali konstruktivismi, sosiaalinen konstruktivismi ja sosiaalinen konstruktionismi. Opetuksen kannalta tärkeitä konstruktivismeja ovat niin sanottu triviaali, radikaali ja sosiaalinen konstruktivismi (vrt. Leino 1997, 41). Nämä suuntaukset ovat omalta osaltaan vaikuttaneet Suomessa opetussuunnitelman perusteisiin ja niiden tulkintaan. Esittelen ne tässä lyhyesti Ernestin (1995, 1996) näkemyksiä mukaillen.

[6]Esimerkiksi vuosien 1985 ja 1994 opetussuunnitelmien perusteissa korostetaan matemaattisen ajattelun kehittymistä.

Nimitys triviaali (heikko) konstruktivismi tulee von Glasersfeldilta (1995), joka halusi näin tehdä eron radikaaliin konstruktivismiin. Molemmissa näissä konstruktivistisissa suuntauksissa ovat pohjana Piaget'n käsitykset oppimisprosessista, mutta oleellinen ero on tiedon käsitteessä. Triviaalissa konstruktivismissa hyväksytään objektiivinen tieto, joka on yksilön konstruoitavissa omaan tietorakenteeseensa (Boudouries 1998; Haapasalo 1997a; Leino 1997). Yksilö itse konstruoi tietorakenteensa ja ihmismieli voidaan nähdä "pehmeänä" tietokoneena.

Radikaalissa konstruktivismissa jokainen oppija konstruoi oman ainutlaatuisen tietorakenteensa ja jokaisella on oma todellisuutensa. Konstruktivismin keskeisiä periaatteita on von Glasersfeldin (1988) mukaan, että tietoa ei voi vastaanottaa passiivisesti aistien varassa tai kommunikaation kautta, vaan sitä on aktiivisesti konstruoitava opittavasta aiheesta. von Glasersfeld (2000, 6) pitää konstruktivismia tietämisen teoriana, joka pyrkii osoittamaan tiedon voivan olla vain ja ainoastaan kokemuksen generoimaa. Tieto nähdään subjektiivisena konstruktiona, jota värittävät yksilön oma sosiaalinen, kulttuurinen, affektiivinen sekä kognitiivinen kokemusmaailma. Yksilön maailmankuva muodostuu siis yksilön kokemasta maailmasta. Kuitenkaan von Glasersfeld (2000, 7) ei kiellä, etteikö absoluuttista todellisuutta voisi olla olemassa, mutta samalla hän toteaa, että meillä ei ole mitään keinoja tuntea sitä.

Sosiaalinen konstruktivismi, jolla on samat lähtökohdat kuin radikaalilla konstruktivismillakin, korostaa tiedon sosiaalista ja kulturaalista alkuperää. Erityisesti kielen asema on keskeinen. Ernest (1996) näkee kaksi erilaista lähtökohtaa sosiaalisen konstruktivismin viitekehykseen. Ensimmäinen pohjautuu Piaget´n teoriaan ymmärryksestä, jolloin lähtökohtana yksilön tiedon konstruointiprosessiin on edellä esitelty radikaali konstruktivismi. Lisäksi huomioidaan yksilön vuorovaikutuksen merkitys ryhmässä kyseisen prosessin tukena. Tällöin siis priorisoidaan yksilökeskeinen näkökulma tiedon rakentumisessa, mutta toisaalta myönnetään sosiaalisen interaktion merkitys tiedon konstruoinnissa sekundäärisenä vaikuttajana. Sama voidaan esittää myös yksilön tiedon konstruointina intra-individuaalisena ja interpersoonallisina prosesseina. Edellinen sisältää yksilön oman konstruktion tiedosta sekä ymmärryksen siitä ja jälkimmäinen sosiaalisen vuorovaikutuksen sekä ihmisten välisten keskustelujen merkityksen. Edellä esitetyistä lähestymistavoista käytetään myös nimitystä sosiokonstruktivismi, joka sisällöltään on pääpiirteittäin sama kuin sosiaalinen konstruktivismi näin esitettynä. (Ernest 1996, 65–67.)

Toinen lähestymistapa sosiaaliseen konstruktivismiin on Ernestin (1996) mukaan Vygotskyn teoria ymmärryksestä, jossa korostetaan sosiaalista kontekstia ja kielen merkitystä erityisesti tiedon konstruointiprosessissa. Yksilön ymmärryksen kasvu on siis tämän näkemyksen mukaan yhteisöllistä ja henkilöiden keskustelujen synnyttämää, sillä kaiken yksilön ajattelun perustana ovat sosiaalisessa kontekstissa syntyneet tiedot. Kaikki henkiset toiminnot ovat Vygotskyn mukaan kollektiivisia.(Ernest 1996, 68–69.)

Vuoden 1985 lukion opetussuunnitelman perusteissa ei ole eksplisiittisesti ilmaistu oppimiskäsitystä. Sen sijaan vuoden 1994 lukion opetussuunnitelmien perusteissa tulee esille konstruktivistinen oppimiskäsitys samoin kuin oppimisprosessin yksilökeskeisyys ja uusien tietojen rakentuminen olemassa olevaan tietojärjestelmään vuorovaikutuksessa ympäristön kanssa (Seppälä 1994, 12). Tässä on pohjana Piaget'n käsitys oppimisesta, joka ilmenee sekä heikossa että radikaalissa konstruktivismissa. Toisaalta matematiikan opetuksessa nähdään tärkeäksi oppilaiden yhteistoiminnalliset työskentelymuodot, jotka sopivat ongelmakeskeiseen oppimiseen, ja niissä korostuvat keskinäisen kommunikaation taidot (Seppälä 1994, 14). Tässä erottuu Vygotskyn näkemys sosiaalisen vuorovaikutuksen merkityksestä oppimisessa, mikä on pohjana sosiaalisessa konstruktivismissa. Vuonna 2004 käyttöön otettavissa peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa kuvaillaan erikseen oppimiskäsitys, jossa sosiaalista konstruktivismia painotetaan entistä vahvemmin (OPH 2003b, 11). Lukion vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteissa oppimiskäsitys on esitetty suppeammin kuin edellä mainitussa peruskoulun vastaavassa (OPH 2003c, 14).

2.2.3 Laajan matematiikan opetussuunnitelman perusteet 1985

Vuoden 1985 opetussuunnitelmien vaihetta voidaan kutsua "ongelmanratkaisun vaiheeksi", sillä taustana tälle uudelle painotukselle oli USA:n matematiikan opettajajärjestön (NCTM) ongelmanratkaisua korostava toimintaohjelma, jonka painotukset haluttiin perustaksi myös Suomen matematiikan opetussuunnitelmien perusteissa (Kupari 1999, 50).

Vuoden 1983 koululaeissa säädettiin vastuu opetussuunnitelmien laadinnasta kuntien tehtäväksi. Kouluhallitus antoi 1985 uudet opetussuunnitelman perusteet, joissa muun muassa peruskoulun yhdeksännen luokan matematiikan tunnit vähenivät neljästä kolmeen viikkotuntiin. Yläasteelta poistuivat tasokurssit, joita matematiikassa oli ollut kolmen eri tasoisia[7]; niistä alin taso ei antanut lukiokelpoisuutta. Tilalle tuli tuntikehysjärjestelmä, jonka puitteissa opetusta voitiin eriyttää taitotasoltaan heterogeenisissä opetusryhmissä (16–19 oppilasta). Opetussuunnitelmissa korostuivat ongelmakeskei-

[7]Suppea, keski- ja laaja kurssi.

nen lähestymistapa opiskeltavaan aiheeseen. Yläasteen matematiikan oppisisällöistä poistettiin vektoreiden, epäyhtälöiden ja todennäköisyyden osuudet sekä esimerkiksi polynomilaskennan ja rationaalilausekkeiden sieventämisen osuutta kevennettiin (Kupari 1999, 51).

Matematiikan opetuksen yleistavoitteissa nousee esille hyvän jatko-opintokelpoisuuden saavuttaminen, harrastuneisuuden lisääminen matematiikkaa kohtaan ja matemaattisen yleissivistyksen saavuttaminen. Yleissivistyksen tulee "*edistää kykyä uuden tiedon hankkimiseen, kriittiseen arvioimiseen, soveltamiseen ja välittämiseen*". Laajan matematiikan tavoitteet olivat laskuteknisten valmiuksien hankkiminen, matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen sekä matematiikan tavallisimpiin sovelluksiin tutustuminen. (LOPS 1985, 283–285.)

Nimitys "ongelmanratkaisu" ei esiinny matematiikan yleistavoitteissa eikä laajan matematiikan tavoitteissa. Terminologiasta puuttuu myös nimitys 'taito'. Sen asemesta käytetään käsitettä 'kyky' esimerkiksi näin: " - - *kyvyn käyttää hyväksi laskimia*" tai "- - *kyvyn ratkaista yhtälöitä - -*" (mt., 284). Laajan matematiikan tavoitteissa nousee esille todistamisen ja toisaalta erilaisten ajattelutapojen[8] merkitys matematiikassa. Opetussuunnitelmassa on huomioitu laskinten ja tietokoneiden osuus matematiikan opiskelussa. Tosin tietotekniikan osalta tavoitteeksi on kirjattu matematiikan sovelluksissa käsiteltäväksi "*tutustuminen automaattisen tietojenkäsittelyn mahdollisuuksiin ja rajoituksiin matemaattisia probleemoja ratkaistaessa*" (mt., 285). Rajoituksien korostaminen tässä vaiheessa johtunee useiden matematiikan opettajien epäilyksistä kömpelön ja suhteellisen vähän käytetyn tietotekniikan hyödyllisyydestä matematiikan opetuksessa.

Taulukossa 2.1 on vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa nimetyt kurssit. Samaan kurssiin on voitu sijoittaa keskenään hyvin erilaisia asiasisältöjä. Esimerkiksi kurssissa 1 on reaaliluvut ja tilastomatematiikkaa sekä kurssissa 8 todennäköisyyslaskentaa ja tilastotiedettä sekä lukujonot ja sarjat. Osasta kursseja tuli sisällöltään hajanaisia. Kurssien suoritusjärjestys oli vuoden 1985 kurssien kohdalla taulukon 2.1 mukainen.

Laajan matematiikan opetussuunnitelman perusteet olivat voimassa vuodesta 1985 seuraavan vuosikymmenen puoliväliin asti, jolloin lukiot siirtyivät vaiheittain käyttämään uusia opetussuunnitelman perusteita. Lukioiden opetus 1990-luvun alkupuolella oli jo pääsääntöisesti jaksotettua joko 5- tai 6- jaksojärjestelmiin. Kurssien opetus saattoi olla keskitettyä[9] tai hajautettua[10].

[8] Deduktiivinen, induktiivinen ja analoginen.

[9] Yhdessä jaksossa yksi kurssi.

[10] Yksi kurssi useamman jakson aikana.

TAULUKKO 2.1: Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteiden laajan matematiikan kurssit ja vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden pakolliset pitkän matematiikan kurssit.

Kurssi	Nimi (1985)	Nimi (1994)
1.	Reaaliluvut Johdatus tilastomatematiikkaan	Funktiot ja yhtälöt I
2.	Yhtälö- ja epäyhtälöoppia	Funktiot ja yhtälöt II
3.	Vektorit Geometriaa	Geometria
4.	Analyyttistä geometriaa	Analyyttinen geometria
5.	Funktio–oppia Trigonometriaa	Trigonometria ja vektorit
6.	Raja-arvo Jatkuvuus Derivaatta	Differentiaalilaskenta I
7.	Differentiaalilaskentaa	Differentiaalilaskenta II
8.	Todennäköisyyslaskentaa ja tilastotiedettä Lukujonot ja sarjat	Integraalilaskentaa
9.	Integraalilaskentaa	Tilastotiedettä ja todennäköisyyslaskentaa
10.	Vektorilaskennan täydennys Avaruusgeometriaa Kompleksiluvut	Lukujonot ja sarjat
11.	Kertauskurssi	

Lukiolaisen suurin sallittu kurssimäärä oli 85, 5 kurssia.

Lukiossa käytettävien oppikirjojen oli oltava kouluhallituksen tarkastamia ja hyväksymiä. Leikolan komitea piti näitä hyvin kirjoitettuina, mutta piti puutteena muun muassa ongelmanratkaisunäkökulman puutetta. Tätä kuvastaa Leikolan komitean välimietinnössä (1988, 126) esitetty arvio laajan matematiikan oppikirjoista:

> *Lukion laajan matematiikan oppimäärän kirjat puolestaan ovat pääosin hyvin kirjoitettuja, mutta liian laajoja. - - arkielämän sovellusten, ongelmanratkaisun ja geometrian osuudet ovat jääneet suhteellisen vähäisiksi, kun toisaalta analyysin osuus on maamme matemaattisen tradition vuoksi liiankin vankka.*

Oppikirjoissa oli matematiikan keskeisten tulosten todistamista ja siten opiskelijoille tuli tutuksi matematiikan tapa tuottaa tietoa.

2.2.4 Pitkän matematiikan opetussuunnitelman perusteet 1994

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden aloittamaa vaihetta Kupari (1999) nimittää "koulukohtaisuuden ja standardien vaiheeksi"[11]. Sen myötä siirryttiin vanhasta keskitetystä opetussuunnitelmajärjestelmästä uuteen hajautettuun järjestelmään, jossa opetushallitus antaa opetussuunnitelman perusteet ja opetusministeriö tuntijaon ja näiden pohjalta koulut laativat omat opetussuunnitelmansa. Erot vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteisiin eivät olleet kovin suuria, mutta muun muassa opetuksen tavoitteet ja sisällöt esitettiin tiiviimmin ja yleisemmässä muodossa kuin edellisissä opetussuunnitelman perusteissa. (Kupari 1999, 52.). Konstruktivistinen oppimiskäsitys oli osaltaan ohjaamassa opetussuunnitelman rakenteita väljemmiksi, jolloin vastuu tavoitteiden saavuttamisesta siirtyi yhä enemmän oppilaille itselleen.

Matematiikan oppimäärän nimitys laaja matematiikka muuttui jälleen pitkäksi matematiikaksi[12]. Opetussuunnitelman perusteet olivat selvästi väljemmät eivätkä ohjanneet enää niin voimakkaasti opetustyötä kuin vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteet. Lukiot laativat omat koulukohtaiset, omaleimaiset opetussuunnitelmansa, joissa ne saattoivat tarjota pakollisten kurssien lisäksi syventäviä ja soveltavia kursseja. Lukiot saattoivat luoda omaa profiiliaan verrattuna muihin lukioihin painottamalla esimerkiksi matematiikkaa

[11] Myös "kansallisten päättötavoitteiden vaiheeksi".
[12] Vastaavasti yleinen matematiikka lyhyeksi matematiikaksi.

kurssitarjonnassaan. Suurin osa kouluista otti käyttöön uudet opetussuunnitelmat joko vuonna 1994 tai 1995.

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteissa[13] lukion matematiikan opetuksesta todettiin seuraavaa (LOPS 1994, 70):

> *Matematiikan opetuksen päämääränä on saada opiskelijat ymmärtämään matemaattisen tiedon luonne, kehittämään matemaattista ajattelua ja perehtymään matematiikan peruskäsitteisiin ja taitoihin.*

Opetussuunnitelman perusteissa käytetään matemaattisen ajattelun käsitettä, mutta sitä ei kuvailla eikä määritellä erikseen. Matemaattiset tiedot ja matematiikan taidot ovat opetussuunnitelmassa keskeisiä käsitteitä.

Pitkän matematiikan opetuksen pyrkimyksenä on pystyä käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottua tekemään otaksumia, tutkia niiden oikeellisuutta ja laatia täsmällisiä perusteluja sekä oppia arvioimaan esitettyjen perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä (Ylioppilastutkintoasetus 1994, 70–71). Lisäksi perusteissa korostetaan opiskelijoiden sellaisten matemaattisten valmiuksien saamista, joita tarvitaan matematiikan, luonnontieteiden ja tekniikan jatko-opinnoissa.

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden (LOPS 1994, 70–71) mukaan pitkän matematiikan opiskelun tavoitteena on, että opiskelija:

1. *tottuu arvostamaan ja ymmärtämään matematiikan asemaa yhteiskunnan kehityksessä ja päätöksen teossa sekä kansalaisten jokapäiväisessä elämässä,*

2. *oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa sekä tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn; tässä tarkoituksessa häntä rohkaistaan kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin,*

3. *oppii ymmärtämään ja käyttämään matematiikan kieltä, seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, keskustelemaan matematiikasta ja lukemaan matemaattista tekstiä sekä arvostamaan esittämisen täsmällisyyttä ja selkeyttä,*

4. *kehittää monipuolisen harjoittelun avulla taidot käyttää laskenta- ja päättelytaitojaan, apuvälineitä ja tietolähteitä,*

[13] Käytän lyhennettä LOPS 1994 vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteista.

5. *osaa käyttää ja soveltaa matematiikkaa ongelmien ratkaisemiseen, harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita ja*

6. *pystyy käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, laatimaan täsmällisiä perusteluja sekä oppii arvioimaan esitettyjen perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä.*

Ensimmäisessä kohdassa tulee esille hyötynäkökulma ja toisaalta arkipäivän matematiikka nostetaan tärkeäksi, mikä on opiskelijoita motivoiva lähtökohta. Toisen kohdan matemaattisen minäkuvan kehittäminen on keskeinen affektiivisen alueen tekijä ja samaten pitkäjänteiseen työskentelyyn suuntautuminen on erityisesti pitkässä matematiikassa ehdoton menestymisen edellytys. Kohdissa 4 ja 5 tulee esille ongelmanratkaisuvalmiuksien kehittäminen ja itse ratkaisuprosessin hallinta sekä kohdissa 3 ja 6 matematiikan sivistysnäkökulma ja matemaattisen tiedon luonne. Suomen vuoden 1994 matematiikan opetussuunnitelman perusteissa on pitkälti sama henki kuin Yhdysvaltojen "Math Power" -hankkeessa[14].

Pitkässä matematiikassa oli kymmenen pakollista kurssia (taulukko 2.1) ja lisäksi koulukohtaisissa opetussuunnitelmissa määriteltävät syventävät sekä soveltavat kurssit. Kurssit muodostivat selkeämpiä kokonaisuuksia kuin vuoden 1985 perusteissa olleet kurssit.

Pakollisten kurssien lisäksi lukiossa tarjottiin valinnaisina kursseina syventäviä kursseja, jotka voivat olla esimerkiksi analyysi, numeeriset menetelmät, lukuteoria ja logiikka tai kertauskurssi. Kurssit saattoivat olla myös koulussa itse suunniteltuja ja toteutettuja[15]. Pakollisten ja syventävien kurssien ohella lukio saattoi tarjota soveltavia kursseja, jotka pääsääntöisesti arvioitiin vain hyväksytty- hylättyasteikolla muiden kurssien kuuluessa pääsääntöisesti normaalin numeroarvioinnin piiriin. Useimmissa lukioissa oli eräänä soveltavana kurssina aloituskurssi, jolla kerrattiin ja syvennettiin matematiikan perustietoja ja -taitoja.

Oppikirjoja ei enää alistettu opetushallituksen ennakkotarkastukseen, vaan niiden valmistaminen oli vapaata. Tämä mahdollisti omien oppimateriaalien valmistamisen itse suunnitelluille syventäville ja soveltaville kursseille. Oppikirjojen tekijät pääsivät entistä vaivattomammin oppimateriaalin suunnitteluun ja kokeiluun, mutta kirjojen käyttäjien arvioitavaksi jäivät kirjojen sisällölliset ja pedagogiset ratkaisut.

[14] Tarkemmin kohdassa 4.6 Matemaattinen osaaminen ja kompetenssi.

[15] Esimerkiksi Kryptografian kurssi ja MatTa-kurssi Tervakosken lukiossa.

2.3 Ylioppilaskirjoitukset

Vuoden 1947 ylioppilastutkintoasetus (717/1947) oli voimassa vuoteen 1996 asti, jonka jälkeen oli voimassa uusi ylioppilastutkintoasetus (1000/1994). Tätä asetusta on muutettu 1990-luvulla joillakin uusilla asetuksilla[16]. Seuraavassa esittelen lyhyesti 1990-luvun pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksia.

Ylioppilastutkintolautakunta kertoo matematiikan kokeen tarkoituksen kirjeessään "Ylioppilastutkintolautakunnan ohjeita rehtoreille ja matematiikan opettajille" (1.2.1990) näin:

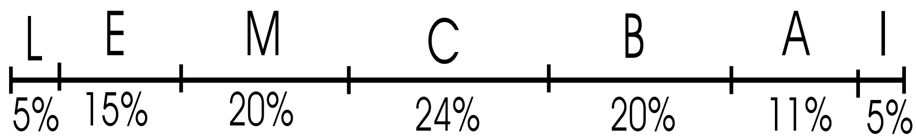
> *Ylioppilastutkintoon, jonka tarkoituksena on saada selville, ovatko oppilaat saavuttaneet riittävän kypsyyden sekä oppilaitoksia varten vahvistettujen oppikurssien mukaisen tietomäärän, kuuluu mm. matematiikan koe, jossa on osoitettava riittäviä matematiikan tietoja ja taitoja tehtävissä, joista enintään kymmenen otetaan koetta arvosteltaessa huomioon.*

Tietojen ja taitojen riittävyyden määrittelee ylioppilastutkintolautakunta kussakin kokeessa erikseen.

Ennen vuoden 1996 uutta asetusta ylioppilastutkinnossa opiskelijalla oli pakollisina aineina äidinkieli, toinen kotimainen kieli, vieras kieli ja joko matematiikan koe tai reaalikoe. Jos opiskelija oli valinnut matematiikan laajan oppimäärän, niin se kuului automaattisesti pakollisena kirjoitettavien aineiden joukkoon. Laajan matematiikan ylioppilaskokeessa oli kymmenen tehtävää, joissa neljässä tai viidessä olivat vaihtoehtoiset tehtävät. Opiskelija vastasi näihin kymmeneen tehtävään suorittaen vaihtoehtoisista kohdista jommankumman. Vuodesta 1994 alkaen lautakunta on sallinut abiturienttien käyttää ylioppilaskirjoituksissa graafisia laskimia, jotka eivät sisällä symbolisia toimintoja. Graafisten laskinten käyttöönotto on muuttanut merkittävästi pitkän matematiikan opiskelua. Käsitteitä voidaan lähestyä erilaisten tutkimustehtävien kautta, jolloin laskimen avulla opiskelija voi nopeasti havaita käsiteiden keskeisiä ominaisuuksia itsenäisesti tai ohjatusti esimerkiksi funktioiden kuvaajista, yhtälöiden juurten likiarvoista jne. Graafisen laskimen avulla opiskelija voi usein varmistua muun muassa koetehtävien lopputulosten mielekkyydestä ja siten kontrolloida omaa suoritustaan. Laskimen käytön opetus on tullut lisänä opetussuunnitelman määrittelemiin sisältöjen opetukseen. Kokeessa sallittujen taulukkokirjojen kaavakokoelmat laajenivat

[16] Asetuksilla 210/1995, 126/1996, 518/1997 ja 1192/1998.

entisestään, mikä puolestaan myös vaikutti tehtävien luonteeseen. Tehtävissä ei enää kontrolloitu kaavojen muistamista, vaan niiden mielekäs käyttö tuli tärkeämmäksi.



KUVIO 2.2: Ylioppilaskirjoitusten ohjeellinen arvosanajakauma kaikkiin kirjoitettaviin aineisiin vuodesta 1996 lähtien (Ylioppilastutkintolautakunta 1995).

Asetuksessa 1000/1994 laaja matematiikka muuttui nimeltään pitkäksi ja yleinen lyhyeksi matematiikaksi. Opiskelija saattoi hajauttaa tutkintonsa useammalle kirjoituskerralle, ja ylioppilaskirjoitusten yleisarvosanaa ei enää laskettu opiskelijalle. Pitkän matematiikan pakolliset kurssit suorittanut opiskelija sai valita pakolliseksi kokeeksi joko pitkän tai lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen tai valita ylimääräiseksi jommankumman edellä mainituista kokeista. Lisäksi asetus antoi mahdollisuuden olla kirjoittamatta minkäänlaista matematiikan koetta. Asetuksen uskottiin lisäävän pitkän matematiikan opiskelijoiden määrää, sillä enää ei pitkän matematiikan opiskelleiden kokelaiden tarvitsisi pelätä pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta selviytymistä.

TAULUKKO 2.2: Ylioppilaslautakunnan antamat ohjeelliset pisterajat eri arvosanoille.

L	E	M	C	B	A
53	42	33	25	19	15

Arvosteluasteikkoon (kuvio 2.2) tuli uusi arvosana E (eximia cum laude approbatur), joka sijoittuu arvosanojen M (magna cum laude approbatur) ja L (laudatur) väliin siten, että vanha laudatur-arvosana on jaettu kahteen osaan E ja L. Uuden laudatur-arvosanan saa kirjoittajista noin 5 %, kun aikaisemmin sen sai noin 20 % kirjoittajista. Muiden arvosanojen[17] osuudet pysyivät ohjeessa samoina.

[17] *Cum laude approbatur* (C), *lubenter approbatur* (B), *approbatur* (A) ja *improbatur* (I).

Kuvion 2.2 arvosanojen suhteelliset osuudet ovat ylioppilastutkintolautakunnan laatimat suurpiirteiset ohjeet, joita ei ilmeisesti ole tarkoitus noudattaa prosenttiyksikön tarkkuudella kaikissa kirjoitettavissa aineissa.

Taulukossa 2.2 on ylioppilaslautakunnan antamat ohjeelliset pisterajat eri arvosanoille matematiikassa. Yleensä pisterajat kullekin arvosanalle ovat olleet 1990-luvulla näiden ohjeellisten arvojen alapuolella[18].

2.4 Muita opetukseen vaikuttaneita tekijöitä

2.4.1 Lukio-opintojen ja pitkän matematiikan suosio 1990-luvulla

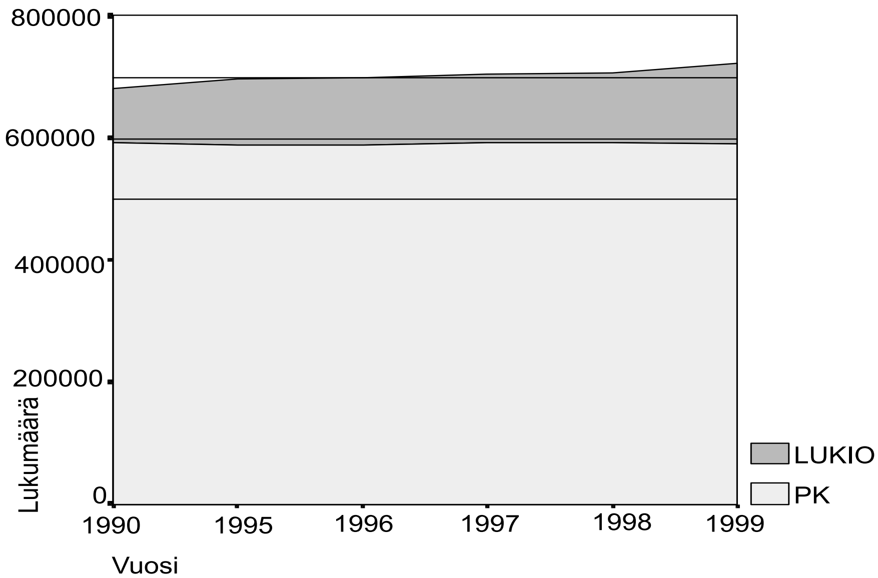
Peruskoulun oppilasmäärissä ei tapahtunut suuria vaihteluita 1990-luvulla (kuvio 2.3). Sen sijaan lukion oppilasmäärät kasvoivat tasaisesti. Kun vuonna 1990 päivälukioissa opiskeli yhteensä 88160 lukiolaista, niin vuonna 1998 lukiolaisia oli jo 111328 (Tilastokeskus 2003). Lukiolaisten osuuden kasvu on nähtävissä myös oheisesta kuviosta 2.3 ja taulukosta 2.3.

TAULUKKO 2.3: Eri ikäluokkien peruskoulun päättötodistuksien saaneiden (Pk:n ptod) ja ylioppilastodistuksen (Yotod) saaneiden lukumäärät ja ylioppilastodistusten saaneiden prosenttiosuus saman ikäluokan päättötodistuksen saaneiden lukumäärästä. Suluissa on vuosiluku. (Suomen tilastollinen vuosikirja 2000, 469–470.)

Pk:n ptod	Yotod	Prosenttiosuus
61054 (1990)	29351 (1993)	48%
64175 (1991)	32069 (1994)	50%
65634 (1992)	33853 (1995)	52%
65483 (1993)	34695 (1996)	53%
64297 (1994)	35026 (1997)	54%
63756 (1995)	34701 (1998)	54%
63514 (1996)	34276 (1999)	54%

Suurin osa jokaisesta ikäluokasta suorittaa peruskoulun ja sen jälkeen lukionkin samaan tahtiin ikätovereidensa kanssa. Lukio-opiskelun venyminen

[18]Vrt. kuvio 6.3 s. 116



KUVIO 2.3: Peruskoulun (Pk) ja lukion (Lukio) oppilasmäärät yhteensä vuosina 1990, 1995–1999. (Tilastokeskus 2003.)

neljään vuoteen luokalle jäämisen tai etukäteen suunnitellun opintoaikataulun perusteella koski 1990-luvulla suhteellisen harvoja. Tämän perusteella saadaan lukio-opintojen suosiosta viitteitä, kun tarkastellaan peruskoulun päättötodistuksen saaneiden lukumäärää ja siitä ajankohdasta kolme vuotta myöhemmin ylioppilaskirjoituksissa hyväksyttyjen lukumäärää. Näiden määrien vertaaminen antaa vain viitteellisen kuvan lukio-opintojen suosiosta, sillä lukioon saattaa pyrkiä eri ikäluokkiin kuuluvia opiskelijoita ja toisaalta kirjoituksissa hyväksyttyjen joukossa on myös eri ikäluokkiin kuuluvia. Peruskoulun päättötodistuksen saaneet ovat iältään kohtalaisen homogeeninen joukko kuten lukioluokatkin[19].

Taulukossa 2.3 lasketut ylioppilastodistuksen saaneiden ja peruskoulun päättötodistuksen saaneiden lukumäärien suhde näyttää, että yhä suurempi osa ikäluokista suorittaa ylioppilastutkinnon ja siis myös lukion oppimäärän. Ylioppilastodistuksen saajien määrä on kasvanut 1990-luvun lopulle tultaessa noin 34–35 tuhanteen, mutta ikäluokat eivät ole kasvaneet samassa suhteessa. Tyttöjen osuus ylioppilastutkinnon suorittaneista 1990-luvulla oli noin 60 % (Tilastokeskus 2002, 16).

Pitkän matematiikan valitsi vuosina 1997-2001 noin 40 % lukiolaisista ja

[19]Iltalukiota lukuun ottamatta.

TAULUKKO 2.4: Koko maan lukion pitkän matematiikan oppimäärän suorittaneet ja päättötodistuksen saaneet vuosina 1997–2001. Prosentit kuvaavat pitkän matematiikan valintojen osuutta kunakin vuonna. Vuoden 2000 ja 2001 luvuissa on mukana aikuislukiot, iltalukiot ja lukioiden iltalinjat. (OPH 2003, 11.)

Vuosi	Pitkän matematiikan opiskelijoiden prosenttiosuus	Tyttöjen lukumäärä	Poikien lukumäärä
1997	39,5	4964	7683
1998	40,3	5225	7660
1999	40,6	5402	7516
2000	39,4	5996	7706
2001	40,2	5880	7968

suurin osa (noin 60 %) pitkän matematiikan valinneista oli poikia (taulukko 2.4). Tytöt ovat siis aliedustettuina pitkässä matematiikassa siinä mielessä, että lukion aloittavista opiskelijoista noin 60 % oli tyttöjä.

2.4.2 LUMA-hanke

LUMA-hanke oli opetushallituksen koordinoima matematiikan ja luonnontieteiden kehittämisprojekti vuosina 1996–2002. Kyseistä hanketta toteutettiin 16 kehittämisverkossa, joissa toimi 78 kuntaa ja niiden alueella yhteensä 270 oppilaitosta (peruskouluja, lukioita, ammatillisia ja muita oppilaitoksia). Keskeisenä tavoitteena oli aikaan saada muutoksia opettajissa ja heidän tavassaan opettaa. Motivoituneiden ja asiansa osaavien opettajien toiminnan kautta uskottiin myös oppilaiden kiinnostuksen ja osaamisen tason kasvavan. (OPH 2002.)

Matematiikan osalta verkkojen toiminnan tavoitteina oli muun muassa tyttöjen kiinnostuksen lisääminen, opetusmenetelmien monipuolistaminen ja yhteistyön lisääminen niin oppilaitosten kuin opettajien välillä. Opetuksessa tapahtuneesta muutoksesta seuraisi, että opiskelijat kiinnostuisivat enemmän matematiikasta, erilaiset oppijat pystyisivät parantamaan osaamisensa laatua ja opiskelijat hankkisivat todellisessa elämässä ja jatko-opinnoissa tarvittavaa osaamista. Määrällisenä tavoitteena oli opetusministeri Heinosen asettama tavoite: 16000 pitkän matematiikan kirjoittajaa vuonna 2002. Tavoitetta tarkistettiin myöhemmin 17 000 opiskelijaan. Lisäksi pyrittiin nostamaan tyttöjen osuus yli 40 %:iin pitkän matematiikan opiskelijoista. Tavoitteisiin uskottiin päästävän lisäämällä opetuksessa voimakkaasti kokeellisuutta, soveltavuutta ja ongelmanratkaisua. Opetuksen lähtökohdat ja esimerkit tuli valita opiskelijoille tutusta arkielämästä ja tasapuolisesti sekä tyttöjen että poikien elämänpiiristä (OPH 1998, 10.)

Opetushallitus tarjosi tukitoimina opettajille maksutonta täydennyskoulutusta, johon kuului muun muassa yliopistollisten arvosanojen suorittamista sekä 3–5 opintoviikon laajuisia täydennyskursseja. Näiden kurssien tavoitteena oli aineenhallinnan ja didaktisen osaamisen paraneminen. Vuosina 1996–1999 aloitti matematiikan yliopistollisen arvosanakoulutuksen (15 ov, 20 ov tai 22 ov) 15069 opettajaa. Muuhun opintoviikkokoulutukseen osallistui myös opettajia, sillä matematiikan koulutukseen osallistui vuosina 1997–1999 926 opettajaa (OPH 1999, 39). Lisäksi LUMA-projekti tuotti opettajien käyttöön monenlaista lisämateriaalia.

Loppuraportissa LUMA-tukiryhmä arvioi tavoitteiden toteutumista koko LUMA-ohjelman osalta. Pitkästä matematiikasta raportissa todetaan, ettei pitkän matematiikan opiskelijoiden lukumäärä kasvanut toivotulla tavalla. Lisäksi raportissa huomautetaan, että vuoden 1996 ylioppilastutkintoasetuksen mukainen ylioppilastutkinto ei kannusta suorittamaan pitkää matematiikkaa. Huomattavasti pienempi osa tytöistä kuin pojista valitsee lukiossa pitkän matematiikan, vaikka peruskoulun päättövaiheessa osaaminen on samantasoista. Syyksi tähän otaksutaan, että tytöillä on heikompi itseluottamus matematiikan osaamisessa kuin pojilla. (OPH 2002, 3–4.)

Matematiikan osaamisen osalta loppuraportissa pidetään huolestuttavana pitkän matematiikan lukeneiden voimakasta jakaantumista paremmin ja huonommin osaaviin. Tämä näkyy pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittavien heikkona tasona. Asian korjaamiseksi loppuraportissa ehdotetaan tuntijaon ja opetussuunnitelmien perusteiden uudistamista siten, että opiskelijalle jäisi ydinasioiden sisäistämiseen riittävästi aikaa. (OPH 2002, 27.)

LUMA-projektin myötä matemaattisten aineiden opetus oli päättäjien ja tiedotusvälineiden huomion kohteena 1990-luvun loppupuolella. Matemaattisten aineiden opetusta kehitettiin opettajille maksuttomilla kursseilla sekä kuntien opetusvälineinvestoinneilla. LUMA-kouluksi pääseminen loi koululle luonnontieteisiin painottuvaa profiilia; samalla kunta sitoutui hankkimaan tarvittavia opetusvälineitä.

Luku 3

Matemaattisen ajattelun piirteitä

3.1 Lähtökohtia matemaattiseen ajatteluun

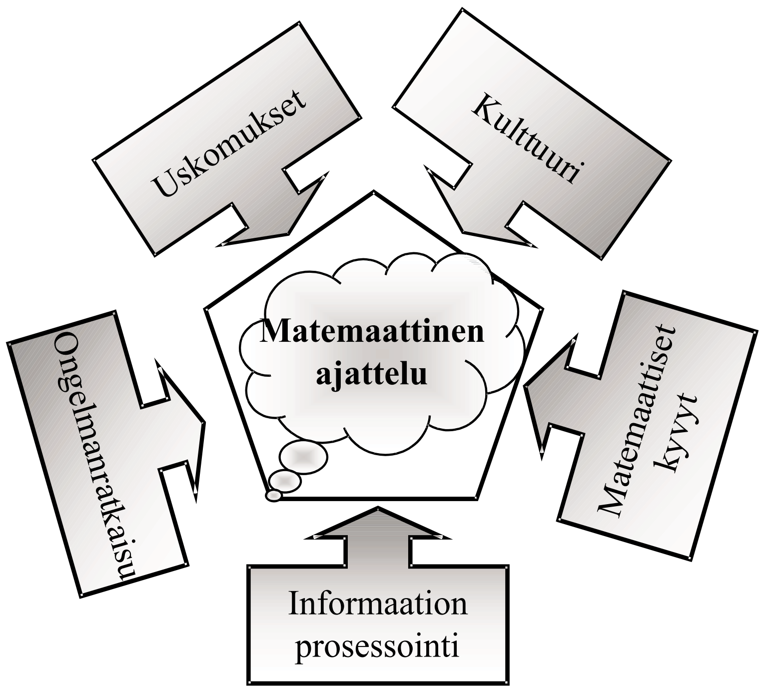
3.1.1 Johdanto

Matemaattisen ajattelun käsitteen käyttö näyttää vakiintuneen kansallisessa ja kansainvälisessä ainedidaktiikan kirjallisuudessa[1] sekä hallinnollisissa teksteissä[2]. Kirjoittajilta jää useimmiten käsite tarkentamatta, joten lukijan on yritettävä muodostaa siitä mielikuva kontekstin perusteella tai pitäydyttävä omissa ennakkokäsityksissään. Toisaalta kyseisen käsitteen sisältöä kuvailleet tutkijat eivät ole päätyneet yhdenmukaisiin sisältökuvauksiin. Sternberg (1996) tutki matemaattisen ajattelun määritelmiä ja kuvauksia löytääkseen niistä yhteisiä elementtejä. Tällaisia ei löytynyt. Näinpä hän päätteli, että erilaiset tutkimuslähtökohdat painottavat erilailla matemaattiseen ajatteluun vaikuttavia tekijöitä. Näin syntyy oleellisesti erilaisia näkemyksiä matemaattisen ajattelun luonteesta. Esimerkiksi psykometriikan tutkija kysyy, mitkä kykyfaktorit ovat keskeisiä matemaattisessa ajattelussa, kun taas kognitiivisen psykologian tutkija kysyy, mitkä mentaaliset prosessit ja representaatiot ovat relevantteja matemaattisessa ajattelussa. Kulttuuriorientoitunut ajattelun tutkija määrittää, mitkä ajattelun elementit ovat vuorovaikutuksessa kulttuurin kanssa. Koulutuksen tutkija etsii vastauksia siihen, mitkä oppilaan ohjaamisen periaatteet ongelmanratkaisussa ovat relevantteja matemaattisen ajattelun kehittymisen ohjaamisessa. Matemaatikko saattaa kysyä, mitkä ajattelun näkökulmat ovat matematiikan rakenteiden ymmärtä-

[1] Esim. Hannula 2004; Niemi 2004; Malaty 2002; Sternberg 1996.
[2] Esim. OPH 1994, 2003b, 2003c.

misessä tärkeitä. Näiden kysymyksenasettelujen pohjalta syntyvät erilaiset kuvaukset matemaattisen ajattelun luonteesta. (Sternberg 1996, 314.)

Edellä esitetyn perusteella matemaattista ajattelua on tarkasteltu muun muassa seuraavien käsitteiden yhteydessä: opiskelijan uskomukset ja kyvyt, opiskelijaa ympäröivä kulttuuri sekä opiskelijan ongelmanratkaisutaito ja informaation prosessointi. Nämä lähtökohdat matemaattisen ajattelun tutkimukseen on koottu kuvioon 3.1. Kyseisessä kuviossa on käsitteitä, joiden avulla voidaan ymmärtää ja kuvata matemaattista ajattelua tai ne vaikuttavat oleellisesti ajatteluprosessiin.



KUVIO 3.1: Keskeisiä lähtökohtia opiskelijan matemaattisen ajattelun tutkimukseen.

3.1.2 Uskomukset

Matematiikan oppimisen ja opettamisen tutkimuksessa on 1980-luvulta alkaen nostettu esiin affektiivisen alueen tekijöiden vaikutus. Niiden katsotaan voivan selittää matematiikassa huomattavan osan oppijoiden kognitiivisen alueen vaihtelusta (Schoenfeld 1985b; McLeod 1992; Pehkonen 1998). Pehkosen (1998, 58) mukaan oppilaan uskomukset ovat ikään kuin suodatin, jonka kautta kaikki oppilaan ajattelu ja toiminta tapahtuu. Oppilaan uskomukset voivat olla esteenä muutoksille opiskelussa, joten oppilaan uskomuksia tuntemalla voi ennustaa oppilaan ajattelua (Furinghetti & Pehkonen 2000, 8). Uskomukset ovat matematiikan opiskelussa keskeisiä vaikuttajia oppilaan ajatteluun ja toimintaan.

Affektiivisen alueen tai affektin määritelmiä on useita, sillä eri tieteenalat ovat omista lähtökohdistaan muodostaneet määritelmiään kyseisestä käsitteestä. Näitä on esitelty tarkemmin esimerkiksi Malmivuoren (2001) väitöskirjassa. Yksi tapa määritellä affekti on tehdä luettelo siihen kuuluvista osa-alueista. Lisäksi niiden yhteydessä voidaan määritellä esimerkiksi affektin intensiteetti, suunta ja kohde. McLeod (1992, 578) liittää affektiiviseen alueeseen uskomukset (*beliefs*), asenteet (*attitudes*) ja tunnetilat (*emotions*). Hän tulkitsee niitä intensiteetin, suunnan ja laajuuden kannalta. Uskomukset, asenteet ja tunnetilat eroavat toisistaan muun muassa kognitiivisen ja affektiivisen komponentin painotuksen sekä keston suhteen. Näistä uskomukset ovat melko pysyviä ja kehittyvät pitkän ajan kuluessa, mutta eivät ole kovin voimakkaita. Uskomusten kognitiivinen komponentti on voimakkain, kun taas affektiivinen komponentti on vähäisin. (McLeod 1992, 578–579.)

Opiskelijan uskomusten, asenteiden ja tunteiden lisäksi voitaisiin tarkastella oppimisprosessiin vaikuttavina tekijöinä myös opiskelijan motivaatiota ja itsesäätelyä, jotka osaltaan suuntaavat ja kontrolloivat opiskelijan oppimista, motivaatiota sekä suoritusta[3]. Muita affektiivisen alueen käsitteitä ovat esimerkiksi opiskelijan käsitykset, näkemykset, itseluottamus, itsetunto, matematiikkapelko ja kunnianhimo (ks. Malmivuori 2001, 15). Näistä käsitteistä tarkastelen vain niitä näkemyksiä, jotka liittyvät läheisesti uskomuksiin. Tutkimukseni empiirisen aineiston tarkastelussa on tarpeellista erotella toisistaan käsitteet *uskomus* (käsitys), *asenne* ja *tunnetila*.

Käsitteen 'uskomus' määrittely ei ole vakiintunut kirjallisuudessa. Määrittelyt ovat painottuneet joko uskomusten kognitiiviseen[4] tai affektiiviseen[5] komponenttiin. Uskomukset ovat kognitiivisen ja affektiivisen alueen välimaastossa, sillä niillä on komponentti molemmissa alueissa. Uskomuksia voidaan tarkastella kognitiivisen alueen ja affektiivisen alueen näkökulmista. (Pehkonen 1998, 41–42.)

Tiedon ja uskomuksen välille on ongelmallista löytää selvä ero, sillä klassinen filosofinen käsitys on, että tieto on "*hyvinperusteltu tosi uskomus*" (Niiniluoto 1992a, 48–49). Kääntäen voitaisiin ajatella, että uskomus on sub-

[3]Tarkemmin Ruohotie 1997.
[4]Uskomuksen ja tiedon suhde.
[5]Uskomuksen suhde asenteeseen ja tunnetilaan.

jektiivista tietoa, joka perustuu yksilön kokemuksiin, havaintoihin ja tiedostamiseen (Kangasniemi 2000, 13). Yksilön subjektiiviset uskomukset edustavat yksilön kognitiivisia rakenteita tiedon näkökulmasta (Pehkonen 1998, 43). Furinghetti (1998, 28) näkee yksilön tietorakenteen sisältävän aina uskomukset. Hän jakaa tiedon edelleen kahteen erityyppiseen komponenttiin, joista toinen käsittää "virallisen" ulkopuolelta vahvistetun tiedon ja toinen "yksityisen" oman persoonallisen tiedon. Green (1971, 69) löytää tietämisen ja uskomisen eron niiden totuusarvon varmuudesta ja siten myös tiedon ja uskomuksen eron. Tieto on siis Greenin mukaan tosi ja oikeutettu uskomus[6]. Luonnontieteellisen tiedon muodostamisessa on keskeistä empiria yhdessä teorian muodostuksen kanssa, jolloin tutkijan uskomukset eivät voi olla vaikuttamatta tiedon syntyprosessiin tutkijan ennakkokäsitysten, intuition ja muun sellaisen muodossa. Tieteellisellä tiedolla on kuitenkin tiedeyhteisön asettamat kriteerit, jotka erottavat sen uskomuksista.

Uskomuksen käsitteen määrittelyssä on luontevaa korostaa yksilön subjektiivista kokemusmaailmaa, joka ei aina tue tieteellisen tiedon ymmärtämistä. Pehkonen (1999, 121) määrittelee käsitteen uskomus seuraavasti:

> *Uskomukset ymmärretään yksilön henkilökohtaisena subjektiivisena kokemusperäisenä tietona (ja tuntemuksena) tietyistä asioista - uskomuksen kohteesta, joille uskomuksille ei aina pystytä antamaan objektiivisesti hyväksyttäviä perusteluita.*

Uskomukset voidaan jakaa edelleen tietoisiin (*concious beliefs*) ja tiedostamattomiin uskomuksiin (*unconcious beliefs*), joista edellisillä tarkoitetaan käsityksiä (*conceptions*) ja jälkimmäisillä primitiiviuskomuksia (*primitive beliefs*). Yksilön käsityksissä kognitiivinen komponentti on hallitseva, kun taas primitiiviuskomuksissa on affektiivinen komponentti on painottuneempi. Tietoisia uskomuksia, joissa on painottunut affektiivinen komponentti, kutsutaan näkemyksiksi (*views*). (Pehkonen 1998, 45.) Kupari (1999, 12) näkee käsitykset korkea-asteisimpina uskomuksina, jotka syntyvät yksilön päättelyprosessin tullessa yhä tietoisemmaksi ja jotka muodostavat pohjan evaluoinneille.

Greenin (1971) mukaan uskomukset eivät koskaan esiinny eristäytyneinä yksin, vaan ne esiintyvät aina joukoissa ja muodostavat uskomusjärjestelmiä. Uskomusjärjestelmissä uskomukset ovat kvasi-loogisissa suhteissa keskenään. Toisin sanoen ne ovat suhteissa, jotka yksilö itse on luonut niiden välille eivätkä välttämättä ole objektiivisesti loogisia. Uskomusjärjestelmässä uskomuk-

[6] Vrt. Lindgren 2003.

sista toiset ovat tärkeämpiä ja keskeisempiä yksilön kannalta kuin toiset. Siten uskomusten yhtenä ominaisuutena on psykologinen keskeisyys. Kolmantena ominaisuutena uskomusjärjestelmille Green mainitsee klusterirakenteen, jonka mukaan uskomukset voivat muodostaa suhteellisen itsenäisiä ryhmiä. (Green 1971, 41–47.)

Käsitteitä uskomus ja asenne pidetään usein toistensa synonyymeinä tai nähdään uskomuksien olevan yksi asenteiden luokka (Malmivuori 2001, 48). Asenteet ovat reaktiotaipumuksia, ja sellaisina ne viittaavat käyttäytymisen suuntautuneisuuteen (Koponen 1994, 7). Psykologiassa asenteen jotain objektia kohtaan määritellään muodostuvaksi kolmesta komponentista: uskomukset objektista, tunnereaktiot objektiin ja käyttäytyminen objektia kohtaan (Malmivuori 2001, 16). Saari (1983, 39) määrittelee asenteen komponenttirakenteiseksi käsitteeksi, joka sisältää affektiivisen, kognitiivisen ja konatiivisen tai toimintavalmiutta edustavan komponentin. McLeod (1992, 581) katsoo asenteen olevan affektiivinen reaktio, joka sisältää joko positiivisia tai negatiivisia tunteita kohtalaisen intensiivisesti ja pysyvästi. Asenteessa on siis affektiivinen komponentti hallitsevampi kuin niissä käsityksissä, jotka painottuvat kognitiiviselle alueelle. Käsitteen 'asenne' määrittelyyn tulee edelleen uusia näkökulmia, joiden pohjalta syntynee uusia määrittelyjä (ks. Di Martino & Zan 2001). Matematiikkaan liittyvät asenteet sisältävät pitämistä, nauttimista tai kiinnostusta tai niiden vastakohtia eri asioihin matematiikassa. Kuitenkin matematiikan eri osa-alueisiin voi opiskelijalla olla erilaisia asenteita: esimerkiksi opiskelija ei pidä geometrian todistuksista, mutta nauttii ongelmanratkaisutehtävistä (McLeod 1992, 578).

Tunnetilalla tarkoitetaan intensiivistä mutta lyhytkestoista affektiivista reaktiota, joka voi sisältää negatiivisia tai positiivisia tuntemuksia (Malmivuori 2001, 15). Matematiikan opiskelussa esiintyviä negatiivisia tunnetiloja ovat esimerkiksi pelko, pettymys, turhautuminen, suuttumus tai jopa kauhu ja positiivisia esimerkiksi ilo, tyytyväisyys, ahaa-elämys; viimeksi mainitut saattavat olla pitkäaikaisiakin (Malmivuori 2001, 89). Tunnetilat eivät ole stabiileja, vaan voivat vaihtua suunnaltaan päinvastaisiksi[7] lyhyessä ajassa. Tunnetilat ovat sidoksissa tilanne- ja asiakonteksteihin (Kangasniemi 2000, 15).

Tiivistäen voi todeta, että siirryttäessä vasemmalta oikealle käsitejonossa *uskomus*, *asenne* ja *tunnetila* affektiivinen osuus kasvaa ja kognitiivinen osuus vähenee, samoin myös reaktioiden intensiteetti kasvaa, mutta pysyvyys vähenee. Affektiivisen alueen hahmottaminen edellä esitetyillä käsitteillä ei ole aukoton eikä ristiriidaton. Uskomuksia voidaan tarkastella akseleilla kognitiivinen-affektiivinen ja tietoinen-tiedostamaton (Pehkonen 1998). Täs-

[7]Esimerkiksi suru iloksi.

sä kentässä käsityksissä painottuu kognitiivinen ja tietoinen alue, asenteissa affektiivinen tietoinen alue ja tunnetiloissa affektiivinen tiedostamaton alue. Jaottelu ei ole kategorinen, vaan suuntaa antava, joten erojen tekeminen mainituille käsitteille on tulkinnan varaista.

Nojaan empiirisen aineistoni tulkinnassa Pehkosen (1999, 1998) esittämään uskomuksen määritelmään. Tutkimukseni kannalta riittävä käsitteistö affektiivisen alueen käsittelyyn muodostuu uskomuksista, käsityksistä, asenteista ja tunnetiloista. Sijoitan ´uskomus´-käsitteen yläkäsitteeksi, joka sisältää käsityksen, asenteen ja tunnetilan[8]. Opiskelijoiden uskomuksia tarkastelen heidän matematiikkakuvansa (*view of mathematics*) kautta[9].

3.1.3 Kulttuurin vaikutus

Yksilön uskomuksiin vaikuttaa kulttuuri, jossa hän elää. Barton (1996, 1036) yhtyy D'Ambrosion näkemykseen, jonka mukaan oman kulttuurin omaksuneelle ryhmälle ovat ominaisia itse kehitetyt käytänteet, tiedot, ammattikieli ja koodit, jotka ovat erityisen tärkeitä matematiikan alueella. Muiden tieteiden lisäksi myös matematiikka nähdään kunkin oman kulttuurin muodostamien "linssien" läpi. Niitä muotoilevat kunkin kulttuurin historia, toimintatavat, sosiaaliset kontekstit, kielen rakenne jne. Lähtökohtana on, että yksilön matemaattinen ymmärrys karttuu ja muotoutuu ympäröivässä kulttuurissa yksilön oman toiminnan kautta. Hän konstruoi ja strukturoi matemaattista tietämystään ennakkokäsitystensä pohjalta käytännön elämään liittyvistä tilanteista, joissa esimerkiksi mitataan tai ollaan sosiaalisessa vuorovaikutuksessa. Uusi matemaattinen tieto on kietoutunut yksilön jokapäiväiseen, kulttuurisidonnaiseen elämään. (Saxe ym. 1996, 121.)

Tutkittaessa yksilön matemaattista ajattelua kulttuurin näkökulmasta keskeisiksi tekijöiksi nousevat oppimisen tilannesidonnaisuus, kieli ajattelun välineenä ja kansallisen kulttuurin ominaispiirteet. Viimeksi mainitut tunnetaan omana tutkimusalueenaan etnomatematiikkana (*ethnomathematics*).

Matematiikan oppimisen tilannesidonnaisuus tulee esille arkipäivän matematiikassa (*everyday math*), jossa sovelletaan proseduureja arkielämän matematiikkaa vaativissa tilanteissa. Nämä tilanteet ovat usein sosiaalista kanssakäymistä kaupassa, pankissa ja muissa paikoissa asioitaessa. Tällöin tulee esille sellaisia kansallisen kulttuurin ominaispiirteitä, jotka eivät ole suoraan siirrettävissä toisiin kulttuureihin. Esimerkiksi teollistuneissa maissa koneet

[8] Vrt. Pehkonen 1998.

[9] Ks. McLeod 1992; Pehkonen 1998.

tekevät laskutoimitukset, joten asiakkaan huomio ei enää kiinnity varsinaisesti laskemisen oikeellisuuteen, vaan siihen, onko tuote laskutettu kerran vai useamman kerran ja vastaako tuotteeseen merkitty hinta kassakuitissa olevaa hintaa. Samat ostotapahtumat lasketaan kehitysmaissa manuaalisesti, ja asiakkaan on syytä tarkistaa laskutoimituksen oikeellisuus. (Sternberg 1996, 308–309.)

Antropologisesta näkökulmasta on mielenkiintoista tutkia kielen rakennetta ja sanojen etymologiaa. Esimerkiksi eri kielillä muodostettujen lukusanojen rakenne antaa viitteitä ihmiskunnan lukukäsitteen kehityksestä. Toisaalta erot lukusanojen rakenteessa selittävät omalta osaltaan lasten vaikeuksia lukukäsitteen oppimisessa (Sternberg 1996, 308). Kieli vaikuttaa matemaattiseen ajatteluun ja tuo mukaan kulttuurin omaleimaisen vaikutuksen (Barton 1996, 1044). Kielen merkitys ajattelun – myös matemaattisen ajattelun – jäsentämisessä ja ilmaisemisessa on ollut tärkeä tutkimuksen ja kehittämisen kohde[10]. Matematiikan didaktiikan tutkimuksissa – etenkin kvalitatiivisissa tutkimusmenetelmissä – kielen merkitys ajattelun välittäjänä on keskeinen.

Etnomatematiikassa keskeisiä tutkimuksen kohteita ovat eri sukupolvien matemaattisen tiedon siirtämisen ja matemaattisten prosessien jäljittäminen sekä analysointi vaihtelevissa kulttuurisysteemeissä. Etnomatematiikan tutkimuskohteina ovat olleet niin sanotut kolmannen maailman maat Afrikassa ja Aasiassa. Niissä elintaso on matala ja koulutusjärjestelmät ovat kehittymättömiä. Tutkimusten käsitteinä ovat olleet esimerkiksi epäformaali matematiikka (*informal mathematics*), spontaani matematiikka (*spontaneous mathematics*), ei-standardi matematiikka (*non-standard mathematics*) ja kätketty matematiikka (*hidden mathematics*). Tyypillistä kaikille mainituilla käsitteille on, että niihin sisältyvä matemaattinen ajattelu on opittu pääasiassa koulutusjärjestelmien ulkopuolella ja on vahvasti kietoutunut arkielämän matemaattisiin ongelmiin. (Gerdes 1996, 912–914.)

Suomalaisessa kulttuurissa tunnetaan sanonta ”terveen talonpoikaisjärjen käyttö” myös matemaattisten ongelmien ratkaisuissa. Tällöin viitataan esiisiemme tapaan ratkoa käytännön elämässä vastaan tulleita matemaattisia ongelmia ilman kouluoppia hiljaisen tiedon varassa[11]. Se sisältää runsaasti kansallisesta kulttuurista omaksuttua jokapäiväisessä elämässä tarvittavaa tietoa, jota asianomainen ei pysty välttämättä kuvailemaan verbaalisesti. Kulttuurilähtöisessä lähestymistavassa tulee esille matemaattisen ajattelun tilannesidonnaisuus ja arkipäivän esimerkkien vaikutus opiskeluun.

[10] Ks. Pimm 1987; Joutsenlahti 2003a, 2003b.
[11] Englanniksi *tacit knowledge* (Polanyi 1962).

3.1.4 Matemaattiset kyvyt

Eroja matematiikan oppimisessa on pyritty selittämään yksilön matemaattisten kykyjen (*abilities*) erolla[12]. Käsitteet 'kyky', 'kyvykkyys', 'lahjakkuus' ja 'älykkyys' ovat lähellä toisiaan. Kukin edellä luetelluista käsitteistä on ollut tutkimuskohteena. Esimerkiksi matematiikkaan liittyvät kyvyt ja kykyrakenteet ovat olleet tarkastelun kohteina Suomessa muun muassa Vahervuon (1948), Malisen (1969), Leinon (1977, 1978) ja Kerannon (1981) matematiikan ainedidaktiikan piiriin kuuluvissa tutkimuksissa.

Käsitteiden 'kyky', 'taito' (*skill*) ja 'älykkyys' (*intelligence*) yhteys näkyy esimerkiksi Silfverbergin (1999, 106) spatiaalisen kyvyn määrittelyssä:

> *Spatiaalisilla kyvyillä viitataan - - sellaisiin spatiaalisen ajattelun taitoihin, jotka ovat suhteellisen pysyviä sekä vaikeasti kehitettäviä ja myös lähellä sitä, mitä me yhdeltä osalta ymmärrämme yleisellä älykkyydellä.*

Tässä määrittelyssä tulee hyvin esille käsitteiden 'kyky' ja 'taito' päällekkäisyys. Samanlainen päällekkäisyys näkyy vuoden 1985 lukion opetussuunnitelmien perusteissa[13], jossa kyky viittaa lähinnä hankittavaan taitoon. Käsite 'kyky' viittaa yksilön potentiaalisiin ominaisuuksiin. Taito on yksilöllistä aktiviteettia, joka pohjautuu yksilön kykyyn ja jossa intentionaalisesti sekä suunnitelmallisesti luodaan tai tehdään jotakin (Savolainen & Airaksinen 1992, 203–204). Määrittelyssä esiintynyt älykkyyden käsite johtaa lahjakkuuden käsitteeseen. Matemaattisesti kyvykkääksi luokitellulla henkilöllä on Gardnerin lahjakkuusluokituksen[14] mukaan ilmeisesti ainakin loogismatemaattista ja spatiaalista lahjakkuutta.

Krutetskii (1976, 318,350) pitää matemaattisten kykyjen olennaisina piirteinä kyvykkyyttä ymmärtää kirjoitettua ja suullista matemaattista tietoa, itse esittää sitä sekä kirjallisesti että suullisesti ja kyvykkyyttä muistaa matemaattista informaatiota. Krutetskii löysi tutkimuksissaan neljä erityyppistä matemaattista kykyä: analyyttinen, geometrinen, abstraktis-harmoninen ja mielikuvien avulla työskentely. Keranto (1981, 85) yhdistää yksilön kykyrakenteen ja hänen toimintastrategiansa siten, että yksilön kykyrakenne vaikuttaa toimintastrategiaan ja toisaalta toimintastrategian valinta saattaa kertoa yksilön sen hetkisestä kykyrakenteesta.

[12]Esim. Vahervuo 1948.
[13]Ks. LOPS 1985, 284.
[14]Esim. Uusikylä 1994, 66.

Kilpatrick (1983) luettelee eräitä matemaattisten kykyjen osa-alueita. Tällaisia ovat muun muassa kyky loogiseen ajatteluun kvantitatiivisten ja spatiaalisten suhteiden, lukujen ja kirjainsymbolien alueella, kyky ajatella matemaattisin symbolein ja kyky lyhentää matemaattisen ajattelun prosessia sekä kyky ajatella lyhennetyillä struktuureilla. Lisäksi tyypillisiä matemaattisten kykyjen ilmentymiä ovat pyrkimys ratkaisujen selvyyteen, yksinkertaisuuteen, taloudellisuuteen ja rationaalisuuteen ja henkisen prosessin joustavuus matemaattisessa toiminnassa. Erittäin tärkeä on myös kyky henkisen prosessin suunnan nopeaan ja vapaaseen uudelleen konstruoimiseen kytkemällä ajatteluketju päinvastaiseen suuntaan. Näistä ainakin osa voitaisiin lukea taitojenkin joukkoon.

Carrollin (1996) kehittämä kognitiivisten kykyjen kolmikerros-teoria (*three-stratum theory*) on esimerkkinä uusista faktorianalyysiin perustuvista kykytutkimuksista. Carroll (1996, 4) määrittelee matemaattisen kyvyn viittaavan yksilöiden välisiin eroihin suorittaa onnistuneesti eri vaikeustasoisia matemaattisia tehtäväluokkia. Yksilö on matemaattisesti kyvykäs, jos hän ratkaisee kaikki tai lähes kaikki vaikeiden matemaattisten tehtävien luokkaan kuuluvat tehtävät. Carrollin (1996) mukaan matemaattisen ajatteluun vaikuttavia kykyjä yleisen kyvykkyyden (g) lisäksi ovat joustava intelligenssi (*fluid intelligence*), karttuva intelligenssi (*crystallized intelligence*), yleinen muistamiskyky (*general memory*), yleinen visuaalinen havaintokyky (*general visual perception*) ja informaation prosessointinopeus (*speed of information processing*). Joustava intelligenssi, josta Keranto (1981) käyttää myös nimitystä "myötäsyntyisyyden ja kypsyneisyyden" faktori, sisältää taidon päättelyketjujen muodostamiseen ja päättelynopeuden. Karttuva intelligenssi, josta Keranto (1981) käyttää nimitystä "opitun ja koetun älykkyyden" faktori, sisältää tiedon hallinnan ja kielitaidon. Yleinen visuaalinen havaintokyky käsittää visualisoinnin, spatiaaliset suhteet, mekaanisen tiedon, havaintonopeuden, päätöksentekonopeuden ja päätöksenteon joustavuuden.

Carrollin tapa luokitella yksilöiden matemaattinen kyvykkyys hierarkkisiin luokkiin eri vaikeusasteisten matemaattisten tehtävien suoritusten perusteella on perinteinen tapa tutkia matemaattista kyvykkyyttä. Carrollin edellä esitetty matemaattisten kykyjen määritelmä on rakenteeltaan samanlainen kuin esimerkiksi Vahervuon (1948, 8) esittämä:

> *Yksilön matemaattisella suorituskyvyllä (eräänä hetkenä) tarkoitamme kaikkien niiden matemaattisluontoisten tehtävien suorittamismahdollisuutta, jotka hän sinä hetkenä kykenisi ratkaisemaan.*

Kyvyt ovat yksilöillä suhteellisen muuttumattomia. Kuitenkin näin muotoutuvan matemaattisen ajattelun prototyypin, joka koostuu esimerkiksi faktorianalyysin avulla löydetyistä kyvyistä, on vaikea kuvata ja ennustaa yksilön ajattelua esimerkiksi matematiikan eri osa-alueilla: heikot kyvyt geometrian alueella eivät estä menestymästä algebran tai tilastotieteen alueilla. (Sternberg 1996, 305–306.)

Edellä kuvatuissa määritelmissä matemaattinen kyky nähdään pääasiassa tehtävän ratkaisuun orientoituneena. Krutetskiilla ja Kilpatrickilla – osittain Carrolillakin – matemaattiset kyvyt tulevat esille erilaisten matematiikan kannalta tärkeiden ajatteluprosessien hallintana, joten kuvaus matemaattisista kyvyistä on prosessien hallinnan kuvausta. Yksilön matemaattiset kyvyt ovat lähinnä ihmisyksilön potentiaalinen ominaisuus, ja ne muodostuvat matematiikan kannalta merkittävien ajatteluprosessien hallinnasta. Yksilön matemaattinen ajattelu on hänen matemaattisten kykyjensä säätelemä prosessi.

3.1.5 Ongelmanratkaisu

Eräät tutkijat[15] ovat pitäneet ongelmanratkaisua koko matemaattisen ajattelun ytimenä. Tunnetun historian ajan koulumatematiikassa on ratkottu harjoituksina rutiininomaisia ongelmia, mutta ongelmanratkaisu Polyan[16] (1971) kuvailemassa merkityksessä painottui tutkimuksissa ja opetussuunnitelmissa vasta 1980-luvulta lähtien (Schoenfeld 1992, 336). Ongelmanratkaisututkimuksissa on ollut useita eri lähtökohtia: tiedon prosessiluonne (1970–luvulla), oppijoiden metakognitiot (1980–luvun puolivälissä) ja sosiaalinen interaktio oppimisprosessissa (1980–luvun loppupuolella) (Schoenfeld 1992, 347). Zimmermann (2001, 55) mainitsee pohjoismaisista ongelmanratkaisututkijoista tutkijat Björkvist, Haapasalo, Niss ja Pehkonen, joista Haapasalo on tutkinut uusien teknologioiden käyttöä ja Pehkonen matemaattisten uskomusten vaikutusta ongelmanratkaisussa.

Björkqvist (2001, 116) viittaa ongelmanratkaisun tärkeyteen kouluopetuksessa ja esittää retorisen kysymyksen, voisiko ongelmanratkaisua kuvata jopa matematiikan ytimeksi? Lester ja Lambdin (2004) näkevät ongelmanratkaisusta suurta hyötyä matematiikan opetukselle. Heidän näkemyksensä mukaan ongelmanratkaisu matematiikassa kehittää opiskelijan ymmärrystä matematiikasta tavalla, joka on opiskelijaa motivoivaa, vaikuttaa opiskelijan asenteisiin ja uskomuksiin, helpottaa opitun muistamista, vahvistaa opitun siirtovaikutusta uusiin tilanteisiin ja syvempää ymmärtämistä (mt., 192–194).

[15] Esim. Schoenfeld 1992, 1994.

[16] Teoksen *´How to solve it´* 1. painos ilmestyi 1945 (Princeton University Press).

Berry (1994, 51) jaottelee koulumatematiikassa ongelmanratkaisun kolmen otsakkeen alle: perusongelmat, matemaattiset tutkimustehtävät sekä mallintaminen. Kahdessa viimeksi mainitussa otsakkeessa ongelmanratkaisu sisältää Polyan mallin (Polya 1971) mukaisia ratkaisuprosesseja, joissa on neljä vaihetta: ymmärrä ongelma, laadi suunnitelma, toteuta suunnitelma ja tarkista tuloksesi. Ongelmanratkaisun osatekijöitä ovat Schoenfeldin (1985a, 44–45; 1992, 348) mukaan resurssit, strategiat, kontrolli ja emootiot sekä uskomukset. Resurssit tarkoittavat kaikkea sitä tietotaitoa mikä ratkaisijalla on käytettävissään ongelmanratkaisutilanteessa. Kontrolli sekä emootiot ja uskomukset tulevat esille metakognitioiden kautta. Opiskelijoiden kokeiden[17] ajatellaan koostuvan ongelmanratkaisutaitoja mittaavista tehtävistä, mutta näiden kokeiden tehtävätyypit ovat olleet enimmäkseen suljettuja tehtäviä, joissa on tietty alkutila ja ratkaisuoperaatioiden jälkeen saatava yksikäsitteinen lopputila[18]. Polyan ongelmanratkaisuprosessin vaiheet tulevat parhaiten esille avoimissa ongelmissa, joista puuttuvat joko alku- tai lopputila tai molemmat[19]. Schoenfeldin (1992) mukaan ongelmanratkaisu edellyttää matemaattista ajattelua. Ongelmanratkaisussa korostuvat strategioiden hallinta sekä sopivien strategioiden tunnistaminen ja valitseminen kuhunkin ongelmaan. Tätä prosessia ohjaavat opiskelijan metakognitiot, jotka väljästi tulkiten tarkoittavat yksilön ajattelua omasta ajattelustaan. Metakognitioiden rooli ongelmanratkaisussa on keskeinen, sillä ne ohjaavat ratkaisijan päätöksentekoa: mitä strategiaa hän missäkin vaiheessa käyttää ja miten kauan hän yrittää sen avulla ratkaista ongelmaa ennen kuin valitsee uuden strategian (McLeod 1989, 25).

Dreyfus ja Eisenberg (1996, 253–281) ovat luetelleet hyvälle ongelmanratkaisijalle tärkeitä ajattelun taitoja. Heidän mukaansa keskeisiä asioita kehittyneessä matemaattisessa ajattelussa ovat ajattelun esteettisyys, analoginen päättely, struktuurien ymmärtäminen, esittäminen, visuaalinen päättely ja käänteinen ajattelu. Edellä mainitut matemaattisen ajattelun puolet mahdollistavat yhdessä yksilön joustavan ajattelun, jolloin esimerkiksi ongelmanratkaisija voi nähdä ongelman ”sisäpuolelta” ja monesta eri näkökulmasta.

Ajattelun esteettisyys tarkoittaa, että opiskelija pyrkii elegantteihin ratkaisuihin, joille usein on ominaista lyhyt esitystapa ja omaperäinen sekä oivaltava tapa yhdistellä ratkaisuun tarvittavia elementtejä. Useimpiin ongelmiin on olemassa useita erilaisia ratkaisuja, joista toisissa on matemaatikon mielestä enemmän viehätysvoimaa kuin toisessa. Monille ammattimatemaatikoille ratkaisun esteettisyys onkin juuri matemaattisen ajattelun ydin. (mt., 254.)

[17] Esim. ylioppilaskirjoitustehtävät.
[18] Ks. Pehkonen 1994, 62.
[19] Ks. Pehkonen 1994.

Analogisesti päättelevä opiskelija näkee yhteneviä piirteitä erityyppisten matemaattisten ongelmien välillä ja hyödyntää niitä uusien ongelmien ratkaisuissa sekä uusien käsitteiden oppimisessa. Analogiat ovat yksi ongelmanratkaisun heuristiikkaa[20]. Jos jokin ongelma on vaikea ratkaista sellaisenaan esimerkiksi kolmiulotteisessa avaruudessa, niin silloin se voidaan ensin ratkaista yksinkertaisemmassa tapauksessa esimerkiksi tasossa ja vasta sitten päätellä kysytty ratkaisu. (mt., 260.)

Opiskelija ymmärtää struktuureja, kun hän hahmottaa faktojen välisiä suhteita sekä suhteiden välisiä suhteita. Matemaattisten käsitteiden struktuurin omaksuminen on keskeinen osa matemaattista ajattelua. Usein opiskelijaa auttaa käsitteiden rakenteen ymmärtämisessä analogioiden löytyminen uusien ja ennen opittujen käsitteiden välillä. Opiskelijan kannattaa tutkia käsitteeseen tutustuessaan myös symmetriaa. Käsitteen tai ongelman struktuurin löytäminen merkitsee opiskelijalle seuraavia asioita: kertoo mahdolliset operaatiot kyseisessä tapauksessa, kehittää taitoa arvioida eri toimenpiteiden tuloksellisuutta, rakenteen tunteminen mahdollistaa analogian käyttämisen ongelmanratkaisussa ja helpottaa käsitteiden muistamista. Strukturoitu tieto on tehokkaampaa käyttää kuin irralliset tiedon palat. (mt., 264–267.)

Matemaattisen tiedon esittäminen eri muodoissa on tärkeä taito ongelmanratkaisussa, jossa annetun ongelman esittäminen jossain toisessa isomorfisessa muodossa saattaa johtaa ratkaisun löytymiseen. Käsitteellä voi olla useita erilaisia esitysmuotoja. Esimerkiksi funktio voidaan esittää muun muassa algebrallisessa, graafisessa tai tilastollisessa esitysmuodossa. Monille opiskelijoille ongelman tai käsitteen visualisointi helpottaa kokonaisuuden hahmottamista ja ymmärtämistä. Opiskelijan matemaattinen ajattelu on sitä tehokkaampaa, mitä useampaa käsitteen esitysmuotoa hän pystyy käyttämään rinnakkain ja löytämään niiden välille yhteyksiä. (mt., 267–271.)

Visuaalisesti päättelevä opiskelija hahmottaa kokonaisuuksia ja ymmärtää erilaisia struktuureja muita tapoja helpommin kuvien kautta. Symmetrian havaitseminen saattaa olla opiskelijalle helppoa visuaalisista esityksistä. Funktioiden ominaisuuksien tutkimisessa graafiset esitykset antavat opiskelijalle viitteitä siitä, mitä kannattaa laskea. Toisaalta niiden avulla voidaan tarkastaa jo suoritettujen laskelmien paikkansa pitävyys. Mutta visualisointi voi myös rajoittaa opiskelijan ajattelua: ongelma voi yksinkertaistua liikaa, jos tarkasteltavaksi tuleekin jokin erikoistapaus. (mt., 272–274.)

Käänteisessä ajattelussa ratkaisija tietää ongelman lopputilan ja ratkaisee ongelman päättelemällä lopputuloksesta ongelman alkutilan ja lopputilan välisen ratkaisuprosessin. Useille ihmisille ratkaisuun johtaneen ajattelun kulun

[20] Vrt. Polya 1971.

miettiminen on erittäin vaikeaa, sillä siinä pannaan yhtä suuri painoarvo itse ajatteluprosessille kuin saadulle tuloksellekin. (mt., 274–279.)

Matemaattinen ajattelu painottuu ongelmanratkaisulähtökohdasta tehtäväorientoituneeksi. Opiskelijalle uusien matemaattisten käsitteiden opiskelu voidaan toteuttaa ongelmakeskeisesti[21], mikä ei kuitenkaan ole matematiikassa ainoa tapa. Opiskelijan käsitteen muodostamisprosessi voi edetä vaiheittain myös ilman erityistä ongelman asettelua.

3.1.6 Informaation prosessointi

Käsitteitä *informaatio* ja *tieto* käytetään usein puhekielessä synonyymeina. Niiniluoto (1992a, 9) huomauttaa tähän liittyen tieto-opin ja informaatioteorian radikaalista erosta: tieto-opin juuret ovat antiikin Kreikassa, mutta informaatioteoria on kehitetty vasta 1920-luvulla. Informaatio voidaan jakaa ei-kielelliseen informaatioon[22], informaatiota kantaviin merkkijonoihin[23] ja kielelliseen informaatioon[24] (Niiniluoto 1992a, 64). Informaatiota voidaan pitää laajana yläkäsitteenä, jonka suppea erikoistapaus *tieto* on (mt., 64). Informaation prosessointia tutkivan lähestymistavan pohjana on ihmisen ajattelun kuvaaminen tietokoneen toiminnan mallilla. Ihmisen tiedonkäsittelyjärjestelmässä tyypillistä informaation prosessointia ovat muun muassa havaitseminen, muistaminen, mieltäminen, ajattelu ja päätöksenteko (Laarni ym. 2001, 87). Tärkeimmät ajatteluprosessit ovat kategoriointi, päätöksenteko, päättely ja ongelmanratkaisu. Ajatteluprosessin ydin on mieltäminen (apperseptio), joka muodostaa ajattelun pohjana olevalle tietoesitykselle (representaatiolle) sen sisällön. (Laarni ym. 2001, 109.)

Assosiaatioteoriaan perustuvassa konnektionismissa[25] (*connectionism*) tiedon edustus oletetaan hajautetuksi, ja tiedon prosessointi tapahtuu rinnakkain yli koko kentän. Bereiter (2002, 31) kuvaa konnektionismia aivojen metaforalla: aivoihin kuuluu runsaasti toisiinsa kytkeytyneitä yksiköitä, jotka aktivoivat ja sammuttavat yhteyksiä yksiköstä toiseen kautta koko verkon.

[21]”*Sillä tarkoitetaan opetusta, jossa opettaja problematisoimalla oppimistilanteet johdattelee oppilaat itsenäiseen tiedonkeruuseen, -käsittelyyn ja -arviointiin*” (Pehkonen 1994, 61).

[22]”*Fysikaalisen tai mentaalisen maailman järjestyneisyys.*” (mt., 64)

[23]*Data* (mt., 64).

[24]”*Kolme tasoa: syntaktinen (merkkien suhteellinen esiintymisharvuus), semanttinen (väitelauseiden ilmaisuvoima) ja pragmaattinen (merkityksellisyys kielen käyttäjälle)*” (mt., 64–65).

[25]Konnektionismi on *”ajattelutapa, jonka mukaan ihmisen käyttäytymisen kokonaisuudet ovat elementtien yhdistelmiä eli konnektioita.”* (Saariluoma ym. 2001, 268).

Konnektionismin keskeiset periaatteet sopivat tiedon rakentumisen ja siten myös matemaattisen ajattelun kuvaamiseen.

Useat tiedon ja mielen tutkijat ovat kiinnostuneet konnektionismista kuten esimerkiksi Bereiter (2002). Tällöin ihmismielen toimintaa verrataan neuroverkon toimintaan. Se koostuu suuresta määrästä yksiköitä[26] ja niiden välisistä yhteyksistä[27]. Yksiköt voidaan jakaa kolmeen luokkaan: syöte- (*input*), vaste- (*output*) ja piiloyksiköt (*hidden unit*). Syöteyksiköt saavat kvantitatiiviset arvonsa joko verkon ulko- tai sisäpuolelta. Vasteyksiköt lähettävät kvantitatiivisia arvoja, joita tulkitaan ja toisinaan lähetetään takaisin syöteyksikköön. Piiloyksiköt saavat arvonsa verkon toisilta yksiköiltä, ja ne lähettävät tuloksensa vastaavasti toisille yksiköille. Eri yksiköiden välisten kytkentöjen voimakkuuksia kuvataan painokertoimilla (*weights*), jotka toteutetaan yleensä jatkuva-arvoisina lukuina. Painokerroin voi olla positiivinen tai negatiivinen. Negatiivinen painokerroin tarkoittaa yksikön estotilaa. Positiivinen tila puolestaan tarkoittaa vastaanottoa. Yksikön painokertoimen laadun eli aktivaatiotilan määrää aktivaatiofunktio, joka laskee yhteen kaikkien lähettävien yksiköiden osuudet. Kunkin yksikön osuus on määritelty sen ja tarkasteltavan yksikön yhteyden painokertoimen avulla. Tietty kognitiivinen toiminta saattaa verkon lopulta vakaaseen tilaan, jossa aktivoituneiden yksiköiden väliset yhteydet pysyvät vakaina. Oppimisen tulos koodautuu painokertoimiin. Konnektionismissa oletetaan, että ihmisen kaikki kognitiivinen toiminta voidaan esittää verkon yksiköiden ja niiden välisten yhteyksien aktivaatiotason kuvauksilla. Muistaminen ja unohtaminen voidaan esittää verkon toiminnan avulla. (Bereiter 2002, 35; Garson 2002.)

Konnektionismi on käyttökelpoinen malli matemaattisen ajattelun kuvaamisessa, koska kummassakin keskeisiä tarkasteltavia käsitteitä ovat tiedot ja prosessit. Tietoon liitetään usein ymmärtämisen käsite, jota voidaan tutkia ongelmanratkaisun avulla. Prosessien ohjaukseen liittyvät strategiat, metakognitiot ja emotionaaliset tekijät. Uskomukset ja asenteet ovat tärkeitä yksilön matemaattiseen ajatteluun liittyviä tekijöitä, joita 2000-luvun taitteen tutkijat pitivät keskeisinä opiskelijoiden opintomenestystä selittävinä käsitteinä[28].

[26]Vrt. neuronit.
[27]Vrt. synapsit.
[28]Esim. TIMSS-tutkimus ja NAEP 2000.

3.1.7 Tiivistelmä matemaattisen ajattelun piirteistä

Edellä esitetyistä teoreettisista lähtökohdista voidaan kuvata matemaattista ajattelua erilaisten prototyyppimallien (*prototypical model*) avulla. Niiden keskeinen ajatus on, että määriteltävälle käsitteelle ei ole löydettävissä tarkasti erottuvia piirteitä, vaan ainoastaan ominaispiirteitä, jotka ovat tyypillisiä käsitteen konstruktiolle (Sternberg 1996, 304). Sternberg (1996) on luokitellut matemaattista ajattelua tutkivia lähestymistapoja niille tyypillisten prototyyppien perusteella.

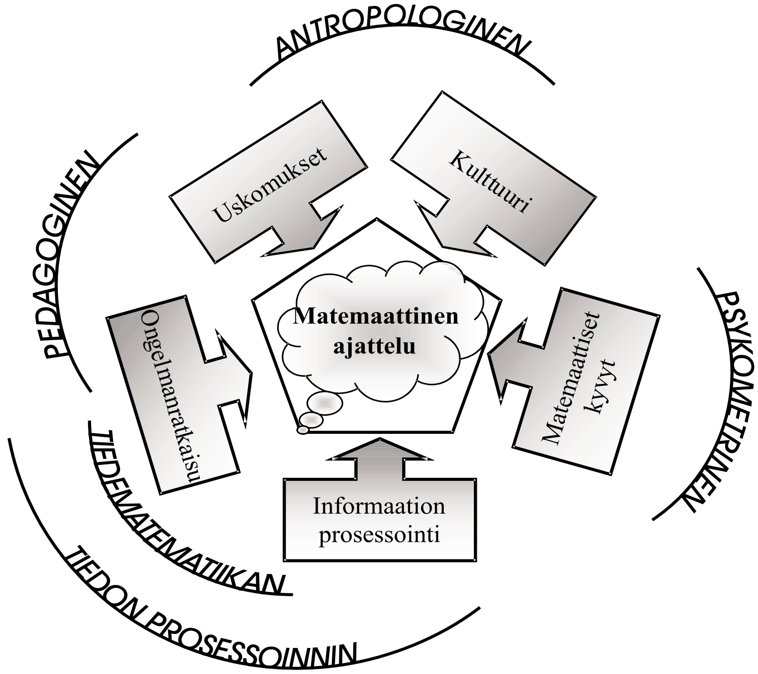
Hän on jakanut lähestymistavat karkeasti viiteen ryhmään (Sternberg 1996, 304–314):

1. Psykometrinen lähestymistapa (*The psychometric approach*)
2. Antropologinen lähestymistapa (*The anthropological approach*)
3. Pedagoginen lähestymistapa (*The pedagogical approach*)
4. Tiedematematiikan lähestymistapa (*The mathematical approach*)
5. Tiedon prosessoinnin lähestymistapa (*The computational approach*)

Neljännen lähestymistavan nimeän tiedematematiikaksi erotukseksi koulumatematiikan tai matematiikan lähestymistavasta. Tässä lähestymistavassa korostuvat matematiikan tieteenalan ominaiset piirteet, jotka eivät korostu samalla tavalla esimerkiksi pedagogisessa lähestymistavassa. Viidennen ryhmän nimen voisi kääntää nimellä komputationaalinen lähestymistapa. Tämä nimi viittaa kognitivismin peruslähtökohtaan, jossa ajattelua pidetään tietokonemaisena informaation prosessointina (Hautamäki 1993, 56). Jatkossa käytän kuitenkin edellä valitsemaani termiä *'tiedon prosessoinnin lähestymistapa'*, koska tutkimuksessani tietokäsitys on keskeinen, jolloin ajattelua ei nähdä tietokonemaisena symbolien manipulaationa.

Kuviossa 3.2 on kuvattu matemaattisen ajattelun tutkimisen kannalta keskeisten käsitteiden ja Sternbergin (1996) eri lähestymistapojen suhteita. Suurin osa Sternbergin lähestymistavoista sisältää useampia edellä esitettyjä lähtökohtia matemaattiseen ajatteluun (kuvio 3.2). Tarkastelen lyhyesti Sternbergin lähestymistapoja.

Psykometrisessä lähestymistavassa matemaattinen ajattelu kuvaa ihmismieltä ikään kuin karttana, jossa on useita erikokoisia ja eri puolilla sijaitsevia alueita (Sternberg 1996, 305). Keskeinen tutkittava käsite on opiskelijan matemaattiset kyvyt.



KUVIO 3.2: Käsitteelliset lähtökohdat ja Sternbergin (1996) lähestymistavat matemaattisen ajatteluun.

Antropologinen lähestymistapa tarkastelee matemaattista ajattelua kulttuurin näkökulmasta. Arkipäivän matematiikka sisältää ympäröivän kulttuurin värittämän kontekstin, jonka vain siinä ympäristössä elävä voi täysin ymmärtää. Antropologiseen lähestymistapaan voi liittää myös uskomukset, sillä uskomusten ja opiskelijaa ympäröivän kulttuurin välillä on väistämättä kiinteä yhteys.

Pedagogisessa lähestymistavassa matemaattiseen ajatteluun otetaan lähtökohdaksi opettamisen näkökulma: toiset matemaattiset käsitteet ovat helpompia opettaa oppilaille koulussa tuloksekkaasti kuin toiset. Tarkastelemalla opettamis- ja oppimisprosesseja jälkeenpäin voidaan kuvailla oppilaiden matemaattiseen ajatteluun vaikuttavia tekijöitä ja etsiä keinoja kehittää oppilaiden ajattelua. Ongelmanratkaisu on keskeinen työskentelytapa matematiikan opiskelussa. Muita tarkasteltavia tekijöitä ovat oppilaiden uskomukset ja asenteet matematiikasta ja matematiikan opiskelusta, sosiaalinen interaktio luokassa, opetettavan sisällön kontekstisidonnaisuus ja mielekkyys oppilaille sekä opetusviranomaisten ohjeistukset (Sternberg 1996, 312; Bransford ym. 1996, 244–246). Pedagogisessa lähestymistavassa nousee esille opetussuunnitelman merkitys koulussa haluttujen toimintojen määrittäjänä ja ohjaajana. Opetussuunnitelman perusteissa kouluviranomaiset valitsevat kouluissa opetettavan matemaattisen sisällön minimäärät ja kuvailevat, minkälaista oppilaiden matemaattista ajattelua tavoitellaan. Opetussuunnitelmat määrittävät matemaattisen ajattelun käsitteen sisältöä sekä pedagogiselta että yhteiskunnan kannalta ja täten matemaattisen ajattelun käsite joutuu myös poliittisen päätöksenteon vaikutuspiiriin.

Tiedematematiikan lähestymistavassa tutkitaan, mitkä matemaattisen ajattelun piirteet ovat keskeisimpiä matemaattisten käsitteiden muodostamisprosessissa ja ongelmanratkaisussa opiskeltaessa matematiikan tieteenalaa esimerkiksi yliopistossa. Tässä lähestymistavassa tulee esille ongelmanratkaisun lisäksi informaation prosessoinnin kuvaus.

Tiedon prosessoinnin lähestymistapa kattaa näkemyksen informaation prosessoinnista ja koulukontekstissa myös ongelmanratkaisulähtökohdan. Ongelmanratkaisussa on erotettavissa erityyppisten tietojen prosessointia, jonka avulla kuvataan siinä tapahtuvaa matemaattista ajattelua. Ongelmanratkaisuprosessia ohjaavat opiskelijan metakognitiot, joihin hänen uskomuksillaan on huomattava vaikutus. Tiedon prosessoinnissa uskomuksilla on tärkeä ohjaava rooli ja siksi ne on syytä ottaa tarkasteluun mukaan.

Kootusti ilmaistuna kuvaan lukiolaisen matemaattista ajattelua tiedon prosessoinnin lähestymistavalla, jolloin otan huomioon myös opiskelijan uskomukset tärkeänä ajattelua ohjaavana tekijänä.

3.2 Matemaattisen ajattelun kuvauksia

3.2.1 Johdanto

Tarkastelen seuraavaksi sellaisia matemaattisen ajattelun määritelmiä ja kuvauksia, joissa painottuu edellä esitelty tiedon prosessointia kuvaava lähestymistapa. On hankalaa tulkita, mistä näkökulmasta matemaattinen ajattelu kulloinkin määritellään. Kaikissa määritelmissä ei käytetä nimitystä matemaattinen ajattelu, vaikka ne viittaavat kyseiseen käsitteeseen.

Vuoden 1994 opetussuunnitelmien perusteiden mukaan koulun tehtävänä on edistää oppilaiden (matemaattisen) ajattelun kehittymistä (Seppälä 1994, 21). Ajattelua on vaikeaa määritellä. Eräiden tutkijoiden mielestä ajattelun käsite on niin monitahoinen, että sen määritteleminen eksplisiittisesti on mahdotonta (Bourne ym. 1971, 8). Psykologiassa ajattelun keskeisimpinä elementteinä pidetään ongelmanratkaisua, käsitteen muodostamista sekä kielen ja ajattelun yhteyttä (mt., 9). Mehtäläinen (1992) näkee tiedon rakenteiden ja kognitiivisten prosessien välillä voimakkaan vuorovaikutuksen, joten ajattelun kehittyminen on

> *tiedon käsitteellisen ja sen käyttöön liittyvän organisoidun rakenteen omaamista ja hyödyntämistä, tiedon muodon ja sisällön kytkeytymistä* (mt., 27).

Ajattelussa prosessoitavan tiedon rakenne ja muoto antavat ajattelulle tunnistettavia ominaispiirteitä.

Kaikki Bournen, Ekstrandin ja Dominowskin (1971) mainitsemat ajattelun komponentit korostuvat koululaisen matemaattisessa ajattelussa, jossa keskeisintä on ongelmanratkaisu ja käsitteen muodostamisprosessi. Matemaattinen ajattelu on toisinaan rajattu vain ongelmanratkaisuprosessien yhteyteen[29], mutta matemaattisten käsitteiden rakentumisprosessi erilaisissa oppimistilanteissa kuuluu myös matemaattisen ajattelun piiriin. Matematiikan opetuksen keskeinen päämäärä on lukion opetussuunnitelman perusteiden (1994) mukaan opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittyminen, kuten edellä alaluvussa 2.2.4 on jo esitetty.

Sierpinska (1994) on tutkinut ymmärtämistä. Tarkasteltuaan muiden tutkijoiden käsityksiä ymmärtämisestä hän on jakanut siihen liittyviä malleja ja teorioita neljään luokkaan (mt., 119–120):

1. Teoriat, jotka ovat keskittyneet ymmärtämisen tasojen hierarkiaan (Hierarkkiset teoriat)

2. Teoriat, joiden keskeinen idea on kehitellä "mentaalimalleja" (*mental model*), "käsitemalleja" (*conceptual model*) tai "kognitiivisia struktuureja" (*cognitive structure*) (Rakenneteoriat)

3. Teoriat, joissa ymmärtämisprosessin objekti- ja prosessitulkinnat vuorottelevat ymmärtämyksen kasvaessa (Dialektiset teoriat)

4. Teoriat, joissa on historiallis-empiirinen lähestymistapa tulkittaessa ymmärtämisprosessia (Historiallis-empiiriset teoriat)

Suomenkieliset termit *hierarkkiset teoriat*, *rakenneteoriat* sekä *dialektiset teoriat* että *historiallis-empiiriset teoriat* ovat tässä työssä käyttöön otettuja nimityksiä. Sierpinskan (1994, 72) Ymmärtäminen voidaan hahmottaa

[29]Esim. Schoenfeld 1994.

prosessina (*process of understanding*); sellaisena se luonnollisesti sisältyy matemaattiseen ajatteluun[30]. Tässä työssä ymmärtäminen liitetään konseptuaaliseen tietoon. Käytän edellä esitettyä jakoa luokitellessani matemaattista ajattelun teorioita ja kuvauksia, joissa korostuu tiedon prosessointia kuvaava lähestymistapa.(vrt. Sierpinska 1994, 72.)

3.2.2 Hierarkkiset teoriat

Hierarkkisiin teorioihin kuuluvat teoriat, jotka kuvaavat ymmärtämisen ja ajattelun kasvua vaiheittaisena, toisistaan eroteltavissa olevina prosesseina. Koulumaailmassa oppilaan matemaattista ajattelua voidaan havainnoida pääasiassa kahdessa erityyppisessä prosessissa: käsitteen muodostumisessa ja ongelmanratkaisussa. Tämän tutkimuksen empiirinen osa rajoittuu tehtäväorientoituneeseen matemaattiseen ajatteluun. Näen kuitenkin aiheelliseksi esitellä myös käsitteen muodostusprosessia kuvaavan teorian, jotta matemaattisen ajattelun eri puolet tulisi riittävästi esille.

Avitalin ja Shettleworthin teoria sopii ongelmanratkaisussa tarvittavan matemaattisen ajattelun kuvaamiseen ja Pirien & Kierenin teoria käsitteen oppimisessa esiintyvän prosessoinnin kuvaamiseen. Esittelen Pirien ja Kierenin teorian hieman tarkemmin kuin muut seuraavan katsauksen teoriat, koska se edustaa ainoana käsitteen muodostumisprosessin kuvausta.

Myös van Hielen teoria[31] kuuluu hierarkkisiin teorioihin, ja sillä on yhtäläisyyksiä Pirien ja Kierenin teoriaan (Silfverberg 1999, 60). Koska sitä on tutkittu lähinnä vain geometrian alueella, sivuutan tässä yhteydessä kyseisen teorian. Esittelyn ulkopuolelle jätän myös hierarkkisen Piaget'n teorian yleisestä lapsen ajattelun kehityksestä, vaikka sitä voisi soveltaa matemaattisen ajattelun kuvaamiseen.

Matemaattinen ajattelu voidaan *Avitalin ja Shettleworthin teorian* mukaan jakaa kolmeen hierarkkiseen tasoon (Avital & Shettleworth 1968, 6): 1)mieleenpalauttaminen (tai tunnistaminen), 2)yleistäminen (algoritminen ajattelu) ja 3)avoin etsiminen. Alin taso on asian mieleenpalauttaminen tai tunnistaminen siinä muodossa, kun se on henkilölle opetettu. Seuraavassa tasossa on yksinkertainen yleistäminen tai siirtovaikutus opitusta tehtävästä tai sisällöstä uuteen opitun kaltaiseen tehtävään tai sisältöön. Tätä tasoa voidaan kutsua myös algoritmisen ajattelun tasoksi; tällä tasolla ihminen käyttää

[30] Pehkonen (2000, 376) yhtyy Tallin (1991) näkemykseen, että matemaattinen ymmärtäminen muodostaa keskeisen osan yksilön matemaattiseen ajatteluun liittyvää oppimista.

[31] Ks. Silfverberg 1999.

opittuja algoritmeja uusissa tilanteissa, jotka eivät kovin paljon eroa alkuperäisestä algoritmin oppimiskontekstista. Matemaattisen ajattelun kompleksisuuden ylin taso on avoin etsiminen, jossa yksilön toiminta ei rajoitu operaatioihin ja ennalta opittuihin tehtävän ratkaisumalleihin. Hän voi uudelleen järjestää tai esittää tehtävän osat ja havaita niiden välillä uusia riippuvaisuuksia. Matemaattinen keksiminen ja oivaltaminen liitetään usein tämän tason ajatteluun. (Kangasniemi 1989, 99–100). Ylimmän tason ajattelu vastaa reflektoivaa ajattelua . Tälle luokitukselle on löydetty vastineet tehtävien luokituksessa käytetyssä Wilsonin taksonomiasta, jossa on kuvailtu matematiikan opetuksen tavoitteiden tiedollisia taksonomisia luokkia. Kansainvälisessä koulusaavutustestissä (SIMS-testi) on käytetty tämän teorian mukaista hierarkkista prosessikuvausta rinnastettuna tehtävien luokitukseen käytettyyn taksonomiaan.

Pirien ja Kierenin teoriassa (1994) ymmärryksen kasvu nähdään kokonaisvaltaisena, dynaamisena ja vaiheistettuna sekä ei-lineaarisena prosessina. Ymmärtäminen ei siis ole tiedon hankintaa tai löytämistä, vaan monin tavoin kehittyvä prosessi, jossa on erotettavissa hierarkkisia vaiheita. Kyseisessä teoriassa on kahdeksan sisäkkäistä ymmärtämisen tasoa, joista jokainen taso on prosessi itsessään. Matemaattisen ymmärtämisprosessin edistymisessä voidaan erottaa seuraavat kahdeksan eri vaihetta[32] (Pirie & Kieren 1994; Silfverberg 1999):

1. Alkeistietämisen vaihe (Primitive Knowing **PK**)
2. Mielikuvan muodostamisen vaihe (Image Making **IM**)
3. Mielikuvan hallinnan vaihe (Image Having **IH**)
4. Ominaisuuksien huomioimisen vaihe (Property Noticing **PN**)
5. Formalisoinnin vaihe (Formalising **F**)
6. Havaitsemisen vaihe (Observing **O**)
7. Jäsentämisen vaihe (Structuring **S**)
8. Keksimisen vaihe (Inventising **I**)

Alkeistietämisen vaihe (**PK**) ymmärtämisprosessissa ei tarkoita alkeellista matematiikkaa, vaan se saattaa olla pitkän edellisen ymmärtämisprosessin

[32] Suomennokset Silfverbergin ja kirjoittajan.

tulos, joka on alkutila uudelle prosessille. Tämä vaihe sisältää oppijan esitiedot käsitteistä, joita oppija pyrkii ymmärtämään tai joita oppija tarvitsee uuden käsitteen ymmärtämisessä. Esimerkiksi murtolukujen yhteenlaskuun perehdyttäessä oppijalla täytyy olla ymmärrys murtolukukäsitteestä ja yhteenlaskusta, mutta oppija ei osaa murtolukujen yhteenlaskua.

Mielikuvan muodostamisen vaiheessa (**IM**) oppija lähtee muodostamaan uuden tyyppisiä yhdistelmiä hallitsemiensa tietojen pohjalta käyttämällä apuvälineenään tuttuja havainnollisia objekteja. Mielikuva (ei pelkästään visuaalinen kuva) tutkittavasta käsitteestä syntyy tarkoituksenmukaisen toiminnan kautta. Oppija kykenee tekemään mielikuvamalliinsa rakenteellisia muutoksia tässä vaiheessa, vaikka hän ei vielä ymmärtäisikään täysin mallinsa yleistystä mentaalitasolla. Tätä vaihetta voi tukea esimerkiksi murtolukujen yhteenlaskun kohdalla konkreettisilla malleilla[33]. Niissä voidaan liittää eri murtolukuja konkreettisesti yhteen ja todeta mallista summaksi tuleva murtoluku. Lisäksi oppija kykenee tulkitsemaan mallinsa avulla saman summalausekkeen symboliesityksenä.

Mielikuvan hallinnan vaiheessa (**IH**) oppija ei tarvitse enää konkreettisia objekteja pystyäkseen toimimaan, vaan hän pystyy toimimaan mentaalimalliensa avulla. Tässä vaiheessa oppija tunnistaa mahdolliset ristiriitaisuudet mallinsa käytössä, mutta ei kykene alkuvaiheessa löytämään siihen syytä. Kun oppija kykenee kuvaamaan malliansa sanoin hän pystyy perustelemaan mistä mahdolliset ristiriitaisuudet johtuvat. Hänen mentaalimallinsa saattaa silti olla vielä puutteellinen. Murtolukujen yhteenlaskun kohdalla oppija osaa ajatella murtoluvut lukuina, jotka kuvaavat määrää. Hän kykenee toimimaan symbolitasolla.

Ominaisuuksien huomioimisen vaiheessa (**PN**) oppija kykenee manipuloimaan tai yhdistelemään eri näkökulmia mielikuvistaan ja rakentaa niiden pohjalta kontekstiin sidottuja relevantteja ominaisuuksia. Hän kykenee luokittelemaan tutkimaansa ilmiötä havaitsemiensa ominaisuuksien perusteella. Kyky ilmaista jollakin tavalla nämä ominaisuudet ja mahdolliset luokat ovat välttämätön vaihe siirryttäessä seuraavaan ylempään vaiheeseen. Murtolukujen yhteenlaskussa oppija ennakoi tulevaa yhteenlaskemista hajottamalla murtolukuja sellaisiin osiin, jotka hän osaa yhdistää, ja yhdistää ne lopulta uudelleen sellaisessa muodossa, että yhteenlasku onnistuu.

Formalisoinnin vaiheessa (**F**) oppija kykenee irtautumaan mielikuvistaan tutkittavasta käsitteestä havaitsemiensa yleisten ominaisuuksien avulla ja pystyy operoimaan pelkästään symboleilla ilman suoraa kiinnekohtaa mielikuviinsa. Esimerkiksi murtolukujen yhteenlaskussa oppija käsittelee yhteenlas-

[33] Erilaiset murtolukumallit.

kua formaalina matemaattisena operaationa, joka toimii kaikille murtoluvuille ilman viittausta niiden fysikaaliseen määrälliseen merkitykseen.

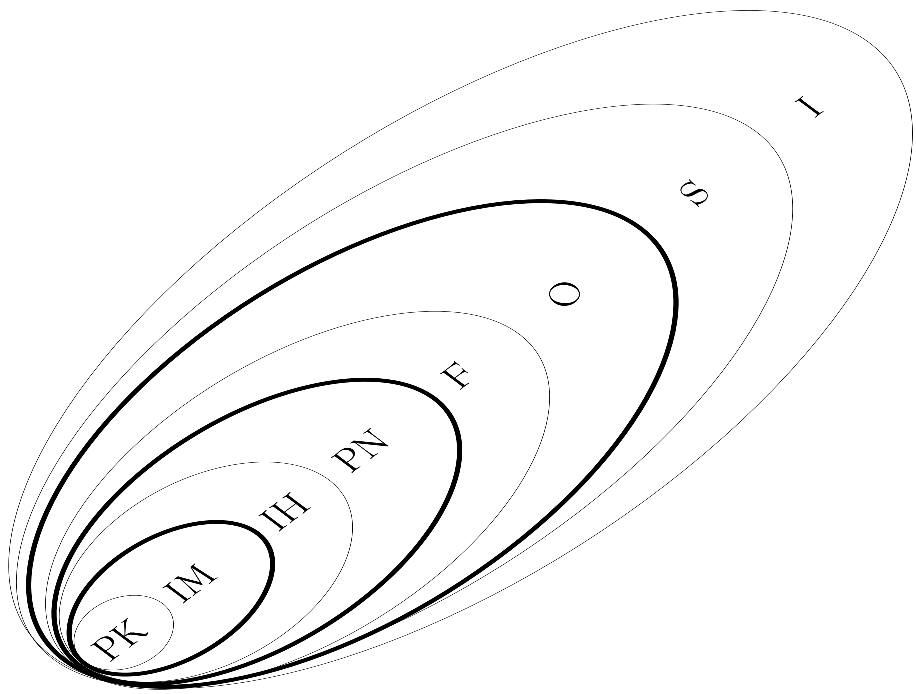
Havaitsemisen vaiheessa (**O**) oppija jatkaa edellisen formalisoinnin tarkastelua edelleen reflektoimalla ja koordinoimalla uudelleen käsityksiään sekä havaitsee niistä uusia yleistyksiä, jotka hän kykenee ilmaisemaan matemaattisina lauseina. Murtolukujen yhteenlaskussa oppija ymmärtää, että sama murtoluku voidaan esittää usealla eri tavalla; toisin sanoen ne muodostavat ekvivalenssiluokan, josta voi valita yhteenlaskuun sopivan edustajan tarkastelemalla kaikille yhteenlaskettaville sopivaa nimittäjää. Menetelmä, jolla oppija rakentaa ekvivalenssiluokkia, saattaa olla vielä hyvin puutteellinen ja toimii vain esille tulleissa esimerkeissä, mutta se on kuitenkin yleistetty omaksi matemaattiseksi lauseeksi siihen astisten havaintojen pohjalta.

Jäsentämisen vaiheessa (**S**) oppija yrittää ajatella omia formaaleja havaintojaan yleisenä teoriana. Tällöin oppija on tietoinen, miten hänen kehittelemiensä matemaattisten lauseitten joukko on keskenään riippuvuussuhteissa ja tämän pohjalta hän pyrkii perustelemaan tai todistamaan väitteensä joko loogisten tai matemaattisten argumenttien avulla. Murtoluvut voidaan nähdä järjestettynä parina $\frac{a}{b}$ ja niiden yhteenlasku näiden järjestettyjen parien välisenä operaationa, joka on määritelty yleisenä laskualgoritmina.

Keksimisen vaiheessa (**I**) oppijalla on täysin jäsentynyt ymmärrys teorian tasolla tarkasteltavasta asiakokonaisuudesta ja hän kykenee pääsemään eroon kaikista asiaan liittyvistä ennakkokäsityksistään, jotka rajoittavat uusiin käsitteisiin johtavaa ymmärtämistä sekä kysymyksenasettelua. Murtolukujen kohdalla uutena pohtimisen kohteena voi olla järjestettyjen lukuparien a/b jälkeen vaikkapa järjestettyjen lukunelikoiden $a/b/c/d$ merkitys ja niiden laskutoimitusten tutkiminen ja määrittely. Tällöin kaikki edellä ollut ymmärtämys muodostaa **PK**–vaiheen tälle uudelle ymmärtämisprosessille.

Kuviossa 3.3 on esitetty vaiheiden sisäkkäinen rakenne. Pirien ja Kierenin teorian muita keskeisiä piirteitä ovat eri vaiheisiin sisältyvät välivaiheet, eri vaiheparien autonomisuus ja siirtyminen eri vaiheiden välillä molempiin suuntiin.

Jokaiseen muuhun vaiheeseen lukuun ottamatta ensimmäistä ja viimeistä vaihetta kuuluu kaksi välivaihetta, jotka ovat toimintavaihe (*acting*) ja ilmaisuvaihe (*expressing*). Taulukossa 3.1 on esitetty näiden vaiheiden ilmenemistavat eri päävaiheiden yhteydessä. Ymmärtämisprosessissa tulee aina ensin toiminnallisen osan hallinta ja vasta sen jälkeen ilmaisun hallinta. Toimintavaihe sisältää kaiken aikaisempaan tasoon liittyvän hallinnan ja tuo siten jatkuvuutta sisemmän ja sitä seuraavan ulomman tason välille. Ilmaisuvaihe sen sijaan sisältää selvästi erotettavan oman uuden substanssin kyseiselle



KUVIO 3.3: Matemaattisen ymmärtämisprosessin vaiheet Pirien ja Kierenin (1994) mukaan. Paksut viivat ovat "Don't need"-rajoja.

vaiheelle. Reflektointi on toimintaan kuuluva osaprosessi, sillä se sisältää tarkastelun miten edellinen ymmärtämisen vaihe konstruoitiin. Ilmaisuvaiheessa oppija tuo esille mitä edelliseen toimintavaiheeseen sisältyi.

Toinen tärkeä piirre on rajat, jotka ovat päävaiheiden **IM** ja **IH**, **PN** ja **F** sekä **O** ja **S** välissä. Näitä rajoja teorian kehittäjät kutsuvat *"Don't need" – boundaries* (kuvio 3.3), jolla he tarkoittavat rajaa, jonka toisella puolella oppija kykenee työskentelemään käsityksillä, jotka eivät ole enää sidottuja aikaisempiin vaiheisiin. Nämä rajat ei suinkaan estä tarvittaessa paluuta aikaisempiin vaiheisiin. Taulukkoon 3.1 on merkitty nämä rajat vaakaviivoilla päävaiheiden välille.

Kolmas piirre liittyy oppimisprosessin epälineaarisuuteen; toisin sanoen oppimisen eri vaiheissa oppija saattaa siirtyä myös takaisin aikaisempiin vaiheisiin. Tällaista ilmiötä kutsutaan tässä teoriassa takaisin kiertymiseksi *(Folding back)*. Ilmiö on tyypillinen ymmärryksen kasvuprosessissa, sillä jos oppijan ongelma ei ratkea, niin oppija palaa takaisin johonkin sisempään vaiheeseen ja vahvistaa ymmärrystään sillä tasolla, kunnes voi palata takaisin alkuperäisen ongelmansa pariin. Erilaiset oppijat liikkuvat eri tavoilla ja

TAULUKKO 3.1: Pirien ja Kierenin teorian päävaiheisiin (lukuun ottamatta vaiheita PK ja I) kuuluvat toiminta- ja ilmaisuvaiheet. Vaiheiden väliin piirretyt vaakaviivat ovat rajoja, joiden toisella puolella oppija kykenee työskentelemään itsenäisesti ilman kiinteää yhteyttä aikaisempiin vaiheisiin (*"Don't need"-boundaries*).

Päävaihe	**Tarkastelukohde**	**Toimintavaihe** *(acting)*	**Ilmaisuvaihe** *(expressing)*
PK IM	Mielikuvan *(Image)*	tekeminen *(doing)*	uudelleen läpikäyminen *(reviewing)*
IH PN	Mielikuvan *(Image)* Ominaisuuden *(Property)*	näkeminen *(seeing)* ennakointi *(predicting)*	sanominen *(saying)* julkilausuttu toteaminen *(recording)*
F O	Menetelmän *(Method)* Piirteen *(Feature)*	soveltaminen *(applying)* tunnistaminen *(identifying)*	todentaminen *(justifying)* määrääminen *(prescribing)*
S I	Teoreeman *(Theorem)*	otaksumien arvailemista *(conjecturing)*	todistamista *(proving)*

nopeuksilla vaiheesta toiseen kiertäen takaisin yhä uudestaan sisempiin vaiheisiin konstruoidakseen leveämpää ja syvällisempää ymmärrystä tutkimastaan asiasisällöstä. Edetessään ensimmäisen kerran vaiheesta toiseen oppija joutuu käymään kaikki vaiheet läpi järjestyksessä, mutta sen jälkeen hän voi liikkua eri vaiheiden yli kumpaankin suuntaan. Edellä kuvattua ilmiötä pidetään tyypillisenä matemaattisen ajattelun ja sen kehittymisen tunnusmerkkinä (Silfverberg 1999, 58–60). Tällainen "siksak"-liike on tyypillistä muidenkin tutkijoiden mielestä oppimisprosessissa[34]. Pirien ja Kierenin teorian pohjalta on tutkittu muun muassa tulevien opettajien matemaattisen ymmärryksen kehittymistä[35].

[34]Esimerkiksi Sáenz-Ludlow 1997.
[35]Ks. Berenson ym. 2001.

3.2.3 Rakenneteoriat

Rakenneteorioissa ymmärretään matemaattisen ajattelun rakenne eri komponenttien yhdistelmänä. Ne eivät ole välttämättä toisiinsa nähden hierarkkisia vaan rinnakkaisia. Esittelen lyhyesti Ricen, Burtonin, Sternbergin ja Sierpinskan kuvauksia ja teorioita matemaattisesta ajattelusta.

Rice (1992)lähestyy matemaattisen ajattelun käsitettä luettelemalla tähän käsitteeseen kuuluvia ajattelustrategioita, joihin kuuluvat ainakin seuraavat strategiat: luokittelu, lukujonotaidot, analogian muodostaminen, deduktiivinen päättely ja ongelmanratkaisutaidot (Pehkonen 2000; Ahtee & Pehkonen 2000). Matemaattinen ajattelu on siis Ricen kuvauksessa edellä lueteltujen taitojen strategista soveltamista lähinnä ongelmanratkaisutilanteissa. Ongelmanratkaisutaitojen katsotaan usein sisältävän muun muassa analogian muodostamisen hallinnan (vrt. Polya 1971).

Matemaattisen ajattelun voidaan määritellä olevan ajattelun tyyli, joka on tunnistettavasti matemaattista toimintaa (Burton 1984, 35). Burton (1984, 38) pitää matemaattisen ajattelun keskeisinä toimintoina neljää prosessia: täsmentämistä[36](*specializing*), otaksumien arvailemista (*conjecturing*), yleistämistä (*generalizing*) ja vakuuttumista (*convincing*). Yrjönsuuri (1990, 25) on kuvaillut edellä mainittuja prosesseja ja esittää näiden lisäksi prosesseiksi koettelua ja periaatteen ymmärtämistä. Täsmentämisprosessissa oppija valikoi ja kokeilee tiettyjä malleja sekä sovittelee elementtejä ja pohtii käsitteitä. Otaksumien arvailussa oppija etsii esimerkeistä yhteyksiä sekä löytää päättelemällä ja heuristiikkojensa avulla mielestään sopivia otaksumia, jotka hän ilmaisee ja vahvistaa. Yleistämisessä oppija järjestää asiatietonsa ja kehittelee uusia tietorakenteita olemassa olevien tietojensa pohjalta. Vakuuttumisprosessissa oppija kokee hallitsevansa tiedon. Koettelu on oppijan argumenttien konstruointiprosessi, jonka avulla hän pyrkii vakuuttamaan ulkoisen, tavoitteet asettaneen yhteisön oman tietonsa oikeellisuudesta. Periaatteen ymmärtämisessä oppija kykenee soveltamaan oppimaansa tietoa.

Yrjönsuuri (1990) on tämän lisäksi jaotellut matemaattisen ajattelun *algoritmiseksi* ja *reflektoivaksi* ajatteluksi, jotka juontavat juurensa matemaattisen tiedon luonteen jakoon algoritmiseksi ja dialektiseksi matematiikaksi. Algoritminen ajattelu suuntautuu toimintaan ja reflektoiva ajattelu olemassaolon pohtimiseen (Yrjönsuuri 1990, 3).

Sternbergin (1996) kolmirakenneteorian mukaan matemaattinen ajattelu (kuten ajattelu yleensäkin) voidaan jakaa kolmeen rakenteellisesti erityyppiseen ajatteluun: analyyttiseen, luovaan ja praktiseen ajatteluun. Nämä

[36]Tai erikoistapaukseen siirtymistä (Pehkonen 2000, 375).

erityyppiset ajattelutavat ovat eroteltavissa toisistaan ja voivat esiintyä toisistaan riippumatta. Edellä esitettyä jakoa täydentää kolme aputeoriaa. Ne käsittelevät ajattelun komponenttirakennetta[37], kokemuksien vaikutusta ajatteluun ja kontekstuaalisuuden merkitystä ajattelussa. (mt., 314–315.)

Sierpinska ja Nnadozie ovat tutkineet yliopistotason opiskelijoiden matemaattista ajattelua, jota he ovat tutkineet praktisen ja teoreettisen dimension suhteen (Sierpinska & Nnadozie 2001). Kutsun tätä teoriaa Sierpinskan teoriaksi. Kyseisen teorian mukaan teoreettinen ajattelu on tahdonalaista henkistä toimintaa, joka on "itseään palvelevaa" tai ajattelua ajattelun vuoksi, päämäärähakuista ja itseensä viittaavaa tai merkitystä ja pätevyyttä (Sierpinska & Nnadozie 2001, 178). Teoreettinen ajattelu on analyyttistä sekä systemaattista ja se eroaa kokemuksesta suodattamalla kokemuksen kielien ja käsitejärjestelmien kautta. Teoreettisen ajattelun piirteitä ovat (Sierpinska & Nnadozie 2001, 179): refleksiivisyys, analyyttisyys, systemaattisuus, hypoteettisuus, huoli tulosten pätevyydestä ja kriittinen suhtautuminen standardimenetelmiin. Tämän teorian avulla tutkitaan lähinnä kehittyneen matemaattisen ajattelun ominaispiirteitä. Niissä oppija hallitsee teorioitten käsitteistön ja on kiinnostunut oppimastaan.

3.2.4 Dialektiset teoriat ja historiallis-empiiriset teoriat

Käsittelen kaksi viimeistä Sierpinskan luokkaa yhdessä ja esimerkkeinä tarkastelen lyhyesti Sfardin teorian ja Zimmermannin lähestymistavan matemaattiseen ajatteluun. Sfardin teorian yhteydessä esitän lyhyesti myös Grayn ja Tallin (1994) näkemyksiä käsitteen muodostumisesta.

Dialektisista teorioistaon syytä ottaa esille Sfardin teoria, joka kuuluu Sierpinskan luokituksen mukaan 3. kategoriaan (Sierpinska 1994, 120). Sfard (1991) tulkitsee yksilön matemaattisen ymmärtämisprosessin tapahtuvan samaan tapaan kuin se on tapahtunut matemaattisten yhteisöjenkin keskuudessa. Monet matemaattiset ideat ovat syntyneet käsitteellistämällä alemman abstraktiotason objekteihin kohdistuneet operaatiot itsenäisiksi objekteiksi. Tällaista prosessia Sfard kutsuu objektifioinniksi. Se sisältää kolme osaprosessia: sisäistämisen (*interiozation*), tiivistämisen (*condensation*) ja reifikaation (*reification*[38]). Sisäistämisessä alemman abstraktiotason toiminnot tulevat oppijalle ymmärrettäviksi, ja hän kykenee toteuttamaan ne myös kuvitteellisena. Tiivistämisen yhteydessä oppija kykenee hahmottamaan monivai-

[37]Ajatteluprosessin meta-, esittämis- ja tiedonhankintakomponentit.

[38]The mental conversion of a person or abstract concept into a thing (Oxford English Dictionary).

heiset operaatiot kokonaisuuksina. Reifikaatioprosessissa käsite muotoutuu lopullisesti objektiksi. (Sfard 1991; 1998, 17–19.)

Käsitteen muodostusprosessissa matematiikan operationaalinen ja strukturaalinen luonne ovat siis duaalisessa vuorovaikutuksessa. Jos kyseinen prosessi jostain syystä katkeaa, niin oppija saattaa jatkaa opettelemalla käsitteenmuodostamisketjua satunnaisesta kohtaa ilman yhteyttä aikaisemmin opittuihin ymmärtämiinsä alemman tason struktuureihin. Tällöin oppija oppii vain symboleja vailla niiden syvällisempää merkitystä. Oppimista voi kutsua pseudostrukturaaliseksi. (Silfverberg 1999, 62.).

Gray ja Tall (1994) näkevät, että symbolien joustavan tulkinnan kaksiselitteisyys on edellytys menestyksekkäälle matemaattiselle ajattelulle. Sama symbolinen merkintä voi tarkoittaa sekä käsitettä että prosessia[39]. Gray ja Tall ovat määritelleet käsitteen '*procept*' kuvaamaan kolmen komponentin yhdistelmää: *prosessi*, joka tuottaa matemaattisen *objektin*, ja *symbolin*, joka esittää joko prosessia tai objektia. Kyky käsitellä joustavasti symbolia joko prosessina tai käsitteenä tilanteesta riippuen on 'proceptuaalista' ajattelua. (mt.,115–122.) 'Procept'-käsite on osoittautunut käyttökelpoiseksi useissa matematiikan oppimisen tutkimuksissa[40].

Historiallis-empiirisissä teorioissaetsitään yhtäläisyyksiä niissä matemaattisen struktuurin kehittymisen vaikeuksissa, joita ovat kohdanneet matemaattisia struktuureja kehittäneet matemaatikot menneinä vuosisatoina ja toisaalta tämän päivän opiskelijat, jotka koettavat ymmärtää ja omaksua vastaavia struktuureja. Zimmermann (2003) onkin tutkinut matematiikkaa ja matemaattista ajattelua matematiikan historian näkökulmasta. Hän on selvittänyt keskeisiä motiiveja ja toimintoja, jotka ovat johtaneet aikoinaan uusien matemaattisten tulosten syntymiseen. Keskeisiä motiiveja on ollut esimerkiksi soveltaa ja konstruoida matematiikkaa elämän laadun parantamiseksi, uskontojen harjoittaminen, algoritmien kehittäminen, pelit, esteettiset kokemukset, heuristiikkojen keksiminen, halu todistaa tuloksia ja kehittää aksiomaattisia systeemejä sekä ratkaista haastavia ongelmia (Zimmermann 2003, 29–39).

Toinen lähestymistapa on tutkia asiaa ohjaajan näkökulmasta selvittämällä oppimisen esteitä ja niiden voittamista. Tässä olisi lähtökohtana ottaa oppia historiasta, jotta löytyisi rakenneyhtäläisyyksiä opiskelijan ja tiedemiehen aikoinaan kokemien ideoiden kehittelyn esteiden välillä. Siten voisi seurata myös opiskelijan kohdalla samansuuntaisia ratkaisumalleja, joita kyseinen tiedemies aikoinaan tuli käyttäneeksi.

[39]Esim. $\frac{3}{4}$ voi tarkoittaa murtoluvun käsitettä tai prosessina jakolaskua.

[40]Ks. esim. Barnard & Tall 2001; Gray & Tall 2001; Meissner 2001.

Luku 4

Matemaattinen tieto

4.1 Johdanto

Lähestyn matemaattista ajattelua tiedon prosessoinnin näkökulmasta, jolloin keskeiseksi kysymykseksi nousee: mitä on tieto? Tietämisen perusteita tutkivaa filosofian osaa kutsutaan epistemologiaksi, joka voidaan suomentaa tietoteoriaksi[1]. Ernest (1995, 465) määrittelee epistemologian käsitteen yksilöllisen oppimisen sisältävänä teoriana, joka kuvaa subjektiivisen tiedon luonnetta, syntyperää ja todenperäisyyttä. Toisaalta epistemologia on tiedon[2] luonnetta, syntyperää ja todenperäisyyttä kuvaava teoria. Filosofisen epistemologian lisäksi on syytä tarkastella myös psykologista epistemologiaa, joka tarkastelee tietoa oppimisen näkökulmasta. Piaget'n psykologinen epistemologia on ollut omalta osaltaan muovaamassa nykyaikaisia oppimiskäsityksiä. Molempia näkökulmia tarvitaan, jotta voidaan ymmärtää matemaattisen tiedon luonne (Leino 1997). Koulumatematiikan näkökulmasta tiedosta on korostunut erilaisia piirteitä, jotka ovat tulleet esille opetussuunnitelmien perusteissa ja opettajien sekä oppilaiden tuntityöskentelyssä (Mouwitz 2003). Tarkastelen erilaisia tietokäsityksiä filosofisen ja psykologisen epistemologian pohjalta sekä koulun näkökulmasta.

Oppilaan matemaattisia tietoja ja taitoja mitataan useaan otteeseen hänen kouluaikanaan. Pelkkien tietojen ja taitojen sijaan voidaan puhua oppilaan matemaattisesta kompetenssista (Kupari & Korhonen; Kilpatrick ym. 2001),

[1]Kreik. *episte'me*=tieto, *logos*=oppi.

[2]Tieto ymmärretään tässä konventionaalisena tai yhteisön yhteisesti hyväksymänä tietona. Subjektiivisen ja konventionaalisen tiedon ero on niiden oikeaksi todentamisen menetelmissä: edellinen perustuu yksilön kokemuksien antamaan evidenssiin ja jälkimmäinen perustuu yhteisön määrittelemien kriteerien täyttymiseen (Ernest 1995, 465).

joka kattaa erilaisten tietojen ja taitojen lisäksi myös oppilaan affektiivisia tekijöitä.

4.2 Tietokäsityksiä

4.2.1 Filosofinen epistemologia

Perinteisen Platonin määritelmän mukaan ”*tieto on hyvinperusteltu tosi uskomus*[3]” (Niiniluoto 1992a, 57). Platon tosin itse osoittaa Theaitetos-dialogissa oman päätelmänsä olevan ristiriitainen, mutta siitä huolimatta siihen on viitattu kautta vuosisatojen[4].

Filosofisessa epistemologiassa keskeisenä tarkastelun kohteena on tiedon ja uskomuksen suhde. Ero tiedon ja uskomuksen välillä ei ole kuitenkaan helposti määriteltävissä. Yleisesti hyväksytyllä tiedolla on oltava evidenssi ja validiteetti, mutta jokin tieto voidaan kuitenkin tuomita myöhemmin uusien teorioiden valossa uskomukseksi ja myös päinvastoin (Thompson 1992, 130). Eräs tapa tehdä ero tiedon ja uskomuksen välille on jakaa tieto objektiiviseen ja subjektiiviseen tietoon, joista viimeksi mainittu edustaa uskomuksia (Pehkonen 1998, 38). Ernestin (1991, 1998) näkemyksen mukaan matemaattisessa tiedossa ovat erotettavissa edellä mainitut tiedon lajit, jotka muodostavat syklisen riippuvuussuhteen keskenään. Sen mukaan ihmisen lukiessa ja omaksuessa yleisesti hyväksyttyä julkista matemaattista tietoa rakentuu siitä hänen mielessään uudelleen muotoutunut subjektiivinen tieto, joka sulautuu hänen persoonalliseen tietorakenteeseensa. Hän saattaa erityyppisten prosessien tuloksena löytää uutta tietoa. Näin luotu yksilön subjektiivinen matemaattinen tieto voidaan julkistaa ja alistaa yleisen kritiikin kohteeksi sekä julkisesti paranneltavaksi. Tämän julkisen uudelleen muotoutumisen kautta tiedosta tulee todennettua, ja se voidaan käsittää objektiiviseksi matemaattiseksi tiedoksi, joka on yleisesti saatavana ja siten ihmisten uusien oppimisprosessien lähteenä.

Klassinen määritelmä voidaan ilmaista myös informaation käsitteen avulla. Niiniluodon (1992a, 58) mukaan edellä esitetty klassinen määritelmä voidaan tiivistää ja liittää informaation käsitteeseen seuraavasti: ”*Tieto on väitelauseiden sisältämää semanttista informaatiota, joka on hyvinperusteltua ja totta.*”

[3]Suomennettu myös muodossa ”*tosi ja oikeutettu uskomus*”.
[4]Ks. esim. Lindgren 2003.

Matemaattinen tieto on ymmärrettävissä joukkona päteviä väitteitä, joka tarkoittaa teoreemien joukkoa todistuksineen (Ernest 1998a, 248). Monet koulukunnat ovat pitäneet matemaattista tietoa pohjimmaltaan stabiilina, universaalina ja absoluuttisena. Usko siihen, että matematiikka ja logiikka tuottavat ehdottoman varmaa totuudenmukaista tietoa perustuu siihen, että oletetaan matemaattisten aksioomien, määritelmien, todistusten väittämien ja logiikan aksioomien olevan totta (Ernest 1991, 7–8). Tällainen absoluuttinen käsitys matematiikasta tieteenä pitää matematiikkaa ajattomana, yli-inhimillisenä ja ihmiskunnan sosiaalisesta sekä historiallisesta kehityksestä riippumattomana. Lisäksi matematiikka on abstraktia, loogista tietoa sekä arvovapaata eikä se ole kulttuurisidonnaista, koska matematiikalla on universaalia validiteettia. (Ernest 2001, 278–279.)

Empiristit ovat pitäneet varman tiedon lähteenä virhelähteistä pudistettua aistihavaintoa (Niiniluoto 1992a, 58). Matemaattisilla käsitteillä on empiirinen alkuperä (Ernest 1991, 34). Erotuksena tästä niin sanotusta naivista empirismistä Lakatos (1977) on kehittänyt *kvasiempirismin*[5], joka perustuu viiteen perusteesiin[6]. Näiden mukaan matemaattinen tieto on epävarmaa, matematiikka on hypoteettis-deduktiivista, matemaattisen tiedon historia on keskeistä matemaattisen tiedon ymmärtämisessä, epäformaali matematiikka on tärkeää ja tiedon rakentumisen teoria auttaa ymmärtämään matemaattisen tiedon syntyä. Matematiikka lienee viimeisiä tieteen aloja, jossa on uskottu vielä näihin päiviin asti absoluuttisiin ja universaaleihin matemaattisiin totuuksiin. Luonnontieteissä esimerkiksi fysiikassa on jouduttu tarkistamaan näkemyksiä Newtonin lainalaisuuksien kaikkivoipaisuudesta. Huomion kiinnittäminen matematiikan historiaan auttaa näkemään matematiikan inhimillisen toiminnan tuloksena. Epäformaalin matematiikan tärkeys tulee esille kouluissa, jossa arkipäivän matemaattisten ongelmien[7] ratkaiseminen lasten omilla menetelmillä motivoi lapsia matematiikan pariin. Etnomatematiikan tutkimussuuntauksessa epäformaali matematiikka on keskeisessä asemassa.

Lakatoksen (1977) teeseistä on johdettavissa näkemys matemaattisen tiedon luonteesta sisältää erehtymisen mahdollisuus eli fallibilistinen näkemys[8], jonka mukaan matemaattinen totuus voi olla väärä ja korjattavissa oleva ja on siten aina uudelleen arvioitavissa (Ernest 1991). Tällöin klassisen tiedon määritelmän ehdot, että tiedon on oltava hyvinperusteltu ja tosi, joutuvat uudelleen arvioitaviksi (Niiniluoto 1992a, 59). Fallibilistinen näkemys koros-

[5]Ks. myös Ernest 1998b, 97–128.

[6]Ernest (1991, 35–36) on koonnut listan Lakatoksen (1977) esittämistä näkemyksistä matemaattisen tiedon luonteesta.

[7]Vrt. *everyday math*.

[8]Eng. *fallible*=erehtyvä(inen), mahdollisesti väärä.

taa matematiikan inhimillistä puolta ja uskoo matematiikan rakentuneen erilaisissa sosiaalisissa ja historiallisissa konteksteissa (Rowland 1997). Tämän näkemyksen mukaan matemaattisen tiedon luonteeseen kuuluu, että se voi olla väärää esimerkiksi jossakin uudessa systeemissä[9] ja siksi sitä on voitava arvioida ja muokata kaiken aikaa. Täten matematiikka ei ole koskaan valmis tietojärjestelmänä (Ernest 2001, 280). Niiniluodon (1992a) käsitys tiedosta edustaa niin sanottua kriittistä tieteellistä realismia. Tämän fallibilistisen kannan mukaan tiedoksi voidaan kutsua

> *niitä väitteitä, joille meillä on toistaiseksi paras perustelu – siitä huolimatta, että saatamme epäillä niiden totuutta ja olla oikeassa tässä epäilyssä* (mt., 60.)

Tiedon ja uskomuksen suhteen lisäksi on syytä tarkastella tiedon ja taidon suhdetta. Tieto voidaan erotella ei-kielelliseen taitoon ja osaamiseen sekä kielelliseen propositionaaliseen tietoon[10] (Niiniluoto 1992a). Niiniluoto pitää taitoa[11] tiedon esiasteena. Ei-kielelliseen tiedon luokkaan kuuluu myös henkilön piilevä tieto (*tacit knowledge*), jota asianomainen ei pysty ilmaisemaan kielen avulla, mutta pystyy toimimaan sen mukaisesti ja siis osaa jotakin. Taidon ja propositionaalisen tiedon välimaastosta löytyy käsite taitotieto[12], joka ilmaisee keinojen ja tavoitteiden suhteita koskevaa välineellistä tietoa. Taitotieto on taitoa koskevaa propositionaalista tietoa, josta ei vielä seuraa osaamista. (mt., 65, 50–53.)

Muita propositionaalisen tiedon tyyppejä ovat kuvaileva, selittävä ja arvioiva tieto. Kuvaileva tieto voi olla singulaarista tai yleistä. Singulaariseen tietoon kuuluvat muun muassa yksittäiset tosiasiat ja havaintotieto. Yleiseen tietoon kuuluvat muun muassa luonnontieteiden lait ja teoriat. Selittävään tietoon kuuluu syysuhteita ilmaiseva tieto, joka voi kohdistua luontoa sekä ihmisiä koskeviin tosiasioihin. Arvioiva tieto ilmaisee jonkin kohteen olevan hyvä tai arvokas suhteessa johonkin annettuun arvojärjestelmään, jonka kriteerit voivat olla esimerkiksi taloudellisia tai esteettisiä. (mt., 65, 55–56.)

[9] Esim. 1+1 ei ole 2 binäärijärjestelmässä.
[10] Tieto, joka voidaan ilmaista väitelauseiden muodossa (Niiniluoto 1992a, 51).
[11] Kreikaksi *tekhne*, latinaksi *ars*.
[12] Vrt. Rylen (1966) käsite *knowing how*.

4.2.2 Psykologinen epistemologia

Toinen lähestymistapa tiedon käsitteeseen on psykologinen epistemologia, jota muun muassa Piaget on tutkinut ja kehittänyt oppimisen näkökulmasta. Tässä lähinnä kognitiivisen psykologian lähestymistavassa tieto, sen suhteet muihin tietoihin sekä prosessointi uusien tietojen ja tietojen välisten yhteyksien löytämiseksi ovat keskeisiä tekijöitä tiedon luonteen ymmärtämiseksi. Esimerkiksi Dubinsky (1994, 228) luonnehtii henkilön matemaattista tietoa henkilön pyrkimyksenä vastata tietyntyyppisiin havaittuihin ongelmatilanteisiin konstruoimalla, rekonstruoimalla ja organisoimalla mentaaliprosesseja sekä objekteja näiden tilanteiden käsittelyssä. Konnektionismi (*connectionism*) tarjoaa teoreettisen mallin kuvata tiedon laatua ja prosessointia ihmismielessä.

Tiedon käsite on jaettu useassa yhteydessä kahteen eri tyyppiin[13], jossa jaon perusteena on karkeasti ottaen ollut taidon oppimisen ja tiedon ymmärtämisen välisen eron esiin tuominen. Tällaisia tiedon käsitteen jakoja on muun muassa Piaget'n konseptuaalinen ymmärtäminen (*conceptual understanding*) ja menestyksekäs toiminta (*successful action*), Andersonin deklaratiivinen ja proseduraalinen tieto ja Baroodyn sekä Gingsburgin merkityksellinen ja mekaaninen tieto (Hiebert & Lefevre 1986, 1–2).

Hiebert ja Lefevre (1986) jakavat tiedon konseptuaaliseen (*conseptual knowledge*) ja proseduraaliseen tietoon (*procedural knowledge*), joista edellinen on tietoa riippuvuuksista ja jälkimmäinen käsittää formaalin kielen ja käsitteen symboliset esitykset sekä säännöt, toimintakaavat ja algoritmit ongelmien ratkaisemiseksi. Jako ei ole täydellinen, sillä kaikkea tietoa ei kuitenkaan voida jakaa näihin luokkiin, ja toisaalta jokin tieto voi sisältää molempien mainittujen tiedon lajien ominaisuuksia. Esimerkiksi heuristiikat eivät sovi kyseiseen jakoon, joten niitä voidaan käsitellä omana strategiatiedon ryhmänä[14].

Tiedon käsite on koettu tärkeäksi 1990-luvun opetussuunnitelmissa. Esimerkiksi Ruotsissa opettajia perehdytettiin tiedon käsitteen muotoihin raportin "Skola för bildning" (1992) avulla, jossa tiedolla nähtiin olevan neljä eri muotoa: fakta (*fakta*), ymmärtäminen (*förståelse*), taito (*färdighet*) ja uskottavuus (*förtrogenhet*). Faktat ovat informaatiota, sääntöjä ja toimintatapoja. Tätä tietoa joko on tai ei ole ja sen hallitseminen testeissä mittaa lähinnä kykyä muistaa opittuja asioita. Faktat ovat pohjana ymmärtämiselle. Ymmärtämisen kautta oppija näkee ilmiöille merkityksiä. Taito on tiedon käy-

[13] Ks. esim. Haapasalo 2003, 1–2.

[14] Esim. NAEP 2000; Kilpatrick ym. 2001.

tännöllinen ilmenemismuoto eli se miten jotakin tehdään. Uskottavuus on lähellä käsitettä 'hiljainen tieto'. (Mouwitz 2003, 8–10.)

Matemaattisessa ajattelussa on tiedon prosessoinnin näkökulmasta keskeisimpiä prosesseja ongelman ratkaiseminen ja käsitteen muodostaminen. Käsitteen muodostamisessa oppija tarvitsee sekä proseduraalista että konseptuaalista tietoa ja tavoite on, että käsite tulee oppijan konseptuaaliseksi tiedoksi. Liitän ymmärtämisen konseptuaaliseen tietoon ja taidon proseduraaliseen tietoon. Ongelmanratkaisuprosesseissa tarvitaan molempia edellä mainittuja tietolajeja, mutta erilaiset heuristiikat ovat myös siinä keskeisiä. Heuristiikat ja strategiat eivät ole luokiteltavissa ongelmitta edellä esiteltyjen tiedon lajien jakoon (Hiebert & Lefevre 1986, 9). Siitä syystä tarkastelen niitä erikseen yhdessä ongelmanratkaisun kanssa. Käyttämäni tiedon kolmijako muistuttaa rakenteeltaan NAEP:in[15] käyttämää (NAGB 2000).

4.3 Konseptuaalinen tieto

4.3.1 Konseptuaalinen tieto ja sen ominaispiirteitä

Konseptuaalisesta tiedosta käytetään myös ilmaisua käsitteellinen tieto. Käsite (*consept*) muodostuu neljästä elementistä: nimestä, esimerkeistä, attribuuteista (relevanteista ja irrelevanteista) sekä attribuuttien arvoista. Attribuuttien ja niiden arvojen avulla käsitteitä voidaan luokitella ja mahdollisesti määritellä esimerkiksi luettelemalla relevantit tunnusmerkit (Joyce & Weil 1986, 30–31). Attribuutit ja niiden arvot luovat myös yhteyksiä eri käsitteiden välille. Käsitteitä voidaan tutkia myös eri käsitelajien kautta. Matematiikassa käyttökelpoinen käsitelajeihin jako on seuraava: objekti-, operaatio- ja riippuvuuskäsitteet. On tärkeä huomata, että sama käsite, esimerkiksi murtoluku, voi olla objekti, operaattori sekä suhdetta ja riippuvuutta ilmaiseva käsite[16] (Haapasalo 1997a, 65–66.)

Konseptuaaliselle tiedolle on ominaista, että sillä on runsaasti yhteyksiä muihin tietoyksikköihin, jolloin se on aina osa laajempaa tietoverkkoa[17]. Tieto on konseptuaalista tietoa vain, jos sen haltija tunnistaa tämän tiedon suhteen muihin informaatioyksiköihin. Tiedon rakentuminen konseptuaaliseksi tiedoksi kehittyy yhteyksien määrän kasvuna muihin tietoyksiköihin. Tä-

[15]NAEP (*National Assessment of Educational Progress*) hahmotteli kolme matemaattista kykyä: konseptuaalinen ymmärtäminen, proseduraalinen tieto ja ongelmanratkaisu.
[16]Vrt. 'procept' (Gray & Tall 1994).
[17]Vrt. konnektionismi.

mä linkitysprosessi tapahtuu joko muistissa olevien tai (ja) oppimistilanteessa esiintyvien uusien tietoyksiköiden välillä. Esimerkiksi keksivä oppiminen (*discovery learning*) on tällainen prosessi. (Hiebert & Lefevre 1986, 3–4.)

Tietojen yhdistäminen voi kuitenkin tapahtua kahdella eri tasolla: primaarisella (*primary level*) tai reflektiivisellä tasolla (*reflective level*). Primaarisella tasolla tiedon yhteydet on kytketty samalla tai alemmalla abstraktiotasolla kuin tieto itse on esitetty. Reflektiivisellä tasolla jotkut yhteydet on rakennettu korkeammalla abstraktiotasolla olevien käsitteiden avulla. Tällöin yhteydet ovat vähemmän sidottuja tiettyyn kontekstiin. Kun tieto on kehittynyt konseptuaaliseksi tiedoksi, niin tiedon tilaa voidaan kuvata sanalla 'ymmärretty' ja samalla saadaan yhteys käsitteiden 'ymmärtäminen' (*understanding*) ja 'konseptuaalinen tieto' välille. (Hiebert & Lefevre 1986, 4–5). Ilmeisesti edellä esitettyjä tasoja voidaan käyttää kuvaamaan myös ymmärtämisen astetta.

Konseptuaalisen tiedon yhteys käsitepariin mielekäs oppiminen (*meaningful learning*) ja ulkoaoppinen (*rote learning*) on selkeä. Konseptuaalisen tiedon on oltava opittu niin sanotun mielekkään oppimisen tavalla ja toisaalta konseptuaalista tietoa ei voi syntyä pelkän ulkoa opettelun tuloksena. Mielekkään oppimisen kautta opitut proseduurit ovat linkittyneet konseptuaaliseen tietoon ja ovat siten oppilaalle monikäyttöisempiä esimerkiksi ongelmanratkaisussa kuin pelkästään ulkoaopettelun varaan jääneet proseduurit. Konseptuaalista tietoa on vaikea kuvitella olevan olemassa ilman siihen linkittyneitä proseduureja, sillä juuri proseduurit kääntävät konseptuaalista tietoa muodosta toiseen. Jos matematiikassa käsitteet ja proseduurit eivät ole yhteydessä toisiinsa, niin oppilailla saattaa olla tunne, että he hallitsevat matematiikkaa, vaikka he eivät selviä ongelmanratkaisutehtävistä tai he tuottavat ratkaisuja, mutta eivät ymmärrä mitä tekevät. (Hiebert & Lefevre 1986, 8–9.)

Kadijevich ja Haapasalo(2001) ovat tiivistäneet kuvauksen konseptuaalisesta tiedosta. He kuvailevat konseptuaalisen tiedon seuraavasti[18]:

> *Konseptuaalinen tieto merkitsee erityisen tietoverkon, jonka elementteinä voi olla käsitteitä, sääntöjä (algoritmeja, proseduureja jne.) ja jopa eri esitysmuodoissa annettuja ongelmia (ratkaistu ongelma saattaa johtaa uuteen käsitteeseen tai sääntöön), tuntemista ja taidokasta "ajoa" sen osasta toiseen*(Kadijevich & Haapasalo 2001, 156–157).

Jatkossa nojaan yllä esitettyyn konseptuaalisen tiedon käsitteeseen.

[18]Ks. myös Haapasalo & Kadijevich 2000.

Konseptuaalisella tiedolla voi olla useita erilaisia ilmenemismuotoja. Esimerkiksi Haapasalon MODEM-projektissa konseptuaalinen tieto nähdään dynaamisella tavalla siten, että kyseinen tieto on konstruoitu käyttämällä sellaisia erilaisia käsitteen esittämismuotoja kuin verbaalinen, graafinen ja symbolinen. Konseptuaalinen tieto vaatii tyypillisesti tietoista ajattelemista. (Haapasalo & Kadijevich 2000, 141.)

Koulussa konseptuaalisen tiedon omaksuminen on oppilaille usein vaikeaa. Tämä voi Haapasalon (1997a, 66) mukaan johtua siitä, että oppilas näkee opiskellut käsitteet irrallisina sekä abstrakteina ja osaa niistä vain määritelmän. Käsitteiden välisiä suhteita ei pohdita ja siten oppilaalle jää syntymättä linkit käsitteiden välille sekä kaiken kaikkiaan toimiva tietoverkko.

4.3.2 Ymmärtämisen käsite matematiikassa

Eri vuosikymmeninä on matematiikan kouluopetuksessa korostettu toisinaan laskutaidon tärkeyttä (*back to basics* -vaihe) ja toisinaan ymmärtämistä (*new math* -vaihe). Ymmärtämisen käsite on ollut keskeisenä tutkimuskohteena matematiikassa 1980- ja 1990-luvuilla, jolloin tutkijat (esim. Schoenfeld 1992) ovat olleet kiinnostuneita muun muassa siitä, miten ymmärtäminen tulee esille ongelmanratkaisutaidoissa. Ymmärtämisen muotoja[19] voidaan luokitella useita, oman tutkimukseni tarpeisiin rajaan ymmärtämisen teoreettiseen ymmärtämiseen, joka rajoittuu tieteen ymmärtämiseen.

Ymmärtäminen voidaan nähdä prosessina, joka kiinnittyy tiettyyn henkilöön, tarkasteltavaan matemaattiseen sisältöön ja erityiseen ympäristöön (Hiebert & Carpenter 1992). Tässä tulee esille ymmärtämisen situationaalisuus. Ymmärtäminen on tällöin toimimista, tuntemista tai ajattelua älykkäästi kussakin eteen tulevassa tilanteessa (Bereiter 2002, 99). Koulumatematiikassa Greeno (1987, 63) pitää ymmärtämistä prosessina, jossa oppilas ottaa informaatiota tietystä tilanteesta ja muuntaa sitä sellaiseen muotoon, että hän voi käyttää sitä kognitiivisissa prosesseissa.

Ymmärtäminen voidaan nähdä myös potentiaalisena kykynä tehdä sellaisia tiettyyn aiheeseen liittyviä ajattelua vaativia toimintoja kuten selittämistä, todisteiden löytämistä ja esimerkkejä väitteille, yleistämistä, soveltamista, analogioiden löytämistä ja käsitellyn aiheen esittämistä toisella tavalla. Tällaista lähestymistapaa Bereiter (2002) nimittää "esittämisnäkökulmaksi" (*performance perspective*). Hän näkee ymmärtämisen relaationa tietäjän ja

[19] Esimerkiksi Kieran Egan on jakanut ymmärtämisen viiteen hierarkkiseen luokkaan: *Somatic understanding, mythic understanding, romantic understanding, philosophic understanding, ironic understanding* (Bereiter 2002, 121–122).

ymmärtämisen kohteen välillä ja ymmärtämistä voidaan siis havainnoida eri toiminnoissa sen vaikutusten kautta. (Bereiter 2002, 99–100.)

Ymmärtämisen käsite voidaan liittää tiedon käsitteeseen. Hiebert ja Carpenter (1992) määrittelevät ymmärtämisen käsitteen matematiikassa seuraavasti:

> *Me aloitamme määrittelemällä ymmärtämisen termeillä, jotka kuvaavat miten, informaatio on esitetty ja rakennettu. Henkilö on ymmärtänyt matemaattisen idean tai proseduurin tai faktan, jos se on osa hänen sisäistä tietoverkkoaan. Ymmärtämisen asteen määräävät tietoverkon yhteyksien lukumäärä ja voimakkuus.* (mt., 67.)

'Ymmärretty' on siis konnektionistisen näkemyksen mukaan tiedon tila, joka ilmaisee kyseisen tiedon yhdistyneen lukuisiin muihin tietoihin eri vahvuisina yhteyksinä ja on siten yhdistettävissä uusiin tilanteisiin. Ymmärretty tieto on konseptuaalista tietoa.

4.4 Proseduraalinen tieto

4.4.1 Proseduraalinen tieto ja sen ominaispiirteitä

Proseduraalinen tieto koostuu kahdesta erillisestä osasta. Ensimmäisen osan muodostavat matematiikan formaalin kielen symboliset esittämisjärjestelmät ja toisen osan algoritmit, proseduurit ja säännöt matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi (Hiebert & Lefevre 1986, 6). Matemaattisten symbolien tunnistaminen ja niiden käyttöön liittyvien syntaksisääntöjen hallinta kuuluvat tähän tiedon alueeseen. Matemaattinen algoritmi on vaihe vaiheelta ohjattu matemaattisten operaatioiden suoritusjono, jossa jokainen suoritusaskel on perusteltavissa. Juuri tämä jonoluonne ohjeissa erottaa tämän tiedon lajin selvimmin omaksi lajikseen. Tyypillisissä matematiikan koulutehtävissä ratkaisun muodostaa proseduurien jono tehtävän annon ja tehtävän vastauksen välillä. Nämä proseduurit voivat olla tyypiltään joko standardeja kirjoitettuja matemaattisia symboleja[20] tai ei-symbolisia objekteja[21]. Koulukokeet mittaavat pääasiassa proseduraalista tietoa, sillä koetehtävät ovat pääasiassa niin sanottuja hyvin määriteltyjä tehtäviä, joissa mitataan oppijan taitoja

[20] Esim. $5, +, \surd$.

[21] Konkreettiset objektit, mentaalimallit, ongelmanratkaisustrategiat.

hallita erilaisia operaatioita annetuilla symboleilla tai ongelmanratkaisutaitoja jollakin ennalta harjoitetulla proseduurijonolla. (Hiebert & Lefevre 1986, 6–7.)

Kadijevich ja Haapasalo (2001) määrittelevät proseduraalisen tiedon seuraavasti[22]:

> *Proseduraalinen tieto merkitsee dynaamista ja menestyksekästä tiettyjen sääntöjen, algoritmien tai proseduurien hyödyntämistä relevant(e)issa esitysmuodo(i)ssa, jo(t)ka yleensä vaatii (vaativat) ei vain tietoa käytetyistä objekteista vaan myös tietoa sen (niiden) muodosta ja syntaksista.* (mt., 156–157.)

Opittu matemaattinen tieto sisältää aina merkityksellistä ja perustavaa laatua olevia yhteyksiä konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välillä. Matematiikan opetuksen pitää tukea näiden tiedon lajien linkittymistä (Hiebert & Carpenter 1992, 78; Kadijevich 2003, 22–23). Jos käsitteet ja proseduurit eivät ole toisiinsa kytkeytyneitä, niin opiskelijat saattavat löytää annettuihin matemaattisiin ongelmiin ennalta harjoiteltuja ratkaisumalleja (proseduurijonoja), mutta eivät varsinaisesti ymmärrä tekemäänsä. Kun proseduraalinen tieto saadaan linkitettyä konseptuaaliseen tietoon, niin silloin ne kytkeytyvät semanttisesti osaksi laajaa informaatioverkkoa ja silloin myös proseduraaliseen tietoon tulee useita eri linkkejä eri suunnista. (Hiebert & Lefevre 1986, 9–11.)

Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon linkittymisestä on hyötyä proseduraaliselle tiedolle: matemaattiset symbolit saavat ymmärrettävän merkityksen, jolloin voidaan saada uutta merkityksellistä tietoa esimerkiksi symboleita sisältäviä kaavoja sieventämällä (Hiebert & Lefevre 1986, 10). Proseduurien palauttaminen mieleen on helpompaa, kun proseduuri on linkittynyt useisiin tietoyksiköihin ja on siten osa laajempaa tietoverkkoa. Proseduurien käyttö on sitä tehokkaampaa, mitä enemmän ne ovat linkittyneet konseptuaaliseen tietoon, joka voi kääntää vaikean ongelman yksinkertaisempaan ja ratkaistavaan muotoon (mt., 11). Lisäksi linkitys auttaa proseduurien valinnan ja käytön valvontaa sekä kontrolloi saatavan tuloksen mielekkyyttä. Jos proseduurit on ymmärretty, niin ne ovat siirrettävissä (*transfer*) helpommin rakenteellisesti samanlaisiin ongelmiin. Rakenteellisesti samanlaisissa ongelmissa on joitakin yhteisiä konseptuaalisen tiedon elementtejä. Linkit proseduurin ja siihen liittyvien käsitteiden välillä yhdistävät kyseisen proseduurin tietoverkon osana useisiin erilaisiin ongelmarepresentaatioihin. Konseptuaa-

[22](Ks. myös Haapasalo & Kadijevich 2000.)

linen tieto vapauttaa proseduurin pinnallisesta kontekstista, jossa se on opittu ja rohkaisee sen käyttöä muissa rakenteellisesti enemmän tai vähemmän samankaltaisissa ongelmissa. Tällaiset yleistetyt proseduurit vähentävät tarvetta opetella eri tehtäviin jokaiseen omaa ratkaisuproseduuria. Opiskeltavien proseduurien määrä vähenee ja muistin kuormitus helpottuu. (Hiebert & Lefevre 1986, 11–14.) Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välisiä linkkejä on löydetty tutkimuksissa 1990-luvulla (Kadijevich 2003, 22–23).

Ymmärtämisen ja taitamisen painotuksia kouluopetuksessa on pohdittu laajasti (Hiebert & Lefevre 1986, 1). Ymmärretty tieto luetaan konseptuaaliseksi tiedoksi ja taito lähinnä proseduraalisen tiedon piiriin kuuluvaksi. Tarkastelen taitoa filosofisesta ja taidon kehittymisen näkökulmista.

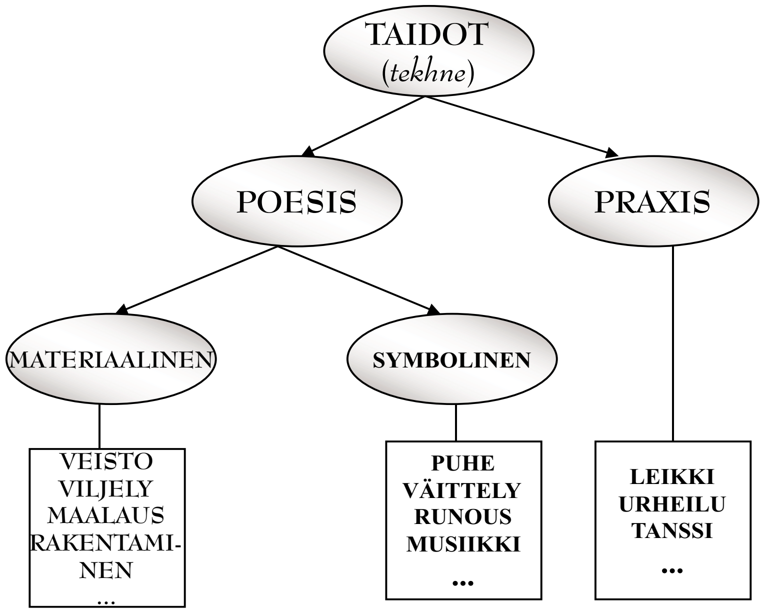
4.4.2 Matemaattiset taidot

Platon luokitteli taidot sen mukaan, miten paljon niihin liittyi tietoa (*episteme*) kahteen luokkaan: 1) taito (*tekhne*) ja 2) tieteelliset taidot. Jälkimmäiset jakaantuivat käytännön töissä tarvittavaan laskutaitoon ja filosofian piirissä harjoitettavaan puhtaaseen geometriaan ja matematiikkaan. Taito (tekhne) puolestaan oli Platonin mukaan sellaista, joka perustui "*arviokauppaan, kokemuksen tuomaan sormituntumaan ja vaivalloisella harjoittelulla saavutettuun vaistomaiseen kykyyn*". Tällaisia taitoja olivat muun muassa lääkintätaito, maanviljelys ja sodankäynti. (Sihvola 1992, 19–20.)

Aristoteles määritteli taidon (tekhne) "*oikeaksi järkiperäiseksi tekemisvalmiudeksi*", joka voitiin jakaa poieettisiin taitoihin (*poiesis*) ja praksikseen (*praxis*). Jonkin asian valmistamiseen liittyvät poieettiset taidot, jotka voidaan jakaa edelleen käden ja ruumiin taitoihin (materiaalinen) sekä kielen käyttöön liittyviin taitoihin (symbolinen). Praksis on taito, joka sisältää oman päämääränsä. Kuviossa 4.1 on Aristoteleen taitojen jako sekä esimerkkejä niistä. (Niiniluoto 1992b, 7.)

Taidot (tekhne) liittyvät ei-kielelliseen tietoon, johon kuuluvat osaaminen ja piilevä tieto (*tacit knowledge*) (Niiniluoto 1992a, 51–52, 65). Piilevän tiedon käsite on peräisin Polanyin (1962) filosofiasta. Kyseessä on yksilön tieto, joka on evoluution ja kokemuksien kautta karttunut, mutta jota yksilö ei kykene pukemaan sanoiksi[23]. Perusajatus on, että yksilö tietää enemmän kuin osaa kertoa (Niiniluoto 1992a; 51). Esimerkiksi käsityöammateissa, joissa taidot ovat keskeisiä, piilevä tieto on tärkeä. Se onkin taidon hallinnan näkökulmasta myös proseduraalista tietoa.

[23]Ks. esim. osasta *'The tacit component'* luku 5 *'Articulation'* (Polanyi 1962, 69-124).



KUVIO 4.1: Aristoteleen taitojen jako (Niiniluoto 1992b, 7).

Rylen *knowing how*[24] on Niiniluodon (1992a) mukaan parhaiten ymmärrettävissä taitotietona, jolla tarkoitetaan taitoa koskevaa tietoa. Taitotieto on kielellistä tietoa ja se on propositionaalisen tiedon laji, joka ilmaisee välineellistä tietoa. Niiniluoto pitää tärkeänä erottaa näin pelkkä osaaminen ja 'knowing how' toisistaan. (mt., 53.)

Modernimman määrittelyn mukaan käsitteellä taito (*skill*) tarkoitetaan kaikkia niitä tapoja, joilla ihminen tiedonkäsittelyään kehittämällä pystyy paremmin selviytymään toimintaympäristöstään (Keskinen 1995, 72). Taidot voivat olla motorisia tai henkisiä suorituksia. Kognitiivisella taidolla ymmärretään tietynlaista kyvykkyyttä suorittaa älyllisiä toimintoja (Yrjönsuuri 1990). Suuri osa ihmisen oppimisesta tähtää jonkin taidon oppimiseen. Nykyisen käsityksen mukaan sisäiset ajatteluprosessit ovat keskeisiä kaikkien taitojen synnyssä (Keskinen 1995, 70). Keskisen (1995) mukaan taidon omi-

[24] Ryle (1966) kuvaa käsitettä 'knowing how': "*What is involved in our descriptions of people as knowing how to make and appreciate jokes, to talk grammatically, to play chess, to fish, or to argue? Part of what is meant is that, when they perform these operations, they tend to perform them well, i.e. correctly or efficiently or successfully.*" Tämä ei kuitenkaan Rylen mukaan riitä, vaan on otettava huomioon yksilön älykkyys soveltaa ja säädellä toimintaansa: "*- - an action exhibits intelligence, if, and only if, the agent is thinking what he is doing while he is doing it, and thinking what he is doing in such a manner that he would not do the action so well if he were not thinking what he is doing.*" (mt., 29.)

naisuuksia on, että taito on luonteeltaan hierarkkisesti rakentunut ja että alemmat toimintahierarkian tasot palvelevat ylempiä tasoja.

Kognitiivisenkin taidon oppimisessa on erotettavissa hierarkkiset vaiheet: kognitiivinen, assosiatiivinen ja autonominen vaihe. Kognitiivisessa vaiheessa oppija muodostaa kuvan taitoon sisältyvistä menettelytavoista ja ymmärtää niiden merkityksen taidon hallinnan kannalta. Assosiatiivisessa vaiheessa oppija liittää kokeilujen tuloksena syntyneet osataidot toisiinsa, jolloin taidosta muodostuu kokonaisuus. Tosiasiatieto muuttuu vähitellen toiminnalliseksi tiedoksi. Autonomisessa vaiheessa osataidot seuraavat saumattomasti ja oikea-aikaisesti toisiaan ja tietoisen kontrollin osuus vähenee. Oppija pystyy tekemään useaa tehtävää samanaikaisesti. (Anderson 1980, 226; ks. myös Keskinen 1995.)

Mainitut taidon ominaisuudet ja oppimisen vaiheet ovat tunnistettavissa myös matemaattisissa taidoissa. Opiskelijan matemaattiset taidot ovat prosesseja, joita opiskelijan matemaattiset kyvyt omalta osaltaan ohjaavat. Nämä taidot ovat helpommin kehitettäviä kuin kyvyt, jotka ovat suhteellisen pysyviä (vrt. Silfverberg 1999, 106). Proseduraalinen tieto sisältää taitojen hallinnan (Anderson 1980, 223).

4.5 Strategiatiedot matematiikassa

4.5.1 Strategiat ongelmanratkaisussa

Kaikkea tietoa ei voi luontevasti jakaa joko konseptuaaliseksi tai proseduraaliseksi. Esimerkiksi ongelmanratkaisussa käytettävät strategiat ovat tällaista tietoa (Hiebert & Lefevre 1986, 9). Käytän niistä nimitystä *strategiatiedot*[25].

Strategiat ovat henkisiä operaatioita, joilla kognitiivisia prosesseja ohjaillaan ja kontrolloidaan monimutkaisissa tilanteissa. Strategiat eivät koostu pelkästään joistakin perusoperaatioista, vaan niihin kuuluvat erottamattomana osana myös niiden säätelyä ohjaavat metakognitiot. Matemaattiset strategiat ovat menetelmiä, joissa käytetään matemaattisia käsitteitä, lauseita tai algoritmeja. Strategioita ja niitä sääteleviä metakognitioita voidaan nimittää yhteisnimityksellä heuristiset[26] prosessit (Haapasalo 1997b, 1998). Polya (1971, 5–6)) tutki heuristisia prosesseja ongelmanratkaisun yhteydessä ja kuvaili on-

[25] Vrt. Haapasalo (1998, 60) 'yleiset menetelmätiedot'.

[26] *Heuristinen* tulee kreikan sanasta *heuriskin*, joka tarkoittaa "*serving to discover*" eli keksimistä palveleva (Nickerson ym. 1985, 74)

TAULUKKO 4.1: Polyan ongelman ratkaisun vaiheet ja niihin liittyvät heuristiikat (Polya 1971; ks. myös Nickerson ym. 1985, 75–81).

Vaihe	Heuristiikat
Ongelman ymmärtäminen	**A.** varmista, että ymmärrät tuntemattoman, annetun datan ja sitä yhdistävät ehdot **B**. varmista, että ymmärrät päämäärän, lähtötilanteen ja sallitut operaatiot **C.** piirrä graafi tai diagrammi ja ota käyttöön sopiva merkintätapa **D.** jos ensimmäinen ongelman esitystapa ei johda ratkaisuun, niin formuloi ongelma uudelleen
Suunnitelman laatiminen	**A.** mieti, tunnetko rakenteellisesti analogista ongelmaa ja yritä ratkaista **B.** mieti, tunnetko yksinkertaisempaa ongelmaa, jossa on samankaltainen tuntematon **C.** jos et osaa ratkaista ongelmaa, niin yritä muuttaa ongelmasi sellaiseen muotoon, jonka osaat ratkaista **D.** yksinkertaista ongelma erityistapaukseen ja ratkaise se **E.** yleistä ongelma ja ratkaista se **F.** jaa ongelma pienempiin osiin, jotka osaat ratkaista
Suunnitelman toteuttaminen	
Tulosten tarkistaminen	**A.** yritä ratkaista ongelma toisella tavalla **B.** tarkista ratkaisusi vaikutukset

gelmanratkaisun neljä vaihetta (taulukko 4.1) näin: ymmärrä ongelma, laadi suunnitelma, toteuta suunnitelma ja tarkista tuloksesi.

Ongelman ymmärtäminen on välttämätön alku sen ratkaisemiselle. Matematiikan tehtävissä tuntemattomat ja annetut tiedot ovat usein helposti tunnistettavissa. Sen sijaan visuaalisen ajattelun aktivointi kuvioiden avulla ei ole kaikille ongelman ratkaisijoille luonteva tapa lähteä ratkaisemaan ongelmaa. Analogioiden hyödyntäminen vaatii konseptuaalisen tiedon hyödyntämistä, sillä muuten siirtovaikutusta tuskin voisi esiintyä. Tehtävän ratkaisijan on täytynyt osata menestyksekkäästi ratkaista rakenteeltaan samankaltaisia tehtäviä. Suunnitelman toteuttamisvaihe ei sisällä Polyan (1971) mukaan todellisia heuristiikkoja, vaan koostuu deduktiivisesta toteutuksesta[27].

Schoenfeldin (1992, 353) mukaan Polyan strategioita on helpompi käyttää jälkikäteen ratkaisuprosessin analysoinnissa kuin etukäteen ratkaisua etsittäessä. Kuitenkin opiskelijoiden on tärkeää tuntea strategioita ja esimerkkejä niiden käytöstä, sillä transferin avulla he voivat ratkaista uusia ongelmia (Björkqvist 2001, 116). 1990-luvulla pitkän matematiikan lukio-opinnoista puuttui systemaattinen ongelmaratkaisustrategioiden opettaminen.

4.5.2 Metakognitiot tiedon prosessoinnin säätelijänä

Ongelmanratkaisuprosessien hallintaan kuuluvat yksilön metakognitiot, jotka ohjaavat ratkaisijan päätöksentekoa ja säätelevät strategioiden käyttöä (McLeod 1989, 25). Metakognitiot ovat strategiatietojen käyttöä säätelevä tekijä, joka tuo mukaan yksilön affektiot. Metakognitioilla on toki vaikutusta myös proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietoon.

Metakognitiot ovat väljästi määritellen yksilön ajattelua omasta ajattelustaan. Metakognitioiden tutkimus on suuntautunut kolmelle lähekkäin, mutta toisistaan eroteltavissa olevalle intellektuaalisen käyttäytymisen alueelle: omien ajatteluprosessien tuntemiseen, kontrolliin tai itsesäätelyyn sekä uskomuksiin ja intuitioihin. Tietoisuus omista ajatteluprosesseista karttuu lapsen varttuessa, ja siihen on syytä kiinnittää huomiota etenkin vanhemmilla opiskelijoilla. Opiskelijalle pitää syntyä kuva siitä, mitä hän todella hallitsee, jotta hän voi kehittyä entistä tehokkaammaksi ongelmanratkaisijaksi. Kontrollin tai itsesäätelyn avulla ongelmanratkaisija on koko ajan selvillä tekemisistään ja hän arvioi tekemisensä tuloksellisuutta. Nämä arviot ohjaavat seuraavia vaiheita ratkaisuprosessissa jatkamaan samalla strategialla tai etsimään uusia strategioita. Heikko kontrolli ja itsesäätely ovat tyypillisiä puutteita opiskelijoiden ongelmanratkaisuprosesseissa. Heidän tavallisimpia ennakkokäsityksiään matematiikasta ja sen käyttökelpoisuudesta ovat tavallisimpia opetuksen kannalta negatiivisia uskomuksia, jotka jopa estävät uusien asioiden oppimista. (Schoenfeld 1987, 189–195.)

Schoenfeldin (1987) metakognitioiden tutkimusalueiden luokittelussa tulee esille metakognitioiden voimakas yhteys affektioihin. Yksilön uskomukset, asenteet ja tunnetilat ovat keskeisessä osassa strategioiden säätelyssä (McLeod 1989, 31). Tämän vuoksi affektiot on syytä huomioida tutkittaessa matemaattista ajattelua.

[27] Ks. myös (Nickerson ym. 1985, 78).

Opiskelijoiden tietoisuutta omista metakognitioistaan voidaan kehittää. Ääneen ajatteleminen on yksinkertainen, mutta tehokas tapa kehittää metakognitiivista ajattelutapaa. Tässä tulee esille matemaattisen ajattelun ja kielen välinen tärkeä yhteys, joka muun muassa helpottaa oppilaan ongelman hahmotus- ja ratkaisuprosessia (ks. Joutsenlahti 2003a, 2003b).

Hannula (2001, 2004) on ottanut huomioon tunnetilat kognitioiden lisäksi yksilön toimintaa ohjaavina tekijöinä. Hän on jakanut mielen metatasoja neljältä kannalta: 1) metakognitiot, 2) emotionaaliset kognitiot, 3) kognitiiviset emootiot ja 4) metaemootiot. Hannula viitaa emootiolla tunnetilaan. Emotionaaliset kognitiot sisältävät yksilön subjektiivista tietoa hänen emootioistaan ja emotionaalisista prosesseistaan. Kognitiiviset emootiot ovat kognitiivisten päämäärien saavuttamiseen liittyviä tunnetiloja. Metaemootiot, jotka säätelevät ja ohjaavat yksilön tunnetiloja, ovat yksilön tunnereaktioita hänen omiin tunteisiinsa. (Hannula 2001, 55, 60–61.)

Lawson (1980) korostaa metakognitioiden merkitystä informaation prosesseihin vaikuttavana keskeisenä tekijänä. Hänen mukaansa metakognitiot käynnistävät, toteuttavat, valvovat ja säätelevät strategioita, joita informaation prosessointi hyödyntää. (mt., 145–147.)

Lawsonin (1980) muotoilema metakognitioiden kuvaus liittää ne strategiatietoihin. Hannulan (2001, 60) näkemyksen mukaan osa mielen metatasoista säätelee yksilön tiedonkäsittelyprosesseja myös yksilön tiedostamatta sitä. Affektiot ovat merkityksellisiä kognitiivisten prosessien säätelijöitä, joten otan huomioon niiden vaikutuksen tiedonkäsittelyprosesseihin metakognitioiden kautta. En erottele tässä yhteydessä mielen muita metatasoja, vaan tyydyn käsittelemään metakognitioita Lawsonin (1980) kuvauksen mukaisesti. Opiskelijan uskomukset ja asenteet vaikuttavat metakognitioiden kautta hänen matemaattiseen ajatteluunsa.

4.6 Matemaattinen osaaminen ja kompetenssi

4.6.1 Johdanto

Matematiikan didaktiikan tutkimuksissa 1990-luvulla keskeinen käsite oli ymmärtäminen. Tultaessa 2000-luvulle tutkijat ovat siirtyneet tarkastelemaan laajemmin oppijoiden kompetensseja (Mouwitz 2003, 5). Tutkijat ovat käyttäneet hieman erilaisia nimityksiä: NAEP:n mittauksissa (NAGB 2000) matemaattinen suorituskyky (*mathematical power*), PISA-tutkimuksessa (Kupari & Korhonen 2000; Kupari 2003) matemaattinen kompetenssi (*mathematical* *competence*) ja matemaattinen taito (*mathematical literacy*) ja Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) käyttämä käsite matemaattinen osaaminen (*mathematical proficiency*). Mainitut käsitteet koostuvat joukosta tunnistettavia taitoja, jotka liittyvät myös matemaattisen ajattelun käsitteeseen. Matemaattiset kompetenssit ja osaaminen liittyvät erilaisten matemaattisten tietojen hallintaan. Tarkastelen ensin lyhyesti kahta ensiksi mainittua lähestymistapaa ja lopuksi matemaattisen osaamisen käsitettä Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) tarkoittamassa merkityksessä. Tarkastelen pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattista osaamista tutkimuksen empiirisessä osassa, jossa tutkimuskohteena on opiskelijoiden suoritukset.

4.6.2 Matemaattinen suorituskyky

Matemaattinen suorituskyky on NAEP:n julkaisussa (NAGB 2000) määritelty opiskelijan laaja-alaiseksi kyvyksi kerätä yhteen ja käyttää matemaattista tietoa. Tämä tulee esille loogisena päättelynä, ei-rutiininomaisten ongelmien ratkaisemisena, kykynä kommunikoida matematiikasta ja matematiikan avulla sekä kykynä yhdistellä ja soveltaa eri konteksteissa opittua matemaattista tietoa. Opiskelijan matemaattinen suorituskyky voidaan nähdä opiskelijan eri matematiikan sisältöalueisiin liittyvissä esityksissä konseptuaalisena ymmärtämisenä (*conseptual understanding*), proseduraalisen tiedon hallintana (*procedural knowledge*) ja ongelmanratkaisukykynä (*problem solving*). Nämä kyvyt eivät ole toisistaan eroteltavissa. Konseptuaalinen ymmärtäminen nähdään *knowing that*- ja proseduraalinen tieto *knowing how* -tyyppisenä tietona. (NAGB 2000; vrt. Ryle 1966.)

Konseptuaalinen ymmärtäminen näkyy opiskelijan suorituksissa, kun opiskelija 1) luo esimerkkejä ja vastaesimerkkejä käsitteistä, 2) käyttää ja yhdistää malleja, diagrammiesityksiä ja toimintamateriaaleja sekä erilaisia käsitteiden esitysmuotoja, 3) tunnistaa ja soveltaa periaatteita, 4) tietää ja soveltaa faktoja ja määritelmiä, 5) vertaa, asettaa vastakkain ja yhdistää toisiaan lähellä olevia käsitteitä sekä periaatteita, 6) tunnistaa, tulkitsee ja soveltaa käsitteiden matemaattisia symboleja ja esitystapoja sekä tulkitsee annettuihin käsitteisiin liittyviä oletuksia ja niiden välisiä suhteita. Opiskelija, jolla on kehittynyt konseptuaalinen ymmärrys, käyttää matemaattisia käsitteitä muita jäljittelemättömillä, vaihtelevilla ja tarkoituksenmukaisilla tavoilla. (NAGB 2000.)

Opiskelijan proseduraalinen tieto näkyy, kun hän 1) valitsee tehtävään asianmukaisen proseduurin ja soveltaa sitä oikein, 2) osoittaa valitun proseduurin soveltuvaksi tehtävän ratkaisuun joko konkreettisten mallien avulla tai symbolisin metodein, 3) laajentaa tai muokkaa tuntemiaan proseduureja annetun tehtävän ratkaisemiseksi (mt., 2000). Hiebertin ja Lefevren (1986) konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto vastaavat edellä esitettyjä konseptuaalista ymmärtämistä ja proseduraalista tietoa.

Ongelmanratkaisussa opiskelija käyttää matemaattisia tietojaan hänelle uudessa tilanteessa. Ongelmanratkaisun hallinta edellyttää, että opiskelija oppii 1) tunnistamaan ja muotoilemaan ongelmia, 2) päättämään annetun tiedon riittävyydestä ja konsistenssista, 3) käyttämään strategioita, tietoa, malleja ja tehtävään sopivaa matematiikkaa, 4) luomaan, laajentamaan ja muokkaamaan proseduureja, 5) käyttämään päättelyä[28] uusissa tilanteissa ja 6) arvioimaan ratkaisujen järkevyyttä ja oikeellisuutta. Ongelmanratkaisussa yhtyvät konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon käytön lisäksi päättelyn ja esittämisen taidot. (NAGB 2000.) Ongelmanratkaisun taidot perustuvat Polyan (1971) esittämiin näkemyksiin.

Mainituissa matemaattisissa suorituskyvyissä on kolme suoritustasoa: perus- (*basic*), hyvä (*proficient*) ja kehittynyt (*advanced*) taso. Perustasolla opiskelija hallitsee osittain matematiikan opiskelussa tarvittavat välttämättömät tiedot ja taidot. Hyvän osaamisen tasolla opiskelija hallitsee ja osaa soveltaa kouluopetuksessa keskeisiä matemaattisia käsitteitä ja periaatteita. Kehittyneellä tasolla opiskelijan esitykset ylittävät kouluun riittävän vaatimustason. (NAGB 2000.)

Matemaattinen kompetenssi nähdään tässä lähestymistavassa kolmena suorituskykynä, jotka nivoutuvat toisiinsa. Niistä ovat tunnistettavissa työssäni käytettävät tiedon lajit. Puutteeksi on luettava, että opiskelijan ajatteluun vaikuttavia affektiivisia tekijöitä ei huomioida lainkaan.

4.6.3 Matemaattiset kompetenssit PISA–tutkimuksessa

PISA-tutkimuksen teoreettisessa viitekehyksessä käsitteellä matemaattinen osaaminen tarkoitetaan 15-vuotiaiden opiskelijoiden kykyä käyttää hyväkseen matemaattisia tietojaan ja taitojaan suhteessa tulevaisuuden haasteisiin (Kupari 2003, 83). Jablonka (2003) on eritellyt tarkemmin kyseistä käsitettä ja todennut, että sitä ei voi käsitellä ilman tarkastelematta ympäröivän yhteiskunnan asettamia vaatimuksia matemaattiselle osaamiselle.

PISA-tutkimuksessa esiintyvällä käsitteellä matemaattiset kompetenssit tarkoitetaan sellaisia yleisiä taitoja ja valmiuksia kuin ongelmanratkaisutaito, matematiikan kielen hallinta ja matemaattinen mallintaminen. Matemaattisiin kompetensseihin kuuluvat PISA-ohjelman mukaan seuraavat tai-

[28] Spatiaalista, induktiivista, deduktiivista, tilastollista.

dot (Kupari & Korhonen 2000): matemaattisen ajattelun taidot, matemaattisen argumentoinnin taidot, mallintamistaidot, ongelman asettelu- ja ratkaisutaidot, esitysmuotoja koskevat taidot, matematiikan kieli ja laskutekniset taidot, kommunikointitaidot sekä apu- ja työvälineiden käyttötaidot. Tässä yhteydessä matemaattisen ajattelun taidoilla tarkoitetaan taitoja, johon kuuluvat matematiikalle luonteenomaiset kysymyksenasettelut, erojen tunnistaminen erilaisten lausumien välillä sekä esitettyjen matemaattisten käsitteiden laajuuden sekä rajoitusten ymmärtäminen ja käsittely. Kyseiset taidot eivät ole hierarkkisia. Reaalimaailman sovellustilanteissa ihminen saattaa tarvita kaikkia mainittuja taitoja samanaikaisesti. Näin ollen ei ole tarkoituksenmukaista yrittää mitata kutakin taitoa erikseen, vaan luodaan helpommin mitattavia taitoluokkia. Tällaisiksi taitoluokiksi on muodostettu seuraavat kolme hierarkkista taitoluokkaa (Kupari & Korhonen 2000):

1. määritelmät sekä lasku- ja suoritustaidot (PISA1)
2. asioiden yhteydet ja yhdistäminen ongelmanratkaisua varten (PISA2)
3. matemaattinen ajattelu, yleistäminen ja oivaltaminen (PISA3)[29].

PISA1-taitoluokkaan kuuluvat matemaattinen faktatieto, sen esitys- ja merkintätavat, käsitteiden yhtäläisyyksien ja vastaavuuksien tunnistaminen sekä matemaattisten objektien ja ominaisuuksien muistaminen. Lisäksi luokkaan kuuluvat rutiininomaiset laskutoimitukset, tavanomaisten algoritmien soveltaminen ja teknisten suoritustaitojen kehittäminen sekä symboleja ja kaavoja sisältävien lausekkeiden käsittely ja niihin sisältyvät laskutoimitukset. (Kupari & Korhonen 2000, 12.) Tämä taitoluokka vastaa proseduraalisen tiedon hallintaa.

Taitoluokassa PISA2 keskeisiä taitoja ovat matematiikan eri sisältöalueiden tietojen yhdistely yksinkertaisten ongelmien ratkaisemiseksi ja strategioiden sekä matematiikan työkalujen valinta ongelmien ratkaisemiseksi. Lisäksi tämän taitotason ongelmat vaativat suhteellisen vähän matematisointia ja ratkaisija osaa käsitellä erilaisia esitysmuotoja (kuvallinen, sanallinen, symbolinen) tilanteen ja tarkoituksen mukaisesti sekä luoda yhteyksiä erilaisten tietojen välille. Taidoista yhteyksien muodostaminen vaatii kykyä erotella ja suhteuttaa erilaisia lausumia kuten määritelmät, väitteet, esimerkit, ehdolliset väittämät ja todistukset. Erityisesti matemaattisen argumentoinnin taidot, mallinnustaidot, ongelman asettelu- ja ratkaisutaidot sekä esitysmuotoja koskevat taidot kuuluvat tähän luokkaan. (Kupari & Korhonen 2000, 12.)

[29]Käytän jatkossa edellä mainituista luokista lyhenteitä PISA1, PISA2 ja PISA3.

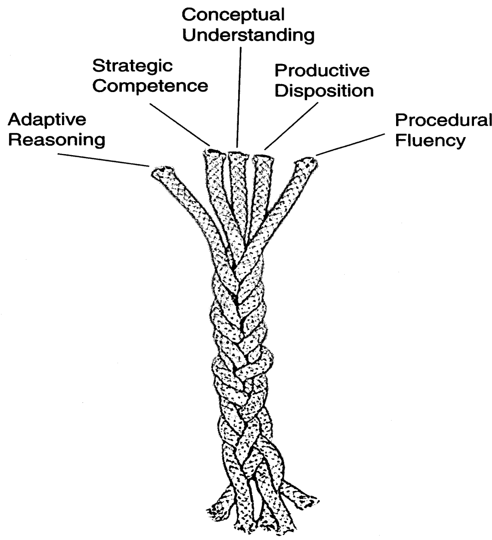
Taitoluokassa PISA3 opiskelija osaa matematisoida ongelmatilanteen ja tunnistaa tilanteeseen sisältyvän matematiikan. Opiskelija käyttää matematiikkaa ongelman ratkaisemiseksi, jolloin hän analysoi, tulkitsee ja laatii omat mallinsa sekä strategiansa. Hän esittää matemaattiset perustelut sekä tarvittaessa todistukset ja yleistykset. Oppija analysoi ratkaisumalliansa ja pohtii mallintamisprosessiaan. Tällä tasolla toimiva ongelmanratkaisija taitaa myös ongelmien asettamisen. Oppija osaa kommunikoida suullisesti, kirjallisesti ja visuaalisesti. Oppija oivaltaa matematiikan luonteen ja sen kulttuuriset ja historialliset elementit sekä näkee matematiikan käytön mahdollisuudet muissa yhteyksissä ja muilla opetussuunnitelman alueilla, joihin mallinnus soveltuu. Tähän luokkaan kuuluvat useat taidot ja valmiudet muista luokista. (Kupari & Korhonen 2000, 12.) Tämä taitoluokka vastaa konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon hyvää hallintaa.

Luokat ovat hierarkkisia siinä mielessä, että luokan kolme tehtävät ovat yleisesti ottaen vaikeampia kuin luokan kaksi tehtävät. Kuitenkaan luokassa kolme hyvin menestyvät eivät välttämättä menesty hyvin esimerkiksi luokassa yksi (Kupari & Korhonen 2000).

4.6.4 Matemaattinen osaaminen

Matemaattinen osaaminen (*mathematical proficiency*) on matematiikan monipuolista hallintaa. Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001) katsovat yksilön matemaattisen pätevyyden koostuvan viidestä piirteestä, joissa on yhtäläisyyksiä edellä esitetyn matemaattisen suorituskyvyn komponentteihin. Nämä piirteet ovat:

1. **Käsitteellinen ymmärtäminen** (*conceptual understanding*): matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen.
2. **Proseduraalinen sujuvuus** (*procedural fluency*): taito käyttää proseduureja joustavasti, huolellisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti.
3. **Strateginen kompetenssi** (*strategic competence*): kyky formuloida, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.
4. **Mukautuva päättely** (*adaptive reasoning*): pystyvyys loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selittämiseen ja todistamiseen.
5. **Yritteliäisyys** (*productive disposition*): nähdä luontaisesti matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana yhdistettynä uskoon ahkeruuden merkityksestä ja omiin kykyihin. (Kilpatrick ym. 2001, 16.)



KUVIO 4.2: Matemaattinen osaaminen koostuu viidestä toisiinsa kietoutuneesta piirteestä (Kilpatrick ym. 2001, 117).

Tässä yhteydessä on syytä huomata, että kyseiset piirteet ovat toisiinsa kietoutuneita ja toisistaan riippuvia (kuvio 4.2). Käsitteellisesti ymmärtävä opiskelija tietää enemmän kuin vain erillisiä faktoja ja menetelmiä. Hän ymmärtää lisäksi, missä konteksteissa matemaattiset käsitteet ovat käyttökelpoisia, miten eri käsitteet liittyvät toisiinsa ja miten uudet käsitteet on liitettävissä hänen hyvin organisoituun tietorakenteeseensa. Käsitteellisen ymmärryksen ei tarvitse olla verbaalisesti ilmaistavissa, vaikka opettajat näin usein olettavatkin, sillä opiskelijat ymmärtävät usein käsitteitä ennen kuin he kykenevät ilmaisemaan ymmärtämystään. (Kilpatrick ym. 2001 , 118.) Oppilas ymmärtää matemaattiset käsitteet ja niiden välisiä suhteita sekä matemaattiset operaatiot (Kilpatrick ym. 2002 , 9). *Konseptuaalinen ymmärtäminen vastaa edellä esitettyä konseptuaalista tietoa ja siihen liittyviä prosesseja.*

Proseduraalinen sujuvuus viittaa proseduurien tuntemiseen: missä tilanteissa ja miten niitä käytetään tarkoituksenmukaisesti. Proseduurien hallinta on yhteydessä käsitteelliseen ymmärtämiseen, sillä esimerkiksi paikkajärjestelmän ja rationaalilukujen ymmärtäminen ei ole mahdollista ilman niihin liittyvien proseduurien hallintaa. (Kilpatrick ym. 2001 , 121.) Tämän piirteen voi tiivistää laskemisen osaamiseksi, jossa oppilas hallitsee matemaattisia proseduureja joustavasti, täsmällisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti (Kilpatrick ym. 2002 , 9). *Proseduraalinen sujuvuus vastaa edellä esitettyä proseduraalista tietoa ja siihen liittyviä prosesseja.*

Strateginen kompetenssi liittyy ongelman ratkaisuun, jossa ongelman ratkaisumenetelmä ei ole opiskelijalle etukäteen selvä. Opiskelijan on tunnettava ja hallittava useita ongelman ratkaisustrategioita. Hänen on kyettävä tunnistamaan annetusta tehtävästä sen ratkaisun kannalta olennaiset piirteet ja muotoiltava ongelma sellaiseen muotoon, että hän pystyy ratkaisemaan sen. (Kilpatrick ym. 2001 , 124.) Strateginen kompetenssi ilmenee tietojen ja taitojen soveltamisen osaamisena, jossa oppilas kykenee muotoilemaan ongelmia matemaattisesti ja keksii ratkaisustrategioita niihin käyttämällä matemaattisia käsitteitä ja proseduureja tarkoituksenmukaisesti (Kilpatrick ym. 2002 , 9). *Strateginen kompetenssi vastaa edellä esitettyjä strategiatietoja ja niiden käyttöä.*

Mukautuva päättely on kapasiteettia ajatella loogisesti eri käsitteiden ja tilanteiden välisistä suhteista. Opiskelija on kykenevä mukautuvaan päättelyyn, jos seuraavat kolme ehtoa toteutuvat: 1) opiskelijalla on riittävä tietopohja, 2) tehtävä on ymmärrettävä ja motivoiva ja 3) tehtävän konteksti on tuttu sekä miellyttävä. Yksi tärkeä mukautuvan päättelyn ilmenemä on kyky osoittaa riittävät perustelut omille valinnoilleen ja tekemisilleen. Varsinainen todistaminen on eräs muoto perustella toimintaansa. Mukautuva päättely tulee esille parhaiten ongelmanratkaisussa, jossa opiskelija käyttää strategista kompetenssiaan ongelman muotoilussa ratkaisussa. Mukautuvaa päättelyä opiskelija tarvitsee, kun hän päättää valitun strategian oikeutuksen. (Kilpatrick ym. 2001 , 129–130.) *Mukautuvassa päättelyssä on sekä strategiatietoa että konseptuaalista tietoa.*

Opiskelijan yritteliäisyys on pyrkimystä havaita mielekkyyttä matematiikassa ja nähdä matematiikka sekä hyödyllisenä että arvokkaana. Lisäksi opiskelija uskoo, että ahkera matematiikan opiskelu kannattaa, ja näkee itsensä tehokkaana matematiikan oppijana ja käyttäjänä. Jos opiskelijalla on hyvin kehittyneinä edellä esitetyt neljä piirrettä, niin hänen täytyy uskoa matematiikan olevan ymmärrettävää ja käyttökelpoista. Esimerkiksi ei-rutiininomaisten tehtävien ratkaiseminen lisää opiskelijan strategista kompetenssia, jolloin opiskelijan asenteet ja uskomukset itsestään matematiikan taitajana muuttuvat positiivisemmiksi, mikä puolestaan edistää muiden piirteiden kehittymistä. (mt., 131.) Opiskelijan yritteliäisyys kuuluu affektiiviselle alueelle, jossa keskeisiä käsitteitä ovat tässä työssä uskomukset ja asenteet. Ne vaikuttavat muun muassa metakognition kautta opiskelijan suorituksiin.

Täten matemaattinen osaaminen koostuu viidestä piirteestä (kuvio 4.2), joissa on huomioitu hienojakoisesti aikaisemmin esitellyt tiedonlajit sekä opiskelijan matemaattiseen ajatteluun vaikuttavat affektiiviset tekijät. Opiskelijan matemaattinen ajattelu on tiedon prosessointia, jossa tiedon lajeja ja toisaalta tiedon prosessointia ohjaavat affektiiviset tekijät (metakognitio) näkyvät oppijan matemaattisen osaamisen piirteinä. Matemaattinen osaaminen sisältää edellä esitetyn matemaattisen suorituskyvyn kolme piirrettä sekä PISA-tutkimuksen matemaattisen kompetenssin ulottuvuudet.

Luku 5

Tutkimusongelmat ja -asetelma

5.1 Lukiolaisen matemaattinen ajattelu

Lukion pitkässä matematiikassa painottuvat opiskelijan matemaattisessa ajattelussa eri piirteet kuin peruskoulun matematiikassa. Lukion pitkän matematiikan opiskelussa nousevat esille peruskoulun matematiikan opiskelua selvemmin matemaattisen tiedon rakenne ja siihen liittyvä matematiikalle tyypillinen todistusajattelu, jossa korostuu erityisesti deduktiivisuus. Lukiossa kiinnitetään entistä enemmän huomiota käsitteenmuodostukseen[1]. Lukion pitkän matematiikan opetussuunnitelman perusteissa (LOPS 1994, 71) esitetään opiskelun tavoitteeksi muun muassa, että *"opiskelija pystyy käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, laatimaan täsmällisiä perusteluja sekä oppii arvioimaan esitettyjen perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä"*. Tällaiset kognitiiviset taidot eivät ole keskeisiä peruskoulun matematiikan opiskelussa. Lukiomatematiikan luonne poikkeaa yliopistossa opetettavasta matematiikasta, jossa kaikki tulokset todistetaan aukottomasti ja opiskelun pääpaino on ensisijaisesti teorioiden muodostuksessa eikä käytännön sovelluksissa ja proseduurien harjoittelussa.

Luvussa kolme tarkastelin erilaisia lähestymistapoja matemaattiseen ajatteluun. Tiedon prosessointia korostava lähestymistapa soveltuu parhaiten käsillä olevaan tutkimukseen, koska konnektionismi kuvaa tapaa, jolla yksilön tietoverkko rakentuu. Luvussa kolme olen lisäksi esitellyt matemaattisen ajattelun määritelmiä ja kuvauksia, joissa ajattelun prosessiluonne tulee esille. Mikään niistä ei mielestäni tuo esille kaikkia niitä matemaattisen ajattelun puolia, jotka koen tärkeiksi tutkittaessa lukion pitkän matematiikan opiskelijan ajattelua. Tämän vuoksi olen luvussa neljä lähtenyt tarkastelemaan

[1]Ks. opetussuunnitelman perusteet 1985, 1994.

koulumatematiikkaan soveltuvaa tiedon käsitettä lähemmin ja päätynyt proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon sekä strategiatiedon käsitteisiin (vrt. Hiebert & Lefevre 1986).

Tiedon käsitteeseen voidaan sisällyttää käsitteet 'ymmärtäminen', 'taito' ja 'metakognitiot'. Viimeksi mainittu tiedon laji tuo tarkasteluun mukaan opiskelijan affektiivisen puolen komponentteja kuten uskomukset, asenteet ja emootiot: ne kaikki vaikuttavat ratkaisevasti opiskelijan matemaattiseen ajatteluun.

Ajattelu voi olla tiedostamatonta kuten intuitio[2] tai tietoista kuten ongelmanratkaisu. Molemmat ajattelun tyypit voivat olla käynnissä samanaikaisestikin. Nähdäkseni opiskelija käyttää matemaattista ajattelua ainakin seuraavissa tilanteissa: 1) opiskellessaan intentionaalisesti matemaattisia käsitteitä, 2) matematiikan ongelmanratkaisutilanteissa ja 3) assosioidessaan vapaasti tietojaan. Matematiikan käsitejärjestelmän opiskelun on oltava intentionaalista toimintaa, jotta oppimista ylipäätänsä voisi tapahtua[3]. Tällöin opiskelija tarvitsee deduktiivista ja induktiivista ajattelua matemaattisessa ajattelussaan ymmärtääkseen käsitejärjestelmän rakenteen[4]. Pelkkien faktojen (asiatietojen) ulkoaopettelu ja toistaminen ei vaadi matemaattista ajattelua, niin kuin niiden hyödyntäminen ja soveltaminen ongelmanratkaisussa jo vaatii ajattelua. Matemaattisten taitojen harjaannuttaminen tehtäviä ratkaisemalla, mikä on tyypillistä koulumatematiikan tekemistä, saattaa yksinkertaisimmillaan vastata faktatietojen toistamista. Matematiikassa ongelmanratkaisu siinä mielessä kuin Polya (1971) on sen esittänyt, on matemaattista ajattelua vaativa prosessi, jota toisinaan pidetään matemaattisen ajattelun keskeisimpänä ilmentymänä[5]. Viimeiseksi mainitsemallani vapaalla assosiaatiolla viittaan esimerkiksi opiskelijan "päähänpistoon" kokeilla tai yhdistellä oppimiaan käsitteitä näennäisen satunnaisesti (intuition ohjaamana) ja tarkastella niistä saatavia tuloksia, joille selitystä hakiessaan hän voi saada oivalluksia. Erityisesti tietotekniikka tarjoaa mahdollisuuden vähällä vaivalla kokeilla ja yhdistellä tietoja ilman mitään erityistä päämäärää; valistunut opiskelija voi käyttää matemaattista ajatteluaan ennustaessaan, mitä voisi tapahtua.

Valitsemassani lähestymistavassa matemaattiseen ajatteluun sen elementeiksi tulevat matemaattiset tiedot, jotka voivat olla proseduraalisia[6], konseptu-

[2]Ks. esim. Pascal 2002.

[3]Ks. Uljens 1997; Yrjönsuuri & Yrjönsuuri 1997.

[4]Esimerkiksi Pirie & Kierenin teoria ymmärryksen kasvusta käsitteen oppimisessa.

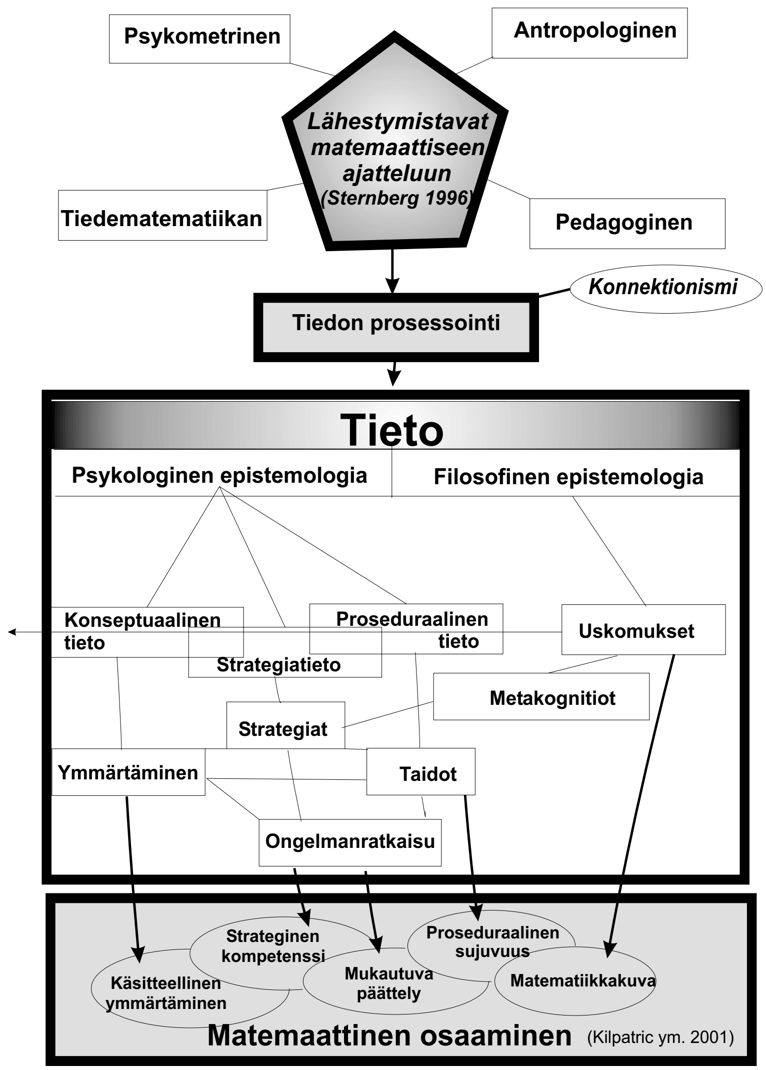
[5]Esim. Schoenfeld (1994) *Mathematical Thinking and Problem Solving.*

[6]Ks. alaluku 4.3.1.

aalisia[7] tai strategiatietoja[8]. Jokin tieto voidaan tulkita myös proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon yhdistelmäksi. Tiedon matemaattisuus viittaa tiedon kuuluvan matematiikan tieteen piiriin. Tästä näkökulmasta matemaattinen ajattelu on lyhyesti sanottuna matemaattisen tiedon prosessointia. Se vastaa Dreyfusin ja Eisenbergin (1996, 254) määrittelyä, jonka mukaan matemaattinen ajattelu on koulumatematiikassa yksinkertaisesti ajatteluprosessityyppi, jota käytetään opiskeltaessa matematiikkaa (*doing mathematics*). Kuitenkin matemaattisen ajattelun pitäminen pelkkänä tiedon prosessointina tarkoittaa yksinkertaisimmillaan sitä, että jos tieto on yksinkertaista faktatietoa ja prosessina vain esimerkiksi muistaminen, niin mainitun määrittelyn mukaan tämä edustaisi matemaattista ajattelua. Mehtäläinen (1992, 18) näkee ajattelun tapahtumana, jossa on tunnusmerkillistä uusien ajatuksien syntyminen. Siis pelkkä faktatietojen toistaminen, vaikka ne olisivatkin matematiikkaan liittyviä, ei tuo mitään uutta tietoa eikä muuta muistetun tiedon suhdetta muihin tietoihin. Siksi määrittelyä on syytä tarkentaa. Prosessointi ei voi olla pelkästään muistamista, vaan prosessointia ovat esimerkiksi matematiikalle tyypillisten strategioiden[9] soveltaminen tai Burtonin matemaattiselle ajattelulle keskeisenä pitämät prosessit[10]. Ajattelulle on ominaista useiden tietojen yhtäaikainen prosessointi, jossa ovat merkityksellisiä tietojen väliset suhteet ja yleisesti ottaen opiskelijan oma ainutlaatuinen tietoverkko[11]. Toisaalta on syytä huomioida myös näitä prosesseja ohjaavia tekijöitä.

Opiskelijoiden metakognitiot[12], jotka ovat osa strategioita ja kuuluvat tässä luokituksessa strategiatietoihin, ohjaavat ajattelua. Metakognitioiden kautta opiskelija on tietoinen omasta ajattelustaan ja siihen vaikuttavat muun muassa opiskelijan uskomukset, asenteet ja emootiot, jotka kohdistuvat matematiikkaan ja sen opiskeluun. Metakognitiot ovat yhteydessä myös hiljaiseen tietoon ja intuitioon sekä itsesäätelyyn. Näiden käsitteiden erotteleminen ja rajaaminen on vaikeaa. Opiskelijan omat asenteet matematiikkaan ja uskomukset itsestään matematiikan oppijana toisaalta ohjaavat hänen ajatteluaan ja toisaalta heijastavat ajatteluprosessien kvalitatiivisia piirteitä. Matematiikkaan liittyvien asenteiden ja uskomusten suotuisat muutokset matematiikan opiskelussa ovat osa opettajan toivomaa opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittymistä. Omassa tutkimuksessani otan huomioon uskomukset, asenteet ja emootiot matemaattisen ajatteluun vaikuttavina tekijöinä.

[7] Ks. alaluku 4.2.1.
[8] Ks. alaluku 4.4.1.
[9] Ks. alaluku 4.4.1.
[10] Ks. alaluku 3.2.3.
[11] Ks. konnektionismi alaluku 3.1.6.
[12] Ks. alaluku 4.4.2.



KUVIO 5.1: Matemaattiseen ajatteluun liittyvien käsitteiden suhteet käsillä olevassa työssä.

Perustan siis matemaattisen ajattelun kuvauksen seuraavaan (kuvio 5.1): *Opiskelijan matemaattinen ajattelu on hänen metakognitioidensa ohjaamaa matemaattisten tietojen (proseduraalista, konseptuaalista, strategiatietoa) prosessointia, jossa yksilö organisoi uudelleen tietoverkkoaan.* Ajattelun päämääränä on käsitteiden ja käsitejärjestelmien syvällisempi ymmärtäminen tai suoriutuminen ongelmanratkaisuprosessista. Matemaattista ajattelua voi tapahtua eri tasoilla kuten esimerkiksi ymmärtämistä sen mukaisesti, mikä opiskelijan tietojen asema on tietoverkossa ja kuinka kompleksinen ongelma tai käsite on. Näen matemaattisen ajattelun prosessiluonteen keskeiseksi koko ilmiössä.

Matemaattinen osaaminen, joka Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) mukaan muodostuu viidestä piirteestä, tarjoaa käsitteellisen viitekehyksen erilaisten tietojen prosessoinnille ja ottaa myös huomioon opiskelijan affektiot matematiikan opiskelussa (kuvio 5.1). Matemaattista osaamista voidaan tutkia opiskelijalle annettujen tehtävien ratkaisuista. Niistä on pääteltävissä osaamisen piirteiden hallinta. Osaamisen piirteillä on yhteys tiedon lajeihin[13]. Tutkimuksessani matemaattinen ajattelu on tiedon prosessointia, joten tiedon lajin kuvaaminen ja tehtävän kognitiivisen tason arviointi määrittävät opiskelijan ratkaisuprosessin matemaattista ajattelua. Matemaattinen osaaminen on opiskelijan matemaattisen ajattelun yksi ilmentymä.

Schoenfeldin (1994, 60) mukaan matemaattisen ajattelun oppiminen tarkoittaa matemaattisen näkökulman kehittämistä arvioimalla ongelmien matematisointi- ja abstrahointiprosesseja sekä pyrkimystä soveltaa niitä ongelmiin ja kehittää taitoa käyttää matemaattisia työkaluja ja hyödyntää niitä pyrkimyksissä ymmärtää tehtävien struktuureja sekä löytää matemaattinen mielekkyys niistä.

Lukion matematiikan opiskelussa matemaattisen ajattelun kehittyminen näkyy ongelmaratkaisutaitojen lisääntymisenä. Oppilaan potentiaalisten matemaattisten kykyjen karttuessa hän löytää uusia strategioita ratkaista hänelle entuudestaan tuttuja matemaattisia probleemoja. Toisaalta hän pystyy analysoimaan uusia probleemoja sekä löytämään niiden ratkaisemiseksi optimaalisen menetelmän. Matemaattisen ajattelun kehittymiseen kuuluvat strategiatiedon, konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon määrällinen sekä laadullinen kehittyminen. Laadullinen kehittyminen tarkoittaa yhä kompleksisempien struktuurien ja prosessien rakentamista ja hallintaa sekä metakognitiivisten tietojen ja taitojen tiedostamista että soveltamiskykyä. Konseptuaalisen tiedon verkottuminen yhä edelleen uusiin strategiatietoihin, konseptuaalisiin ja proseduraalisiin tietoihin on keskeinen osa matemaattisen ajattelun kehittymistä. Tämä näkyy matemaattisen osaamisen piirteiden kehittymisenä.

[13] Ks. alaluku 4.6.4.

5.2 Tutkimusongelmat

Tutkimuksen keskeinen käsite on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen ajattelu, jota kuvaan painottaen tiedon prosessointia. Lukiolaisen matemaattista ajattelua tarkastelen kolmesta näkökulmasta: yhteiskunnan, opettajan ja oppilaan. Tutkimuskohde on rajattu pitkän matematiikan opiskelijoihin, jotka ovat kirjoittaneet ylioppilaaksi 1990-luvulla. Silloin ovat olleet voimassa kahdet opetussuunnitelman perusteet[14]. Myös ylioppilaskirjoituksia säätelevät asetukset (alaluku 2.3) ovat muuttuneet. Sukupuolten väliset erot mittaustuloksissa ovat olleet tarkasteltavina kansainvälisissä tutkimuksissa[15], joten otan tämänkin näkökulman mukaan.

Opiskelijan uskomusten ja asenteiden vaikutuksen hänen matemaattiseen ajatteluunsa otan huomioon tutkimalla opiskelijan matematiikkakuvaa. Opiskelijan matematiikkakuva koostuu uskomuksista: matematiikasta, itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä, matematiikan opetuksesta sekä matematiikan oppimisesta (Pehkonen 1998, 47). Matematiikkakuva ohjaa omalta osaltaan opiskelijan metakognitioita ja vaikuttaa siten ongelmanratkaisuprosesseihin, jossa metakognitiot ohjaavat strategiatietojen käyttöä. Opiskelijoiden on vaikeampi arvioida matemaattista ajatteluaan kuin omaa matematiikkakuvaansa. Opiskelijan matematiikkakuvan tunteminen auttaa ymmärtämään opiskelijan matemaattista ajattelua, jota on tarkasteltu muista näkökulmista.

Tarkastelen opiskelijan matemaattista ajattelua hänen osaamisensa kautta. Osaaminen tulee näkyviin tehtävien ratkaisuissa tai ratkaisuyrityksissä, joista voi päätellä opiskelijan matemaattisen osaamisen piirteitä[16] ja tasoa. Osaamisen piirteet linkittyvät tiedon lajeihin ja ne edelleen matemaattisen ajattelun kuvaukseen[17].

Tutkin ensin pitkän matematiikan opiskelijan matemaattista osaamista kahdesta näkökulmasta (valtakunnan ja opettajan) ja kolmantena näkökulmana opiskelijan matematiikkakuvaa hänen itsensä arvioimana. Nämä muodostavat kolme ensimmäistä pääongelmaa alaongelmineen. Neljäs pääongelma kokoaa yhteen kolmen edellisen pääongelman tulokset ja tulkitsee niitä opiskelijan matemaattisen ajattelun kannalta.

[14] Ks. alaluvut 2.2.3 ja 2.2.4.
[15] SIMS, TIMSS, PISA.
[16] Ks. alaluku 4.6.4.
[17] Ks. kuvio 5.1 s. 103.

Tutkimuksen pääongelmat ja niihin liittyvät ala-ongelmat ovat seuraavat:

I Minkälaista valtakunnallisella tasolla on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaaminen lukio-opintojen päättyessä?

Alaongelmat:
Erityisesti, minkälaista se on
1.1 eri sukupuolten muodostamissa ryhmissä?
1.2 eri opetussuunnitelmien mukaan opiskelevien ryhmissä?
1.3 pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittavien ryhmissä?

II Minkälaista on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaaminen koulun tasolla lukio-opintojen päättyessä opettajan arvioimana?

Alaongelmat:
Erityisesti, minkälaista se on
2.1 eri sukupuolten muodostamissa ryhmissä?
2.2 eri opetussuunnitelmien mukaan opiskelevien ryhmissä?
2.3 pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittavien ryhmissä?

III Minkälainen on pitkän matematiikan opiskelijan matematiikkakuva?

Alaongelmat:
Erityisesti, minkälainen se on
3.1 eri sukupuolten muodostamissa ryhmissä?
3.2 eri opetussuunnitelmien mukaan opiskelevien ryhmissä?
3.3 pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittavien ryhmissä?

IV Minkälaista on pitkän matematiikan opiskelijan tehtäväorientoitunut matemaattinen ajattelu lukio-opintojen päättyessä?

Vuosikymmen antaa mahdollisuuden aikaperspektiivissä tarkastella mahdollisia muutoksia opiskelijan matematiikkakuvassa, matemaattisessa osaamisessa ja ajattelussa.

5.3 Tutkimusasetelma

Matemaattinen ajattelu on opiskelijan latentti piirre, jota on syytä tutkia useasta eri näkökulmasta ja myös eri tasoilla. Tällöin voidaan saada näkyville tutkittavan kohteen eri ulottuvuuksia. Tutkimusasetelman mallina on triangulaatiotutkimus, jossa tarkastellaan henkilön latenttia piirrettä kolmesta eri näkökulmasta osittain erilaisin tutkimusmenetelmin.

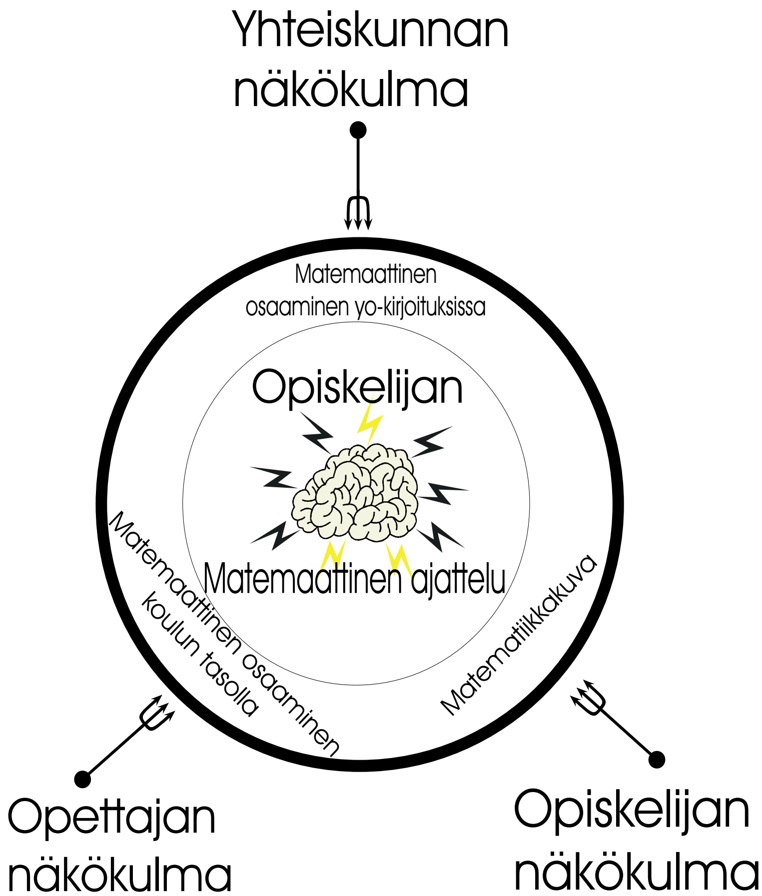
Tässä työssä on valittu kolme eri tarkastelunäkökulmaa opiskelijan matemaattisen ajattelun tutkimiseen. Ne ovat:

1. yhteiskunnan (valtakunnallisella tasolla)
2. opettajan (koulun tasolla)
3. opiskelijan oma (yksilön tasolla).

Tutkimusasetelman näkökulmia on havainnollistettu kuviossa 5.2. Matemaattista ajattelua tutkija voi havainnoida vain epäsuorasti. Mittauksien kohteina ovat opiskelijan matemaattinen osaaminen koulun ja valtakunnan tasolla sekä opiskelijan uskomukset. Kussakin näkökulmassa mittauksia ja muuta aineistoa tulkitaan lisäksi kolmessa ryhmässä (kuviossa nuolen kolme kärkeä): sukupuolten välillä, opetussuunnitelmien suhteen ja matematiikan pakollisena kirjoittamisen suhteen.

Opettajan näkökulma tuo mukanaan muutakin tietoa kuin vain opiskelijoiden produktien arviointitulokset. Kouluyhteisössä – etenkin pienissä lukioissa – opettaja tuntee opiskelijan taustamuuttujat ja on runsaassa vuorovaikutuksessa opiskelijoiden kanssa niin tuntitilanteissa kuin niiden ulkopuolellakin. Opettaja pystyy arvioimaan opiskelijoiden ajatteluprosesseja oppituntien ongelmaratkaisutilanteissa, joissa opiskelijat pienissä ryhmissä tai opettajajohtoisesti keskustellen etsivät ratkaisumalleja tutkittaviin ongelmiin. Tällöin opiskelijoiden yksilölliset erot opiskeluprosessissa voidaan ottaa huomioon: tulosten tulkinta saa syvyyttä. Opettaja arvioi opiskelijoidensa matemaattista osaamista summatiivisten kokeiden avulla, joiden suoritukset antavat viitteitä opiskelijan matemaattisesta ajattelusta.

Opiskelijan omaa kuvaa matemaattisesta ajattelustaan ja matematiikasta yleensä sekä sen merkityksestä yhteiskunnassa voidaan mitata asennekyselyn (uskomuskyselyn) avulla. Affektiivinen komponentti on opiskelussa keskeisellä sijalla. Myönteiset uskomukset ja asenteet matematiikasta ja sen opiskelusta ovat edellytyksiä menestyksekkäälle oppimiselle. Tällä tasolla tulevat mahdollisesti näkyviin myös sukupuolten väliset erot suhteessa matematiikkaan.

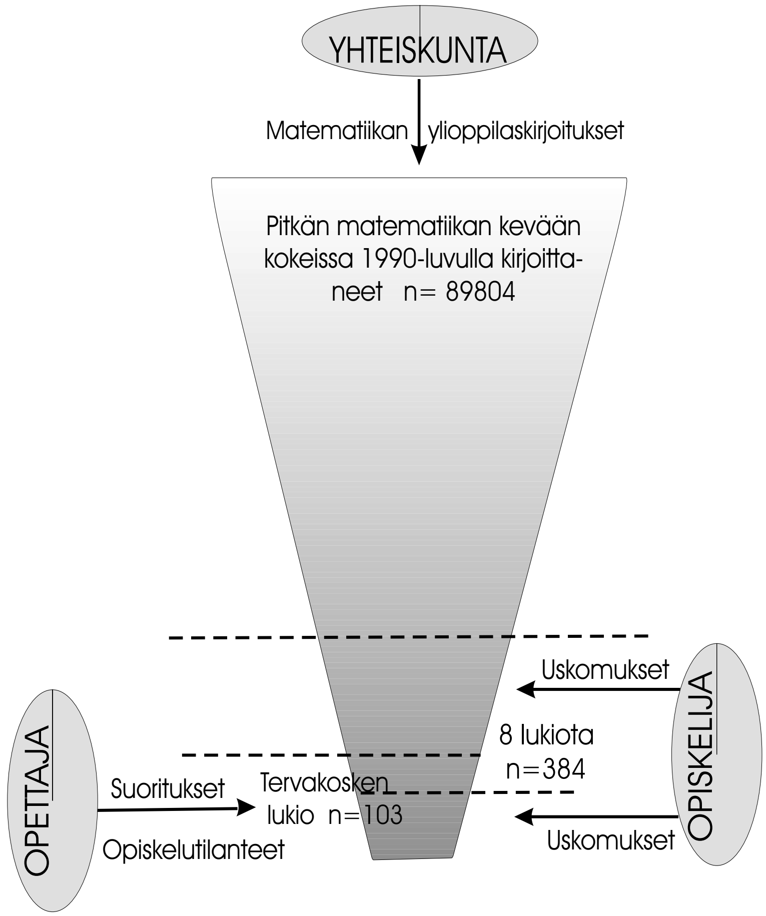


KUVIO 5.2: Tutkimusasetelman kolme näkökulmaa.

Opiskelijoiden uskomusten, asenteiden ja emootioiden edustama ”ruohonjuuritason” informaatio ei anna juurikaan viitteitä opiskelijoiden matematiikan kognitiivisesta tasosta, mutta kuvaa opiskelijoiden metakognitioita.

Yhteiskunnan suorittama arviointi tapahtuu valtakunnallisesti muun muassa ylioppilaskokeiden, erillisten tutkimusprojektien ja valtakunnallisten kilpailujen tulosten arviointina. Tällöin voidaan hahmotella kuva ikäluokkien matemaattisesta osaamisesta ja kognitiivisesta tasosta. Tuloksia on tarkasteltava suhteessa asetettuihin tavoitteisiin, joita on kirjattu opetussuunnitelman perusteisiin.

Lukiossa matemaattisen osaamisen arviointi on sidottu kursseihin, jotka edustavat matematiikan eri osa-alueita. Niitä on mielekästä tarkastella erikseen, sillä esimerkiksi geometria ja algebra edellyttävät eriluonteista mate-



KUVIO 5.3: Tutkimusasetelman kolme näkökulmaa, tutkimusaineistot ja kohteiden lukumäärät.

maattista ajattelua. Lopuksi tarkastelen kuitenkin yhtenä kokonaisuutena pitkän matematiikan opiskelijan matemaattista ajattelua, joka sisältää nämä hieman eriluonteiset matematiikan eri osa-alueisiin kuuluvat ajattelutavat.

Kuviossa 5.3 olen kuvannut tutkittavan pitkän matematiikan opiskelijajoukon jakaantumista eri näkökulmien kesken. Tutkimusaineiston olen rajannut 1990-luvulla keväällä pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksiin osallistuneisiin, jota tutkin yhteiskunnan näkökulmasta pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten tulosten kautta. Tästä joukosta tutkin uskomusten osalta kahdeksan lukion pitkän matematiikan opiskelijoita ja edelleen tähän joukkoon kuuluvan Tervakosken lukion opiskelijoita. Osa Tervakosken lukion opiskelijoista on osallistunut myös uskomustutkimukseen. Kuviosta 5.3 voin todeta, että kun siirrytään kohdejoukossa ylhäältä alaspäin uskomusmittauksiin ja

Tervakosken opiskelija-aineistoon, niin tiedon laatu monipuolistuu aineiston lukumäärän pienetessä. Kuviossa 5.3 tämä näkyy täyttövärin sävyn tummenemisena alaspäin siirryttäessä.

Ensimmäisessä vaiheessa tarkastelen valtakunnallisten pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tuloksia ja arvioin opiskelijoiden matemaattisen osaamisen tasoa niiden avulla. Toisessa vaiheessa tarkastelen Tervakosken lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattista osaamista ja heidän itsensä näkemyksiä pitkän matematiikan opiskelusta 1990-luvulla. Kolmannessa vaiheessa analysoin pitkän matematiikan opiskelijoiden metakognitioita heidän matematiikkakuvansa kautta. Se muodostuu heidän uskomuksistaan, asenteistaan ja emootioistaan matematiikan alueella. Tarkastelu tapahtuu siirtymällä yleisestä valtakunnan tasosta erityiseen yksittäisen lukion tarkasteluun, jolloin empiirisen aineiston määrä pienenee, mutta kuva tutkittavasta ilmiöstä tarkentuu (kuvio 5.3). Esittelen kunkin kolmen tarkastelunäkökulman kohdalla erikseen niihin kuuluvat tutkimuskohteet, teoreettiset käsitteet ja tutkimusmenetelmät.

Lopuksi tarkastelen pitkän matematiikan opiskelijan tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä kuvattujen näkökulmien tulosten pohjalta. Kahden ensimmäisen näkökulman antama kuva opiskelijan matemaattisen osaamisen piirteistä on pohjana opiskelijan matemaattisten tietojen arvioinnille. Opiskelijan tietorakenteen ominaisuudet kuvaavat matemaattisen ajattelun piirteitä.

Luku 6

Matemaattinen osaaminen ylioppilaskirjoituksissa

6.1 Johdanto

Pitkän (laajan) matematiikan ylioppilaskirjoitus on valtakunnallinen mittari lukion keskeisten oppisisältöjen hallinnasta. Ylioppilastutkintolautakunta näkee kokeen mittaavan enemmän kuin vain pelkkää opetettujen asioiden osaamista, kuten lautakunnan puheenjohtajan mainitsee:

> *Pitkän matematiikan koe pyrkii nykyisten opetussuunnitelmien perusteiden hengessä mittaamaan opiskelijoiden matemaattisen ajattelun kypsyyttä* (Lahtinen 2000, 16).

Matemaattisen ajattelun arvioinnin lähtökohta on opiskelijoiden matemaattisen osaamisen arvioinnissa, joka perustuu tehtävien suoritukseen. Ylioppilaskirjoituksien tulokset voivat antaa viitteitä ikäluokkien matemaattisista kompetensseista, mutta tiedot perustuvat pääasiassa tilastoituihin koetuloksiin. Opiskelijoiden matemaattisen ajattelun tutkiminen voi tapahtua vain käänteisellä päättelyllä siitä, mitä opiskelija on tehtävissä hallinnut ja mitä hän ei ole hallinnut. Opiskelijoiden matematiikan ylioppilaskirjoitusten tulosten ja lukion matematiikan opiskelussa osoitetun menestyksen välisen yhteyden kuvaaminen liittää valtakunnallisen ja koulun tason arvioinnin opiskelijan matemaattisesta ajattelusta samaan kehykseen.

Tarkastelen vain kevään ylioppilaskirjoituksia, sillä pitkässä matematiikassa niihin osallistuu ylivoimaisesti suurin joukko ensi kertaa kirjoittavia abiturientteja.

Ylioppilastutkintolautakunnan jäsenet kommentoivat vuosittain kirjoitusten tuloksia. Asiantuntijoiden analyysit kunkin kevään matematiikan kirjoituksista on suunnattu alun perin lukion matematiikan opettajille, jotka arvioivat abiturienttien suorituksia. Nämä asiantuntijalausunnot ovat tutkijalle osa ylioppilaskirjoitusten tulosten analysointia, sillä monivuotisilla jäsenillä on kokemusta ja näkemystä sekä tehtäväsarjojen laatimisesta että arvioinnista.

Tarkasteltavassa yhteiskunnan näkökulmassa tutkimuskohteena on pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten tulokset, joissa on eroteltavissa tehtäväkohtaiset pistemäärät, kokeiden summapistemäärät ja arvosanat. Tulosten tulkitseminen vaatii laajemman kuvan 1990-luvun matematiikan ylioppilaskirjoituksista. Mainitusta syystä teen seuraavassa luvussa yleiskatsauksen kirjoituksiin.

6.2 Katsaus pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksiin 1990-luvulla

6.2.1 Yleisiä huomioita matematiikan ylioppilaskirjoituksista

Pitkän (laajan) matematiikan ylioppilaskokeeseen ja sen tuloksiin vaikuttivat 1990-luvulla useat tekijät. Ensimmäiset tasokurssittoman peruskoulun käyneet opiskelijat osallistuivat ylioppilaskirjoituksiin vuonna 1991. Lukion laajan matematiikan kirjoittaneilla oli ennen tätä vuotta peruskoulussa yleensä matematiikan laaja oppimäärä, jossa oli muun muassa suurempi tuntimäärä ja sisältö kuin keskikurssissa ja suppeassa kurssissa. Tasokurssien poistuttua arvostelu muuttui peruskoulussa tavoitearvioinniksi, jolloin arvosanojen vertailtavuus heikkeni; toisaalta hylättyjen suoritusten osuus väheni peruskoulussa entisestään. Vuonna 1992 ja sen jälkeen kirjoittaneet abiturientit olivat opiskelleet peruskoulussa yhden vuosiviikkotunnin vähemmän matematiikkaa kuin vanhemmat ikäluokat. Rosenberg (1991, 1992) piti peruskoulun matematiikan antamaa heikkoa pohjaa eräänä keskeisenä syynä laajan matematiikan ylioppilaskokeen tuloksiin. Yleisen matematiikan ylimääräisenä kirjoittavien määrän kasvun syiksi Rosenberg (1993a) näki muun muassa oppilaiden vähentyneen työnteon matematiikan opiskelussa ja sen seurauksena sekä heikot matematiikan tiedot ja taidot että huonon itseluottamuksen matematiikan tehtäviä ratkottaessa.

Vuonna 1994 tulivat uudet opetussuunnitelman perusteet käyttöön. Niissä kiinnitettiin huomiota tiedon soveltamiseen, ongelmanratkaisutaitojen kehittämiseen ja oppimaan oppimiseen. Koulukohtaisissa opetussuunnitelmissa saattoi olla koulun omia syventäviä ja soveltavia kursseja. Lukio muuttui luokattomaksi, jolloin opiskelija voi itse suunnitella ohjaamiensa opintojen etenemisjärjestyksen ja -vauhdin tietyissä rajoissa. Vuodesta 1994 lähtien graafisten laskinten käyttö tuli sallituksi kirjoituksissa. Tällöin soveltavien tehtävien osuus korostui, koska tehtävien mekaanisen laskemisen hallinnan merkitys väheni koetilanteessa.

Vuoden 1995 kevään laajan ja yleisen matematiikan kokeissa oli kaksi samaa tehtävää, jotka oli sijoitettu tehtäväjärjestykseen samoille paikoille molemmissa kokeissa. Kokeilun tarkoituksena oli tutkia, miten tehtävien mittaamia molempien oppimäärien keskeisiä perusasioita hallitaan. Laajan matematiikan opiskelijat menestyivät näissä tehtävissä paremmin kuin yleisen matematiikan kokeeseen osallistuneet. Kokeilu jäi vain tähän vuoteen.

Kokeen nimi muuttui vuonna 1996 pitkän matematiikan kokeeksi. Opiskelijat saivat valita sen joko pakolliseksi tai ylimääräiseksi. Pitkän matematiikan opiskelija sai jättää matematiikan kokeen kokonaan kirjoittamatta tai hän saattoi valita lyhyen matematiikan kokeen joko pakolliseksi tai ylimääräiseksi. Pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittaneet ovat menestyneet heikosti kirjoituksissa. Näillä opiskelijoilla on vakavia puutteita niin peruslaskutaidoissa kuin päättely- ja todistustaidoissa (Lahtinen 1996b, 1997).

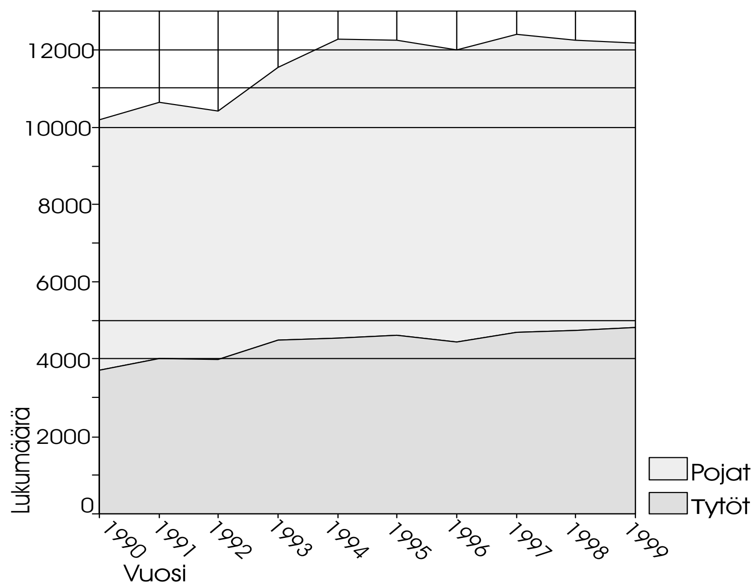
Kokeessa oli 1990-luvulla kymmenen tehtävää, joista neljässä tai viidessä oli vaihtoehtoinen tehtävä. Tehtävät pyrittiin järjestämään suunnilleen vaikeusjärjestykseen helpoimmasta lähtien. Vuodesta 1996 alkaen kokeeseen kuului myös vaihtoehtoisia syventävien kurssien tehtäviä.

6.2.2 Kirjoittajien määrien muutokset

Pitkän matematiikan kirjoittajien lukumäärä nousi noin 10000:sta runsaaseen 12000 kirjoittajaan 1990-luvulla (kuvio 6.1). Suurin osa kirjoittajista oli poikia tyttöjen osuuden jäädessä noin 40 %:iin, vaikka suurin osa lukiolaisista olikin tyttöjä.

Pitkän matematiikan oppimäärän suorittaneiden lukumäärä kasvoi kuitenkin enemmän kuin kirjoittajien lukumäärä, sillä vuosina 1996–1999 lyhyen matematiikan kokeen kirjoittaneiden pitkän matematiikan lukijoiden määrä kasvoi joka vuosi[1] ja myös kokonaan matematiikan kirjoittamatta jättäneiden osuus kasvoi[2].

[1] Vuonna 1996: 680, 1997: 828, 1998: 982 ja 1999: 1094 pitkän matematiikan opiskelijaa.
[2] Esimerkiksi vuonna 1999 14 % pitkän matematiikan lukeneista.

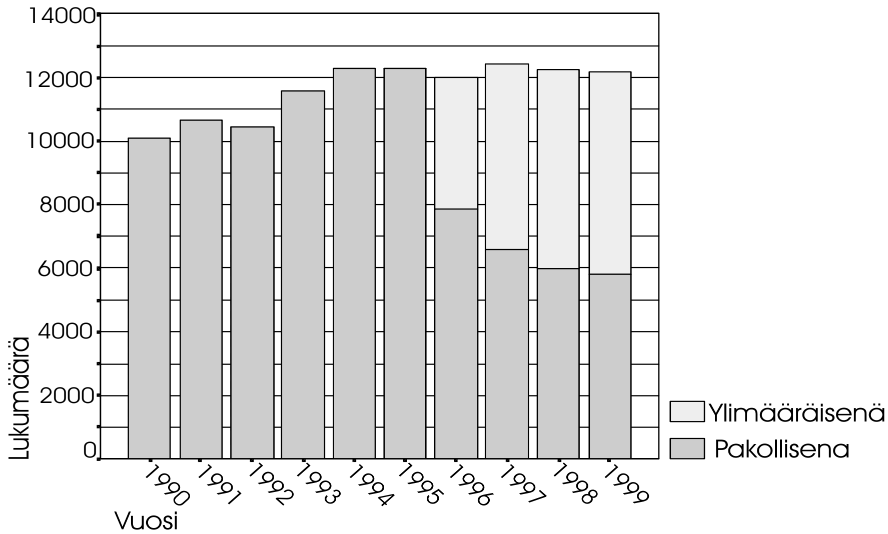


KUVIO 6.1: Pitkän matematiikan kevään ylioppilaskirjoituksiin osallistuneet opiskelijat 1990-luvulla.

LUMA-talkoiden myötä nuoria kannustettiin valitsemaan lukiossa pitkä matematiikka, mutta asetetusta 17000 kirjoittajan tavoitteesta vuoteen 2002 mennessä jäätiin kauas.

Vuodesta 1996 lähtien pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittavien määrä on kasvanut vuosi vuodelta (kuvio 6.2); 1990-luvun lopulla heitä oli jo yli 50 %:a kaikista pitkän matematiikan kirjoittajista. Toisaalta voidaan sanoa, että pitkän matematiikan pakollisena kirjoittavien lukumäärä putosi puoleen 1990-luvun loppupuolella verrattuna 1990-luvun alkupuoleen.

Pitkän matematiikan opiskelleista tytöistä suurin osa valitsee matematiikan ylimääräiseksi (liite 1, kuvio 9.3). Lisäksi matematiikan ylimääräisenä kirjoittavien tyttöjen määrä on ollut kasvussa koko 1990-luvun lopun ja vuodesta 1997 suurempi kuin pakollisena kirjoittavien (liite 2, kuvio 9.5). Pakollisena kirjoittavien poikien lukumäärä on pysynyt suurempana kuin ylimääräisenä kirjoittavien, joiden osuus on ollut myös kasvussa (liite 2, kuvio 9.4). Suhteellisessa arvosanajakaumassa (liite 1, kuvio 9.2) ei ole eroja sukupuolten välillä, mutta tytöistä ylimääräisenä kirjoittavien osuus on huomattavan suuri ($69,7\%$). Ylimääräisenä kirjoittavien tyttöjen osuuden kasvu kaikista pitkän matematiikan kirjoittavista tytöistä on huolestuttavaa, sillä ylimääräisenä kirjoittavien heikko taso saattaa ylläpitää tyttöjen heikkoa itsetuntoa



KUVIO 6.2: Pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittaneiden opiskelijoiden lukumäärät kevään kokeissa 1990-luvulla.

matematiikan osaamisessa sekä streotyyppistä ajattelua sukupuolten matematiikan taidoista. Tällainen ajattelu ei lisää pitkän matematiikan suosiota tyttöjen keskuudessa.

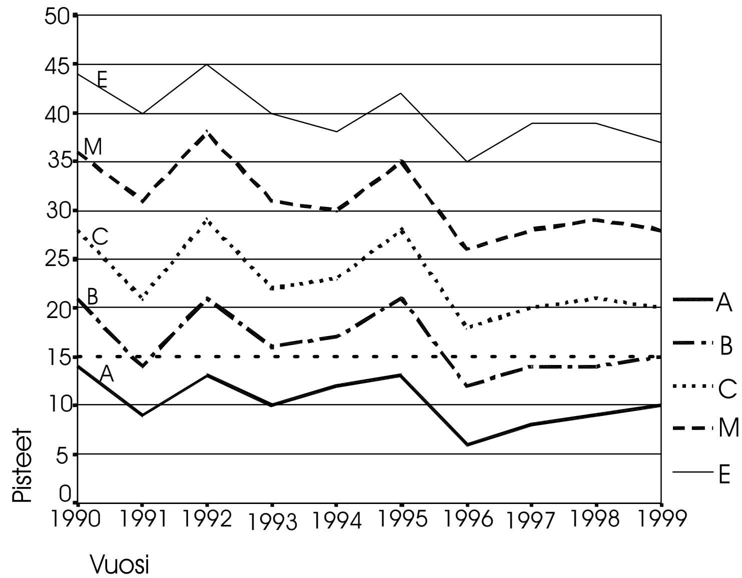
6.2.3 Kevään kokeiden arvosanojen ja niitä vastaavien pistemäärien muutokset

Ylioppilaskokeen arvosanarajat[3] määrätään joka vuosi saadun pistesummajakauman perusteella (vrt. kuvio 2.2 s. 45). Hyväksytyn kokeen pisteraja on vaihdellut kuudesta pisteestä, joka vastaa yhden tehtävän maksimipistemäärää, 14 pisteeseen, joka vastaa noin 2,5 tehtävää (kuvio 6.3).

Vuonna 1991 arvosanojen pistemäärissä tapahtui selkeä notkahdus alaspäin. Hyväksytyn kokeen pisterajaksi oli asetettu yhdeksän pistettä, mikä vastaa 1,5 tehtävää, ja tällöin 943 (8,8 %) kirjoittajaa hylättiin[4]. Laajan matematiikan kokeen tuloksista tehtiin kantelu Opetusministeriöön, joka myös käsitteli sen. Kuultuaan asiantuntijoita (YTL, OPH ja MAOL) Opetusministeriö

[3] Ohjeelliset rajat: 15p=A, 19p=B, 25p=C, 33p=M, 42p=E ja 52p=L.

[4] Aikaisempina vuosina hylättyjä oli ollut noin 4–5 % pitkän matematiikan kirjoittajista.



KUVIO 6.3: Pitkän matematiikan arvosanarajat kevään ylioppilaskirjoituksissa 1990-luvulla.

osoitti huonon kirjoitustuloksen syiksi seuraavia tekijöitä: laajan matematiikan valinneiden määrän kasvun[5], kokeen alkupään tehtävien vaativuuden ja oppilaiden pitkäjänteisen työskentelyn puutteen (Rosenberg 1992, 16). Kirjoittava ikäluokka oli ensimmäinen tasokurssittoman peruskoulun käynyt[6]. Päätöksessään Opetusministeriö kuitenkin katsoi, että yhdeksän pisteen raja ei ole kohtuuttoman korkea, sillä se vastaa vain puoltatoista tehtävää kymmenen tehtävän kokeessa ja maksimipistemäärä on 60 pistettä. Näillä virallisen tahon perusteluilla on merkitystä myös tulkittaessa myöhempien kirjoitusten tuloksia, sillä suunnilleen kaikki edellä mainitut tekijät ovat taustalla tutkittaessa 1990-luvun tämän jälkeisiä kirjoitustuloksia. Peruskouluun saatiin 1994 uudet opetussuunnitelman perusteet, joissa pyrittiin vaikuttamaan edellä kuvattuihin peruskoulun matematiikan opetuksen puutteisiin.

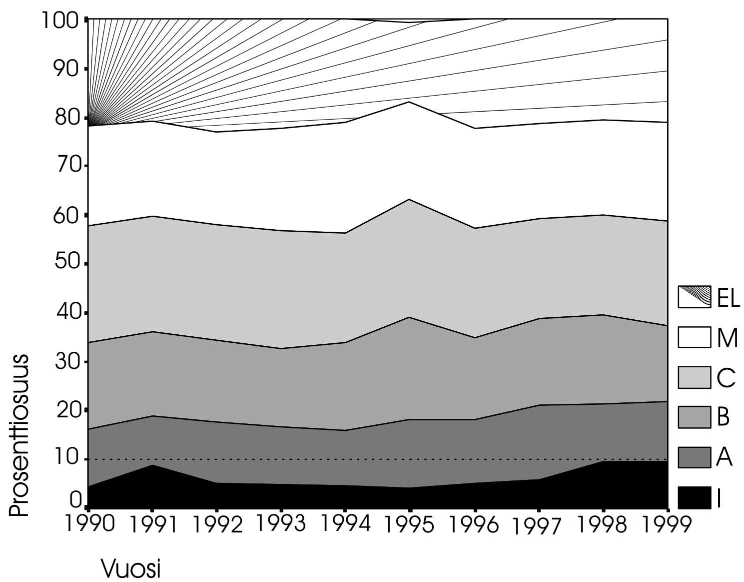
Seuraava notkahdus arvosanojen pistemäärissä tapahtui vuonna 1996, jolloin astui voimaan uusi ylioppilaskirjoitusasetus. Tällöin 34 % pitkän matematii-

[5]Laajan matematiikan valinneiden määrä oli kasvanut 40 %:sta 50 %:iin lukion aloittavista ja tällöin katsottiin huonosti menestyvän opiskelijajoukon osuuden myös kasvavan laajassa matematiikassa (Rosenberg 1992).

[6]Tavoitepohjaisen arvioinnin seurauksena oppilaat olivat saaneet kykyihinsä nähden liian hyviä arvosanoja ja siten arvioineet itse väärin mahdollisuutensa selvitä laajan matematiikan opinnoista (Rosenberg 1992).

kan kirjoittajista valitsi kokeen ylimääräiseksi. He menestyivät huonosti, sillä heidän matematiikan kokeensa pisteidensä mediaani oli alle 17 pistettä; neljännes näistä kirjoittajista jäi alle kymmenen pisteen (Lahtinen 1996b).

Arvosanojen suhteelliset osuudet (kuvio 6.4) on pystytty pitämään suunnilleen samoina koko vuosikymmenen lukuun ottamatta hylättyjen arvosanojen (I) osuutta, joka on vaihdellut 4,1 %:n (1995) ja 9,6 %:n (1998 ja 1999) välillä pitkän matematiikan kirjoittajista. Myös edellä kuvattuna vuonna 1991 hylättyjen osuus oli korkea (8,8 %). Runsas kolmasosa kirjoittajista on saanut korkeintaan arvosanan B, mutta toisaalta noin viidesosa on saanut arvosanan M ja samansuuruinen osa arvosanan L (vuoden 1996 jälkeen E tai L).



KUVIO 6.4: Pitkän matematiikan arvosanojen prosenttiosuudet kevään ylioppilaskirjoituksissa 1990-luvulla.

Pitkän (laajan) matematiikan ylioppilaskirjoitusarvosanan ja lukion päättötodistuksen arvosanan korrelaatio on ollut koko 1990-luvun korkea (taulukko 6.1). Vuosi 1999 on ainoa poikkeus, jolloin sekä pakollisen että ylimääräisen matematiikan arvosanojen korrelaatiot putosivat yllättäen. Syyt notkahdukseen jäivät epäselväksi (Lahtinen 1999). Ylimääräisenä matematiikan kirjoittavien arvosanojen korrelaatiot ovat selkeästi heikompia kuin pakollisena kirjoittavien. Lukioiden kurssiarviointi, joka on pohjana päättötodistuksen arvosanalle, on ollut validia koko vuosikymmenen. Ylimääräisenä kirjoittavista huomattava osa menestyy ylioppilaskirjoituksissa heikommin kuin päättötodistusarvosana ennustaisi (liite 3, kuvio 9.6).

Pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien opiskelijoiden arvosanajakaumat poikkeavat toisistaan merkittävällä tavalla: ylimääräisenä kirjoittavista yli puolet saa korkeintaan arvosanaksi B:n, kun taas pakollisena kirjoittavat saavat puolestaan suurimman osan ylimmistä arvosanoista (liite 3).

Hylättyjen arvosanojen määrä on kokonaisuudessaan kasvanut vuoden 1996 jälkeen, ja suurin osa hylätyistä on ylimääräisenä kirjoittavia opiskelijoita (kuvio 6.5). Lahtinen (2000) toteaakin seuraavaa:

> *Ylioppilaskirjoitusten tulosten perusteella kypsyminen on paikoitellen kovin keskeneräistä, kuten on ollut koko uusien opetussuunnitelman perusteiden voimassaoloajan. - - Tilanne näyttää, valitettavasti, vakiintuvan siihen, että pitkässä matematiikassa on kahden kerroksen väkeä* (mt., 16).

Lahtisen (1999, 5) näkemyksen mukaan tytöt ovat poikia epävarmempia matematiikan taidoistaan. Tytöillä on ollut kuitenkin 1990-luvun loppupuolella poikia parempi arvosanojen keskiarvo sekä pakollisessa että ylimääräisessä matematiikassa[7]. Esimerkiksi keväällä 1999 pitkän matematiikan kirjoituksissa pakollisena kirjoittavien tyttöjen (n=1459) arvosanojen keskiarvo oli 4,66,

[7] Vuosien 1996, 1998 ja 1999 kevään kirjoituksissa.

TAULUKKO 6.1: Pitkän (laajan) matematiikan ylioppilaskirjoitusten arvosanojen ja päättötodistuksen arvosanojen välinen korrelaatio vuosina 1990-2000 (paitsi vuonna 1994).

Vuosi	**Pakollisena kirj.**	**Ylimääräisenä kirj.**
1990	0.73	-
1991	0.70	-
1992	0.73	
1993	0.69	-
1995	0.70	-
1996	0.74	0.67
1997	0.70	0.61
1998	0.72	0.65
1999	0.57	0.58
2000	0.70	0.66

KUVIO 6.5: Pitkän matematiikan kevään kokeessa hylättyjen opiskelijoiden määrät eroteltuna pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittaneisiin 1990-luvulla.

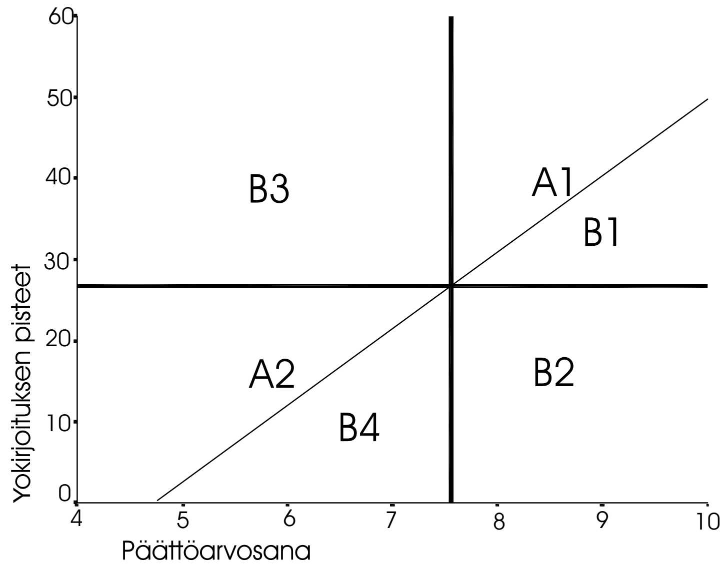
kun poikien (n=4347) oli 4,59. Ylimääräisenä kirjoittavien tyttöjen (n=3357) ja poikien (n=3014) keskiarvo oli molemmilla sama 3,25.

6.3 Tutkimusmenetelmät

6.3.1 Nelikenttä

Olen analysoinut yleisen matematiikan opiskelijoiden ylioppilaskirjoitusten pistemäärän ja heidän päättöarvosanojen välistä riippuvuutta regressioanalyysin avulla (Joutsenlahti 1996, 1997). Selittävänä muuttujana oli päättötodistuksen arvosana, joka oli myös paras selittävä muuttuja kirjoitusten pistemäärälle opiskelijan suorituksista.

Jaoin tason neljään osaan piirtämällä akseleiden suuntaiset suorat päättötodistusten ja ylioppilaskirjoitusten pistemäärien keskiarvojen kohdalle. Näin syntyi nelikenttä (kuvio 6.6), jossa tutkijan mielenkiinnon kohteena olivat ne kentän alueet, jossa opiskelijan koulumenestys ei ollut ennustanut oikein menestystä ylioppilaskirjoituksissa. Kenttien tarkastelussa voi huomioida pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavat, sukupuolen ja opiskelijoiden uskomukset.



KUVIO 6.6: Yleisen matematiikan opiskelijoiden suorituksista laadittu nelikenttä, jossa on eroteltuna matematiikan pakollisena (A) ja ylimääräisenä (B) kirjoittavat opiskelijat (Joutsenlahti 1997, 344).

Nelikenttä (kuvio 6.6) yhdistää tutkimuksen näkökulmat: valtakunnallisen tason ylioppilaskirjoitusten näkökulma on y-akselilla, koulun tason suoritukset x-akselilla. Kukin havaintopiste edustaa opiskelijaa yksilöllisenä toimijana, jolla on oma käsitys matemaattisesta ajattelustaan. Sovellan nelikenttää myös pitkän matematiikan opiskelijoiden suorituksiin. Pitkän matematiikan opiskelijoilla on vuodesta 1996 lähtien ollut mahdollista kirjoittaa pitkän matematiikan koe ylimääräisenä kokeena, joten pitkän matematiikan opiskelijoiden valintamahdollisuudet ovat samanlaiset kuin yleisen matematiikan opiskelijoiden 1990-luvun alussa. Tarkastelen ensin ylioppilaskirjoitustehtävien hallintaa ja siitä saatavaa kuvaa opiskelijoiden matemaattisesta osaamisesta. Seuraavassa luvussa tutkin koulun tasolla opettajan näkökulmasta opiskelijoiden matemaattista osaamista ja ajattelua sekä heidän omia näkemyksiään matematiikan opiskelusta.

6.3.2 Kognitiivisen alueen taksonomia

Tarkastelen pitkän matematiikan opiskelijan matemaattista osaamista opiskelijan matemaattisten tehtävien suoritusten kautta. Tutkin matemaattista ajattelua ensisijaisesti ongelmanratkaisun yhteydessä, mikä antaa viitteitä opiskelijan proseduraalisten, konseptuaalisten ja strategiatietojen hallinnasta. Mittauksen perustana on oletus, että tutkija voi luokitella tehtävät sen mukaan, minkälaista kognitiivista tasoa tehtävän ratkaiseminen vähintään vaatii. Oikein tai lähes oikein ratkaistu tehtävä on edellyttänyt opiskelijalta tietyn tasoista ajattelua. Sen avulla voidaan kuvata opiskelijan ajattelua tietyllä matematiikan osa-alueella. Sekä kansallisissa että kansainvälisissä koulusaavutustesteissä sekä tutkimuksissa[8] on käytetty Wilsonin taksonomiaa tai sen pohjalta luotuja muunnelmia, joissa opiskelijan suoritusten pohjalta arvioidaan hänen ajatteluprosessejaan.

Wilson (1971) on luonut matemaattisten tehtävien luokitukseen mallin Bloomin taksonomian pohjalta. Bloomin tiedollisen alueen taksonomia sisältää kuusi pääluokkaa eli tasoa, joista osa jakautuu alaluokkiin. Luokat ovat hierarkkisia, ja ne ovat alimmasta luokasta korkeimpaan seuraavat (Wilson 1971; Kangasniemi 1989): tietäminen, ymmärtäminen, soveltaminen, analyysi, synteesi ja evaluaatio. Vaikka ymmärtäminen on merkitty Bloomin taksonomian toiseksi alimmaiseksi tasoksi, niin koko Bloomin taksonomiaa voidaan pitää kokonaisuudessaan ymmärtämisen taksonomiana (Bereiter 2002, 94).

Wilsonin (1971) hierarkkisessa mallissa (taulukko 6.2) on neljä tasoa: laskutaito, ymmärtäminen, soveltaminen ja analyysi. Nämä tasot voidaan jakaa edelleen alatasoiksi.

Kognitiivisena tasona laskutaito ei edellytä tehtävässä päätöksentekoa eikä monimutkaista muistamista – tosiasioiden muistaminen riittää. Algoritmien noudattaminen on kykyä manipuloida tehtävään liittyviä elementtejä tiettyjen opittujen sääntöjen mukaan, sen sijaan algoritmia ei tarvitse osata valita tehtävään. (Wilson 1971, 660; Kangasniemi 1989, 101–102.)

Ymmärtämisen raja laskutaitoon on keinotekoinen ja usein vaikeasti erotettavissa, sillä tehtävän ratkaisuun tarvitaan usein molempia kognitiivisia tasoja. Tämän tason tehtävät vaativat ratkaisijalta päätöksentekoa siitä, kuuluuko tehtävä ratkaisijan tuntemaan käsitteen alaan vai ei. Ymmärtämisen tason tehtävän ratkaiseminen edellyttää opiskelijalta kykyä noudattaa tiettyä ajatuksenkulkua, joka johtaa tehtävän ratkaisuun. Lisäksi matemaattisen todistelun ja väittelyn seuraaminen edellyttää tämän tason taitoja. (Wilson 1971, 660–661; Kangasniemi 1989, 102–104.)

Soveltamisen tason erottaa edellisistä tasoista vaatimus hallita useita tehtävän ratkaisuun johtavia reaktioita peräkkäin. Nämä voivat olla opittuja, ja si-

[8]Esimerkiksi SIMS- ja PISA-tutkimuksissa sekä mukailtuna Yrjönsuuren tutkimuksissa (1989, 1990) ja lisensiaatintutkimuksessani (Joutsenlahti 1996).

TAULUKKO 6.2: Wilsonin mallin matemaattisten käyttäytymistasojen keskeiset piirteet, joita voidaan pitää myös alatasoina (Wilson 1971, 649).

Kognitiivinen taso	Keskeiset piirteet
LASKUTAITO	– yksinkertaiset muistamisharjoitukset ja rutiininomaiset käsittelyharjoitukset – terminologian tunteminen – algoritmien käytön hallitseminen
YMMÄRTÄMINEN	– käsitteiden tietäminen – periaatteen, säännön tai yleistyksen tietäminen – matemaattisen rakenteen tietäminen – tehtävien eri osien muuntaminen muodosta toiseen ja menetelmällinen yleistäminen – tehtävän loogisuuden seuraaminen ja ymmärtäminen
SOVELTAMINEN	– rutiinitehtävän ratkaiseminen – vertailujen tekeminen – tietojen erotteleminen – mallien ja rakenneyhtäläisyyksien hyväksikäyttö
ANALYSOIMINEN	– ei-rutiinitehtävän ratkaiseminen – relaation löytäminen – todistuksen konstruointi – yleistyksen muodostaminen ja koettelu

ten kaiken kaikkiaan opitun siirtovaikutus opiskelijalle uusiin ratkaisutilanteisiin on vähäinen tällä tasolla. Usein opiskelija tunnistaa tehtävästä jo ennen varsinaista ratkaisua ratkaisuperiaatteen, sillä hän on ratkaissut vastaavan tyyppisen tehtävän jo aiemmin. Kuitenkin opiskelija kykenee paloittelemaan ongelmia osiin ja yhdistelemään ratkaisemiaan alaongelmia. Opiskelija joutuu päätöksentekotilanteisiin, jotka ovat kuitenkin rutiiniluontoisia tehtävän tutun rakenteen vuoksi. (Wilson 1971, 661; Kangasniemi 1989, 104–106.)

Analysoinnin tason käyttäytymiseen kuuluvat luovuus ja keksimisen kokemukset. Tällöin esiintyy opitun siirtovaikutusta sisältöalueille, joilla opiskelijalla ei ole ollut harjoitusta (opetus- tai oppimiskokemuksia). Tällä tasolla opiskelija joutuu erittelemään ongelman ennalta tuntemattomalla tavalla osiin ja toisaalta yhdistelemään osaratkaisut uudelleen koko ongelman ratkaisuksi. Tehtävän ratkaiseminen saattaa vaatia kykyä havaita uusia muuttujien tai käsitteiden välisiä suhteita, jotka eivät ole tuttuja aikaisemmista malleista. Olennainen osa matematiikassa on myös matemaattisten todistusten laatiminen eikä pelkästään niiden toistaminen (soveltamisen taso) tai mieleen palauttaminen (laskutaidon taso). Korkein taso synteesi on yhdistetty analysointitasoon, koska niiden erottaminen toisistaan on usein erittäin tulkinnan varaista. (Wilson 1971, 662; Kangasniemi 1989, 106–108.)

Wilsonin mallin tasojen kuvauksissa edellä kävi ilmi tasojen erottelemisen vaikeus. Yleisestikin voidaan sanoa, että tehtävien luokitteleminen mainitun jaon mukaan ei ole yksiselitteistä. Opiskelijoiden lähtötilanteet eroavat toisistaan. Toisen opiskelijan analysointitason tehtävä voikin olla toiselle opiskelijalle entuudestaan tuttu soveltamistason tehtävä. Koska täsmällinen rajanveto mainittujen tasojen välillä on erittäin vaikeaa, niin käytän vielä pelkistetympää tehtäväluokitusta, kuten tein lisensiaatintutkimuksessani (Joutsenlahti 1996, 47). Luokituksessani on kolmea kognitiivista tasoa:

1. **L**askutaito/**Y**mmärtäminen (**LY-taso**)
2. **Y**mmärtäminen/**S**oveltaminen(**YS-taso**)
3. **S**oveltaminen/**A**nalyysi (**SA-taso**).

Tasojen mukaan voidaan luokitella tehtävien vaikeusastetta ja siten arvioida, minkä tasoista ajatteluprosessia tehtävän ratkaiseminen edellyttää. Alimmalla tasolla korostuvat faktojen muistaminen ja algoritmien hallintaan liittyvät taidot eli proseduraalisen tiedon hallinta. Ylimmällä tasolla tarvitaan konseptuaalista tietoa ja strategiatietoa ongelmanratkaisutehtävissä. Keskimmäisellä tasolla opiskelija hallitsee proseduureja ja kykenee sekä siirtämään että soveltamaan niitä samantyyppisiin tilanteisiin.

Kunkin edellä esitetyn kolmen tason luokan tunnuspiirteinä käytän Wilsonin mallin tasojen kuvauksia, joissa on esitetty neljän tason ominaisuudet. Usein tehtävän arvioinnissa tulee esille piirteitä kahdesta tasosta (neljästä), ja tällöin on helpompi käyttää mainittua pelkistetympää tasoluokitusta.

Avitalin ja Shettleworthin (1968, 6) mukaan matemaattinen ajattelu voidaan jakaa kolmeen hierarkkiseen tasoon, joista alin taso on asian mieleenpalauttaminen (tai tunnistaminen), seuraava taso on yleistäminen (matematiikassa algoritminen ajattelu) ja korkein taso avoin etsiminen. Viimeksi mainittuun tasoon voidaan ajatella reflektoiva ajattelu. Edellä mainitut tutkijat erottavat kolme matemaattisen ajattelun tasoa ja niitä vastaavasti viisi matemaattista suoritustasoa (Kangasniemi 1989, 101). Matematiikassa alin taksonomian taso on luontevaa nimetä Wilsonin mallin mukaan laskutaidon tasoksi. Taulukossa 6.3 on esitetty matemaattisen ajattelun prosessien ja tehtävien taksonomian välinen yhteys Wilsonin mallin sekä tässä työssä käytetyn mukautetun luokituksen välillä.

TAULUKKO 6.3: Matemaattisen ajatteluprosessien (Avital & Shettleworth 1968), Wilsonin kognitiivisten tasojen ja tässä työssä käytettyjen hierarkkisten tasojen likimääräinen yhteys.

Ajatteluprosessi	Wilsonin tasot	Tämän työn tasot
I Tunnistaminen, mieleenpalauttaminen	1. Laskutaito (L)	Laskutaito/ Ymmärtäminen (LY)
II Algoritminen ajattelu, yleistäminen	2. Ymmärtäminen(Y) 3. Soveltaminen (S)	Ymmärtäminen/ Soveltaminen(YS)
III Reflektoiva ajattelu avoin etsiminen	4. Analyysi (A)	Soveltaminen/ Analyysi (SA)

TAULUKKO 6.4: PISA-tutkimuksessa käytetyn taitojen hierarkkisten luokkien ja tässä työssä käytettyjen kognitiivisten tasojen likimääräinen yhteys.

Taitoluokat	Tämän työn tasot
I Määritelmät, lasku- ja suoritustaidot (PISA1)	Laskutaito/Ymmärtäminen (LY)
II Taidot nähdä asioiden yhteydet ja niiden yhdistäminen (PISA2)	Ymmärtäminen/Soveltaminen(YS)
III Matemaattinen ajattelu, yleistäminen, oivaltaminen (PISA3)	Soveltaminen/Analyysi (SA)

Taulukossa 6.4 on esitetty vastaavasti PISA-tutkimuksessa käytetyn taitoluokituksen ja tämän työn sovellettujen Wilsonin kognitiivisten tasojen likimääräinen yhteys. Matemaattiseen osaamiseen (Kilpatrick ym. 2001) kuuluvista piirteistä konseptuaalinen ymmärtäminen, strateginen kompetenssi ja mukautuva päättely ovat kuvaustensa perusteella kompetensseja, jotka tulevat esille erityisesti SA-tason (PISA3-taitoluokan) suorituksissa. Proseduraalinen sujuvuus näkyvät LY- (PISA1-taitoluokan) ja YS-tason (PISA2-taitoluokan) tehtävien hallinnassa.

6.4 Ylioppilaskirjoitustehtävien tarkastelua

Lukion pitkän matematiikan kurssit voidaan jakaa sisältönsä perusteella ryhmiksi. Seppälä (1994, 22–23) esittelee yhdeksi tällaiseksi jaoksi seuraavan: funktioiden ja yhtälöiden kurssit I-II, geometria[9], analyysi[10], diskreetti matematiikka[11]. Tässä tutkimuksessa matematiikan kurssit on jaettu sisältönsä perusteella neljään osa-alueeseen: yhtälöt (YHT), geometria (GEO), differentiaalilaskenta (DIF) ja todennäköisyyslaskenta, tilastotiede sekä lukujonot ja sarjat (TNLU). Taulukossa 6.5 on esitetty, miten kurssit ennen vuotta 1996 ja sen jälkeen sijoittuvat esittämääni jakoon. Jako on rakenteeltaan samanlainen kuin Seppälänkin esittämä, vaikka nimitykset ovat erilaiset.

TAULUKKO 6.5: Lukion pitkän matematiikan kurssien jako osa-alueisiin. Lukion laajan (kurssit ennen vuotta 1996) ja pitkän (kurssit vuoden 1996 jälkeen) matematiikan opetussuunnitelmien perusteiden mukainen kurssinumerointi.

Osa-alue	Kurssit ennen vuotta 1996	Kurssit vuoden 1996 jälkeen
YHT	1,2	1,2
GEO	3,4,5,10	3,4,5
DIF	6,7,9	6,7,8
TNLU	8	9,10

Pitkän (laajan) matematiikan ylioppilaskirjoituksissa oli 1990-luvulla 14–15 tehtävää, joista 4–5 tehtävää oli valinnaisina toisilleen a)- ja b)-kohtina. Tilastointimenetelmien puutteellisuuksien vuoksi näiden vaihtoehtoisten tehtäväparien suorituksia ei ole voinut erotella, vaan tilastoissa on niiden yhteinen keskiarvo ja hajonta. Tämän vuoksi tarkastelen vain kevään tehtäväsarjoissa ilman vaihtoehtoja olleita tehtäviä, joita oli 54. Yhteensä tehtäviä oli 147, ja ne jakaantuivat eri matematiikan osa-alueille taulukon 6.6 mukaisesti. Taulukon 6.6 tehtävien luokituksessa olen käyttänyt apuna Myrbergin (1995) sekä Hartikan, Partasen, Salosen ja Toivasen (2000) teoksia. Rajanveto tehtävien kuulumisesta tiettyihin osa-alueisiin ei ole kuitenkaan kaikissa tapauksissa selkeä, sillä saman tehtävän ratkaisemiseen voidaan käyttää usean eri osa-alueen tietoja. Ratkaisutapojakin voi olla useita samaan tehtävään. Luokitteluperusteena on käytetty tehtävän ratkaisuun tarvittavaa sisältöaluetta,

[9] Geometria, analyyttinen geometria sekä trigonometria ja vektorit.
[10] Differentiaalilaskenta I-II, integraalilaskenta.
[11] Tilastotiede ja todennäköisyyslaskenta sekä lukujonot ja sarjat.

joka sijoittuu kurssijärjestyksessä ylimpään kurssiin. Esimerkiksi kaikki tehtävät, joissa on tarvittu differentiaalilaskentaa, kuuluvat osa-alueeseen DIF, vaikka tehtävä liittyisikin geometriaan.

TAULUKKO 6.6: Pitkän (laajan) matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtävien jakaantuminen eri matematiikan osa-alueille.

Osa-alue	**Vaihtoehdottomat tehtävät**	**Kaikki tehtävät**
YHT	15 (28 %)	31 (21 %)
GEO	13 (24 %)	52 (35 %)
DIF	23 (43 %)	45 (31 %)
TNLU	3 (6 %)	14 (10 %)
MUUT	0	5 (3 %)

Vaihtoehdottomissa tehtävissä painottuu differentiaalilaskennan osuus (osa-alue DIF). Toisaalta geometrian (GEO) tehtävät ovat olleet useimmin vaihtoehtoisina tehtävinä (taulukko 6.6). Eri sisältöalueiden tehtävien lukumäärät noudattelevat suunnilleen vastaavien pakollisten kurssien määrää. Osa-alueen TNLU suhteellinen osuus on kasvanut vuoden 1996 jälkeen, sillä vuoden 1994 opetussuunnitelmassa pitkän matematiikan pakollisiin kursseihin kuuluu kaksi erillistä kurssia tältä alueelta. Taulukon 6.6 osa-alueeseen MUUT kuuluvat tehtävät käsittelevät erikoiskursseihin liittyneitä tai syventävien kurssien asioita, joita ei voi lukea kuuluviksi edellä mainittuihin osa-alueisiin[12].

Liitteessä 4 (taulukko 9.1) on 1990-luvun kevään pitkän (laajan) matematiikan vaihtoehdottomat tehtävät, joista on tutkittu niiden osa-alue, tehtävää yrittäneiden suoritusten keskiarvo ja -hajonta, mukautetun Wilsonin mallin mukainen taso (LY, YS tai SA) sekä ratkaisuprosentti. Mainittu taso on arvioitu tehtävän sisällöstä ja siinä on huomioitu kulloinkin voimassa olleen opetussuunnitelman perusteiden sisältö. Ratkaisuprosentti määräytyy kyseisestä tehtävästä vähintään neljä pistettä saaneiden opiskelijoiden määrän suhteena kaikkiin pitkän matematiikan kirjoituksiin osallistuneiden määrään. Tulkintani mukaan tehtävän ratkaisuperiaate on opiskelijan hallinnassa, jos hän on saanut tehtävästä vähintään neljä pistettä. Pisteen tai parin menetykset tulevat usein jo pienistä huolimattomuusvirheistä, jotka eivät liity tehtävän ratkaisuperiaatteen hallintaan. Ratkaisuprosenttien arvioinnin olen

[12]Esimerkiksi kompleksiluvut.

tehnyt Rosenbergin ja Lahtisen artikkeleissa [13]olleista graafisista esityksistä, joten niissä on noin prosenttiyksikön virhemarginaali puoleen tai toiseen.

Liitteen 4 (taulukko 9.1) perusteella noin 42 % tehtävistä kuului LY-tasoon, 27 % tehtävistä kuului YS-tasoon ja 31 % SA-tasoon. Jako tarkoittaisi kymmenen tehtävän sarjassa suunnilleen sitä, että kokeen neljä ensimmäistä tehtävää kuuluvat LY-tasoon ja mittaavat lähinnä proseduraalista tietoa (algoritmien hallintaa yms.). Seuraavat 2–3 tehtävää kuuluvat YS-tasoon, jossa tarvitaan sekä proseduraalista että konseptuaalista tietoa. Loput 4–3 tehtävää kuuluvat SA-tasoon, jossa pääpaino on konseptuaalisen tiedon ja strategiatiedon hallinnassa. Tämä rakenne on suunnilleen kaikissa 1990-luvun tehtäväsarjoissa, joissa vaihtoehtoiset tehtävät on pyritty laatimaan vaikeudeltaan keskenään samantasoisiksi.

Korkein tehtävän keskiarvo (liite 4: taulukko 9.1) oli vuonna 1990 tehtävässä 4[14], jonka keskiarvo on oli 5,94 (hajonta 0,47; kirjoittajia 10079). Rosenberg (1991, 38) toteaakin tällaisen tehtävän erottelevan erityisen huonosti, sillä lähes kaikki (97,7 %) saivat täydet pisteet kyseisestä tehtävästä. Alhaisin keskiarvo 1990-luvulla oli seuraavana vuonna 1991 tehtävässä 9[15], jolloin keskiarvo putosi 0,21:een (hajonta 1,00; kirjoittajia 10655). Kevään 1991 tehtävä yhdeksän synnytti keskustelua julkisuudessa[16]. Kivelä (1992) toi esille kannanotossaan lukiolaisten koulumatematiikan ja toisaalta ylioppilastutkintolautakunnan soveltaman yliopistomatematiikan erilaiset näkökulmat tehtävien ratkaisuihin. Hän pohti laajan matematiikan oppimäärien tapaa käsitellä analyysin käsitteistöä lähes yliopistollisten cum laude -kurssien täsmällisyydellä näiden käsitteiden sovellutusten kuitenkin jäädessä vain tapauksiin, jotka ovat havaintoon perustuen lähes itsestään selviä (mt., 29). Vastaava vastakkainasettelu on tullut esille myöhemminkin ylioppilastehtävissä[17]. Tätä ongelmaa lienee vaikea poistaa jatkossakin.

Pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävätyypeistä voi huomioida erikseen todistustehtävät[18], konstruointitehtävät[19] ja eri matematiikan osa-

[13]Rosenberg: Dimension numerot 2/91, 2/92, 2/93, 8-9/93; Lahtinen: Dimension numerot 1/96, 6/96, 6/97, 6/98, 6/99, 6/00 ja 6/01.

[14]Tehtävä 4/1990: *Eräs kirjakauppa myy CD-ROM-sanakirjaa, tietosanakirjaa ja levyasemaa seuraavin pakettihinnoin: Sanakirja ja levyasema 9000 mk, tietosanakirja ja levyasema 8200 mk, sanakirja, tietosanakirja sekä levyasema 12000 mk. Mikä on tämän mukaan levyaseman hinta?*

[15]Tehtävä 9/1991: *Funktio f on määritelty välillä]-1,1[, ja derivaatta f' on olemassa pisteessä x=0 (mutta ei välttämättä muualla). Määritä* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)-f(-x^2)}{x^2}$.

[16]Esimerkiksi Dimensio 1991:2, 1992:2.

[17]Esimerkiksi 5a/1995 kevät ja 10/1995 kevät.

[18]Esimerkiksi 9/1994 kevät, 3a/1995 kevät, 7b/1995 kevät, 6a/1999 kevät.

[19]Esimerkiksi 2b/1992 syksy, 10/1995 kevät.

alueiden teoriaa käsittelevät tehtävät[20]. Näiden tehtävien pistekeskiarvot ovat jääneet pääsääntöisesti alhaisiksi tai niiden ollessa vaihtoehtotehtäviä niitä ei ole juurikaan valittu. Nämä tehtävätyypit mittaavat konseptuaalista tietoa ja strategiatietoa. Todistaminen on matematiikalle tyypillinen tapa osoittaa lauseiden pätevyys. Tämä taidon hankinta jää kuitenkin keskeneräiseksi valtaosalta pitkän matematiikan opiskelijoita, mihin vaikuttanee osaltaan muun muassa todistusajattelun esittämisen vähäisyys oppimateriaaleissa. Konstruointitehtävät ovat avoimia tehtäviä, ja siksi niiden ratkaisut ovat erinomaisia kuvaamaan opiskelijan omaa ajattelua. Näiden tehtävien arvioiminen on opettajille ja lautakunnalle vaikeampaa kuin suljettujen tehtävien, mikä osaltaan on valitettavasti pitänyt niiden lukumäärän suhteellisen pienenä. Teoriaa käsittelevät tehtävät, joihin on lisätty esimerkin konstruointi tai muu vastaava, ovat myös hyviä antamaan kuvaa matematiikan käsitteiden hallinnasta.

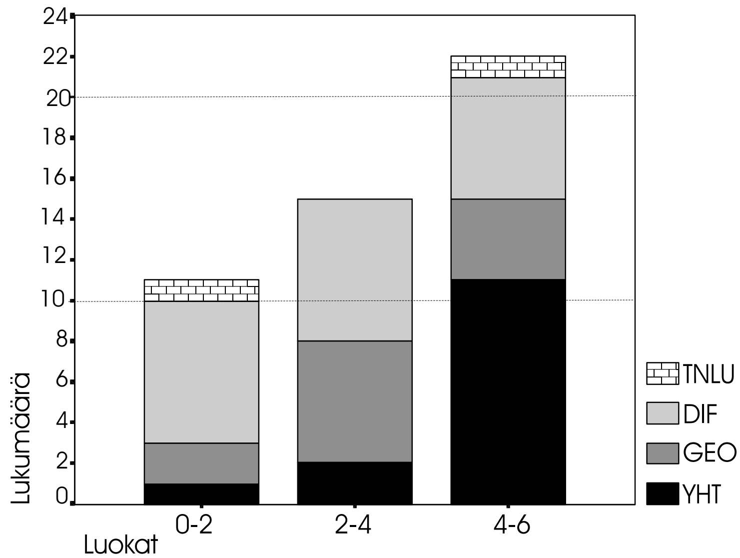
Tarkastelen tehtävien keskiarvoja lähemmin jakamalla tehtävät keskiarvonsa perusteella kolmeen luokkaan (kuvio 6.7), joista näkyy myös tehtävien jakaantuminen eri matematiikan osa-alueille. Tässä on mukana 48 tehtävää, sillä minulla ei ole ollut käytettävissäni vuoden 1994 kevään kirjoitusten tilastotietoja[21]. Tehtävät, joiden suoritusten keskiarvo on ollut yli neljän pisteen, ovat olleet koesarjan ensimmäisiä tehtäviä. Ne ovat luokiteltavissa sisältönsä perusteella LY-tason tehtäviksi, ja niiden hallintaan opiskelijalle riittää proseduraalinen tieto. Geometrian tehtäviä on suhteellisen vähän tässä luokassa, mutta toisaalta niitä on ollut vähän vaihtoehdottomina tehtävinä kolmen ensimmäisen tehtävän joukossa[22]. Alhaisemmat keskiarvot löytyvät differentiaalilaskennan tehtävistä, jotka ovat olleet pääasiassa koesarjan loppupään tehtäviä (8.–10. tehtävä) ja ovat sisältönsä perusteella SA-tason tehtäviä. Niiden hallintaan useimmilla opiskelijoilla on oltava proseduraalisen tiedon lisäksi konseptuaalista tietoa. TNLU -tehtävistä voi todeta niiden olevan sen tyyppisiä, että ne joko hallitaan hyvin, tai ei lainkaan. Tason YS tehtäviä löytyy kaikista kolmesta keskiarvoluokasta, mutta eniten keskimmäisestä.

Tehtävien ratkaisuprosenttien avulla voidaan tarkastella tehtävien mittaamien asioiden hallintaa. Kun tutkitaan tehtävistä saatuja pistejakaumia koko valtakunnassa ja arvioidaan kullekin tehtävälle (N=48) kaikista pitkän (laajan) matematiikan kirjoitukseen osallistuneista niiden opiskelijoiden osuus, jotka ovat saaneet siitä vähintään neljä pistettä, saadaan luokittelemalla nämä prosenttiosuudet kuvion 6.8 mukainen jakauma. Opiskelijat ovat hallin-

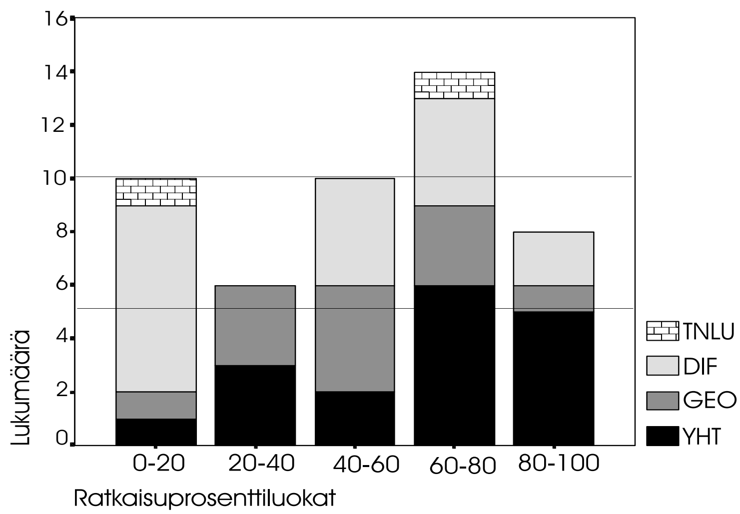
[20] Esimerkiksi 10/1998 kevät.

[21] Poikkeuksellisesti vuoden 1994 kevään matematiikan ylioppilaskirjoitusten tilastotietoja ei julkaistu Dimensio-lehdessä.

[22] Kaksi tehtävää 1990-luvulla.



KUVIO 6.7: 1990-luvun kevätkokeiden (paitsi 1994) pitkän matematiikan eri osa-alueiden ylioppilaskirjoitustehtävät (N=48) keskiarvoluokkiin jaettuna.



KUVIO 6.8: 1990-luvun kevätkokeiden (paitsi 1994) pitkän matematiikan eri osa-alueiden ylioppilaskirjoitustehtävät (N=48) jaettuna ratkaisuprosenttiluokkiin (pakollisena kirjoittavat).

neet parhaiten osa-alueeseen YHT kuuluneita LY-tason tehtäviä. Tässä prosenttiluokassa suurin osa tehtävistä ($\frac{5}{8}$) on vuoden 1995 tai aikaisempien vuosien tehtäviä, vaikka tässä yhteydessä tarkastellaan vain pakollisena kirjoittavia. Tehtäviä, jotka on osannut yli 80 % opiskelijoista, oli ennen vuotta 1996 19 % siihen astisista vaihtoehdottomista tehtävistä ja vuodesta 1996 lähtien 15 %. Tämä on hieman yllättävää, sillä ennen vuotta 1996 pakollisena pitkän matematiikan kirjoittivat kaikki sen opiskelleet: toisin sanoen lähes kaksinkertainen määrä opiskelijoita verrattuna vuoden 1996 ja sen jälkeen pakollisena kirjoittaneiden vuosittaiseen määrään. Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen (TNLU) tehtäviä joko osataan kohtalaisen hyvin tai ei juuri olleenkaan (kuvio 6.8). Geometrian ja differentiaalilaskennan tehtävät jakautuvat suhteellisen tasaisesti kaikkiin ratkaisuprosenttiluokkiin. Niissä on siis ollut eri vaikeusasteisia tehtäviä (kuvio 6.8). Vuoden 1996 ja sen jälkeen ylimääräisenä kirjoittaneiden ratkaisuprosentit ovat huomattavasti heikompia kuin pakollisena kirjoittavien. Tästä ovat esimerkkinä vuoden 1999 kevään vaihtoehdottomien tehtävien keskiarvot ja ratkaisuprosentit taulukossa 6.7.

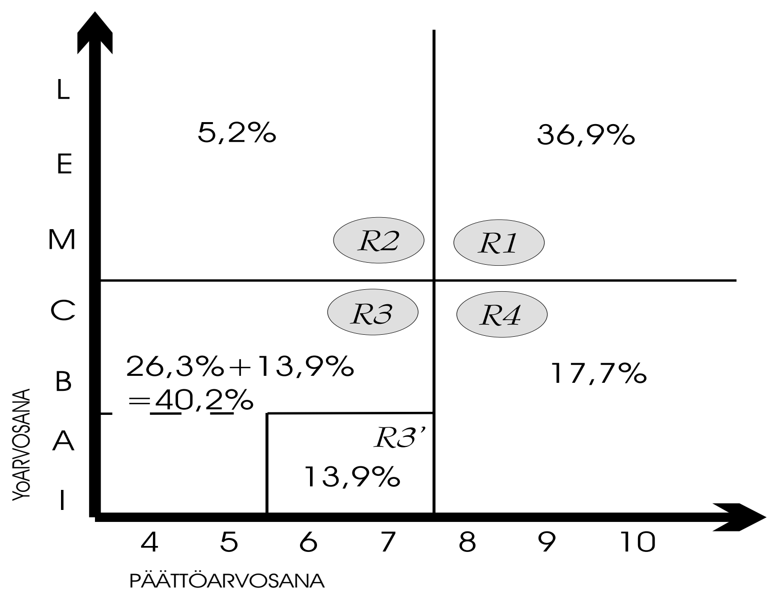
TAULUKKO 6.7: Kevään 1999 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen vaihtoehdottomien tehtävien keskiarvot ja ratkaisuprosentit pakollisena kirjoittavien ja ylimääräisenä kirjoittavien ryhmissä

Tehtävänro	**osa-alue**	**pakollisena kirj.**	**ylimääräisenä kirj.**
1	YHT	5.34 (89 %)	4.69 (78 %)
2	YHT	4.57 (75 %)	3.42 (55 %)
3	GEO	3.22 (51 %)	2.01 (28 %)
4	DIF	4.10 (65 %)	2.90 (41 %)
8	DIF	1.41 (15 %)	0.53 (3 %)

Pakollisena kirjoittavat ovat saaneet yli pisteen korkeampia keskiarvoja (paitsi tehtävästä numero 1) jo alkupään LY-tason tehtävistä (taulukko 6.7). Samansuuntainen ero on nähtävissä luonnollisesti myös tehtävien ratkaisijoiden osuuksissa. Yli puolet pakollisena kirjoittavista on osannut muun muassa neljä ensimmäistä tehtävää, sen sijaan ylimääräisenä kirjoittavista näitä helpoimpia tehtäviä ei ole hallinnut likimainkaan yhtä suuri osuus. Huolestuttavaa on havaita, että ylimääräisenä pitkän matematiikan kirjoitti 1999 keväällä 52 % pitkän matematiikan kirjoittajista. Pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittavista 14,8 % ei saanut edes kymmentä pistettä: toisin sanoen he saivat hylätyn arvosanan. Tyttöjen ja poikien suorituksia yksittäisistä tehtävistä ei ole mahdollista verrata tilastotietojen puutteen vuoksi.

6.5 Valtakunnallisten ylioppilaskirjoitusten tulosten sijoittuminen nelikenttään

Ylioppilastutkintolautakunta on julkaissut opiskelijoiden saamat päättötodistusarvosanat ja heidän saamansa ylioppilaskirjoitusarvosanat[23]. Pitkän matematiikan opiskelijoilla päättötodistuksen arvosana on selkeästi yhteydessä menestykseen matematiikan ylioppilaskirjoituksissa (taulukko 6.1 s. 118). Arvosanojen pisterajat muuttuvat vuosittain, mutta arvosanojen suhteellinen osuus annetuista arvosanoista pyritään pitämään suurin piirtein samankokoisena vuodesta toiseen[24]. Valitsemalla y-akselille opiskelijan saama pitkän (laajan) matematiikan ylioppilaskirjoituksen arvosana (I, A, B, C, M, E, L) ja x-akselille päättötodistuksen arvosana (4–10) saadaan kuvion 6.9 nelikenttä. Sen rajat tulevat keskiarvojen kohdalle, jotka osuvat y-akselilla arvosanojen C ja M väliin sekä x-akselilla arvosanojen 7 ja 8 väliin.

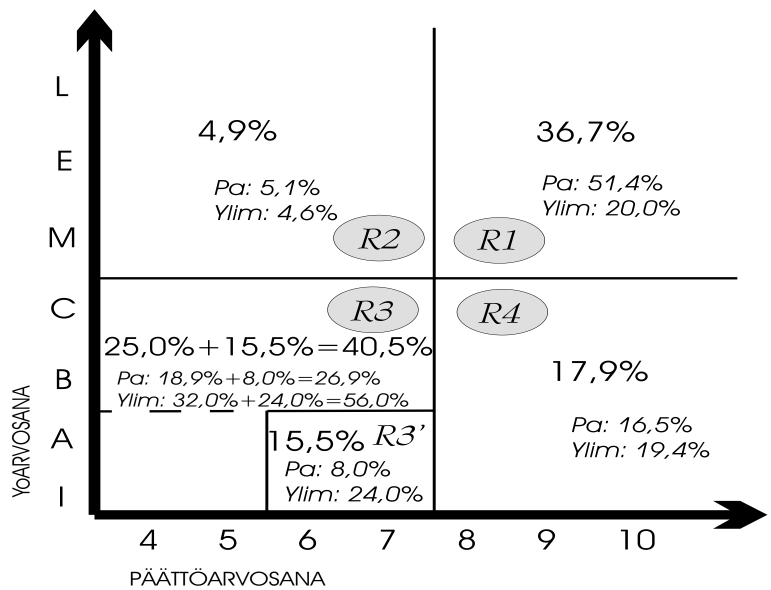


KUVIO 6.9: Kaikkien pitkän matematiikan keväällä kirjoittaneiden opiskelijoiden sijoittuminen nelikenttään vuosilta 1991–1993, 1995–1999 ($N = 89804$).

[23]Rosenberg 1991, 1992, 1993a, 1993b; Lahtinen 1996a, 1996b, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001

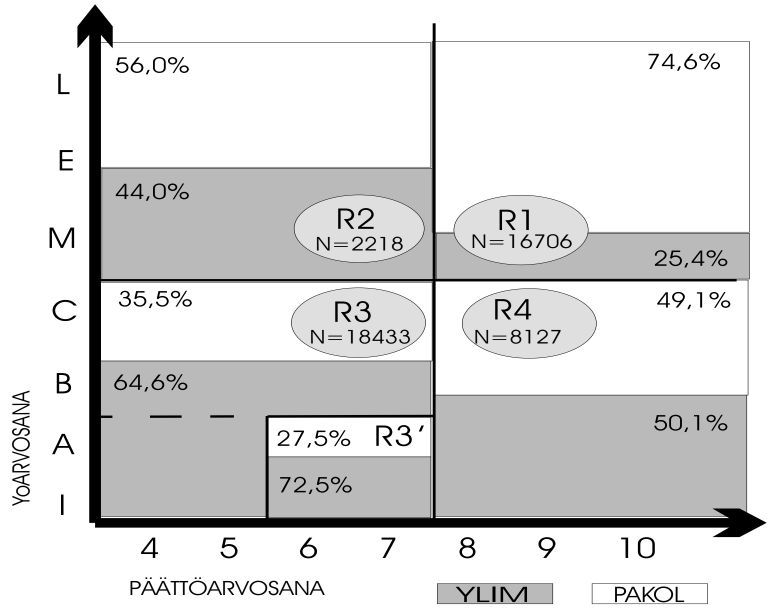
[24]Vrt. kuvio 6.3 s. 116.

Merkitsen ryhmiä lyhentein R1, R2, R3 ja R4 (kuvio 6.9). Erotan ryhmästä R3 alaryhmän R3´. Siihen kuuluvat sellaiset opiskelijat, jotka ovat saaneet päättötodistukseen arvosanan 6 tai 7, mutta he ovat saaneet pitkän (laajan) matematiikan ylioppilaskokeesta arvosanaksi vain arvosanan A tai I. Kyseiset arvosanat vastaavat kuvion 6.3 mukaisesti korkeintaan noin kahden täysin oikein ratkaistun tehtävän pistemäärää, mikä on yllättävän vähän siihen osaamisen tasoon verrattuna, jota kyseiset opiskelijat ovat osoittaneet lukiokursseilla.



KUVIO 6.10: Pitkän matematiikan keväällä vuosina 1996–1999 kirjoittaneiden opiskelijoiden ($N = 45484$) sijoittuminen nelikenttään ja erikseen pakollisena (Pak) tai ylimääräisenä (Ylim) kirjoittaneiden opiskelijoiden prosenttiosuudet omista joukoistaan ($N_{pak} = 24227, N_{ylim} = 21257$).

Ryhmän R1 opiskelijat (37 % opiskelijoista) ovat saaneet päättötodistukseen arvosanakseen 8 tai enemmän. Odotusten mukaisesti he ovat saaneet arvosanaksi vähintään arvosanan M. Ryhmän R3 opiskelijoilla (26 % opiskelijoista) on alaryhmän R3' opiskelijoita (14 % opiskelijoista) lukuun ottamatta mennyt kirjoitukset päättötodistuksen ennustamalla tavalla. Ryhmän R2 opiskelijoiden (5 % opiskelijoista) päättötodistuksessa on ollut arvosanana korkeintaan 7, mutta he ovat saaneet kirjoituksissa matematiikassa arvosanaksi vähintään arvosanan M. Ryhmän R4 opiskelijat (18 % opiskelijoista) ovat menestyneet lukion kursseilla hyvin, mutta matematiikan kirjoitusten arvosana on ollut korkeintaan C. Ryhmien R2, R3' ja R4 opiskelijat ovat mielenkiintoisia, sillä lukiossa osoitettu menestys ei ole ennustanut oikein heidän menestystään kirjoituksissa. Niinpä tarkastelen 1990-luvun kirjoittajajoukkoa ryhmiteltynä eri jakoperusteilla nelikentässä.

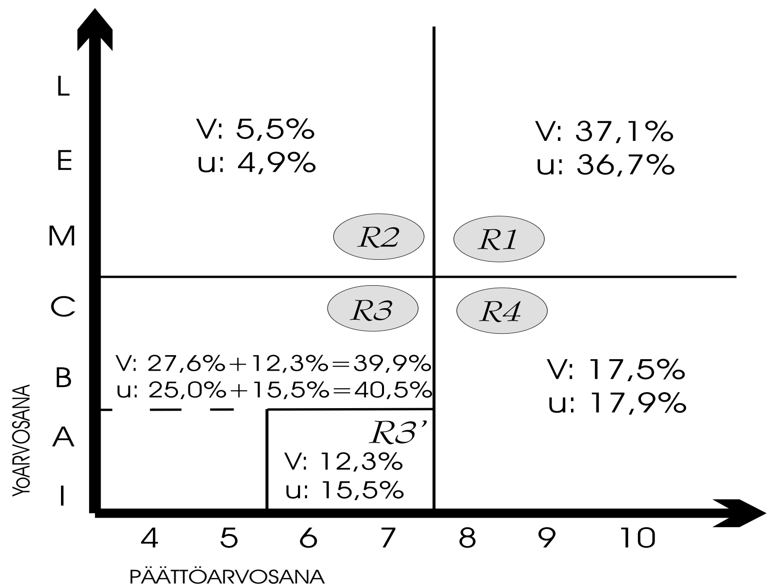


KUVIO 6.11: Pitkän matematiikan keväällä vuosina 1996–1999 pakollisena (PAKOL) tai ylimääräisenä (YLIM) kirjoittaneiden opiskelijoiden ($N = 45484$) suhteelliset määrät kussakin nelikentän ryhmässä.

Tarkasteltaessa erikseen pitkän matematiikan pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittaneiden sijoittumista nelikenttään (kuvio 6.10), voi huomata, että ryhmien R2 ja R4 prosenttiosuudet ovat molemmilla ryhmillä likipitäen samat[25]. Tämä tarkoittaa, että pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien joukoissa, joiden lukumäärät ovat lähes yhtä suuret, on suunnilleen yhtä paljon ryhmään R2 kuuluvia, koulussa alisuoriutuvia opiskelijoita sekä toisaalta ryhmään R4 kuuluvia koulussa menestyviä, mutta kirjoituksissa huonosti menestyneitä. Sen sijaan ryhmissä R1, R3 ja R3' erot ovat selkeitä ylimääräisenä ja pakollisena kirjoittavien opiskelijoiden välillä (kuvio 6.11). Odotusten mukaisesti ryhmässä R1 olevista suurin osa (noin 75 %) on pakollisena kirjoittavia opiskelijoita, sillä heille matematiikan pakolliseksi valitseminen on ollut luontevaa hyvän koulumenestyksenkin takia. Ryhmissä R3 ja R3' ylimääräisenä kirjoittavien osuus on suurin (noin 65 % ja 73 %). Heikko tai tyydyttävä koulumenestys ei rohkaise ryhmän R3 opiskelijoita valitsemaan pakollista mate-

[25]Ks. myös kuvio 6.11.

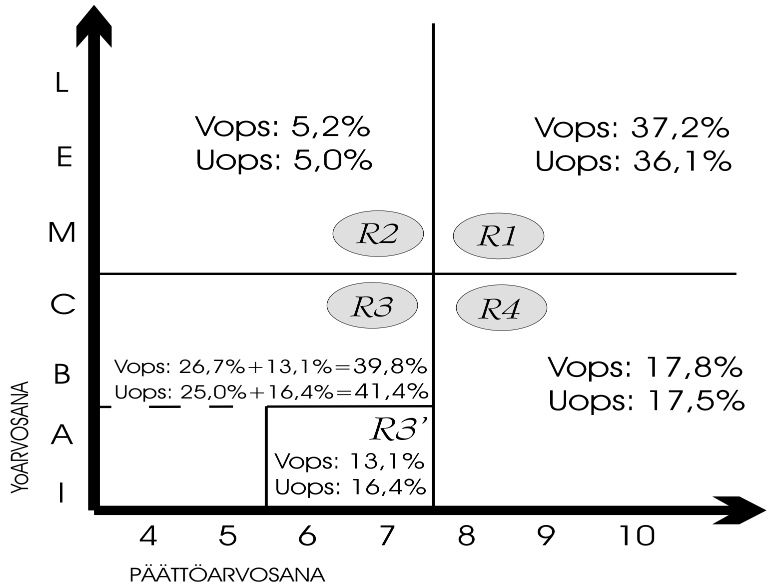
matiikkaa. Opiskelija ei ymmärrettävästi paneudu ylimääräisenä kirjoitettavaan aineeseen yhtä hyvin kuin pakollisena kirjoitettavaan, ja siksi opiskelija ei ehkä saavuta ylimääräisenä kirjoitettavassa aineessa kykyjensä mukaista tulosta.



KUVIO 6.12: Vanhan (**v**, vuodet 1991–1995, 1994 puuttuu, $N_v = 44320$) ja uuden (**u**, vuodet 1996–1999, $N_u = 45484$) ylioppilaskirjoitussysteemin mukaan keväällä kirjoittaneiden opiskelijoiden prosenttiosuudet nelikentässä.

Ylimääräisen pitkän matematiikan kirjoittajista lähes neljännes kuuluu ryhmään R3'. Heistä 75 % saa arvosanakseen korkeintaan arvosanan C (vrt. liite 3), ja hylätyistä arvosanoista suurimman osan saavat ylimääräisenä kirjoittavat, kuten kuvio 6.5 havainnollistaa. Kaiken kaikkiaan pakollisena kirjoittavien ja ylimääräisenä kirjoittavien nelikentän jakaumat poikkeavat toisistaan tilastollisesti erittäin merkitsevästi (χ^2, p<0,001).

Vertailtaessa vanhaa (–1995) ja uutta (1996–) ylioppilaskirjoitussysteemiä (kuvio 6.12) voi havaita, että nelikentän ryhmien koossa ei ole juurikaan eroja. Ne ovat keskenään samaa suuruusluokkaa eivätkä poikkea toisistaan tilastollisesti merkitsevästi (χ^2, p>0,05). Tähän viittaavat myös taulukon 6.1 tulokset. Ryhmän R3' osuus on kasvanut, minkä selittää pitkälti ylimääräisenä kirjoittavien keskitason opiskelijoiden heikko ylioppilaskirjoitusmenestys. Vanhassa systeemissä, jossa pitkä matematiikka oli kaikille pakollinen, myös nämä opiskelijat ponnistelivat saadakseen parhaan mahdollisen tuloksen.



KUVIO 6.13: Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteiden mukaan (**Vops**, kirjoittaneet vuosina 1991–1997, 1994 puuttuu, $N_v = 67548$) ja vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden mukaan opiskelleiden (**Uops**, vuodet 1998–1999, $N_u = 22222$) opiskelijoiden prosenttiosuudet nelikentässä.

Suurin osa 1990-luvulla ylioppilaaksi kirjoittaneista opiskeli vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteiden mukaan. Opiskelijat, jotka aloittivat syksyllä 1995 opiskelun vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden mukaan, kirjoittivat pitkän matematiikan keväällä 1998. Näiden kahden eri opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden jakautumisessa nelikentän ryhmiin (kuvio 6.13) ei ole merkitsevää eroa (χ^2, p>0,05). Ero alaryhmässä R3' selittyy lähinnä ylimääräisenä kirjoittavien suurempana osuutena vuosien 1998–1999 kirjoittajista kuin ennen vuotta 1998 kirjoittaneista eikä opiskelun perustana olleista opetussuunnitelmista (vrt. kuvio 6.10).

6.6 Mittarien ja tulosten arviointia

Tämän luvun tutkimustulokset perustuvat pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitustehtävien tuloksiin. Kaikkia abiturientin yrittämiä tehtäviä arvioivat kaksi sensoria, joista yleensä toinen on lukion matematiikan opettaja ja toinen ylioppilastutkintolautakunnan määräämä sensori. Arvosteluohjeet ovat etukäteen pääpiirteittäin sovittuja, mikä yhdenmukaistaa arviointia. Valtakunnalliset tulokset ovat luotettavia ylioppilaskokeiden arvioinnin kannalta tarkasteltuna.

Itse kokeen tason arviointi on vaikeampaa, sillä koe on ainutkertainen. Kokeen rakenne on ollut koko 1990-luvun samanlainen, mutta asiantuntijoiden on ollut vaikea laatia vuosittain vaikeustasoltaan samankaltaisia tehtäviä kokeeseen. Kun vertaa ylioppilastutkintolautakunnan antamaa ohjeellista matematiikan pistetaulukkoa[26] ja toteutunutta pistetaulukkoa[27], niin esimerkiksi hyväksytyn kokeen ohjeellinen 15 pisteen raja on ollut likimain arvosanan B raja. Muutkin ohjeelliset rajat ovat olleet huomattavasti korkeampia kuin toteutuneet pistetaulukot. Toisaalta verrattaessa eri arvosanojen suhteellisia määriä ja toteutuneita jakaumia[28] ylioppilastutkintolautakunnan antamaan ohjeelliseen jakaumaan[29] niin esimerkiksi hylättyjen suoritusten osuus on vaihdellut 4,1 %:sta 9,6 %:iin ohjeellisen arvon ollessa 5 %:a matematiikan kirjoittajien määrästä. Hylättyjen määrä näyttäisi olevan kohoamassa 10 %:iin pitkän matematiikan kirjoittajista systeemissä, jossa pitkän matematiikan voi kirjoittaa ylimääräisenä. Tiiviisti ilmaistuna ongelmana on se, että jos hyväksytyn raja olisi noin 15 pistettä[30], niin hylättyjen osuus olisi ollut noin 20 %[31]. Toisaalta jos hylättyjen pisteraja asetetaan noin 5 %:n kohdalle jakaumasta, niin pisteraja putoaa noin kuuteen pisteeseen (esim. vuonna 1996) tai alle. Tämä vastaa enää yhden tehtävän antamia pisteitä tai vähemmän. Viimeksi mainitussa tapauksessa kokeen validius ja reliabilius ovat kyseenalaisia, kun ottaa huomioon muun muassa kokeen mittaamat matematiikan sisältöalueet (vrt. Rosenberg 1992). Matematiikan kokeen hylättyjen suuri prosenttiosuus verrattuna muihin kirjoitettaviin aineisiin on perusteltavissa ilmeisesti juuri kokeen mittausarvoon liittyvillä syillä. Koetulosten ollessa kuitenkin vuodesta toiseen alle odotusten herää seuraavanlaisia kysymyksiä: mittaako koe lukiossa opiskeltavia asiakokonaisuuksia (sisältövaliditeetti) vai suoriutuuko lukion kursseista liian heikoin tiedoin, jotka paljastuvat vasta kirjoituksissa (kriteerivaliditeetti)? Taulukon 6.6 (s. 126) ja liitteen 4 perusteella kokeen sisältövaliditeetti on vähintään tyydyttävä ja kokeen tehtävät ovat opetussuunnitelman perusteiden mukaiset. Kokeen sisältö ei selitä suurta määrää heikkoja suorituksia, sillä alkupään tehtävissä on useita, jotka ovat ratkaistavissa jopa pelkästään peruskoulusta saaduilla tiedoilla kuten tehtävä 1 syksyllä 1999. Lukion kursseista tuskin pääsee läpi liian heikoin tiedoin

[26] Taulukko 2.2 s. 45.
[27] Kuvio 6.3 s. 116.
[28] Kuvio 6.4 s. 117.
[29] Kuvio 2.2 s. 45.
[30] 25 %:a maksimipistemäärästä eli 2,5 tehtävän pisteet.
[31] Vastaa enintään arvosanan B saaneita.

verrattuna ylioppilaskirjoitusten vaatimuksiin, mutta heikkojen suoritusten määrä on kokemukseni mukaan kasvanut etenkin 1990-luvun loppupuolella. Tämä tulkinta on luettavissa taulukosta 6.1 (s. 118), sillä kirjoitusten ja päättöarvosanojen korrelaatio on pysynyt korkeana. Kurssimuotoinen lukio, jossa pitkän matematiikan kirjoittaminen ei ole pakollista, houkuttelee osaa lukiolaisista selviytymään "rimaa hipoen yli" pakollisista matematiikan kursseista kurssi kerrallaan. He tulevat lähes valmistautumatta pitkän matematiikan ylioppilaskokeeseen. Kurssimainen opiskelu, jossa keskitytään vain kapealle matematiikan osa-alueelle kerrallaan ja jossa kokonaisuuksien hahmottaminen jää vasta opintojen loppuvaiheeseen, antaa vääristyneen kuvan matematiikan hallinnasta monille niistä opiskelijoista, jotka ovat menestyneet hyvin kursseilla. Ylimääräisenä kirjoittavien opiskelijoiden ennakoitua osaamistasoa heikommat tulokset pitkän matematiikan kokeessa[32] ovat heikentäneet kokeen reliabiliteettia 1990-luvulla.

Ylioppilaslautakunnan tilastoissa ovat kaikkien kirjoittajien tulokset, joten niihin ei sisälly otoksiin liittyviä virhemarginaaleja. Ylioppilaskirjoitusten tehtävien ratkaisuprosentteja olen arvioinut graafisista esityksistä, joten niissä on noin prosenttiyksikön virhemarginaali. Tämä ei kuitenkaan vaikuta oleellisesti saatujen tietojen jatkokäsittelyn luotettavuuteen. Ylioppilaskirjoitustehtävien suorituskeskiarvoja olen käyttänyt myös matemaattisen ajattelun tasojen arviointiin. Erilaisten tehtäväryhmien keskiarvoja on käytetty myös aikaisemmissa tutkimuksissa pohjana matemaattisen ajattelun kuvaamiselle (ks. Yrjönsuuri 2003).

Olen sijoittanut nelikenttään valtakunnan kaikki 1990-luvulla keväällä kirjoittaneet opiskelijat lukuun ottamatta vuonna 1994 kirjoittaneita. Keväisin kirjoittaneiden lukumäärä n=89804 on niin suuri, että sen pohjalta tehdyt analyysit antavat tilastollisesti luetettavan kuvan koko vuosikymmenen kirjoittajajoukosta. Syksyllä pitkän matematiikan ensimmäistä kertaa kirjoittavien määrä on hyvin pieni verrattuna keväällä ensimmäistä kertaa kirjoittavien määrään, sillä pitkän matematiikan pakollisia kursseja on pääsääntöisesti vielä 3. lukiovuoden syksylläkin, eikä pitkän matematiikan opiskelijoiden joukossa 1990-luvulla ollut huomattavaa määrää neljän vuoden opiskelijoita.

[32]Kuvio 9.6 s. 248.

6.7 Tutkimuksen tulokset valtakunnan tasolla

I Minkälaista valtakunnallisella tasolla on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaamine lukio-opintojen päättyessä?

Pitkän matematiikan kursseilla tulee opiskeltavaksi suuri joukko erilaisia algoritmeja ja muita proseduureja, jotka ovat opiskelijoille useimmiten vain proseduraalista tietoa. Sitä mittaavat useimmiten kokeen alkupään LY-tason tehtävät, jotka kuuluvat useimmiten yhtälöitä ja funktioita käsittelevään osa-alueeseen YHT[33]. Proseduraalinen sujuvuus on välttämätöntä ratkaistaessa vaativia tehtäviä (YS- tai SA-taso), joiden ratkaisemiseksi tarvitaan mahdollisesti lisäksi konseptuaalista tietoa ja strategiatietoa. Proseduraalisen tiedon hallinta on opiskelijoiden ylioppilaskirjoitustehtävien ratkaisujen valossa heikentynyt 1990-luvun loppupuolelle tultaessa, sillä hylättyjen suoritusten määrä on kasvanut[34]. Kaikki pitkän matematiikan abiturientit eivät edes selviä peruskoulun oppimäärään kuuluneista laskurutiineista (Lahtinen 1996b, 1997). Erityisesti pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittavien joukossa on huomattava määrä opiskelijoita, jotka eivät ole harjoitelleet laskutaitoaan sille tasolle, että he hallitsisivat LY-tason tehtäviä. Kirjoittajat, joille matematiikan koe on ollut pakollinen, ovat työskennelleet tältä osin määrätietoisesti. He ovat hallinneet merkittävästi paremmin laskutaitoa mittaavia tehtäviä mikä näkyy muun muassa hylättyjen arvosanojen jakaumassa 1990-luvulla[35].

Käsitteellinen ymmärtäminen, strateginen kompetenssi ja mukautuva päättely[36] tulevat esille vaativimmissa ongelmanratkaisutehtävissä, joita 1990-luvulla ylioppilaskirjoituksissa olivat tehtävän 5 jälkeen tulevat tehtävät (liite 4). Näiden tehtävien aihealue kuuluu usein osa-alueeseen DIF[37]. Todistus- ja konstruointitehtävien hallinta on melko vaatimatonta, mihin osaltaan vaikuttaa opetuksen painotukset muun tyyppisiin tehtäviin. Kuvioiden 6.3 (s. 116) ja 6.4 (s. 117) perusteella yli 30 pistettä saaneiden osuus on vähentynyt vuosikymmenen loppuun tultaessa. Kokeissa mitattavan konseptuaalisen tiedon ja strategiatiedon hallinta on heikentynyt; 1990-luvun kirjoittavat ikäluokat ovat pysyneet suunnilleen samankokoisina. Toisaalta 1990-luvun loppupuolella ylimääräisenä ja pakollisena matematiikan kirjoittavat muodostivat kaksi aivan erilaista osaamiskategoriaa[38], joita kuitenkin käsitellään yh-

---

[33]Kuvio 6.7 s. 129.
[34]Kuvio 6.4 s. 117.
[35]Kuvio 6.4 s. 117; kuvio 6.5 s. 119.
[36]Konseptuaalisen tiedon ja strategiatiedon hallinta.
[37]Kuvio 6.7 s. 129.
[38]Kuvio 9.6 s. 248; kuvio 9.7 s. 248.

dessä määritettäessä pisterajoja. Ilmeisesti pakollisena kirjoittavien joukon käsitteellisen tiedon ymmärtäminen oli vähintään samalla tasolla kuin ennen vuotta 1996, mutta pakollisena kirjoittavien lukumäärä oli noin puolet niistä lukumääristä, jotka kirjoittivat pitkän matematiikan ennen vuotta 1996[39].

Nelikenttä[40] jakaa kirjoittajat ryhmiin, joissa otetaan huomioon ylioppilaskirjoitusten lisäksi lukion suoritukset. Noin 40 % kirjoittajista (ryhmät R1 ja R2) on osoittanut hallitsevansa tehtäviä, joiden ratkaiseminen edellyttää heiltä kaikkien matemaattisen osaamisen piirteiden kehittyneisyyttä matematiikan eri osa-alueilla. Heidän matemaattinen ajattelunsa on algoritmisen lisäksi reflektoivaa, joten he yltävät PISA-tutkimuksen taitoluokissa ylimmille tasoille[41]. Hieman alle viidennes kirjoittajista, joilla on päättötodistuksessa vähintään arvosana 8, menestyy kirjoituksissa heikommin kuin päättötodistuksen arvosana ennustaisi. Osalla ryhmän R4 jäsenistä heikkoon kirjoitusmenestykseen on syynä pitkän matematiikan valitseminen ylimääräiseksi kirjoitettavaksi. Opiskelijat, joilla on päättötodistuksessa arvosana 6 tai 7 ja ylioppilaskirjoitusarvosanana A tai I, muodostavat ryhmän R3'. Tämän ryhmän koko on noin 14 % kirjoittajista. Pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittavista tähän ryhmään kuuluu noin neljäsosa[42]. Ryhmän R3' opiskelijoiden proseduraalinen sujuvuus on heikkoa. Heillä on ongelmia perusvalmiuksiin kuuluvien algoritmien hallinnassa, mihin on eräänä syynä harjoittelun puute ja liian suuri luottamus kokeessa sallittujen välineiden[43] apuun.

1.1 Minkälainen valtakunnallisella tasolla on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaaminen lukio-opintojen päättyessä eri sukupuolten muodostamissa ryhmissä?

Tyttöjen ja poikien matemaattisessa osaamisessa ei näytä olevan merkittävää eroa ylioppilaskirjoitusten tulosten valossa (kuvio 9.4, s. 254) ja siksi edellä esitetty yleinen katsaus matemaattisesta osaamisesta lukiossa kuvaa myös tyttöjen ja poikien matemaattista osaamista. Mutta eroavuuksiakin löytyy. Esimerkiksi tytöillä on joinakin vuosina ollut hieman parempi ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan kokeen arvosanojen keskiarvo. Tytöt ovat kuitenkin ilmeisesti epävarmempia kuin pojat matematiikan taidoistaan (ks. Lahtinen 1999), sillä tytöistä valitsi suurin osa (noin 70 %) 1990-luvun loppupuolella pitkän matematiikan ylimääräiseksi aineeksi[44]. Pojista suurin

[39] Kuvio 6.2 s. 115.
[40] Kuvio 6.9 s. 131.
[41] Taulukko 6.4 s. 124.
[42] Kuvio 6.10 s. 132.
[43] Taulukkokirja, graafinen laskin.
[44] Kuvio 9.5 s. 247.

osa valitsi pitkän matematiikan pakolliseksi[45], mikä viittaa poikien luottavan taitoihinsa. Tyttöjen osuus pitkän matematiikan opiskelijoista on ollut koko tarkastelujakson pienempi kuin heidän osuutensa koko lukion oppilasmäärästä.

1.2 Minkälainen valtakunnallisella tasolla on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaaminen lukio-opintojen päättyessä eri opetussuunnitelmien mukaan opiskelevien ryhmissä?

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden mukaan opiskelleista ensimmäiset kirjoittivat pääsääntöisesti keväällä 1998, joten 1990-luvulla kertyy aineistoa uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleista vain kahdelta keväältä. Kuvion 6.13 (s. 135) nelikentässä ei ole juurikaan eroja mainittujen opetussuunnitelmien mukaan opiskelleiden ryhmissä. Vuoden 1994 opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden kirjoitustuloksissa hylättyjen suoritusten osuus on kasvanut[46], minkä perusteella näyttää peruslaskuvalmiuksien eli LY-tason tehtävien hallinta heikentyneen verrattuna vuoden 1985 opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden tuloksiin. Uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleilla on mahdollisuus saada syventävien erikoiskurssien myötä laajempi ja syvällisempi tietämys matematiikan eri osa-alueista kuin vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleilla, mikä näkyy entistä laajempana hyvien suoritusten määränä.

1.3 Minkälainen valtakunnallisella tasolla on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaaminen lukio-opintojen päättyessä pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittavien ryhmissä?

Vuonna 1996 astui voimaan ylioppilastutkintoasetus, joka salli muun muassa sen, että opiskelija voi kirjoittaa pitkän matematiikan ylimääräisenä aineena. Ylimääräisenä kirjoittavien määrä kasvoi 1990-luvun loppuun tultaessa jo yli puoleen pitkän matematiikan kirjoittajista[47]. Ylimääräisenä kirjoittavien menestys kirjoituksissa oli merkittävästi heikompi[48] kuin pakollisena kirjoittavilla. Huomattavalla osalla ylimääräisenä kirjoittavista opiskelijoista on ollut vaikeuksia hallita perusoppiainekseen kuuluvia algoritmeja ja proseduureja. Heidän tietonsa eivät pääse yleensä kehittymään konseptuaalisiksi. Tehtyään kirjoitusvalintansa he eivät opiskele lukion viimeisiä kursseja kuten kertauskurssin siten, että heidän kursseista omaksumansa irralliset tiedot suhteutuisivat muihin tietorakenteen tietoihin ja siten verkottuisivat toisiinsa. Monien

[45] Kuvio 9.4 s. 247.
[46] Kuvio 6.4 s. 117.
[47] Kuvio 6.2 s. 115.
[48] Kuvio 9.6 s. 248; kuvio 9.7 s. 248.

ylimääräisenä kirjoittavien tietorakenne koostuu yksittäisistä faktatiedoista ja proseduureista, mikä näkyy ylimääräisenä kirjoittavien sijoittumisena pääosin (75 %) arvosanaluokkiin I–C[49]. Vain neljäsosa ylimääräisenä kirjoittavista sijoittuu nelikentässä ryhmiin R1 ja R2, joiden jäsenillä on reflektoivaa ajattelua (taitotasot PISA2 ja PISA3). Ylimääräisenä kirjoittavien opiskelupanos matematiikkaan hiipuu kirjoitusvalinnan jälkeen: heidän tuloksensa kypsyyskokeessa jää usein alle päättötodistuksen arvosanan antamaa ennustetta[50].

Pakollisena kirjoittavista yli puolet (56 %) sijoittuu nelikentän ryhmiin R1 ja R2, joten heidän matemaattinen ajattelunsa yltää korkeimmille tasoille. Pakollisena kirjoittavilla on yleensä hyvä proseduraalinen sujuvuus. He ovat suorittaneet lukion viimeiset matematiikan kurssit huolellisesti joten heille on kehittynyt käsitteellistä ymmärrystä yli kurssisisältöjen.

Pitkän matematiikan opiskelijoiden sijoittumisessa nelikenttään jaoteltuna vanhan ja uuden ylioppilaskirjoitussysteemin mukaan opiskelleiden ryhmiin ei näytä olevan eroja 1990-luvulla[51]. Vuonna 1996 ja sen jälkeen kirjoittaneet ovat omina ryhminään kirjoittaneet keskimäärin yhtä hyvin kuin ennen vuotta 1996 pakollisena kirjoittaneet. Tähän vaikuttaa osaltaan arvosanojen lähes vakiona pysynyt suhteellinen osuus kunakin vuonna.

[49] Kuvio 6.10 s. 132.
[50] Kuvio 6.1 s. 118.
[51] Kuvio 6.12 s. 134.

Luku 7

Opettajan näkökulma opiskelijoiden matemaattisen osaamiseen

7.1 Johdanto

Luvussa kuusi tarkastelin opiskelijan matemaattista osaamista sellaisena kuin se näyttäytyy ylioppilaskirjoituksissa valtakunnan tasolla. Seuraavaksi tutkin opiskelijoiden osaamista koulun tasolla opettajan näkökulmasta. Opettaja seuraa, arvioi ja ohjaa pitkän matematiikan opiskelijan oppimisprosessia kurssien edetessä. Ohjaamisen perustana oleva opiskelijan tuntemus niin yksilönä kuin hänen suoritustensa antaman kuvan pohjalta auttaa opettajaa ymmärtämään opiskelijan tapoja ratkaista matemaattisia ongelmia. Koulun tasolla opettajan saama informaatiomäärä yksittäisistä opiskelijoista on moninkertainen verrattuna valtakunnan tasolla tehtäviin arviointeihin. Tämän näkökulman tulokset peilautuvat kahden muun näkökulman tuloksiin, jotka ovat määrällisesti kattavampia, mutta laadullisesti ohuempia.

Tarkastelen Tervakosken lukion opiskelijoiden pitkän matematiikan oppimista 1990-luvulla heidän oman opettajansa tulkitsemana. Tässä opettaja ja tutkija ovat sama henkilö *teacher as researcher* -asetelman mukaisesti. Kyseinen tutkimusasetelma on tullut yhä yleisemmäksi myös Suomessa[1]. LUMA-hankkeen myötä on perustettu myös luonnontieteellisille aloille tutkijakouluja, joissa työssä käyvät opettajat voivat tehdä ohjattua tutkimusta ja suorit-

[1]Esimerkiksi Yrjönsuuri 1989, Joki 2002, Soro 2003.

taa jatkotutkintoja. Esitän muutamia perusteita tällaisen toiminnan mielekkyydelle.

Opetus, oppiminen ja tutkimus nivoutuvat toisiinsa sosiokulttuurisessa kontekstissa. Kehittääkseen omaa työtään opettajan pitää tutkia opetusta ja oppimista omassa työyhteisössään. Oppiminen on koulussa sekä opetuksen että sitä edeltävän tutkimustyön odotettu tulos. (Crawford & Adler 1996.)

Ihmissuhdetyössä ammattilaisen käyttämä tieto pohjautuu osaltaan hänen omiin kokemuksiinsa ja koulutuksessa opitun tiedon soveltamiseen kulloisessakin työympäristössä. Oman työn tutkiminen siinä kontekstissa, jossa tutkimusongelmat ovat syntyneet, antaa tekijälleen suoraan hänen ongelmiksi kokemiinsa pulmiin vastauksia, jotka muunneltuina voivat auttaa tutkijaopettajan kollegojakin työnsä kehittämisessä.

Kriittisen opetusteorian mukaan opetuksen tutkiminen ei ole tutkimusta opetuksesta vaan tutkimusta opetukselle. Sen mukaan opettajien itse pitäisi olla työnsä tutkijoita ja siten myös sen kehittäjiä yhdessä ammattitutkijoiden kanssa (Carr & Kemmis 1986, 155–156). Hunt (1987) erottaa perinteisen *outside-in* -psykologian *inside-out* -psykologiasta, jonka mukaan jokainen on asiantuntija omassa työssään ja voi siten myös tutkia sitä kehittämällä ja kokeilemalla omia implisiittisiä teorioitaan.

Minua on kiinnostanut koko opettajaurani ajan matematiikan oppimiseen ja ymmärtämiseen liittyvä problematiikka. Matematiikan erityinen luonne eksaktina tieteenä, jonka voisi kuvitella olevan opettajalle helppo opetettava aine loogisuutensa ja yksiselitteisyytensä vuoksi, onkin useille lukion opiskelijoille yksi vaikeimmista oppiaineista. Mielenkiintoni kohde on redusoitunut opiskelijan matemaattiseen ajatteluun, jonka näen olevan matematiikan opettajan kannalta keskeinen käsite niin opetuksen suunnittelussa kuin sen tulosten arvioinnissakin.

Tässä luvussa tarkastelen opiskelijan matemaattista osaamista yksittäisen koulun tasolla oman tutkijaopettajansa tulkitsemana ja arvioimana. Matemaattinen osaaminen on perustana tulkita opiskelijan matemaattisen ajattelun piirteitä.

7.2 Katsaus Tervakosken lukion pitkän matematiikan opetukseen

Tutkimuskohteena ovat Tervakosken lukion pitkän matematiikan opiskelijat ja heidän matematiikan suorituksensa 1990-luvulla. Tervakoski on toinen Janakkalan kunnan suurista taajamista, joissa molemmissa on oma yläaste ja lukio. Tervakosken lukio on niin sanottu yksisarjainen lukio, jossa aloittaa vuosittain enimmillään 36 opiskelijaa. Valtaosa opiskelijoista tulee samassa rakennuksessa toimivasta yläasteesta.

Pitkän matematiikan valitsee keskimäärin vähän yli puolet lukion aloittavista opiskelijoista. Matematiikassa oppimäärän vaihdon tekee muutama opiskelija kustakin ikäluokasta yleensä ensimmäisen lukuvuoden aikana.

Ennen vuotta 1995 lukio-opintonsa aloittaneet opiskelijat saattoivat opiskella 11 kurssia pitkää matematiikkaa. Vuonna 1995 tai sen jälkeen aloittaneet voivat valita pitkää matematiikkaa 15 kurssia, joista kymmenen kurssia on pakollisia, neljä kurssia syventäviä ja yksi kurssi soveltava. Pääsääntöisesti pitkän matematiikan opiskelijat suorittivat kaikki mainitut kurssit. Syventävät kurssit olivat Kryptografia (1. vsk), Analyysi (2. vsk), MatTa-kurssi (**Mat**ematiikkaa **T**ietokone**a**vusteisesti) ja Kertauskurssi (3. vsk). Kryptografian kurssissa perehdyttiin tiedonsuojaamiseen muun muassa lukuteorian antamien mahdollisuuksien avulla. MatTa-kurssilla opiskeltiin matematiikkaa tietokoneavusteisesti Iso-M-paketin[2] avulla (ks. Kivelä 2000), jonka yhteydessä perehdyttiin Mathcad-matematiikkaohjelman käyttöön. Kertauskurssi oli 3. vuosikurssin viimeinen kurssi, jossa kerrattiin ja täydennettiin aikaisemmilla kursseilla opiskeltuja matematiikan asiasisältöjä. Lukio-opinnot aloittava Aloituskurssi oli soveltava kurssi, jossa kerrattiin ja täydennettiin peruskoulussa opetettua matematiikkaa.

Olen itse opettanut kaikki pitkän matematiikan kurssit, joten kohtasin opiskelijat keskimäärin vähintään kerran jokaisena koulupäivänä koko lukio-opiskeluajan. Opetusryhmien ollessa 8–20 opiskelijaa opettaja oppii tuntemaan ryhmänsä hyvin. Tämä auttaa ymmärtämään ja tulkitsemaan opiskelijoiden suorituksia erilaisissa kokeissa ja testeissä.

Pitkän matematiikan kursseihin kuului pääsääntöisesti kaksi koetta; kurssin siis saattoi suorittaa kahdella välikokeella. Jos opiskelija ei ollut suorittanut ensimmäistä välikoetta hyväksytysti tai ei ollut tyytyväinen suoritukseensa, niin hän saattoi suorittaa koko kurssin loppukokeessa. Kurssiarvosana muodostui koetulosten lisäksi jatkuvasta näytöstä, johon liittyivät tuntiaktiivisuus ja kotitehtävien kirjattu suoritusmäärä. Poikkeuksena edellisestä olivat vuoden 1994 opetussuunnitelman mukaiset syventävät kurssit, joissa saattoivat olla arvioinnin perusteena myös portfolio-työskentely ja projektityöt.

Olen opettanut 1990-luvulla pitkän matematiikan oppimäärän 103 opiskelijalle, joista 44 on tehnyt tutkimukseeni liittyvän uskomusmittauksen. Kaikista 103 opiskelijasta on käytettävissä tutkimusaineistona koetulokset, kurs-

[2]Esittely osoitteessa $http://matta.hut.fi/matta$ (2.1.2005).

siarvosanat, preliminääripistemäärät[3] ja ylioppilaskirjoitusten pisteet sekä arvosanat. Lisäksi uskomuksia mittaavat testit ovat identifioitavissa. Oma opiskelijatuntemukseni mainituin perustein antaa pohjan tulkinnoille, joita tulosten analysoinnista syntyy.

7.3 Matemaattisen osaamisen arviointia opiskelijan suoritusten perusteella

7.3.1 Opiskelijoiden suoritukset matematiikan eri osa-alueilla

Tarkastelen opiskelijan matemaattisen ajattelun piirteitä arvioimalla opiskelijan matemaattisia tietoja sisältäviä produkteja, jolloin oletan produktin tason estimoivan suoritusprosessin tasoa[4]. Tarkasteltavat opiskelijan produktit ovat hänen kurssikoesuorituksiaan, preliminäärejään, harjoitustehtäväsarjojaan tai portfolioon suorittamiaan tehtäviä, jotka osoittavat hänen matemaattista osaamistaan. Näiden suoritusten ja opiskelijan tuntityöskentelyn arvioinnin perusteella opettaja arvostelee kurssin. Kurssit voidaan jakaa sisältönsä perusteella eri matematiikan osa-alueisiin kuuluviksi[5].

Matematiikan eri osa-alueilla kullekin opiskelijalle voidaan laskea hänen matematiikan osaamistaan kuvaava parametri, jonka pohjana on matematiikan eri osa-alueisiin kuuluvien kurssien arvosanojen aritmeettinen keskiarvo. Kutsun jatkossa tätä parametria osaamisparametriksi. Osaamisparametreista saa viitteitä opiskelijoille vaikeista ja helpoista matematiikan sisältöalueista, joiden arvioinnin tuloksia voi verrata myöhemmin menestymiseen samoilta sisältöalueilta olevien matematiikan ylioppilaskirjoitustehtävien ratkaisemiseen. Tarkastelen tällä tavoin nelikentän x-akselilla olevan päättöarvosanan pohjana olevien matematiikan eri osa-alueiden hallintaa.

Nelikentässä, jossa opiskelijoiden matematiikan päättöarvosanan ja ylioppilaskirjoitusten matematiikan kokeen pistemäärään välistä riippuvuutta tutkitaan regressioanalyysin avulla, yhdistyy valtakunnallinen ja koulun tason arviointi. Matematiikan kurssien arvostelun tarkastelu tuo tietoa opiskelijan ajattelusta tietyn matematiikan osa-alueen piiristä. Tutkin vielä erikseen,

[3]Preliminäärit ovat koulussa järjestettävät ylioppilaskirjoitusten ”kenraaliharjoitukset”. Tervakosken lukiossa matematiikan preliminääri oli MAOL:n laatima valtakunnallinen koe, jonka rakenne oli samanlainen kuin ylioppilaskirjoitustehtäväsarjan.

[4]Taulukko 6.4 s. 124.

[5]Taulukko 6.5 s. 125.

onko löydettävissä eroja tuloksissa poikien ja tyttöjen välillä, vanhan ja uuden opetussuunnitelman aikana opiskelleiden tuloksissa sekä pakollisena ja ylimääräisenä matematiikan ylioppilaskirjoituksen kirjoittaneiden välillä.

Koko 1990-luvun on viimeinen kurssi ollut kertauskurssi (KERT), jota tarkastelen erikseen omana kokonaisuutena. Vuoden 1996 jälkeen tulleet syventävät kurssit[6] jätän tarkastelun ulkopuolelle, koska niiden vaikutusta on vaikea arvioida ylioppilaskirjoitusten matematiikan kokeen tulokseen.

Jokaiselle tutkimuksessa olleelle Tervakosken opiskelijalle (n=103) olen laskenut tietojen ja taitojen hallintaa kuvaavan osaamisparametrin p_n kullekin taulukossa 6.5 (s. 125) määritellylle osa-alueelle ja lisäksi kertauskurssille.

Taulukossa 6.3 (s. 124) on esitetty tässä tutkimuksessa käytetty Wilsonin kognitiivisten tasojen sovellettu malli. Aikaisemmassa tutkimuksessani (Joutsenlahti 1996, 47) nimitin osaamista kuvaavia parametreja taitoparametreiksi, ja niitä tulkittiin kognitiivisiksi tasoiksi. Tässä työssä osaamisparametrin tulkinta kognitiiviseksi tasoksi tehdään vastaavalla tavalla taulukon 7.1 mukaisesti. Nimitys osaamisparametri kuvaa paremmin tämän työn keskeisten käsitteiden tieto ja taito hallintaa kuin nimitys taitoparametri.

TAULUKKO 7.1: Opiskelijan n osaamisparametrin p_n ja matematiikan kognitiivisten tasojen välinen yhteys.

Osaamisparametri p_n	Kognitiivinen taso
$p_n \in [4, 6]$	laskutaito/ymmärtäminen (LY-taso)
$p_n \in]6, 8]$	ymmärtäminen/soveltaminen (YS-taso)
$p_n \in]8, 10]$	soveltaminen/analysoiminen (SA-taso).

Perusteluna taulukossa 7.1 olevalle luokitukselle käytän kurssikokeiden rakennetta, joka pysyi samana koko 1990-luvun. Pyrin laatimaan kokeeseen järjestyksessä kaksi LY-tason tehtävää, kaksi YS-tason tehtävää ja kolme SA-tason tehtävää. Näistä seitsemästä tehtävästä opiskelija valitsee kuusi tehtävää. Kokeen arvostelun pohjana on pistetaulukko, jonka enimmäispistemäärä on 36. Arvosanaan 6 opiskelija tarvitsee pistesumman, joka vastaa noin 2,5 tehtävää ja arvosanaan 8 tasan neljä tehtävää. Summapisteiden muunto suoraan tehtävien lukumääräksi ja osaamisparametrin arvoksi ei ole sellaisenaan riittävä menetelmä, vaan on otettava huomioon opiskelijan kokeesta saama pistejakauma. Siitä on nähtävissä, minkä tasoisista tehtävistä pistesumma on kertynyt. Summapistemäärän tulkitseminen on todettu parem-

[6] Esimerkiksi Analyysi ja Numeeriset menetelmät.

maksi mittaustavaksi kuin yksittäisten tehtävien tulkitseminen. Esimerkiksi NAEP-projektissa todettiin 1990-luvun alussa, että laskettaessa oppilaan kykytasoa yksittäisten tehtävien avulla ei saatu luotettavaa kokonaiskuvaa oppilaan osaamisesta, mutta muodostettaessa samalta osa-alueelta vaikeustasoltaan vaihtelevista tehtävistä koostuvia tehtäväperheitä voitiin mitata oppilaan vertikaalista ja horisontaalista ymmärtämistä (NAGB 2000). Koetehtäväsarjaa voi pitää edellä kuvatun mukaisena tehtäväperheenä.

Tutkimusaineistoon kuuluvat 1990-luvun pitkän matematiikan kurssikokeiden pistejakaumat. Aineistossa on 84 kokeen 1396 koesuoritusta, jotka ovat noin kaksikolmasosaa korjaamistani pitkän matematiikan kokeista tarkasteltavana ajanjaksona. Aineiston kuuluvat pääsääntöisesti koetehtäväsarja, opiskelijoiden tunnistetiedot ja kustakin tehtävästä annettu pistemäärä (0–6 pistettä). Kokeiden keskiarvot ovat olleet noin 6,5–7,5. Pistejakaumien avulla voin tutkia, minkälaista osaamista vaativista tehtävistä opiskelijan pistesumma on kertynyt. Edellä kuvattu kokeen rakenne antaa perusteen tulkita kognitiivisten tasojen muutoksia lineaarisesti.

Liitteessä 5 on tutkittavien Tervakosken pitkän matematiikan opiskelijoiden (n=103) osaamisparametrit taulukon 6.5 (s. 125) mukaisilla matematiikan osa-alueilla. Tästä aineistosta on seuraavassa laskettu opiskelijoiden sijoittuminen eri kognitiivisille tasoille taulukon 7.1 mukaan ja lisäksi osaamisparametrien aritmeettiset keskiarvot tutkittaville osa-alueille tarkasteltavina vuosina. Tämän jälkeen aineistoa on vielä tarkasteltu eri sukupuolten, opetussuunnitelmien ja matematiikan pakollisuuden erottelemissa ryhmissä.

TAULUKKO 7.2: Tervakosken pitkän matematiikan opiskelijoiden (n=103) jakautuminen eri kognitiivisille tasoille prosenttiosuuksina matematiikan eri osa-alueilla.

osa-alue/taso	LY	YS	SA
YHT	14%	55%	31%
GEO	19%	51%	30%
DIF	24%	51%	25%
TNLU	24%	51%	24%
KERT	26%	48%	26%

Taulukon 7.2 perusteella keskimäärin runsas neljäsosa opiskelijoista saavuttaa SA-tason ja noin viidesosa opiskelijoista jää LY-tasolle tutkittavilla osa-alueilla. Tasojen hierarkkisuudesta johtuen LY-tason saavuttavat kaikki opis-

kelijat kaikilla osa-alueilla[7] ja keskimäärin noin 80 % opiskelijoista saavuttaa YS-tason sekä noin 25 %–30 % SA-tason matematiikan eri osa-alueilla.

Tarkasteltaessa opiskelijoiden kurssikokeiden pistejakaumia LY-tason ja SA-tason opiskelijat erottuvat selkeästi omiksi ryhmikseen. LY-tason laskijat[8] saavat aineiston perusteella pisteensä alkupään tehtävistä, joiden ratkaisu edellyttää kurssiin keskeisesti kuuluvaa proseduraalista tietoa. SA-tason opiskelijat[9] saavat pisteitä kaikista tehtävätyypeistä, koska heillä on kaikki matemaattisen osaamisen piirteet hyvin kehittyneitä. Heidän mahdolliset pistemenetyksensä tulee pistejakaumien perusteella jokaisista tehtävätyypeistä, jolloin alkupään tehtävien pistemenetykseen syynä on useimmiten huolimattomuus. YS-tason opiskelijoista sen sijaan löytyy aineistosta kaksi erilaista ryhmää. Suurin osa (yli 90 %) tämän tason opiskelijoista[10] saa pisteensä pääosin alkupään tehtävistä ja irtopisteitä vaativimmista tehtävistä. Heillä on proseduraalista sujuvuutta. Pieni ryhmä YS-tason opiskelijoita[11] kerää pistesummansa suhteellisen tasaisesti kaikista tehtävätyypeistä. Heidän osuutensa kaikista Tervakosken tutkittavista opiskelijoista on alle 10 %[12]. Heidän osuutensa YS-tason opiskelijoiden määrästä on alle viidesosa. Heille on ilmeisesti kehittynyt käsitteellistä ymmärrystä ja strategista kompetenssia sekä mukautuvaa päättelyä, mutta he eivät hallitse proseduurien käyttöä riittävästi. He eivät ole harjoitelleet algoritmien käyttöä tunneilla eikä kotitehtävissä, mutta he ymmärtävät keskeiset käsitteet ja kykenevät matematisoimaan ongelmia. Ratkaisuun tarvittavat työkalut eivät ole kunnolla näiden opiskelijoiden hallinnassa. Näiden opiskelijoiden kohdalla voi olla oppimisessa sellainen P-C -kytkentä[13], että he oppivat matematiikkaa ensin käsitteellisesti ja vasta sen jälkeen mahdollisesti proseduraalisesti (vrt. Haapasalo 2003).

Taulukossa 7.3 on tutkimusaineistoon kuuluvien opiskelijoiden osaamisparametrien keskiarvot ja keskihajonnat laskettuna siihen vuoteen asti, jona he ovat olleet ylioppilaskirjoituksissa. Kaikilla osa-alueilla opiskelijoiden keskimääräiset osaamisparametrit ovat YS-tasolla. Tämä tulos on odotettu pitkän matematiikan opiskelijoilla. Ikäluokkien välillä on jonkin verran eroja[14],

[7]Opiskelijat eivät voi saada muuten hyväksyttyä arvosanaa kurssista.

[8]Liitteessä 6 opiskelijat OP1/5 ja OP3/24.

[9]Liitteessä 6 opiskelijat OP10/16 ja OP2/33.

[10]Liitteessä 6 opiskelijat OP11/1 ja OP1/21.

[11]Liitteessä 6 opiskelijat OP15/8 ja OP9/49.

[12]Tutkittavasta joukosta (n=103) kahdeksalla opiskelijalla oli pistejakauma-aineistossa useammin kuin kaksi kertaa pistejakauma, jossa oli osapisteitä kaikenlaisista tehtävistä yhteensä 16–24 pistettä.

[13]Prosedural-Conseptual.

[14]Esimerkiksi vuonna 1995 kirjoittaneiden osaamisparametrit osa-alueilla GEO, DIF ja TNLU ovat heikompia verrattuna muihin vuosiin.

TAULUKKO 7.3: Osaamisparametrien p keskiarvot ja suluissa keskihajonnat matematiikan eri osa-alueilla kullekin ikäluokalle (lukumäärä n) ylioppilaskirjoitusvuoden mukaan.

Osa-alue	1991	1994	1995	1996	1997	1998	1999
n=103	9	11	13	18	19	19	14
YHT	$7,7(1,4)$	$7,6(1,3)$	$7,3(1,1)$	$7,4(1,2)$	$7,6(1,0)$	$7,8(1,1)$	$7,8(1,3)$
GEO	$7,6(1,1)$	$7,4(1,6)$	$6,9(1,1)$	$7,5(1,3)$	$7,4(1,2)$	$7,5(1,1)$	$7,4(1,1)$
DIF	$7,8(1,3)$	$7,2(1,5)$	$6,8(1,2)$	$7,3(1,3)$	$7,3(1,2)$	$7,6(1,2)$	$7,1(1,2)$
TNLU	$7,4(1,5)$	$7,4(1,3)$	$6,6(1,2)$	$7,6(1,3)$	$7,8(1,3)$	$7,6(1,2)$	$7,3(1,1)$
KERT	$7,6(1,2)$	$7,8(1,7)$	$7,5(1,2)$	$7,9(1,1)$	$7,6(1,4)$	$7,2(1,1)$	$7,1(1,3)$

TAULUKKO 7.4: Poikien ja tyttöjen osaamisparametrien pitkän matematiikan eri osa-alueilla (YHT, GEO, DIF, TNLU, KERT), päättötodistusten arvosanojen (PTOD), preliminäärien (PRE) ja pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten pisteiden (YOPIST) keskiarvot ja suluissa keskihajonnat 1990-luvulla.

Osa-alue	Pojat (n=69)	Tytöt (n=34)
YHT	$7,5(1,2)$	$7,7(1,2)$
GEO	$7,4(1,2)$	$7,4(1,2)$
DIF	$7,3(1,3)$	$7,2(1,3)$
TNLU	$7,5(1,3)$	$7,3(1,3)$
KERT	$7,7(1,3)$	$7,2(1,3)$
PTOD	$7,6(1,2)$	$7,5(1,2)$
PRE	$28,9(12,5)$	$23,0(11,5)$
YOPIST	$28,8(12,8)$	$22,9(14,2)$

mutta ryhmien pieni koko ja heterogeeninen opiskelija-aines selittävät keskiarvojen vaihtelua. Yleensä ensimmäiset kurssit (YHT) ovat menneet parhaiten joka vuosi. Näissä kursseissa on kertaavaa ainesta ja toisaalta opiskelijat ponnistelevat alussa enemmän tehtävien ja ongelmakohtien kanssa kuin myöhemmin, jolloin osa opiskelijoista ei enää selvitä itselleen ongelmakohtia. Differentiaalilaskennan kurssit (DIF) ovat menneet heikoimmin, sillä niissä tarvitaan hyvää aikaisempien asioiden hallintaa ja soveltamista sekä lisäksi uusien kohtalaisen vaikeiden matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä ja soveltamista. Näissä kursseissa hyvä menestys vaatii opiskelijalta aihepiiriin kuuluvaa käsitteellistä ymmärtämistä. Kertauskurssin (KERT) tulokset ovat useimmiten aika hyviä, sillä ylioppilaskirjoitusten läheisyys nostaa mielenkiintoa kerrattaviin asioihin. Vuosina 1997–1999 kertauskurssi ei ole enää mennyt paremmin kuin esimerkiksi TNLU-kurssit. Toisaalta kertauskurssin aihepiirit sovitaan kurssikohtaisesti, jolloin opiskelijat sitoutuvat kurssisisältöjen opiskeluun, koska he ovat itse suunnitelleet ne opiskeltaviksi.

Tyttöjen ja poikien matemaattisessa osaamisessa (taulukko 7.4) ei ole tilastollisesti merkitseviä eroja[15]. Tytöt menestyivät lukion ensimmäisissä kursseissa (YHT) hieman paremmin kuin pojat, mutta lukio-opintojen edetessä pojat suoriutuvat keskimäärin paremmin. Tyttöjen ja poikien keskiarvojen ero kasvaa lukion loppua kohti ja kertauskurssissa (KERT) sekä preliminäärien (PRE) pisteiden keskiarvossa on huomattava ero, joka tulee esille myös kirjoitusten lopullisessa pistemäärässä. Preliminäärien pistemäärä on selkeästi yhteydessä kirjoitusten pistemäärään[16].

Tyttöjen ja poikien sijoittumisessa kognitiivisille tasoille matematiikan eri osa-alueilla (liite 7, taulukko 9.4) ei ole tilastollisesti merkitseviä eroja (t-testi, $p>0{,}05$). Kyseisen taulukon 9.4 perusteella näyttää, että kognitiivisten tasojen suhteelliset prosenttiosuudet eri osa-alueilla ovat samaa suuruusluokkaa kuin koko tutkittavalla joukolla (ks. taulukko 7.2) paitsi kertauskurssissa. Tähän on ilmeisesti vaikuttanut se, että noin puolet koko aineiston tytöistä ($n=17$) on valinnut matematiikan ylimääräiseksi ja pojista noin viidesosa ($n=15$). Tyttöjen kirjoittamisvalinta näkyy myös taulukossa 7.4 viimeisten kurssien kohdalla poikia heikompina keskiarvoina. Edellä todettiin pitkän matematiikan ylimääräiseksi valinneiden heikko kiinnostus kertauskurssin opiskeluun.

Taulukosta 7.5 voidaan myös verrata vanhan ja uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden osaamisparametreja matematiikan eri osa-alueilla. Ennen vuotta 1998 kirjoittaneet opiskelijat ovat lukeneet vanhan opetussuunnitelman mukaan ja 1998 sekä sen jälkeen kirjoittaneet uuden opetussuunnitelman mukaan. Kurssien muuttuminen ei näy osaamisparametrien suuruuden muuttumisessa muissa kursseissa kuin kertauskurssissa (KERT), jonka tulokset ovat huonontuneet vuosikymmenen loppua kohti. Liitteen 7 taulukosta 9.4 on nähtävissä sama ilmiö.

Uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden osaamisparametrit (taulukko 7.5) ovat matematiikan eri osa-alueilla paremmat kuin vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleilla, mutta eivät tilastollisesti merkitsevästi (t-testi, $p>0{,}05$). Kertauskurssin, preliminäärien[17] ja ylioppilaskirjoitusten

[15] T-testi, $p>0{,}05$.
[16] Pearsonin korrelaatiokerroin 0,82; $p<0{,}01$.
[17] T-testi, $p<0{,}001$.

TAULUKKO 7.5: Vanhan (Vanha ops) ja uuden (Uusi ops) opetussuunnitelman aikana opiskelleiden pitkän matematiikan eri osa-alueiden (YHT, GEO, DIF, TNLU, KERT) osaamisparametrien, päättötodistuksien arvosanojen (PTOD), preliminäärien (PRE) ja pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten pisteiden (YOPIST) keskiarvot ja sulkeissa keskihajonnat 1990-luvulla.

Osa-alue	Vanha ops (n=70)	Uusi ops (n=33)
YHT	$7,5(1,1)$	$7,8(1,2)$
GEO	$7,4(1,2)$	$7,5(1,1)$
DIF	$7,2(1,3)$	$7,4(1,2)$
TNLU	$7,4(1,3)$	$7,5(1,2)$
KERT	$7,7(1,3)$	$7,2(1,1)$
PTOD	$7,6(1,2)$	$7,6(1,1)$
PRE	$30,8(11,3)$	$18,9(10,9)$
YOPIST	$29,2(14,4)$	$21,9(12,4)$

pistemäärien[18] keskiarvojen suhteen tilanne on päinvastainen. Uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden suhteelliset osuudet ovat suurempia SA-tasolla pakollisissa kursseissa kuin vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleilla, mutta kertauskurssin osalta tilanne on päinvastainen (liite 7, 9.4).

Pakollisena kirjoittavien osaamisparametrien keskiarvot ovat odotetusti kauttaaltaan parempia kuin ylimääräisenä kirjoittavien sekä myös päättötodistusten matematiikan arvosanojen, preliminäärien ja kirjoitusten matematiikan pisteiden keskiarvot (taulukko 7.6). Nämä erot ovat tilastollisesti erittäin merkitseviä (t-testi, $p<0{,}001$) kaikissa muissa paitsi ensimmäisten kurssien kohdalla (YHT). Heikko tai kohtalainen menestys matematiikassa ohjaa ymmärrettävästi valitsemaan matematiikan ylimääräiseksi kirjoitettavaksi aineeksi. Tervakosken pitkän matematiikan opiskelijoilla reaalin pakolliseksi valitsemiseen vaikutti suurimmaksi osaksi heikko menestys matematiikan opinnoissa eikä menestys reaaliaineissa. Pitkässä matematiikassa hyvin menestyneet opiskelijat menestyvät usein hyvin myös reaaliaineissa, mutta he valitsivat ainakin 1990-luvun puolella usein pitkän matematiikan pakolliseksi kirjoitettavaksi aineeksi. Tämä valinta näkyy erityisesti kertauskurssin kohdalla (taulukko 7.6 ja liite 7 taulukko 9.4), jossa erot pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien välillä ovat tilastollisesti merkitseviä. Ylimääräisenä kirjoittavat opiskelijat olivat suurimmaksi osaksi YS-tasolla eri osa-alueilla, mutta kurs-

[18] T-testi, $p<0{,}01$.

TAULUKKO 7.6: Pitkän matematiikan pakollisena (Pakollinen) tai ylimääräisenä (Ylimääräinen) vuonna 1996–1999 kirjoittaneiden opiskelijoiden eri osa-alueiden (THT, GEO, DIF, TNLU, KERT) osaamisparametrien, päättötodistusten arvosanojen (PTOD), preliminäärien (PRE) ja pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten pisteiden (YOPIST) keskiarvot ja suluissa keskihajonnat. Merkintä "***" tarkoittaa, että kyseinen arvo poikkeaa tilastollisesti merkitsevästi (t-testi, p<0,001) ylimääräisenä kirjoittaneiden arvosta.

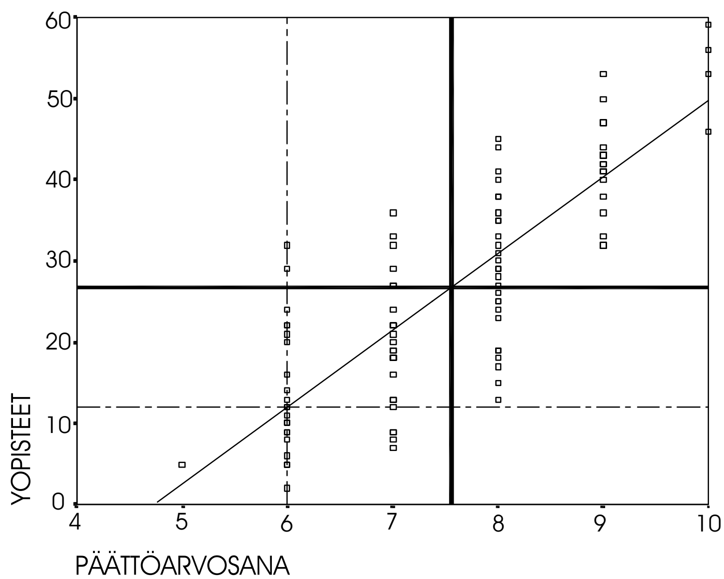
Osa-alue	Pakollinen (n=38)	Ylimääräinen (n=32)
YHT	$8,0(1,1)$	$7,3(1,1)$
GEO	$7,9^{***}(1,2)$	$7,0(0,9)$
DIF	$7,9^{***}(1,1)$	$6,7(1,0)$
TNLU	$8,1^{***}(1,3)$	$7,5(0,9)$
KERT	$8,1^{***}(1,2)$	$6,8(0,8)$
PTOD	$8,0^{***}(1,1)$	$7,0(1,0)$
PRE	$31,3^{***}(12,2)$	$19,6(10,1)$
YOPIST	$32,0^{***}(13,0)$	$17,2(9,7)$

sien tiedot ja taidot eivät jäsenny kokonaisuuksien hallinnaksi, mikä näkyy kertauskurssin, preliminäärien ja ylioppilaskirjoitusten heikkona suorituksena.

Ylimääräisenä kirjoittavien heikko opiskelumotivaatio pitkän matematiikan viimeisissä kursseissa ja heikko valmistautuminen kirjoituksiin on osaltaan selittämässä eroja aikaisemmassa vanhan ja uuden opetussuunnitelman aikana opiskelleiden vertailussa. Uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleista on suurempi osa ylimääräisenä kirjoittavia kuin vanhan opetussuunnitelman aikana opiskelleista tässä aineistossa.

7.3.2 Nelikenttätutkimus

Luvussa kuusi käytin nelikenttää, jossa y-akselin muuttujaksi olin valinnut pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksen arvosanan. Seuraavassa valitsen selitettäväksi muuttujaksi pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa saadun lautakunnan arvioiman kokonaispistemäärän ja selittävänä muuttujana käytän lukion päättötodistuksen pitkän matematiikan arvosanaa, jonka pohjana on suoritettujen matematiikan kurssien keskiarvo. Pitkän matematiikan arvosana selittää regressioanalyysin perusteella parhaiten matematiikassa annetuista arvosanoista kaikkien matematiikan osa-alueiden hallintaa, jota myös mitataan ylioppilaskirjoituksissa. Voidaan olettaa, että pääsääntöisesti heikosti matematiikan opinnoissa menestyvät suoriutuvat heikosti myös matematiikan ylioppilaskokeessa ja vastaavasti hyvin menestyvät suoriutuvat hyvin. Edellä lasketut osaamisparametrit ja niiden tulkinta kognitiivisiksi tasoiksi koskivat ensisijaisesti rajattuja matematiikan osa-alueita. Nelikentän selittävänä tekijänä on päättötodistuksen arvosana, joka perustuu rajattujen matematiikan osa-alueiden hallintaan. Kertauskurssin, preliminäärien ja ylioppilaskirjoitusten tulokset eivät kuitenkaan aina ole odotettuja[19]. Näissä kokeissa ei informoida opiskelijaa, mihin matematiikan osa-alueeseen kukin tehtävä kuuluu. Nelikentän dimensiossa "matematiikan päättötodistuksen arvosana" opiskelija on tietänyt kertauskurssia lukuun ottamatta, mihin matematiikan osa-alueeseen kokeen tehtävä kuuluu. Sen sijaan dimensiossa "ylioppilaskirjoituksen pisteet" opiskelija on ratkaistessaan kutakin tehtävää joutunut ensin harkitsemaan, mihin matematiikan osa-alueeseen tehtävä kuuluu ja mitkä ratkaisuprosessit ovat käyttökelpoisia.

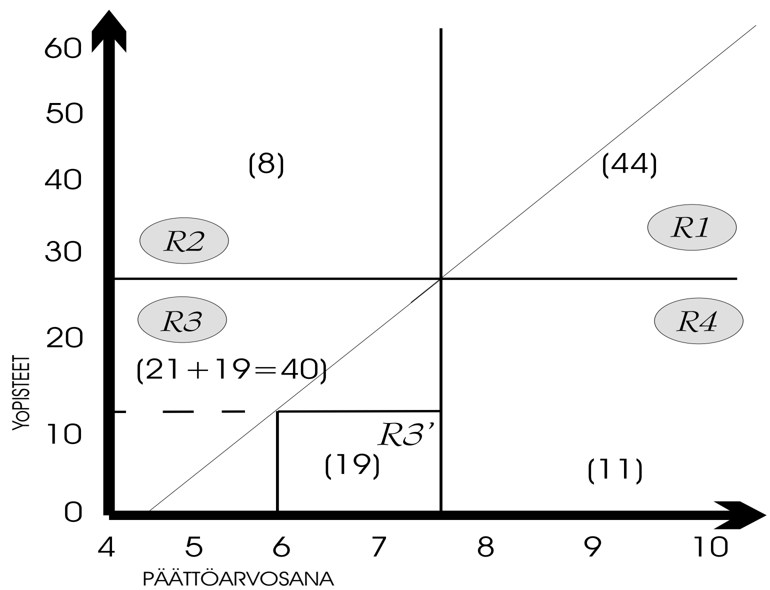


KUVIO 7.1: Tervakosken pitkän matematiikan kirjoittaneet ylioppilaat (n=103) nelikentässä. Regressiosuoran yhtälö on $PIST = 9,4{*}PTOD{-}44,4$.

Kuvion 7.1 nelikentän aineisto koostuu Tervakosken lukiossa 1990-luvulla pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa kirjoittaneiden (n=103) päättötodistusarvosanoista (x-akselilla PTOD) ja pitkän matematiikan ylioppi-

[19]Esimerkiksi taulukot 7.4, 7.5 ja 7.6.

laskirjoitusten kokonaispistemäärästä (y-akselilla PIST). Spearmannin korrelaatiokerroin kyseisten muuttujien suhteen on $0,81$ ($p<0,01$). Tästä voidaan päätellä, että koulussa tapahtunut arviointi on ennakoinut melko hyvin menestymistä matematiikan ylioppilaskirjoituksissa. Mielenkiintoisia ryhmiä tutkijan kannalta ovat ne, jotka koulussa menestyvät matematiikassa heikosti, mutta kirjoituksissa hyvin, sekä vastaavasti ne, jotka menestyvät koulussa hyvin, mutta kirjoituksissa heikosti.



KUVIO 7.2: Nelikentän tutkittavat Tervakosken opiskelijaryhmät R1, R2, R3, R3' ja R4 sekä niiden koot.

Nelikenttä muodostuu siten, että päättötodistusarvosanojen aritmeettinen keskiarvo $(7,6)$ ja ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan kokeen yhteispisteiden aritmeettinen keskiarvo $(26,7)$ määräävät nelikentän jakoviivat. Kuviossa 7.1 on esitetty kaikkien tarkasteltavien (n=103) lukuparien (PTOD, PIST) sijoittuminen nelikenttään.

Kuviossa 7.2 on merkitty nelikentän ryhmät. Näistä ryhmän R3 alaryhmä R3' on huomion arvoinen pitkän matematiikan opiskelijoilla. Siinä näkyvät opiskelijat, joiden päättötodistuksen arvosanat ovat joko 6 tai 7, mutta he ovat saaneet ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan kokeessa korkeintaan 12 pistettä, mikä vastaa kahden tehtävän enimmäispistemäärää. He ovat suorittaneet 11–15 kurssia matematiikan opintoja, mikä on suurin kurssimäärä yksittäistä oppiainetta Tervakosken lukiossa[20].

Seuraavassa tarkastelen kutakin neljää pääryhmää erikseen ja kuvailen, minkä tyyppisiä opiskelijoita niihin kuuluu (kuvio 7.2). Lisäksi analysoin niitä syitä, jotka selittävät opiskelijoiden sijoittumista eri ryhmiin. Tarkastelen samalla nelikentän ryhmiä myös jaoteltuna sukupuolen, opetussuunnitelman ja matematiikan kirjoitusten pakollisuuden suhteen. Liitteessä 7 ovat nelikentät edellä esitettyjen jakojen suhteen esitettynä (kuviot 9.12, 9.13 ja 9.14). Analyysien perustana on se, että olen opettanut jokaista opiskelijaa vähintään 11 kurssin verran (vähintään $2,5$ vuotta) ja minulla on käytettävissäni heistä monenlaisia taustatietoja: oppilastietolomakkeet, perhetausta, kollegojen arviot niin lukiosta kuin yläasteeltakin, omat muistiinpanot, keskustelut opiskelijoiden kanssa jne. Kävin vanhempainilloissa, jolloin keskustelin lukiolaisten huoltajien kanssa mahdollisista opiskelijan ongelmista. Keskustelin lukuvuoden alussa yläasteen matematiikan opettajien (kolme lehtoria) kanssa lukion pitkän matematiikan aloittavien opiskelijoiden aikaisemmista matematiikan opinnoista ja opiskelutottumuksista. Keskustelin kaikkien opiskelijoiden kanssa jossain vaiheessa kurssia heidän näkemyksistään omasta opiskelustaan. Toisinaan he tekivät myös kirjallisia itsearviointeja.

Ryhmä R1

Ryhmän R1 jäsenten menestyminen ylioppilaskirjoituksissa on ollut opintomenestyksen ennustama. Hyvät tulokset lukio-opinnoissa ovat toteutuneet myös valtakunnallisessa kokeessa. Tähän ryhmään kuuluu 44 opiskelijaa, mikä vastaa 43 % tutkittavista opiskelijoista. Poikia on 29 (42 % pojista) ja tyttöjä 15 (44 % tytöistä), joten molemmat sukupuolet ovat tässä opettajan kannalta mieluisassa ryhmässä suunnilleen yhtä vahvasti edustettuina. Pakollisena matematiikan kirjoitti 36 (51 % pakollisena kirjoittavista) ja ylimääräisenä 8 (25 % ylimääräisenä kirjoittavista) opiskelijaa eli suurin osa pakollisena kirjoittavista on tässä ryhmässä. Vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelevia on 24 (47 % vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleista) ja 20 (38 % uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleista), joten ero opetussuunnitelmien välillä ei ole merkittävä tässä ryhmässä.

Näiden jakojen (pojat/tytöt, vanha opetussuunnitelma/uusi opetussuunnitelma, pakollisena/ylimääräisenä kirjoittaneet) tarkastelu prosenttiosuuksina ei tuo esille merkittävää eroa muun kuin pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien välillä (liite 7). Tämän selittää se, että hyvin menestyvät valitsevat matematiikan useammin pakolliseksi kuin heikommin menestyvät, jotka varmistavat ylioppilaaksi pääsynsä valitsemalla matematiikan usein ylimääräiseksi.

[20] Myös useimmissa muissa Suomen lukioissa.

TAULUKKO 7.7: Ryhmän R2 ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan kokeen (YOPI) ja preliminäärin (PRE) pisteet, pitkän matematiikan arvosana (YOAR) ja matematiikan eri osa-alueiden (YHT, GEO, DIF, TNLU ja KER) kurssien keskiarvot.

YOPI	YOAR	PRE	KER	YHT	GEO	DIF	TNLU
29	C	29	7	7,0	7,0	7,3	8,0
32	M	25	7	5,5	5,8	5,0	6,0
36	M	36	8	7,5	7,0	7,0	8,0
32	C	26	7	8,0	7,5	7,3	6,0
29	C	29	7	7,0	6,5	5,7	6,0
35	M	38	8	8,0	7,5	7,7	7,0
33	M	32	8	6,5	7,3	7,0	7,0
27	C	32	7	7,5	7,5	6,7	8,0

Ryhmän opiskelijat olivat pääsääntöisesti tunnollisia kotitehtävien suorittajia ja osallistuivat aktiivisesti opetuskeskusteluun sekä olivat halukkaita selvittämään ongelmakohdat välittömästi niiden ilmettyä joko kysymällä opettajalta tai keskenään keskustelemalla tai itsenäisesti tutkimalla erilaisia lähteitä. Heidän opiskelutottumuksensa olivat siis sellaiset, joihin koulu ohjaa ja kannustaa. Useilla heistä oli jatko-opintosuunnitelmia, joiden toteutuminen edellytti pitkän matematiikan tietoja ja taitoja. Tämä osaltaan motivoi heitä matematiikan opiskeluun. Ryhmässä R1 kaikilla oli hyvä proseduraalisen tiedon hallinta ja suurella osalla myös konseptuaalisen tiedon sekä strategiatiedon hallinta.

Tämän ryhmän matemaattinen osaaminen on odotusten mukaista ja on yltänyt opetussuunnitelman tavoitteiden suuntaisesti ylimmille kognitiivisille tasoille.

Ryhmä R2

Ryhmän R2 opiskelijat eivät ole osoittaneet lukio-opinnoissa mainittavasti menestystä. Tähän ryhmään kuuluu kahdeksan opiskelijaa eli 7,8 % tutkittavista opiskelijoista. Kaikki ryhmän jäsenet ovat poikia. Jokainen heistä on kirjoittanut matematiikan pakollisena, vaikka kaksi heistä olisi voinut kirjoittaa pitkän matematiikan ylimääräisenäkin[21]. He ovat kaikki opiskelleet vanhan opetussuunnitelman mukaisesti.

Taulukossa 7.7 on huomioitava, että pitkän matematiikan ylioppilaskirjoi-

[21] He ovat kirjoittaneet vuonna 1996 tai sen jälkeen.

tusten kannalta keskeisiä matematiikan osa-alueita ovat GEO ja DIF, sillä yleensä suurin osa ylioppilaskirjoitusten tehtävien ratkaisuista vaatii näiden osa-alueiden hallintaa. Useimmilla ryhmän R2 jäsenillä preliminäärit ovat olleet hyvä ennustaja menestykselle kirjoituksissa. Suurin osa tästä ryhmästä on saanut paremman arvosanan kuin kokonaismenestys olisi ennustanut. Joukossa on opiskelija, jonka suoritukset olivat alussa keskimäärin alle arvosanan 6 luokkaa. Kuitenkin opintojen loppuvaiheessa hän sai kertauskurssista arvosanaksi 7, preliminääreistä 25 ja kirjoituksista 32 pistettä, joka on ollut arvosanana M. Hän kuuluu seuraavassa alaluvussa olevien haastateltavien joukkoon.

Arvioitaessa taustalla olevia syitä kyseiseen ilmiöön opettajan näkökulmasta voidaan ottaa esille seuraavia näkökulmia: opiskelijan opiskelutottumukset matematiikassa, jatko-opintotavoitteiden selkiytyminen, oppisisältöjen jäsentyminen ja sulautuminen opiskelijan tietorakenteeseen sekä sairaudet, murrosikä ja sosiaaliset ongelmat.

Neljällä opiskelijalla arvioin kyseessä olevan puutteelliset opiskelutottumukset. Nämä pojat olivat tottuneet yläasteella suoriutumaan matematiikan opinnoista tuntityöskentelyllä; kotitehtävien tekeminen tapahtui nopeasti tuntitehtävien mallin mukaan. Oppikirjan teorian ja esimerkkien tutkiskelu kotona eivät olleet tarpeen hyvään menestykseen matematiikassa. ”Matikkapäällä” he pärjäsivät kaikissa tilanteissa eivätkä tarvinneet ylimääräisiä ponnisteluja kotona. Yläasteella lisäksi käsiteltiin samoja matematiikan asiakokonaisuuksia pidempiä aikoja kuin lukiossa. Näillä opiskelutottumuksilla teorian hallinta ja soveltaminen on lukio-opinnoissa hyvin nopeasti erittäin hankalaa. Matemaattinen ajattelukyky auttaa toki monissa kohdissa suoriutumaan hyväksyttävästi, mutta asiat eivät jäsenny eikä niitä opita sillä tasolla kuin pitkän matematiikan kumulatiivinen rakenne edellyttäisi. Heidän proseduraalinen sujuvuus on muun muassa vähäisen harjoittelun vuoksi puutteellisia, mikä osaltaan estää konseptuaalisen tiedon kehittymistä. Heillä on kuitenkin strategista kompetenssia ja mukautuvaa päättelyä, sillä he saattavat soveltaa luovasti osaamiaan strategioita kerta toisensa jälkeen uusiin tilanteisiin menestyksekkäästi. Nämä opiskelijat ovat alisuoriutujia potentiaalisiin kykyihinsä nähden lukio-opintojensa ajan. Lukion loppuvaiheessa tapahtuva herääminen opiskeluun on koitunut näiden opiskelijoiden onneksi, sillä heidän matemaattisen ajattelunsa taso on tullut ainakin osittain arvioiduksi oikein. Jatko-opintotavoitteiden selkiytyminen on omalta osaltaan ollut vaikuttamassa näiden opiskelijoiden opiskeluponnistelujen heräämiseen. Erityisen huomion arvoista on se itseopiskelun ja kertauskurssin tukema työ, jolla opiskelija on muutamissa kuukausien aikana omaksunut niitä matematiikan sisältöalueita, joissa hänellä oli ongelmia ja jotka siten myös tuottivat hänelle ”vaikean asian”-mielikuvan.

Kahdella opiskelijalla oli näkyvissä oppisisältöjen ymmärtäminen ja sulautuminen tietorakenteeseen vasta lukio-opintojen loppuvaiheessa. He tekivät tunnollisesti töitä kaikissa kursseissa, mutta asiakokonaisuudet eivät jäsentyneet heille. Siten tulokset kokeissa ja tuntityöskentelyssä olivat vaatimattomia. Kokeiden pistejakaumissa tämä näkyi alkupään tehtävien hallintana, mutta vaativimmista tehtävistä he saivat vain osapisteitä. Vasta kertausvaiheessa asiasisällöt aukenivat heille ja käsitteiden suhteet toisiinsa hahmottuivat. Heillä oli hyvä proseduraalinen sujuvuus, mutta käsitteellisen ymmärtämisen kehittyminen oli syystä tai toisesta viivästynyt. Strategiatiedot eivät olleet myöskään heidän hallinnassaan. Kokonaisuuksien tutkimisen myötä kertauskurssissa yksityiskohdatkin alkoivat selkiintyä ja jäsentyä. Tunnollinen työnteko ei mennyt hukkaan, sillä useimmat oppisisällöt olivat muistissa, mutta niiden merkitys oli ennen kertausvaihetta epäselvä. Matemaattinen osaaminen nousi näillä opiskelijoilla loppuvaiheessa korkeammalle tasolle, kuin opintojen alussa näytti, kun he saivat vain riittävästi aikaa asioiden käsittelyyn, jäsentelyyn ja niiden sulauttamiseen tietorakenteeseensa. Kurssien tahti oli ollut heille liian nopea, jotta he olisivat ehtineet kursseilla ymmärtää syvällisesti opiskeltua käsitteistöä.

Kahdella opiskelijalla syynä heikkoon menestykseen olivat lukioaikana koetut sairaudet ja sosiaaliset ongelmat. Kun he pääsivät näiden ongelmien yli, he saavuttivat vähintään sen matemaattisen osaamisen tason, mikä heille oli peruskoulun opintojen pohjalta ennustettavissakin.

Ryhmä R3

Myös ryhmään R3 kuuluvien opiskelijoiden menestys ylioppilaskirjoituksissa on ollut suurin piirtein lukion opintomenestyksen ennustama. Täällä on kuitenkin syntynyt huomattavan suuri ryhmittymä sellaisia opiskelijoita, joilla on päättötodistuksessaan arvosana 6 tai 7, mutta heidän yhteispistemääränsä ylioppilaskirjoituksissa on jäänyt 12 pisteeseen tai sen alle. Tätä ryhmää merkitsen jatkossa R3':lla ja tarkastelen sitä yksityiskohtaisesti jäljempänä.

Ryhmään R3 kuuluu 40 opiskelijaa, mikä vastaa 39 % tutkittavista opiskelijoista. Ryhmässä on tyttöjä 16 (47 % tytöistä) ja poikia on 24 (35 % pojista). Lähes puolet kaikista tytöistä siis kuuluu tähän ryhmään. Pakollisena pitkän matematiikan heistä kirjoitti 18 opiskelijaa (25 % pakollisena kirjoittavista) ja ylimääräisenä 22 opiskelijaa (69 % ylimääräisenä kirjoittavista), joten suurin osa ylimääräisenä kirjoittavista kuuluu juuri tähän ryhmään. Vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleita on 17 (33 % vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleista) ja uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleita on 23 (44 % uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleista).

Ryhmän R3 opiskelijoiden opiskelutottumukset olivat vaihtelevia. Osa heistä laiminlöi kotitehtäviä ja valitsi ”sivustakatsojan” roolin, vaikka olisi voinut niin halutessaan ottaa osaa menestyksekkäästi opetuskeskusteluun. Heillä ei useinkaan ollut selviä jatko-opintosuunnitelmia, mutta he kokivat, että pitkän matematiikan suorittamisesta saattaa olla heille jatkossa hyötyä. Jo pelkästään pitkän matematiikan kurssien suorittaminen hyväksytysti ilman menestystä ylioppilaskirjoituksissa oli osalle näistä opiskelijoista riittävää. Osa opiskelijoista yritti useimmiten tehdä kotitehtävänsä ja osallistua tuntityöskentelyyn, mutta opittavien asioiden jäsentymättömyys heidän tietorakenteessaan ja usein heikot perusvalmiudet peruskoulun matematiikan opinnoista olivat esteenä tehtävien ratkaisemiselle. Lukio-opintojen huomattavasti kiivaampi tempo ja suuri uusien opittavien tietojen ja taitojen määrä verrattuna peruskoulun matematiikan opiskeluun toi vaikeuksia osalle opiskelijoista, mikä selittää heidän kuulumisensa tähän ryhmään. Ongelmat kasautuivat vuosien kuluessa tämän tyyppisissä kumulatiivisissa oppiaineissa, joten ennuste ylioppilaskirjoitusten mittaamien kokonaisuuksien hallinnasta ja kypsyydestä matematiikan tiedoissa sekä taidoissa oli huono. Opiskelijoilla oli kohtuullinen tai heikko proseduraalinen sujuvuus. Heille ei ollut juurikaan muodostunut käsitteellistä ymmärrystä matematiikan eri osa-alueista, ja ongelmanratkaisussa tarvittavat strategiset kompetenssit ja mukautuva päättely olivat hyvin puutteellisia.

Tutkijan kannalta mielenkiintoinen on osaryhmä R3’, johon kuuluu 19 opiskelijaa (18 % tutkittavista opiskelijoista). Heistä tyttöjä on 11 (32 % kaikista tytöistä) ja poikia 8 (12 % kaikista pojista), joten noin kolmannes tytöistä kuului tähän joukkoon. Pakollisena pitkän matematiikan heistä kirjoitti 6 (8 % kaikista pakollisena kirjoittaneista) ja ylimääräisenä 13 (39 % ylimääräisenä kirjoittaneista) eli noin kaksikolmasosaa tämän ryhmän jäsenistä kirjoitti matematiikan ylimääräisenä. Vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleita heistä oli 7 (14 % vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleista) ja uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleita 12 (23 % uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleista). Tämä ryhmä on muodostunut siis suurimmaksi osaksi vuoden 1996 jälkeen, jolloin matematiikan saattoi kirjoittaa ylimääräisenä.

Kuviossa 7.1 esitetyn regressioyhtälön antama ennuste tässä aineistossa olisi päättötodistuksen arvosanalle 7 noin 21 pistettä ja arvosanalle 6 noin 12 pistettä. Viimeksi mainittu pistemäärä vastaa kahden oikein suoritetun tehtävän antamaa yhteispistemäärää maksimipistemäärän ollessa 60 pistettä. Koearvosanaan 6 vaaditaan kokeessa yli kolmasosa maksimipistemäärästä (36). Nämä opiskelijat ovat suorittaneet 11–15 kurssia pitkää matematiikkaa ja voisi olettaa heidän hallitsevan perusasiat, joiden hallinta riittää ylioppilaskokeessa hyväksyttävään suoritukseen, mutta näin ei ole käynyt.

Useilla vuoden 1996 ja sen jälkeen kirjoittaneilla opiskelijoilla syynä menestymättömyyteen ylioppilaskirjoituksissa oli se, että he olivat valinneet reaalin pakolliseksi kirjoitettavaksi aineeksi. He arvelivat, että he saavat reaalikokeen varmemmin hyväksytysti suoritetuksi ja voivat saada omalla työpanoksellaan paremman arvosanan kuin pitkän matematiikan kokeessa. Ylimääräiseen matematiikkaan valmistautuminen oli ollut heille toissijaista. He menivät matematiikan kokeeseen lähes valmistautumatta. Tällöin matematiikan asiakokonaisuudet ovat opiskelijalla hahmottumatta, sillä hänen tietonsa ja taitonsa ovat pysyneet erillisinä ja jäsentymättöminä. Heillä ei useinkaan ole selvillä spesifin matemaattisen proseduraalisen tiedon käyttöön ja soveltamiseen liittyvät ehdot. Kokeissa taulukkokirja ja graafinen laskin eivät ole näille opiskelijoille apuvälineitä vaan pääasialliset tiedon lähteet, joista etsitään johonkin ratkaisuun johtavia ”oljenkorsia”[22]. Heidän proseduraalinen tietonsa on kontekstisidonnaista. Matematiikan käsitteellinen ymmärtäminen on heikkoa. Lisäksi heillä on suuria puutteita strategisessa kompetenssissa ja mukautuvassa päättelyssä.

Ryhmän R3' useimmat opiskelijat ovat ylioppilaskokeessa siinä mielessä alisuoriutujia, että heillä olisi ollut mahdollisuudet huomattavasti parempaan pistemäärään, jos he olisivat valmistautuneet kirjoituksiin niiden edellyttämällä tavalla. He ovat tehneet suuren työn opiskellessaan vähintään 11 yksittäistä kurssia ja ovat osoittaneet kussakin kurssissa kohtalaista tai tyydyttävää hallintaa, mutta opintojen loppuvaiheeseen kuuluvan asiakokonaisuuksien kertaus- ja jäsentämistyön he laiminlyövät. Tällöin heidän kursseihin sijoittamansa opiskelupanos valuu hukkaan, kun opiskelun viimeinen kokoava ja syventävä vaihe jää lähes tekemättä. Koulun ja viime kädessä yhteiskunnan tarjoama opetus ei tuota sitä tulosta, mitä siltä voitaisiin odottaa.

Matemaattisen osaamisen lopullinen taso jää vaatimattomaksi alimpien tasojen asteelle, vaikka yksittäisten kurssien ja siten eri osa-alueiden hallinta ennustaisi korkeampaa tasoa. Kapeilla osa-alueilla osoitetut ylimpien tasojen mukaiset suoritukset eivät siirry koko lukiomatematiikan tietojen ja taitojen hallinnaksi ainakaan tässä vaiheessa, koska opiskelun viimeinen vaihe jää keskeneräiseksi. On toki mahdollista, että esimerkiksi jatko-opintojen kuluessa tämä päättövaihe matemaattisen osaamisen kehityksessä saatetaan siihen vaiheeseen, mihin lukion päättövaiheessa jo pyritään.

Ryhmä R4

Ryhmän R4 opiskelijat ovat menestyneet koulun matematiikan kursseissa hyvin, mutta menestys ylioppilaskirjoituksissa on ollut odotuksiin nähden

[22] Vrt. Välijärvi 1997 s. 9.

heikko. Tähän ryhmään kuuluu 11 opiskelijaa eli 11 % tutkittavista opiskelijoista. Poikia on kahdeksan (12 % pojista) ja tyttöjä kolme (9 % tytöistä), joten molempien sukupuolten edustus on suhteellisesti samaa luokkaa. Pakollisena matematiikan kirjoitti 9 opiskelijaa (13 % pakollisena kirjoittaneista) ja ylimääräisenä kaksi opiskelijaa (6 % ylimääräisenä kirjoittaneista). Heikko menestys kirjoituksissa ei siis johdu tämän ryhmän opiskelijoiden suurimmalla osalla ainakaan vähäisestä yrittämisestä tai muista ylimääräisenä kirjoitettavan aineen ominaispiirteistä. Vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleita tässä ryhmässä oli kolme (6 % vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleista) ja uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleita oli kahdeksan (15 % uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleista). Tähän ryhmään kuuluvat ovat kirjoittaneet lähinnä 1990-luvun loppupuolella. Kaikilla tämän ryhmän opiskelijoilla oli päättötodistuksessa matematiikan arvosanana 8.

TAULUKKO 7.8: Ryhmän R4 opiskelijoiden ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan kokeen (YOPI) ja preliminäärin (PRE) pisteet, pitkän matematiikan arvosana (YOAR) ja matematiikan eri osa-alueiden (YHT, GEO, DIF, TNLU ja KER) kurssien keskiarvot.

YOPI	YOAR	PRE	KER	YHT	GEO	DIF	TNLU
15	B	30	7	9,0	7,5	7,7	6,0
26	C	43	9	8,0	7,8	8,0	8,0
25	B	25	7	8,0	7,5	7,7	7,0
23	C	17	8	7,5	8,0	8,0	8,0
25	C	23	8	8,5	9,0	8,0	8,0
17	B	20	7	9,0	8,3	8,3	8,0
24	C	21	8	8,5	7,0	8,3	7,5
13	A	19	7	8,0	8,0	7,7	7,5
27	C	23	7	7,5	8,0	8,0	8,5
19	B	21	8	8,0	8,0	7,0	7,5

Useimmat ryhmän R4 opiskelijat olivat menestyneet hyvin[23] yksittäisissä tietyn rajatun osa-alueen kursseissa (taulukko 7.8). Menestys on ollut kuitenkin odotettua heikompi kertauskurssissa ja preliminääreissä, joissa vaaditaan kokonaisuuksien hallintaa. Mainituissa kokeissa menestymiseen tarvitaan kykyä analysoida tehtävän sisältöä ja rakennetta siinä mielessä, että löytää minkä matematiikan osa-alueen tiedot ja taidot johtavat ratkaisuun. Tämän ryhmän yhdeksällä opiskelijalla matemaattisen osaamisen taso kohoaa ylimmille

[23]Matematiikan eri osa-alueiden osaamisparametrit olivat 8–9.

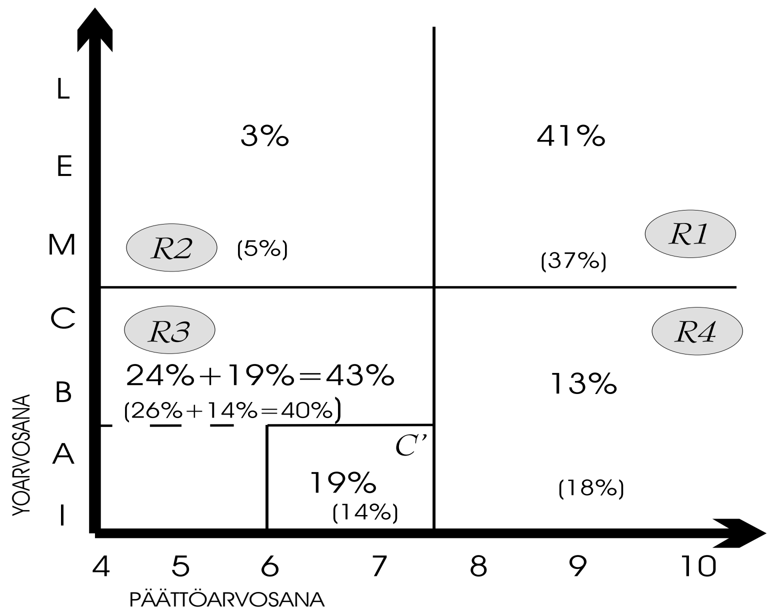
tasoille rajatussa etukäteen tunnetussa matematiikan osa-alueessa. Tällöin tarvittava käsitteistö ja menetelmät ovat ennalta opiskelijan tiedossa ja hän tietää, että niiden käyttöä odotetaan häneltä tehtävien ratkaisuun. Ryhmän R4 opiskelijat osoittavat hyvää tai kiitettävää tietojen ja taitojen hallintaa sekä kykyä soveltaa niitä ratkaisuprosessissa. Toisin sanoen näyttäisi, että heille matemaattisen osaamisen piirteet ovat kehittyneet hyvin. Kuitenkin ratkaistessaan ylioppilaskirjoitusten kaltaisia sekalaisia tehtäviä[24] he joutuvat ensin arvioimaan, mitä käsitteitä ja prosesseja he tarvitsevat. Tämä taito näyttää olevan heillä hyvin puutteellinen. Tieto ja sen soveltaminen on heillä rajattu vahvasti matematiikan osa-alueeseen. Konseptuaalinen tieto on rajoittunutta eikä käsitteiden ymmärtämisen aste ole niin korkea kuin ennalta voisi olettaa. Tilanne vielä kärjistyy, kun opiskelija valitsee pitkän matematiikan ylimääräiseksi kirjoitettavaksi aineeksi. Tämän valinnan seurauksena matematiikan opiskelun loppuvaiheen tietojen sekä taitojen jäsentäminen ja kokonaisuuksien löytäminen jää entistä vähemmälle. Konseptuaalinen tieto ei pääse linkittymään yli matematiikan eri osa-alueiden eikä käsitteiden ymmärtämisen aste pääse kasvamaan. Kirjoitusten tulos jää hyvin vaatimattomaksi ennakko-odotuksiin nähden. Taito löytää tarkoituksenmukaiset käsitteet ja prosessit ratkaista matematiikan osa-alueeltaan tuntematon tehtävä on kehitettävissä. Tämän taidon harjoittelu alkaa useimmissa lukioissa vasta viimeisenä opiskeluvuonna, jolloin ongelmat siinä voivat vaikuttaa muun muassa matematiikan pakollisuuden valintaan.

Osa opiskelijoista on koejännittäjiä, mikä korostuu ylioppilaskirjoitusten kaltaisissa isoissa ja lähes ainutkertaisissa koetilanteissa. Tällaiset opiskelijat ovat selvästi alisuoriutujia, sillä jännitystila on este todellisten tietojen ja taitojen esille saamiseen. Menestyminen preliminääreissä ja kertauskursseissa, jotka suoritetaan turvallisen tuntuisissa koetilanteissa, ei ennusta heillä menestymistä kirjoituksissa.

Ryhmässä R4 matemaattisen osaamisen voidaan nähdä nousevan korkeimmille tasoille, mutta vain rajatuissa olosuhteissa. Opiskelijoilta puuttuu taito analysoida tehtävän matemaattinen konteksti, mikä estää tehtävän ratkaisuprosessin alkuun pääsyn. Tämän taidon voidaan ajatella kuuluvan osana taksonomisessa luokituksessa analysointitasoon, mutta toisaalta tehtävä voi olla itse asiassa vain ymmärtämis- tai soveltamistason prosesseja vaativa, ja siten mainitun taidon heikkous estää koko ratkaisuprosessin alkamisen. Konseptuaalinen tieto on rajoittunut matematiikan osa-alueen keskeisiin sisältöihin. Tässä yhteydessä voidaan ajatella, että matemaattisen ajattelun tasot toimivat kullakin matematiikan osa-alueella hierarkkisesti ja melko itsenäisesti. Taito tunnistaa tehtävästä, mistä matematiikan osa-alueesta sen

[24] Tehtävistä ei tiedetä etukäteen, mihin matematiikan osa-alueeseen kukin niistä kuuluu.

ratkaisuprosessit löytyvät, on oma keskeinen matemaattisen osaamisen alue – eräänlainen metataito.



KUVIO 7.3: Tervakosken opiskelijoiden (N=103) sijoittuminen nelikenttään ja suluissa valtakunnan kaikkien pitkän matematiikan keväällä kirjoittaneiden opiskelijoiden sijoittuminen nelikenttään vuosilta 1991–1993, 1995–1999 (N=89804).

Verrattaessa Tervakosken opiskelijoiden ja valtakunnan kaikkien lukioiden opiskelijoiden sijoittumista nelikenttään[25] Tervakosken opiskelijoiden suhteelliset osuudet muuttuvat hieman verrattuna kuvioon 7.2, sillä y-akselille tulee pistemäärän tilalle arvosana (kuvio 7.3). Huomion arvoista vertailussa on, että Tervakosken opiskelijoita oli 103 ja valtakunnallisessa aineistossa on noin 90000 opiskelijaa, jolloin jo yhdenkin opiskelijan määrän muutos Tervakosken aineistossa aiheuttaa noin prosenttiyksikön suuruisen muutoksen. Sekä Tervakosken että valtakunnan ryhmien prosenttiosuudet ovat likipitäen samaa luokkaa. Lisäksi tutkijan kannalta on mielenkiintoista havaita, että keskeisimpien ryhmien R2, R3' ja R4 prosenttiosuuksien summa on lähes sama. Valtakunnallisessa aineistossa summa on 37 % ja Tervakosken aineistossa 35 %. Ryhmien R3' ja R4 prosenttiosuuksien eroa Tervakosken ja valtakunnallisen aineiston välillä selittää osaltaan se, että kurssiarvosteluni on ollut suhteellisesti tiukempaa kuin valtakunnallisesti keskimäärin, jolloin valtakun-

[25]Ks. kuvio 6.9 s. 131.

nallisesti saman tyyppisellä arvioinnilla kuin minulla ryhmän R3' osuus olisi suurempi kuin nyt on. Korrelaatiotarkastelu tukee tätä näkemystä, sillä valtakunnallisen aineiston korrelaatio on alle 0,7 ja Tervakosken aineistossa yli 0,8.

7.3.3 Eräiden Tervakosken lukion opiskelijoiden näkemyksiä pitkän matematiikan opiskelusta

Edellä on kuvattu Tervakosken lukion opiskelijoiden sijoittumista nelikentän ryhmiin. Nelikentän akselit edustavat ylioppilastutkintotulosten kautta valtakunnallista näkökulmaa ja päättötodistuksen arvosanoissa tulee koulun näkökulma. Nelikentän piste on opiskelija, jolla on oma näkemys omasta matemaattisesta ajattelustaan. Tämä näkemys on otettava huomioon arvioitaessa opiskelijan matemaattista osaamista monipuolisesti. Tämän vuoksi olen haastatellut kuutta Tervakosken lukion entistä opiskelijaa, joiden ylioppilaskirjoitusmenestys ei vastannut kurssimenestyksen mukaisia odotuksia. He edustavat nelikentän ryhmiä R2, R3' ja R4.

Haastattelut olivat puolistrukturoituja teemahaastatteluja. Teemana oli "lukion pitkän matematiikan opiskelusta Tervakosken lukiossa 1990-luvulla" ja haastattelurungossa oli neljä pitkää matematiikkaa käsittelevää alaotsikkoa: ennakkokäsitykset, opiskelu, ylioppilaskirjoitukset ja jatko-opinnot (liite 9). Nauhoitin haastattelut yhtä lukuun ottamatta; tämä haastattelu tapahtui sähköpostin välityksellä. Haastattelut suoritin syksyllä 2001. Tässä yhteydessä käsittelen aineistoa ainoastaan siltä osin, kuin se syventää kuvaa nelikentän ryhmien opiskelijoista. Valitut katkelmat ja niiden tulkinta eivät ole ristiriidassa opiskelijan muun haastatteluaineiston kanssa.

Haastateltavista viisi oli kirjoittanut ylioppilaaksi 1990-luvun loppupuolella, joten he olivat opiskelleet uusien opetussuunnitelmien mukaan ja heillä oli mahdollisuus valita pitkä matematiikka joko pakolliseksi tai ylimääräiseksi kirjoitettavaksi aineeksi (taulukko 7.9).

Puolet haastateltavista oli tyttöjä, ja puolet oli kirjoittanut pitkän matematiikan ylimääräisenä. Kaikki olivat kirjoittaneet pitkän matematiikan hyväksytysti ensimmäisellä kerralla.

TAULUKKO 7.9: Haastatteluun syksyllä 2001 osallistuneiden opiskelijoiden taustatietoja. Taulukkoon on merkitty haastateltavan koodi (Haast.), ylioppilaaksi kirjoitusvuosi(YoVuosi), valinta (Valinta) kirjoittaako pitkän matematiikan pakollisena (pak.) vai ylimääräisenä (ylim.), sukupuoli (Spuoli) ja nelikentän ryhmä (NRyhmä).

Haast.	YoVuosi	Valinta	Spuoli	NRyhmä
H1	1998	pak.	poika	R4
H2	1998	ylim.	tyttö	R3'
H3	1994	pak.	poika	R2
H4	1998	pak.	tyttö	R4
H5	1999	ylim.	poika	R4
H6	1999	ylim.	tyttö	R4

Ryhmä R2

Ryhmään R2 kuuluva opiskelija H3 on haastateltavista ainoa, joka on opiskellut vanhan opetussuunnitelman aikana. Hänelle matematiikan koe oli pakollinen ilman vaihtoehtoa. Koko lukioajan hän opiskeli matematiikkaa tunnollisesti, mutta kurssien aikana kaikki keskeiset asiat eivät tulleet selviksi. Hän jatkoi kuitenkin omaehtoista harjoittelua ratkaisemalla tehtäviä ja tutkimalla vanhoja muistiinpanoja.

Kysymykseen *"Mitkä tekijät vaikuttivat eniten sinun menestykseesi matematiikan opinnoissa?"* haastateltava vastasi (H3):

> *Lukeminen ja harjoittelu. Kun laski niitä laskuja uudestaan ja katto sieltä vanhoista vihoista kuinka se meni siellä.*

Koulussa ohjatun harjoittelun lisäksi haastateltava H3 laski ennen kirjoituksia *"pari kolme"* isoa A4:n kokoista vihkoa omaehtoisesti ja totesi edelleen *"Ei siinä paljon muuta ehtiny harjoitellakkaan"*. Opiskelijalle H3 kehittyi hyvä proseduraalinen sujuvuus pitkäjänteisen harjoittelun myötä ja samalla kehittyi käsitteellinen ymmärtäminen tehtävien uudelleen ajattelun myötä. Kirjoituksissa ahkeran harjoittelun tulos näkyikin (H3):

> *Mä koin alkupään tehtävät aika helpoiksi. Viis ensimmäistä meni ihan hyvin, kuudennenkin tehtävän mä vielä osasin. Ja siitä eteenpäin ei ollut enää minkäänlaista käsitystä.*

Tuloksena oli kaikista kuudesta tehtävästä täydet pisteet ja lopuista tehtävistä ei ollut jätetty yritystäkään. Opiskelija H3 ilmeisesti halusi ratkaista tehtäviä, joiden ratkaisumetodeista hän oli vakuuttunut, ja epävarmoja ratkaisuja hän ei halunnut näyttää lainkaan (H3):

> *Mä osasin kuusi ensimmäistä tehtävää ja mä tiesin että mä osasin!*

Ratkaisujen konstruointi yhä uudelleen tuttuihin tehtäviin syvensi vaiheittain opiskelijan ymmärtämystä epäselviksi jääneisiin matemaattisiin käsitteisiin ja hän kykeni käyttämään siirtovaikutusta uusiin tehtäviin. Opiskelijan H3 matemaattinen osaaminen kehittyi lukion loppuvaiheessa laaja-alaiseksi ja tiedot kehittyivät konseptuaalisiksi.

Ryhmä R3´

Tämän ryhmän R3 alaryhmän R3' opiskelijoilla lukiokurssit menivät kohtalaisesti tai tyydyttävästi, mutta pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista he saivat vähemmän kuin 13 pistettä. Haastateltava opiskelija H2 oli valinnut pitkän matematiikan sen avaamien jatko-opintomahdollisuuksien vuoksi (H2):

> *Mä en yhtään tienny mihin mä haen, niin mä aattelin että se on parempi ottaa se pitkä matikka, niin se ei ainakaan ole esteenä jos hakee jonnekin.*

Juuri edellä olleen tyyppisillä väitteillä peruskoulun yhdeksäsluokkalaisia houkuteltiin valitsemaan pitkä matematiikka ja siten nostaa pitkän matematiikan opiskelijoiden lukumäärää kohti LUMA-tavoitteita[26]. Pelkästään pitkän matematiikan kurssien suorittaminen hyväksytysti on jo tavoiteltava suoritus, sillä ylimääräisenä kirjoitettava matematiikka ei tuo välttämättä paineita kirjoittajalle (H2):

> *- - koska mä en oo koskaan ollut kovin hyvä matikassa, niin mä ajattelin, että jos käy huonosti, niin sit käykin tosi huonosti. - - Kyllä mä reaalista pääsen vaikka miten päin läpi.*

Tässä tulee esille opiskelijoiden mielikuva ylioppilaskirjoitusten reaalikokeen ylivertaisesta helppoudesta verrattuna pitkän matematiikan kokeeseen. Pakolliseen kokeeseen valmistautuminen on luonnollisesti huolellisempaa kuin ylimääräiseen kokeeseen (H2):

[26] 17000 pitkän matematiikan kirjoittajaa.

Kyllä mä sitä reaalia luin enemmän kuin matikkaa. - - Ei sen niin kauheesti väliä (miten matematiikan koe menee), kunhan reaali menee hyvin.

Haastateltava H2 koki, että matematiikan opiskelu oli hänelle vaativa ponnistus ja hänen käsityksensä itsestään matematiikan oppijana oli heikko (H2):

Mä olen ehkä huonompi mitä numero näytti.

Tosin tämä on tyypillistä muidenkin ryhmien tytöille. Tällaiselle opiskelijalle, joka joutuu käyttämään keskimääräistä enemmän aikaa matematiikan opiskeluun, lukion pitkän matematiikan kurssien tahti on liian tiukka (H2):

Kun mentiin niin älytöntä tahtia, niin tuntu välillä, ettei saanu sisäistettyä sitä edellistä asiaa kunnolla ku mentiin jo seuraavaan. Vähän ajan kuluttua se asia tuli taas uudestaan ja sit ei muistanu siitä juuri mitään.

Useille ryhmän R3 opiskelijoille etenemistahti kursseissa oli liian kova ja heillä tapahtui "kärryiltä putoamista". Tämä osaltaan on vaikuttanut heidän mielikuvaansa matematiikan vaikeudesta. Siksi useat tästä ryhmästä valitsevat pitkän matematiikan ylimääräiseksi, mikä ei auta epäselvien asioiden selvittämistä. Tieto ei pääse kehittymään konseptuaaliseksi.

Ryhmä R4

Ryhmän R4 opiskelijat olivat menestyneet hyvin kurssikokeissa (päättötodistuksen arvosana vähintään 8), mutta ylioppilaskokeessa heidän saamansa pistemäärä vastasi noin kahta tai kolmea oikein ratkaistua tehtävää (11–19 pistettä). Erääksi yhteiseksi selitykseksi haastatteluissa nousi oman työmäärän vähäisyys pitkän matematiikan opiskelussa, etenkin opintojen loppuvaiheessa. Tämä ei ollut kiinni välttämättä siitä, oliko matematiikan koe valittu pakolliseksi tai ylimääräiseksi (H1):

Mulla oli huono valmistautuminen. Mulla meni lukuloma (jääkiekko)kentällä. Edellisenä päivänä ennen matikan koetta avasin kertauskirjan ja katoin miten ne perusjutut menee. - - Olisi pitänyt edellinen viikko laskee, laskee - - Perusrutiini olisi tullut ja olisi tämmöiset helpot virheet jääny tai sit olis ainakin huomannu.

Työmäärän lisäksi työtavoissa oli haastateltavan pojan (H1) mukaan myös parannettavaa jälkikäteen arvioiden (H1):

> *Jos se (tehtävä) menee yli mun hilseen, niin en mä rupee sitä väkisin puurtamaan. - - Kun mä pystyin perustehtävät tekeen, niin se oli mulle ihan tarpeeksi. Nyt kun jälkeenpäin ajattelee, niin se olisi ollut ehkä parempi, että niitä soveltaviakin olisi yrittänyt ja sitten kysellyt ja väkisin pakertanut, mutta tota, en mä niin vakavasti ottanut tätä lukio-opiskelua, että mä olisin ihan neljän seinän sisällä koko ajan pakertanut.*

Edellä ollut katkelma kuvaa myös pojan (H1) opiskeluasennetta, jonka mukaan matematiikan opiskelu (eikä muukaan lukio-opiskelu) ollut kuitenkaan hänelle silloin tärkeimpien asioiden joukossa. Ajalle tyypillinen lyhytjänteisyys[27] ja "panos–tuotos" -ajattelu on löydettävissä haastateltavan (H1) kommentista. Tosin lähes kaikki – poika H1 mukaan lukien – pitivät itseään opiskelussa pitkäjänteisinä, mihin kuvaan saattaa vaikuttaa yleinen käsitys pitkän matematiikan opiskelussa vaadittavasta pitkäjänteisyydestä. Toisaalta vertailu ikätovereihin saa pitkän matematiikan opiskelijat näyttämään ainakin opiskelussaan[28] pitkäjänteisimmiltä.

Kyseinen poika luotti vahvasti taulukkokirjan ja graafisen laskimen tuomaan turvallisuuden tunteeseen. Hän koki, että niistä löytyy aina tarvittava apu itse koetilanteessa. Hän oli epäonnistunut ensimmäisellä yrityskerralla pyrkimisessään Teknilliseen korkeakouluun ja syyn hän näki seuraavasti (H1):

> *En päässyt, koska minun mielestäni pääsykokeet olivat vaikeat, koska siellä ei saanut käyttää taulukkokirjaa ja graafista laskinta.*

Taulukkokirjassa olevan runsaan kaavakokoelman merkitystä poika H1 kuvaa seuraavasti (H1):

> *Se (kaavojen opiskelu) olis mennyt sitten siihen "hauki on kala" -juttuun. Niitä olis sitten joutunut ihan älyttömästi joka kurssiin niitä perusasioita miettimään ja opetteleen ulkoon.*

Haastateltava poika H5 korosti työmäärän lisäksi työn laatua ja omaaloitteisen työn tekemisen merkitystä (H5):

[27] Vrt. Värri 2002.
[28] Useimmat opiskelijat ovat opiskelleet 15 kurssia pitkää matematiikkaa.

> *- - siellä (lukiossa) olis voinu tehdä hiukka enemmänkin vielä töitä, koska nyt jälkeenpäin ne asiat tuntuu huomattavasti selvemmiltä. - - että ite olis laskenu vielä enemmän kotona ja ois lukenu sitä tarkemmin - - ja olis oppinu ymmärtämään ne perusteet minkä takia ne asiat on näin eikä vain se että ne menee tällä tavalla. Se jäi omasta työpanoksesta kiinni se, mille tasolle jäätiin.*

Yhteinen piirre ryhmän R4 jäsenille oli, että he näkivät työmääränsä riittämättömäksi menestyäkseen pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa, joissa pitää hallita kokonaisuuksia. Työmäärä jäi vähäiseksi osalla opiskelijoista sen vuoksi, että he olivat valinneet pitkän matematiikan ylimääräiseksi kokeeksi (H6):

> *Syy miksi kirjoitukset (pitkän matematiikan osalta) menivät kuten menivät oli varmasti suurimmaksi osaksi siinä, että keskityin lähinnä reaalin lukemiseen. Luin toki matematiikkaakin, mutta koska tiesin sen heikommin hallituksi, siihen olisi ehkä pitänyt panostaa enemmän. Ehkä toisaalta tiesin, että koska se on minulle paljon vaikeampi kokonaisuus ja vaatisi todella enemmän töitä, jätin sen lukemisen tietoisesti/alitajuisesti vähemmälle.*

Tässä lainauksessa tulee esille kyseisen ryhmän opiskelijoiden ongelma hallita pitkää matematiikkaa "kokonaisuutena", mikä ilmeni kolmannen vuoden syksyllä harjoiteltaessa vanhoja ylioppilastehtäväsarjoja ja kertauskurssilla. Äskeinen haastateltava opiskelija jatkaa reflektointia ja pohtii (H6):

> *Ehkä sisäistin yksittäiset asiat paremmin kuin kokonaisuudet. Irrallisen tehtävän tekeminen, josta en tiennyt mihin tehtävä kuului ja kuinka sitä olisi pitänyt ruveta ratkaisemaan, oli hankalaa ja tuotti ongelmia. Matemaattinen ongelmanratkaisutaito ei ole koskaan ollut vahvimpia puoliani.*

Tässä tulee esiin hyvin opiskelijan H6 tiedon proseduraalinen luonne ja toisaalta hänen itse havaitsemansa käsitteellisen ymmärtämisen, strategisen kompetenssin ja mukautuvan päättelyn puutteellisuudet. Ryhmän R4 opiskelijat hallitsivat suppeita kurssikokonaisuuksia, mutta sekalaisista tehtäväsarjoista he eivät pystyneet useinkaan selvittämään, mihin matematiikan osa-alueeseen tehtävä kuuluu. Tosin he tulkitsivat sen harjoittelun puutteeksi. Pitkän matematiikan "yksittäiset asiat" ja "irralliset tehtävät" oli opittu kontekstisidonnaisina.

Tyttöjen huonompi kuva itsestään matematiikan osaajana kuin pojilla tulee esille tytön H4 toteamuksessa (H4):

> *Mä en oo koskaan kokenu että mä oon hyvä matikassa. - - No ehkä sellainen tietty kunnianhimo, että halus pärjätä niissä (kursseissa). Se oli sellainen, että asetti itselleen sellaiset tavoitteet, että halus oppia ja osata ne asiat ja pärjätä hyvin. Se ehkä oli sellainen. Ja sit se et oli tunnollinen ja ahkera ja teki niitten (kurssien) eteen töitä. Niin se on.*

Kyseinen opiskelija sai hyviä ja kiitettäviä arvosanoja pitkän matematiikan kokeista ja kursseista, koska hän omasta mielestään oli tehnyt tunnollisesti ja ahkerasti työtä, sillä omien sanojensa mukaan hänellä oli "tietty kunnianhimo". Opiskelijalla H4 oli kuitenkin opettajan näkökulmasta selvästi matemaattista kompetenssia suppeilla matematiikan osa-alueilla. Hän itse ei kuitenkaan ilmeisesti enää ollut varma matemaattisesta osaamisestaan, koska hän epäonnistui matematiikan kirjoituksissa. Niiden jälkeen tehdyssä haastattelussa hän ilmaisi pitävänsä hyviä kurssisuorituksiaan merkkinä pelkästä ahkerasta työnteosta. Hän kuitenkin valitsi pitkän matematiikan pakolliseksi kokeeksi, joten valintavaiheessa hän on luottanut osaamistasoonsa. Ilmeisesti ahkeralla ja tunnollisella työnteolla on kuitenkin tärkeä merkitys useimpien opiskelijoiden menestyksessä.

7.4 Mittarien ja tulosten arviointia

Osaamisparametrien määritys perustuu opiskelijoiden kurssiarvosanoihin ja osittain jo niistä laskettuihin keskiarvoihin. Nämä ovat pohjana nelikentän x-akselina olevalle matematiikan päättötodistuksen arvosanoille. Keskiarvojen vertailun pohjana ovat teoreettiset oletukset jakaumasta, jonka voidaan ajatella lähenevän normaalijakaumaa. Toisaalta jakaumaoletuksen merkitys vähenee jonkin verran käytännön johtopäätösten kannalta, kun otoskoot suurenevat (Helenius 1992, 320). Arvosanoja ja niiden johdannaisia vertailtaessa niitä käsitellään ikään kuin ne olisivat välimatka-asteikollisia, vaikka ne ovat lähempänä järjestysasteikkoa. Kuitenkin kasvatustieteissä tämä on muodostunut käytännöksi, vaikka sillä ei ole tilastotieteellistä teoriapohjaa (Erätuuli ym. 1994, 42–43).

Osaamisparametrien ja kognitiivisten tasojen vastaavuudessa lineaarinen muutos on voimakkaasti yksinkertaistettu malli, mutta mallin tulkinta ei korosta kognitiivisten tasojen välimatkoja, vaan enemmänkin tasojen ominaisuuksien määrän löytymistä parametriasteikon eri kohdilta. Osaamisparametrien jakaumista YHTA, GEO, DIF, PREL ja PIST noudattavat Kolmogorov-Smirnovin testin perusteella normaalijakaumaa (liite 5).

Olen tutkijana tehnyt kaikkien tutkimuksessa esiintyvien kurssiarvosanojen arviot yksin. Tällöin ovat vaarana systemaattiset arviointiin liittyvät virheet, jotka johtuvat arvioitsijasta. Mahdolliset halo-efektit esimerkiksi saattavat vääristää arviointia. Toisaalta kurssiarvosanojen perusteella määritellyt päättöarvosanat korreloivat tilastollisesti merkitsevästi (Spearman $r=0{,}81$; $p<0{,}001$) matematiikan ylioppilaskirjoitusten yhteispistemäärän kanssa. Täten voidaan otaksua, että molemmat ovat mitanneet samoja asioita ja niihin ovat vaikuttaneet samat virhelähteet. Kurssiarvosanojen arvioinnissa etuna on ollut, että arvioinnin kriteereitä on tulkittu vain yhden henkilön näkemysten perusteella, jolloin arviointi on siltä osalta yhdenmukaista. Osaamisparametrimatriisista laskettu Cronbachin α on 0,75, mikä tukee arviota riittävästä reliabiliteetista.

Osaamisparametrien tulokset ovat odotetun kaltaisia. Osaamisparametrien tulkinta matematiikan eri osa-alueilla osoittaa, että 1990-luvulla Tervakosken lukiossa opiskelijoiden matemaattinen osaaminen oli keskimäärin eri osa-alueilla seuraavaa: noin viidesosa oli LY-tasolla, noin puolet YS-tasolla ja noin kolmasosa SA-tasolla. Tulos on samansuuntainen kuin SIMS-tutkimuksessa. Tilastollisesti merkittävää eroa ei löydy osaamisparametreissa sukupuolten kesken. Sen sijaan vuosien 1985 ja 1994 opetussuunnitelmien mukaan toteutettua opetusta tarkasteltaessa löytyy tilastollisesti merkittävät erot preliminääreissä[29] ja pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten pistemäärissä[30]. Eron suurin selittäjä löytyy kuitenkin matematiikan valinnasta pakolliseksi tai ylimääräiseksi. Pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien kesken löytyy tilastollisesti merkitsevä ero[31] osaamisparametreissa ja siten matemaattisen osaamisen tasossa.

Nelikentän pohjana on kurssiarvosteluja ja ylioppilaslautakunnan arvosteluja, joita koskevat mainitut virhelähteet. Nelikenttämenetelmää kehitin ja käytin lisensiaatintutkimuksessani (Joutsenlahti 1996). Sen avulla löydetyt opiskelijaryhmät olivat tietyiltä ominaisuuksiltaan homogeenisia. Tämän vuoksi oli syytä olettaa, että samantyyppisiä ryhmiä kuin lyhyessä matematiikassa löytyisi myös pitkässä matematiikassa. Koska pitkän matematiikan kirjoittaminen ylimääräisenä tuli mahdolliseksi vuoden 1996 jälkeen: muodostui rakenteellinen yhtäläisyys lyhyen matematiikan kanssa. Nelikentän ryhmiin R2

[29] T-testi, $p<0{,}001$.
[30] T-testi, $p<0{,}01$.
[31] T-testi, $p<0{,}001$.

ja R4 tuli melko vähän opiskelijoita, mutta tarkastelin näitä ryhmiä lisäksi kvalitatiivisesti ja syvensin siten kvantitatiivisen aineiston tulkintaa ja ymmärrystä. Kvantitatiivisessa analyysissa saattavat tutkijan (opettajan) omat uskomukset tutkittavista opiskelijoista ja asenteet heihin tulla korostetusti esille ja siten antaa liian omaleimaisen tulkinnan aineistolle. Haastattelut tuovat esiin opiskelijoiden omaa näkemystä, tosin opettajan ja tutkijan tulkitsemana. On kuitenkin merkille pantavaa, että haastattelut tukivat kvantitatiivisen aineiston tulkintoja.

Nelikentästä löytämäni ryhmät olivat samankaltaisia kuin lyhyen matematiikan opiskelijoillakin (Joutsenlahti 1996) lukuun ottamatta ryhmää R3, josta löytyi uuden tyyppinen alaryhmä R3'. Tässä ryhmässä kohtalainen kurssimenestys ei tuonut menestystä ylioppilaskirjoituksissa; ristiriita päättötodistuksen matematiikan arvosanan ja ylioppilaskirjoitusten yhteispisteiden välillä vaatii aikaisemmasta tutkimuksesta poikkeavan selityksen. Tervakosken opiskelijoiden sijoittuminen nelikenttään ei poikkea merkitsevästi valtakunnallisesta aineistosta[32] (χ^2, p<0,001). Opettajan arviointiharha kurssikokeissa Tervakosken lukiossa ei ole ilmeinen, sillä aineistojen välillä on korkea korrelaatio[33].

7.5 Tutkimuksen tulokset koulun tasolla

Seuraavassa vastaan tutkimuksen 2. pääongelmaan ja sen ala-ongelmiin sen aineiston pohjalta, jossa lähtökohtana on koulun ja opettajan näkökulma tutkittavaan ongelmakenttään. Aineisto käsittää tilastollisin menetelmin ja haastatteluaineiston avulla tuotettua tietoa, jonka merkitystä annetun ongelman kohdalla tulkitaan tutkimuksen viitekehyksen perusteella sekä tutkijan opiskelijatuntemuksen ja opettajakokemuksen kautta. Alaongelmien vastauksissa käsittelen pääongelman tuloksia erilaisissa opiskelijaryhmissä.

II Minkälainen on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaaminen koulun tasolla lukio-opintojen päättyessä opettajan arvioimana 1990-luvulla?

Nelikenttätutkimus osoitti, että matemaattisen osaamisen arviointi rajattujen matematiikan osa-alueiden perusteella ei anna samanlaisia tuloksia kuin matemaattisen osaamisen arviointi kursseissa (kertauskurssi) ja kokeissa (preliminäärit ja ylioppilaskirjoitukset), joissa kunkin tehtävän matemaattista aihealuetta ei ole etukäteen sanottu[34]. Tämän vuoksi tarkastelen ensin

[32] kuvio 7.3 s. 163.
[33] Spearmannin korrelaatiokerroin r=0,81, p<0,001
[34] Taulukko 6.5 s. 125.

erikseen matematiikan osa-alueisiin sidottuja mittauksia pitkän matematiikan matemaattisen osaamisen tasosta.

Opiskelijoiden osaamisparametrit ovat olleet kaikilla matematiikan osa-alueilla YS-tasolla koko vuosikymmenen ajan[35]. Matemaattisen ajattelun prosessit ovat siis keskimäärin algoritmisen ajattelun ja yleistämisen tasolla. Taitonäkökulmasta tarkastellen opiskelijat hallitsevat opittujen asiasisältöjen yhteydet ja yhdistämisen ongelmanratkaisua varten keskimäärin (PISA2-taso) .

Suunnilleen 20 % opiskelijoista jää LY-tasolle[36]. Tyypillistä tämän tason opiskelijoille etukäteen tunnetulla matematiikan osa-alueella ovat vain rutiininomaisten tehtävien hallinta ja laskuteknisten taitojen kehittyminen, jolloin käytetty käsitteistö ei ole kovin monimutkaista (PISA1-taso). Nämä tehtävät ovat vielä pääsääntöisesti oppimateriaalin esimerkeistä rakenteellisesti tuttuja ja niiden osaamista on opetuksessa painotettu. Tehtävien eri osien muuntaminen muodosta toiseen tai menetelmien yleistäminen ei suju ongelmitta. Opiskelijan hallitsema matemaattinen tieto on lähinnä proseduraalista tietoa, sillä opiskelijalla ei juurikaan ole käsitteellistä ymmärtämistä. Ongelmanratkaisussa tarvittavat strateginen kompetenssi ja mukautuva päättely ovat puutteellisia. Matemaattisen ajattelun prosessit jäävät mieleenpalauttamisen ja tunnistamisen tasolle, joskin algoritmisen ajattelun hallinta tulee esille myös joissakin tehtäväratkaisuissa. Keskeisimmät käsitteet, periaatteet ja säännöt kultakin matematiikan sisältöalueelta – ainakin siinä vaiheessa kun niitä aktiivisesti käsitellään – on ymmärretty esitetyssä kontekstissa. Pitkässä matematiikassa opiskeltavat algoritmit ovat usein kompleksisia, joten niiden sujuva käyttö on jo sinänsä vaativa taito. Faktatiedon hallinta on useimmiten kohtuullista kaikilla sisältöalueilla. Opiskelijat ovat kaikilla matematiikan osa-alueilla suunnilleen samalla tasolla, joskin osaamisparametrit ovat muita heikommat DIF-, TNLU- ja KERT-kursseilla[37]. Vaikeudet DIF-kursseilla johtunevat kursseilla esiin tulevien käsitteiden kompleksisuudesta ja TNLU- sekä KERT-kursseilla taasen niiden sijoittumisesta opintojen loppuvaiheeseen, jolloin muun muassa valinta pitkän matematiikan kirjoittamisesta ylimääräisenä aineena on tehty ja siten motivaatio näiden kurssien täysipainoiseen opiskeluun kohdalla on huomattavasti vähentynyt. Osa tämän ryhmän opiskelijoista on ollut alisuoriutujia opinnoissaan, sillä esimerkiksi ylioppilaskirjoituksissa heidän tieto- ja taitotasonsa on osoittautunut ennustetta paremmaksi (nelikentän ryhmä R2).

Noin 50 % tarkasteltavista opiskelijoista on keskimäärin YS-tasolla mate-

[35] Taulukko 7.3 s. 149.
[36] Taulukko 7.2 s. 147.
[37] Taulukko 7.2 s. 147.

matiikan osa-alueisiin sidotussa tarkastelussa[38]. Tällä tasolla opiskelijat kykenevät seuraamaan ilman mainittavia ongelmia matemaattisia todisteluja. Lisäksi he pystyvät yhdistelemään mielekkäästi peräkkäin useita tehtävän ratkaisuun johtavia toimenpiteitä. Kuitenkin tehtävät, jotka ovat oppimateriaalia soveltavia, ovat useimmiten rakenteeltaan opiskelijoille tuttuja oppimateriaalin pohjalta ja siksi opitun asiasisällön transferi uusiin tilanteisiin on vähäistä. Itse oivallettujen ja kehiteltyjen ratkaisujen osuus on useimmiten vähäinen ratkaisuprosesseissa. Suurimmalla osalla YS-tason opiskelijoista (yli 80 %:lla) on hyvä proseduraalinen sujuvuus. Matemaattinen ajatteluprosessi on siis pääsääntöisesti algoritmista ajattelua ja opitun yleistäminen perustuu vahvasti rakenneyhtäläisyyksiin opitusta materiaalista. Jonkin verran opiskelijoilla on kuitenkin taitoa paloitella ongelmia osiin ja ratkoa näitä ala-ongelmia. Tällöin heillä on taitoa myös matematiikan eri sisältöalueiden yhdistelyyn suhteellisen yksinkertaisten soveltavien ongelmien yhteydessä. Heillä on käsitteellistä ymmärrystä ja jonkin verran strategista kompetenssia sekä mukautuvaa päättelykykyä. Opiskelijat hallitsevat monenlaisia esitysmuotoja (kuvallista, symbolista, sanallista) esittäessään ratkaisujaan tehtäviin, joiden ongelman muotoiluunkin heillä on ollut jonkin verran taitoa tällä tasolla. YS-tason opiskelijoista löytyy myös vähemmistö (alle 20 %), jolla on ongelmia proseduraalisessa sujuvuudessa, mutta heillä on käsitteellistä ymmärrystä ja strategista kompetenssia sekä mukautuvaa päättelykykyä. Tämä näkyy kokeissa algoritmien heikkona hallintana, joka estää näitä opiskelijoita saamasta yhtään tehtävää kokonaan korrektisti loppuun. Kuitenkin he ovat löytäneet vaativimmista tehtävistä ratkaisuideat, mutta eivät ole selviytyneet niissä tarvittavista laskualgoritmeista. Tarkasteltavalla YS-tasolla olevien opiskelijoiden osuus on kaikilla tutkittavilla matematiikan osa-alueilla suunnilleen sama[39]. Osa opiskelijoista, lähinnä ryhmä R3', ei menesty ylioppilaskirjoituksissa läheskään ennusteiden mukaisesti.

Korkeimmalla eli SA-tasolle yltää tietyllä matematiikan osa-alueella keskimäärin 30 % opiskelijoista[40]. Tällä tasolla opiskelijan ajattelu on sujuvan algoritmisen ajattelun lisäksi reflektoivaa, ja avoin ratkaisumallien etsiminen on tyypillistä ongelmanratkaisuprosesseissa. Opiskelijalla ovat kaikki matemaattisen osaamisen piirteet kehittyneet hyvin. Opiskelijoille on ominaista luovuus ja he kykenevät siirtämään ennakkoluulottomasti sekä oppimiaan tietojaan ja taitojaan uusille sisältöalueille että sen jälkeen tarkastelemaan kriittisesti ratkaisuprosessiaan (PISA3-taso). Ongelmien matematisointi, matemaattisten todistusten konstruointi ja kriittinen tarkastelu ovat tämän ta-

[38] Taulukko 7.2 s. 147.
[39] Taulukko 7.2 s. 147.
[40] Taulukko 7.2 s. 147.

son korkeatasoisimpia taitoja. Vain pieni osa opiskelijoista yltää lähelle puhdasta analysoinnin tasoa. Näilläkin opiskelijoilla on osaamisessa tällöin tasoeroja matematiikan eri osa-alueilla. Lisäksi osa tämän tason opiskelijoista saattaa olla erittäin taitavia ongelmanratkaisutaidoissaan tarkkaan rajatulla ja ennalta tunnetulla kurssialueella, mutta kohdatessaan joukon matematiikan eri sisältöalueilta olevia tehtäviä (esim. ylioppilaskirjoituksissa) he eivät kykene liittämään näitä tehtäviä oikeisiin sisältöalueisiin: heidän menestymisensä jää vaatimattomaksi tämän tyyppisissä laajoissa kokeissa (nelikentän ryhmä R4).

Laajemman kuvan opiskelijan matemaattisesta osaamisesta saa, kun tarkastellaan nelikentän alueita[41]. Tällöin huomioidaan ylioppilaskirjoitusten pisteissä myös opiskelijoiden taito tunnistaa, mihin matematiikan osa-alueeseen kunkin tehtävän ratkaisu kuuluu. Noin puolet kaikista opiskelijoista sai vähintään 27 pistettä[42] ylioppilaskirjoituksissa 1990-luvulla. Toisaalta noin viidennes sai oikein kaksi tehtävää tai vähemmän[43]. Tämän joukon kirjoittajista noin 80 % kirjoitti vuonna 1996 tai sen jälkeen. Mainitussa joukossa ovat muun muassa kaikki ne opiskelijat, jotka eivät saaneet edes kuutta pistettä[44]. Nelikenttäanalyysin perusteella noin 80 %:lla opiskelijoista (ryhmät R1 ja R3) menestys ylioppilaskirjoituksissa vastasi suunnilleen menestystä matematiikan lukio-opinnoissa kun taas noin viidesosalla opiskelijoista (ryhmät R2 ja R4) ei vastannut. Lisäksi ryhmässä R3 oli huomattavan suuri joukko opiskelijoita, joiden menestys kursseissa ennusti parempaa menestystä kirjoituksissa kuin lopulta toteutui. Tätä ryhmää merkittiin tunnuksella R3'.

Ryhmien R1 ja R3 opiskelijoiden matemaattinen osaaminen on suunnilleen samalla tasolla ylioppilaskirjoituspisteisiin suhteutettuna[45] kuin matematiikan osa-alueisiin sidotuissa kursseissa. Ryhmän R1[46] opiskelijoilla on kursseihin liittyvän kapea-alaisen matemaattisen osaamisen lisäksi laaja-alaista matemaattista osaamista, joka näkyy korkeatasoisena käsitteellisenä ymmärtämisenä ja proseduraalisena sujuvuutena. Heillä on kehittynyt strateginen kompetenssi sekä mukautuva päättelykyky matematiikan osa-alueesta riippumatta. Ajatteluprosessit yltävät ryhmän R1 opiskelijoilla reflektoivaan ajatteluun, joka näkyy ongelmanratkaisussa taitoina yleistää ja oivaltaa (PISA3-taitoluokka). Ryhmän R3 opiskelijoilla nämä kompetenssit eivät ole kehittyneet samalle tasolle kuin ryhmässä R1, mutta he ovat suoriutuneet kurssime-

[41] Kuvio 7.1 s. 153.

[42] $3,5$ tehtävää tai enemmän noin 15:stä tehtävästä.

[43] Alle 13 pistettä.

[44] Keskimäärin vähemmän kuin yksi tehtävä.

[45] Myös suhteutettuna kertauskurssin arvosanaan tai preliminäärien pistemäärään.

[46] Noin 40 % tutkittavista opiskelijoista.

nestyksen tuomien odotusten mukaisesti lukuun ottamatta alaryhmää R3´. Siihen valikoitui noin viidesosa opiskelijoista. Useimmat heistä ovat kirjoittaneet vuoden 1996 jälkeen 15 kurssia pitkää matematiikkaa, mutta he ovat osanneet ratkaista keskimäärin vain kaksi tehtävää tai vähemmän. Alaryhmän R3´ matemaattisen osaamisen taso on jäänyt lopulta vaatimattomaksi. Kursseissa osoitettu menestys on perustunut pitkälti kontekstisidonnaisten proseduurien opetteluun ja toistoon LY-tasoisissa tehtävissä, mikä on edellyttänyt pelkkää muistamista ja algoritmista ajattelua. Mitkään Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) erottelemista matemaattisen osaamisen piirteistä eivät nouse esille minkäänlaisena matemaattisen tiedon hallintana.

Ylioppilaskirjoituksissa merkittävästi paremmin kuin lukiokursseissa menestyneen ryhmän R2 suuruus oli noin 8 % kaikista opiskelijoista. Yksi selittävä syy heikkoon menestykseen kursseissa olivat vääränlaiset opiskelutottumukset. Toinen esille tullut syy oli opiskeltavien käsitteiden jäsentymättömyys (haastateltava H3). Tämä ryhmä on hallinnut proseduureja puutteellisesti ja matemaattiset käsitteet ovat jääneet kurssien yhteydessä pinnallisiksi ja jäsentymättömiksi. Tilanteen korjauduttua opintojen loppuvaiheessa he ylsivät ryhmän R1 lailla laaja-alaiseen matemaattiseen osaamiseen.

Ryhmään R4 kuului noin 11 % opiskelijoista. Heille oli tyypillistä hyvä menestyminen yksittäisissä kursseissa, mutta matematiikan eri sisältöalueilta olevissa tehtäväsarjoissa heidän menestyksensä oli vaatimatonta. Syynä tähän oli useimpien kohdalla kyvyttömyys liittää annettua tehtävää mihinkään itselle tuttuun ratkaisukontekstiin (haastateltava H6). Opiskelijan omaksumat tiedot ja taidot oli opittu suppeasti rajatussa sisältöympäristössä, jonka tunnistaminen satunnaisesta tehtävästä oli tämän ryhmän opiskelijalle liian vaikea tehtävä. Nimitän tällaista matemaattista osaamista ja ajattelua sisältörajoittuneeksi. Tällä tarkoitan sitä, että opiskelija saattaa yltää korkeatasoiseen matemaattiseen osaamiseen ja ajatteluun, kun suppea määrä prosessoitavia käsitteitä on opiskelijalla ennalta tiedossa. Heikkoa menestystä ylioppilaskirjoituksissa ovat useimmilla ennakoineet heikko menestys kertauskursseilla ja preliminääreissä, joissa ei ole ilmoitettu, mihin matematiikan osa-alueeseen kukin tehtävä kuuluu. Haastatteluissa nousi esille opiskelijoiden oma käsitys heikosta menestyksestä kirjoituksissa: he olivat työskennelleet liian vähän päämääränsä eteen, mikä johtui osaltaan omasta mielenkiinnon puutteesta (haastateltava H1) ja toisaalta reaalin valitsemisesta pakolliseksi (haastateltavat H5 ja H6). Ryhmän R4 matemaattinen osaaminen ei vastaa opetussuunnitelman perusteissa kuvailtuja opiskelijan tavoitteita pitkän matematiikan opiskelussa, sillä keskeinen tavoite on laaja-alainen matemaattinen osaaminen.

2.1 Minkälainen on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaaminen koulun tasolla lukio-opintojen päättyessä opettajan arvioimana 1990-luvulla eri sukupuolten muodostamissa ryhmissä?

Poikia on tarkasteltavassa aineistossa noin kaksi kertaa enemmän kuin tyttöjä. YS-tasoa vastaavat osaamisparametrien keskiarvot eivät poikkea merkitsevästi toisistaan poikien ja tyttöjen välillä[47]. Erot osaamisparametreissa löytyvät TNLU- ja KERT-kursseissa poikien hyväksi. Tämä johtuu pitkälti siitä, että noin puolet aineiston tytöistä on valinnut pitkän matematiikan ylimääräiseksi kirjoitettavaksi aineeksi. Tällöin lukio-opintojen viimeisten kurssien opiskelu jää heikkotasoiseksi, mikä näkyy myös matematiikan kirjoitusten tuloksissa. Poikien ja tyttöjen jakautumisessa kognitiivisille tasoille matematiikan eri osa-alueilla ei ole merkittäviä eroja[48]. Jokaisella osa-alueella LY-tasolla tyttöjen suhteellinen osuus on suurempi kuin poikien. Erityisesti TNLU- ja KERT-kurssien kohdalla SA-tasolla pojilla on huomattavasti suuremmat prosenttiosuudet. Sen sijaan esimerkiksi geometrian kursseissa (GEO), joissa poikia on usein pidetty tyttöjä paremmin menestyvinä, tyttöjen suhteellinen osuus SA-tasolla on suurempi kuin poikien.

Nelikenttäanalyysin suurimmissa ryhmissä R1 ja R3 sekä ryhmässä R4 poikien ja tyttöjen lukumäärien suhde on suunnilleen sama kuin poikien ja tyttöjen kokonaismäärienkin suhde (2 : 1). Ryhmässä R2 on vain poikia, joten ainakin pojilla esiintyy vääristä opiskelutottumuksista johtuvaa alisuoriutumista (haastateltava H1). Tutkimusaineistoni perusteella näyttää olevan sukupuolesta riippumaton se ryhmälle R4 ominainen piirre, jossa opiskelija hallitsee suppeita matematiikan osa-alueita hyvin, mutta laajoissa kokonaisuuksissa tulevat esille hahmottamisongelmat tehtävien ratkaisujen matemaattisista sisältöalueista.

2.2 Minkälainen on koulun tasolla pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaaminen lukio-opintojen päättyessä opettajan arvioimana 1990-luvulla eri opetussuunnitelmien mukaan opiskelevien ryhmissä?

Vanhan ja uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden välillä ei ole eroja osaamisparametreissa matematiikan eri sisältöalueilla[49]. Suurimmat erot ovat kertauskurssin (KERT) yhteydessä, jossa uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleilla SA-tasolle yltäneiden määrä on suhteellisesti alle puolet vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleisiin verrattuna. Tässä kurssissa heikosti menestyneet kuuluvat nelikentän ryhmään R4, jossa kurssi-

[47] Taulukko 7.4 s. 149.
[48] Taulukko 9.4 s. 254.
[49] Taulukko 7.3 s. 149; taulukko 9.4 s. 254.

menestys on ollut hyvä, mutta menestys ylioppilaskirjoituksissa on jäänyt vaatimattomaksi. Muissa sisältöalueissa uuden opetussuunnitelman mukaan edenneet ovat SA-tasolla suuremmilla prosenttiosuuksilla kuin vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleet, joten syy heikompaan menestykseen kertauskurssilla ja myös preliminääreissä sekä matematiikan ylioppilaskirjoituksissa ei johdu opetussuunnitelmasta[50]. Suurin syy on matematiikan kirjoituksen valitseminen ylimääräiseksi aineeksi. Päättötodistusten keskiarvot eivät ole muuttuneet merkittävästi eivätkä myöskään kurssiarvosanojen keskiarvot. Pakollisena matematiikan kirjoittaneiden uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden päättötodistusten keskiarvo 8,19 on selkeästi korkeampi kuin vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden keskiarvo 7,69. Ilmeisesti matematiikasta kiinnostuneet ja opiskeluun hyvin motivoituneet opiskelijat saavat runsaasta kurssitarjonnasta haluamaansa laajempaa näkemystä ja tietämystä matematiikasta, mikä näkyy heidän hyvinä tuloksinaan erilaisissa suorituksissa. Toisaalta tieto- ja taitoerot kasvavat uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden välillä verrattuna vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleisiin, sillä suurempi kurssimäärä tuo opiskelijoille mahdollisuuden suurempaan tieto- ja taitomäärään ja mahdollistaa täten suuremmat osaamiserotkin.

Nelikenttäanalyysissä uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleita ei ole yhtään ryhmässä R2. Ryhmässä R3' on suhteellisesti yhtä paljon kummankin opetussuunnitelman mukaan opiskelleita, mutta ryhmässä R4 on uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden osuus (8 opiskelijaa) huomattavasti suurempi kuin vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden (3 opiskelijaa). Tämän aineiston pohjalta voi päätellä niiden opiskelijoiden osuuden olevan kasvamassa, jotka eivät hallitse laajoja kokonaisuuksia, vaan vain suppeita asiasisältöjä kerrallaan. Runsas kurssimäärä tuo uutta asiasisältöä koko opiskeluajan jopa kymmenen viikkotunnin tahdilla, jolloin opiskeltavien asioiden jäsentely ja liittäminen toisiinsa jää osalta opiskelijoista heikoksi (esim. haastateltava H2). Lisäksi kurssien välinen koheesio ja hierarkia eivät ole uuden opetussuunnitelman mukaisissa kursseissa enää niin voimakkaita kuin vanhan opetussuunnitelman mukaisissa vahvasti strukturoiduissa kurssikokonaisuuksissa.

[50] Taulukko 9.4 s. 254.

2.3 Minkälainen on pitkän matematiikan opiskelijan matemaattinen osaaminen koulun tasolla lukio-opintojen päättyessä opettajan arvioimana 1990-luvulla pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittavien ryhmissä?

Pitkän matematiikan pakollisena kirjoittaneiden osaamisparametrit olivat korkeammat, ja he sijoittuivat suurempina prosenttiosuuksina ylemmille kognitiivisille tasoille kuin ylimääräisenä kirjoittaneet[51]. Ennen vuotta 1996 kirjoittaneiden osaamisparametrit olivat YS-tasolla ja kertauskurssin kohdalla korkeimmillaan. Vuonna 1996 ja sen jälkeen pakollisena kirjoittaneet olivat lähes kaikilla matematiikan osa-alueilla erittäin merkittävästi (t-testi, $p<0{,}001$) paremmin menestyneitä (keskimäärin SA-tasolla) kuin vastaavana aikana ylimääräisenä kirjoittaneet (keskimäärin YS-tasolla). Tulos selittyy sillä, että viimeksi mainitussa ryhmässä useat opiskelijat valitsivat matematiikan ylimääräiseksi juuri heikon kurssimenestyksensä vuoksi[52] tai ainakin katsoivat voivansa menestyä paremmin reaalikokeessa kuin pitkän matematiikan kokeessa (esim. haastateltavat H2 ja H6). Opiskelijan valinta kirjoittaa pitkä matematiikka ylimääräisenä näkyy hänen heikkona menestyksenä kertauskurssissa (KERT), jossa kukaan ylimääräisenä kirjoittava ei yllä SA-tasolle. Lukion viimeisen jakson aikana opiskelijat keskittyvät jo pakollisina kirjoittamiensa aineiden opiskeluun. Tällöin vaikeaksi ja työlääksi mielletty matematiikka jää entistä vähemmälle huomiolle, mikä näkyy myöhemmin sekä preliminäärien että kirjoitusten tuloksissa. Osa ylimääräisenä kirjoittavista on kursseilla hyvin menestyneitä opiskelijoita, mutta he arvelevat saavansa varmemmin reaalikokeessa paremman arvosanan kuin matematiikassa, joten he valitsevat reaalin pakolliseksi (nelikentän ryhmä R4). Valintaan vaikuttaa osalla opiskelijoista myös se, että he eivät menesty sekalaisissa tehtäväsarjoissa, vaan ainoastaan tarkkaan rajatuissa asiakokonaisuuksissa (esim. haastateltava H6). Keskittyminen reaalin aineisiin aiheuttaa sen, että opiskelu matematiikan kertauskurssilla jää toisarvoiseksi ja tällöin tärkeä kokonaisuuksien hahmottaminen ja niiden syventäminen jää vähäiseksi. Menestys preliminääreissä ja kirjoituksissa jää ennakko-odotuksia huonommaksi.

Nelikenttäanalyysin ryhmässä R3 ja sen alaryhmässä R3' on huomattavan suuri osuus (55 %) ylimääräisenä kirjoittavia[53]. Alaryhmän R3' opiskelijoilla on päättötodistuksen arvosanana 6 tai 7, mutta kirjoituksissa he ovat osanneet keskimäärin vähemmän kuin kaksi tehtävää. Pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittavilla on useimmilla takanaan 15 kurssia. Tässä ryhmässä viimeisten kertauskurssien tunnollinen opiskelu olisi erityisen tärkeätä mate-

[51] Taulukko 7.6 s. 152.
[52] Muun muassa DIF-kurssit 2. vuosikurssin aikana sujuneet usein huonosti.
[53] Kuvio 7.2 s. 154.

matiikan perustaitojen varmistamiseksi ja hyväksytyn arvosanan saamiseksi kirjoituksista. Suurin osa nelikentän ryhmiin R3' ja R4 kuuluvista ylimääräisenä kirjoittavista opiskelijoista jää tulostensa valossa alisuoriutujiksi pitkän matematiikan opinnoissaan. Ennen vuotta 1996 kirjoittaneilla opiskelijoilla on alaryhmän R3' osuus pieni. Kertauskurssilla monet heistä ovat menestyneet paremmin kuin muilla kursseilla[54], mutta ylimääräisenä kirjoittaneilla se on keskimäärin lähes huonoimmin mennyt kurssi. Tiivis opiskelu on useimpien kohdalla auttanut asiakokonaisuuksien jäsentymisessä ja matemaattisen osaamisen kehittymisessä.

[54] Taulukko 7.6 s. 152.

Luku 8

Lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden matematiikkakuva

8.1 Johdanto

Opiskelijan omilla uskomuksilla, asenteilla ja tunnetiloilla on huomattava osuus hänen oppimisprosessissaan ja opiskelumenestyksessään (McLeod 1992; Robitaille & Garden 1989; Ma & Kishor 1997; Kangasniemi 2000; Hannula 2004). Sternbergin luokituksessa mainittu affektioiden merkitys tuli esille antropologisessa ja pedagogisessa lähestymistavassa[1]. Uskomuksilla, asenteilla ja tunnetiloilla on vaikutusta opiskelijan metakognitioihin, jotka ohjaavat ja säätelevät opiskelijan ajatteluprosesseja[2].

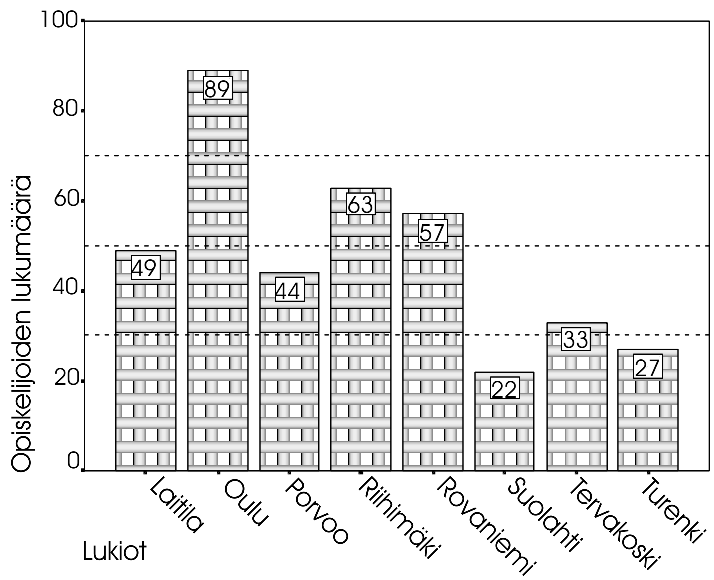
Edellisen luvun loppuosassa tarkastelin kuutta opiskelijaa, joiden omakohtaiset kuvaukset pitkän matematiikan opiskelusta syvensivät tilastollisin menetelmin tuotettua tietoa. Pohdin laajemmin opiskelijan näkökulmaa. Mittauskohteena ovat opiskelijoiden kuva matematiikasta tieteenä, itsestään matematiikan taitajana ja oppijana, matematiikan opetuksesta sekä matematiikasta ja sukupuolistereotypioista. Nämä tarkentavat opiskelijan matemaattista ajattelua ohjaavia ja sääteleviä tekijöitä. Nelikentässä olen merkinnyt kunkin opiskelijan pisteellä. Miten opiskelija mieltää oman tilansa?

Esittelen aluksi tutkimuskohteen ja kuvaan tulosten tulkinnassa käytettävät käsitteet. Tämän jälkeen esittelen vuoden 1999 kyselyn analyysien tuloksia eri ryhmissä ja erityisesti Tervakosken lukion opiskelijoiden uskomuksia.

[1] Kuvio 3.2 s. 65.
[2] Ks. alaluku 4.5.2.

8.2 Tutkimuksen kuvaus

Tutkimuskohteena on lukiolaisen matematiikkakuva. Tutkimusmateriaali on kerätty kyselylomakkeella, jonka perusrakenne on ollut sama kaikilla mittauskerroilla. Olen tehnyt mittaukset 1990-luvun alkupuolella Tervakosken ja Laitilan lukioissa sekä lisäksi vuonna 1999 kahdeksassa lukiossa eri puolelta Suomea. Tervakosken lukiossa olen tehnyt mittauksia myös 1990-luvun loppupuolella eri vuosina. Tähän tutkimukseen on otettu vain pitkän matematiikan opiskelijoiden antamat vastaukset, joita Tervakosken lukiosta on eri vuosilta yhteensä 70 ja vuoden 1999 kyselystä kahdeksasta lukiosta 384. Tervakosken ja Laitilan lukiot kuuluivat mukaan vuoden 1999 kyselyyn. Edellä olen jo kuvaillut Tervakosken lukion opiskelijoita, joten keskityn seuraavassa vuoden 1999 kyselyn taustatieto-osioiden tuloksiin.



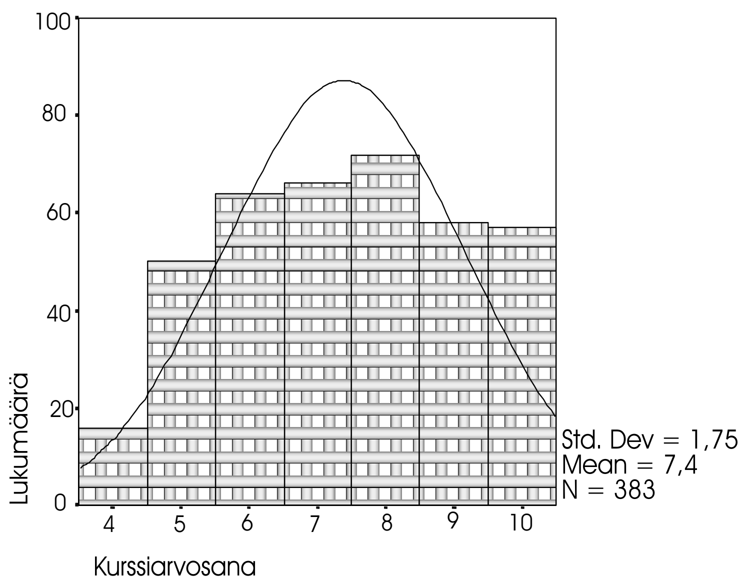
KUVIO 8.1: Opiskelijoiden uskomusmittaukseen vuonna 1999 osallistuneet lukiot ja opiskelijamäärät.

Vuoden 1999 kyselyyn vastanneet lukiot sijoittuvat eri puolille Suomea (kuvio 8.1). Valitsin lukiot tutkimukseen omien henkilökontaktieni perusteella. Tutkittavien lukioiden joukossa on muutamia isoja kaupunkilukioita[3] ja toisaalta pieniä lukioita[4].

[3] Oulu, Rovaniemi, Porvoo ja Riihimäki.
[4] Laitila, Turenki, Tervakoski ja Suolahti.

Suurin osa opiskelijoista oli 2. tai 3. vuosikurssin opiskelijoita (noin 94 %). Opiskelunsa neljälle vuodelle hajauttaneita aineistossa oli noin 3 %; 1. vuosikurssin opiskelijoita oli saman verran. Tutkimusjoukosta poikia oli 220 (57,3 % koko joukosta) ja tyttöjä oli 162 (42,2 % koko joukosta). Kaksi opiskelijaa ei ilmoittanut sukupuoltaan. Pojat ovat enemmistönä pitkän matematiikan opiskelijoista tässä aineistossa, vaikka koko lukion oppilasmäärästä suurin osa onkin tyttöjä. Tämä vastaa valtakunnallista tilannetta 1990-luvulla[5].

Opiskelijoilta kysyttiin taustatiedoiksi matematiikan viimeistä kurssiarvosanaa sekä sitä, onko opiskelijalla graafinen laskin ja Internet-yhteys kotona. Noin 80 %:lla tutkimuksen opiskelijoita oli käytössä graafinen laskin ja noin 50 %:lla oli Internet-yhteys kotona.



KUVIO 8.2: Opiskelijoiden uskomusmittaukseen vuonna 1999 osallistuneiden opiskelijoiden viimeksi saatujen arvosanojen jakauma.

Kyselylomakkeessa tiedusteltiin opiskelijan viimeksi saamaa kurssiarvosanaa. Kuvion 8.2 perusteella ylimpien arvosanojen osuus on melko suuri, kun taas hylättyjä kursseja on vähän. Kyseinen jakauma ei noudata normaalijakaumaa[6]. Kyselyn yhteydessä ei eroteltu, oliko kurssi pakollinen vai syventävä. Tällä seikalla voi olla vaikutusta saatuun kuvion 8.2 arvosanajakaumaan[7].

[5]Vrt. taulukko 2.4 s. 48.

[6]Kolmogorov-Smirnovin testi, $p<0{,}05$

[7]Syventävien kurssien arvosanajakaumat saattavat olla vinoja painottuen ylempiin ar-

8.3 Matematiikkakuva

Robitaille (1989, 178) perustelee IEA-tutkimuksen raportissa asenteiden mittaamisen tärkeyttä matematiikan tietojen ja taitojen mittaamisen rinnalla. Hän katsoo, että kykymittaukset ja testien tulokset ennustavat osan koehenkilön kognitiivisten saavutusten vaihtelusta, mutta huomattava osa vaihtelusta johtuu ei-kognitiivisista muuttujista. Näitä ovat muun muassa affektiiviset muuttujat. Niiden tuominen mukaan kognitiivisen alueen tuloksien kuvailuun lisää luotettavuutta tilastollisissa malleissa, jotka selittävät tai ennustavat eroja matemaattisissa suorituksissa. Uskomuksilla on huomattava vaikutus yksilön metakognitioihin, jotka puolestaan ohjaavat muun muassa ongelmanratkaisuprosesseja.

Ylemmän tason ajattelutaitojen kehittymisessä näyttää oppijan affektiivisilla tekijöillä olevan huomattava vaikutus verrattuna alemman tason taitojen kehittymiseen (Kangasniemi 2000, 12). Työn tässä osassa tutkin opiskelijoiden affektiivisen alueen tekijöitä matematiikan opiskelussa ja toisaalta kuvailen heidän matemaattista ajatteluaan heidän itsensä tulkitsemana. Oppilaiden uskomuksien lisäksi myös opettajien uskomuksilla ja asenteilla matematiikan luonteesta ja sisällöstä on tärkeä rooli matematiikan oppimisessa (Ernest 1989; Thompson 1992; Lindgren 1997; Pehkonen 1998; Kupari 1999; Kaasila 2000), mutta en tarkastele niitä tässä tutkimuksessa.

Schoenfeld (1992, 359; 1994, 57) on löytänyt tutkimuksissaan seuraavanlaisia opiskelijoiden uskomuksia:

> – *matemaattisilla ongelmilla on yksi ja vain yksi oikea vastaus*
> – *on olemassa vain yksi oikea tapa ratkaista mikä tahansa matemaattinen ongelma ja yleensä siihen tarvitaan sääntöä, jonka opettaja on juuri tunnilla esittänyt*
> – *tavallisten opiskelijoiden ei voi odottaa ymmärtävän matematiikkaa; heidän odotetaan vain muistavan matematiikkaa ja soveltavan sitä mekaanisesti ja mallien mukaan ilman ymmärtämistä*
> – *opiskelijat, jotka ovat ymmärtäneet opiskelemansa matematiikan, kykenevät ratkaisemaan minkä tahansa ongelman viidessä minuutissa tai nopeammin*
> – *matematiikalla, joka on opittu koulussa, on vain vähän tai ei ollenkaan tekemistä koulun ulkopuolella olevan elämän kanssa.*

vosanoihin, sillä kurssit ovat valinnaisia ja sisällöltään harrastuneiden opiskelijoiden kannalta mielenkiintoisia.

Opiskelijoille tekemäni uskomusmittaukset sisälsivät osioita, joiden vastauksia voi tulkita edellä esitettyjen uskomusten suuntaisiksi. Käsittelen niitä kyselyn tulosten yhteydessä.

McLeodin (1992, 578–579) mukaan uskomukset matematiikassa voidaan jakaa uskomuksiin *matematiikasta*[8], *itsestä matematiikan taitajana*[9], *matematiikan opetuksesta*[10] ja *sosiaalisesta kontekstista*[11]. Asenteet puolestaan ovat tässä luokituksessa vähemmän voimakkaita kuin uskomukset, mutta ne ovat pitkäkestoisia, pysyviä ja johdonmukaisia. Tunnetilat[12] ovat voimakkaita mielentiloja, joissa kognitiivinen komponentti on suhteellisen pieni ja jotka voivat syntyä ja kadota melko nopeasti.

Matematiikkaan liittyvien uskomuksien ja käsitysten laajaa kirjoa tarkastelemalla voidaan kuvata opiskelijan matematiikkakuvaa (*view of mathematics*), joka koostuu neljästä pääkomponentista[13] (Pehkonen 1998, 47):

1. *uskomuksista matematiikasta (sen luonteesta)*

2. *uskomuksista itsestä matematiikan oppijana ja sen käyttäjänä*

3. *uskomuksista matematiikan opetuksesta*

4. *uskomuksista matematiikan oppimisesta.*

Komponentit eivät ole eroteltavissa toisistaan selkeästi, vaan ne menevät osittain päällekkäin tai limittäin (Pehkonen 1999, 121).

Sekä opiskelijoiden että opettajien näkemys matematiikasta tieteenä on merkityksellinen hänen toiminnalleen matematiikan parissa. Matematiikan määrittelyistä on luotu kolmidimensioisia malleja[14], joissa matematiikan luonne on nähty instrumentaalisena, platonistisena tai konstruktivistisena. Törner ja Grigutsch (1994) tekivät vastaavanlaisen jaon, jonka Pehkonen (1999, 122) on muotoillut seuraavasti:

1. *"Työkalupakki"-näkökulma*: matematiikka on kokoelma laskusääntöjä ja -rutiineja, joita sovelletaan tarpeen mukaan.

[8]Esim. matematiikka perustuu sääntöihin.
[9]Esim. minä itse kykenen ratkaisemaan matemaattisia ongelmia.
[10]Esim. opettaminen on kertomista.
[11]Esim. oppiminen on kilpailemista.
[12]Esim. ahaa-elämykset ongelmanratkaisussa.
[13]Vrt. McLeod 1992.
[14]Mm. Ernest 1991.

2. *Systeemi-näkökulma*: matematiikka on formaali systeemi, jonka puitteissa toimitaan ankaran loogisesti

3. *Prosessi-näkökulma*: matematiikka on dynaaminen prosessi, jossa jokainen luo itse oman matematiikkansa tarpeittensa ja kykyjensä mukaan.

Tutkimuksissa on osoittautunut, että näiden kolmen dimension lisäksi saattaisi olla neljäs niin sanottu soveltamisaspekti. Korrelaatioanalyysi on kuitenkin osoittanut, että itse asiassa on syytä puhua vain kahdesta päädimensiosta: työkalupakki/systeemi -dimensio ja prosessi/soveltaminen -dimensio. (Pehkonen 2001, 15.)

Tutkimuksissa[15] on käynyt ilmi, että useilla oppilailla on tietynlainen uskomus matemaattisesta ajattelusta. Sen mukaan matemaattinen ajattelu on rajoittunut tarkoittamaan lukujen ja lausekkeiden käyttöä sekä matemaattisten termien muistamista vastausten löytämiseksi valmiiksi annettuihin ongelmiin. Matemaattinen ajattelu on pelkistynyt näille oppilaille eräänlaiseksi peliksi, jossa annetun tehtävän ratkaisemiseksi vaaditaan oppilaalle merkityksettömän materiaalin muistamista ja ennalta opetetun ratkaisumallin tunnistamista juuri kyseiseen tehtävään sekä lopuksi vielä tarvittavien laskutoimitusten suorittamista, jotta saataisiin oikea vastaus. Mahdollisimman nopea oikea vastaus nähdään laadukkaana ajatteluna. Opettajat haluaisivat kuitenkin laajentaa oppilaiden näkemystä matemaattisesta ajattelusta sellaiseksi, että se sisältäisi myös ongelmanratkaisun ideat, päättelyn mahdollisuudet, kommunikaation merkityksen ja matematiikan yhteydet muihin tiedonaloihin. (Bransford ym. 1996, 245.)

Tutkimuskohteena ovat opiskelijoiden uskomukset, asenteet ja tunnetilat, joita tarkastelen opiskelijan matematiikkakuvan kautta. Se on tärkeä matemaattista ajattelua ohjaava tekijä, joka toisaalta paljastaa omalta osaltaan opiskelijan näkemystä hänen matemaattisesta ajattelustaan.

8.4 Tutkimusmenetelmät ja -tulokset

8.4.1 Johdanto

Tutkimusaineisto kerättiin uskomuksia ja asenteita mittaavalla väitejoukolla (liite 10), jota käytin myös lisensiaattityössäni (Joutsenlahti 1996). Suurin osa väittämistä oli samoja kuin kansainvälisessä IEA-tutkimuksesssa[16].

[15] Esim. Bransford ym. 1996, Ginsburg 1996, Schoenfeld 1994.
[16] Ks. Kangasniemi 1989.

Vuoden 1999 kyselylomakkeeseen lisäsin alkuun joitakin opiskelijan taustatietoja määrittäviä kysymyksiä (liite 10). Joitakin uskomustutkimuksen tuloksia olen käsitellyt aikaisemmassa julkaisussa (Joutsenlahti 2002), mutta en tässä asiayhteydessä. Nyt olen tehnyt aineistosta frekvenssianalyysin, jota tarkastelen sukupuolen ja ylimääräisenä tai pakollisena kirjoittavien ryhmien suhteen. Samoin olen tehnyt aineistosta faktorianalyysin, jonka muodostamaa faktorirakennetta vertaan aikaisempien tutkimuksien faktorirakenteisiin. Opiskelijoiden uskomuksia eri opetussuunnitelmien aikana tarkastelen vertaamalla vuoden 1999 uskomuskyselyn ja vuosina 1993–1995 tekemieni kyselyjen tulosten eroja. Tarkastelen lopuksi erityisesti tervakoskelaisten opiskelijoiden matematiikkakuvaa sekä saatuja tuloksia nelikentän suhteen.

8.4.2 Frekvenssianalyysi

Liitteessä 11 on tiivistelmä vuoden 1999 uskomuskyselyn vastauksista (n=384). Liitteen 11 taulukkoon 9.5 on merkitty vastausjakauman lisäksi yleisen käytännön mukaisesti väittämän vastausten keskiarvo ja -hajonta, vaikka kyseinen Likert-asteikko ei tarkalleen ottaen olekaan välimatka-asteikollinen. Kyseiseen taulukkoon on myös merkitty, minkä väittämien osalta hyväksymis- tai hylkäysprosentti ylittää 50 %. Saranen (1992), Koponen (1994) ja Kangasniemi (2000) ovat käyttäneet hyväksymis- ja hylkäysprosentteja tulkitessaan vastausjakaumia. Suurin osa liitteen 11 vastausjakaumista, joissa hyväksymis- tai hylkäysprosentti ylittää 50 %, on selkeästi painottunut toiseen ääripäähän vastauksissa[17] Seuraavassa tarkastelen tuloksia viiden ryhmän suhteen, joihin väittämät on jaettu aikaisempien tutkimuksien perusteella[18]:

1. Matematiikka tieteenä (väittämät 1–15)
2. Matematiikka ja minä (väittämät 16–27)
3. Matematiikka ja sukupuoli (väittämät 28–33)
4. Matematiikan hyödyllisyys (väittämät 34–41)
5. Matematiikan opetus (väittämät 42–46).

[17] Vain väittämissä V29 ja V46 on hyväksymis- ja hylkäysprosenttien erotus pienempi kuin 20 %–yksikköä.

[18] Joutsenlahti 1996.

Matematiikka tieteenä

Kahdeksassa väittämässä viidestätoista vastausjakaumassa oli yli 50 % opiskelijoista joko samaa mieltä (”++” tai ”+”) tai eri mieltä (”− − ” tai ”−”). Vastaajien mielestä matematiikka auttaa ajattelemaan loogisesti (V15) ja tiettyjen täsmällisten sääntöjen mukaan (V5). Matematiikka on joukko sääntöjä (V13), joista aina löytyy joku, jota voi soveltaa tehtävän ratkaisemisessa (V11). Toisaalta matematiikan nykyisistä kehityssuunnista opiskelijoilla ei ilmeisesti ole juurikaan tietoa, sillä esimerkiksi väittämään ”Matematiikassa ei ole tehty uusia oivalluksia pitkään aikaan” (V12) ilmoitti kannakseen ”En osaa sanoa” noin 53 % vastaajista. Tätä tulkintaa tukee myös väittämien V1 ja V4 korkeat ”En osaa sanoa” -valinnat[19]. Matematiikan oppiminen ei perustu ulkoaoppimiseen (V8), vaan ilmeisesti loogisten strukturoitujen tietorakenteiden ymmärtäminen on edellytys menestyksekkäille matematiikan opinnoille. Useimmille matemaattisille tehtäville on olemassa erilaisia ratkaisutapoja (V7), joista muun muassa yrityksen ja erehdyksen menetelmää voidaan usein käyttää tehtävän ratkaisemisessa (V10). Kyky arvioida on myös tärkeä matemaattinen taito (V6). Matemaattisten tehtävien ratkaiseminen nähdään laajemmin kuin vain pelkkänä säännön soveltamisena.

Matematiikka ja minä

Seitsemässä väitteessä kahdestatoista oli valittu yli puolet jompaa kumpaa kannanottoa. Pitkän matematiikan opiskelijat haluavat menestyä matematiikan opinnoissaan ja kokevat menestyvänsä tai ainakin näkevät yrittämisen tuovan menestymisen opinnoissaan (V16 ja V26). Tunnetilaa kuvaavat onnistumisen ja auttamisen ilo tulevat esille sekä itse ratkaistuissa matematiikan tehtävissä että halussa auttaa muita matematiikan tehtävien ratkaisemissa (V18 ja V21). Opiskelijat kokevat ymmärtävänsä yleensä matematiikan tunneilla käsitellyt asiat. Toisaalta he eivät koe, että matematiikka olisi itselle sen vaikeampaa kuin muillekaan (V19 ja V25). Viimeksi mainituista tuloksista on näkyvissä, että opettajien työskentelyyn tunneilla on oltu tyytyväisiä siltä osin, mikä koskee uusien asioiden opettamista. Matematiikan opiskelu on antanut useimmille myönteisiä tai odotusten mukaisia kokemuksia, sillä suurin osa pitkän matematiikan opiskelijoista on eri mieltä väittämän (V22) ”Jos saisin valita, en enää opiskelisi matematiikkaa” kanssa.

Matematiikka ja sukupuoli

Sukupuolen ja matematiikan välisistä yhteyksistä vastaajat ilmaisivat selkeästi kantansa, sillä viiteen kysymykseen kuudesta löytyi vastausjakaumassa yli 50 %:n kannanotto. Yleisesti ottaen poikia ei pidetty lahjakkaampina matematiikassa kuin tyttöjä (V29), joskin lähes 47 % vastaajista näki poikien

[19] Noin 39 % ja 37 % vastaajista.

olevan kiinnostuneempia matematiikasta (V33), mutta 25 % ei uskonut asian olevan näin. Vanhat stereotypiat insinööreistä ja tiedemiehistä poikien uravalintoina sekä ammattiuran tärkeydestä vain pojille, eivät saa tukea tutkimuksen opiskelijoilta (V28 ja V31). Myöskään poikien ei nähty tarvitsevan enemmän matematiikkaa kuin tyttöjen (V30), mikä on johdonmukaista edellä mainittujen käsitysten valossa (V28 ja V31).

Matematiikan hyödyllisyys

Tässä väiteryhmässä löytyi neljään väittämään kahdeksasta vastausjakaumasta yli 50 %:n kannanotto. Matematiikasta koettiin olevan hyötyä jokapäiväisessä elämässä, ja sen nähtiin kuuluvan osaksi jokapäiväistä elämää (V37, V38 ja V40). Nämä ovat luonnollisen tuntuisia kannanottoja pitkän matematiikan opiskelijoilta, joille useimmille matematiikan tärkeyttä on perusteltu muun muassa peruskoulussa väittämän V34 mukaisesti ”On tärkeätä osata matematiikkaa, jotta saisi hyvän työpaikan”.

Matematiikan opetus

Kuudesta väittämästä kolmessa ylitti opiskelijoiden kannanotto 50 %:n rajan vastausjakaumassa. Opiskelijoiden mielestä jokainen pystyy oppimaan matematiikkaa, jos opetusmenetelmiin kiinnitetään riittävästi huomiota (V43). Tässä lienee viitteitä lukion matematiikan yksipuoliseen opettajajohtoiseen opetukseen, joka johtuu osaltaan suurista opetusryhmistä ja perinteisestä matematiikan opetuksen konservatiivisuudesta[20]. Opetuksessa pitää opiskelijoiden mielestä kiinnittää entistä enemmän huomiota käytännön sovelluksiin (V44). Opiskelijat näkevät opetuksen ehkä liian teoreettisena ja esimerkit keinotekoisina siinä mielessä, että niillä ei ole suoraa yhtymäkohtaa käytännön sovelluksiin.

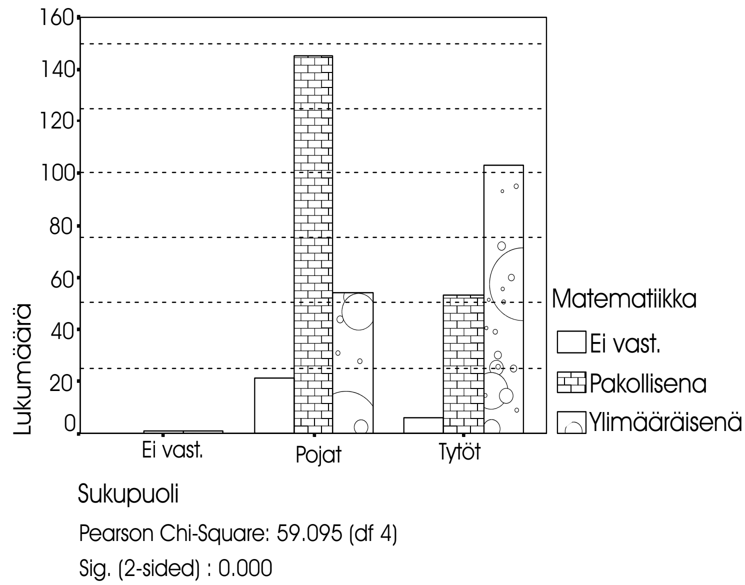
Seuraavaksi tarkastelen vastausjakaumaa poikien ja tyttöjen ryhmien suhteen sekä matematiikan pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien ryhmien suhteen. Viimeksi mainittu jako sisältää myös 1. ja 2. vuosikurssin opiskelijoiden ilmaisemat aikomukset kirjoittaa matematiikka jompana kumpana, mikä ei välttämättä ole kuitenkaan toteutunut, koska varsinainen valinta tehtiin vasta myöhemmin. Tässä yhteydessä olen tutkinut ryhmien vastausjakaumien tilastollisia eroja[21].

Kyselyn vastaukset eroteltuna sukupuolen mukaan

Poikien lukumäärä oli 57,3 % ja tyttöjen 42,2 % koko joukosta. Vastaajista 0,5 % ei ilmoittanut sukupuoltaan. Suuria eroja tyttöjen ja poikien arvosa-

[20] Esim. Kupari 1999.
[21] Pearsonin χ^2-testi.

nojen jakaumassa ei ole[22](liite 12, kuvio 9.15). Pojilla oli suhteellisen paljon arvosanoja 4 ja 5, mutta myös arvosanoja 8[23] ja 10. Tyttöjen arvosanajakauman moodi on 6. Huomattavaa on arvosanan 4 vähäinen osuus. Suurin osa tytöistä aikoi kirjoittaa pitkän matematiikan ylimääräisenä ja suurin osa pojista pakollisena (kuvio 8.3).



KUVIO 8.3: Poikien ja tyttöjen lukumäärät pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä valinneiden opiskelijoiden ryhmissä.

Liitteen 13 taulukosta 9.7 näkyy, että suurimmassa osassa väittämien kannanotoissa ei ole merkittäviä eroja sukupuolen suhteen. Hyväksymis-/hylkäys-kriteerin nojalla eroja löytyy väittämissä V2, V9, V20, V23, V28, V29, V30, V36, V41 ja V46. Näistä χ^2-testin nojalla toisistaan vähintään melkein merkitsevästi poikkesivat ($p<0,05$) väittämät V23, V28, V29 ja V30 sekä muista väittämistä V31, V32 ja V33. Mielenkiintoista on huomata, että väiteryhmän "Matematiikka ja sukupuoli" (väittämät 28–33) jokaisen väittämän vastausjakaumat poikkeavat vähintään melkein merkitsevästi toisistaan. Tyttöjen kannanotot olivat voimakkaampia kuin poikien. Pojista yli kolmasosa oli sitä mieltä, että pojilla on enemmän luontaisia lahjoja matematiikkaan kuin tytöillä (V29). Toisaalta sekä pojista että tytöistä yli 40 % oli sitä mieltä, että pojat ovat kiinnostuneempia matemaattisista ongel-

[22] χ^2-testi, $p>0,05$.
[23] Poikien arvosanajakauman moodi on myös 8.

mista (V33). Tytöistä oli eri mieltä mainitusta väittämästä yli kolmasosa ja pojista noin kuudesosa. Väittämien 2 ja 36 poikien vastauksissa on ilmeisesti kytkentöjä poikien suurempaan harrastuneisuuteen tietotekniikkaan, jossa matematiikan taitamisen koetaan olevan tärkeä apu. Pojilla oli myös hyvä minäkuva matematiikan taitajana, sillä he hylkäävät väittämän, jonka mukaan asianomainen ei ole kovin hyvä matematiikassa (V20). Tähän liittyen pojat kokivat vaikean matematiikan tehtävän mieluisana haasteena, kun taas tytöistä lähes puolet ei näin kokenut. Tyttöjen mielestä useimmissa ammateissa matematiikan tiedot olivat välttämättömiä (V41), mutta poikien enemmistö ei ollut tätä mieltä. Tämä on hieman yllättävää, kun vertaa esimerkiksi väittämän 40 vastausjakaumaa. Matematiikkaa tarvitaan siis jokapäiväisessä elämässä, mutta ei välttämättä useimmissa ammateissa. Poikien mielestä matematiikka ei ollut vaikein oppiaineista (V46), kun taas tyttöjen mielestä oli.

Kyselyn vastaukset eroteltuna pitkän matematiikan pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien ryhmien mukaan

Liitteen 12 kuvion 9.16 pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien arvosanajakaumista on nähtävissä odotettu tulos, jonka mukaan pakollisena kirjoittavilla oli enemmän parempia arvosanoja. Pitkän matematiikan pakolliseksi valitsemiseen vaikuttaa juuri useimmilla opiskelijoilla hyvä opintomenestys matematiikan kursseissa. Ylimääräisenä kirjoittavista noin 66 % oli tyttöjä, kun heidän osuutensa kaikista pitkän matematiikan opiskelijoista oli alle puolet (42 %). Pakollisena kirjoittavista noin 73 % oli poikia. Tytöistä ilmoitti kirjoittavansa pitkän matematiikan pakollisena noin 34 % ja pojista lähes 73 %.

Kuviossa 8.3 on esitetty poikien ja tyttöjen määrät pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittavien ryhmissä. Pakollisena kirjoittavien vastaukset (liite 14) myötäilevät pitkälti mainituista syistä poikien vastauksia (liite 13) ja vastaavasti ylimääräisenä kirjoittavien tyttöjen vastauksia. Eroja löytyy väittämien 17, 27 ja 33 kohdalla. Ylimääräisenä kirjoittavat eivät toivoneet saavansa opiskella lisää matematiikkaa[24], mutta olivat sitä mieltä, että pojat ovat kiinnostuneempia matemaattisista ongelmista kuin tytöt (V33). Pakollisena kirjoittavat olivat valmiit työskentelemään pitkänkin aikaa ymmärtääkseen uuden asian matematiikassa (V27). Pearsonin χ^2-testi paljasti tutkittavien ryhmien väliltä vähintään melkein merkitsevän eron väittämien 15, 16, 17, 20, 22, 23, 25, 26, 36 ja 46 vastausjakaumissa. Molemmat ryhmät hyväksyivät, että matematiikka auttaa ajattelemaan loogisesti (V15) ja että he haluavat todella menestyä matematiikassa (V16), mutta vastausjakaumat erosivat sil-

[24] V17 χ^2-testi, $p<0{,}05$.

ti merkittävästi. Matematiikan opiskelun määrää koskevassa väittämässä 17 ylimääräisenä kirjoittavat eivät halunneet opiskella enempää matematiikkaa, mikä on ymmärrettävää useimpien kohdalta siihen astisen opintomenestyksen kannalta. Kuva itsestä matematiikan osaajana (V20, V23, V25 ja V26) oli selvästi heikompi ylimääräisenä kirjoittavilla kuin pakollisena kirjoittavilla. Matematiikan opiskelua tästä hetkestä eteenpäin koskeva väite (V22) oli jakaumiltaan erilainen pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavilla, vaikka molemmat ryhmät hylkäsivät väittämän. Pakollisena kirjoittavat toivoivat voivansa työskennellä ammatissa, jossa saa käyttää matematiikkaa (V36), kun taas suurempi osa ylimääräisenä kirjoittavista hylkäsi (44 %) tämän väittämän kuin hyväksyi sen (26 %). Matematiikka oli suurimman osan ylimääräisenä kirjoittavien opiskelijoiden (57 %) mielestä heidän vaikein oppiaineensa, kun taas suurin osa pakollisena kirjoittavista (70 %) ei pitänyt matematiikkaa vaikeimpana oppiaineenaan (V46).

8.4.3 Faktorianalyysi

Tein uskomuskyselyn vastausmatriisille faktorianalyysin, jotta voisin nähdä, minkälaisia faktorirakenteita syntyy ja miten ne ovat muuttuneet aikaisempien tutkimusten[25] tuloksena löydettyihin faktorirakenteisiin verrattuna. Käytetyt väittämät näissä tutkimuksissa ovat olleet lähes samat.

Faktorointia varten käänsin väittämien 9, 12, 20, 22, 26, 35, 40 ja 41 vastausten pisteytyksen päinvastaiseksi, sillä nämä väittämät ovat esitetty kielteisessä muodossa. Seuraavaksi kokeilin erilaisia faktorointi- ja rotatointimenetelmiä, jotta saisin mahdollisimman selkeästi tulkittavan faktorirakenteen. Valitsin lopulta menetelmäksi ML-tekniikan[26] ja rotatointimenetelmäksi suorakulmaisen rotaation[27]. Tarkastelin faktoriratkaisuja 4–8 faktorin ratkaisuilla, joissa kaikkien faktoreiden ominaisarvot olivat suurempia kuin yksi. Yhtään näistä faktoriratkaisuista ei voinut hylätä tilastollisin perustein, sillä faktorimallin sopivuutta estimoivalla χ^2-testillä[28] tuli $p > 0,05$ (Erätuuli ym. 1994, 54). Parhaiten tulkittavaksi osoittautui kuuden faktorin malli. Poistin väittämien 1, 6, 9, 10, 14, 21, 31, 42, 43 ja 44 vastaukset tarkastelusta niiden alhaisen kommunaliteetin vuoksi. Lopullinen rotatoitu faktoriratkaisu (liite 15, taulukko 9.11) selittää noin 42 % kokonaisvarianssista. Taulukossa 8.1 on nimetty löydetyt faktorit ja esitetty niihin kuuluvat väittämät sekä niiden lataukset ja kommunaliteetit.

[25] Kangasniemi 1989, 2000; Joutsenlahti 1996.
[26] Maximum Likelyhood.
[27] Varimax.
[28] Goodness-of-Fit.

Faktorit ominaisarvojen mukaisessa suuruusjärjestyksessä olen nimennyt seuraavasti:

1. *Minä ja matematiikan opiskelu*
2. *Minä ja oppimisvaikeudet matematiikassa*
3. *Pojat parempia matematiikassa*
4. *Matematiikan tarpeettomuus jokapäiväisessä elämässä*
5. *Matematiikka avoimena systeeminä*
6. *Matematiikka sääntökokoelmana.*

Ensimmäiselle faktorille latautuneiden väittämien keskeinen sisältö on matematiikan opiskelun ja opetuksen määrä sekä menestys siinä, siihen liittyvä työmäärä ja matematiikan opiskelun merkitys tulevan työpaikan saamiseksi. Toisaalta asioita tarkastellaan subjektiivisesta minä-näkökulmasta[29], joten faktorin nimeen liittyy myös tarkastelunäkökulman valintana sana ”minä”. Siksi ensimmäisen faktori nimesin ”Minä ja matematiikan opiskelu”. Tämä faktori kuvaa opiskelijan piirteitä, jotka ovat matematiikkakuvan toisessa pääkomponentissa.

Toisen faktorin väittämissä tulivat esille sellaiset affektiiviset käsitykset matematiikasta kuten sen oppimisen vaikeus, oman menestymisen ja opetetun asian ymmärtämisen itsearviointi sekä vaikeiden tehtävien ratkaisemisen mieluisuus. Kaikkien kyseisten väittämien arviointi perustui omakohtaisiin oppimiskokemuksiin ja niihin liittyvien tuntemuksien kuvailuun. Lisäksi kaikissa väittämissä esiintyi minä-muoto, joten se tuli myös faktorin nimeen. Toisen faktorin nimesin ”Minä ja oppimisvaikeudet matematiikassa”. Tämä faktori kuvaa opiskelijan piirteitä, jotka ovat matematiikkakuvan toisessa pääkomponentissa.

Kolmannen faktorin tulkinta oli selkein. Siinä kaikkien väittämien teemana ovat sukupuoliin liittyvät stereotypiat matematiikan osaamisessa ja ammattikuvissa. Latausten korkeat itseisarvot kertovat selvistä näkemyksistä tämän asian suhteen. Annoin faktorille nimeksi ”Pojat parempia matematiikassa”, sillä useimmissa väitteissä korostui poikien rooli matematiikan taitajina. Tämän faktorin kuvaamia piirteitä sisältyy lähinnä matematiikkakuvan neljänteen pääkomponenttiin.

Neljännessä faktorissa useimmissa väittämissä arvioitiin matematiikan tarpeellisuutta ammateissa ja jokapäiväisessä elämässä. Taustalla on hyötynäkökohta: mitä suoranaista hyötyä on hallita matematiikkaa? Matematiikasta koetaan siis selvästi olevan hyötyä sekä ammatissa että jokapäiväisessä elä-

[29]Kuudessa väittämässä kahdeksasta on minä-muoto.

TAULUKKO 8.1: Pitkän matematiikan opiskelijoiden matematiikkaan liittyvien uskomusten faktorit ja niihin kuuluvat väittämät vuonna 1999 (n=384), faktorien lataukset (La) ja kommunaliteetti (Ko)

Faktorit ja väittämät	**La**	**Ko**
Faktori 1: *Minä ja matematiikan opiskelu*		
V17 Toivon saavani opiskella enemmän matematiikkaa.	.79	.73
V36 Haluaisin työskennellä ammatissa, jossa saan käyttää matematiikkaa.	.64	.59
V16 Haluan todella menestyä matematiikassa.	.62	.46
V22 Jos saisin valita, en enää opiskelisi matematiikkaa.	.62	.49
V45 Matematiikan opetusta pitäisi lisätä.	.59	.38
V24 En halua käyttää kovin paljon aikaani matematiikan opiskelemiseen.	.49	.42
V27 Olen valmis työskentelemään pitkänkin aikaa ymmärtääkseni uuden asian matematiikassa.	.44	.30
V34 On tärkeä osata matematiikkaa, jotta saisi hyvän työpaikan.	.43	.33
Faktori 2: *Minä ja oppimisvaikeudet matematiikassa*		
V25 Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin useimmille muille.	-.84	.71
V20 Minä en ole kovin hyvä matematiikassa.	.78	.69
V26 Vaikka kuinka yrittäisin, en siitä huolimatta menesty matematiikassa	.72	.58
V19 Ymmärrän yleensä sen, mitä matematiikan tunneilla käsitellään.	.65	.52
V23 Vaikea matematiikan tehtävä tuntuu minusta mieluisalta haasteelta.	.58	.60
V46 Matematiikka on vaikein minun oppiaineistani.	-.59	.47
Faktori 3:*Pojat parempia matematiikassa*		
V28 Miehistä tulee parempia tiedemiehiä ja insinöörejä kuin naisista.	.81	.66
V29 Pojilla on enemmän luontaisia lahjoja matematiikkaan kuin tytöillä.	.81	.67
V32 Tytöt menestyvät matematiikassa heikommin kuin pojat.	.73	.54
V30 Pojat tarvitsevat enemmän matematiikkaa kuin tytöt.	.65	.46
V33 Pojat ovat kiinnostuneempia matemaattisista ongelmista kuin tytöt.	.52	.27
Faktori 4: *Matematiikan tarpeettomuus jokapäiväisessä elämässä*		
V41 Useimmissa ammateissa matematiikan tiedot eivät ole välttämättömiä.	.71	.53
V40 Matematiikkaa ei tarvita jokapäiväisessä elämässä.	.69	.55
V38 Voin tulla hyvin toimeen jokapäiväisessä elämässä käyttämättä matematiikkaa.	-.63	.44
V35 Useimmat ihmiset eivät käytä matematiikkaa työssään.	.58	.36
V37 Matematiikasta on hyötyä jokapäiväisten ratkaisemisessa.	.55	.47
Faktori 5: *Matematiikka avoimena systeeminä*		
V15 Matematiikka auttaa ajattelemaan loogisesti.	.41	.45
V4 Matematiikan alalla tehdään uusia oivalluksia jatkuvasti.	.40	.25
V12 Matematiikassa ei ole tehty uusia oivalluksia pitkään aikaan.	.40	.30
V7 Useimmille matemaattisille tehtäville on olemassa erilaisia ratkaisutapoja.	.40	.21
V3 Matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa on vain vähän sijaa omaperäisille ajatuksille.	-.34	.26
Faktori 6: *Matematiikka sääntökokoelmana*		
V11 Matematiikassa on aina olemassa sääntö, jota voi soveltaa tehtävän ratkaisemisessa.	.59	.36
V13 Matematiikka on joukko sääntöjä.	.53	.45

mässä. Annoin faktorille nimeksi ”Matematiikan tarpeettomuus jokapäiväisessä elämässä”.

Viidennen faktorin väittämissä matematiikka nähdään dynaamisena ja kehittyvänä tieteenä, joka antaa mahdollisuuden soveltaa omia ajatuksia eikä ole sidottu vain tiettyihin tarkasti rajattuihin menettelytapoihin. Loogisuus ja toisaalta arviointi molemmat kuuluvat matematiikan tunnuspiirteisiin. Matematiikka antaa välineitä ajattelijalle, joka on avoin toteuttamaan omia ideoitaan ja löytämään uutta matematiikan suomin keinoin. Annoin faktorille nimeksi ”Matematiikka avoimena systeeminä”. Tämä faktori kuvaa opiskelijan uskomuksia, jotka ovat matematiikkakuvan ensimmäisessä pääkomponentissa.

Kuudennen faktorin väittämissä ovat yhteisenä piirteenä matematiikan säännöt, jotka tulevat keskeiseksi osaksi matematiikkakuvaa. Väite 9 vastaukset on käännetty, joten tässä faktorissa matematiikka nähdään joukoksi sääntöjä, jotka ohjaavat ja ilmeisesti rajaavat matemaattista ajattelua. Matemaattisen ongelman ratkaisuprosessi nähdään vain oikean ratkaisuun johtavan säännön löytämisenä. Matematiikka nähdään omana suljettuna alueenaan, jossa toimitaan sen hyvin määritellyillä säännöillä. Matematiikka muistuttaa peliä, jossa on tarkat säännöt ja joihin pelin eteneminen pelkästään perustuu. Matematiikan luonne nähdään ”työkalupakki”- ja systeemi- näkökulmasta. Annoin faktorille nimeksi ”Matematiikka sääntökokoelmana”. Tämä faktori kuvaa opiskelijan uskomuksia matematiikasta, jotka ovat matematiikkakuvan ensimmäisessä pääkomponentissa.

8.4.4 Matematiikkaan liittyvien uskomusten muutokset 1990-luvulla

Uskomusten muutoksia voidaan tarkastella vertailemalla vuonna 1999 tehdyn tutkimuksen (TUT99) tuloksia vuosina 1993–1995 tehtyjen tutkimusten (TUT93) tuloksiin. Viimeksi mainitut tutkimukset olen tehnyt lisensiaatintutkimustani varten (Joutsenlahti 1996) Tervakoskella ja Laitilassa. Näissä käytetty mittaristo on väittämien osalta sama kuin tutkimuksessa TUT99, mutta pitkän matematiikan opiskelijoiden vastausten lukumäärä on 70, kun tutkimuksessa TUT99 se on 384. Vuoden 1999 tutkimuksessa TUT99 oli myös mukana Tervakosken ja Laitilan lukiot, joten tässä tarkastellaan myös pelkästään näissä lukioissa tapahtuneita muutoksia uskomuksissa. Tässä yhteydessä on vielä syytä huomata, että verrattavia aikakausia erottavat eri valtakunnalliset opetussuunnitelmat ja muutokset ylioppilaskirjoituksissa.

Vertaamalla tutkimusten TUT99 ja TUT93 väittämien vastausjakaumia χ^2-testillä suurimmassa osassa ei ollut tilastollisesti merkittäviä poikkeamia, mutta joitakin eroavaisuuksia löytyi (taulukko 8.2).

TAULUKKO 8.2: Tutkimusten TUT99 ja TUT93 väittämien vastausjakaumien eroja (* p<0,05; ** p<0,01; *** p<0,001)

Nro	Väittämä	χ^2 $p =$
1	Matematiikka muuttuu nopeasti lähitulevaisuudessa	.005**
4	Matematiikan alalla tehdään uusia oivalluksia jatkuvasti.	.010**
17	Toivon saavani opiskella enemmän matematiikkaa.	.022*
24	En halua käyttää kovin paljon aikaani matematiikan opiskelemiseen.	.000**
27	Olen valmis työskentelemään pitkänkin aikaa ymmärtääkseni uuden asian matematiikassa.	.022*
39	Suurin osa matematiikasta on käyttökelpoista työelämässä.	.000***
45	Matematiikan opetusta pitäisi lisätä	.001**
46	Matematiikka on vaikein minun oppiaineistani.	.022*

Seuraavassa arvioin muutoksen suuntaa hyväksymis- ja hylkäysprosenttien avulla. Väittämien 1 ja 4 muutokset kuvaavat opiskelijan matematiikkakuvan muutoksia. Ne nuoret, jotka opiskelivat 1990-luvun loppupuolella, pitivät matematiikkaa jonkin verran staattisempana tieteenä kuin saman vuosikymmenen alkupuolen opiskelijat. Toisaalta väittämien 1 ja 4 "En osaa sanoa" -valintojen määrä kasvoi huomattavasti suuremmiksi[30] kuin tutkimuksessa TUT93. Tämä antaa viitteitä siitä, että uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelevat olivat epätietoisempia matematiikan nykyisistä kehityssuunnista ja saavutuksista kuin vanhan opetussuunnitelman aikana opiskelleet. Tämä tulos näkyi myös oireellisena[31] verrattaessa pelkästään tutkimuksen TUT99 Laitilan ja Tervakosken opiskelijoiden vastauksia (n=82) tutkimuksen TUT93 vastauksiin. Tulos on siinä mielessä hieman yllättävä, että nimenomaan uudessa opetussuunnitelmassa on sija syventäville erikoiskursseille, joissa voidaan esitellä ja perehtyä matematiikan uusiin tutkimusaluei-

[30]Väite 1: 19 %:sta 38 %:iin; väite 4: 23 %:sta 37 %:iin.
[31]χ^2-testissä p= 0,081.

siin[32].

Opiskelijan omakohtaisesta suhtautumisesta matematiikkaan on muuttunut matematiikan opiskelun määrän toive (väite 17). Vanhan opetussuunnitelman aikana opiskelleista vastaajista 54 % toivoi saavansa opiskella enemmän matematiikkaa, mutta uuden opetussuunnitelman aikana opiskelleista vain 35 %. Tämä on nähtävissä myös väittämän 45 vastauksissa, joissa väittämän hyväksyy tutkimuksessa TUT93 57 % ja TUT99 31 % sekä hylkää vastaavasti 16 % ja 30 %. Uusi opetussuunnitelma mahdollisti koulukohtaisten syventävien ja soveltavien kurssien tarjoamisen, minkä johdosta useimmissa kouluissa pitkän matematiikan toteutuneiden kurssien määrä nousi merkittävästi[33]. Valitsemalla kaikki tarjolla olevat pitkän matematiikan kurssit ei jää enää aikaa opiskella enempää pitkää matematiikkaa normaalin 13 jakson aikana. Uusi opetussuunnitelma on toteuttanut siis väittämän 17 mukaisen toiveen matematiikkaan suuntautuneilla opiskelijoilla.

Voimakas muutos on tapahtunut väittämän 24 kohdalla[34], jonka hyväksyi tutkimuksen TUT93 opiskelijoista 14 % ja hylkäsi 77 %, mutta tutkimuksen TUT99 opiskelijoista sen hyväksyi 41 % ja hylkäsi 44 %. Samaa ilmiötä kuvaa väite 27, jonka tutkimuksessa TUT93 hyväksyi 65 % ja hylkäsi 24 % ja tutkimuksessa TUT99 hyväksyi 46 % ja hylkäsi 39 %. Myös vertailu pelkästään Laitilan ja Tervakosken opiskelijajoukoilla toi selvästi näkyviin kyseisen ilmiön. Opiskelijat 1990-luvun loppupuolella eivät ole enää niin halukkaita käyttämään aikaansa pitkän matematiikan opiskeluun kuin vuosikymmenen alkupuolella. Opiskelijoiden pitkäjänteisyys koulutyöskentelyssä on vähentynyt myös opettajan näkökulmasta katsottuna[35]. Jos tehtävä ei ratkea muutaman yrityskerran jälkeen, niin se ohitetaan tai pyydetään lähes valmista ratkaisumallia. Tähän ilmiöön saattaa olla osaksi syynä nuorisokulttuuriin kuuluva nopeatempoisuus ja vähentynyt orientoituminen tiettyyn ennalta suunniteltuun päämäärään pyrkimiseen[36]. Tätä tukee omalta osaltaan lukion jaksoluku, jossa asiakokonaisuuksia käydään läpi nopeassa tempossa[37], jonka jälkeen niistä on kuulustelu. Jos ei ole syystä tai toisesta omaksunut vaadittuja kurssisisältöjä, niin muilla kursseilla ei ole yleensä mahdollista palata enää jo käsiteltyihin asioihin kertauskurssia lukuun ottamatta ja tällöin uusien asioiden oppiminen vaikeutuu entisestään. Kurssien kuuntelu uudestaan on isoissa lukioissa mielekäs vaihtoehto, mutta vaatii

[32] Esim. kryptografia.

[33] Esim. Tervakosken lukiossa 11 kurssista 15 kurssiin.

[34] χ^2-testi, $p<0{,}01$.

[35] Esim. Rosenberg 1993a.

[36] Ks. Värri 2002 ja haastateltava H1.

[37] Mm. haastateltava H2.

opiskelijalta vastuuntuntoa. Pitkän matematiikan pakollisuuden poistuminen ylioppilaskirjoituksissa vaikuttaa omalta osaltaan muovautuviin opiskelutottumuksiin, sillä osalle opiskelijoista tämä mahdollisuus muodostuu takaportiksi, jonka vuoksi ei ole pakko yrittää viimeiseen asti pitkän matematiikan ongelmien parissa. Jatko-opintojen kannalta pelkästään pitkän matematiikan oppimäärän suorittaminen on jo niin suuri status, että se riittää moniin jatko-opintopaikkoihin, koska opiskelupaikkoja on pitkän matematiikan opiskelijoille enemmän kuin heitä vuosittain kirjoittaa ylioppilaaksi. Toki suosituimpiin opiskelupaikkoihin on pitkän matematiikan opiskelijoilla myös kova kilpailu, jossa menestyminen vaatii pitkäjänteistä opiskelua lukiossa.

Väittämän 39 vastausjakauman muutos on sen suuntainen, että väittämän hyväksyi tutkimuksen TUT99 opiskelijoista 43 % ja tutkimuksen TUT93 opiskelijoista 61 %. Ilmeisesti pitkän matematiikan teoreettinen oppiaines, jossa esitellään vähän sovelluksia käytäntöön, luo paremminkin kuvan tiedematematiikan opiskelusta kuin käytännön työkaluista. Uusien opetussuunnitelmien mukaan opiskelevat kokevat kurssit kiireisiksi ja kaikki aika kuluu perusoppiaineksen läpikäyntiin. Sovelluksille ei juurikaan jää aikaa. Toisaalta kurssimäärät ovat kasvaneet huomattavasti valinnaisuuden myötä, joten opetuksen lisäämiseen ei enää nähdä tarvetta lukiossa (V45).

Väittämän 46 vastausjakauman muutos on tapahtunut siihen suuntaan, että entistä suurempi osa opiskelijoista kokee matematiikan (pitkän) vaikeimmaksi oppiaineekseen. Väittämän hyväksyi tutkimuksessa TUT93 33 % ja TUT99 41 % ja vastaavasti hylkäsi 57 % ja 55 %. Vaikeaksi kokemiseen on vaikuttanut osaksi peruskoulun antaman osaamistason ja lukio-opiskelun vaatiman tason välinen kasvava kuilu, nopeatahtinen lukio-opiskelu ja osaksi väittämien 24 ja 27 vastauksissa esiintullut yritteliäisyyden väheneminen, jolloin epäselväksi jääneet asiasisällöt hankaloittavat uusien asiakokonaisuuksien oppimista. Opetuksessa matematiikassa käytetään suurimmaksi osaksi perinteisiä opetusmenetelmiä[38], kun taas opiskelija saattaa muussa opiskelussa kohdata hyvin monipuolisia hänelle sopivia opetusmenetelmiä.

8.4.5 Tervakosken lukion opiskelijoiden uskomukset nelikentässä

Tervakosken lukion opiskelijat vastasivat vuosina 1994, -95, -98 ja -99 uskomuskyselyyn siten, että vastaukset olivat identifioitavissa. Siten niihin oli liitettävissä kaikki muu opiskelijoista käytettävissä oleva tieto. Tällaisia vastauksia oli yhteensä 62 kappaletta.

[38] Vrt. Kupari 1999.

Tarkastelen nyt näiden opiskelijoiden uskomuksia ja asenteita nelikentässä, jolloin voidaan saada viitteitä kunkin nelikentän ryhmän tyypillisistä uskomuksista ja asenteista. Väittämien vastauksia tulkittaessa olen ottanut koko ryhmän kannalta kriteeriksi väittämän hyväksymiselle tai hylkäämiselle 75 %:n raja, jonka ylittämisen olen katsonut edustavan ryhmän kannanottoa kyseiseen väittämään. Aiempaa tiukempi kriteeri verrattuna aikaisempiin tarkasteluihin johtuu ryhmien pienuudesta. Ryhmien R1, R2, R3, R3' ja R4 vastaukset jaan mainitun kriteerin mukaisesti samoihin väiteryhmiin kuin tutkimuksessa TUT99.

Taulukossa 8.3 ovat väittämät, jotka vähintään kolme neljäsosaa nelikentän ryhmän jäsenistä on joko hyväksynyt tai hylännyt. Samaan taulukkoon on merkitty myös sulkeisiin, jos yli puolet ryhmän vastaajista on hyväksynyt tai hylännyt väittämän. Tämä viimeksi mainittu merkintä on jätetty pois ryhmän R2 kohdalta, koska siihen kuului vain vähän opiskelijoita (3 opiskelijaa).

Ryhmässä R2 on 3 opiskelijaa, jotka kaikki ovat poikia. He kaikki kirjoittivat matematiikan pakollisena. Ryhmän opiskelijoiden päättötodistuksen matematiikan arvosana oli korkeintaan 7, ja he saivat pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista vähintään 27 pistettä.

Ryhmässä R1 on 24 opiskelijaa, joista poikia on 18 ja tyttöjä 6. Pakollisena matematiikan kirjoitti 20 ja ylimääräisenä 4 opiskelijaa. Ryhmän opiskelijoiden päättötodistuksen matematiikan arvosana oli vähintään 8, ja he saivat pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista vähintään 27 pistettä.

Ryhmässä R3, josta on poistettu alaryhmään R3' kuuluvat opiskelijat, on 14 opiskelijaa. Heistä on poikia 10 ja tyttöjä 4. Pakollisena matematiikan kirjoitti 7 ja ylimääräisenä 7 opiskelijaa. Ryhmän opiskelijoiden päättötodistuksen matematiikan arvosana oli 5, 6 tai 7 ja he saivat pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista korkeintaan 26 pistettä[39]. Alaryhmään R3' kuuluu 12 opiskelijaa, joista poikia on 4 ja tyttöjä 8. Pitkän matematiikan pakollisena kirjoitti 3 ja ylimääräisenä 9 opiskelijaa. Ryhmän opiskelijoiden päättötodistuksen matematiikan arvosana oli 6 tai 7, ja he saivat pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista korkeintaan 12 pistettä.

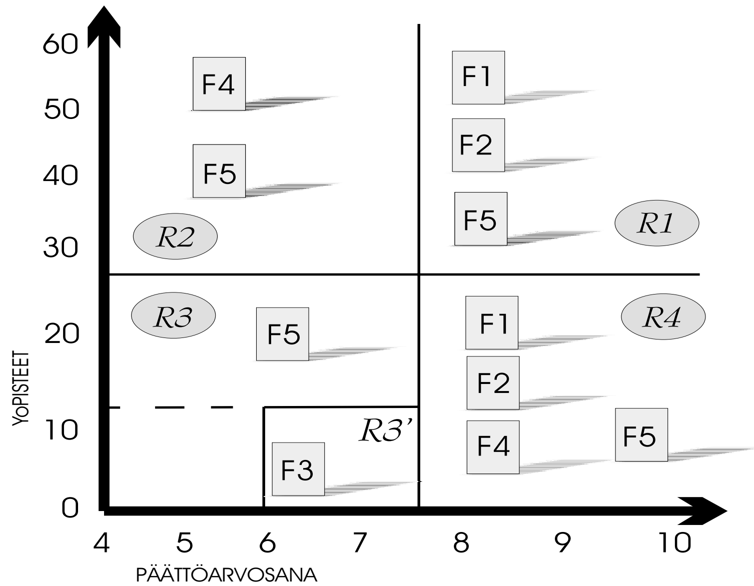
Ryhmässä R4 on 9 opiskelijaa, joista poikia on 7 ja tyttöjä 2. Pakollisena matematiikan kirjoitti 6 ja ylimääräisenä 3 opiskelijaa. Ryhmän opiskelijoiden päättötodistuksen matematiikan arvosana oli vähintään 8 ja he saivat pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista korkeintaan 26 pistettä.

Tarkasteltaessa Tervakosken opiskelijoiden kannanottoja väittämiin (taulukko 8.3) ja saatua faktorirakennetta (taulukko 8.1) voidaan tutkia, mitkä fak-

[39] Päättöarvosanan 6 tai 7 saaneet saivat yli 12 pistettä kirjoituksissa.

TAULUKKO 8.3: Tervakosken opiskelijoiden ($n = 62$) hyväksymät + tai hylkäämät − väittämät nelikentän ryhmissä. Kriteerinä on, että vähintään 75 % vastaajista joko hyväksynyt tai hylännyt väittämän. Suluissa olevat merkinnät tarkoittavat hyväksymis- tai hylkäysprosentin olleen 50 %:n ja 75 %:n välissä.

Väite	R2 ($n = 3$)	R1 ($n = 24$)	R3 ($n = 14$)	R3' ($n = 12$)	R4 ($n = 9$)
V3		−	(−)		−
V5	+	+	+	+	+
V6	+	+	+	(+)	(+)
V7	+	+	+	(+)	+
V8		−	−	(−)	−
V9		(−)	(+)	−	(−)
V11	−	(−)	+	(+)	(+)
V13	−	−	(−)	(−)	−
V15	+	+	+	+	+
V16	+	+	+	+	+
V17	(+)	(+)			+
V18	+	+	+	+	+
V19	+	+			+
V20		−	(+)	+	−
V22		−	−	(−)	−
V23	+	+		(−)	+
V24		−			−
V25		−			−
V26	−	−	(−)	(−)	−
V27		+			+
V28	−	(−)	−	−	−
V30	−	(−)	−	−	(−)
V31	+	+	+	+	+
V32			(−)	−	(−)
V33		+	(+)	+	(+)
V34		+	+	+	(+)
V35		(−)	(−)	(−)	−
V36		(+)	(+)	(−)	+
V37	+	+	+	+	+
V38	−	(−)	(−)	(−)	−
V39	−	(+)	+	(−)	−
V40	−	−	(−)	−	−
V41		(−)	(−)	(−)	−
V43		+			(+)
V44		+	+	+	+
V46		−			−



KUVIO 8.4: Uskomustutkimuksen faktoreiden (ks. taulukko 8.1, s. 194) voimakkaimmat esiintymät nelikentän ryhmissä.

torit ovat edustettuina nelikentän eri ryhmissä. Olen analysoinut Tervakosken opiskelijoiden kannanottoja faktorirakenteen väittämiin nelikentän eri ryhmissä ja merkinnyt kenttiin niiden tyypillisimmät faktorit (kuvio 8.4). Lukion kursseissa hyvin menestyvillä ryhmillä R1 ja R4 korostuvat hyvä kuva matematiikan opiskelusta ja itsestä matematiikan taitajana[40] sekä uskomukset matematiikan merkityksestä tieteenä opiskelijalle[41]. Ryhmässä R4 nousi lisäksi esille faktori F4 ”Matematiikan hyödyllisyys”. Ryhmässä R2 erottuivat faktorit F4 ja F5, joista viimeksi mainittu ilmeni myös ryhmässä R3. Alaryhmän R3’ jäsenillä oli yhteinen näkemys sukupuolen merkityksestä matematiikan opiskelussa, joka näkyi faktorissa F3 ”Sukupuoli ja matematiikka”.

Esittelen seuraavaksi taulukon 8.3 tulokset samalla jaottelulla, jota käytin frekvenssianalyysissä.

Matematiikka tieteenä

Kaikkien nelikentän ryhmien mielestä matematiikka auttaa ajattelemaan loogisesti ja tiettyjen täsmällisten sääntöjen mukaan, vaikka matematiikka ei ole vain joukko sääntöjä (V15, V5, V13). Yksimielisyys oli myös siitä, että kyky

[40]Faktorit F1 ja F2.
[41]Faktori F5.

arvioida on tärkeä taito ja useimmille matemaattisille tehtäville on olemassa erilaisia ratkaisutapoja (V6, V7).

Ryhmissä R2 ja R1 katsottiin, että matematiikassa ei ole aina olemassa sääntöä, jota voidaan käyttää tehtävän ratkaisemisessa (V11), mutta ryhmissä R3, R3' ja R4 uskottiin, että aina löytyy tällainen sääntö. Ryhmä R3' ei usko, että matemaattisia ongelmia voidaan ratkaista käyttämättä sääntöjä (V9). Ryhmillä R3, R3' ja R4 kuva matematiikasta on lähellä "työkalupakki"-näkökulmaa. Ryhmät R1, R3 ja R4 eivät usko, että matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa on vain vähän sijaa omaperäisille ajatuksille (V3). Suurin osa näistä opiskelijoista ei pidä matematiikan oppimista pääosin ulkoa oppimisena (V8).

Matematiikka ja minä

Kaikkien ryhmien jäsenet haluavat todella menestyä matematiikassa, ja heistä tuntuu hyvältä ratkaista itse matematiikan tehtävä (V16, V18). Valtaosa kaikista ryhmistä uskoi, että kovalla yrityksellä menestyisivät matematiikassa (V26). Enemmistöt kaikista ryhmistä lukuun ottamatta ryhmää R2 opiskelisivat edelleen matematiikkaa, jos tällainen valintamahdollisuus olisi (V22).

Enemmistö ryhmien R2, R1 ja R4 opiskelijoista toivoi saavansa opiskella lisää matematiikkaa. He olivat sitä mieltä, että he ymmärtävät yleensä matematiikan tunneilla käsiteltävät asiat (V17, V19). Suurin osa opiskelijoista ryhmissä R3 ja R3' ei pitänyt itseään kovin hyvänä matematiikassa, kun taas ryhmien R1 ja R4 opiskelijat pitivät itseään ilmeisesti aika hyvinä (V20). Vaikea matematiikan tehtävä tuntui mieluisalta haasteelta ryhmien R2, R1 ja R4 opiskelijoista, mutta ei enemmistölle ryhmän R3' opiskelijoista (V23). Ryhmien R1 ja R4 opiskelijat ovat valmiit käyttämään melko paljon aikaansa matematiikan opiskelemiseen ymmärtääkseen uuden asian matematiikassa (V24, V27). Heille matematiikka ei ole vaikeampaa kuin useimmille muille (V25).

Matematiikka ja sukupuoli

Kaikkien ryhmien mielestä miehistä ei tule parempia tiedemiehiä eikä insinöörejä kuin naisista. Pojat eivät tarvitse sen enempää matematiikkaa kuin tytöt, joille myös ammattiura on yhtä tärkeä kuin miehillekin (V28, V30, V31). Suurin osa kaikkien ryhmien opiskelijoista paitsi ryhmässä R2 uskovat, että pojat ovat kiinnostuneempia matemaattisista ongelmista kuin tytöt (V33).

Valtaosa ryhmien R3, R3' ja R4 opiskelijoista ei usko, että tytöt menestyvät matematiikassa heikommin kuin pojat (V32).

Matematiikan hyödyllisyys

Enemmistö kaikista ryhmistä uskoo, että matematiikasta on hyötyä jokapäiväisten ongelmien ratkaisussa ja että tullakseen hyvin toimeen jokapäiväisessä elämässä he tarvitsevat matematiikkaa (V37, V38, V40).

Useimmat ryhmien R1, R3, R3' ja R4 opiskelijoista ovat sitä mieltä, että matematiikan osaaminen on tärkeätä hyvän työpaikan saamiseksi ja että monissa ammateissa tarvitaan matematiikkaa (V34, V35, V41). Suurin osa ryhmän R3' opiskelijoista ei haluaisi opiskella ammattiin, jossa käytetään matematiikkaa, kun taas suurin osa ryhmien R1, R3 ja R4 opiskelijoista haluaisi työskennellä sellaisissa tehtävissä (V36). Ryhmien R1 ja R3 enemmistö katsoo, että valtaosa matematiikasta on käyttökelpoista työelämässä, mutta enemmistö ryhmistä R2, R3' ja R4 on eri mieltä (V39).

Matematiikan opetus

Yksimielisiä kannanottoja ei kertynyt mistään tämän alueen väittämistä. Ryhmien R1 ja R4 enemmistö uskoo, että jokainen pystyy oppimaan matematiikkaa, jos opetusmenetelmiin kiinnitetään riittävästi huomiota (V43). Samat ryhmät eivät pidä matematiikkaa vaikeimpana oppiaineenaan (V46). Kaikki muut ryhmät paitsi R2 ovat sitä mieltä, että opetuksessa pitää kiinnittää entistä enemmän huomiota käytännön sovelluksiin (V44).

8.5 Mittarien ja tulosten arviointia

Käytetyn mittariston väitteet (TUT99) olivat pääosin toisesta kansainvälisestä IEA-tutkimuksesta, joten niiden validiteetti ja reliabiliteetti oli testattu jo aikaisemmissa tutkimuksissa. Tämän tutkimuksen tulosten Cronbachin α on 0,72, mikä osoittaa mittarin hyvää reliabiliteettia. Frekvenssianalyysin ja ristiintaulukoinnin tuottamien tulosten reliabiliteetti lienee riittävä, sillä otos on tilastollisesti edustava (n=384) pitkän matematiikan opiskelijoista, vaikka käytetty otantamenetelmä ei ollut tilastollisena menetelmänä pätevä.

Faktorianalyysin tuloksena saadun faktorirakenteen tilastollisen tarkastelun pohjana voidaan käyttää ML-tekniikassa SPSS-ohjelman Goodness-of-fit-testiä ohjelman oletusarvoilla ($p<0{,}05$), jossa $\chi^2 = 1004,430$ (df 522) ja siten $p<0{,}001$. Täten faktorirakennemalli on hyväksyttävissä tilastollisin perustein. Saatu faktorirakenne ei poikennut oleellisesti aikaisemmassa tutkimuksessani esitetystä (Joutsenlahti 1996).

Osana tulosten luetettavuuden tarkastelua ja toisaalta mahdollisten muutosten arviointia vertaan nyt saatuja tuloksia aikaisempien tutkimusten tuloksiin. Ottelinin (1998, 241–246) tutkimuksessa tuli esille myös opiskelijoiden uskomus matematiikan hyödyllisyydestä käytännön elämässä ja toisaalta kiireen aiheuttama ahdistavuus opiskelussa. Oppilaat kokivat matematiikan oppiaineksen sisältävän paljon erillisiä tietoja, mutta ei selviä kokonaisuuksia (mt., 247). Tiedon kokeminen proseduraaliseksi tuli esille myös tämän tutkimuksen haastatteluissa.

Uskomuskyselyn tulokset poikkesivat vuosikymmenen alun tutkimuksen (Joutsenlahti 1996) tuloksista vain joidenkin väitteiden kohdalla tilastollisesti merkitsevästi (taulukko 8.2). Nämä poikkeamat ovat sisällöllisesti mielenkiintoisia; niitä tukevat myös muut havainnot[42] ja haastattelut, joten on epätodennäköistä, että ne ovat sattumaa. Lisäksi samansuuntaisia muutoksia on havaittavissa verrattaessa vain Tervakosken ja Laitilan tutkimusaineistoja 1990-luvun alku- ja loppupuolelta keskenään.

Käytin vuoden 1999 uskomuskyselyn (n=384) tarkastelussa hyväksymis- tai hylkäysprosenttina 50 %:n rajaa. Ongelmallinen tilanne syntyy, jos jonkin väitteen kohdalla vastausjakauma polarisoituu voimakkaasti molempiin ääripäihin siten, että niiden osuudet ovat lähellä 50 %:n rajaa. Tällöin voisi olla vain muutaman vastaajan ero ääripäiden vastausmäärissä. Liitteen 11 taulukossa 9.5 on laskettavissa, että minkään väitteen vastausjakaumassa ei ole edellä kuvattua tilannetta. Tähdellä merkittyjen väitteiden hyväksymis- ja hylkäysprosenttien erotuksen itseisarvo on yli 20 %-yksikköä paitsi väitteissä V29[43] ja V46[44]

Tervakosken opiskelijoiden kolmen opiskelijan ryhmä R2 on kooltaan liian pieni, jotta voisi tehdä luotettavia päätelmiä tämän ryhmän tyypillisistä uskomuksista. Toisaalta väitteiden hyväksymis- ja hylkäämiskriteeri nostettiin 75 %:iin luotettavuuden lisäämiseksi, mikä osaltaan parantaa lopputuloksen luetettavuutta. Haastattelujen tulokset syventävät näkemystä ryhmien uskomuksista ja siten kasvattavat reliabiliteettia. Haastateltavien uskomuskyselyvastaukset ja haastattelussa antamat vastaukset eivät olleet ristiriidassa.

[42] Muun muassa Värri 2002.
[43] 19,8 %–yksikköä.
[44] 13,9 %–yksikköä.

8.6 Tutkimuksen tulokset opiskelijan matematiikkakuvasta

III Minkälainen on pitkän matematiikan opiskelijan matematiikkakuva?

Opiskelijan matematiikkakuva vaikuttaa oleellisesti hänen matemaattiseen ajatteluunsa. Matematiikkakuva ohjaa omalta osaltaan opiskelijan metakognitioita ja vaikuttaa siten ongelmanratkaisuprosesseihin, jossa metakognitiot ohjaavat strategiatietojen käyttöä. Tarkastelen pitkän matematiikan opiskelijoiden matematiikkakuvaa ensin yleisesti ja sen jälkeen nelikentän ryhmissä, joita tukevat edellisessä luvussa olleet opiskelijoiden haastattelut.

Opiskelijoiden mielikuvissa matematiikasta kaikki kolme näkökulmaa[45] tulevat esille opiskelijoiden vastauksissa. Tutkimukseen osallistuneiden opiskelijoiden mielestä matematiikka auttaa ajattelemaan loogisesti ja tiettyjen täsmällisten sääntöjen mukaan[46]. Lisäksi matematiikka on joukko sääntöjä, joista aina löytyy jokin, jota voi soveltaa tehtävän ratkaisemisessa[47]. Useimmille matemaattisille tehtäville opiskelijat uskovat löytyvän erilaisia ratkaisutapoja, joista muun muassa yrityksen ja erehdyksen menetelmää voidaan usein käyttää tehtävän ratkaisemisessa. Kyky arvioida on myös tärkeä matemaattinen taito. Näissä kannanotoissa tulee mielestäni esille prosessinäkökulma matematiikasta. Näiden tulosten perusteella voidaan todeta, että pitkän matematiikan opiskelijoiden mielikuvan mukaan matematiikka on selkeästi strukturoitu tieteenala, joka on looginen ja jonka tuottamat tulokset antavat mahdollisuuden ratkaista matematisoituja ongelmia eri tavoilla. Matematiikan nykyisistä kehityssuunnista opiskelijoilla ei ole juurikaan tietoa, sillä esimerkiksi väittämään ”Matematiikassa ei ole tehty uusia oivalluksia pitkään aikaan” ei ollut kantaa (”En osaa sanoa”) noin 53 %:lla ja väittämään ”Matematiikka muuttuu nopeasti lähitulevaisuudessa” ei ollut kantaa 39 %:lla vastaajista.

Opiskelijoiden uskomukset itsestään matematiikan oppijana ja sen käyttäjänä ovat odotusten mukaisia pitkän matematiikan opiskelijoille. Matematiikasta koettiin olevan hyötyä jokapäiväisessä elämässä ja sen nähtiin kuuluvan jokapäiväiseen elämään. Nämä ovat ymmärrettäviä kannanottoja pitkän matematiikan opiskelijoilta, joista useimmille matematiikan tärkeyttä on perusteltu muun muassa peruskoulussa mainituilla argumenteilla ja väittämän ”On tärkeätä osata matematiikkaa, jotta saisi hyvän työpaikan” mu-

[45]”Työkalupakki”-, systeemi- ja prosessi -näkökulma.
[46]Systeemi-näkökulma.
[47]”Työkalupakki”-näkökulma.

kaisesti. Pitkän matematiikan opiskelijat haluavat menestyä matematiikan opinnoissaan ja kokevat menestyvänsä tai ainakin näkevät yrittämisen tuovan menestystä opinnoissa. Onnistumisen ja auttamisen ilo tulevat esille itse ratkaistuissa matematiikan tehtävissä ja halussa auttaa muita matematiikan tehtävien ratkaisemisessa. Opiskelijat kokevat yleensä ymmärtävänsä matematiikan tunneilla käsitellyt asiat, eivätkä he pidä matematiikan oppimista suurimmaksi osaksi ulkoa oppimisena. Viimeksi mainituista tuloksista on näkyvissä, että opettajien työskentelyyn tunneilla on oltu ilmeisesti tyytyväisiä sen osalta, mikä koskee uusien asioiden opettamista. Opiskelijoiden uskomukset itsestään matematiikan oppijana ovat pääsääntöisesti myönteisiä. Suurin osa opiskelijoista pitää pitkän matematiikan valintaansa edelleen oikeana ratkaisuna.

Uskomukset matematiikan opetuksesta ovat myös kohtalaisen yksimielisiä. Opiskelijoiden mielestä jokainen pystyy oppimaan matematiikkaa, jos opetusmenetelmiin kiinnitettäisiin riittävästi huomiota. Tässä lienee viittaus lukion matematiikan yksipuoliseen opettajajohtoiseen opetukseen, joka johtuu osaltaan suurista opetusryhmistä ja matematiikan opetuksen konservatiivisuudesta[48]. Opetuksessa pitäisi opiskelijoiden mielestä kiinnittää entistä enemmän huomiota käytännön sovelluksiin. Opiskelijat näkevät opetuksen ehkä teoreettisena ja esimerkit keinotekoisina siinä mielessä, että niillä ei ole suoraa yhtymäkohtaa käytännön sovelluksiin.

Opiskelijoiden mielestä matematiikan oppiminen ei perustu ulkoaoppimiseen, vaan loogisten strukturoitujen tietorakenteiden ymmärtäminen on edellytys menestyksekkäille matematiikan opinnoille. Sukupuolen ja matematiikan välisistä yhteyksistä vastaajilla oli selkeät kannanotot. Yleisesti ottaen poikia ei pidetty lahjakkaampina matematiikassa kuin tyttöjä. Lähes 47 % vastaajista uskoi ja 25 % vastaajista ei uskonut poikien olevan kiinnostuneempia matematiikasta kuin tyttöjen. Vanhat stereotypiat miehistä parempina insinööreinä ja tiedemiehinä tai ammattiuran suuremmasta tärkeydestä miehille kuin naisille eivät saa tukea tutkimuksen opiskelijoilta. Myöskään poikien ei nähty tarvitsevan enemmän matematiikkaa kuin tyttöjen, mikä on johdonmukaista mainittujen käsitysten valossa.

Tervakosken opiskelijoiden uskomukset nelikentässä (taulukko 8.3) ovat painottuneet suunnilleen samalla lailla kuin koko tutkimuksenkin. Ryhmän R2 kolmen opiskelijan joukkoa on syytä pitää rajoittavana tekijänä pohdittaessa tulosten yleistettävyyttä. Olen nimennyt ryhmät niitä kuvaavalla nimikkeellä. Nimeämisessä olen ottanut huomioon ryhmien opiskelijoiden menestymisen kursseilla ja ylioppilaskirjoituksissa sekä uskomuskyselyn ja haastattelu-

[48]Esim. Kupari 1999.

jen esiin tuomat piirteet.

Ryhmä R1 "Menestyjät"

Hyvä kurssimenestys antaa varmuutta tämän ryhmän opiskelijoille omasta osaamisestaan ja heillä on positiivinen kuva itsestään matematiikan oppijana (V46, V20, V19). Kuva matematiikasta on monipuolinen ja siinä tulee esille myös matematiikan prosessiluonne (V3, V9). Matematiikka on tämän ryhmän opiskelijoille yksi tärkeimmistä ja mieluisimmista oppiaineista (V17). He ovat valmiit käyttämään paljon aikaansa matematiikan opiskeluun (V24), sillä he ovat ilmeisesti kokeneet huolellisen asioihin paneutumisen ja pitkäjänteisen työskentelyn tuovan toivotun opiskelumenestyksen. Ryhmän R1 kuvassa matematiikan opetuksesta korostuu usko opetusmenetelmiin, joita oikein soveltaen kaikkien on mahdollista oppia matematiikkaa (V43).

Ryhmä R2 "Kypsyjät"

Vaatimaton menestys kursseissa ei anna tälle ryhmälle kovin hyvää ennustetta menestykselle kirjoituksissa. Heikkoon kurssimenestykseen löytyy useita syitä[49]. Ryhmän opiskelijoille on tyypillistä viimeistään opintojen loppuvaiheessa aloitettu päämäärähakuinen pitkän matematiikan opiskelu, jossa on huomattava osuus itsenäistä ja omaehtoista harjoittelua (esimerkiksi haastateltava H3). Tämän ryhmän opiskelijoiden kuva matematiikasta ei ole rajoittunut "työkalupakki"-näkökulmaan (V11). Kuvaavaa tälle ryhmälle on, että vaikeat matematiikan tehtävät tuntuvat näistä opiskelijoista mieluisalta haasteelta (V23). Kurssimenestyksen perusteella voi päätellä, että keskimääräistä useammat tehtävät tuntuvat tämän ryhmän opiskelijoille vaikeilta. Opiskelijoiden asennoituminen vaikeaan tehtävään haasteena ja usko siihen, että yrittäminen tuo tulosta (V26), tekee heidän työskentelystään pitkäjänteistä ja päämäärätietoista. Nämä piirteet edistävät matemaattisen ajattelun kehittymistä laaja-alaiseksi ja ovat siis keskeisiä pitkän matematiikan opiskelussa.

Ryhmä R3 "Suoriutujat" ja alaryhmä R3' "Luovuttajat"

Näiden ryhmien opiskelijoilla kuva matematiikasta on pitkälti "työkalupakki"-näkökulman mukainen (V11). Mielikuva itsestä matematiikan oppijana on negatiivinen (V20, haastateltava H2). Ryhmien opiskelijoilla on useilla ilmeisesti vaikeuksia ymmärtää opiskeltavia käsitteitä (V19), eivätkä he ole pitkän matematiikan opiskelussaan yhtä pitkäjännitteisiä kuin ryhmän R1 opiskelijat (V24, V27). Lisäksi lukion matematiikan opiskelun opiskelutahti oli liian kiivas useimmille näiden ryhmien opiskelijoille (haastateltava H2).

[49] Ks. alaluku 7.3.2.

Ryhmän R3' opiskelijoista suurin osa kirjoitti pitkän matematiikan ylimääräisenä eivätkä siksi käyttäneet lukion loppuvaiheessa enää paljon aikaansa matematiikan opiskeluun (haastateltava H2). Ryhmien R3 ja R3' opiskelijat arvostavat matematiikan ja sen osaamisen tärkeäksi niin työssä kuin arkielämässäkin (V34–V41). Kuvassa matematiikan opetuksesta nousee esille painotus käytännön sovelluksiin, joita pitäisi olla entistä enemmän matematiikan opetuksessa (V44). Alaryhmän R3' opiskelijoista suurin osa jättää pitkän matematiikan opiskelun vaiheeseen, jossa pitäisi alkaa jäsentää ja yhdistellä aikaisemmissa kursseissa opiskeltuja eri osa-alueiden käsitteitä. Yksi tärkeimmistä vaiheista pitkän matematiikan opiskelusta jää heiltä tietoisesti tekemättä. He luovuttavat näin mahdollisuutensa oppia matematiikkaa opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisesti sekä menestyä pitkän matematiikka ylioppilaskirjoituksissa. Muut ryhmän R3 opiskelijat suoriutuvat urakastaan odotusten mukaisesti.

Ryhmä R4 "Pettyjät"

Kuva matematiikasta on painottunut tämän ryhmän opiskelijoilla "työkalupakki"-näkökulmaan (V9, V11, haastateltava H1), vaikka prosessi-näkökulmakin tulee esille (V3). Hyvä kurssimenestys tukee ryhmän opiskelijoiden käsitystä itsestään hyvänä matematiikan oppijana (V20). Ryhmän opiskelijat ovat suurimmaksi osaksi tunnollisia työnsä tekijöitä, jotka ovat valmiit työskentelemään pitkäjänteisesti matematiikan parissa ainakin pari ensimmäistä opiskeluvuotta (V24, V27).

Kaikki ryhmään R4 kuuluvat haastateltavat opiskelijat (H1, H4, H6) pitivät suurimpana syynä heikkoon menestykseensä ylioppilaskirjoituksissa tekemänsä työn vähyyttä pitkän matematiikan eteen. Heillä oli vahva näkemys, että työn ja erityisesti harjoittelun määrä on ratkaisevassa asemassa menestymiseksi matematiikassa. Syitä työskentelyn vähäisyyteen löytyi useita: matematiikan valitseminen ylimääräiseksi kokeeksi (haastateltava H6), opiskelutottumukset (haastateltava H1) ja vallitseva käsitys pitkäjänteisestä työstä.

Opiskelijat valitsevat matematiikan ylimääräiseksi kokeeksi, koska he kokevat reaalikokeen huomattavasti helpommaksi (haastateltavat H2 ja H6) ja siksi se on turvallista valita pakolliseksi kokeeksi. Ylimääräiseen kokeeseen valmistautuminen on ylimalkaan heikompaa kuin pakolliseen kokeeseen (haastateltava H6). Pitkän matematiikan ylioppilaskoe tuntuu osalle tämän ryhmän opiskelijoista vaikealta, koska he eivät hallitse tehtäväsarjoja, joissa tehtävät ovat satunnaisesti eri osa-alueilta (haastateltava H6). Heidän matemaattinen ajattelunsa on sisältörajoittunutta, mikä on tullut esille 3. vuoden syksyn harjoitustehtäväsarjoissa, kertauskurssilla ja preliminääreissä. Opiskelijoiden omat havainnot tästä puutteesta ovat ohjanneet osaltaan matematiikan valintaa ylimääräiseksi kokeeksi.

Opiskelutottumukset, joissa kokeisiin valmistautuminen on huolimatonta ja toiminta kokeessa nojaa vahvasti taulukkokirjan ja graafisen laskimen taitavaan käyttöön, ovat osalla opiskelijoista syynä heikkoon menestykseen kirjoituksissa (haastateltava H1). Tehtäväsarjoissa, joissa on useaan eri matematiikan osa-alueeseen kuuluvia tehtäviä, ei ole juurikaan apua taulukkokirjasta ja graafisesta laskimesta, jos opiskelijalla ei ole riittäviä strategiatietoja ja metakognitiivisia taitoja.

Vaikka pitkän matematiikan opiskelijoita pidetään usein jo pelkästään valintansa vuoksi pitkäjänteisinä opiskelijoina, niin 1990-luvun loppupuolen opiskelijoilla on nähtävissä lyhytjänteisempää suhtautumista opiskeluun kuin vuosikymmenen alkupuolen opiskelijoilla (8.2). Tämä ”ajan henki” on ollut nähtävissä yleisemminkin nuorison toiminnassa (Värri 2002).

Useimmat tämän ryhmän opiskelijat ovat pettyneitä matematiikan ylioppilaskirjoitustensa tulokseen, sillä kurssimenestys antoi hyvän ennusteen myös kirjoituksiin.

3.1 Minkälainen on pitkän matematiikan opiskelijan matematiikkakuva eri sukupuolten muodostamissa ryhmissä?

Sukupuolten välillä ei ollut tilastollisesti merkittävä eroja uskomuksissa matematiikasta tieteenä (9.7). Kuva matematiikasta painottuu ”työkalupakki”-näkökulmaan ja se saattaa olla hieman voimakkaampi tytöillä kuin pojilla (V9). Kuva itsestä matematiikan osaajana on pojilla vahvempi kuin tytöillä (V20, haastateltavat tytöt H4 ja H2), jotka eivät pidä esimerkiksi vaikeita matematiikan tehtäviä niin mieluisana haasteena kuin pojat (V23). Suurin osa tytöistä pitää matematiikkaa vaikeimpana oppiaineenaan, kun taas suurin osa pojista ei pidä (V46). Tytöillä on voimakkaammat kannanotot[50] sukupuolen merkityksestä matematiikan opiskelussa kuin pojilla, joiden näkemysten suunta on kuitenkin yhtenevä tyttöjen näkemysten kanssa (V28–V32).

3.2 Minkälainen on pitkän matematiikan opiskelijan matematiikkakuva eri opetussuunnitelmien mukaan opiskelevien ryhmissä?

Uskomukset matematiikasta tieteenä ovat muuttuneet jonkin verran 1990-luvulla, joten uskomukset matematiikasta eivät ole stabiileja[51]. Uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleet pitävät matematiikkaa staattisempana tieteenä kuin vanhan opetussuunnitelman aikana opiskelleet (V1, V4). Suurin muutos on halussa käyttää runsaasti aikaa matematiikan opiskeluun. Uu-

[50] Tilastollisesti poikkeavat poikien kannanotoista melkein merkitsevästi $p<0{,}05$.
[51] Taulukko 8.2.

den opetussuunnitelman mukaan opiskelleet eivät halua enää käyttää niin paljon aikaansa matematiikan opiskeluun kuin vanhan opetussuunnitelman aikana opiskelleet (V24, V27). Tulkitsen muutoksen pitkäjänteisen matematiikan opiskelun vähenemisenä 1990-luvun loppupuolelle tultaessa, mikä osaltaan selittyy yleisenä nuorisokulttuuriin liittyvänä ilmiönä. Matematiikka koetaan entistä useammin vaikeimmaksi oppiaineeksi uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelevien joukossa kuin vanhan. Tämä selittyy osaltaan työskentelytottumuksissa tapahtuneilla muutoksilla (V24, V27) sekä toisaalta uusien kurssien sisältöjen runsautena ja siitä johtuvana kiireenä (haastateltava H2). Kuva matematiikan opetuksesta on muuttunut kiireisemmäksi, mutta toisaalta kurssimäärät ovat opiskelijoiden mielestä riittäviä (V45).

3.3 Minkälainen on pitkän matematiikan opiskelijan matematiikkakuva pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittavien ryhmissä?

Kuva matematiikasta tieteenä on melko samankaltainen molemmilla ryhmillä. Ylimääräisenä kirjoittavilla ”työkalupakki”-näkökulma tulee voimakkaammin esille (V9). Pakollisena kirjoittavat uskovat vahvemmin matematiikan auttavan ajattelemaan loogisesti (V15).

Suurimmat erot olivat opiskelijoiden kuvassa itsestään matematiikan oppijoina. Nämä uskomukset ovat lähinnä asenteita ja tunnetiloja. Matematiikan ylimääräisenä kirjoittavilla on huono kuva itsestään pitkän matematiikan osaajina (V20, V25, V46, haastateltava H2). Pakollisena kirjoittavat ovat pitkäjänteisempiä matematiikan opiskelijoita kuin ylimääräisenä kirjoittavat, ja he kokevat matemaattiset ongelmat mieluisina haasteina (V23, V27, haastateltava H3). Ylimääräisenä kirjoittavat eivät ole halukkaita käyttämään aikaansa runsaasti matematiikan opiskeluun, mikä ilmeisesti selittää osaltaan heidän valintansa matematiikan kokeesta. Pakollisena kirjoittavat haluavat työskennellä ammatissa, jossa saa käyttää matematiikkaa. Ylimääräisenä kirjoittavista vain neljäsosa haluaa tällaista ammattia (V36).

Kuva matematiikan opetuksesta ja oppimisesta on molemmilla ryhmillä samankaltainen.

Luku 9

Tutkimuksen tulokset opiskelijan matemaattisen ajattelun piirteistä

9.1 Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä

9.1.1 Johdanto

Vastaan tässä luvussa työn keskeisimpään ongelmaan eli siihen, minkälaista on pitkän matematiikan opiskelijan tehtäväorientoitunut matemaattinen ajattelu lukio-opintojen päättyessä (ongelma IV).

Lukion opiskelijan matemaattinen ajattelu ilmenee käsitteen muodostuksessa ja ongelmanratkaisussa, joista viimeksi mainittuun tämä tutkimus keskittyy[1]. Olen tarkastellut matemaattista ajattelua metakognitioiden ohjaamana matemaattisten tietojen prosessointina, jossa yksilö organisoi uudelleen tietoverkkoaan. Kuvailen matemaattisen tiedon proseduraalisena, konseptuaalisena, strategiatietona tai näiden yhdistelmänä. Prosessoitavan tiedon luonne kuvaa matemaattisen ajattelun tasoa. Edellä kuvatut tiedon lajit ja metakognitioihin läheisesti liittyvät affektit tulevat hyvin esille viidessä matemaattista osaamista kuvaavassa piirteessä, jotka ovat proseduraalinen sujuvuus, käsitteellinen ymmärtäminen, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely ja matematiikkakuvaksi. Viimeksi mainittu piirre korvaa Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001, 116) luettelossa olleen piirteen *yritteliäisyys*, sillä oman tutkimukseni kannalta keskeinen käsite 'matematiikkakuva' heijastaa tutkittuja uskomuksia paremmin kuin mainittu 'yritteliäisyys'.

[1] Tehtäväorientoitunut matemaattinen ajattelu.

Tutkimuksen viitekehyksessä (kuvio 5.1 s. 103) on esitetty matemaattisen osaamisen, tiedon lajien ja kuvailemani matemaattisen ajattelun yhteys. Tutkimukseni kahdessa näkökulmassa tarkastelin opiskelijoiden matemaattista osaamista ja kolmannessa matematiikkakuvaa. Matemaattisen osaamisen piirteiden avulla päättelen opiskelijan hallitsemia tiedon lajeja ja sen perusteella kuvailen hänen matemaattisen ajattelunsa piirteitä.

Vastaan tutkimuksen pääongelmaan IV sekä matemaattisen osaamisen piirteiden avulla että nelikenttäanalyysin avulla. Nelikenttä tuo esille opiskelijoiden sellaisia matemaattisen ajattelun ominaisuuksia, jotka eivät tule esille pelkässä osaamisen kautta päätellyssä matemaattisen ajattelun piirteissä.

9.1.2 Lukiolaisen matemaattinen ajattelu ja osaaminen

Proseduraalinen sujuvuus näkyy taitona käyttää proseduureja joustavasti, huolellisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti. Tämä on edellytys kaiken tasoisten tehtävien ratkaisemiselle. Siksi proseduraalisen sujuvuuden pitäisi olla vähintään kohtalainen kaikilla pitkän matematiikan opiskelijoilla. Algoritminen ajattelu kehittyy harjoittelun myötä. Proseduraalisen tiedon hallinta vaatii työnteon lisäksi muistamista, jota tukee koetilanteessa esimerkiksi taulukkokirjan kaavakokoelma. Pitkän matematiikan laskutaidoissa pitää hallita hyvin muun muassa lausekkeiden sievennys, eriasteisten yhtälöiden ratkaiseminen, erilaisten funktioiden derivointi ja integrointi sekä trigonometristen funktioiden käyttö.

Koulun tasolla tarkasteltuna noin 20 % opiskelijoista jää LY-tasolle[2], mikä vastaa PISA1-taitoluokkaa[3]. Tämän opiskelijaryhmän matemaattinen ajattelu jää mieleenpalauttamisen sekä tunnistamisen tasolle; keskeiset matematiikan käsitteet kultakin matematiikan osa-alueelta ymmärretään vain esitetyssä kontekstissa siinä vaiheessa, kun niitä aktiivisesti käsitellään. Noin 80 %:lla opiskelijoista on kohtalainen tai hyvä proseduraalisen tiedon hallinta[4].

Proseduraalinen sujuvuus ei ollut tyydyttävällä tasolla 1990-luvulla, josta on ollut osoituksena pitkää matematiikkaa kirjoittavien abiturienttien runsaat virheet proseduraalista tietoa mittaavissa ylioppilaskirjoitusten perustehtävissä[5]. Kurssien nopea opiskelutahti ei anna opettajalle mahdollisuutta

[2]Taulukko 6.3 s. 124.
[3]Taulukko 7.2 s. 147.
[4]Taulukko 7.2 s. 147.
[5]Lahtinen (1996b, 1997) näki perusvalmiuksissa vakavia puutteita, sillä kaikki kirjoittajat eivät hallitse edes peruskoulussa opetettua matematiikkaa.

harjoituttaa laskutaitoa[6], vaan laskurutiinin ja yleisesti proseduurien hallinta jää opiskelijan omaehtoisen työn varaan. Opiskeluun tehdyn työn määrä on vähentynyt pitkän matematiikan opiskelijoilla 1990-luvulla, mikä näkyy proseduraalisen sujuvuuden heikentymisenä[7]. Opiskelijoiden pitkäjänteinen työskentely, jota menestyksekäs matematiikan opiskelu vaatii, on vähentynyt entisestään 1990-luvulla[8]. Pitkän matematiikan valitseminen ylimääräiseksi kirjoitettavaksi aineeksi jo kenties opintojen puolivälissä on järjestelmän mahdollistama valinta, joka suuntaa opiskelijan työpanoksen hänelle tärkeämmäksi tuleviin pakollisiin aineisiin (esimerkiksi haastateltava H6). Opiskelijan heikot laskutaitovalmiudet ovat 1990-luvun loppupuolella merkittävänä syynä siihen, että opiskelija valitsee pitkän matematiikan kokeen ylimääräiseksi tai hän valitsee lyhyen matematiikan kokeen tai jättää matematiikan kokonaan kirjoittamatta. Tällaisille opiskelijoille matematiikan valitseminen ylimääräiseksi on usein samalla luopumista siitä työstä, jolla laskutaidon tasoa parannettaisiin (esimerkiksi haastateltava H2). Ylimääräisenä kirjoittavien hylkäysprosentti on ollut 1990-luvulla korkea[9]. Vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleet opiskelijat, joille pitkä matematiikka oli pakollinen kirjoitettava ilman vaihtoehtoa, työskentelivät pääsääntöisesti pitkäjänteisemmin kuin ylimääräisenä matematiikan kirjoittavat ja saavuttivat siksi vähintään kohtalaisen hyvän proseduraalisen sujuvuuden. He saivat yleensä ainakin kahden tehtävän verran pisteitä kirjoituksissa[10].

Proseduraalisen sujuvuuden suhteen ei ole oleellisia eroja tyttöjen ja poikien välillä eikä vanhan ja uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden välillä. Vuoden 1996 ylioppilaskirjoitusasetuksen muutoksen jälkeen ovat syntyneet pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien ryhmät. Noin neljäsosa ylimääräisenä kirjoittavista ei ole osannut kahtakaan tehtävää, vaikka heillä olisi ollut päättötodistuksessa pitkästä matematiikasta 6 tai 7[11]. Viimeksi mainitussa ryhmässä on opiskelijoilla huomattavia puutteita proseduraalisen tiedon hallinnassa, joten heidän matemaattinen ajattelunsa ei ole sillä tasolla, että opiskelija olisi kehittänyt opetussuunnitelman perusteiden (LOPS 1994, 70) mukaisesti *”monipuolisen harjoittelun avulla taidot käyttää laskentataitojaan”*.

Matemaattisten käsitteiden ja operaatioiden **konseptuaalinen ymmärtäminen** on pitkässä matematiikassa tärkeä tavoite kaikkien opiskelijoiden koh-

[6] LY-tason tehtäviä.
[7] Taulukko 8.2 s. 196.
[8] Rosenberg 1992, 16; taulukko 8.2 s. 196.
[9] Esimerkiksi keväällä 1999 hylkäysprosentti oli 14,8 % (Lahtinen 1999).
[10] Kuvio 9.14 s. 256.
[11] Kuvio 6.10 s. 132

dalla[12]. Konseptuaalinen asiakokonaisuuksien ymmärtäminen vähentää opiskelijan muistinvaraisen tiedon tarvetta ja mahdollistaa vaativien tehtävien ratkaisemisen omia tietoja uudella tavalla yhdistelemällä ja soveltamalla. Kurssien hallinnan näkökulmasta yksittäisen koulun tasolla noin 30 % opiskelijoista selviytyi SA-tason tehtävistä ja noin 50 % YS-tason[13]. Koko ensiksi mainitulla ryhmällä ja osalla viimeksi mainittua ryhmää matemaattinen ajattelu on luonut matemaattisesta tiedosta konseptuaalista ja kykenee hyödyntämään kehittynyttä tietorakennetta uuden oppimisessa ja matemaattisten ongelmien ratkaisussa ainakin kurssien aihepiirien sisällä. Matematiikan osa-alueissa, joissa opiskelija saavuttaa konseptuaalista tietoa, ei ole suuria eroja. Matematiikan osa-alueista kuitenkin differentiaalilaskennassa uutena osa-alueena opiskelijoilla oli vaikeuksia saavuttaa konseptuaalista ymmärrystä[14].

Pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa noin 40 % kirjoittajista saa vähintään arvosanakseen M[15]. Tällä ryhmällä ilmeisesti matemaattinen ajattelu konseptuaalisena ymmärtämisenä on kehittynyt hyvin. Ylemmän tason matemaattinen ajattelu[16] on kuitenkin vähentynyt ylioppilaskirjoitusten tulosten valossa vuoden 1996 jälkeen[17]. Pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittavien konseptuaalinen ymmärtäminen jää varsin vaatimattomaksi niin ylioppilaskirjoitusten tulosten kuin lukio-opintojenkin perusteella[18]. Heidän eri matematiikan osa-alueilla mahdollisesti kehittyneet konseptuaaliset tietonsa jäävät vain näille tiedon sektoreille eivätkä pääse suurimmalla osalla lukioaikana kehittymään varsinaiseksi konseptuaaliseksi tiedoksi. Tämä kehitysprosessi ei pääse etenemään, sillä ylimääräisenä matematiikan kirjoittavat eivät yleensä paneudu viimeisiin koko oppimäärää jäsentäviin kursseihin[19]. Pitkän matematiikan ylimääräiseksi valitsevia oli 1990-luvun loppupuolella jo noin 50 % pitkän matematiikan kirjoittajista[20]. Tytöistä valitsi 1990-luvun lopussa noin 70 % pitkän matematiikan ylimääräiseksi ja pojista noin 40 %[21]. Tyttöjen pitkän matematiikan kirjoitusten keskiarvot ovat olleet samaa luokkaa kuin poikienkin (Lahtinen 1998, 1999), joten konseptuaalisessa ymmärryksessä ei näytä olevan eroa sukupuolten välillä.

[12] Vrt. LOPS 1985 ja 1994.

[13] Taulukko 6.3 s. 124; taulukko 7.2 s. 147.

[14] taulukko 7.2, s. 147

[15] Kuvio 6.4 s. 117.

[16] SA-taso, PISA3-taitotaso

[17] Kuvio 6.3 s. 116.

[18] Kuvio 6.10 s. 132.

[19] Taulukko 7.6 s. 152.

[20] Taulukko 6.2 s. 115.

[21] Kuvio 9.3 s. 246.

Matematiikan pakolliseksi valitsevista opiskelijoista[22] suurin osa kehittää konseptuaalista ymmärrystään opetussuunnitelman tavoitteiden suuntaisesti ja saavuttaa hyvän jatko-opintokelpoisuuden. Vuoden 1994 opetussuunnitelman mukaisia valinnaisia syventäviä kursseja opiskelleet ovat voineet edetä matematiikan sisällöissä ja ymmärtämisessä pidemmälle kuin vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleet. Tyttöjen kohdalla tilanne on huonontunut poikiin nähden, sillä vaikka he saavat päättötodistukseen hyviä arvosanoja pitkästä matematiikasta, niin suurin osa heistä kirjoittaa matematiikan ylimääräisenä eikä heidän menestyksensä ole yleensä omien odotusten mukainen. Pitkän matematiikan opiskelijoiden, jotka kirjoittavat lyhyen matematiikan tai eivät kirjoita matematiikkaa ollenkaan, menestys kursseilla on pääsääntöisesti heikko (Lahtinen 1996b). Siten on oletettavaa, että heidän konseptuaalinen ymmärryksensä matemaattisesta tiedosta on puutteellista.

Vuoden 1994 opetussuunnitelman tavoite (LOPS 1994, 71), että pitkän matematiikan opiskelija *"pystyy käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, laatimaan täsmällisiä perusteluja sekä oppii arvioimaan esitettyjen perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä "* toteutuu tulkittuna konseptuaalisen tiedon kehittymisenä korkeintaan puolella pitkän matematiikan kirjoituksiin osallistuvista opiskelijoista.

Strateginen kompetenssi tulee esille ongelmanratkaisutehtävien hallinnassa. Opiskelija kykenee formuloimaan, esittämään ja ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. Kokeiden vaativimpien tehtävien[23] ratkaiseminen vaatii konseptuaalisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden lisäksi usein strategiatietoja[24]. Ratkaisuun johtavien strategioiden valintaa ohjaavat opiskelijan metakognitiot, jotka muotoutuvat lukioaikana opiskelijan ongelmanratkaisutehtävistä saamien kokemusten mukaisesti.

Tervakosken lukion aineistossa ylimmälle SA-tasolle ylsi noin 30 % opiskelijoista[25], mutta strateginen kompetenssi ei ole ilmeisesti kehittynyt koko tuolle ryhmälle yhtenäisesti. Koulukurssien kokeissa ei esiinny juurikaan ongelmanratkaisutehtäviä, joissa opiskelija joutuisi itse formuloimaan ja esittämään ongelman sekä valitsemaan ratkaisustrategian. Tämän vuoksi hyvä kurssimenestys ei vielä välttämättä osoita tämän kompetenssin kehittyneisyyttä.

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden mukaan opiskelleet ovat voineet valita syventäviä ja soveltavia kursseja. Niihin osallistumalla on ollut

---

[22] Taulukko 9.7 s. 248.
[23] SA-taso, PISA3-taitotaso.
[24] Taulukko 4.1 s. 90.
[25] Taulukko 7.2 s. 147.

mahdollista kehittää strategiataitoja. Kertauskurssissa tulee esille usein vanhojen kirjoitusten tarkastelun yhteydessä strategista kompetenssia kehittäviä tehtäviä. Ylioppilaskirjoituksissa esiintyneet konstruointitehtävät[26] ovat jääneet pistekeskiarvoiltaan alhaisiksi.

Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteita voitiin jo kutsua "ongelmanratkaisuvaiheen" opetussuunnitelmaksi (Kupari 1999, 50), mutta Leikolan komitea totesi muun muassa juuri ongelmanratkaisun osuuden jääneen oppikirjoissa suhteellisen vähäiseksi (Komiteanmietintö 1988, 126). Vuoden 1994 opetussuunnitelmien eräänä tavoitteena oli, että opiskelija *"osaa käyttää ja soveltaa matematiikkaa ongelmien ratkaisemiseen, harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita"* (LOPS 1994, 71). Strategista kompetenssia vaativia ongelmanratkaisutehtäviä hallitsee ylioppilaskirjoitustulosten perusteella vain suhteellisen pieni osa pitkän matematiikan opiskelijoista, joten tämä osa-alue pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisessa ajattelussa on vaatimattomalla tasolla suhteessa opetussuunnitelmien tavoitteisiin. Tyttöjen ja poikien sekä vanhan ja uuden opetussuunnitelman välillä ei voi osoittaa tämän aineiston pohjalta merkittäviä eroja.

Opiskelijan **mukautuva päättely** tulee esille pystyvyytenä loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selittämiseen ja todistamiseen. Koulun tasolla todistustehtävien ratkaisemiseen eli todistuksien konstruoimiseen pystynee vain murto-osa SA-tasolla olevista opiskelijoista, joita oli 30 % pitkän matematiikan lukijoista. Arviointi on vaikeaa, sillä koulukokeissa ei ole säännöllisesti todistustehtäviä. Sitten kun niitä valinnaisena on, niin vain suhteellisen pieni osa opiskelijoista valitsee tällaisen tehtävän ja osaa sen tehdä.

Ylioppilaskirjoituksissa on usein ainakin yksi todistustehtävä[27] mukana, mutta niiden suoritustaso on ollut heikkoa (Lahtinen 1997). Tämä selittyy osaltaan sillä, että kurssien opetuksessa ja oppimateriaalissa ei ilmeisesti anneta todistamisajattelulle sitä painoarvoa, minkä matematiikka tieteenä sille asettaa. Suurimman osan opetusajasta vie matematiikan peruskäsitteiden läpikäynti ja jonkin asteisen proseduraalisen sujuvuuden hankinta.

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden kaikille opiskelijoille tarkoitettu tavoite *"pystyy käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, laatimaan täsmällisiä perusteluja sekä oppii arvioimaan esitettyjen perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä"* (LOPS 1994, 71) toteutuu ylioppilaskirjoitusten tulosten valossa ani harvan kohdalla. Pitkän matematii-

[26] Esimerkiksi tehtävän 10 (k1995) kaikkien pistekeskiarvo oli 0,93 ja tehtävän 8 (k1996) kaikkien pistekeskiarvo oli 0,55 (Lahtinen 1996a, 1996b).

[27] Esimerkiksi tehtävät 7b (k1995), 8a (k1997), 6a (k1999).

kan opiskelijoiden matemaattisessa ajattelussa juuri strateginen kompetenssi ja mukautuva päättely ovat alhaisimmilla tasoilla matemaattisen osaamisen piirteistä.

Pitkän matematiikan opiskelijan **matematiikkakuvassa** tulee esille hänen uskomuksensa matematiikasta tieteenä, itsestään matematiikan käyttäjänä ja oppijana sekä uskomukset matematiikan opetuksesta ja oppimisesta.

Opiskelijoiden uskomuksissa matematiikasta tieteenä tulevat esille kaikki kolme näkökulmaa: "työkalupakki" ,systeemi ja prosessi. Kuitenkin "työkalupakki"-näkökulma näyttäisi olevan voimakkain[28], mikä selittyy osaltaan kurssien kireällä opiskelutahdilla ja opiskelijoiden taulukkokirjasidonnaisilla työskentelytavoilla. Matematiikasta, jonka uusista kehityssuunnista etenkään uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleilla ei ollut kuin vähäistä tietoa, jää suurelle osalle opiskelijoita välineellinen ja mekaaninen mielikuva. Matematiikkaa arvostetaan kuitenkin niin työssä kuin arkipäivän elämässäkin[29].

Opiskelijoiden uskomukset itsestään matematiikan taitajana ja käyttäjänä ovat pääsääntöisesti positiivisia. Suurin osa tytöistä ja pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittavista eivät koe olevansa kovin hyviä matematiikassa. Kaikki vastaajat ovat kokeneet myönteisiä tunnetiloja tehtäviä ratkaistessaan ja muita auttaessaan[30]. Uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleet, etenkin ylimääräisenä matematiikan kirjoittavat, eivät olleet halukkaita käyttämään aikaansa niin paljon matematiikan opiskeluun kuin vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleet[31] eikä heillä ollut halua yhtä pitkäjänteiseen työskentelyyn matematiikassa kuin 1990-luvun alkupuolella opiskelleilla oli. Tämä selittää osaltaan, miksi uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelevat ja erityisesti ylimääräisenä matematiikan kirjoittavat kokevat matematiikan merkitsevästi vaikeammaksi oppiaineekseen kuin vanhan opetussuunnitelman mukaan opiskelleet[32].

Uskomukset matematiikan opetuksesta toivat esille useimpien halun painottaa pitkän matematiikan opetusta enemmän käytännön sovelluksiin. Opiskelijoiden mielestä tarkoituksenmukaiset opetusmenetelmät tuottaisivat parempia oppimistuloksia[33].

Uskomuksissa matematiikan oppimisessa ei ollut eroja sukupuolten välillä. Sukupuolistereotypiat poikien paremmuudesta matematiikassa ja poikien

[28] Faktori 6 s. 194; haastateltava H1; väitteet 9 ja 11 s. 266.
[29] Taulukko 9.5s. 261.
[30] Taulukko 9.5 s. 261
[31] Taulukko 8.2 s. 196.
[32] Taulukko 9.9 s. 266.
[33] Taulukko 9.5 s. 261.

ammateista eivät saa kannatusta kummaltakaan sukupuolelta[34].

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteiden tavoitteet, joiden mukaan pitkän matematiikan opiskelija *"tottuu arvostamaan ja ymmärtämään matematiikan asemaa yhteiskunnan kehityksessä ja päätöksen teossa sekä kansalaisten jokapäiväisessä elämässä sekä oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa sekä tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn"* toteutuu pääosin. Tyttöjen luottamus omiin kykyihin on heikompi kuin poikien[35], mikä osaltaan saa tytöt valitsemaan perusteettomasti pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa ylimääräiseksi aineeksi. Osasta tyttöjä tulee tämän seurauksena matematiikassa alisuoriutujia. Tavoite tottumisesta pitkäjänteiseen työhön on jäänyt toteutumatta useimpien opiskelijoiden kohdalla[36]. Matemaattisen ajattelun affektiiviset komponentit tarkasteltuna opiskelijan matematiikkakuvan kautta näyttäisivät olevan suomalaisilla pitkän matematiikan opiskelijoilla pääosin kunnossa.

9.1.3 Matemaattisen ajattelun piirteitä nelikentän ryhmissä

Lopuksi kokoan pitkän matematiikan opiskelijan matemaattista ajattelua **nelikentän ryhmissä**, joita on tutkittu kaikista kolmesta näkökulmasta ja joiden tarkastelu antaa edellä olleen yleisen tarkastelun lisäksi hienojakoisempaa tietoa matematiikan opiskelijoista. Nimesin nelikentän ryhmät seuraavasti: *Kypsyjät* (R2), *Menestyjät* (R1), *Suoriutujat* (R3), *Luovuttajat* (R3') ja *Pettyjät* (R4).

Kypsyjien ryhmään (R2) kuuluu alle 10 % pitkän matematiikan kirjoittajista[37]. Suoritusten perusteella tyypillistä tämän ryhmän opiskelijoille on matemaattisen ajattelun kehittyminen lukio-opintojen loppuvaiheessa. Koulumatematiikan keskeinen tieto tulee konseptuaaliseksi, proseduraalisen tiedon hallinta paranee ja strategiatiedot kehittyvät sille asteelle, että he suoriutuvat ongelmanratkaisutehtävistä keskimääräistä paremmin. Koulun tasolla saadun aineiston perusteella syinä opiskelun tehostumiseen ja siten ajattelun kehittymiseen ovat muun muassa parantuneet opiskelutottumukset, jatko-opintotavoitteiden selkiytyminen, oppisisältöjen jäsentyminen ja linkittyminen toisiinsa omatoimisen harjoittelun myötä[38]. Opiskelijat kokivat vaikeat

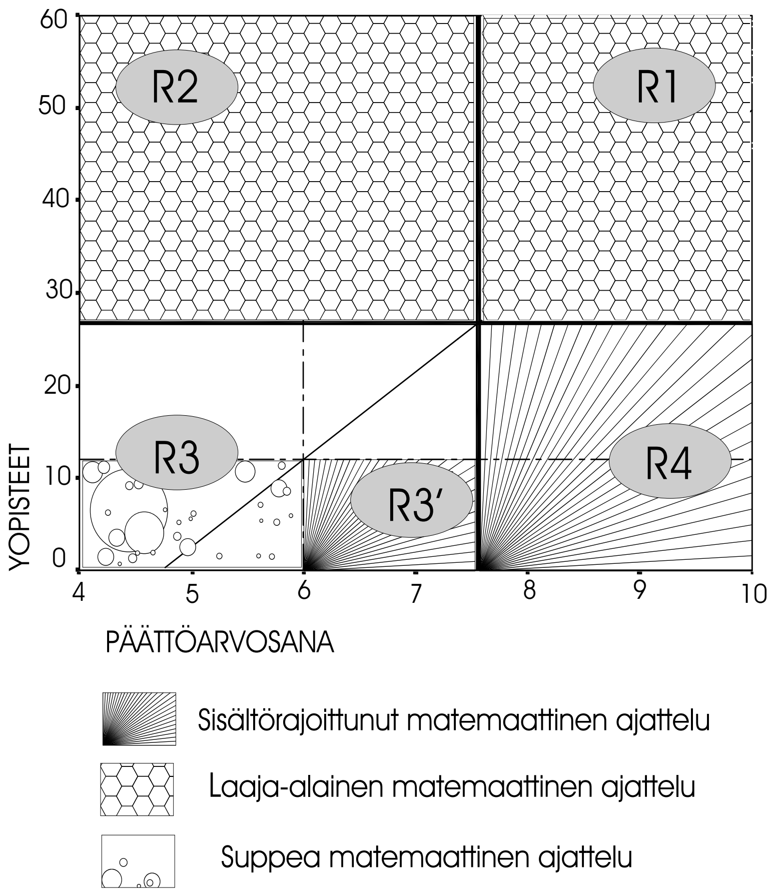
[34] Taulukko 9.5 s. 261.
[35] Väite 20 taulukko 9.7 s. 264; Lahtinen 1999, 5; haastateltava H4.
[36] taulukko 8.2 s. 196; Värri 2002.
[37] Kuvio 6.9 s. 131; kuvio 7.2 s. 154.
[38] Esimerkiksi haastateltava H3.

tehtävät mieluisana haasteena ja uskoivat työnteon merkitykseen matemaattisen ajattelun kehittymisessä[39]. Useita tämän ryhmän opiskelijoita voisi kuvata pitkäjänteisiksi työskentelijöiksi. Koulun tason tutkimuksessa kaikki ryhmän opiskelijat olivat pitkän matematiikan pakollisena kirjoittaneita poikia, jotka olivat opiskelleet vanhan opetussuunnitelman mukaan.

Menestyjien ryhmään (R1) kuuluu noin 40 % pitkän matematiikan kirjoittajista[40]. Menestyjät selviytyivät vaikeuksitta kursseista ja osoittivat ylioppilaskirjoituksissa monipuolista matemaattisen tiedon hallintaa: heillä on erinomainen jatko-opintokelpoisuus. Sujuva proseduraalisen tiedon hallinta tukee konseptuaalisen tiedon edelleen linkittämistä uusien tehtävien ratkaisemisessa. Osa tästä ryhmästä hallitsee erinomaisesti ongelmanratkaisussa tarvittavien strategioiden käytön ja mukautuvaa päättelyä vaativat todistustehtävät. Tyypillistä tämän ryhmän opiskelijoille on koulun tason tutkimuksen perusteella, että he näkevät matematiikan prosessiluonteen ja kokevat matematiikan itselleen tärkeäksi[41]. Lisäksi he uskovat matematiikan opiskelun vaativan pitkäjänteistä työntekoa ja toimivat sen vaatimusten mukaisesti. Ryhmässä on koulun tason tutkimuksen perusteella poikia ja tyttöjä samassa suhteessa, kuin heitä on pitkän matematiikan opiskelijoidenkin joukossa (noin 2 : 1). Pakollisena matematiikan kirjoittavista tähän ryhmään kuuluu noin 50 % ja ylimääräisenä kirjoittavista noin 20 %[42], joten ilmeisesti hyvä menestys koulukursseissa rohkaisee valitsemaan matematiikan pakolliseksi. Menestyjien ja Kypsyjien ryhmät muodostavat yhdessä sellaisen pitkän matematiikan opiskelijajoukon, jolla on laaja-alainen matemaattinen ajattelu (kuvio 9.1). Tämä tarkoittaa, että he ovat linkittäneet konseptuaalisen tietonsa ongelmien ratkaisussa käyttökelpoiseksi tietorakenteeksi, joka kattaa laaja-alaisesti kaikki koulukursseihin kuuluvat matematiikan osa-alueet.

Suoriutujien (R3) ja Luovuttajien (R3') ryhmiin kuuluu kaiken kaikkiaan noin 40 % pitkän matematiikan kirjoittajista[43]. Suoriutujien ryhmästä erottamaani Luovuttajien ryhmään (R3') kuuluu noin 14 % kaikista pitkän matematiikan kirjoittajista 1990-luvulla[44]. Suoriutujille on ominaista keskittyminen proseduraalisen tiedon hallintaan. Konseptuaalisen matemaattisen tiedon osuus jää heidän tietorakenteessaan aika vähäiseksi. Ongelmanratkaisutehtävät ovat heille useimmiten ylivoimaisia, sillä heillä on puutteita algoritmien ja strategioiden hallinnassa. Suoriutujien matematiikkakuva on useim-

[39] Taulukko 8.3, s. 200.
[40] Kuvio 6.9 s. 131; kuvio 7.2 s. 154.
[41] Taulukko 8.3 s. 200.
[42] Kuvio 6.10 s. 132.
[43] Kuvio 6.9 s. 131; kuvio 7.2 s. 154.
[44] Kuvio 6.9 s. 131.



KUVIO 9.1: Matemaattinen ajattelu nelikentän ryhmillä.

miten "työkalupakki"-näkökulman mukainen, mikä selittyy osaltaan heidän keskittymisestään lähinnä mekaanisiin LY-tason tehtäviin[45]. Suoriutujilla on ongelmia ymmärtää tunneilla opetettavia matematiikan käsitteitä, mutta suureksi syyksi tähän he näkevät kurssien nopean etenemistahdin, jolloin heille ei jää tarpeeksi aikaa paneutua uusiin käsitteisiin (haastateltava H2). Ylimääräisenä kirjoittavista kuuluvat Suoriutujien ja Luovuttajien ryhmiin 56 % vuoden 1996 ja sen jälkeen kirjoittaneista pitkän matematiikan opiskelijoista[46]. Matemaattinen ajattelu on suppeaa niillä ryhmän jäsenillä, joiden päättöarvosana on viisi (tai neljä) ja matematiikan kirjoitusten pistemäärä enintään 12 pistettä (kuvio 9.1).

[45]Taulukko 8.3 s. 200.
[46]Kuvio 6.10 s. 132.

Luovuttajat ovat suorittaneet 11–15 pitkän matematiikan kurssia ja saaneet päättötodistukseen arvosanaksi 6 tai 7. Pitkän matematiikan kirjoituksissa he saavat pisteitä 0–12. Heidän kohtalainen kurssiosaamisensa kutistuu vaatimattomaksi taidonnäytteeksi kirjoituksissa. Heidän matemaattinen ajattelunsa on jäsentymätöntä. Yksittäiset tiedot ovat kontekstisidonnaisia eikä niiden siirto uusiin tilanteisiin onnistu. He eivät hallitse asiakokonaisuuksia eivätkä osaa käyttää kursseilla hallitsemiaan proseduureja sekalaisia tehtäviä sisältävissä tehtäväsarjoissa. Jopa tehtävät, joiden ratkaiseminen perustuu pitkälti peruskoulussa opiskeltuun matematiikkaan, osoittautuvat liian vaikeiksi tälle ryhmälle. Suurin osa näistä opiskelijoista on matematiikan ylimääräisenä kirjoittavia, jotka tämän valinnan myötä opiskelevat matematiikkaa entistä vähemmän[47]. He luovuttavat mahdollisuutensa hankkia melko hyvä pitkän matematiikan hallinta. Luovuttajat arvostavat matematiikkaa, mutta useimmat heistä ovat lyhytjänteisiä eivätkä he tee kovin paljon työtä matematiikan opiskelun hyväksi[48]. Ryhmässä on molempia sukupuolia. Tähän ryhmään voi liittää myös ne pitkän matematiikan kurssit opiskelleet, jotka kirjoittavat lyhyen matematiikan kokeen[49] tai jättävät matematiikan kokonaan kirjoittamatta. Esimerkiksi keväällä 1999 lyhyen matematiikan kokeen valinneiden ja matematiikan kokonaan kirjoittamatta jättäneiden määrä oli yhteensä yli 3000 pitkän matematiikan opiskelijaa (Lahtinen 1999).

Pettyjiä (R4) on noin 10 %–20 % pitkän matematiikan kirjoittajista[50]. Heidän hyvä menestyksensä matematiikan kursseissa ei näkynyt ylioppilaskirjoitusten tuloksessa. Kurssimenestyksen perusteella heillä on hyvä proseduraalisen tiedon hallinta ja keskeiset matematiikan käsitteet ovat kehittyneet konseptuaaliseksi tiedoksi. Heidän matematiikan hallintansa tulee esille vain tarkoin rajatussa matematiikan osa-alueella, jonka tehtävien käsitteistö ja tyypilliset ratkaisumenetelmät ovat etukäteen tiedossa ja harjoiteltavissa (haastateltava H6). Sen sijaan matematiikan eri osa-alueilta satunnaisessa järjestyksessä olevien tehtävien ratkaiseminen ei suju. Tämä tulee esille muun muassa harjoitustehtäväsarjoissa, kertauskurssilla ja preliminääreissä[51]. Useilta tämän ryhmän opiskelijoilta puuttuu taito tunnistaa, mihin matematiikan osa-alueeseen ratkaistava tehtävä kuuluu ja mitkä ovat ratkaisuun tarvittavat käsitteet ja menetelmät. Tämä metakognitiivisen taidon puute aiheuttaa useille kirjoituksien tuloksissa pettymyksen.

[47] Ks. esim. kertauskurssi taulukko 7.6 s. 152; vrt. haastateltava H2.

[48] Taulukko 8.3 s. 200.

[49] Keväällä 1999 pitkän matematiikan lukijoista 38 % valitsi pitkän matematiikan kokeen pakolliseksi ja 41 % ylimääräiseksi, 7 % valitsi lyhyen kokeen ja 14 % ei kirjoittanut lainkaan matematiikkaa (Lahtinen 1999).

[50] Kuvio 6.9 s. 131.

[51] Taulukko 7.8 s. 161.

Pettyjien kuva matematiikasta on painottunut ”työkalupakki”-näkökulmaan[52]. Heillä on positiivinen käsitys itsestään matematiikan oppijana ennen kirjoituksia, ja he ovat valmiit pitkäjänteiseen työhön ainakin ennen pakollisen kirjoitusaineen valintaa[53]. Pettyjät itse analysoivat matematiikan kirjoitusten heikon menestyksen johtuvan tehdyn työn vähyydestä (haastateltavat H1, H4 ja H6). Syitä työskentelyn vähyyteen oli muun muassa matematiikan valitseminen ylimääräiseksi aineeksi ja väärät opiskelutottumukset (haastateltavat H6 ja H1). Matematiikka valitaan ylimääräiseksi, koska reaalikoe koetaan helpommaksi selvittää läpi (haastateltavat H2 ja H6). Pettyjien joukossa on molempia sukupuolia. Suurin osa koulun aineiston opiskelijoista oli opiskellut uuden opetussuunnitelman mukaan. Koska pettyjille ja luovuttajille on tunnusomaista vain rajatuilla matematiikan osa-alueilla osoitettu matemaattisen tiedon monipuolinen tai kohtalainen hallinta, niin heidän matemaattinen ajattelunsa on sisältörajoittunutta (kuvio 9.1).

Kolmen näkökulman yhdistetyt tulokset antavat mielestäni monipuolisen ja monitasoisen kuvan pitkän matematiikan opiskelijan matemaattisesta ajattelusta. Näkökulmien tuloksissa ei esiintynyt ristiriitaisuuksia, vaan tulokset tukevat edellä esitettyä tutkijan näkemystä opiskelijan matemaattisen ajattelun eri puolista. Tämän tiivistelmän reliabiliteettia ja validiteettia heikentävät tekijät on analysoitu kunkin näkökulman yhteydessä erikseen.

9.2 Pohdintaa

Tutkimukseni tulokset valottavat vain yhtä sektoria opiskelijan matemaattisesta ajattelusta. Arvioinnin kohteena on ongelmien ratkaisun yhteydessä osoitettu matemaattinen osaaminen ja siitä pääteltävät matemaattisen ajattelun piirteet. Opiskelijan matemaattinen ajattelu, joka ei johda suoraan näkyvään tuotokseen, ei ole tämän tutkimuksen piirissä. Opiskelijan ajatellessa ääneen voi tutkija saada tietoa opiskelijan sen hetkisistä ajatteluprosesseista. Puhuttu kieli heijastelee opiskelijan matemaattista ajattelua ulkopuoliselle tarkkailijalle ja toisaalta puheen kautta opiskelija jäsentää itselleen omaa ajatteluaan ja kehittää metakognitiivisia taitojaan[54].

Tutkimukseni nelikenttä sitoo työni kolme tarkastelunäkökulmaa opiskelijan matemaattiseen ajatteluun ja tuo esille ryhmiä, jotka eivät välttämättä erottuisi vain yhden näkökulman tarkastelussa. Aineistojen analyysit eri näkö-

[52]Taulukko 8.3 s. 200; haastateltava H1.
[53]Taulukko 8.3 s. 200.
[54]Matematiikan kielentäminen (Joutsenlahti 2003a, 2003b).

kulmissa tuovat esille 1990-luvulla tehtyjen lukio-opiskeluun liittyvien rakenteellisten muutosten vaikutuksia. Suurin vaikutus oli vuoden 1996 ylioppilaskirjoitusasetuksella, joka ei enää edellyttänyt pitkän matematiikan pakollista kirjoittamista. Opiskelijoiden matematiikkakuvan muutokset heijastelevat osaltaan nuorisokulttuurin ja yhteiskunnan muutoksia suhteessa koulumatematiikkaan. 'Ajan henki' näyttäytyy nuorisossa lyhytjänteisenä, itsekeskeisenä ja laskelmoivana toimintana.

Tutkimukseni merkittävimpiä tuloksia ovat:

1. käsiteanalyysi matemaattisesta ajattelusta sekä sen pohjalta matemaattisen ajattelun kuvaaminen matemaattisen osaamisen piirteisiin linkitettyjen erilaisten tiedon lajien avulla,

2. nelikentän ryhmien *Kypsyjät* (R2), *Menestyjät* (R1), *Suoriutujat* (R3), *Luovuttajat* (R3') ja *Pettyjät* (R4) matemaattisen ajattelun kuvaukset kolmesta eri näkökulmasta,

3. pitkän matematiikan opiskelijat, joilla oli sisältörajoittunut matemaattinen ajattelu,

4. pitkän matematiikan ylimääräisenä kirjoittavien ja pakollisena kirjoittavien merkittävät erot matemaattisessa ajattelussa kaikkien kolmen näkökulman kannalta

5. opiskelijoiden pitkäjänteisyyden väheneminen uskomustutkimuksen pitkittäistarkastelun perusteella.

Matemaattisen ajattelun kuvauksessani[55] olen syventänyt tiedon prosessoinnin näkökulmaa liittämällä siihen erilaiset tiedon lajit ja niihin edelleen matematiikan osaamisen piirteitä koskevan kuvauksen. Vastaavaa yhdistelyä en ole vielä löytänyt kirjallisuudesta. Nelikentän avulla tunnistetut ryhmät auttavat opetustyötä tekeviä ja tutkivia henkilöitä ymmärtämään lukio-opiskelussa esiintyviä ongelmatilanteita. Ylioppilaskirjoitukset ohjaavat voimakkaasti lukio-opiskelua, mikä tulee näkyviin kirjoituksiin liittyvien valintojen ohjaavalla vaikutuksella kurssivalintoihin ja opiskeluun eri aineiden kursseissa. Lukiolaisten pitkäjänteisyyden väheneminen opiskelussa on suuri ongelma nimenomaan pitkässä matematiikassa, sillä yhä useammalta opiskelijalta jää matematiikan perustaitojen sujuva hallinta ja rakenteiden hahmottaminen puutteelliseksi jatko-opintojen näkökulmasta.

[55]Kuvio 5.1, s. 103.

Jotta voisi ymmärtää nykyistä tilannetta lukion matematiikan opetuksessa ja opiskelussa, pitää tarkastella syntynyttä tilannetta sekä ”ruohonjuuritasolla” että rakenteellisella tasolla. 1990-luvun koulutuspoliittiset päätökset ovat muokanneet perusopetuksen matematiikan sisältöjä ja tavoitteita paljon enemmän kuin lukion opetuksen sisältöjä. Lukion toteutuneissa opetussuunnitelmissa ei ole peruskoulun aikakaudella kyetty huomioimaan peruskoulun käyneiden muuttuneita valmiuksia lukion pitkän matematiikan opiskeluun. Sen tavoitteellinen ja sisällöllinen rima on haluttu pitää samalla tasolla eli melko korkealla, mutta peruskoulun päättävä ja lukioon siirtyvä oppilas on joutunut ponnistamaan yhä syvemmältä riman alapuolelle syntyneestä kuopasta. Tätä eroa on yritetty kuroa umpeen peruskoulun matematiikan valinnaiskurssien (suositeltuna lukioon aikoville) ja lukion matematiikan aloituskurssien (”vapaaehtoinen nollakurssi”) avulla. Tilanne on järjestelmän ja opiskelijan kannalta absurdi, jos peruskoulun yhteiset matematiikan kurssit eivät annakaan riittävää pohjaa lukion pitkän matematiikan opinnoille, vaan erilaisista ”valinnaisista” ja ”vapaaehtoisista” soveltavista kursseista tuleekin välttämätön osa selviytymistä lukion pitkän matematiikan opinnoissa. Toteutunut opetussuunnitelma eroaa kirjoitetun opetussuunnitelman hengestä!

Dreyfusin ja Eisenbergin (1996, 276) mielestä opetussuunnitelmat ovat suoraviivaisesti järjestetty ja paketoitu pieniin osiin ja palasiin, mikä johtaa enemmän tiedon lokeroimiseen kuin kokonaisvaltaiseen näkemykseen tiedosta opiskelijoiden mielessä. Tämä lineaarisuus on osaltaan vaikuttanut siihen, että pitkän matematiikan lukijoiden joukossa on huomattavan iso joukko opiskelijoita[56], joille ei suuren kurssimäärän jälkeen synny kokonaisvaltaista kuvaa matematiikan tietorakenteesta. Kärjistäen sanottuna heidän matemaattinen ajattelunsa jää irrallisten faktojen sekä proseduurien mieleenpalauttamiseen ja toistamiseen. Tällöin opiskelijat osaavat mekaanisesti ratkaista ongelmia, mutta heiltä puuttuu laajempi näkemys, miten kaikki tiedonpalat sopivat yhteen. Hyvillä ongelmanratkaisijoilla näyttää olevan kyky nähdä tiettyjen aiheiden kehityskulku laajemmassakin kontekstissa, mikä tarjoaa heille usein mahdollisuuden päätellä lopputuloksen (Dreyfusin & Eisenbergin 1996, 276).

Yhteiskunta tekee ison taloudellisen sijoituksen opetukseen suurena matematiikan kurssimääränä. Voitaneen siis kysyä ’ajan hengessä’: minkä tuoton yhteiskunta saa sijoitukselleen? Vuoden 1996 ylioppilaskirjoitusasetus mahdollisti pitkän matematiikan opiskelleelle pitkän matematiikan kirjoittamisen ylimääräisenä, lyhyen matematiikan kirjoittamisen tai peräti kirjoittamatta jättämisen. Tämä ei ollut hyvä asetus pitkän matematiikan tuloksien näkökulmasta. Matematiikan kumulatiivinen luonne ja opetussuunnitelman osa-alueisiin sidottu lineaarinen rakenne eivät sovi yhteen asetuksen mahdollista-

[56] Esimerkiksi nelikentän ryhmät Pettyjät ja Luopujat.

man lisääntyneen valinnaisuuden kanssa. Useimpien opiskelijoiden kohdalla kyse on kärjistäen ilmaistuna siitä, että kirjoittaako opiskelija matematiikan pakollisena ja tekee matematiikan ymmärtämisen kannalta välttämättömän loppurutistuksen (kertauskurssin, pitkäjänteinen kirjoituksiin valmistautumisen) vai kirjoittaako hän jonkin muun vaihtoehdon mukaan. Tällöin opiskelija jättää noin kahden vuoden pitkän matematiikan opinnot jonoksi proseduraalista unohtuvaa irtotietoa. Loput matematiikan kurssit jäävät opiskelijalle oppimisen suhteen käyttämättömäksi mahdollisuudeksi. Reaalikoe ja pitkän matematiikan koe eivät ole olleet opiskelijan näkökulmasta tasavertaisia vaihtoehtoja, sillä opiskelijat kokevat pitkän matematiikan kirjoituksien noin 15 tehtävää vaikeammaksi ennakoida ja tasoltaan vaativammiksi kuin reaalin yli sata tehtävää. Pitkän matematiikan hylättyjen arvosanojen korkea määrä[57] verrattuna muiden kirjoitettavien aineiden hylättyjen määrään ei houkuttele valitsemaan pitkää matematiikkaa pakolliseksi.

LUMA-talkoiden ansiokas yritys nostaa pitkän matematiikan kirjoittajien määrä 17000 kirjoittajaan on lisännyt pitkän matematiikan opiskelijoiden määrää. Kirjoittajien määrä ei kuitenkaan ole merkitsevästi noussut. Kirjoittajien joukosta noin puolet kirjoitti[58] pitkän matematiikan pakollisena ja sai useimmiten kelpo tuloksen. Toinen puoli oli ylimääräisenä kirjoittavia, jotka selviytyivät huonommin kuin huonompi puolikas pakollisena kirjoittavista ennen vuotta 1996. Kärki on tullut ehkä entistäkin leveämmäksi ja pidemmäksi, mutta toisessa päässä heikkojen suoritusten jono on myös pidentynyt. Suoritukset, joissa summapistemäärä on 0–12 pistettä, olivat aikaisemmin satunnaisen epäonnistumisen syytä. Nyt ne ovat systeemin suosimaa arkipäivää! Lukion pitkän matematiikan opettajan rooli on mielestäni muuttunut dramaattisesti vuoden 1996 ylioppilastutkintouudistuksen jälkeen. Suurissa matematiikan opetusryhmissä on edelleen opiskelijoita, jotka ovat päättäneet kirjoittaa matematiikan pakollisena ja opiskelevat määrätietoisesti. He haluavat ohjausta pitkällekin menevään tietoon. Samoissa ryhmissä on kuitenkin toinen puoli, joka on päättänyt ehkä hieman heikommin menneiden alkukurssien vuoksi ”minimoida riskit” ja ”maksimoida hyödyn” valitsemalla reaalikokeen pakolliseksi. Tämä pakollisen reaalin valinnut ryhmä kirjoittaa pitkän matematiikan ylimääräisenä tai valitsee jonkin muun kirjoitusvaihtoehdon. He ovat pitkän matematiikan viimeisissä kursseissa mukana, mutta valitettavan usein passiivisena opetusta hidastavana joukkona, joka saa opettajan tuskailemaan neuvottomuuttaan. Lahtisen (1999) sanoin ”kahden kerroksen

[57] 1990-luvun loppupuolella noin 10 % pitkän matematiikan kirjoittajista, joista suurin osa ylimääräisenä kirjoittavia.

[58] Keväällä 2003 kirjoitti pitkän matematiikan pakollisena 48 % ja keväällä 2004 44 % pitkän matematiikan kirjoittajista (Lahtinen 2004).

väki" on syntynyt ja se vaikuttaa jo opetukseen ennen kirjoituksia.

Vuonna 2005 käyttöönotettavat lukion opetussuunnitelman perusteet eivät muuta oleellisesti pitkän matematiikan opiskelua aikaisempiin opetussuunnitelmiin nähden. Pelkään, että tässä työssä kuvattuja ongelmia on havaittavissa jatkossakin. Opiskelijan taktikointiin houkutteleva opiskelun kurssimaisuus ja runsaat valintamahdollisuudet opiskelun eri vaiheissa säilyvät edelleen. Sen sijaan ylioppilastutkinnon uudistaminen rakennekokeilumallin mukaiseksi jo keväästä 2005 alkaen saattaa lisätä matematiikan suosiota kirjoitettavana aineena. Rakennekokeilumallissa kokelaalla on ainoana pakollisena kirjoitettavana aineena äidinkieli ja kokelas valitsee kolme muuta tutkintoonsa pakollisesti kuuluvaa koetta neljän kokeen joukosta. Ne ovat toisen kotimaisen kielen koe, yhden vieraan kielen koe sekä reaaliaineissa ja matematiikassa järjestettävät kokeet. Matematiikka ei enää kilpaile pelkästään reaalin kanssa, vaan myös kielten kokeet joutuvat samaan kilpailutilanteeseen. Tässä tilanteessa pitkän matematiikan opetussuunnitelmia kannattaisi koulun tasolla pohtia ja kehittää erityisen huolellisesti omaleimaisiksi, sillä opiskelijat tekevät ilmeisesti jatkossakin pakollisten aineiden kirjoittamispäätöksensä hyvissä ajoin oppiaineesta saamiensa mielikuvien perusteella.

Ylioppilaslautakunnalla on myös suuri vastuu matematiikan kokeiden kehittämisessä. Matematiikan kokeissa on voinut valita vuodesta 2000 lähtien 10 tehtävää 15 tehtävästä. Lisääntynyt valinnanmahdollisuus on tuonut entistä enemmän täysiä 60 pisteen suorituksia ja esimerkiksi keväällä 2004 pitkän matematiikan laudaturin raja kohosi 57 pisteeseen. Toisaalta kevään 2003 hyväksytyn raja laski taas kuuteen pisteeseen. Lautakunnalla on edelleen haastetta kehittää tehtäväsarjoja, joiden osaaminen ei vaihtele vuodesta toiseen näin ennustamattomasti. Nykyisen mallisessa matematiikan kokeessa opiskelijalla pitää olla entistä kehittyneemmät metakognitiiviset taidot, jotta hän osaa valita enimmillään ne kymmenen tehtävää, joissa hän pystyy osoittamaan parasta osaamistaan. Tähän pitäisi kiinnittää huomiota jo matematiikan opintojen alkuvaiheesta lähtien. Opinnoissa pitäisi olla aina silloin tällöin tehtäväsarjoja, joissa on mukana tehtäviä useilta tutuilta matematiikan osa-alueilta. Matematiikan kokeen pakolliseksi valitseminen saa opiskelijan opiskelemaan määrätietoisemmin ja tuloksekkaammin kuin ylimääräiseksi valitseminen. Tämän vuoksi yliopistot voisivat omalta osaltaan palkita entistä enemmän esimerkiksi lisäpisteillä sisäänotossaan pitkän matematiikan kirjoittaneita. Mielestäni voisi harkita jopa sitä, että jo pitkän matematiikan kokeen pakolliseksi valitsemisella olisi merkitystä jatko-opintoihin pääsyyn.

Teknisten apuvälineiden tulo on muuttanut omalta osaltaan matematiikan opetusta ja opiskelua. Vuonna 1994 sallittiin graafisten laskinten käyttö kirjoituksissa. Graafiset laskimet olivat yksi merkittävimpiä 1990-luvulla pitkän matematiikan opetukseen vaikuttaneista opetusvälineistä, sillä ne toivat tehokkaan keinon lähestyä matemaattisia käsitteitä tutkivalla ja havainnollisella tavalla. Tietokonesukupolvi saattoi opiskella koulussa staattisen maineen saanutta matematiikkaa ajanmukaisin välinein. Toisaalta on ollut havaittavissa 1990-luvun loppupuolella, että matematiikan perustaitojen hallinta jää osalla opiskelijoista puutteelliseksi. Tämä johtuu osaksi opiskelijoiden liian suuresta turvautumisesta laskimiin ja taulukkokirjaan, mutta myös kirjoitusvalintojen opintoja ohjaavasta vaikutuksesta. Opettajilla on ratkaiseva osuus ohjatessaan opiskelijoita työtapoihin, joissa perinteinen 'kynä ja paperi'-laskeminen on opiskelijan näkökulmasta tärkeä taito laskimen käytön rinnalla. Teknisten apuvälineiden käytössä korostuu tasokas matemaattinen ajattelu[59], sillä ratkaisun suunnittelu ja tulosten tulkinta tulee yhä tärkeämmiksi koneiden suorittaessa mekaaniset laskuoperaatiot. PISA 2003-tutkimuksen mukaan matematiikassa pärjäsivät keskimäärin parhaiten ne peruskoulun viimeisen luokan oppilaat, jotka käyttivät tietotekniikkaa kohtuullisesti (Kupari ym. 2004, 49). Tämän perusteella tietotekniikan hyödyntämistä kannattaa edelleen tutkia ja kehittää pitkän matematiikan opetuksen tueksi. Toisaalta on syytä huomioida myös korkeakoulujen huoli[60] opiskelijoiden liiallisesta luottamuksesta apuvälineisiin ja pyrkiä varmistamaan perustaitojen vankka hallinta.

PISA 2003-tutkimuksessa tuli esille huolestuttavia piirteitä 15-vuotiaiden nuorten matematiikkakuvasta. Suomalaisten peruskoulun 9. luokan oppilaiden kiinnostus matematiikkaan hyvästä menestyksestä huolimatta oli OECD:n keskiarvoon verrattuna vähäistä (Kupari ym. 2004, 42). Suomalaiset tytöt luottivat itseensä huomattavasti vähemmän matematiikan osaajana kuin pojat ja tytöt kokivat itsensä huomattavasti poikia ahdistuneemmaksi matematiikan opiskelussa (mt., 45). Keväällä 2004 pitkän matematiikan kirjoittaneista tytöistä valitsi kokeen pakolliseksi vain 30 %, kun vastaava luku poikien kohdalla oli 55 % (Lahtinen 2004, 13). Tässä on haastetta pitkän matematiikan opetukselle: miten saamme rohkaistua yhä enemmän tyttöjä pitkän matematiikan opintoihin? Ongelma ei ole vain matematiikan opetuksen eikä koulutusjärjestelmän, vaan se on kansallinen ja globaali yhteiskunnan ongelma. Opettajankoulutus on eräs keino vaikuttaa ongelman ratkaisemiseen. Kun opettajat ovat tietoisia oppilaidensa matematiikkakuvista, niin he voivat yrittää muuttaa muutoksen esteinä olevia oppilaiden asenteita ja uskomuksia. Opettajankouluttajana olen tietoinen, että muutos on useimmiten aloitettava opettajista itsestään.

Edellä olen esittänyt tutkimukseni pohjalta erilaisia havaintoja ja arveluita

[59]Konseptuaalisen tiedon ja strategiatiedon käyttö.
[60]Ks. 1.2.4.

pitkän matematiikan opiskelusta lukiossa. Näistä nousee uusia jatkotutkimusaiheita. Uusien opetussuunnitelmien vaikuttavuus lukiossa ja peruskoulussa on kiinnostava tutkimusaihe: onko enää ”kynnystä” matematiikan osaamisen suhteen peruskoulun viimeisen luokan ja lukion ensimmäisen luokan pitkän matematiikan välillä ja jos on, niin minkälainen se on? Tämä on mielenkiintoista suomalaisten PISA-tutkimuksissa osoitetun menestyksen vuoksi. Tutkimuksen kohteena voisi tarkastella, miten PISA-tutkimuksissa osoitettu osaaminen näkyy pitkän matematiikan opiskelussa. Opetussuunnitelmien myötä myös oppimateriaalit uudistuvat. Kilpatrick ym. (2001) esittivät joukon tunnistettavia matemaattisen osaamisen piirteitä. Uusista oppimateriaaleista voisi tutkia miten ne tukevat mainittujen matemaattisen osaamisen piirteiden kehittymistä. Ylioppilaskirjoitusten rakenteisiin tulee muutoksia vuosina 2005 ja 2006[61]. Ylimääräisenä pitkän matematiikan kirjoittavien joukko on jatkossakin mielenkiintoinen. Heidän osaltaan voisi tutkia minkälaiset valmiudet ylimääräisenä kirjoittavilla on jatko-opintoihin, joissa tarvitaan pitkän matematiikan taitoja. Opetuksen kehittämisen lähtökohtana voisi tutkia miten pitkän matematiikan opetusta tulisi kehittää, jotta se tukisi paremmin opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittymistä yhä useamman opiskelijan kohdalla. Tässä yhteydessä voisi tutkia opiskelijan kieltä (puhuttua ja kirjoitettua) hänen matemaattisen ajattelun heijastajana. Matematiikka voidaan nähdä myös omana ’kielenään’ ja tutkia miten opiskelijat välittävät ajatteluaan matematiikan symbolikielen kautta.

Uuden vuosituhannen alun painopistealueita matematiikan opetuksessa voisi olla tietoisuuden lisääminen opiskelijan matemaattisesta ajattelusta ja sen edelleen kehittämisestä sekä opiskelijan itsensä että opettajan tarkoituksenmukaisilla toimenpiteillä. Erityisesti ongelmanratkaisussa tarvittavien strategisten kompetenssien opiskelu pitäisi liittää systemaattisesti opiskeltavaan oppisisältöön. Amerikkalaiset painottavat uudessa matematiikan opetusta parantavassa ohjelmassaan (Kilpatrick ym. 2001) nuorten matemaattisen ajattelun oppimista. Matemaattisen ajattelun oppiminen on avain matematiikan todelliselle oppimiselle. Seuraava lainaus sopii mielestäni ohjenuoraksi myös uusiin tämän vuosituhannen ensimmäisiin matematiikan opetussuunnitelman perusteisiin Suomessa (mt., 1):

> *All young - - must learn to think mathematically, and they must think mathematically to learn.*

[61] Keväällä 2006 tulee ainereaalikoe, jossa kokelas vastaa vain yhden etukäteen valitsemansa oppiaineen kysymyksiin kerrallaan.

Lähteet

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: Edita.

Anderson, J. 1980. Cognitive psychology and its implications. San Francisco: W.H. Freeman.

Avital, S. & Shettleworth, S. 1968. Objectives for mathematics learning, some ideas for the teacher. Toronto. The Ontario Institute for Studies in Education. Bulletin No 3.

Barnard, T. & Tall, D. 2001. Comparative study of cognitive units in mathematical thinking. Teoksessa M. van den Heuvel-Panhuizen (toim.) Proceedings of the 25. conference of the international group for the psychology of mathematics education, Utrecht (The Netherlands). Volume 2, 89–96.

Barton, B. 1996. Anthropological perspectives on mathematics and mathematics education. Teoksessa A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (toim.) International handbook of mathematics education. Part 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1035–1053.

Bereiter, C. 2002. Education and mind in the knowledge age. Mahwah (NJ): Erlbaum.

Berenson, S., Cavey, L., Clark, M. & Staley K. 2001. Adapting Pirie and Kieren's model of mathematical understanding to teacher preparation. Teoksessa M. van den Heuvel-Panhuizen (toim.) Proceedings of the 25. conference of the international group for the psychology of mathematics education, Utrecht (The Netherlands). Volume 2, 137–144.

Berry, J. 1994. Mitä ongelmanratkaisu on? (Artikkelin on suomeksi kääntänyt P. Sahlberg). Teoksessa R. Seppälä (toim.) Matematiikka – taitoa ajatella. Jyväskylä: Gummerrus, 51–59.

Björkqvist, O. 2001. Matematisk problemlösning. Teoksessa B. Grevholm (toim.) Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv. Lund: Studentlitteratur, 115–132.

Bourne, L. Jr., Ekstrand, B. & Dominowski, R. 1971. The psychology of thinking. New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Bransford, J. D., Zech, L., Schwartz, D., Barron, B. & Vye, N. 1996. Fostering mathematical thinking in middle school students: lessons from research. Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum, 203–250.

Burton, L. 1984. Mathematical thinking: The struggle for meaning. Journal for Research in Mathematics Education 15, 35–47.

Carr, W. & Kemmis, S. 1986. Becoming critical. London: The Falmer Press.

Carroll, J. 1996. Mathematical abilities: some results from factor analysis. Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum, 3–25.

Crawford, K. & Adler, J. 1996. Teachers as researchers in mathematics education. Teoksessa A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (toim.) International handbook of mathematics education. Part 2. London: Kluwer, 1187–1206.

Di Martino, P. & Zan, R. 2001. Attitude toward mathematics: some theoretical issues. Teoksessa M. van den Heuvel-Panhuizen (toim.) Proceedings of the 25. conference of the international group for the psychology of mathematics education, Utrecht (The Netherlands). Volume 3, 351–358.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. 1996. On different facets of mathematical thinking. Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum, 253–284.

Dubinsky, E. 1994. A theory and practice of learning college mathematics. Teoksessa A. Schoenfeld (toim.) Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale (NJ): Erlbaum, 221–243.

Ernest, P. 1989. The Impact of beliefs on the teaching of mathematics. Teoksessa P. Ernest (toim.) Mathematics ng. the State of the Art. New York: The Falmer Press.

Ernest, P. 1991. The philosophy of mathematics education. London: the Falmer Press.

Ernest, P. 1995. The one and the many. Teoksessa L. Steffe & J. Gale (toim.) Constructivism in education. Hillsdale (NJ): Erlbaum, 459–486.

Ernest, P. 1996. Social constructivism and the psychology of mathematics education. Teoksessa P. Ernest (toim.) Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematical education. London: The Falmer Press, 62–72.

Ernest, P. 1998a. The culture of the mathematics classroom and the relations between personal and public knowledge: an epistemological perspective. Teoksessa F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (toim.) The culture of the mathematics classroom. Cambridge: Cambridge University Press, 245–266.

Ernest, P. 1998b. Social constructivism as a philosophy of mathematics. Albany (NY): State University of New York Press.

Ernest, P. 2001. Critical mathematics education. Teoksessa P. Gates (toim.) Issues in mathematics teaching. London: The Routledge Falmer, 277–293.

Erätuuli, M., Leino, J. & Yli-Luoma, P. 1994. Kvantitatiiviset analyysimenetelmät ihmistieteissä. Helsinki: Kirjayhtymä.

Furinghetti, F. 1998. Around the term ”belief”. Teoksessa M. Hannula (toim.) Current state of research on matehematical beliefs VII. Proceedings of the MAVI-7 workshop. Department of Teacher Education. Research report 198, 24–29.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. 2000. A comparative study on students' beliefs concerning their autonomy in doing mathematics. Nordisk Matematik Didaktik 8 (4), 7–26.

Gerdes, P. 1996. Ethnomathematics and mathematics education. Teoksessa A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (toim.) International handbook of mathematics education. Part 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 909–944.

Ginsburg, H. 1996. Toby's math. Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum, 175–202.

Gjone, G. 2001. Läroplaner och läroplansutveckling i matematik. Teoksessa B. Grevholm (toim.) Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv. Lund: Studentlitteratur, 91–111.

von Glasersfeld, E. 1988. Environment and communication. Paper presented at ICME6 27.7. – 3.8.1988. Budapest.

von Glasersfeld, E. 1995. A constructivist approach to teaching. Teoksessa L. Steffe & J. Gale (toim.) Constructivism in education. Hillsdale (NJ): Erlbaum, 3–15.

von Glasersfeld, E. 2000. Problems of constructivism. Teoksessa L. Steffe & P. Thompson (toim.) Radical constructivism in action. London: Routledge Falmer, 3–9.

Gray, E. & Tall, D. 1994. Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education 26 (2), 115–141.

Gray, E. & Tall, D. 2001. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. Teoksessa M. van den Heuvel-Panhuizen (toim.) Proceedings of the 25. conference of the international group for the psychology of mathematics education, Utrecht (The Netherlands). Volume 3, 65–72.

Green, T. F. 1971. The activities of teaching. Tokyo: Mc Graw-Hill Kogakusha.

Greeno, J. 1987. Instructional representations based on research about understanding. Teoksessa A. Schoenfeld (toim.) Cognitive science and mathematics education. Hillsdale (NJ): Erlbaum, 61–88.

Haapasalo, L. 1997. Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 51–79.

Haapasalo, L. 1997. Ongelmanratkaisun oppimisesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 80–98.

Haapasalo, L. 1998. Oppiminen, tieto, ongelmanratkaisu. Joensuu: Medusa-Software.

Haapasalo, L. 2003. The conflict between conceptual and procedural knowledge: should we need to understand in order to be able to do or vice versa? Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim.) Towards meaningful mathematics and science education. Joensuun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan selosteita n:o 86, 1–20.

Haapasalo, L., Hirvi T. & Huhtamäki J. 1995. Miten lukiolaiset hallitsevat raja-arvon käsitteen? Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 60.

Haapasalo, L. & Kadijevich, Dj. 2000. Two types of mathematical knowledge and their relation. Journal of Fur Mathematik-Didaktik (21), 2, 139–157.

Hannula, M. 2001. The metalevel of cognition-emotion interaction. Teoksessa M. Ahtee, O. Björkqvist, E. Pehkonen & V. Vatanen (toim.) Research on mathematics and science education. Jyväskylä: Institute for Educational Research, 55–65.

Hannula, M. 2002. "So I changed my attitude"; A case study of attitude and its development. Teoksessa H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (toim.) Tutkimuksella parempaan opetukseen. Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A26, 63–71.

Hannula, M. 2004. Affect in mathematical thinking and learning. Turun yliopiston julkaisuja sarja B osa 273. Turku: Turun yliopisto.

Hartikka,T., Partanen, J., Salonen, C. & Toivanen, P. 2000. Pitkän matematiikan yo-tehtäviä. Jyväskylä: Tammi.

Hautamäki, A. 1993. Kognitiotiede. Teoksessa E. Hyvönen, I. Karanta & M. Syrjänen (toim.) Tekoälyn ensyklopedia. Hämeenlinna: Gaudeamus, 53–61.

Helenius, H. 1992. Tilastollisten menetelmien perustiedot. Tampere: Statcon.

Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics. Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum, 1–27.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. 1992. Learning and teaching with understanding. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics learning and teaching. New York: Macmillan, 65–97.

Hunt, D.E. 1987. Beginning with ourselves. In practice, theory and human affairs. Cambridge: Brookine Books.

Jablonka, E. 2003. Mathematical literacy. Teoksessa A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (toim.) Second international handbook of mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 75–102.

Joki, J. 2002. Ulkoluvusta hahmottavaan geometriaan. Aineksia geometrian opetukseen erityisesti peruskoulussa. Joensuun yliopisto. Matematiikan laitos. Didaktisen matematiikan sarja 1.

Joutsenlahti, J. 1996. Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteen laitos. Lisensiaatintyö.

Joutsenlahti, J. 1997. Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 336–351.

Joutsenlahti, J. 2002. Pitkän matematiikan opiskelijoiden matematiikkauskomukset 1990-luvulla. Teoksessa H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (toim.) Tutkimuksella parempaan opetukseen. Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A26, 81–85.

Joutsenlahti, J. 2003a. Matemaattinen ajattelu ja kieli, eräs mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetussuunnitelmassa. Teoksessa A.-L. Aalto & T. Tuomi (toim.) Projekteja ja prosesseja – opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 8, 3–12.

Joutsenlahti, J. 2003b. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B:72, 188–196.

Joyce, B. & Weil, M. 1986. Models of teaching. Third edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kaasila, R. 2000. "Eläydyin oppilaiden asemaan" Luokanopettajiksi opiskelevien kouluaikaisten muistikuvien merkitys matematiikkaa koskevien käsitysten ja opetuskäytäntöjen muotoutumisessa. Lapin yliopisto, Kasvatustieteiden tiedekunta. Acta universitatis Lapponiensis 32.

Kadijevich, Dj. 2003. Linking procedural and conceptual knowledge. Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim.) Towards meaningful mathematics and science education. Joensuun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan selosteita n:o 86, 21–28.

Kadijevich, Dj. & Haapasalo, L. 2001. Linking procedural and conceptual mathematical knowledge through CAL. Journal of Computer Assisted Learning (17), 156–165.

Kangasniemi, E. 1989. Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 28.

Kangasniemi, E. 2000. Opettajan uskomukset ja opetusmenetelmät sekä oppilaiden oppimistulokset matematiikassa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimusselosteita 11.

Keranto, T. 1981. Lukukäsitteen kehittyminen ja kehittäminen: matemaattis-loogiset perusteet ja luvun kognitiivinen rakentuminen. Tampere. Tampereen yliopisto.

Keskinen, E. 1995. Taitojen oppiminen. Teoksessa J. Kuusinen (toim.) Kasvatuspsykologia. Juva: WSOY, 70–95.

Kilpatrick, J. 1983. Some questions about mathematical abilities. Proceedings of fourth international congress on mathematical education. ICME IV 489-491. Boston: Birhäuser. ICME IV, 489–491.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (toim.) 2001. Adding it up. Washington DC: National Academy Press.

Kilpatrick, J. & Swafford, J. (toim.) 2002. Helping children learn mathematics. Washington DC: National Academy Press.

Kivelä, S. 1992. Matematiikan opiskelu digitaalisessa ympäristössä: Iso-M-projektin lähtökohdat, periaatteet ja toteutus. Otaniemen teknillisen korkeakoulun matematiikan laitoksen raporttisarja C14.

Kivelä, S. 2000. Lukiolaisen derivaatta ja kahva edellä hyppivät sekantit. Dimensio 56 (2), 29–30.

Komiteanmietintö 1988. Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean välimietintö 1988:30. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Komiteanmietintö 1989. Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean loppumietintö 1989:45. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Koponen, R. 1994. Asenteet matematiikkaa kohtaan. Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 56.

Korhonen, H. 2001. Perusopetuksen päättövaiheen matematiikan oppimistuloksista. Dimensio 65 (2), 12–15.

Krutetskii, V. A. 1976. The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: The University of Chicago Press.

Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7.

Kupari, P. 2003. Finnish students' mathematical literacy in PISA 2000. Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen Towards meaningful mathematics and science education. Joensuun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan selosteita n:o 86, 83–90.

Kupari, P. & Korhonen, H. 2000. Miten matematiikkaa arvioidaan OECD/PISA-ohjelmassa? Dimensio 64 (5), 10–13.

Laarni, J., Kalakoski, V., & Saariluoma, P. 2001. Ihmisen tiedonkäsittely. Teoksessa P. Saariluoma (toim.) Moderni kognitiotiede. Helsinki: Gaudeamus, 85–127.

Lahtinen, A. 1996a. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1995. Dimensio 60 (1), 29–45.

Lahtinen, A. 1996b. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1996. Dimensio 60 (6), 24–43.

Lahtinen, A. 1997. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1997. Dimensio 61 (6), 33–48.

Lahtinen, A. 1998. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1998. Dimensio 62 (6), 20–36.

Lahtinen, A. 1999. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1999. Dimensio 63 (6), 4–22.

Lahtinen, A. 2000. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2000. Dimensio 64 (6), 12–30.

Lahtinen, A. 2001. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2001. Dimensio 65 (6), 10–26.

Lahtinen, A. 2004. Matematiikan ylioppilaskirjoitukset kevät 2004. Dimensio 68 (6), 12–27.

Lakatos, I. 1977. Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery. Cambridge: Cambridge University Press.

Lawson, M. 1980. Metamemory: making decisions about strategies. Teoksessa Kirby, J. & Biggs, J. (toim.) Cognition, development and instruction. New York: Academic Press, 145–160.

Leino, J. 1977. Matemaattisten kykyjen ja ajatteluprosessien kehittäminen kouluopetuksessa. 1. Matemaattiset kyvyt ja asenteet. Helsingin yliopiston kasvatustieteiden laitos. Tutkimuksia 60.

Leino, J. 1978. Matemaattisten kykyjen ja ajatteluprosessien kehittäminen kouluopetuksessa. 2. Matemaattinen ajattelu ja suoritusprosessi. Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 66.

Leino, J. 1993. Konstruktivismi ja matematiikan opetus. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.) Matematiikan opetus ja konstruktivismi - Teoriaa ja käytäntöä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 116, 11–20.

Leino, J. 1997. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen, (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 39–51.

Lester, K. & Lambdin, D. 2004. Teaching mathematics through problem solving. Teoksessa B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Wallby & K. Wallby (toim.) International perspectives on learning and teaching mathematics. Göteborg: Göteborg University, 189–204.

Lindgren, S. 1997. Voidaanko matematiikan opiskeluasenteita muuttaa? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 301–315.

Lindgren, S. 2003. Platonin tietoteoria ja matematiikan opetus. Kasvatus 34 (1), 79–86.

Kouluhallitus 1985. Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Opetushallitus 1994. Lukion opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.

Ma, X. & Kishor, N. 1997. Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. Journal for research in mathematics education 28 (1), 26–47.

Meissner, H. 2001. Encapsulation of process in geometry. Teoksessa M. van den Heuvel-Panhuizen (toim.) Proceedings of the 25. conference of the international group for the psychology of mathematics education, Utrecht (The Netherlands). Volume 3, 359–366.

Malaty, G. 2002. Matemaattinen ajattelu ja matematiikan opetus. Teoksessa M.-L. Julkunen (toim.) Opetus, oppiminen, vuorovaikutus. 2. uusittu painos. Vantaa: WSOY, 111–134.

Malinen, P. 1969. The learning of elementary algebra. An empirical investigation of the results of learning in a simplified school learning system. Helsinki. Research bulletin No. 25. Institute of education, university of Helsinki.

Malinen, P. 1985. Opetussuunnitelmat nykyajan koulutuksessa. Keuruu: Otava.

Malmivuori, M-L. 2001. The dynamics of affect, cognition, and social environment in the regulation process of personal learning processes: The case of mathematics. University of Helsinki. Department of Education. Research report 172.

McLeod, D. B. 1989. The role of affect in mathematical problem solving. Teoksessa D. B. McLeod & V. M. Adams (toim.) Affect and mathematical problem solving. A new perspective. New York: Springer–Verlag, 20–36.

McLeod, D. B. 1992. Research on affect in mathematics education: a reconceptualisation. Teoksessa D. A. Grows (toim.) Handbook of research mathematics teaching and learning. London: Mcmillan Publishing Co, 575–596.

Mehtäläinen, J.(toim.) 1992. Tiedollinen kasvatus ja ajattelun kehittäminen. Helsinki: VAPK-kustannus.

Merenluoto, K. 2001. Lukiolaisen reaaliluku. Lukualueen laajentaminen käsitteellisenä muutoksena matematiikassa. Turun yliopiston julkaisusarja C osa 176. Turku: Turun yliopisto.

Nickerson, R., Perkins, D. & Smith E. 1985. The teaching of thinking. New Jersey: Erlbaum Associates.

Niemi, E. 2004. Perusopetuksen oppimistulosten kansallinen arviointi ja tulosten hyödyntäminen koulutuspoliittisessa kontekstissa. Turun yliopiston julkaisuja sarja C osa 216. Turku: Turun yliopisto.

Niiniluoto, I. 1992a. Informaatio, tieto ja yhteiskunta. 4. painos. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Niiniluoto, I. 1992b. Taito–kollokvion avaussanat. Teoksessa I. Halonen, T. Airaksinen, & I. Niiniluoto (toim.) Taito. Helsinki: Yliopistopaino, 5–9.

Opetushallitus 1998a. Luma-projekti tiedottaa 1. Opetushallitus: moniste 6/1998.

Opetushallitus 1998b. Luma-projekti tiedottaa 2. Indikaattorit. Opetushallitus: moniste 16/1998

Opetushallitus 1999. Luma-projekti tiedottaa 5. Indikaattorit 2. Opetushallitus: moniste 23/1999.

Opetushallitus 2003a. Luma-projekti tiedottaa 8. Indikaattorit 5. Opetushallitus: moniste 3/2003.

Opetushallitus 2003b. Perusopetuksen opetuskokeiluissa lukuvuonna 2003–2004 noudatettavat opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 3–9 ja perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 1–2. Helsinki: Edita Prima.

Ottelin, J. 1998. Four view clusters of Finnish twelfth-graders about mathematics teaching. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.) The state-of-art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research report 195, 240–248.

Pascal, B. 2002. Geometrisestä mielestä ja muita pohdiskeluja. Suomentanut M. Anhava. Porvoo: WSOY.

Pehkonen, E. 1994. Avoimet tehtävät vastauksena oppimisnäkemyksen esittämiin haasteisiin. Teoksessa R. Seppälä (toim.) Matematiikka – taitoa ajatella. Jyväskylä: Gummerrus, 60–64.

Pehkonen, E. 1998. On the concept ”mathematical belief”. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.) The state-of-art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research report 195, 37–72.

Pehkonen, E. 1999. Professorien matematiikkakäsityksistä. Kasvatus 30 (2), 120–127.

Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. Kasvatus 31 (4), 375–381.

Pehkonen, E. 2001. Mitä on matematiikka ja miten sitä osataan koulussa. Arkhimedes (3), 14–17.

Pimm, D. 1987. Speaking mathematically. London: Routledge.

Pirie, S. & Kieren, T. 1994. Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? Educational Studies in Mathematics 26 (2), 191–228.

Polanyi, M. 1962. Personal knowledge: towards a post – critical philosophy. Chicago: University of Chigago Press.

Polya, G. 1971. How to solve it? A new aspect of mathematical method. Second edition. Princeton (NJ): Princeton University Press.

Rice, B. 1992. Increasing critical thinking skills of the fourth grade student through problem solving activities. ERIC ED351273.

Robitaille, D. & Garden R. (toim.) 1989. The IEA Study of Mathematics II: Contexts and Outcomes of School Mathematics. Oxford: Pergamon Press.

Rosenberg, E. 1991. Matematiikan koe K 1990. Dimensio 55 (2), 38–47.

Rosenberg, E. 1992. Matematiikan koe K 1991. Dimensio 56 (2), 14–28.

Rosenberg, E. 1993a. Matematiikan kokeet 1992. Dimensio 57 (2), 10–25.

Rosenberg, E. 1993b. Matematiikan koe K 1993. Dimensio 57 (8-9), 35–44.

Rowland, T. 1997. Fallibilism and the zone of conjectural neutrality. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the 21. conference of the international group for the psychology of mathematics education, Lahti (Finland). Volume 4, 80–87.

Ruohotie, P. 1997. Itsesäätely oppimisessa teoksessa P. Ruohotie & J. Honka (toim.) Osaamisen kehittäminen organisaatiossa. Seinäjoki: Rt Consulting Team, 101–143.

Ryle, G. 1966. The concept of mind. Harmondsworth: Penguin.

Saari, H. 1983. Koulusaavutusten affektiiviset oheissaavutukset. Jyväskylän yliopisto: kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisuja 348.

Saariluoma, P., Kamppinen, M. & Hautamäki, A. (toim.) 2001. Moderni kognitiotiede. Helsinki: Gaudeamus.

Sáenz-Ludlow, A. 1997. Inferential processes in Michael's mathematical thinking. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the 21. conference of the international group for the psychology of mathematics education, Lahti (Finland). Volume 4, 120–127.

Saranen, E. 1992. Lukion yleisen oppimäärän opiskelijoiden matematiikan taidot ja käsitykset matematiikasta. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 38.

Savolainen, J. & Airaksinen, T. 1992. Keinotekoisen taito. Teoksessa I. Halonen, T. Airaksinen & I. Niiniluoto (toim.) Taito. Helsinki: Yliopistopaino, 203–218.

Sawyer, W. 1958. Jokamiehen matematiikkaa. Hämeenlinna: Arvi Karisto Oy.

Saxe, G. B., Dawson, V., Fall, R. & Howard, S. 1996. Culture and children's mathematical thinking. Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum, 119–144.

Schoenfeld, A. 1985. Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. 1985. Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. Teoksessa E. Silver (toim.) Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives. Hillsdale (NJ): Erlbaum, 361–379.

Schoenfeld, A. 1987. What's all the fuss about metacognition? Teoksessa A. Schoenfeld (toim.) Cognitive science and mathematics education. Hillsdale (NJ): Erlbaum Associates, 189–215.

Schoenfeld, A. 1992. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Teoksessa D. A. Grows (toim.) Handbook of research mathematics teaching and learning. London: Mcmillan Publishing Co, 334–370.

Schoenfeld, A. 1994. Reflections on doing and teaching mathematics. Teoksessa A. Schoenfeld (toim.) Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale (NJ): Erlbaum, 53–70.

Sfard, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics 22 (1), 1–36.

Sfard, A. 1998. Symbolizing mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. Teoksessa P. Cobb, K. Yackel & K. McClain (toim.) Symbolizing and communicating: perspectives on mathematical discourse, tools and instructional design. Mahwah (NJ): Erlbaum, 37–98.

Seinelä, K. 1992. Kokeellis-induktiivisen menetelmän toimivuus lukion fysiikan opetuksessa. Tampereen opettajakoulutuslaitoksen julkaisuja A14.

Seppälä, R. 1994. Mihin matematiikan opetus tähtää peruskoulun yläasteella ja lukiossa? Teoksessa R. Seppälä (toim.) Matematiikka – taitoa ajatella. Jyväskylä: Gummerrus, 15–24.

Sierpinska, A. 1994. Understanding in mathematics. London: Falmer Press.

Sierpinska, A. & Nnadozie, A. 2001. Methodological problems in analyzing data from a small scale study on theoretical thinking in high achieving linear algebra students. Teoksessa van den Heuvel-Panhuizen (toim.) Proceedings of the 25. conference of the international group for the psychology of mathematics education, Utrecht (The Netherlands). Volume 4, 177–184.

Sihvola, J. 1992. Kreikkalainen filosofia ja käytännön taidot. Teoksessa I. Halonen, T. Airaksinen & I. Niiniluoto (toim.) Taito. Helsinki: Yliopistopaino, 11–33.

Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Vammala: Vammalan kirjapaino oy .

Soro, R. 2002. Opettajien uskomukset tytöistä, pojista ja tasa-arvosta matematiikassa. Turun yliopiston julkaisuja sarja C osa 191. Turku: Turun yliopisto.

Sternberg, R. 1996. What is mathematical thinking? Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum, 303–318.

Tall, D. (toim.) 1991. Advanced mathematical thinking. Mathematics education library 11. Dordrecht: Kluwer.

Thompson, A. G. 1992 Teachers´ beliefs and conceptions: a synthesis of the research. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 127–146.

Tilastokeskus 2000. Suomen tilastollinen vuosikirja 2000. Tilastokeskus.

Tilastokeskus 2002. Oppilaitostilastot 2002. Tilastokeskus: moniste Koulutus 2002:8.

Törner, G. & Grigutsch, S. 1994. Mathematische Weltbilder bei Studienanfängern eine Erhebung. Journal fur Mathematik-Didaktik 15 (3/4), 211–251.

Uljens, M. 1997. School didactics and learning. Hove: Psychology Press.

Uusikylä, K. 1994. Lahjakkaiden kasvatus. Juva: WSOY.

Utbildningsdepartementet 1992. Skola för bildning. Stockholm: Statens offentliga utredningar 1992:94.

Vahervuo, T. 1948. Matemaattisen kyvykkyyden mittaaminen. Helsinki: WSOY.

Välijärvi, J. 1997. Millä eväillä lukiosta yliopistoon? Lukiolaisten opiskeluvalmiudet korkeakoulujen opettajien arvioimina. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 68.

Välijärvi, J., Linnakylä, P., Kupari, P., Reinikainen, P., Malin, A. & Puhakka, E. 2001. Suomen tulevaisuuden osaajat. 15-vuotiaiden nuorten lukutaito sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen kansainvälisessä vertailussa. PISA 2000 - tutkimuksen ensituloksia. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Värri, V. M. 2002. Kasvatus ja "ajan henki" – tulkintoja psykokapitalismin armottomuudesta. Aikuiskasvatus 22 (2).

Watts, M. & Pope, M. 1989. Thinking about thinking, learning about learning: construktivism in physics education. Physics Education 6, 317–325.

Wilson, J. 1971. evaluation of learning secondary school mathematics. Teoksessa B. Bloom, T. Hastings & G. Madaus (toim.) Handbook on formative and summative evaluation of student learning. New York: McGraw-Hill, 643–695.

Ylioppilastutkintolautakunta, 1990. Ylioppilastutkintolautakunnan ohjeita rehtoreille ja matematiikan opettajille. Kirje 1.2.1990.

Ylioppilastutkintolautakunta, 1995. Ylioppilastutkintolautakunnan koulutustilaisuudessa jaettu moniste.

Yrjönsuuri, R. 1989. Lukiolaisten opiskeluorientaatiot ja menestyminen matematiikassa. Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 120.

Yrjönsuuri, R. 1990. Lukiolaisten matemaattisen ajattelun oppiminen. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 88.

Yrjönsuuri, R. 2003. Matemaattisen ajattelun yhteys arvosanaan. Dimensio 67 (4), 39–42.

Yrjönsuuri, R. & Yrjönsuuri, Y. 1997. Matematiikan opiskelun ja opetuksen käsitteet. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 111–127.

Zimmermann, B. 2001. On some issues on mathematical problem solving from an european perspective. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Problem solving around the world. University of Turku, faculty of education, report series C:14, 55–64.

Zimmermann, B. 2003. On the genesis of mathematics and mathematical thinking - a network of motives and activities drawn from the history of mathematics. Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim.) Towards meaningful mathematics and science education. Joensuun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan selosteita n:o 86, 29–47.

Internet- lähteet:

Boudourides, M. A. 1998. Constructivism and education: A shopper's guide. Contributed paper at the international conference on the Teaching of Mathematics Samos, Greece, July 3–6, 1998.
www.math.upatras.gr/ mboudour/articles/constr.html. (21.1.2004)

Garson, J. 2002. Connectionism. Stanford Encyclopedia of Philosophy.
plato.stanford.edu/entries/connectionism/. (21.6.2003)

Kupari, P., Välijärvi, J., Linnakylä, P., Reinikainen, P., Brunell, V., Leino, K., Sulkunen, S., Törnroos, J., Malin, A., Puhakka, E. 2004. Nuoret osaajat. PISA 2003–tutkimuksen ensituloksia.
www.jyu.fi/ktl/pisa/. (19.12.2004)

Lukiolaki 629/1998.
www.finlex.fi. (8.1.2004)

Mouwitz, L. 2003. On forma of knowledge in school mathematics - some philosophical reflections on a case study. Nordic preconference to ICME 10 at Växjö university Sweden may 9-11 2003. Seminar group 2.
www.msi.vxu.se/picme10/F2ML.pdf. (10.6.2003)

National Assessment Governing Board 2000. Mathematics framework for the 1996 and 2000 National Assessment of Educational Progress. Washington, DC.
www.nagb.org/pubs/96 − 2000math/toc.html. (28.7.2003)

Opetushallitus. 2002. Opetushallituksen LUMA-internetsivut.
www.edu.fi/projektit/luma. (27.7.2002)

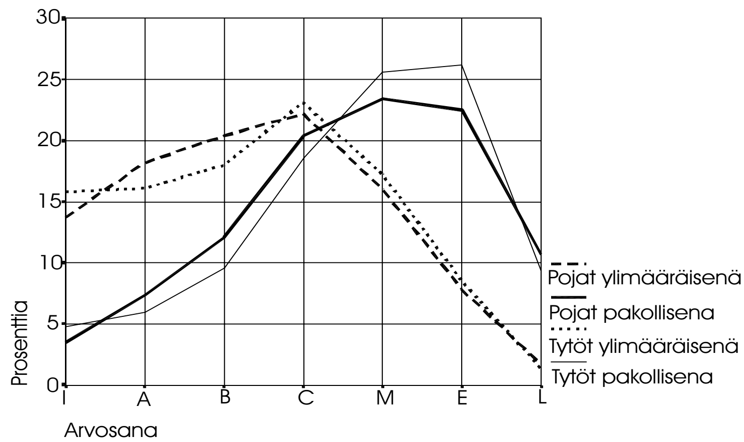
Opetushallitus. 2003c. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (pdf).
www.oph.fi/SubPage.asp?path = 1; 17627; 5238; 5242. (19.1.2004)

Tilastokeskus 2003. Suomi lukuina. Koulutus.
www.stat.fi/tk/tp/tasku/taskus$_k$*oulutus.html*. (29.7.2003)

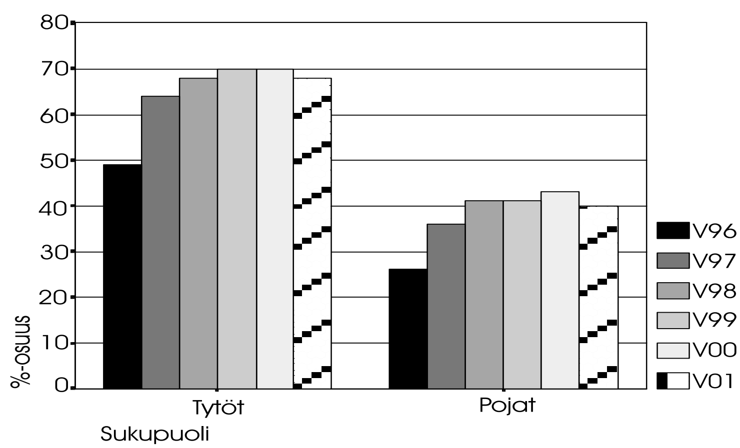
Ylioppilastutkintoasetus 1000/1994.
www.finlex.fi. (8.1.2004)

Liitteet

LIITE 1: Tytöt ja pojat pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa.

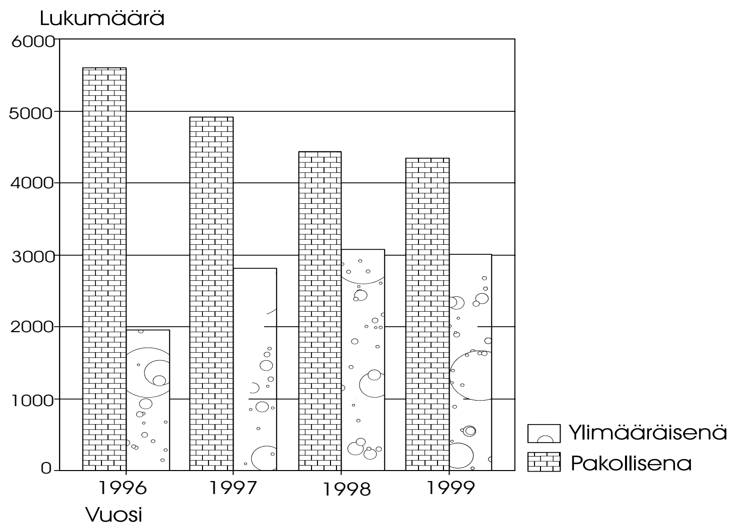


KUVIO 9.2: Kevään 1999 pitkän matematiikan pakollisena (n=5806) tai ylimääräisenä (n=6371) ylioppilaskirjoituksissa kirjoittaneiden tyttöjen (n=4816) ja poikien (n=7361) prosenttiosuudet oman sukupuolen muodostamasta kirjoittajaryhmästä eri arvosanaluokissa.

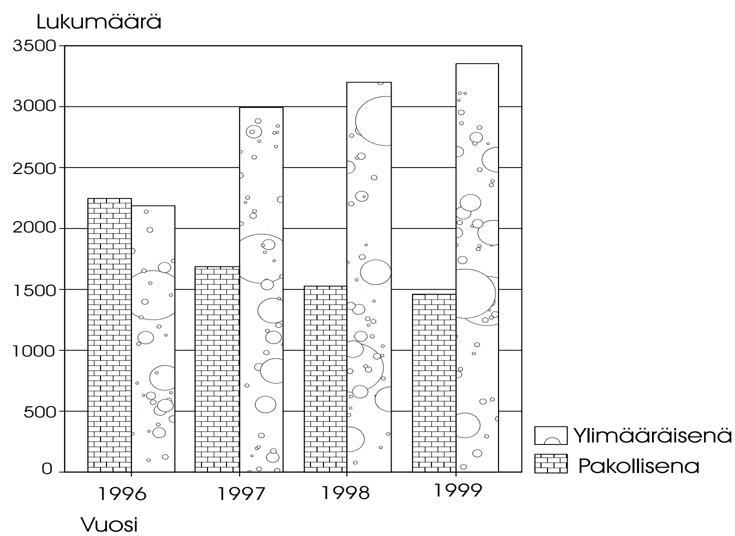


KUVIO 9.3: Ylimääräisenä kirjoittaneiden tyttöjen ja poikien suhteelliset osuudet kevään kirjoituksissa vuosina 1996–2001.

LIITE 2: Pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittaneiden lukumäärät vuosina 1996–1999.

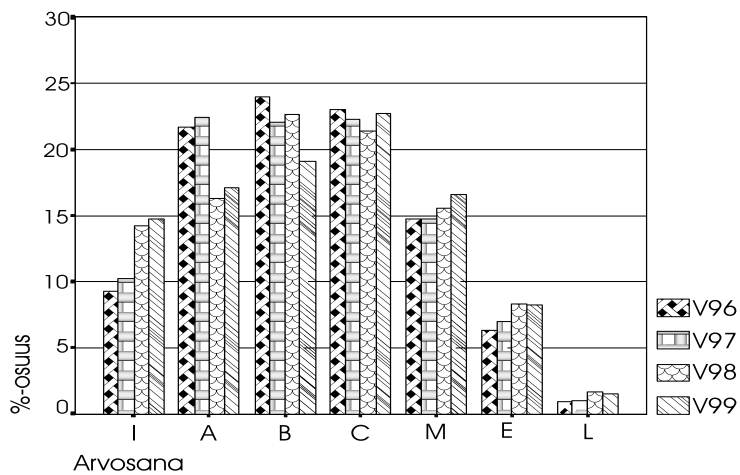


KUVIO 9.4: Pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittaneiden poikien lukumäärät kevään ylioppilaskirjoituksissa 1996–1999.

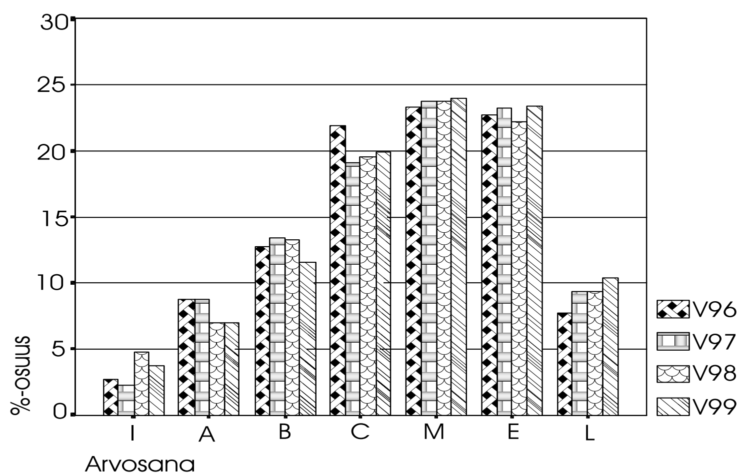


KUVIO 9.5: Pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittaneiden tyttöjen lukumäärät kevään ylioppilaskirjoituksissa 1996–1999.

LIITE 3: Pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten arvosanajakaumia.



KUVIO 9.6: Pitkän matematiikan ylimääräisenä kevään kirjoituksissa kirjoittaneiden arvosanajakauma 1996–1999.



KUVIO 9.7: Pitkän matematiikan pakollisena kevään kirjoituksissa kirjoittaneiden arvosanajakauma 1996–1999.

LIITE 4: Tilastotietoja 1990-luvun ylioppilaskirjoitustehtävistä.

TAULUKKO 9.1: Vuosien 1990–1993 pitkän matematiikan kevään ylioppilaskirjoituskokeiden vaihtoehdottomien tehtävien osa-alue, tehtävää yrittäneiden keskiarvo (ka) sekä keskihajonta (haj.), mukautetun Wilsonin taksonomian mukainen taso (W-taso) ja ratkaisuprosentti (vähintään tehtävästä 4 pistettä saaneiden osuus kaikista kokeeseen osallistuneista) pakollisena kirjoittaneilla.

Teht. (nro/vuosi)	Osa-alue	Ka	Haj	W-taso	Ratkaisuprosentti
2/90	DIF	4.59	2.31	LY	75
4/90	YHT	5.94	0.47	LY	97
5/90	GEO	3.29	2.59	SA	57
7/90	DIF	2.26	2.28	YS	29
9/90	DIF	1.19	1.74	SA	9
2/91	DIF	4.50	2.43	LY	76
6/91	DIF	2.88	2.61	YS	40
8/91	GEO	0.91	1.77	SA	10
9/91	DIF	0.21	1.00	SA	1
10/91	GEO/DIF	1.80	2.28	SA	20
1/92	DIF	5.47	1.24	LY	90
2/92	DIF	4.70	2.07	LY	75
3/92	YHT	5.30	1.37	LY	88
7/92	DIF	2.68	2.10	YS	35
8/92	GEO	2.00	2.07	YS	23
1/93	YHT	5.68	1.12	LY	95
2/93	YHT	4.74	2.15	LY	75
5/93	YHT	1.58	1.46	YS	11
8/93	GEO	3.27	2.40	YS	46
10/93	DIF	1.31	1.69	SA	9

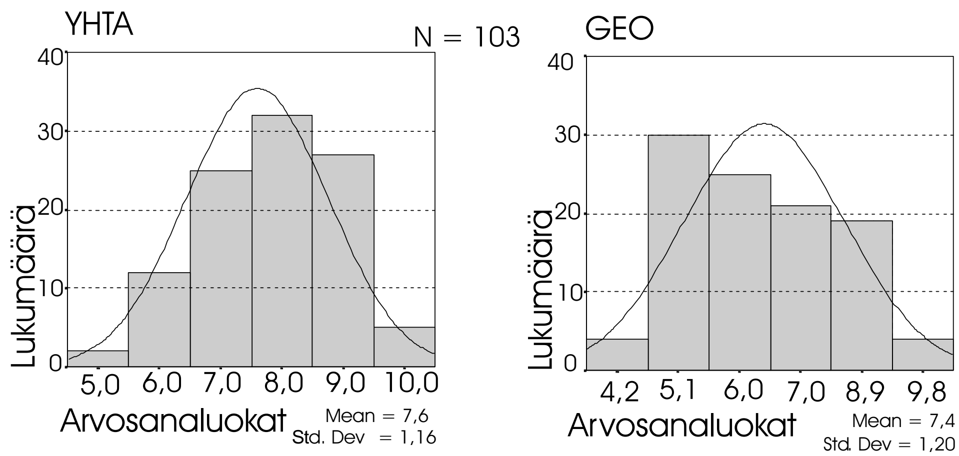
Jatkuu seuraavalla sivulla.

LIITE 4: (jatkuu).

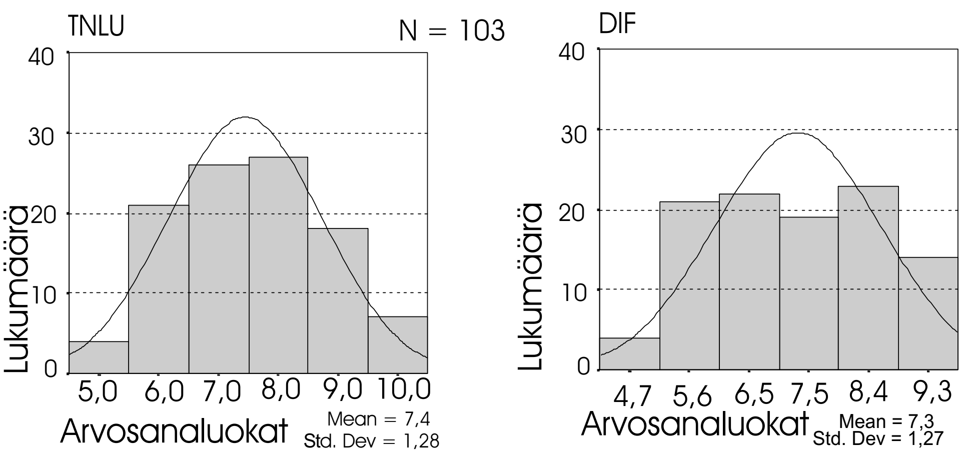
TAULUKKO 9.2: Vuosien 1995–1999 pitkän matematiikan kevään ylioppilaskirjoituskokeiden vaihtoehdottomien tehtävien osa-alue, tehtävää yrittäneiden keskiarvo (ka) sekä keskihajonta (haj.), mukautetun Wilsonin taksonomian mukainen taso (W-taso) ja ratkaisuprosentti (vähintään tehtävästä 4 pistettä saaneiden osuus kaikista kokeeseen osallistuneista) pakollisena kirjoittaneilla.

Teht. (nro/vuosi)	Osa-alue	Ka	Haj	W-taso	Ratkaisuprosentti
1/95	YHT	4.22	2.00	LY	67
2/95	YHT	4.28	2.07	YS	72
4/95	DIF	4.78	1.86	LY	80
6/95	GEO	4.04	1.84	YS	65
8/95	GEO	2.09	2.03	SA	28
10/95	DIF	2.12	2.23	SA	18
1/96	YHT	4.16	1.81	LY	54
3/96	YHT	3.95	1.83	YS	63
6/96	DIF	3.09	2.25	YS	49
8/96	DIF	1.28	1.56	SA	5
9/96	TNLU	1.52	2.20	SA	17
1/97	GEO	5.66	0.9	LY	95
2/97	YHT	4.42	2.0	LY	68
4/97	TNLU	4.53	2.2	LY	95
5/97	DIF	3.42	2.7	YS	41
7/97	GEO	3.40	2.7	YS	52
9/97	DIF	1.78	2.4	SA	25
1/98	YHT	5.51	1.21	LY	87
2/98	GEO	4.77	1.8	LY	73
4/98	YHT	2.77	2.4	YS	40
6/98	GEO	4.45	2.2	YS	73
7/98	DIF	3.13	2.5	YS	45
10/98	DIF	0.98	1.4	SA	5
1/99	YHT	5.34	1.3	LY	89
2/99	YHT	4.57	2.3	LY	75
3/99	GEO	3.22	2.2	LY	51
4/99	DIF	4.10	2.4	LY	65
8/99	DIF	1.41	2.0	SA	15

LIITE 5: Tervakosken lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden (n=103) suoritusten jakaumat 1990-luvulla sekä normaalisuuden testaus.

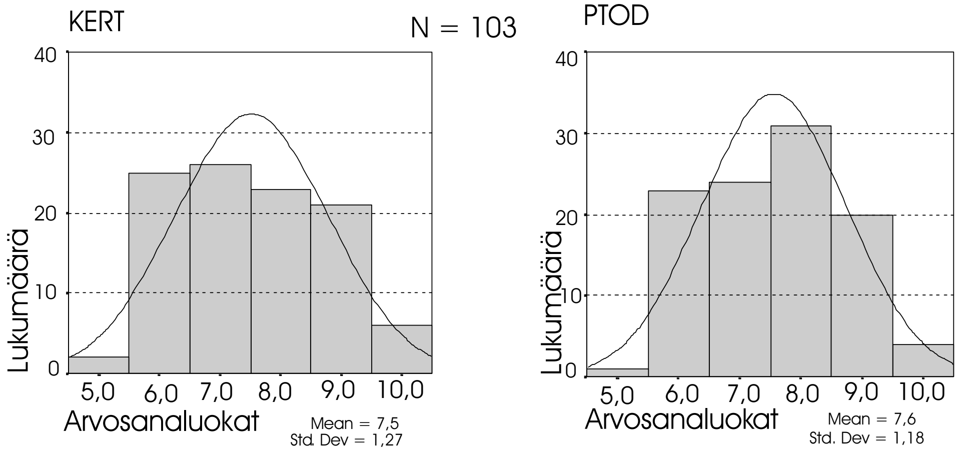


KUVIO 9.8: Yhtälöiden ja funktioiden (YHTA) sekä geometrian (GEO) kurssien arvosanojen jakaumat. Molemmat jakaumat noudattavat normaalijakaumaa (Kolmogorov-Smirnovin testi: $p>0,05$)

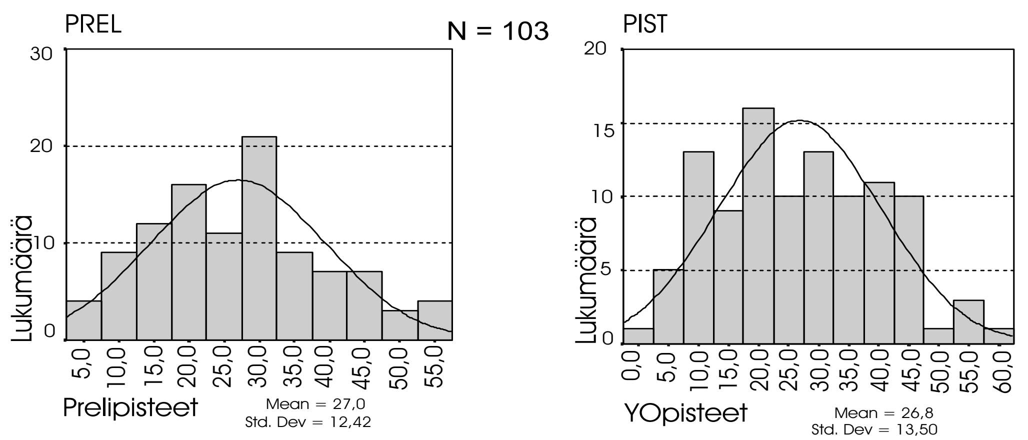


KUVIO 9.9: Todennäköisyyslaskennan, tilastotieteen ja lukuteoriankurssien (TNLU) sekä differentiaalilaskennan (DIF) arvosanojen jakaumat. DIF-kurssien jakauma noudattaa normaalijakaumaa (Kolmogorov-Smirnovin testi: $p>0,05$).

Jatkuu seuraavalla sivulla.



KUVIO 9.10: Kertauskurssin (KERT) ja pitkän matematiikan päättötodistuksen (PTOD) arvosanojen jakaumat. Kumpikaan jakauma ei noudata normaalijakaumaa (Kolmogorov-Smirnovin testi: $p<0{,}05$).



KUVIO 9.11: Pitkän matematiikan preliminäärien (PREL) ja ylioppilaskirjoitusten pistejakaumat (PIST). Molemmat jakaumat noudattavat normaalijakaumaa (Kolmogorov-Smirnovin testi: $p>0{,}05$).

LIITE 6: Tervakosken lukiolaisten kurssikokeiden pistejakaumia 1990-luvulta.

TAULUKKO 9.3: Esimerkkejä Tervakosken lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden (n=103) kokeiden (n=84) pistejakaumista (n=1396) 1990-luvulta. Kokeen kaksi ensimmäistä tehtävää (T1 ja T2) pyrkivät mittaamaan LY-tasoa, kaksi seuraavaa (T3 ja T4) YS-tasoa ja kolme viimeistä (T5–T7) SA-tasoa. Opiskelija valitsi kuusi tehtävää.

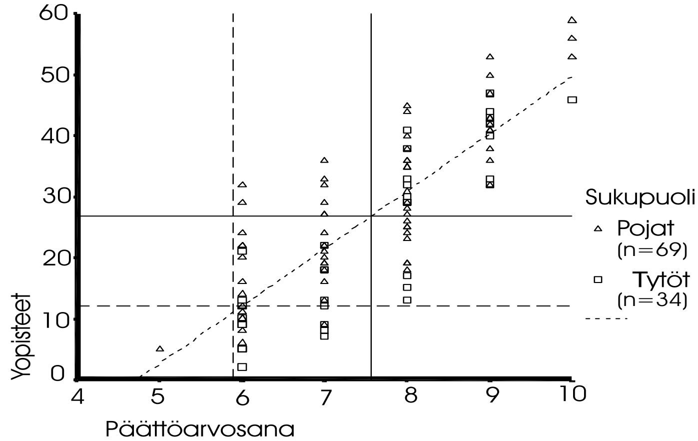
Kognitiivinen taso/ Opiskelija/koe	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
LY							
OP 1/5	5	5	6	-	-	-	1
OP 3/24	5	6	0	0	0	-	0
OP 16/42	6	2	1	-	0	0	1
OP 12/43	6	6	0	2	0	-	0
YS							
OP 11/1	6	6	6	0	-	-	1
OP 1/21	6	6	6	3	1	1	-
OP 4/53	6	6	5	-	-	-	0
OP 15/8	4	2	3	4	-	3	0
OP 8/38	4	4	6	4	6	0	-
OP 9/49	2	4	4	-	4	2	1
SA							
OP 10/16	6	6	6	5	-	6	5
OP 8/21	5	6	6	6	6	-	6
OP 2/33	6	6	3	6	6	6	-
OP 5/43	6	6	6	6	6	-	3

LIITE 7: Tervakosken lukiolaisten kognitiiviset tasot matematiikan eri osa-alueilla.

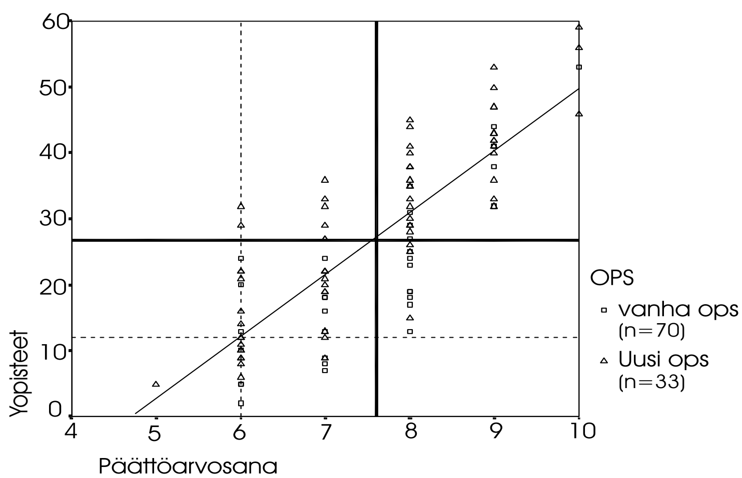
TAULUKKO 9.4: Tervakosken lukion pitkän matematiikan **(I)** poikien (po) (n=69) ja tyttöjen (ty) (n=34), **(II)** vanhan opetussuunnitelman (vanha ops) (n=70) ja uuden opetussuunnitelman (uusi ops) mukaan (n=33) opiskelleiden lukiolaisten sekä **(III)** vuoden 1996 jälkeen pakollisena (pak) (n=38) ja ylimääräisenä (ylim) (n=32) kirjoittaneiden lukiolaisten kognitiiviset tasot prosenttiosuuksina omasta joukostaan eri matematiikan osa-alueilla.

		YHT	GEO	DIF	TNLU	KERT
I	**LY** po	13%	17%	23%	23%	20%
	ty	15%	24%	27%	27%	38%
	YS po	59%	54%	52%	49%	49%
	ty	47%	47%	47%	56%	44%
	SA po	28%	29%	25%	28%	30%
	ty	38%	32%	27%	18%	18%
II	**LY** vanha ops	14%	20%	27%	29%	20%
	uusi ops	12%	18%	18%	15%	39%
	YS vanha ops	56%	51%	50%	50%	49%
	uusi ops	55%	48%	52%	55%	46%
	SA vanha ops	30%	29%	23%	21%	31%
	uusi ops	33%	33%	30%	30%	15%
III	**LY** pak	5%	8%	11%	11%	16%
	ylim	19%	25%	31%	22%	44%
	YS pak	53%	47%	50%	47%	39%
	ylim	69%	63%	59%	72%	56%
	SA pak	42%	45%	39%	42%	45%
	ylim	12%	12%	9%	6%	0%

LIITE 8: Tervakosken pitkän matematiikan opiskelijat nelikentässä.

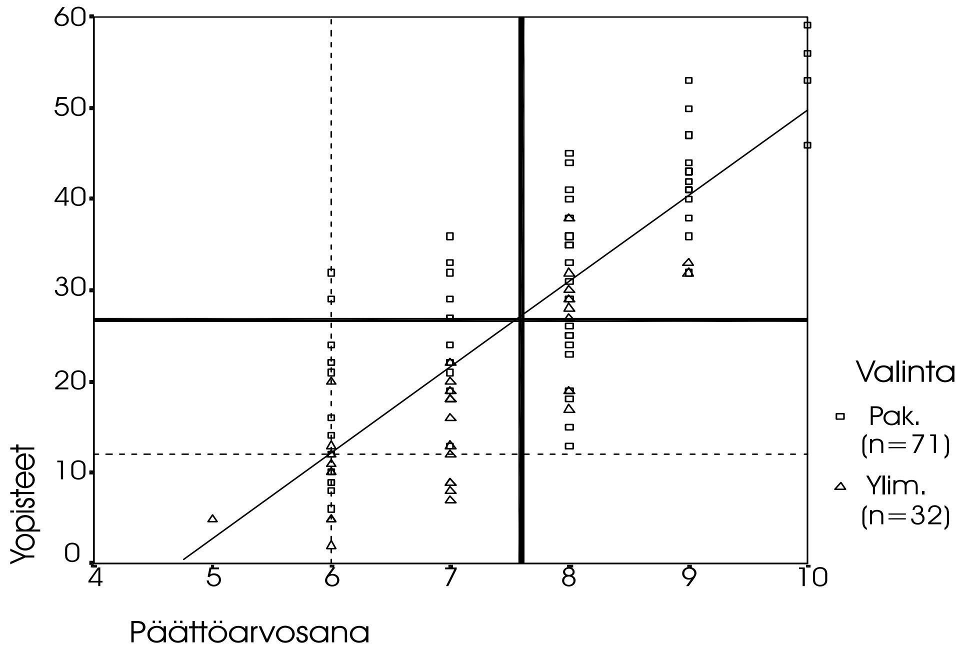


KUVIO 9.12: Tervakosken lukion opiskelijoiden suoritukset nelikentässä eroteltuna sukupuolen mukaan.



KUVIO 9.13: Tervakosken lukion opiskelijoiden suoritukset nelikentässä eroteltuna vanhan ja uuden opetussuunnitelman mukaan opiskelleiden mukaan.

Jatkuu seuraavalla sivulla.



KUVIO 9.14: Tervakosken lukion opiskelijoiden suoritukset nelikentässä eroteltuna pitkän matematiikan pakollisena (Pak.) ja ylimääräisenä (Ylim.) kirjoittaneiden mukaan.

LIITE 9: Tervakosken lukion kuudelle opiskelijalle vuonna 2001 tehdyn teemahaastattelun runko.

TEEMAHAASTATTELU LUKION PITKÄN MATEMATIIKAN OPISKELUSTA TERVAKOSKEN LUKIOSSA 1990-LUVULLA

Ennakkokäsitykset:

1. Peruskoulun loppuvaiheessa teit lukiovalintoja. Miksi valitsit juuri pitkän matematiikan?
2. Miten pitkän matematiikan opiskelu vastasi ennakkokäsitystäsi sen opiskelusta? Mikä oli erilaista?
   Opiskelu:
3. Miten kuvailisit pitkän matematiikan opiskelua? Metafora: Pitkän matematiikan opiskelu oli minulle kuin ...
4. Miten menestyit matematiikan kursseissa omiin tavoitteisiisi nähden?
5. Miten koit kurssiarvioinnin?
6. Mitkä tekijät vaikuttivat eniten sinun menestykseesi matematiikan opinnoissa?
7. Miten koit kurssimuotoisen matematiikan opiskelun?
   Ylioppilaskirjoitukset:
8. Miksi valitsit pitkän matematiikan pakolliseksi/ylimääräiseksi?
9. Miten menestyit matematiikan ylioppilaskirjoituksissa ennakko-odotuksiisi nähden?
10. Mitkä syyt vaikuttivat eniten menestykseesi matematiikan kirjoituksissa?
11. Mitä olisit voinut tehdä toisin ennen kirjoituksia, jotta tulos olisi ollut vielä parempi?
12. Suuri osa heikon matematiikan ylioppilaskirjoitusarvosanan saajista on matematiikan ylimääräisenä kirjoittavia. Mistä arvelet sen johtuvan?
    Jatko-opinnot:
13. Miten pitkän matematiikan opiskelu on vaikuttanut jatko-opintoihisi?
14. Koitko saaneesi riittävät tiedot ja taidot pitkän matematiikan opiskelusta jatko-opintoja varten?

LIITE 10: Uskomuksia ja asenteita mittaavan kyselylomake.

Tämän kyselykaavakkeen antamia tietoja hyödynnetään tutkimuksessa, jossa kartoitetaan mm. lukiolaisten asenteita matematiikkaa ja sen opiskelua kohtaan. Antamasi tiedot käsitellään luottamuksellisesti eivätkä mitenkään vaikuta opintojesi arviointiin. Vastaa huolellisesti ja rehellisesti, jotta saamme mahdollisimman luotettavan kuvan nykyisestä tilanteesta. Vastaathan kaikkiin kohtiin, sillä tutkimuksen luotettava tilastollinen käsittely edellyttää sitä!

Taustatiedot: Taustatiedoissa kysyttiin seuraavia asioita, joissa vastaukset annettiin ympyröimällä annettu vaihtoehto (kursiivilla) kaikkiin muihin paitsi ensimmäiseen:

- Lukio: (vastaus kirjoittamalla)
- Sukupuoli: *tyttö poika*
- Opiskelen *pitkää lyhyttä* matematiikkaa.
- Ylioppilaskirjoituksissa *kirjoitan en kirjoita* matematiikkaa.
- Aion kirjoittaa ylioppilaskirjoituksissa *pitkän lyhyen* matematiikan *pakollisena ylimääräisenä.*
- Onko sinulla graafinen laskin? *Kyllä Ei*
- Onko sinulla Internetyhteys kotona? *Kyllä Ei*

Väittämien edellä oleva vastausohje: *Ympyröi seuraaviin väittämiin kannanottosi (kohta 0 on esimerkki merkitsemistavasta) käyttäen seuraavanlaista asteikkoa:* ***TÄYSIN SAMAA MIELTÄ =++, JOKSEENKIN SAMAA MIELTÄ=+, EN OSAA SANOA=0, JOKSEENKIN ERI MIELTÄ=-, TÄYSIN ERI MIELTÄ=- -***

(Jatkuu seuraavalla sivulla.)

LIITE 10: (jatkuu)

Kunkin väitteen perässä on kyselykaavakkeessa vastausvaihtoehdot

$$++\ +\ \mathbf{0}\ -\ --.$$

0 Tämä esimerkki ei olisi ollut minulle tarpeellinen
1. Matematiikka muuttuu nopeasti lähitulevaisuudessa.
2. Matematiikka on hyvä ala luovalle ihmiselle.
3. Matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa on vain vähän sijaa omaperäisille ajatuksille.
4. Matematiikan alalla tehdään uusia oivalluksia jatkuvasti.
5. Matematiikka auttaa ajattelemaan tiettyjen täsmällisten sääntöjen mukaan.
6. Kyky arvioida on tärkeä matemaattinen taito.
7. Useimmille matemaattisille tehtäville on olemassa erilaisia ratkaisutapoja.
8. Matematiikan oppiminen on suurimmaksi osaksi ulkoa oppimista
9. Matemaattisia ongelmia voidaan ratkaista käyttämättä sääntöjä.
10. Yritystä ja erehdystä voidaan käyttää matematiikan tehtävien ratkaisemisessa.
11. Matematiikassa on aina olemassa sääntö, jota voi soveltaa tehtävän ratkaisemisessa.
12. Matematiikassa ei ole tehty uusia oivalluksia pitkään aikaan.
13. Matematiikka on joukko sääntöjä.
14. Matemaattinen ongelma voidaan ratkaista aina eri tavoilla.
15. Matematiikka auttaa ajattelemaan loogisesti.
16. Haluan todella menestyä matematiikassa.
17. Toivon saavani opiskella enemmän matematiikkaa.
18. Minusta tuntuu hyvältä, kun itse ratkaisen matematiikan tehtävän.
19. Ymmärrän yleensä sen, mitä matematiikan tunneilla käsitellään.
20. Minä en ole kovin hyvä matematiikassa.
21. Haluan auttaa muita matematiikan tehtävissä.
22. Jos saisin valita, en enää opiskelisi matematiikkaa.
23. Vaikea matematiikan tehtävä tuntuu minusta mieluisalta haasteelta.
24. En halua käyttää kovin paljon aikaani matematiikan opiskelemiseen.
25. Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin useimmille muille.
26. Vaikka kuinka yrittäisin, en siitä huolimatta menesty matematiikassa.
27. Olen valmis työskentelemään pitkänkin aikaa ymmärtääkseni uuden asian matematiikassa.

(Jatkuu seuraavalla sivulla)

LIITE 10: (jatkuu)

28. Miehistä tulee parempia tiedemiehiä ja insinöörejä kuin naisista.
29. Pojilla on enemmän luontaisia lahjoja matematiikkaan kuin tytöillä.
30. Pojat tarvitsevat enemmän matematiikkaa kuin tytöt.
31. Naiselle ammattiura on yhtä tärkeä kuin miehelle.
32. Tytöt menestyvät matematiikassa heikommin kuin pojat.
33. Pojat ovat kiinnostuneempia matemaattisista ongelmista kuin tytöt.
34. On tärkeä osata matematiikkaa, jotta saisi hyvän työpaikan.
35. Useimmat ihmiset eivät käytä matematiikkaa työssään.
36. Haluaisin työskennellä ammatissa, jossa saan käyttää matematiikkaa.
37. Matematiikasta on hyötyä jokapäiväisien ongelmien ratkaisemisessa.
38. Voin tulla hyvin toimeen jokapäiväisessä elämässä käyttämättä matematiikkaa.
39. Suurin osa matematiikasta on käyttökelpoista työelämässä.
40. Matematiikkaa ei tarvita jokapäiväisessä elämässä.
41. Useimmissa ammateissa matematiikan tiedot eivät ole välttämättömiä.
42. Opiskelen matematiikkaa saadakseni hyvän arvosanan.
43. Jokainen pystyy oppimaan matematiikkaa, jos opetusmenetelmiin kiinnitettäisiin riittävästi huomiota.
44. Opetuksessa pitäisi kiinnittää entistä enemmän huomiota käytännön sovelluksiin.
45. Matematiikan opetusta pitäisi lisätä.
46. Matematiikka on vaikein minun oppiaineistani.
47. Kiva kun nämä väitteet loppuivat.

LIITE 11: Vuoden 1999 pitkän matematiikan opiskelijoiden (n=384) uskomustutkimus.

TAULUKKO 9.5: Vuoden 1999 uskomustutkimuksen väittämien 1–20 frekvenssijakaumat (suluissa %-osuus), keskiarvot (ka) ja -hajonnat(kh). Lomakkeen merkinnät ovat koodattu seuraavasti: **(++)**=1, **(+)**=2, **(0)**=3, **(-)**=4 ja **(− −)**=5. Merkintä ***** väitteen perässä tarkoittaa, että yli puolet vastanneista on joko hyväksynyt tai hylännyt väitteen.

V	N	1	2	3	4	5	ka	kh
$V1$	382	4(1.0%)	83(21.7%)	147(38.5%)	104(27.2%)	44(11.5%)	3.3	1.0
$V2$	384	43(11.2%)	148(38.5%)	49(12.8%)	116(30.2%)	28(7.3%)	2.9	1.2
$V3$	384	41(10.7%)	131(34.1%)	35(9.1%)	131(34.1%)	46(12.0%)	3.0	1.3
$V4$	384	36(9.4%)	122(31.8%)	143(37.2%)	73(19.0%)	10(2.6%)	2.7	1.0
$V5^*$	383	94(24.5%)	211(55.1%)	39(10.2%)	28(7.3%)	11(2.9%)	2.1	0.9
$V6^*$	383	119(31.1%)	187(48.8%)	43(11.2%)	30(7.8%)	4(1.0%)	2.0	0.9
$V7^*$	384	227(59.1%)	131(34.1%)	8(2.1%)	16(4.2%)	2(0.5%)	1.5	0.8
$V8^*$	384	21(5.5%)	86(22.4%)	24(6.3%)	178(46.4%)	75(19.5%)	3.5	1.2
$V9$	383	34(8.9%)	112(29.2%)	50(13.1%)	121(31.6%)	66(17.2%)	3.2	1.3
$V10^*$	383	68(17.8%)	168(43.9%)	69(18.0%)	64(16.7%)	14(3.7%)	2.5	1.1
$V11^*$	384	70(18.2%)	149(38.8%)	46(12.0%)	93(24.2%)	26(6.8%)	2.7	1.2
$V12$	384	8(2.1%)	31(8.1%)	203(52.9%)	92(24.0%)	50(13.0%)	3.4	0.9
$V13^*$	384	88(22.9%)	170(44.3%)	29(7.6%)	71(18.5%)	26(6.8%)	2.4	1.2
$V14$	384	35(9.1%)	131(34.1%)	58(15.1%)	124(32.3%)	36(9.4%)	3.0	1.2
$V15^*$	383	140(36.6%)	172(44.9%)	37(9.7%)	23(6.0%)	11(2.9%)	1.9	1.0
$V16^*$	384	169(44.0%)	138(35.9%)	46(12.0%)	26(6.8%)	5(1.3%)	1.9	1.0
$V17$	384	39(10.2%)	96(25.0%)	105(27.3%)	97(25.3%)	47(12.2%)	3.0	1.2
$V18^*$	384	277(72.2%)	95(24.7%)	8(2.1%)	4(1.0%)	0(0.0%)	1.3	0.6
$V19^*$	384	92(24.2%)	176(45.6%)	31(8.1%)	63(16.4%)	22(5.7%)	2.3	1.2
$V20$	384	50(13.0%)	86(22.4%)	67(17.4%)	116(30.2%)	65(16.9%)	3.2	1.3

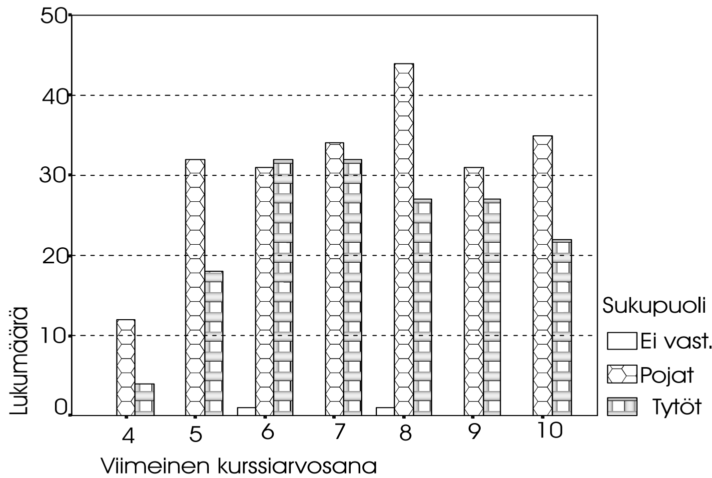
Jatkuu seuraavalla sivulla.

LIITE 11: (jatkuu)

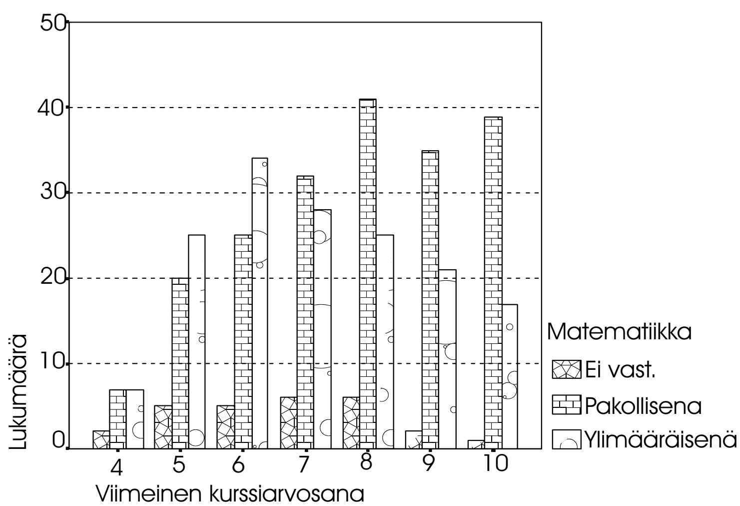
TAULUKKO 9.6: Vuoden 1999 uskomustutkimuksen väittämien 21–46 vastausten frekvenssijakaumat (suluissa %-osuus), keskiarvot (ka) ja -hajonnat(kh). Lomakkeen merkinnät ovat koodattu seuraavasti: **(++)**=1, **(+)**=2, **(0)**=3, **(-)**=4 ja **(− −)**=5. Merkintä ***** väitteen (V) perässä tarkoittaa, että yli puolet vastanneista on joko hyväksynyt tai hylännyt väitteen.

V	N	1	2	3	4	5	ka	kh
$V21^*$	382	53(13.9%)	172(45.0%)	82(21.5%)	54(14.1%)	21(5.5%)	2.5	1.1
$V22^*$	384	24(6.3%)	31(8.1%)	49(12.8%)	106(27.6%)	174(45.3%)	4.0	1.2
$V23$	384	49(12.8%)	134(34.9%)	60(15.6%)	98(25.5%)	43(11.2%)	2.9	1.3
$V24$	384	31(8.1%)	127(33.1%)	57(14.8%)	138(35.9%)	31(8.1%)	3.0	1.2
$V25^*$	383	17(4.4%)	55(14.4%)	78(20.4%)	147(38.4%)	86(22.5%)	3.6	1.1
$V26^*$	384	10(2.6%)	45(11.7%)	36(9.4%)	143(37.2%)	150(39.1%)	4.0	1.1
$V27$	384	37(9.6%)	138(35.9%)	58(15.1%)	129(33.6%)	22(5.7%)	2.9	1.1
$V28^*$	383	43(11.2%)	28(7.3%)	78(20.4%)	72(18.8%)	162(42.3%)	3.7	1.4
$V29^*$	383	35(9.1%)	83(21.7%)	71(18.5%)	69(18.0%)	125(32.6%)	3.4	1.4
$V30^*$	383	13(3.4%)	36(9.4%)	106(27.7%)	90(23.5%)	138(36.0%)	3.8	1.1
$V31^*$	384	208(54.2%)	99(25.8%)	58(15.1%)	12(3.1%)	7(1.8%)	1.7	1.0
$V32^*$	384	18(4.7%)	44(11.5%)	84(21.9%)	117(30.5%)	121(31.5%)	3.7	1.2
$V33$	384	26(6.8%)	154(40.1%)	108(28.1%)	56(14.6%)	40(10.4%)	2.8	1.1
$V34^*$	384	60(15.6%)	180(46.9%)	59(15.4%)	67(17.4%)	18(4.7%)	2.5	1.1
$V35$	383	28(7.3%)	103(26.9%)	75(19.6%)	142(37.0%)	35(9.1%)	3.1	1.1
$V36$	383	52(13.6%)	115(30.0%)	107(27.9%)	83(21.7%)	26(6.8%)	2.8	1.1
$V37^*$	383	56(14.6%)	215(56.1%)	32(8.4%)	57(14.9%)	23(6.0%)	2.4	1.1
$V38^*$	383	29(7.6%)	70(18.3%)	46(12.0%)	188(49.1%)	50(13.1%)	3.4	1.2
$V39$	383	35(9.1%)	131(34.2%)	69(18.0%)	106(27.7%)	42(11.0%)	3.0	1.2
$V40^*$	382	17(4.5%)	49(12.8%)	35(9.2%)	200(52.4%)	81(21.2%)	3.7	1.1
$V41$	381	27(7.0%)	95(24.9%)	73(19.2%)	160(42.0%)	26(6.8%)	3.2	1.1
$V42$	382	36(9.4%)	135(35.3%)	40(10.5%)	128(33.3%)	43(11.3%)	3.0	1.2
$V43^*$	384	105(27.3%)	150(39.1%)	56(14.6%)	59(15.4%)	14(3.6%)	2.3	1.1
$V44^*$	384	105(27.3%)	176(45.8%)	73(19.0%)	27(7.0%)	3(0.8%)	2.1	0.9
$V45$	384	35(9.1%)	84(21.9%)	149(38.8%)	98(25.5%)	18(4.7%)	3.0	1.0
$V46^*$	384	73(19.0%)	85(22.1%)	15(3.9%)	91(23.7%)	120(31.3%)	3.3	1.6

LIITE 12: Vuoden 1999 uskomuskyselyn arvosanajakaumat.



KUVIO 9.15: Poikien ja tyttöjen viimeksi saatujen pitkän matematiikan kurssiarvosanojen jakaumat.



KUVIO 9.16: Pitkän matematiikan pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittaa aikovien viimeksi saatujen pitkän matematiikan kurssiarvosanojen jakaumat.

LIITE 13: Vuoden 1999 uskomustutkimuksen tulokset tyttöjen ja poikien ryhmissä.

TAULUKKO 9.7: Vuoden 1999 uskomustutkimuksen väittämien 1–21 pitkän matematiikan opiskelijoiden hyväksymät (vähintään 50 % vastaajista täysin tai jokseenkin samaa mieltä) ja hylkäämät (vähintään 50 % vastaajista täysin tai jokseenkin eri mieltä) poikien (n=220) ja tyttöjen (n=162) ryhmissä. Taulukkoon on merkitty "hyväksyy" tai "hylkää" em. periaatteen mukaisesti ja perään prosenttiosuudet "samaa mieltä"/"eri mieltä". Merkintä * väitteen perässä tarkoittaa, että ryhmien jakaumat eroavat tilastollisesti Pearsonin χ^2-testin perusteella (p<0,05).

Väite	Pojat	Tytöt
V2	hyväksyy 54.0%/32.7%	44.5%/43.2%
V5	hyväksyy 80.4%/9.1%	hyväksyy 79.1%/11.1%
V6	hyväksyy 78.5%/7.8%	hyväksyy 81.5%/10.5%
V7	hyväksyy 91.8%/5.9%	hyväksyy 95.1%/3.1%
V8	hylkää 26.8%/65.9%	hylkää 29.7%/65.5%
V9	42.3%/45.4%	hylkää 32.3%/53.4%
V10	hyväksyy 58.9%/21.0%	hyväksyy 66.1%/18.6%
V11	hyväksyy 65.9%/32.3%	hyväksyy 58.6%/29.0%
V13	hyväksyy 63.2%/27.2%	hyväksyy 72.8%/22.2%
V15	hyväksyy 83.7%/8.2%	hyväksyy 78.8%/9.3%
V16	hyväksyy 80.9%/7.8%	hyväksyy 79.0%/8.6%
V18	hyväksyy 95.4%/1.8%	hyväksyy 98.7%/0.0%
V19	hyväksyy 74.1%/20.4%	hyväksyy 63.5%/24.7%
V20	hylkää 32.8%/53.7%	38.9%/38.3%
V21	hyväksyy 55.7%/21.0%	hyväksyy 63.4%/17.4%

Jatkuu seuraavalla sivulla.

LIITE 13: (jatkuu)

TAULUKKO 9.8: Vuoden 1999 uskomustutkimuksen väittämien 22–46 pitkän matematiikan opiskelijoiden hyväksymät (vähintään 50 % vastaajista täysin tai jokseenkin samaa mieltä) ja hylkäämät (vähintään 50 % vastaajista täysin tai jokseenkin eri mieltä) poikien (n=220) ja tyttöjen (n=162) ryhmissä. Taulukkoon on merkitty "hyväksyy" tai "hylkää" em. periaatteen mukaisesti ja perään prosenttiosuudet "samaa mieltä"/"eri mieltä". Merkintä * väitteen perässä tarkoittaa, että ryhmien jakaumat eroavat tilastollisesti Pearsonin χ^2-testin perusteella (p<0,05).

Väite	Pojat	Tytöt
V22	hylkää 13.2%/75.0%	hylkää 16.0%/70.4%
$V23^*$	hyväksyy 56.8%/27.7%	35.2%/48.8%
V25	hylkää 15.5%/64.8%	hylkää 23.5%/55.6%
V26	hylkää 11.8%/78.2%	hylkää 17.9%/73.5%
$V28^*$	26.0%/42.5%	hylkää 8.6%/85.8%
$V29^*$	36.8%/35.0%	hylkää 23.0%/70.4%
$V30^*$	16.4%/47.3%	hylkää 8.1%/75.8%
$V31^*$	hyväksyy 71.8%/5.0%	hyväksyy 90.7%/5.0%
$V32^*$	hylkää 21.8%/50.0%	hylkää 8.6%/78.4%
V34	hyväksyy 64.6%/20.5%	hyväksyy 60.5%/23.5%
V36	hyväksyy 52.1%/22.8%	31.8%/33.2%
V37	hyväksyy 68.0%/23.2%	hyväksyy 74.0%/17.9%
V38	hylkää 28.8%/58.9%	hylkää 21.6%/66.7%
V40	hylkää 19.1%/70.1%	hylkää 14.8%/77.8%
V41	35.5%/45.6%	hylkää 26.5%/53.7%
V43	hyväksyy 66.7%/20.0%	hyväksyy 70.4%/17.9%
V44	hyväksyy 74.1%/8.6%	hyväksyy 72.2%/6.8%
V46	hylkää 34.6%/61.4%	hyväksyy 50.6%/45.7%

LIITE 14: Vuoden 1999 uskomustutkimuksen tulokset pitkän matematiikan pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittavien ryhmissä.

TAULUKKO 9.9: Vuoden 1999 uskomustutkimuksen väittämien 1–20 pitkän matematiikan opiskelijoiden hyväksymät ja hylkäämät matematiikan pakollisena kirjoittavien (n=199) ja ylimääräisenä kirjoittavien (n=158) ryhmissä. Suluissa on prosenttiosuudet ”samaa mieltä”/”eri mieltä”. 27 opiskelijaa ei ilmoittanut kumpana (pakollisena/ylimääräisenä) hän kirjoittaa matematiikan. Merkintä * väitteen perässä tarkoittaa, että ryhmien jakaumat eroavat tilastollisesti Pearsonin χ^2-testin perusteella (p<0,05).

Väite	Pakollisena kirjoittavat	Ylimääräisenä kirjoittavat
V2	hyväksyy 54.8%/32.1%	43.1%/43.7%
V5	hyväksyy 78.8%/10.1%	hyväksyy 80.4%/11.4%
V6	hyväksyy 80.9%/9.0%	hyväksyy 80.3%/8.2%
V7	hyväksyy 95.0%/4.0%	hyväksyy 92.4%/5.0%
V8	hylkää 25.6%/68.3%	hylkää 29.8%/64.5%
V9	43.8%/43.7%	hylkää 33.2%/52.2%
V10	hyväksyy 58.3%/20.6%	hyväksyy 66.9%/21.0%
V11	hyväksyy 56.3%/32.1%	hyväksyy 58.2%/29.7%
V13	hyväksyy 62.8%/29.6%	hyväksyy 72.7%/21.6%
$V15^*$	hyväksyy 86.4%/4.5%	hyväksyy 76.4%/13.4%
$V16^*$	hyväksyy 86.9%/5.0%	hyväksyy 72.2%/11.4%
$V17^*$	44.7%/24.1%	hylkää 20.9%/55.7%
V18	hyväksyy 99.0%/0.0%	hyväksyy 95.0%/1.3%
V19	hyväksyy 78.9%/16.1%	hyväksyy 60.2%/29.1%
$V20^*$	hylkää 24.6%/57.8%	47.5%/34.8%

Jatkuu seuraavalla sivulla.

LIITE 14: (jatkuu).

TAULUKKO 9.10: Vuoden 1999 uskomustutkimuksen väittämien 21–46 pitkän matematiikan opiskelijoiden hyväksymät ja hylkäämät matematiikan pakollisena kirjoittavien (n=199) ja ylimääräisenä kirjoittavien (n=158) ryhmissä. Suluissa on prosenttiosuudet "samaa mieltä"/"eri mieltä". 27 opiskelijaa ei ilmoittanut kumpana (pakollisena/ylimääräisenä) hän kirjoittaa matematiikan. Merkintä * väitteen perässä tarkoittaa, että ryhmien jakaumat eroavat tilastollisesti Pearsonin χ^2-testin perusteella (p<0,05).

Väite	Pakollisena kirjoittavat	Ylimääräisenä kirjoittavat
V21	hyväksyy 62.9%/15.8%	hyväksyy 55.1%/25.4%
$V22^*$	hylkää 9.5%/79.9%	hylkää 19.7%/64.6%
$V23^*$	hyväksyy 60.8%/25.6%	hylkää 31.0%/51.9%
$V25^*$	hylkää 11.6%/70.2%	hylkää 24.1%/52.5%
$V26^*$	hylkää 6.5%/84.0%	hylkää 20.3%/71.5%
V27	hyväksyy 51.3%/31.1%	hylkää 40.5%/47.5%
V28	hylkää 19.7%/54.1%	hylkää 15.2%/71.6%
V29	31.7%/45.8%	hylkää 28.5%/57.6%
V30	hylkää 13.0%/55.8%	hylkää 12.8%/67.5%
V31	hyväksyy 80.9%/4.5%	hyväksyy 82.9%/5.1%
V32	hylkää 19.1%/54.2%	hylkää 12.1%/74.1%
V33	41.7%/26.7%	hyväksyy 53.2%/25.3%
V34	hyväksyy 66.1%/18.1%	hyväksyy 55.7%/28.5%
$V36^*$	hyväksyy 58.1%/15.1%	26.0%/44.3%
V37	hyväksyy 72.8%/19.2%	hyväksyy 67.8%/24.0%
V38	hylkää 26.8%/61.1%	hylkää 26.6%/62.0%
V40	hylkää 13.7%/75.6%	hylkää 21.6%/71.5%
V42	hyväksyy 50.5%/39.9%	hylkää 37.5%/50.9%
V43	hyväksyy 64.3%/20.6%	hyväksyy 68.9%/17.7%
V44	hyväksyy 71.8%/8.5%	hyväksyy 73.4%/7.6%
$V46^*$	hylkää 27.2%/69.8%	hyväksyy 57.0%/39.3%

LIITE 15: Vuoden 1999 uskomustutkimuksen faktorimatriisi.

TAULUKKO 9.11: Uskomuskyselyn rotatoitu faktorimatriisi (väittämät 1–20) pitkän matematiikan opiskelijoilla 1999 (n=384; alle 0.30 lataukset on jätetty merkitsemättä).

Väittämä	F1	F2	F3	F4	F5	F6	h^2
V02	.408				.317		.306
V03					-.344		.263
V04					.404		.246
V06					.333		.242
V07					.398		.190
V08		-.377					.211
V09						.380	.166
V11						.587	.355
V12					.401		.302
V13		-.325				.526	.445
V15		.394			.412		.454
V16	.619						.459
V17	.790						.727
V18	.350						.213
V19		.645					.515
V20		.784					.678

Jatkuu seuraavalla sivulla.

LIITE 15: (jatkuu).

TAULUKKO 9.12: Uskomuskyselyn rotatoitu faktorimatriisi (väittämät 21–46)pitkän matematiikan opiskelijoilla 1999 (n=384; alle 0.30 lataukset on jätetty merkitsemättä).

Väittämä	F1	F2	F3	F4	F5	F6	h^2
V22	.616						.494
V23	.490	.576					.595
V24	.494	.318					.421
V25		-.838					.714
V26		.721					.575
V27	.437						.301
V28			.810				.659
V29			.808				.670
V30			.653				.464
V31			-.387				.190
V32			.729				.542
V33			.517				.270
V34	.427						.332
V35				.577			.356
V36	.637	.361					.594
V37				.550			.474
V38				-.630			.438
V39	.387						.297
V40				.693			.552
V41				.709			.534
V45	.587						.382
V46		-.592					.467
Om.arvo	4.098	4.065	2.978	2.505	1.622	1.115	16.383

Hakemisto