HARRY SILFVERBERG

PERUSKOULUN YLÄASTEEN OPPILAAN GEOMETRINEN KÄSITETIETO

University of Tampere
Tampere 1999

PERUSKOULUN YLÄASTEEN OPPILAAN GEOMETRINEN KÄSITETIETO

Acta Electronica Universitatis Tamperensis 6

AKATEEMINEN VÄITÖS
Tampereen yliopisto
Kasvatustieteiden tiedekunta

ISBN 951-44-4718-2
ISSN 1456-954X

HARRY SILFVERBERG

PERUSKOULUN YLÄASTEEN OPPILAAN GEOMETRINEN KÄSITETIETO

■

ACADEMIC DISSERTATION

Esitetään Tampereen yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan
suostumuksella julkisesti tarkastettavaksi Pyynikintie 2:n auditoriossa B332
perjantaina 10. joulukuuta 1999 klo 12.

English Summary

University of Tampere
Tampere 1999

Esipuhe

Kuten ystäväni ja tuttavani hyvin tietävät, olen ahertanut tämän geometristen käsitteiden oppimiseen liittyvän tutkimuksen parissa pitkään. Ne heistä, jotka tuntevat minut hyvin, tietävät myös syitä sille, miksi tutkimukseni valmistumista on joutunut odottamaan niin pitkään. Välillä on itsestäkin tuntunut, että omasta luonteesta löytyy turhan paljon tutkijan tehokkuutta vaarantavia piirteitä: taipumusta ylenmääräiseen harkitsevuuteen, kykenemättömyyttä sanoa ei, ja mikä pahinta, kiinnostusta opettamiseen.

Tutkimuksen aihe on kiehtonut minua siitä asti, kun professori Jarkko Leino minut sen pariin opasti. Edelleen aihe kiehtoo minua ja tuntuu avaavan uusia näkymiä. Haluan tässä erikseen kiittää työni ohjaajaa professori Jarkko Leinoa siitä poikkeuksellisen kärsivällisestä ja ystävällisestä kannustuksesta, jota hän on minulle koko sen ajan osoittanut, kun olen matematiikan didaktiikan tutkimusta harjoittanut.

Osoitan lämpimät kiitokseni myös tutkimukseni esitarkastajille professori Erkki Pehkoselle ja professori Lenni Haapasalolle niistä asiantuntevista ja yksityiskohtaisista tutkimukseeni kohdistuneista parannusehdotuksista, joita olen heiltä työni loppuvaiheessa saanut.

Tutkimuksen loppuunsaattaminen olisi ollut vaikeaa ilman työnantajani, Tampereen yliopiston minulle myöntämää tutkimusstipendiä. Sen turvin saatoin tutkimuksen teon ratkaisevimmissa vaiheissa jäädä työstäni virkavapaalle. Esimiestäni professori Viljo Kohosta haluan kiittää erityisesti siitä, että hän on tehnyt parhaansa tutkimusedellytyksieni jatkuvuuden takaamiseksi senkin jälkeen, kun olen jälleen ryhtynyt päätoimisesti hoitamaan virkatehtäviäni. Toimistosihteeri Sirpa Randell on ammattitaitoisesti hoitanut työni viimeistelyn julkaisukuntoon. Tästä osoitan hänelle lämpimät kiitokseni. Samoin kiitän yliopiston lehtori Liisa Ritasta työn tiivistelmän kääntämisestä englanniksi. Läheistä työtoveriani Marja-Leena Viiloa kiitän niistä lukuisista geometrian opetusta käsitelleistä keskusteluista, joita olemme tämän työn eri vaiheissa käyneet ja joilla on ollut merkittävä vaikutus tässäkin työssä ilmi tulevien käsitysteni muovautumiseen.

Lopuksi haluan erityisen lämpimästi kiittää vaimoani Leenaa ja lapsiani Tonia, Pasia ja Maria. Ilman perheeni tukea en olisi näin suurimittaiseen työhön voinut ryhtyä ja siitä selviytyä. Siksi omistan väitöskirjan perheelleni.

Kangasalla 3. marraskuuta 1999

Harry Silfverberg

Tiivistelmä

Tutkimuksen teoreettisen viitekehyksen perustan muodostaa geometrisen ajattelun kehittymistä kuvaava jo 1950-luvulta lähtöisin oleva van Hielen teoria ja siihen liittynyt myöhempi tutkimus. Työssä teoriaa verrataan eräisiin muihin uudempiin ja geometrian oppimisen kannalta keskeisiin matemaattisen ymmärryksen kasvua tarkasteleviin teorioihin. Ns. van Hielen tasojen avulla esitettyä kuvausta geometrisen ajattelun kehittymisestä täydennetään sillä tiedolla, joka on kertynyt prototyyppisten ja figuratiivisten käsitteiden muodostumisesta. Teoreettisen viitekehyksen perusteella tutkimuksessa konstruoidaan hypoteettinen malli geometrisen käsitetiedon kehittymisestä. Empiirisen osan tueksi työssä tarkastellaan myös yleisiä geometris-visuaalisen informaation prosessointiin vaikuttavia taustatekijöitä, kuten spatiaalisia kykyjä ja taitoja, geometriseen kontekstiin liittyvää päättelyä ja visuo-spatiaalista työmuistin kapasiteettia, ja näiden yhteyttä geometrian oppimiseen.

Tutkimuksen empiirisessä osassa oppilaiden geometrisen käsitetiedon sisältöä ja sen kehittymistä yläasteen aikana tarkastellaan sekä poikittais- että pitkittäistutkimuksena. Tutkimusaineisto valottaa teoreettisessa osassa rakennetun geometrisen käsitetiedon kehittymisen mallin kannalta relevanteimmiksi katsottuja oppilaan geometrisen ajattelun piirteitä. Tutkimuksen empiirisessä osassa keskitytään seuraaviin ongelma-alueisiin. Yhtäältä aineiston avulla koetellaan van Hielen tasojen käyttökelpoisuutta geometrisen ajattelun kehittymisen yleisenä viitekehyksenä. Tässä yhteydessä tutkitaan myös tärkeimpien visuaalis-geometrisen tiedon prosessointiin vaikuttavien yleisten taustatekijöiden yhteyttä tasojen syntyyn. Toisaalta aineiston avulla arvioidaan tutkimuksessa konstruoidun van Hielen teoriaa spesifimmän käsitetiedon oppimisen kuvauksen toimivuutta. Kolmanneksi tutkimuksella haetaan tietoa yläasteen oppilaiden geometrisen käsitetiedon olemuksesta ja kehittymisestä sinänsä.

Empiirinen aineisto kerättiin yhden keskisuuren tamperelaisen yläasteen kaikilta luokkatasojen 7, 8 ja 9 oppilailta muutamaa oppilasta lukuun ottamatta. Kaikkiaan tutkimukseen osallistui 241 oppilasta. Useampien koulujen mukaan ottamista ei nähty välttämättömäksi, koska tutkimuksen pääasiallinen tarkoitus oli testata van Hielen teorian perushypoteeseja sekä konstruoitua geometrisen käsitetiedon mallia ja löytää riittävä esimerkkiaineisto tämän pohjaksi. Tällaisenaankin aineisto muodostui niin laajaksi, että se antaa viitteenomaista tietoa myös yleisemmin peruskoulun yläasteen oppilaiden geometrisen käsitetietouden laadusta.

Tutkimuksessa alkuperäisten van Hielen tasojen vH0, vH1, vH2 ja vH3 muodostamaan rakenteeseen lisätään uusi taso vH1-2 tasojen vH1 ja vH2 väliin. Samalla tason vH2 tulkintaa tarkennetaan. Tasojen vH1-2 ja vH2 rajaus perustetaan Piagetilta peräisin olevan empiirisen ja reflektiivisen yleistyksen erotteluun geometrisissa tarkasteluissa.

Työssä erotetaan kaksi erityyppistä tulkintaa yläasteen geometrian opetuksen kannalta relevanteimpien tasojen vH0, vH1, vH1-2, vH2 ja vH3 mahdolliselle hierarkialle: ns. vahva ja heikko hierarkia. Tutkimuksen tulokset eivät tue oletusta vahvasta hierarkiasta, joka tarkoittaisi, että tasojen saavuttamisen järjestys on alkuperäisen van Hielen teorian mukaisesti vakio, vH1 saavutetaan ennen vH1-2:ta, vH1-2 ennen vH2:ta jne. Sen sijaan tasot näyttävät muodostavan heikon hierarkian, jonka mukaan oppilaiden geometrian taidoissa tapahtuu edistymistä useamman kuin yhden tason toimintojen osalta samanaikaisesti alemman van Hielen tason mukaisten piirteiden ollessa kehityksessä kuitenkin yleensä edellä sitä korkeampien van Hielen tasojen mukaisen ajattelun piirteitä.

Struktuuriin lisätty taso vH1-2 erottuu tarkasteluissa omaksi tasokseen yhtä hyvin kuin muutkin tarkastellut kehitystasot ja hierarkiatarkasteluissa se sijoittuu tasohierarkiassa sille paikalle, mihin se karakterisointinsa ja käsitetiedon kehittymisen teoreettisen tarkastelun mukaan kuuluu. Tässä mielessä lisätyn tason vH1-2 olemassaoloa voi pitää oikeutettuna ja tarkennuksena alkuperäisten van Hielen tasojen muodostamaan struktuuriin.

Tutkimuksessa esitellään laajasti oppilaiden geometrisiin peruskäsitteisiin ja näiden keskinäisiin suhteisiin liittämiä merkityksiä sekä oppilaiden tapaa määritellä käsitteitä. Näiltä osin tulokset eivät tue kirjallisuudessa yleisesti tasolle vH3 esitettyjä tulkintoja. Tälle tasolle sijoittuneiden oppilaiden määrittelytaidot ovat aineiston perusteella heikompia kuin tason kuvauksissa on edellytetty. Samoin oppilailta tutkitut tietorakenteet ovat jäsentymättömämpiä kuin niiden tällä tasolla on yleisesti oletettu olevan.

Oppilaan spatiaalisen ajattelun ja loogisen päättelyn taidoilla sekä visuaalisella muistikapasiteetilla todettiin olevan varsin selkeä yhteys oppilaan van Hielen tasoon. Tulos on hämmentävä, sillä testit, joilla spatiaalista ja loogista ajattelutaitoa sekä visuaalisen työmuistin kapasiteettia mitattiin, eivät edellytä juuri lainkaan geometrista etukäteistietoa. Kuitenkin van Hielen teoriassa on korostettu siinä kuvattujen tasojen ilmentävän juuri oppimisen kautta tapahtuvaa geometrisen ajattelun näkökulman radikaalia muutosta.

Yleisesti voidaan todeta, että käsitetiedon kehittymisen kuvaukseen konstruoitu teoreettinen malli osoittautui toimivaksi työvälineeksi sekä tutkimuksessa käytettyjen mittavälineiden kehittelyssä että tulosten tulkinnassa. Oppilaiden geometrinen käsitetiedon kehitys näytti aineiston perusteella jääneen yläasteen aikana vähäiseksi arvioituna niillä piirteillä, joita tässä tutkimuksessa tarkasteltiin. Työn lopussa pohditaan käsitetiedollisten tavoitteiden heikon toteutumisen mahdollisia syitä ja esitetään joitakin pedagogisia keinoja tilanteen korjaamiseksi.

Avainsanat:
Geometria, geometrinen käsitetieto, käsitetieto, matematiikka, oppiminen, tietorakenne, peruskoulun yläaste, van Hielen tasot, van Hielen teoria

Summary

The theoretical framework of the study is constructed on four main themes:

1) an introduction to the van Hiele theory and a review of literature related to this theory,
2) comparison of the van Hiele theory with some more recent theories which in their examination of the development of mathematical understanding are essential from the viewpoint of learning geometry,
3) constructing a development model of conceptual knowledge in geometry, and
4) examining background factors influencing the processing of visual-geometrical knowledge.

The empirical part of the study focuses on the content of the conceptual geometric knowledge of pupils in the upper level of the comprehensive school and the development of this knowledge during the three school years. The research uses both a cross-sectional and a longitudinal study in the examination of the data. The tests used in data collection are derived from the development model constructed in the theoretical part. The goals of the empirical part are threefold. Firstly, the study provides information on the essential character and general development of the conceptual geometric knowledge of pupils in the upper level of the comprehensive school. Secondly, with the help of empirical observations, it is possible to test the validity of the van Hiele theory as a description of the general level of geometrical thinking. Thirdly, the data enable an evaluation of the feasibility and validity of the constructed model of conceptual learning, which describes the process of learning more specifically than the van Hiele theory.

The empirical data were collected from the pupils in forms 7, 8 and 9 of the upper level of a medium-sized Tampere comprehensive school. As most of the pupils took part in the study, the total number of participants was 241. It was not considered necessary to include more schools because the main objective was to test the constructed model of conceptual geometric knowledge and to find enough example material for the study. The collected data proved large enough to provide implicative information even more generally on the quality of the pupils' conceptual knowledge in the upper level of the comprehensive school and the development of this knowledge during the three school years. By comparing the conceptual knowledge of pupils in the different school forms it was possible to obtain information on form-specific differences in conceptual knowledge and implications of the development of this type of knowledge during the three last years of comprehensive school. The features of the development of conceptual knowledge in geometry which were identified by a cross-sectional analysis were then verified by a longitudinal study. Part of the pupils (n = 85) were tested in the sixth as well as the ninth form, which made it possible to evaluate the development of the same pupils' conceptual knowledge in geometry. Exploring the pupils' knowledge structures also meant that some new research methods had to be generated.

The study challenges many of the basic assumptions of the van Hiele theory. One of these is the hierarchy assumption related to the van Hiele levels. Testing the hierarchy of the levels only concerned levels vH0, vH1, vH2 and vH3, for these were considered the most relevant in terms of geometry instruction in the upper level of the comprehensive school. As an experiment, a new intermediate level, vH1-2, was constructed between levels vH1 and vH2. In it, in accordance with Piaget's notion of empirical abstraction, the common geometrical characteristics of the figures examined were interpreted as generalisations of that group of figures — and only that — which the drawings in each test item concretely depicted. At the same time, in accordance with Piaget's notion of reflective abstraction, level vH2 was interpreted so that pupils placed on this level are able to perceive the characteristics of the figures as common features of the whole figure category. The study distinguished between two different interpretations of the possible hierarchy, namely strong and weak hierarchy. The results do not support the assumption of a strong hierarchy, which would mean that the order in which the levels are achieved is constant, as maintained by the original theory of van Hiele. In other words, level vH1 is achieved before level vH1-2, and vH1-2 before vH2, etc. Instead, the levels seem to form a weak hierarchy which means that the pupils' geometric skills can develop simultaneously on more levels than one. However, features which according to van Hiele are on a lower level will normally precede the thinking characteristics of the higher van Hiele levels. Level vH1-2, which was added to the structure, can be distinguished as a level of its own as clearly as the other developmental levels observed, and in terms of hierarchy, it is located on that hierarchy level to which it belongs on the basis of its character and the theoretical examination of the development of conceptual knowledge. In this respect, the existence of the added level vH1-2 can be justified as a redefinition of the structure composed of the original van Hiele levels.

The results of the study also challenge some interpretations of level vH3 presented in literature. On this level, the pupils' ability to form definitions was weaker than assumed by the descriptions of the level, and the pupils' knowledge structures were less systematic than expected.

The research shows that the pupil's spatial thinking and logical deduction skills as well as visual memory capacity were quite clearly connected with the development of his/her geometrical thinking depicted by the van Hiele level. The result is problematic, for the tests that were used to measure spatial and logical thinking skills as well as the capacity of the visual short-term memory require hardly any geometrical pre-knowledge. The van Hiele theory, on the other hand, has greatly emphasised the fact that the levels described by this theory specifically reflect a radical change in geometrical thinking which happens through learning.

It can be stated that the theoretical model, constructed to describe conceptual knowledge, functioned well both in the development of tests and in the interpretation of the results of the study. The development of the pupils' conceptual knowledge in geometry seemed to remain limited during the upper level of the comprehensive school when assessed with the features examined in this study. The possible reasons for the weak realisation of the objectives set for learning conceptual knowledge in geometry are also discussed and some pedagogic methods for improving the situation are suggested.

Key words:
Conceptual knowledge, geometry, learning, mathematics, comprehensive school, secondary school, van Hiele levels, van Hiele theory

Sisällys

"So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen, und endigt mit Ideen."

["Kaikki inhimillinen tieto alkaa havainnoista, siirtyy käsitteisiin ja päätyy ideoihin."]

Immanuel Kant[1]

1 Johdanto

1.1 Peruskoulun geometrian opetuksesta

1.1.1 Geometria osana yläasteen matematiikkaa

Geometrian asema oppivelvollisuuskoulun matematiikan opetuksen osa-alueena on vaihdellut pitkällä aikavälillä melkoisesti niin Suomessa (vrt. esim. Kupari 1989) kuin muuallakin (vrt. esim. Handsen 1998; Malaty 1989). Ennen peruskoulujärjestelmään siirtymistä geometriaa opetettiin keskikoulussa kolmannelta luokalta alkaen omana oppiaineenaan ja geometrian oppitunnit käsittivät noin puolet koko matematiikan oppituntien määrästä. Erityisesti 1970-luvulla geometrian osuus matematiikan oppisisällöissä oli varsin vähäinen. Näistä ajoista geometrian osuus matematiikan opetussuunnitelmissa on vähitellen lisääntynyt. Nykyään selkeästi geometriaksi luettavan aineksen opettamiseen käytetään yläasteen matematiikan oppitunneista oppikirjojen sisällön perusteella arvioiden noin kolmannes (vrt. esim. Heinonen ym. 1995—1997; Erkinjuntti ym. 1994—1996; Metiäinen ym. 1994—1996).

Erityisesti ennen viimeksi tehtyä koulujen opetussuunnitelmien uudistamisprosessia ja sen kuluessa julkisuudessa esitettiin toistuvasti toiveita geometrian aseman kohentamisesta osana koulun matematiikan opetusta (vrt. esim. Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean väli- ja loppumietinnöt (Anon. 1988, 50 ja Anon. 1989b, 32); Matematiikan opetuksen kehittämistyöryhmän väliraportti 29.5.1991 (Anon. 1991, 13—14); Halinen ym. 1991, 25; Pippola 1993, 12; Seppälä 1994, 19). Esimerkiksi MAOL ry:n julkilausumassa geometrian asemasta matematiikan opetussuunnitelmissa kannettiin erityistä huolta, kuten seuraavasta otteesta ilmenee "Nykyisistä matematiikan opetuksen osa-alueista ainoastaan geometrian opetuksen osuutta ja asemaa tulisi vahventaa olennaisesti." (Anon. 1990.) Määrällisten seikkojen ohella ongelmalliseksi koettiin tuolloin se, että geometria oli jäänyt irralliseksi ja pirstaleiseksi osaksi matematiikan opetusta.

1 I. Kant 1956. Kritik der reinen Vernunft. Hamburg: Meiner, s. 649. [Alkuperäisteos vuodelta 1787.]

Selvää on, että matematiikan opetuksen tuntikertymä peruskoulussa on nykyisin niin vähäinen verrattuna opetettavien sisältöalueiden määrään ja laajuuteen, ettei geometrialle enää voi varata tuntikertymästä sellaista osaa, jota entinen systemaattisen geometrian näkökulman mukainen geometrian opettaminen aikoinaan edellytti. Ranskalaiselta matemaatikolta Jean Dieudonnélta lähtöisin olevan iskulauseen "Euclid must go" mukaisesti on niin meillä kuin yleensä muuallakin luovuttu perinteisestä aksiomaattista metodia jäljittelevästä geometrian opetuksesta ja koetettu etsiä uudenlaista lähestymistapaa peruskoulua vastaavalla tasolla geometrian opettamiseen. Tällainen suuntaus on ollut myös tutkimuksellisesti perusteltu. Kokemukset osoittavat, että peruskoulun yläasteen koko ikäluokalle tarkoitettu yhteinen oppiaines ei merkittävässä määrin voi perustua deduktiivisen metodin käyttöön, sillä useimmat oppilaat eivät tässä vaiheessa ole kypsiä deduktiiviseen tarkastelutapaan muutoin kuin ulkomuistinvaraisena rutiinioppimisena (Kynigos 1993, 178).

1.1.2 Peruskoulun geometrian opetuksen tavoitteet

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (Anon. 1994a, 75—76) todetaan yläasteen opiskelussa olevan geometrian kannalta keskeistä, että oppilas

- ymmärtää geometrian peruskäsitteet, osaa piirtää tavallisimmat kuviot ja kappaleet sekä tottuu käyttämään verrannollisuutta, trigonometriaa ja Pythagoraan lausetta kuvioiden ja kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien laskennalliseen tarkasteluun,
- ymmärtää yhtenevyyden, yhdenmuotoisuuden ja symmetrian käsitteet, oppii näkemään näiden esiintymisen ympärillä olevassa maailmassa ja saa kuvan näiden käytöstä laskennallisessa geometriassa.

Opetussuunnitelman perusteissa todetaan edelleen, että oppilaan tulisi saada käsitys matemaattisista lauseista ja nähdä niiden käyttökelpoisuus, tutustua päättelyn merkitykseen matematiikassa sekä matematiikan struktuurin rakentumiseen ja saada kuva peruskoulun aikana hankittujen tietojen rakentumisesta systemaattisiksi kokonaisuuksiksi. Samoin pidetään tärkeänä, että käsitteiden ja tietorakenteiden oppimista tuettaisiin suunnittelemalla yksittäisistä sisällöistä ja keskeisistä käsitteistä myös laajempia opintokokonaisuuksia. Esimerkiksi Seppälän (1994, 19) mukaan juuri geometria tarjoaa otollisen ympäristön oppia ymmärtämään käsitteenmuodostusta, matemaattista perustelua ja alkeellista todistamista. Hänen mukaansa matemaattisesti harrastuneille oppilaille tulisi yläasteen aikana opettaa myös jostakin aksioomasta lähtevä todistusrakennelma. Tämänsuuntaisista opetuskokeiluista on saatu rohkaisevia kokemuksia (vrt. Joki 1994a; 1994b).

Aritmetiikan ja algebran voidaan katsoa antavan oppilaalle matemaattiset työkalut lukumääräsuhteiden käsittelyyn. Vastaavasti geometrian kautta oppilas saa matemaattisia työvälineitä tilasuhteiden tajuamiseen ja niillä operointiin. Tällainen geometrinen ymmärrys ilmenee monin eri tavoin. Keskeisesti siihen liittyy avaruuden hahmottamisen monentasoinen kehittyminen. Hahmotusprosessin eri osatekijöistä on vaikea sanoa, mikä osa on oppimisen kautta hankittua taitoa ja mikä ennemminkin lajityypillistä tapaa hahmottaa reaalimaailman visuaaliset ominaisuudet sellaisina, kuin ne meille näyttäytyvät. Esimerkiksi tietyt visuaaliset hahmot erottuvat toisentyyppisistä hahmoista suoran hahmotuksen kautta ilman sen kummempaa muodon analysointia. Jo muutaman vuoden ikäinen lapsi osaa erottaa suljetun viivan avoimesta, suoran viivan mutkittelevasta, ympyrän monikulmioista jne. Tämäntyyppistä suoraa hahmotusta voi pitää vastaavantyyppisenä toimintoja, joka lukukäsitteen yhteydessä tunnetaan pienten lukumäärien ilman laskemistoimintoa tapahtuvana suorana hahmottamisena, ns. subitizing-ilmiönä (Kaufman ym. 1949; Bergeron & Herscovics 1990, 35).

Osa hahmotusprosessista on kuitenkin selkeämmin ohjatun toiminnan ja harjaantumisen seurausta. Geometrian opintojen myötä lapsi oppii mm. preferoimaan tiettyjä visuaalisia ominaisuuksia toisiin vastaaviin ominaisuuksiin nähden. Tällainen ohjattu näkökulman muutos muodostaa yhden geometrisen käsitteenmuodostuksen peruslähtökohdista. Kouluoppimisen myötä oppilas oppii jäsentämään tilasuhteita vakiintuneiden ja itse asiassa varsin harvalukuisten käsitteiden kautta. Käsitteet, joilla geometria operoi, ovat tarkoin valikoituneita ja aikojen saatossa käyttökelpoisuutensa osoittaneita verrattuna siihen muotojen ja tilasuhteiden moninaisuuteen, millä todellisuus ympärillämme tosiasiassa näyttäytyy. Tilasuhteiden tehokas hallinta edellyttää myös suureiden, kuten pituuksien, kulmien suuruuksien, pinta-alojen, tilavuuksien jne. tarkastelua ja käsittelyä laskennallisin keinoin. Geometrian opetuksessa on eri aikoina eri tavoin korostettu hahmottamisen, käsitteellistämisen ja laskennallisen otteen merkitystä. Dieudonné on todennut, että visuaalinen, laskennallinen, käsitteellinen, algebrallinen, utilitaristinen ja soveltava näkökulma ovat eri aikoina olleet geometrian opetuksessa eri tavoin esillä ja että geometrian kouluopetus etsii tässä suhteessa edelleen jatkuvasti paikkaansa (Dieudonné 1981, 5—7).

On selvää, että geometriaa ei opeteta koulussa pelkästään geometrian oppisisältöjen oman merkittävyyden vuoksi, vaan myös siksi, että geometrian opiskelun kautta opitaan jotakin sellaista, millä on siirtovaikutusta muun tyyppisen matematiikan oppimiseen ja hallintaan. Osaksi juuri (koulu)geometrian konkreetista tulkintaperustasta johtuen geometria tarjoaa poikkeuksellisen monipuolisen oppimisympäristön yleistysten ja perusteltujen johtopäätösten tekoon sekä käsitteiden täsmentämisen harjoittelemiseen. Hypoteesien oikeellisuutta ja erilaisten määrittelyjen seuraamuksia voidaan testata useilla abstraktiotasoilla. Apuna voidaan käyttää niin konkreettisia malleja, kokeiluun perustuvaa induktiivista päättelyä, laskuilla saatavaa informaatiota kuin deduktiotakin. Edellä todetuista syistä geometriassa on erinomainen mahdollisuus yltää ymmärtävään oppimiseen, asioiden välisten yhteyksien hahmottamiseen ja tietokokonaisuuksien muodostumiseen. Oppimisen eri vaiheissa ymmärtämisen kokemus voi luonnollisesti olla hyvin erilainen. Alkuvaiheessa ymmärryksen perusta on reaalimaailman havainnoissa, myöhemmin yhä enenevässä määrin geometrisen systeemin rakenteessa.

Usiskin tiivistää geometrian opetuksen motiivit seuraaviin syihin opettaa geometriaa. Geometriaa pitää hänen mukaansa opettaa, koska

1. se yhdistää matematiikan reaalimaailmaan,
2. sen avulla voidaan havainnollistaa muita matematiikan osa-alueita ja
3. se toimii hyvänä esimerkkinä matemaattisesta systeemistä. (Usiskin 1980, 418—419; ks. myös Pehkonen 1985, 8—9.)

Krainer (1993, 72) korostaa vastaavassa jaottelussaan vielä geometrian teoriatason tarkasteluiden ja niiden perustana olevan havaintoaineksen vuorovaikutussuhdetta. Yhtäältä geometriaa voi pitää reaalimaailman avaruussuhteita koskevana teoreettisena mallina ja toisaalta tämän teoreettisen mallin puitteissa todennettuja tuloksia voidaan hyödyntää ratkottaessa reaalimaailman avaruussuhteita koskevia ongelmia.

1.1.3 Oppimistulokset peruskoulun geometriassa

Koulusaavutustutkimusten antama kuva suomalaisten peruskoululaisten geometrian oppimisen tasosta on osittain ristiriitainen. Toistaiseksi viimeinen IEA järjestön (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) järjestämä laaja kansainvälinen koulusaavutusten vertailututkimus The Second International Mathematics Study, SIMS, johon myös Suomi osallistui, toteutettiin lähes kaksikymmentä vuotta sitten vuosina 1980—1982. SIMS:n perusteella suomalaisten koululaisten geometrian ja mittaamisen taidot olivat tuolloin kaikissa tutkituissa ikäryhmissä hiukan paremmat kuin vertailumaiden keskimäärin (Soro & Pehkonen 1998, 41). Vuosina 1994—1995 toteutettuun kolmanteen kansainväliseen matematiikan ja luonnontieteiden tutkimukseen (The Second International Mathematics and Science Study, TIMSS) maamme ei osallistunut. Tältä osin kansainvälistä vertailuaineistoa ei näin ole käytettävissä. Sen sijaan TIMSS:n jatkotutkimukseen Suomi osallistunee.

Tämän työn kirjoitusvaiheessa kansainvälisen vertailutiedon aukkoa paikkaa erityisesti ns. Kassel-projektin yhteydessä kerätty aineisto. Kassel-projektissa tutkittiin vuosina 1993—1996 koululaisten matematiikan oppimistasoa Suomen lisäksi 15 maassa eri puolilta maailmaa. Kassel-testien tuloksista tehtiin erikseen eurooppalainen vertailu, johon Suomen lisäksi osallistuivat Englanti, Kreikka, Norja, Saksa ja Unkari (Soro 1997; Soro & Pehkonen 1998; Pehkonen & Soro 1998).

Kassel-projektin Suomen osuudessa lähtötestaukset tehtiin 7.-luokan syksyllä 1994 neljällä eri testillä alku-, luku-, algebra- ja geometriatestillä. Kahtena seuraavana vuonna mittaukset uusittiin luku-, algebra- ja geometriatesteillä. Alkutestissä, joka mittasi oppilaiden matematiikan perustaitoja kuten avaruudellista hahmottamista, ongelmanratkaisua, lukukäsitteen ymmärtämistä ja käyttöä, loogista ajattelua ja hahmon tunnistamista, suomalaisten tulostaso ei merkittävästi poikennut muista osallistujamaista paitsi Unkarista. Unkarissa oppilaiden tulostaso oli selvästi korkeampi kuin muissa viidessä maassa. Algebra- ja geometriatesteissä muiden maiden yhteispistemäärät olivat tilastollisesti merkitsevästi paremmat kuin tilaston häntäpäätä edustaneilla Suomella ja Norjalla. Myös osaamisen kasvu oli Suomen ja Norjan oppilailla toisen tutkimusvuoden aikana hitaampaa kuin tutkimukseen osallistuneilla englantilaisilla, saksalaisilla ja unkarilaisilla oppilailla, joilla osaamistason kasvu oli yli puolitoistakertainen Suomeen verrattuna. Algebran, geometrian, mittaamisen ja funktioiden osaamisessa suomalaiset peruskoulun yläasteikäiset olivat tämän tutkimuksen perusteella noin yhden lukuvuoden jäljessä kansainvälisestä keskiarvosta. (Pehkonen & Soro 1998, 5—6.)

Kassel-projektin tulosten tulkinnoista on esitetty eriäviä näkemyksiä. Seppälän tulkinnan mukaan tulokset geometriassa ovat pitkällä aikavälillä jonkin verran parantuneet (Seppälä 1997, 28). Seppälä perustaa väitteensä Koulutuksen tutkimuslaitoksen (aiemmin Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, KTL) vuosina 1979, 1990 ja 1995 toteuttamiin kansallisiin arviointitutkimuksiin (Kupari 1993a; 1993b; 1997; Kangasniemi 1989), joiden perusteella ajanjaksona 1979—1990 yläasteen oppilaiden geometrian osaamisessa oli tapahtunut edistymistä ja ajanjaksona 1990—1995 taso oli pysynyt ennallaan (Kupari 1997, 226—228). Pehkonen ja Soro eivät yhdy Seppälän positiivissävytteiseen tulkintaan. Heidän mukaansa Kassel-projektissa saadut tulokset antavat joka tapauksessa surullisen kuvan suomalaisten yläasteen oppilaiden matematiikan taidoista, erityisesti algebrassa ja geometriassa (Pehkonen & Soro 1998, 7; Soro & Pehkonen 1998, 46).

Peruskoulun päättövaiheessa olevien oppilaiden matematiikan oppimistuloksista on kerätty tietoa vuosina 1993 (Korhonen 1994) ja 1995 (Pehkonen 1997) toteutetuissa peruskoulun matematiikan arvioinnin pilottihankkeissa ja vuonna 1998 toteutetussa matematiikan oppimistulosten laajassa kansallisessa arvioinnissa (Korhonen 1999). Oppisisällöittäin tarkasteltuna vuoden 1993 arvioinnissa geometria ja tilastot osattiin parhaiten (tosin kokeessa oli vain kolme geometrian laskutehtävää). Geometrian osalta tulokset olivat samansuuntaiset vuoden 1995 arvioinnissa (emt., 17). Vuonna 1998 tehdyssä arviointitutkimuksessa käytetty mittaväline oli rakenteeltaan sen tyyppinen, ettei mahdollisia eri matematiikan osa-alueiden välisiä osaamiseroja nähty mielekkääksi tutkia (emt., 24). Peruskoulun päättövaiheessa olevien oppilaiden geometrisen osaamisen tasoa voidaan arvioida myös sitä kautta, missä määrin tämä osaaminen riittää oppilaiden peruskoulun jälkeisten jatko-opiskelujen pohjaksi. Tässä suhteessa tilanne ei näytä kovin hyvältä. Joutsenlahden suorittama lukiolaisten matemaattisen ajattelun kehitystä koskeva tutkimus osoittaa, että sekä lukion pitkän että lyhyen matematiikan oppilaiden geometrian osaamisen taso on heikompaa kuin useimpien muiden matematiikan osa-alueiden (Joutsenlahti 1997, 339—340). Välijärvi (1997, 20) raportoi vastaavantyyppisestä korkeakoulujen opettajien tekemästä havainnosta koskien niitä lukiolaisia, jotka hakeutuvat lukio-opintojen jälkeen matemaattisten aineiden korkeakouluopintoihin.

1.1.4 Geometrian opetuksen tila ja tulevaisuuden näkymät

Matematiikan opetuksen kansainvälinen komissio ICMI (The International Commission on Mathematical Instruction) laati vuonna 1994 geometrian opetuksen tilaa pohtivan julkilausuman (Discussion Document), jonka otsikkona oli "Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century" (Anon. 1994c; 1995; Mammana & Villani 1998, 337—345). Asiakirjan avulla haluttiin käynnistää laaja kansainvälinen pohdinta koskien geometrian opetuksen tilaa, trendejä ja tulevaisuuden näkymiä. Tulokset julkaistiin sittemmin ICMI Study -sarjaan kuuluvassa teoksessa "Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century" (Mammana & Villani 1998). Dokumentin laatinut ICMI:n työryhmä esitti maailmanlaajuisina yleishavaintoina kolme syytä, joiden seurauksena geometrian oppimisen tason voidaan pelätä laskeneen. Ensinnäkin geometrian opetuksen määrä kouluissa on vähentynyt, sillä koulumatematiikan osaksi tulleet uudet sisältöalueet, kuten esimerkiksi todennäköisyyslaskenta, tilastotiede ja diskreetti matematiikka, ovat vallanneet tilansa usein juuri geometrian kustannuksella. Toiseksi geometrian opetuksen didaktiikka ei ole uudistunut riittävästi. Vaikka matematiikan opetuksessa on muutoin viimeisten kahden vuosikymmenen aikana korostettu ongelmakeskistä lähestymistapaa, niin geometrian opetukseen tällainen lähestymistapa ei ole juurtunut. Geometriassa asiasisällöt opetetaan usein yhä edelleen faktanomaisina, valmiina tuloksina. Kolmanneksi opettajien oma geometrinen tietämys ei aina riitä laadukkaan opetuksen antamiseen. Erityisesti nuorten alalle vasta tulevien opettajien oma aineenhallinnallinen taso on geometrian osalta usein puutteellista. Nykyiset nuoret opettajat ovat itse olleet koulussa oppilaina silloin, kun geometriaa kuului kursseihin hyvin vähän. Nuorten opettajien yliopisto-opintoihin ei niihinkään usein ole sisältynyt kouluopetuksen kannalta riittäviä geometrian opintoja.

1.2 Tutkimuksen yleistavoitteet

Geometriaan opetusta pohtivalla kasvatustieteellisellä tutkimuksella on maassamme vanhat perinteet, vaikkei tämäntyyppinen tutkimus määrällisesti olekaan ollut kovin laajaa. Jo vuonna 1945 Aatu Nykänen väitteli Helsingin yliopistossa aiheesta "Alkeisgeometrian opetuksesta Suomessa erityisesti oppikirjojen kehitystä silmällä pitäen" (Nykänen 1945; Päivänsalo 1971, 234—235). Uudemmista geometrian oppimiseen ja opetukseen liittyvistä laajemmista kotimaisista tutkimuksista ja selvityksistä mainittakoon erityisesti Pehkosen (1981, 1982a, 1982b, 1982c, 1983, 1985, 1986), Joen (1994a, 1994b) ja Silfverbergin (1984b, 1986, 1989, 1994, 1998, 1989) tekemät. Myös epämuodollisempaa keskustelua geometrian oppimiseen ja opetukseen liittyen on käyty eri foorumeilla säännöllisesti, mutta sitä ei tässä yhteydessä dokumentoida.

Tämän tutkimuksen päämääränä on ollut kehittää peruskoulun yläasteen oppilaan geometrisen ajattelun karakterisointiin soveltuva geometrisen tiedon ja osaamisen rakennekuvaus ja tarkastella kehitetyn rakennekuvauksen pohjalta yläasteen oppilaan geometrisen osaamisen ja siinä erityisesti oppilaan *geometrisen käsitetietouden* kehittymistä yläasteen aikana. Käsitetietoudella viitataan tällöin Hiebertin ja Lefevren (1986) esittämään matemaattisen tiedon kahtiajakoon menetelmätiedoksi (procedural knowledge) ja käsitetiedoksi (conceptual knowledge). Termejä käsitetieto ja käsitetietous käytetään tässä tutkimuksessa synonyymisesti. Menetelmätieto muodostaa Hiebertin ja Lefevren käyttämän terminologian mukaan matemaattisen tiedon syntaktisen komponentin ja käsitetieto sen semanttisen komponentin. Käsitetietoon sisältyy tieto käsitteiden merkityksistä ja käsitteiden välisistä suhteista. Hiebert ja Lefevre korostavat tietokokonaisuuksien merkitystä käsitetiedon omaksumisessa. Käsitteellinen tieto on heidän mukaansa aina linkitettyä tietoa. Tässä mielessä siis esimerkiksi Lehtisen ym:n (1989, 59) ilmaisema huoli tietämisen rakenneominaisuuksien laiminlyömisestä peruskoulun opetuksessa kohdistui 1990-luvun alkaessa nimenomaan käsitetiedon puutteelliseen opetukseen.

Aikaisemmissa tutkimuksissa geometrisen ajattelun kehityskulkua on kuvattu lähes yksinomaan käyttäen apuna 1950-luvulla kehitettyä *van Hielen teoriaa*, jossa oppilaan geometrisen ajattelun kehitysprosessia karakterisoidaan *van Hielen tasojen* ja näiden tasojen välisten siirtymävaiheiden eli *periodien* avulla (esim. Silfverberg 1986; Teppo 1991). Empiirisen tutkimuksen perusteella voidaankin pitää kohtuullisen hyvin osoitettuna, että van Hielen teorian kuvaus geometrisen ajattelun kehityksestä on karkeasti ottaen oikea. Pedagogisten sovellusten kannalta van Hielen teorian näkökulma on monessa suhteessa osoittautunut kuitenkin liian yleiseksi ja pelkistetyksi (esim. Magne 1989, 79). Väitöskirjatyön teoreettisessa osassa yläasteen oppilaan geometrisen käsitetietouden kehittymistä tarkastellaankin van Hielen teoriaa tarkentavasta ja nykyaikaistavasta viitekehyksestä. Tämän työn valossa van Hielen teoria näyttää olevan selitysvoimainen erityisesti geometrian oppimisen myötä tapahtuvien globaalien, kokonaisvaltaisten geometrisen ajattelun siirtymien selittämisessä. Sen sijaan viime vuosina kehitetyt spesifimmät matemaattisten käsitteiden ja käsitteiden välisten suhteiden oppimisteoriat ovat van Hielen teoriaa käyttökelpoisempia yksittäisten käsitteiden oppimisprosessien tarkastelussa ja mallittamisessa.

Oppilaan geometrisen kognition ja sen kehityksen tarkastelua varten tutkimuksessa kehitetään teoreettinen malli sille, miten tällainen kognitio kehittyy visuaalisen kontekstin ohjaaman 'image'-vaiheen kautta ensin käsitteiden listamaisiksi deskriptioiksi ja sitten edelleen loogisin sitein hallituiksi käsitteellisiksi konstruktioiksi. Malli suhteutetaan sekä van Hielen että eräiden muiden matemaattisen ymmärryksen kasvua tarkastelevien teorioiden perushypoteeseihin erityisesti niiltä osin, joissa se ottaa huomioon tiedon käsitteellistymis- ja organisoitumisasteen kasvun geometrisen ajattelun kehityksen indikaattorina.

Käsitteellisen ymmärryksen kasvun kannalta keskeiseksi tekijäksi geometriassa muodostuu käsitteiden ja niiden välisten suhteiden sisäisten ja ulkoisten representaatioiden koordinointi ts. varsinaisen käsitteen ja sen visuaalisen mallin erottaminen toisistaan. Käsitteen visuaalinen malli voi olla joko sisäinen (mielikuva) tai ulkoinen (kuvio). Eräänlaisena välittävänä linkkinä sisäisten ja ulkoisten representaatioiden välillä näyttää toimivan se kokonaisvaihtelu, jonka yksilö sallii käsitteen representaatioille. Tutkimuksessa tätä yksilön hyväksymää representaatioiden kokonaisvaihtelua kutsutaan *visuaaliseksi variaatioksi*.

Käsitteen visuaalinen variaatio voi olla primaaristi ohjaamassa käsitteen tulkintaa, jolloin tyypilliset tai mahdollisina pidetyt representaatiot sisältävät myös käsitteen määrittelyskeeman pääasiallisen sisällön (tyypillistä kahdella ensimmäisellä edempänä selostettavalla van Hielen tasolla) tai se voi olla alistetun apuneuvon asemassa käsitteen määrittelyskeemaan sisältyvien attribuuttien ja niiden yhdistelmien ollessa primaareja (tyypillistä kolmannelta van Hielen tasolta alkaen). Käsitteiden visuaalisella variaatiolla on tutkimuksessa keskeinen rooli sekä teoreettisena konstruktiona käsitetiedon rakennekuvauksessa että tietorakenteen tutkimuksen empiirisenä apuvälineenä tulkittaessa yksilön käsitteille ja niiden suhteille antamia merkityksiä.

Oppilaan omaksuman geometrisen tietämyksen mallintaminen on tutkimuskohteena sikäli hankala, että kunkin yksilön kohdalla on kuitenkin kyse yksilön omasta ainutkertaisesta tavasta hahmottaa ja jäsentää geometriassa tarkasteltavia objekteja ja relaatioita. Oppilaan geometrinen tietämys tai usein paremminkin uskomukset rakentuvat lukuisasta joukosta käsitteitä, skeemoja ja muita tiedonrakenteita, joiden sisältö ja tarkkuus voivat merkittävästi poiketa standardikäsitysten mukaisista. Geometrinen tietämys ilmenee täten monenlaisina odotuksina, uskomuksina tai käsityksinä siitä, miten asioiden otaksutaan tai tiedetään olevan. Ongelmalliseksi saattaa siis muodostua se, miten yleiseen näkökulmaan pyrkivällä geometrisen kognition mallinnuksella voidaan säilyttää yksilöllisen hahmotustavan ainutkertaisuus ja pitää malli kuitenkin riittävän yleisenä. Mallin rakentamista vaikeuttaa luonnollisesti myös se, että geometriseen käsitetietouteen kytkeytyy hyvin monentyyppisiä skeemoja. Keskeisimpiä näistä ovat geometrisen kuvion hahmotukseen, tunnistamiseen, vertailuun ja luokitukseen liittyvät skeemat. Edellisiin kytkeytyvät kuitenkin myös kuvion muodon variointiin sekä tähän liittyvien mahdollisuuksien ja välttämättömyyksien ymmärtämiseen liittyvät skeemat, kuvailuun ja määrittelyyn liittyvät skeemat, piirtämiseen ja konstruktioihin liittyvät skeemat ja tiedon pätevyyden osoittamiseen liittyvät skeemat.

Erityisesti laskennallisten tavoitteiden saavuttamisesta opettajan on suhteellisen helppo saada palautetietoa koulukokeilla. Käsitetiedollisten tavoitteiden saavuttamisen arviointi ei sitä vastoin ole samalla tavalla suoraan mitattavissa laskujen kautta. Käsitteiden ymmärtämistä on helpointa arvioida dikotomisesti määrällisenä kysymyksenä tarkastelemalla, hallitsevatko oppilaat käsitteet sillä tavalla, jota pidetään matemaattisesti oikeana, vaiko eivät. Testiosioina voidaan tällöin käyttää esimerkiksi luokittelu-, tunnistamis- ja määrittelyosioita. Jos kuitenkin edellisen lisäksi pyrkimyksenä on konstruktivistisen otteen mukaisesti päästä selville myös siitä, millaisia yksilöllisiä käsityksiä — oikeita tai virheellisiä — oppilaille on muodostunut geometristen käsitteiden merkityksistä ja käsitteiden välisistä suhteista, niin tällaista kvalitatiivista palautetietoa on hankala saada sen tyyppisillä tehtävillä, joita koulukokeissa käytetään.

Tutkimuksen yhteydessä kerättiin huomattavan laaja aineisto oppilaiden eräisiin koulugeometrian peruskäsitteisiin ja käsitteiden välisiin suhteisiin liittämistä henkilökohtaisista merkityksistä. Tutkimusaineisto tarjoaa täten tilaisuuden tutkia oppilaiden geometriseen kognitioon liittyviä rakenteellisia ominaisuuksia opetussuunnitelman kannalta keskeisten oppisisällöllisten kokonaisuuksien osalta. Työssä valittu näkökulma merkitysten tarkasteluun ei ole ensisijaisesti määrällinen siinä mielessä, että tarkasteltaisiin pelkästään sitä, kuinka lähellä objektiivisesti oikeaa oppilaiden käsitykset keskimäärin ovat. Määrällisten kysymysten ohella tutkimus pyrkii valottamaan sitä, miten oppilaat tarkasteltavat asiat tosiasiassa ymmärtävät ja millaisia laadullisia eroja tässä esiintyy. Tutkimuksen empiirisen osan toteuttamisen kannalta välttämättömien geometrisen käsitetiedon mittavälineiden kehittely muodostuikin merkittäväksi osaksi tutkimusta. Tällainen matemaattisten tietorakenteiden oppimisen tutkimus on maassamme vasta alkuvaiheissaan. Laajasti hyväksytyn konstruktivistisen oppimiskäsityksen kannalta oppilaan muodostamien todellisten merkitysten tutkimus on varsin keskeistä, sillä näille oppilaan omille konstruktioille ohjattujen oppimiskokemusten tulisi rakentua. Kun tutkimuksessa lisäksi koetettiin tarkastella oppilaan loogisen ajattelun kehittyneisyyden ja spatiaalisilla ajattelun taitojen yhteyttä hänen geometrisen käsitetietoutensa laatuun, empiirisen osan toteuttamiseksi jouduttiin kehittämään sentyyppiset mittavälineet loogisen ajattelun ja spatiaalisen ajattelun testaamiseksi, jotka oleellisesti rakentuivat geometristyyppiseen kontekstiin.

Tutkimuksen teoreettinen viitekehys rakentuu neljästä pääteemasta:

1) van Hielen teorian ja siihen kytkeytyneen tutkimusperinteen esittelystä,
2) van Hielen teorian vertailusta eräisiin muihin uudempiin ja geometrian oppimisen kannalta keskeisiin matemaattisen ymmärryksen kasvua tarkasteleviin teorioihin,
3) geometrisen käsitetiedon kehittymisen mallin konstruoinnista ja
4) visuaalis-geometrisen tiedon prosessointiin vaikuttavien taustatekijöiden tarkastelusta.

Tutkimuksen empiirisessä osassa yläasteen oppilaiden geometrisen käsitetiedon sisältöä ja sen kehittymistä yläasteen aikana tarkastellaan sekä poikittais- että pitkittäistutkimuksena sen tutkimusaineiston valossa, joka on kerätty teoreettisessa osassa konstruoidun geometrisen käsitetiedon kehittymisen malliin perustuvilla mittavälineillä. Tutkimuksen empiirisen osan tavoitteet ovat kolmenlaiset. Yhtäältä tutkimus tarjoaa tietoa yläasteen oppilaiden geometrisen käsitetiedon olemuksesta ja kehittymisestä sinänsä. Toisaalta empiiristen havaintojen avulla voidaan koetella van Hielen teorian pätevyyttä geometrisen ajattelun yleisen tason kuvauksena. Kolmanneksi aineiston avulla on mahdollista arvioida tutkimuksessa konstruoidun van Hielen teoriaa spesifimmän käsitetiedon oppimisen kuvauksen käyttökelpoisuutta ja validiteettia.

2 van Hielen teoria geometrisen ajattelun kehittymisestä

2.1 Teorian yleiskuvaus

2.1.1 Teorian alkuperäislähteistö

van Hielen teoriana tunnetun geometrisen ajattelun kehittymistä kuvaavan teorian kehitti yhteistyössä hollantilainen aviopari Pierre van Hiele ja Dina van Hiele-Geldof. Dina van Hiele-Geldofin tuotanto jäi hänen varhaisen kuolemansa vuoksi vähäiseksi. Hän ehti väitöskirjansa (van Hiele-Geldof 1957) ohella julkaista vain yhden yhteisartikkelin miehensä kanssa (van Hiele-Geldof & van Hiele 1958). Pierre van Hiele on sitä vastoin kehittänyt teoriaa jo noin 30 kymmenen vuoden ajan ja kirjoittanut siitä useita julkaisuja. Ensimmäinen teoriaa käsittelevä lähde, Utrechtin yliopistolle laadittu väitöskirja (van Hiele 1957) on vuodelta 1957 ja toistaiseksi viimeinen laajempi teos on runsaan kymmenen vuoden takaa (van Hiele 1986). Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin muuhun kuin englanninkielellä julkaistuun tuotantoon perehtymistä helpottaa se, että ns. Brooklynin tutkimusprojektin yhteydessä käännettiin keskeisin osa heidän flaamin- ja ranskankielisestä tuotannostaan englanniksi (Fuys ym. 1984). Kokoelmaan sisältyy Dina van Hiele Geldofin väitöskirjan (van Hiele-Geldof 1957) käännös ja siihen liittynyt englanninkielinen yhteenveto-osa sekä käännös tutkijan viimeiseksi jääneestä artikkelista (van Hiele-Geldof & van Hiele 1958). Pierre van Hielen tuotannosta kokoelmaan on otettu mukaan edellä mainitun yhteisartikkelin lisäksi väitöskirjan englanninkielinen yhteenveto ja käännös vuonna 1959 ilmestyneestä artikkelista "La pensée de l'enfant et la géometrie [A child's thought and geometry]". Yhdysvalloissa toteutettujen laajojen van Hielen teoriaan kohdistuneiden tutkimusprojektien yhteydessä P. van Hielen ja D. van Hiele-Geldofin omasta tuotannosta on kerätty tasojen ominaispiirteitä kuvaavia sitaatteja kokoelmiksi, joita on sitten käytetty van Hielen tasojen testien validointiin (Chicago-projektissa Usiskin 1982, 9—12 ja Brooklyn-projektissa Fuys ym. 1988, 72—76).

2.1.2 van Hielen tasojen yleiskuvaus

Toistaiseksi van Hielen teoriasta on eniten huomiota saanut sen deskriptiivinen osa, joka sisältää hypoteesin geometrisen ajattelun kehitykselle luonteenomaisten kehitystasojen olemassaolosta. Nämä viisi tasoa, joita on alettu kutsua van Hielen tasoiksi, ilmentävät geometriseen ajatteluun sisältyviä laadullisia muutoksia, jotka toistuvat eri yksilöiden geometrisen ajattelun kehityksessä samantapaisina ja samassa järjestyksessä mutta eivät välttämättä samassa tahdissa. Tasojen sisältöihin voi perehtyä kahden erityyppisen aineiston kautta. Käytettävissä on yhtäältä alkuperäislähteistönä pidettävä Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin oma tuotanto (vrt. lähteet tältä osin) ja toisaalta uudemmat alkuperäisaineistosta työstetyt tasojen kuvaukset, joihin monasti liittyy tasojen operationaalistamista varten laaditut tasojen kriteeristöt.

Lähes jokaiseen van Hielen teoriaa käsittelevään tutkimukseen sisältyy jonkinlainen yleiskuvaus van Hielen tasojen sisällöistä. Useimmat näistä yleiskuvauksista ovat suoraan tai välillisesti saaneet vaikutteita van Hielen artikkeliinsa sisällyttäneestä neljän ensimmäisen tason tiiviistä sisällön kuvauksesta (van Hiele 1959/Fuys ym. 1984, 245—246). Välillisiä vaikuttajia tasojen yleiskuvausten muotoon ovat olleet erityisesti Wirszup (1976, 84—86) ja Hoffer (1981, 13—14; 1983, 207). Alkuperäislähteissä esitettyjä tasojen karakterisointeja ei voida tietenkään pitää itseoikeutetusti oikeina vaan vain teoriaan sisältyvinä hypoteeseina geometrisen ajattelun tavanomaisesta kehityskulusta kouluopetuksessa. Tästä huolimatta tässäkin työssä lähtökohdaksi otetaan tasojen traditionaalinen yleiskuvaus. Tällä menettelyllä pyritään pitämään alkuperäinen van Hielen teoria ja siihen sisältyneet olettamukset sekä teoriaan kohdistuneet myöhemmät tulkinnat ja tarkennukset riittävän erillään toisistaan. Toinen syy yleisluontoiseen tasojen kuvaukseen on se, että lähes jokaisessa empiirisessä tutkimuksessa van Hielen tasojen yleissisältö ja tämänkaltaisten tasojen muodostama hierarkia on katsottu valideiksi. Esitetty kritiikki on kohdistunut yleensä tasojen yksittäisiin tunnusmerkkeihin muttei varsinaisesti tasojen perusstruktuuriin (vrt. esim. de Villiers & Njisane 1987).

Geometrisen ajattelun yleispiirteet eri van Hielen tasoilla ovat seuraavat:

Taso 1 (visualisoinnin taso)

Visualisoinnin tasolla kuvioita käsitellään kokonaisuuksina ja visuaaliseen havaintomaailmaan kuuluvina. Kuvioiden tunnistaminen, nimeäminen, lajittelu, vertailu, kuvailu yms. suoritetaan kuvion visuaalisen kokonaishahmon eikä kuvion ominaisuuksien perusteella. Geometristen peruskuvioiden tavanomaiset esimerkkitapaukset osataan tunnistaa ja nimetä. Peruskuvioiden malliesimerkit osataan visualisoida ja piirtää.

Taso 2 (ominaisuuksien analysoinnin taso)

Ominaisuuksien analysoinnin tasolla kuviot tulkitaan ominaisuuksiensa 'kantajiksi'. Kuvioita tarkastellaan niiden ominaisuuksien näkökulmasta. Ominaisuuksia käsitellään siinä mielessä erillisinä, että niiden keskinäisiin loogisiin riippuvuussuhteisiin ei kiinnitetä huomiota. Kuvioita osataan analysoida ja verrata keskenään ominaisuuksien avulla eikä pelkän visuaalisen samankaltaisuuden tai erilaisuuden perusteella. Ominaisuuksien analysoinnin tasolla löydetään ja käytetään hyväksi kaikkia tiettyyn kuvioluokkaan kuuluvia kuvioita yhdistäviä ominaisuuksia.

Taso 3 (ominaisuuksien järjestämisen taso)

Ominaisuuksien järjestämisen tasolla kuvioiden ominaisuuksilla on loogisten suhteiden luomaa sisäistä järjestystä. Deduktiota pystytään seuraamaan ja käyttämään hyväksi lyhyissä päättelyissä. Määritelmiä osataan muotoilla ja kuvioiden määrittelevistä ominaisuuksista tunnistetaan riittävät ja välttämättömät ominaisuudet. Määritteleviä ominaisuuksia osataan käyttää hyödyksi tutkittaessa sisältyykö kuvioluokka toiseen vaiko ei.

Taso 4 (formaalin päättelyn taso)

Formaalin päättelyn tasolla systemaattisen, deduktiivisen geometrian edellyttämä ajattelutapa hallitaan. Tällä tasolla kyetään annetusta tiedosta päättelemään seurauksia ja todistamaan geometrisia lauseita itsenäisesti. Probleeman annetut tiedot ja osoitettavaksi edellytetyt tiedot osataan erottaa toisistaan. Määritelmän, aksiomin ja lauseen välinen ero samoin kuin lauseen ja sen käänteislauseen sekä ehtojen välttämättömyyden ja riittävyyden ero ymmärretään.

Taso 5 (aksiomisysteemin ymmärtämisen taso)

Aksiomisysteemin ymmärtämisen tasolla pystytään vertailemaan eri geometrioita keskenään tarkastelemalla niiden eroja ja yhtäläisyyksiä aksiomaattisina järjestelminä.

Edellä käytetty tasojen ykkösestä alkava indeksointi on ollut yleistymässä van Hielen teoriaa käsittelevissä julkaisuissa (vrt. Clements & Battista 1992; Crowley 1990; Senk 1989; Gutiérrez ym. 1991a; Usiskin & Senk 1990; Wilson 1990), mutta alkuperäisen käytännön mukainen nollasta alkava numerointi on sekin edelleen käytössä (vrt. Crowley 1987; Fuys ym. 1988; de Villiers & Njisane 1987; Denis 1987), mikä hankaloittaa raportoitujen tutkimustulosten vertailua. Myös van Hiele on nyttemmin ryhtynyt käyttämään tasoille ykkösestä alkavaa indeksointia (vrt. van Hiele 1986), joskin tässä julkaisussa van Hiele on samalla yhdistänyt tasot kolmeksi tasoksi. Tällöin myös tasojen tulkinta on muuttunut. Eräissä julkaisuissa on systeemiin haluttu lisätä uusi ns. nollataso niitä tapauksia varten, jotka eivät yllä edes alkuperäisen tulkinnan mukaiselle tasolle 1 (Senk 1989; Clements & Battista 1992). Viidettä van Hielen tasoa ei systeemissä ole pidetty erityisen tarpeellisena ainakaan koulumatematiikan kannalta. Nollannen ja viidennen van Hielen tason problematiikkaan palataan tarkemmin tasojen lukumäärää käsittelevässä luvussa 2.2.2.1. Jatkossa käytämme van Hielen tasoille lyhenteitä vH1, vH2, jne.

Tässä työssä käytettävät tasojen nimitykset poikkeavat jonkin verran aikaisemmasta kotimaisesta käytännöstä. Aiemmin tasoille on tavallisesti käytetty Pehkosen (1982, 184) esittämiä suomalaisia vastineita Hofferin (1981, 13—14) käyttöön ottamille tasojen englanninkielisille nimityksille recognition, analysis, ordering, deduction ja rigor eli tunnistamisen taso, analysoinnin taso, järjestämisen taso, päättelyn taso ja aksiomisysteemin ymmärtämisen taso. Hofferin ehdottamat nimitykset eivät nekään ole vakiintuneet englantilaiseen kielenkäyttöön vaan nimityksissä esiintyy edelleen kirjavuutta. van Hiele käyttää kolmelle ensimmäiselle tasolle, jotka hän nimeää, nimityksiä visualization, description ja theoretical level (van Hiele 1986, 53 ja 83—84). Viimeaikaiset julkaisut käyttävät alkuperäisille van Hielen tasoille useimmiten seuraavia nimityksiä: visualization tai recognition, analysis (of properties), informal deduction tai abstraction, (formal) deduction, rigor tai formal discernment of mathematics (vrt. Crowley 1987, 2—3; de Villiers & Njisane 1987, 117; Denis 1987, 38—39; Gutiérrez ym. 1991a, 242). Clements ja Battista (1992, 427—428) käyttävät laajassa katsauksessaan tasoille nimiä visual level, descriptive/analytic level, abstract/relational level, formal deduction level ja rigor/metamathematical level.

Tasojen uusilla nimityksillä on eräitä etuja aikaisempaan käytäntöön nähden. Ensimmäisen tason entinen nimitys, tunnistaminen, on ollut harhaanjohtava. Siitä on helposti voinut syntyä vaikutelma, että tälle perustasolle luokitellun henkilön tulisi todella pystyä tunnistamaan virheettömästi geometriset peruskuviot erikoistapauksineen. Tämänlaatuinen tunnistaminen ei tällä tasolla kuitenkaan yleensä ole mahdollista (van Hiele 1959 Fuys ym:n 1984, 245 mukaan). Visualisointi nimityksestä ei tällaista vaikutelmaa synny eikä sen kautta tarpeettomasti korosteta tunnistamistoimintoa muita visuaalisperusteisia toimintoja tärkeämmäksi.

2.1.3 Tasojen yleistys

Kuten edellä on todettu van Hielen teoriaa on varsinaisesti käytetty kuvaamaan oppilaan geometrisen ajattelun kehittymistä. Hoffer (1983) luonnostelee esimerkinomaisesti teorian sovellukset myös logiikan, geometristen transformaatioiden ja reaalilukujen ominaisuuksien oppimisen kuvaamiseksi. Kaikissa näissä sovelluksissa kehitystasot muodostavat samantyyppisen hierarkkisen struktuurin kuin alkuperäisessä van Hielen teorian mukaisessa systeemissä. Itse asiassa Hoffer pyrki osoittamaan, että kukin tasoista täyttää rakenteensa puolesta ne muodolliset vaatimukset, jotka matematiikassa asetetaan ns. kategorialle. Tällöin siirtyminen tasolta toiselle on tämän näkemyksen mukaisesti matemaattisesti tarkastellen kuvattavissa funktorina. Seuraavassa esitetään yleisessä muodossa kullakin kehitystasolla tarkasteltavina olevat objektit. Objektien välisten suhteiden eli tarkasteltavan kategorian ns. nuolten yleiseen määrittelyyn Hoffer ei puutu, vaan tyytyy esittämään näistä vain muutaman esimerkin (emt.). Tarkastelun kohteina ovat tasolla

tasolla I:	opittavan kokonaisuuden peruselementit,
tasolla II:	peruselementtien ominaisuudet,
tasolla III:	peruselementtien ominaisuuksien suhteita kuvaavat lauseet,
tasolla IV:	ominaisuuksien suhteita kuvaavien lauseiden jonot,
tasolla V:	edellisen tason jonojen ominaisuudet.

Kategoriateoreettista tarkastelutapaa Hoffer perustelee sillä, että näin van Hielen teorian keskeisin sisältö saadaan abstrahoiduksi. Tämän jälkeen teoria on helpommin sovellettavissa muihinkin aihepiireihin kuin vain geometriaan (Hoffer 1983). Hofferin lisäksi ainakin Halford ja Wilson (1980) ovat vastaavalla tavalla koettaneet soveltaa kategoriateoriaa henkisen kehityksen struktuurin havainnollistamiseksi kognitiivisen kehityksen teoriassaan.

2.1.4 Teoriaan sovitettu opetusmetodi

Keinoksi nostaa oppilaan geometrisen ajattelun taso tietyltä tasolta seuraavalle Pierre van Hiele ja Dina van Hiele-Geldof ehdottivat viisivaiheista opetusmenetelmää, jossa oppilaan itsenäisen toiminnan osuutta vaihe vaiheelta lisätään. Opetusmetodin käytännön kehitystyöstä ja kokeilusta vastasi lähinnä Dina van Hiele-Geldof. Opetusmenetelmä, jolla tietyn van Hielen tason tyyppisesti ajattelevaa oppilasta totutetaan seuraavan van Hielen tason mukaiseen tarkastelutapaan, rakentuu seuraavista osavaiheista:

> *Tutkiva kysely (inquiry)* Opettaja keskustelee oppilaidensa kanssa opiskeltavasta aihepiiristä ja yrittää samalla saada selville, millainen käsitys oppilailla tässä vaiheessa on opittavan kokonaisuuden keskeisistä käsitteistä. Samalla opettaja koettaa luoda oppilaille alustavan näkemyksen opiskeltavasta asiakokonaisuudesta.
>
> *Suunnattu orientoituminen (directed orientation)* Opettaja teettää oppilailla huolellisesti suunnitellun sarjan tehtäviä, jotka auttavat oppilaita tajuamaan, mihin opetuksella pyritään. Oppilaat perehtyvät opiskeltavan aihepiirin rakenteeseen. Monivaiheisia suorituksia edellyttäviä tehtäviä ei yleensä käytetä.
>
> *Tarkentaminen (expliciting)* Oppilaat koetetaan saada mahdollisimman itsenäisesti tarkentamaan käyttämäänsä sanastoa ja ilmaisemaan käsityksensä opiskeltavan aihepiirin rakenteesta. Tutkittavien asioiden väliset suhteet alkavat muotoutua oppilaiden mielessä.
>
> *Vapaa orientoituminen (free orientation)* Oppilaat saavat suoritettavakseen tehtäviä, jotka ovat joko monivaiheisia tai sellaisia, jotka voidaan ratkaista monella tavalla. Oppilaat tottuvat etsimään ongelmiin omia ratkaisuja. Opiskeltavien asioiden väliset suhteet alkavat saada oppilailla eksplisiittisen merkityksen.
>
> *Kokoaminen (integration)* Opettaja tekee yhteenvedon opiskellusta kokonaisuudesta pyrkien näin luomaan oppilaille kokonaisnäkemyksen opiskellusta asiasta. Tässä yhteydessä kuitenkin huolellisesti vältetään käyttämästä opiskeltuun aihepiiriin kuulumattomia tai häiritseviä käsitteitä. (Hoffer 1983.)

Kuten Hoffer (1983) toteaa, edellä luonnehdittu opetusmenetelmä ja Dienesin (1973) esittämä kuuden osavaiheen matematiikan oppimisen sykli muistuttavat monessa suhteessa toisiaan. Dienesin järjestelmässä opetus etenee konkreetin materiaalin käsittelystä vähitellen symboliseen ja abstraktiin ajatteluun. Dienesin oppimissyklin kahdessa ensimmäisessä vaiheessa eli vapaan leikin ja strukturoitujen pelien vaiheissa oppilas tutustuu konkreetin materiaalin avulla näissä esiintyviin struktuureihin. Tässä yhteydessä siis oppimisen perustan muodostavat struktuurit, joita Pierre van Hiele ja Dina van Hiele-Geldof (1958) kuvaavat visuaalisiksi. Syklin kahta ensimmäistä vaihetta vastaavat van Hielen teorian tutkivan kyselyn ja suunnatun orientaation vaiheet. van Hielen teorian tarkentamisen vaihetta voidaan verrata Dienesin oppimissyklin vaiheisiin 3, 4 ja 5, joissa opitaan erottamaan ominaisuuksia ja ilmaisemaan ajatukset verbaalisessa muodossa. Dienesin kuudetta oppimissyklin vaihetta, missä edetään aksiomaattisen teorian asteelle, on vaikea suhteuttaa van Hielen teoriaan.

Dina van Hiele-Geldofin kehittämän ja kokeileman opetusmetodin nykyaikaistettuna versiona voidaan pitää hollantilaisen tutkijan Treffersin kehittämää realistisen opettamisen teoriaa. Teoriassaan Treffers pyrkii soveltamaan Hans Freudenthalin (1983) didaktisen fenomenologian mukaista lähestymistapaa van Hielen teorian kuvaukseen opittavan sisältöalueen oppimiseen liittyvästä yleispiirteittäisestä tiedonrakenteiden kehityskulusta. Treffers kutsuu tarkastelemiaan van Hielen tasoille analogisia tasoja (1) fenomenologiseksi tasoksi, (2) lokaalin deskription tasoksi ja (3) oppiaineen systematiikan tasoksi. Tasoja voidaan käyttää hyväksi suunniteltaessa opetettavalle kurssille yleisstruktuuria. Kunkin tason sisällä pyritään erityisesti edistämään ns. progressiivista matematisointia, jolla tarkoitetaan prosessia, jolla edesautetaan oppilaiden mahdollisuutta konstruoida ja keksiä uudelleen matemaattisia ideoita. Treffersin esittelemässä opetusmetodissa korostuvat: (1) fenomenologinen tutkiminen, jolla pyritään luomaan järjestystä tutkittaviin ilmiöihin ja oppimaan keinoja tällaisen järjestyksen luomiseksi, (2) keinojen etsiminen intuitiivisen tarkastelun ja systemaattisen tarkastelun välisen kuilun voittamiseksi, (3) oppilaiden omakohtainen osallistuminen tiedon konstruoimiseen, (4) vuorovaikutuksen tehostaminen oppimistilanteissa ja (5) kokonaisvaltainen näkökulma oppimiseen, johon päästään sovellus- ja ongelmakeskeisellä opetuksella (ks. Gravemeijer 1994, 451—452).

2.1.5 Teorian päähypoteesit

van Hielen teoriaan sisältyy seuraavat perusolettamukset geometrisen ajattelun kehityskulusta (Clements & Battista 1992, 426—427; Crowley 1987, 4—5; Fuys ym. 1988, 5—8; Silfverberg 1986, 10):

1. Geometrisen ajattelun kehitys on epäjatkuvaa, mikä ilmenee peräkkäisinä van Hielen tasoina. Tasojen järjestys on kiinteä eikä mitään tasoa voi kokonaan ohittaa. Korkeammalle tasolle siirtyminen edellyttää aina ymmärrystä, joka on kehittynyt edeltävillä tasoilla.
2. Kehityskulku suuntautuu implisiittisestä eksplisiittiseen. Jokaisen tason toiminta on seuraavan tason analysoinnin kohteena ts. se, mikä edeltävän tason ajattelussa on implisiittistä, muuttuu seuraavalla tasolla eksplisiittiseksi.

3. Kullakin tasolla on sille ominainen symbolirakenteensa ja eri tasoilla olevien yksilöiden välillä vallitsee ymmärryskuilu. Jokaisella tasolla on juuri sille tasolle ominaiset kielelliset symbolinsa ja näiden symbolien välinen suhdeverkostonsa. Jos oppilaan ajattelu on eri tasolla kuin mille opetus on suunnattu, niin toivotunlaista edistymistä ei tapahdu. Erityisesti, jos opetus etenee oppilaan tasoa ylemmän tason mukaisesti, niin oppilas ei voi ymmärtää kunnolla opetusta. Ns. tason reduktio eli oppisisällön opettaminen todellista tasoa alempaan ajatteluun kuuluvin menetelmin (esim. ulkomuistiin perustuen) on mahdollista, mutta se ei johda todelliseen ymmärrykseen eikä nosta oppilaan geometrista ajattelua.
4. van Hielen tasot ovat ensi sijassa oppimisprosessista johtuvia. Oppilaan geometrisen ajattelun kehitys on enemmän riippuvainen käsitellyistä oppisisällöistä ja opetuksen laadusta kuin oppilaan iästä ja biologisesta kypsymisestä.
5. Geometrisen ajattelun kehitystä on mahdollista tukea ja edistää sopivalla opetusmetodilla. Opetus, joka sisältää edellä käsitellyt tutkivan kyselyn, suunnatun orientaation, tarkentamisen, vapaan orientaation ja kokoamisen vaiheet, edesauttaa merkittävästi siirtymistä van Hielen tasolta toiselle.

Erityisesti tasojen hierarkiaa koskevan hypoteesin (1.) pätevyyttä on epäilty uudemmassa tutkimuksessa varsinkin, kun siihen usein on liitetty oletus, että tasot kuvaavat oppilaan geometrisen ajattelun laatua yleisesti. Näihin kysymyksiin palaamme luvuissa 2.2 ja 2.3. Ensimmäisen hypoteesin pätevyyttä koetellaan myös tämän tutkimuksen empiirisessä osassa.

2.2 Teoriaa käsittelevät tutkimukset

2.2.1 Laajojen tutkimusprojektien yleiskuvaus

Uudelleen herännyt kiinnostus van Hielen teoriaan johti Yhdysvalloissa kolmen merkittävän geometrian oppimista koskevan tutkimusprojektin perustamiseen 1970- ja 1980-lukujen taitteessa. Näitä tutkimusprojekteja on sittemmin totuttu kutsumaan keskuspaikkojensa mukaisesti Brooklynin, Chicagon ja Oregonin tutkimusprojekteiksi. Koska näihin projekteihin sisältyneet tutkimushankkeet ovat selvästi laaja-alaisempia kuin monet myöhemmät van Hielen teoriaa käsitelleet yksittäiset tutkimukset, projektien yleispiirteet esitellään omana lukunaan johdantona seuraaville luvuille, joissa van Hielen teoriaan kohdistuneita tutkimuksia käsitellään tutkimusongelmiensa mukaisesti ryhmiteltyinä. Mainittujen projektien yksittäisiä tutkimustuloksia käsitellään tarkemmin aiheidensa mukaisesti myöhemmissä luvuissa.

Oregonin projekti (Assessing Children's Intellectual Growth in Geometry Project) asetti tutkimustehtäväkseen seuraavien pääongelmien selvittämisen:

1) Ovatko van Hielen tasot käyttökelpoisia kuvattaessa oppilaiden ajattelua geometristen tehtävien suoritusprosessissa?

2) Voidaanko tasot operationaalistaa kuvaamaan oppilaan toimintaa?

3) Voidaanko kehittää haastattelumenetelmä, jonka avulla kyetään havaitsemaan geometristen tehtävien suorituksessa käytetyt eri tasoille tyypilliset päättelyprosessit?

Projekti tuotti melko yksityiskohtaisen kriteeristön van Hielen tasojen tunnusmerkeistä (Burger & Shaughnessy 1986, 43—45) ja kehitti toimivat menetelmät mm. sellaisten geometristen perustoimintojen kuten kuvion piirtämisen, tunnistamisen, määrittelyn ja lajittelun tutkimiseen. Itse sovelsin menetelmiä myöhemmin selvittäessäni geometrisen käsitteenmuodostuksen piirteitä eri ikäisillä oppilailla (Silfverberg 1984a). Oregonin projektin yhteydessä kerätty haastatteluaineisto sisälsi runsaasti tapauskohtaista tietoa geometrisen ajattelun kehitysvaiheista. Tutkimuksissa haastateltiin 45 koehenkilöä lastentarhaikäisistä lapsista college-opiskelijoihin. Hofferin ja Burgerin yleisluontoisten julkaisujen kautta van Hielen teoria tuli 1980-luvun alkupuolella tunnetuksi myös matematiikan opettajien parissa (Burger 1981; Hoffer 1981; 1983). Hoffer kirjoitti lisäksi van Hielen teoriaan pohjaavan geometrian oppikirjan (Hoffer 1979).

Toisen yhdysvaltalaisen van Hielen teorian tutkimusprojektin, Brooklynin projektin, tutkimusintressit olivat moninaiset. Projektin yhteydessä tehtiin laaja perusselvitys van Hielen teoriasta. Sen yhteydessä keskeisin teorian alkuperäislähteistö käännettiin englannin kielelle (Fuys ym. 1984) ja kerätyn alkuperäislähteistön avulla laadittiin tasojen kriteeristöt tulkintaesimerkkeineen (Burger & Shaugnessy 1986; Fuys ym. 1988; Geddes 1981). Projektin yhteydessä kokeiltiin Dina van Hiele-Geldofin väitöskirjatutkimuksessaan käyttämiä opetusmenetelmiä. Tätä varten laadittiin kolme erillistä opetusmoduulia (Shaughnessy & Burger 1985; Burger & Shaugnessy 1986; Fuys ym. 1988). Täsmällisemmin sanottuna projekti asetti tavoitteikseen

1) kuvata selkeästi van Hielen tasojen tunnusmerkit alkuperäislähteiden perusteella,

2) tutkia kuudes- ja yhdeksäsluokkalaisten oppilaiden geometrista ajattelua tasojen antamassa viitekehyksessä,

3) määrittää, kuinka hyvin kuudensien ja yhdeksänsien luokkien oppilaiden opettajat voidaan opettaa tunnistamaan van Hielen tasot oppilaiden ajattelusta ja oppimateriaaleista,

4) arvioida oppikirjojen tekstianalyysiä käyttäen, miten hyvin geometrian oppikirjojen tekstit ovat sopusoinnussa van Hielen teorian olettamusten kanssa.

Koska projekti käytti oppilashavainnoinnissa kliinistä haastattelua, otoskoko tutkimuksessa rajoitettiin pieneksi. Kumpaankin ikäryhmään kuului kuusitoista oppilasta. Projektin tutkimuksista on julkaistu perusteelliset selvitykset (Fuys ym. 1985; 1988).

Chicago-projekti CDASSG (Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project) poikkesi tutkimusasetelmaltaan Oregonin ja Brooklynin projekteista, sillä haastatteluiden ja suoran oppilashavainnoinnin sijasta tiedot kerättiin noin 2900 oppilaalta kirjallisin kyselyin. Laajan otoksen avulla pyrittiin saamaan yleistettävää tietoa van Hielen tasojen jakaumasta eri ikäisillä oppilailla. CDASSG-projektin rinnalle syntyi myöhemmin didaktisesti orientoitunut projekti The University of Chicago School Mathematics Project UCMSP, jonka tuloksena syntyi mm. ns. SPUR-metodiin perustuva (Skills, Properties, Uses, Representations) lähes 900 sivuinen geometrian oppikirja (Coxford ym. 1993) ja uudentyyppinen matematiikan opetussuunnitelma Everyday Mathematics Program luokkatasoille K-6. Opetussuunnitelman toimivuudesta geometrian opetuksen osalta on raportoinut Carroll (1998).

Chicago-projektissa selvitettiin erityisesti van Hielen tasojen mitattavuutta ja teorian ennustavuutta. Projektin yhteydessä laadittiin joukkotestaukseen soveltuva tasojen 30 osioinen mittari, johon tässä tutkimuksessa viitataan myöhemmin yleensä joko CDASSG-testin tai Usiskinin testin nimellä. Testi lienee edelleen eniten käytetty van Hielen tasojen mittaväline. Usiskinin ja Senkin (1990, 242) mukaan testiä on käytetty yli sadassa eri tutkimuksessa. Projektin yhteydessä testiä käytettiin tutkittaessa van Hielen tasojen ja erilaisten koulusaavutusindeksien välisiä korrelaatioita ja normaalin geometrian opetuksen vaikutusta oppilaiden van Hielen tason muutokseen sekä tasojen ennustavuutta geometristen todistustehtävien oppimisen suhteen (Usiskin 1982; Senk 1983, 1985; 1989).

Oregonin, Brooklynin ja Chicagon projektit ovat antaneet virikkeitä jokseenkin kaikelle myöhemmälle van Hielen teorian tutkimukselle. Projektien yhteydessä nousi esille monia teorian jatkokehittelyn ja soveltamisen kannalta keskeisiä kysymyksiä, joihin monet projektien ulkopuoliset tutkimukset ovat myöhemmin etsineet vastausta. Tällaisia keskeisiä kysymyksiä ovat olleet mm. teorian yleistettävyys alkuperäisen sovellusalueen eli tasogeometrian ulkopuolelle, kuten esimerkiksi avaruusgeometriaan (Gutiérrez & Jaime 1987; Gutiérrez ym. 1988; 1991a; 1991b), transformaatiogeometriaan (Soon 1989), funktio-oppiin (Masami 1988; Land 1990) sekä kemiaan (ten Voorde 1979 Fuys ym:n 1988 mukaan), tasojen sisältöriippuvuus alkuperäisen sovellusalueen sisällä (Mayberry 1983), tasojen mahdollinen päällekkäisyys (vrt. Gutiérrez ym. 1991a) ja vaikeudet tasojen identifioitavuudessa (vrt. de Villiers & Njisane 1987). Kysymyksiin palataan seuraavissa luvuissa tarkemmin.

2.2.2 van Hielen tasoihin kohdistuneet tutkimukset

2.2.2.1 Tasojen validisuus ja lukumäärä

Yleisesti ottaen voidaan todeta, että kaikissa van Hielen tasojen olemassaoloa testaavissa empiirisissä tutkimuksissa itse perusväite tasojen olemassaolosta suurinpiirtein senkaltaisina kuin teorian kehittäjät ne aikoinaan kuvasivat näyttää saavan tukea neljän ensimmäisen tason osalta. Esimerkiksi kaikkien kolmen mittavan van Hielen teoriaan kohdistuneen yhdysvaltalaisen tutkimusprojektin loppuraporteissa todetaan neljän ensimmäisen tason tunnusmerkkejä löytyvän oppilaiden geometrisesta ajattelusta niin selvästi, että valtaosa oppilaista voidaan luokitella näille tasoille ja että tasojen antama kuvaus sopii geometrisen ajattelun kehityksen malliksi (Usiskin 1982, 80; Burger & Shaugnessy 1986, 31, 46; Fuys ym. 1988, 133). Muissakin tutkimuksissa tasojen määritys on onnistunut yleensä hyvin (Denis 1987, 65—69; Mayberry 1983, 63; Silfverberg 1986, 74).

Viidennen tason olemassaoloa on epäilty ainakin kahdesta syystä. Ensinnäkin tason olemassaolosta niin kuin myös sen puutteesta on niukalti näyttöä, sillä tälle tasolle ei yleensä ole yltänyt juuri kukaan testatuista koehenkilöistä. Abstraktin luonteensa vuoksi viidennen van Hielen tason tutkiminen ei ole erityisemmin motivoinutkaan kouluikäisten lasten geometrisen ajattelun kehityksestä kiinnostuneita tutkijoita. Silloinkin, kun viidettä tasoa on tutkittu, joko tason olemassaolo tai sen mitattavuus käytetyin mittavälinein on asetettu kyseenalaiseksi (Usiskin 1982, 32, 79; Wilson 1990, 233). Usiskinin mielestä van Hiele ja van Hiele-Geldof itsekin kuvasivat viidennen tason epäselvästi (Usiskin 1982, 13, 29). Tasojen luokitusta onkin haluttu yhtäältä typistää jättämällä mallista ylin taso pois (vrt. esimerkiksi Teppo 1991, 210) ja toisaalta tarkentaa alimpien tasojen osalta lisäämällä malliin joko uusia tasoja tai entisten tasojen alatasoja (de Villiers & Njisane 1987). Erityisesti niitä oppilaita varten, jotka eivät yllä edes alkuperäisen tulkinnan mukaiselle ykköstasolle systeemiin on haluttu lisätä uusi nollataso (Senk 1989, 319).

Nollannen tason tarpeellisuus on noussut esille erityisesti tutkittaessa alle kouluikäisten lasten geometrisen ajattelua. Esimerkiksi Clementsin ja Battistan tutkimuksessa, jossa selvitettiin päiväkoti-ikäisten lasten käsityksiä geometrisista muodoista, nollas taso osoittautui tarpeelliseksi. Clementsin ja Battistan tutkimuksessa kukin 97 lapsesta osallistui aluksi yksilöhaastatteluun, jossa lasta pyydettiin tunnistamaan, mitkä paperilla esitetyistä kuvioista olivat tietyn tyyppisiä geometrisia peruskuvioita (ympyröitä, kolmioita, neliöitä, neljäkkäitä tai suorakulmioita). Tämän jälkeen lapselta kyseltiin perusteluja sille, miksi hän piti tai ei pitänyt jotakin esitettyä kuviota sinä peruskuviona, jota kulloinkin käsiteltiin. Clementsin ja Battistan mukaan heidän keräämänsä aineisto osoitti, että ensimmäistä varsinaista van Hielen tasoa edeltää eräänlainen nollataso, ns. esirepresentationaalinen taso. Tällä tasolla olevat lapset eivät yleensä osaa erottaa geometrisia muotoja virheettömästi toisistaan, mutta lasten kuvioita koskeva päätöksenteko perustuu kuitenkin relevantteihin, vaikkakin kehityksensä alkuvaiheessa oleviin, visuaalisiin skeemoihin. Näiden valikoima on yleensä tässä vaiheessa vähäinen. Lapsi voi esimerkiksi erottaa käyräviivaiset ja monikulmiomaiset kuviot toisistaan, jolloin hän ei erehdy kutsumaan ympyröitä neliöiksi tai päinvastoin, mutta lapsi voi silti pitää neliöitä kolmioina tai päinvastoin. Käsitteiden rajaus on tällaisissa tapauksissa väljää. Ympyräviiva on suljettu ja pyöreä ennemminkin kuin avoin ja kulmikas, neliössä on neljä lähes samanpituista sivua jne. (Clements & Battista 1991, 225; Clements ym. 1997, 165—166).

van Hielen tasojen validoinnissa keskeinen kysymys on ollut niiden kriteerien määrittäminen, joiden perusteella tasoille sijoittaminen tehdään. Kuten tasojen sisällön yleiskuvauksen yhteydessä todettiin, yleensä kriteeristöt on pyritty rakentamaan P. van Hielen ja D. van Hiele-Geldofin esittämien tasojen karakterisointien varaan. Laadittuja kriteeristöjä on pyritty varmentamaan sekä vertaamalla niitä toisten tutkijoiden laatimiin kriteereihin että pyytämällä kriteereistä asiantuntijalausuntoja. Näin ovat menetelleet esimerkiksi Fuys ym. (1988), Mayberry (1983) ja Soon (1989). Varsin vähän on kuitenkin kokeellisesti selvitetty sitä, kuinka hyvin kriteereihin perustuvat teoreettisesti samalle tasolle sijoitetut testiosiot todella osuvat myös samalle empiiriselle tasolle. Mainitsen seuraavassa kolme tällaista tutkimusta. Silfverberg (1986) kritisoi tulostensa perusteella lähinnä ensimmäisen tason kriteerinä käytetyn kuvion tunnistamisen tulkintaa. Tälle tasolle tyypillisen kokonaisvaltaisen hahmottamisen Silfverberg katsoo edellyttävän väljempää kriteeriä kuvion tunnistamisen suhteen kuin mitä aiemmin on käytetty (Silfverberg 1986, 59—62, 76). Myös Clements ym. (1997) kritisoivat ensimmäiselle varsinaiselle van Hielen tasolle, visualisoinnin tasolle, esitettyjä karakterisointeja. Heidän mukaansa tällä geometrisen ajattelun kehitystasolla oleva lapsi ei tarkastele geometrisia kuvioita siinä määrin visuaalisina jakamattomina kokonaisuuksina kuin yleensä on oletettu, vaan lapsi ennemmin tukeutuu sekä kuvioiden visuaalisiin skeemoihin että tietoon, jota hänellä on kuvioiden osista ja ominaisuuksista. Heidän mielestään tason nimeksi sopisikin visuaalista tasoa paremmin synkreettinen taso. Wilson (1990) tarkastelee empiiristen tasojen erottumista toinen toisistaan eli testiosioiden segmentoitumista lähinnä mittavälineeltä vaadittavien ominaisuuksien kannalta eikä erityisemmin puutu van Hielen tasojen tulkintaan sinänsä. Wilsonin tarkasteluihin palataan vielä seuraavassa luvussa käsiteltäessä tasojen erillisyyden problematiikkaa.

Laajassa empiirisissä tutkimuksessaan, johon osallistui 4015 high school -tasoista oppilasta, de Villiers ja Njisane päätyivät siihen tulokseen, ettei yleisesti käytetty kuvioiden hierarkkisen luokittelun hallinta kolmannen van Hielen tason eli ominaisuuksien järjestämisen tason kriteerinä ole ongelmaton, vaikka sitä on edellytetty niin Brooklynin, Chicagon kuin Oregonin projektin käyttämissä tasojen kriteeristöissä (Fuys ym. 1988, 65; Usiskin 1982, 11; Burger & Shaugnessy 1986, 44) ja se on perusteltavissa alkuperäislähteiden avulla. de Villiersin ja Njisanen (1987, 117) mukaan edes alkuperäislähteet eivät anna luokkainkluusion sijoituskysymykseen täysin yksiselitteistä vastausta. Koska de Villiersin ja Njisanen tutkimuksessa kuviotyyppien välisen luokkainkluusion hallinta osoittautui jopa vaativammaksi kuin formaalin deduktion hallinta, de Villiers ja Njisane katsovat, että luokkainkluusion sijoittumista van Hielen tasojen suhteen on pidettävä edelleen avoimena kysymyksenä (emt. 1987, 121—122). Lisähämmennystä problematiikkaan tarjoavat Kayn väitöskirjassaan esittämät tulokset, joiden mukaan sopivalla deduktiivistyyppisellä lähestymistavalla jo koulun ensiluokkalaiset voivat oppia nelikulmiokäsitteisiin sisältyvät luokkainkluusiot (Kay 1986). Tässä lienee kuitenkin kysymys luokkainkluusion oppimisesta käsitteellisesti yksinkertaisemmalla tasolla kuin sellaisella, mitä sillä on normaalisti tasojen kriteeristöjen yhteydessä tarkoitettu. Tällaista tason reduktion mahdollisuutta on pohtinut myös van Hiele (1986, 87). de Villiersin ja Njisanen esiin nostama kysymys on tasojen diagnostisoinnin kannalta merkittävä, sillä luokkainkluusion hallintaa on käsitteen määrittelykyvyn ohella pidetty yhtenä tunnusomaisimmista kolmannen vH-tason ominaisuuksista ja sen on todettu toimivan erinomaisena erottelijana tasojen 2 ja 3 välillä (Silfverberg 1986, 62).

2.2.2.2 Tasojen hierarkkisuus ja erillisyys

van Hielen teoriaan sisältyy vH-tasojen sisällönkuvauksen lisäksi keskeisenä piirteenä oletus, että tasot toistuvat poikkeuksetta aina samassa järjestyksessä ja muodostavat näin hierarkkisen systeemin. Tätä tasojen hierarkkisuusoletusta on tutkittu runsaasti käyttäen tilastollisena tutkimusmenetelmänä tavallisesti Guttmanin skalogrammianalyysiä. Tällöin kutakin tasoa tutkitaan kokonaisuutena tason kriteerin joko ylittyessä tai jäädessä ylittymättä. Kokonaiset tasot muodostavat hierarkian, mikäli pääsääntöisesti käy niin, että ylemmän tason kriteerin ylittyessä myös kaikkien sitä alempien tasojen kriteerit ylittyvät. Minimirajana tasojen hierarkkista suhdetta kuvaavalle indeksille *Rep* (coefficient of reproducibility) on yleensä pidetty arvoa 0,90 (Torgeson 1967, 323). Raportoidut van Hielen tasojen *Rep*-kertoimien arvot ovat sijoittuneet väleille 0,91—1.00 (Denis 1987, 70; Mayberry 1983, 63; Silfverberg 1986, 56), joten globaalisti tasot näyttävät muodostavan hierarkian. Tällaista kokonaisten tasojen hierarkkisuutta pitävät osoitettuna myös Burger ja Shaugnessy (1986, 42), Usiskin (1982, 80) ja Wilson (1990, 233). Kaksi viimeksi mainittua katsovat kuitenkin hierarkkisuudesta saadun näyttöä vain neljän ensimmäisen tason muodostaman systeemin osalta. Kolmen ensimmäisen tason muodostama systeemi todettiin hierarkiaksi myös Brooklynin projektin tutkimuksissa, joissa neljättä ja viidettä tasoa ei ollut lainkaan mukana (Fuys ym. 1988, 180).

Teorian kehittäjien alkuperäisen tulkinnan mukaan eri tasoilla havaittava ajattelu on globaalisti erityyppistä ja sillä tavoin yhteensovittamatonta, etteivät eri tasoilla olevat voi täysin ymmärtää toinen toisiaan. Alkuperäisen tulkinnan mukaan geometrisen ajattelun kehitys on lisäksi epäjatkuvaa, mikä ilmenee hyppäyksenomaisina siirtymisinä tasoilta toiselle (van Hiele & van Hiele-Geldof 1958, 75). Myöhemmässä teoksessaan "Structure and Insight" van Hiele näyttää kuitenkin lieventäneen kantaansa geometrisen ajattelun kehityksen epäjatkuvuuteen nähden ja antavan aikaisempaa suuremman merkityksen myös tasojen välisille siirtymäkausille eli periodeille (van Hiele 1986, 63). Uudempi vH-tasojen tutkimus on myös alkanut tuottaa empiiristä tietoa näiden periodien ominaispiirteistä (Matsuo 1993; Pegg & Baker 1999).

Siitä huolimatta, että monet tutkijat ovat todenneet van Hielen tasojen kuvaavan kohtalaisen hyvin geometrisen ajattelun kehityskulkua, osaa testatuista koehenkilöistä on ollut vaikea sijoittaa millekään yksittäiselle vH-tasolle (Burger & Shaughnessy 1986, 45; Shaughnessy & Burger 1985, 423; Lunkenbein 1980, 174; Fuys ym. 1988, 181; Usiskin 1982, 33). Nämä koehenkilöt ovat ikään kuin epävakaassa siirtymätilassa tasojen välissä. Välillä geometrinen ajattelu osoittaa ylemmän tason piirteitä, välillä taas suoritettavan tehtävän vaikeustason kohotessa siirrytään käyttämään alemman tason ajattelutapaa.

Myös vH-tasojen mittaamisessa käytettyjen testiosioiden heikko segmentoituminen omille tasoilleen on vihjannut siihen mahdollisuuteen, että osa koehenkilöistä sijoittuukin tosiasiassa tasojen välisille alueille eikä puhtaasti millekään yksittäiselle tasolle. Testiosioiden segmentoitumisen puutteeseen on kiinnittänyt erityisesti huomiota Wilson (1989 ja 1990). Wilson sovelsi dikotomista aineistoa varten kehittämäänsä Raschin mallin modifikaatiota eli ns. Saltus-mallia Chicago-projektin aineistoon ja osoitti, että Usiskinin testin osioiden sijoittumisessa oletetuille tasoille oli runsaasti toivomisen varaa. Samantyyppinen van Hielen tasojen testiosioiden heikohko segmentoituminen tuli ilmi myös omassa lisensiaatin työssäni, jossa segmentoitumista selvitettiin järjestysteoriaan perustuvalla analyysillä (Silfverberg 1986, 57—66). Itse asiassa nämä sekä myöhemmin Wilsonin toteamat oletettujen tasojen poikkeamat Usiskinin testissä olivat jokseenkin identtiset.

Segmentoitumisen puute voi johtua monesta syystä. Eräs mahdollisuus on se, etteivät van Hielen tasot sittenkään erotu toinen toisistaan niin jyrkästi kuin aiemmin on luultu. Kriteereinä pidetyt tasojen tunnusmerkit saattavat muodostaa monimutkaisemman rakenteen kuin puhtaasti tasoista koostuvan struktuurin. Toinen mahdollisuus on se, että teorian hypoteesi tasomaisesta rakenteesta on sinänsä kyllä oikea, mutta tasojen operationaalistaminen ei ole mittarissa onnistunut. Syynä voi olla joko mittavälineen laatijan virhe tai sitten teorian kehittäjät eivät ole kyenneet kuvaamaan tasoja riittävän hyvin, jotta ne voitaisiin kunnolla operationaalistaa. Viimeksi mainittua mahdollisuutta pohtivat Usiskin ja Senk vastineessaan kritiikkiin, jonka Wilson esitti Usiskinin kehittämästä testistä (Usiskin & Senk 1990, 244).On otettava huomioon sekin mahdollisuus, että osa kriteereinä käytetyistä ominaisuuksista on alunpitäenkin voinut olla väärällä tasolla tai että tasomainen rakenne edellyttää useampia tasoja kuin mitä van Hielet ehdottivat.

Erityisesti Gutiérrezin tutkijaryhmä on epäillyt yksikäsitteisen van Hielen tason määräämisen mahdollisuutta. Gutiérrez ym. väittävät, että useimpien tutkimiensa oppilaiden geometrisesta ajattelusta löytyy useamman kuin yhden vH-tason ajattelun tunnusmerkkejä ja näin ollen yksittäisen tason ilmoittamista parempi käytäntö olisikin ilmoittaa jokaisen tason osalta, missä määrin tälle tasolle tyypillisiä ajatustapoja kyseisellä henkilöllä esiintyy. Tutkijaryhmän suorittamien empiiristen tutkimusten tulokset sopivat silti yhteen tasojen hierarkiaoletuksen kanssa, kunhan tasoja ei pidetä jyrkästi erillisinä. Useimmat tutkituista koehenkilöistä toimivat kahden peräkkäisen van Hielen tason kriteerien mukaisesti, mutta alemman tason tunnusmerkkejä esiintyi tällöinkin ylemmän tason tunnusmerkkejä runsaammin (Gutiérrez ym. 1991a; 1991b).

2.2.2.3 van Hielen tasot geometrian osaamisen mittana

Oppilaan van Hielen taso määritetään yleensä käyttäen melko suppeata oppisisältöä, jolloin mitattu taso kuvaa ensisijaisesti tähän nimenomaiseen aihepiiriin liittyvää oppilaan geometrisen ajattelun laatua. Mitenkään selvää ei tietenkään ole, että saatu taso olisi jotenkin yleistettävissä kontekstista toiseen tai että se parhaimmillaankaan kuvaisi henkilön geometrisen ajattelun tyyppiä yleisesti. Yleensä kuitenkin alkuperäisen teorian hengen mukaisesti on haluttu toivoa, että niillä geometrisen ajattelun piirteillä, jotka tasoja mitattaessa nousevat esiin, on myös yleisempää merkitystä koko geometrian oppimisen tason arvioinnille. Tasojen yleistettävyyteen liittyvää problematiikkaa on tutkittu mm. selvittämällä mitatun tason ja koulugeometrian saavutustason välistä yhteyttä ja eri oppisisältöjen tuottamien tasojen keskinäistä vastaavuutta.

Yhdysvaltalaisten tutkijoiden Bobangon (1987), Johnsonin (1988) ja Senkin (1989) saamien tulosten perusteella voidaan yleisesti ottaen sanoa, että oppilaalle mitatun van Hielen tason ja oppilaan saavuttaman koulugeometrian yleisen osaamisen välillä on tilastollisesti merkitsevä yhteys. Havainnot perustuvat Bobangolla 72 oppilaan ja Johnsonilla yli tuhannen oppilaan tutkimusaineistoon. Senkin tutkimus oli osa Chicago-projektia. Kaikissa kolmessa tutkimuksessa van Hielen taso määritettiin CDASSG-testillä. CDASSG-testin ja geometrian oppisaavutusten väliseksi korrelaatioksi saatiin Chicago-projektissa tutkimusjakson alkaessa 0,57 ja jakson päättyessä 0,63 (Senk 1989, 315).

Chicago-projektissa tutkittiin myös normaalin secondary school - tasoisen geometrian opetuksen vaikutusta oppilaiden van Hielen tasojen muuttumiseen. Lukuvuoden lopussa suoritettujen loppumittausten yhteydessä todettiin karkeasti ottaen kolmasosan oppilaista nousseen yhden tason aloitustasosta, toisen kolmasosan vähintään kaksi tasoa ja lopulla kolmasosalla ei tasossa tapahtunut muutosta (Usiskin 1982, 37—38). Voidaan siis todeta, että tasoilla, vaikka ne mitattaisiin melko spesifiä kontekstia käyttäen, on selvä yhteys geometrian oppimistasoon laajemminkin tulkiten ja että normaali kouluopetus nostaa useimpien oppilaiden geometrisen ajattelun tasoa myös van Hielen tasojen suhteen mitattuna.

Etukäteen mitatun van Hielen tason ennustavuutta myöhempään oppimistasoon nähden on ilmeisesti eniten tutkittu geometristen lauseiden todistamistaidon saavuttamisen yhteydessä. Tällaisen tutkimuksen tarpeellisuutta selittänee se, että niissä maissa, joissa deduktiivista geometriaa edelleen opetetaan koulutasolla ainakin valinnaisena kurssina, oppilaiden lähtötaso deduktiivisen geometrian opiskeluun on usein todettu riittämättömäksi. Esimerkiksi Wirszup väitti 1970-luvun loppupuolella vaatimustason ja lähtötason välisen kuilun olleen Yhdysvalloissa high school -tasolla niin jyrkkä, että geometrian opetettavat sisällöt edellyttivät oppilaalta pääosin van Hielen neljännen tason mukaista ajattelua, kun samaan aikaan opiskelijoiden lähtötaso oli yleisimmin van Hielen ensimmäisellä tasolla (Wirszup 1976, 96). Vielä 1980-luvun alussa Usiskinin mukaan tilanne oli high school -tasolla sellainen, että niistä 40 prosentista high school -opiskelijoita, jotka valitsivat deduktiivisen geometrian kurssin, vain noin 20 % saavutti kohtuullisena pidettävän lauseiden todistamistaidon (Usiskin 1982, 88).

Tilastollinen yhteys todistustehtävistä selviytymisen ja van Hielen tason välillä on todettu useissa tutkimuksissa (Bobango 1987; Stover 1989). Stoverin tutkimus osoittaa van Hielen tason olevan jopa parempi selittäjä todistustehtävistä selviytymiselle kuin esimerkiksi induktiivinen tai deduktiivinen päättelykyky. Senk (1983; 1985; 1989) on tutkinut Yhdysvalloissa Chicago-projektin aineiston perusteella todistamistaidon oppimisen edellyttämää van Hielen tasoa. Chaiyasang (1987) on tehnyt vastaavan tutkimuksen Thaimaassa. Senkin mukaan oppilaalla, joka aloittaa deduktiivisen geometrian kurssin van Hielen nollatasolta ts. ei ylitä ensimmäisenkään tason kriteeriä, on jokseenkin olemattomat mahdollisuudet oppia lukuvuoden aikana geometrisia todistustehtäviä. Sen sijaan ensimmäiseltä van Hielen tasolta alkava oppilas todennäköisesti oppii laatimaan yksinkertaisia todistuksia, mutta omaa kuitenkin huonot mahdollisuudet oppia vaativampia todistustehtäviä. Toiselta vH-tasolta alkavalla oppilaalla on noin 50 %:n todennäköisyys menestyä kunnolla deduktiivisen geometrian kurssilla ja kolmannelta tasolta alkavalla oppilaalla vielä tätäkin parempi mahdollisuus hyvään menestymiseen. Edellä mainittuihin tuloksiin ei vaikuta se, kontrolloidaanko geometrisen oppisisällön yleinen hallinta tason testauksessa vaiko ei. Yllättävästi tasoilta vH4 tai vH5 alkavat eivät kuitenkaan menesty juurikaan paremmin kuin tasolta vH3 alkavat, mikäli muut kuin todistusta vaativat geometrian esitiedot kontrolloidaan. Minimilähtötasona deduktiivisen geometrian kurssin alkamiselle Senk pitää ominaisuuksien järjestämisen tasoa. Senkin tutkimukset perustuvat kaikkiaan 751 oppilaan tietoihin. Oppilaiden van Hielen tasot määritettiin CDASSG-mittarilla. (Senk 1989, 318—319.)

Chaiyasangin (1987) tutkimukseen osallistui peräti 3047 luokkatasojen 6—9 oppilasta, joiden van Hielen tasot määritettiin myös CDASSG-mittarilla. Chaiyasangin mukaan tasoille 0, 1 ja 2 sijoittuneet eivät kyenneet alkeellisimpiinkaan todistustehtäviin. Tässä ryhmässä päättelyt olivat usein virheellisiä, oletuksia ei kyetty erottamaan väitteistä eikä päättelyketjusta pystytty toteamaan vaihetta, jolloin todistus on valmis. Tasolta vH3 alkaen oikeat suoritukset yleistyivät, vaikkakin virhetyypit sinänsä pysyivät samantyyppisinä kuin alemmillakin tasoilla.

Lauseiden todistamistaidon oppimisen ohella toinen erityisalue, jonka yhteyksiä van Hielen tasoihin on selvitetty useammassakin tutkimuksessa, on ollut eräiden ohjelmointikielten graafisten ominaisuuksien oppiminen. Peräkkäisillä van Hielen tasoilla esiintyvät perusprosessit kuten visuaalisen kokonaishahmon tunnistus, ominaisuuksien analysointi ja ominaisuuksien järjestäminen kuvaavat näet varsin hyvin niitä taitoja, joita tarvitaan sovellettaessa esimerkiksi logokielen grafiikkakomentoja kuvioiden konstruktiotehtäviin (vrt. Clements & Battista 1989, 450—451). Koska logoympäristössä visuaalisen ja käsitteellisen aineksen koordinointi on hyvin konkreettinen toiminto, logo-grafiikan opiskelun voisi kuvitella edistävän geometrisen ajattelun kehitystä myös van Hielen tasojen mielessä. Tämänsuuntaisen tuloksia onkin saatu. Mm. Assaf (1985) toteaa väitöskirjassaan, että logolla geometriaa opiskelleiden oppilaiden vastauksissa on enemmän ylempien van Hielen tasojen tunnusmerkkejä kuin perinteisellä tavalla opiskelleilla oppilailla. Ysufin (1991) tutkimus osoitti puolestaan logo-ohjelmoinnin käyttöön perustuvan geometrian opetuksen edistävän oppilaiden geometrisen ajattelun kehitystä van Hielen tasoilla mitaten tilastollisesti merkitsevästi tehokkaammin kuin, jos opetuksessa ei käytetä logoa. Logografiikan opiskelu näyttää lisäävän oppilaiden taipumusta kiinnittää huomiota kuvion relevantteihin ominaisuuksiin ja ominaisuuksien välisiin suhteisiin. Dziak (1985) havaitsi vastaavan ilmiön Basic-kielen graafisten ominaisuuksien opiskelun yhteydessä, mutta hämmentävästi jostain syystä vain tytöillä mutta ei pojilla. Yoderilla (1988) transfer-effekti näkyi vaikutussuunnaltaan päinvastaisena kuin Assafilla. Yoder totesi, että mitä korkeampi opiskelijan vH-taso oli, sitä paremmin tämä kykeni oppimaan ohjelmointia logon avulla. Assafin ja Yoderin tutkimuksissa havaittu siirtovaikutus on todennäköisesti ilmentymä sisällöllisestä samankaltaisuudesta korkeampien van Hielen tasojen kriteerien ja logografiikan ohjelmointitekniikoiden edellyttämien prosessien välillä.

2.2.2.4 Eri oppisisällöillä mitattujen tasojen vastaavuus

Merkittävin van Hielen tasojen käsitesidonnaisuuden selvityksistä on Mayberryn (1983) tutkimus, jossa verrattiin seitsemän eri käsitteen osalta strukturoiduilla haastatteluilla määritettyjä vH-tasoja. Koehenkilöitä, jotka kaikki opiskelivat ala-asteen luokanopettajiksi, oli kaikkiaan yhdeksäntoista. Jokaiselle koehenkilölle laskettiin ns. Leikin (1966) ordinaalisen asteikon yhdenmukaisuusindeksi kuvaamaan sitä, kuinka hyvin samalle henkilölle määritetyt seitsemän eri van Hielen tasoa osuvat yhteen. Vain kahden opiskelijan tasot ylittivät yhdenmukaisuuden kriteeriksi valitun tason 0,90, joten tasot eivät Mayberryn tutkimuksen perusteella näyttäneet olevan kovin yleispäteviä eri kontekstien suhteen. Myöhemmin Denis (1987) käytti samoja Mayberryn strukturoituja haastatteluja varten kehittämiä kysymyksiä neljän käsitteen osalta omassa tutkimuksessaan ja vahvisti Mayberryn epäilykset tasojen käsitesidonnaisuudesta. Eri käsitteillä määritetyt van Hielen tasot osoittautuivat yhdenmukaisiksi toisessa kahdenkymmenen oppilaan tutkimusryhmässä vain kolmelle ja toisessa samankokoisessa ryhmässä vain neljälle oppilaalle (Denis 1987, 72—74).

On jossain määrin epäselvää, missä määrin eri oppisisällöillä mitattujen van Hielen tasojen poikkeaminen toisistaan johtuu käytetyn mittavälineen puutteista. Esimerkiksi Lawrien ja Peggin (1997) mukaan osa Mayberryn testin osioista ei näytä mittaavan sen van Hielen tason suoritusta, jota niiden pitäisi. Lawrien ja Peggin mukaan Mayberryn testi voi vinouttaa tuloksia myös siksi, että testissä ei ole samaa määrää osioita kaikille seitsemälle eri käsitteelle, joiden hallinnan suhteen van Hielen tasoja pyritään määrittämään. Myös eri van Hielen tasoille on eri määrä osioita. Lawrie ja Pegg kritisoivat Mayberryn testiä lisäksi siitä, että siinä korostetaan aivan liikaa luokkainkluusion hallintaa kolmannen van Hielen tason saavuttamisen kriteerinä (Lawrie & Pegg 1997). Tätä kautta kolmannen van Hielen tason saavuttaminen on vaikeampaa sellaisten oppisisältöjen kohdalla, joissa esiintyy hierarkkisia käsiterakennelmia, verrattuina niihin oppisisältöihin, joissa tällaisia ei juuri esiinny.

Tasojen käsitesidonnaisuus tuli ilmi myös omassa tutkimuksessani, jossa todettiin, ettei kolmio- ja nelikulmiokäsitteiden kautta saatuja van Hielen tasoja voitu pitää yhdenmukaisina (Silfverberg 1986, 71—73). Tasojen yleispätevyyden problematiikkaan on kiinnitetty huomiota myös amerikkalaisten van Hielen teorian tutkimusprojektien raporteissa (Burger & Shaughnessy 1986, 45; Senk 1989, 320). Edellisestä poiketen Fuys ym. (1988, 140) toteavat kuitenkin, että oppilaat, jotka ovat saavuttaneet tietyn van Hielen tason jonkin sisältöalueen osalta, saavuttavat suhteellisen nopeasti vastaavan tason toisellakin sisältöalueella, vaikkakin joutuisivat aloittamaan aihealueeseen tutustumisen tätä tasoa selvästi alemmalta tasolta.

Tietyllä tavalla van Hielen tasojen riippuvuus mittauksessa käytetystä kontekstista on itsestään selvää, jos kerran van Hielen tasot kuvaavat nimenomaan oppimisen myötä tapahtuvaa geometrisen ajattelun muutosta (vrt. van Hiele 1986, 50, 65). Toisaalta kuitenkin voidaan hyvällä syyllä olettaa, että tietyt geometrisen ajattelun kehitykseen liittyvät perusasiat ovat suhteellisen riippumattomia kontekstista (vrt. myös Hofferin idea tasojen yleistyksestä, Hoffer 1983, 219—220). Tällaisia ovat esimerkiksi tarkastelutavan muuttuminen kokonaisvaltaisesta ja visuaalispainotteisesta analyyttisemmäksi, perusteluiden ja määrittelyiden tarpeellisuuden ymmärtäminen, deduktiiviseen ajatteluun tottuminen, hyvän määritelmän idean tajuaminen yms. Vaikuttaakin todennäköiseltä, että tasojen mittauksessa ei voida millään välttää tasojen yleispätevyyttä laskevaa jonkinasteista sisältöriippuvuutta, vaikka samaan aikaan tasoihin sisältyykin yleispätevä komponentti, joka tulee kysymykseen lähinnä päättelyprosessien ja tiedon systematisoinnin yhteydessä (vrt. Burger & Shaughnessy 1986, 45).

2.2.2.5 Tasojen yhteys Piaget-tasoihin ja SOLO-taksonomiaan

Kuten edellä on todettu, P. van Hielen mukaan oppilaan van Hielen taso on ensisijaisesti riippuvainen oppilaan saamasta opetuksesta ja vain toissijaisesti määrin spontaanista biologisesta kehityksestä. Tasot poikkeavat tässä suhteessa merkittävästi Piagetin tasoista, joiden ilmentämässä kognitiivisen suorituskyvyn kehitysprosessissa kypsymisellä on keskeinen rooli (van Hiele 1986, 5).

Vaikka Piaget-tasojen ja van Hielen tasojen primaari aiheuttaja on erityyppinen, niin geometrisella kontekstilla määritetyt van Hielen tasot eivät silti ole täysin riippumattomia oppilaan Piaget-tasosta. Melko itsestään selvältä tuntuu olettaa, että mitä korkeampi Piaget-taso oppilaalla on sitä paremmat edellytykset tällä on omaksua kehittynyt geometrinen tarkastelutapa. Deniksen tutkimuksessa Piaget-tasojen ja van Hielen tasojen välillä havaittiin selkeä riippuvuus. Formaalien operaatioiden tasolla olevilla oppilailla van Hielen tasot olivat tilastollisesti merkitsevästi korkeammat kuin saman opetuksen saaneilla konkreettien operaatioiden tasolla olevilla oppilailla (Denis 1987, 88).

Clements ja Battista tarkastelivat Piaget-tasojen ja van Hielen tasojen suhdetta erityisesti alle kouluikäisten lasten geometrian oppimisen näkökulmasta. Clementsin ja Battistan mukaan geometrisen ajattelun tutkimuksessa on tähän asti edetty kolmella rintamalla pohjautuen joko (1) piagetilaisen traditioon, (2) van Hielen teoriaan tai (3) kognitiiviseen psykologiaan. Piagetilainen ja kognitiiviseen psykologiaan perustuva tutkimussuuntaus ovat molemmat tarkastelleet lasten ja nuorten geometrisiin käsitteisiin liittyviä käsityksiä, mutta eivät juuri ole käsitelleet opetuksellisia kysymyksiä. Van Hielen teoriaan perustuvassa tutkimussuuntauksessa opetuksen vaikutus oppimiseen on ollut keskeisesti esillä, mutta tämäntyyppinen tutkimus on suuntautunut yleensä varttuneempien oppilaiden oppimisprosessien tarkasteluun. Clementsin mukaan nuorten lasten geometrisen ajattelun tutkimuksen teoreettista perustaa ei voi rakentaa yksin van Hielen teorian varaan, vaan sitä on täydennettävä Piagetin teorialla (Clements & Battista 1992; Clements ym. 1997).

Jurdak analysoi SOLO-taksonomian ja van Hielen tasojen käsitteellistä yhteyttä jakamalla Burgerin ja Shaughnessyn (1986) käyttämät nelikulmioiden tunnistamis- ja määrittelytehtävät sekä van Hielen tasojen että SOLO-taksonomian mukaisiin luokkiin (Jurdak 1991, 60). Jurdakin analyysi osoitti, että van Hielen tasoihin ja SOLO-luokitukseen sisältyvä luokitus on struktuuriltaan hyvin samankaltainen. Jurdak vertasi luokituksia kuitenkin vain käsitteellisellä tasolla eikä testannut van Hielen tasojen ja SOLO-taksonomian mukaisten luokitusten yhteensopivuutta empiirisellä aineistolla. Pegg ja Davey (1989) ja Pegg ja Currie (1998) vertasivat van Hielen tasoja ja SOLO-taksonomiaa myös empiirisellä aineistolla. Arvioidessaan luokkatasoilla 3—7 olleiden oppilaiden geometristen kuvioiden luonnehdintoja Pegg ja Davey pitivät SOLO-taksonomiaa van Hielen tasoja käyttökelpoisempana luokitusjärjestelmänä. Peggin ja Currien tutkimuksessa taksonomioita ei pidetä toistensa kilpailijoina vaan ennemminkin toisiaan täydentävinä kuvausjärjestelminä. Pegg ja Davey (1998) kokoavat artikkelissaan van Hielen tasojen ja SOLO-luokitusten yhteyksistä artikkelin kirjoittamisajankohtaan mennessä kertynyttä tutkimustietoa. Heidän mukaansa van Hielen teoria kuvaa globaalilla tasolla geometrisen ajattelun kehitystä SOLO-taksonomiaa paremmin.

Sen sijaan SOLO-taksonomia on van Hielen teoriaa käyttökelpoisempi geometrisen ajattelun yksilöllisten erityispiirteiden tarkastelussa.

2.2.2.6 Tasojen jakaumat

Tietoja van Hielen tasojen jakaumista eri-ikäisillä oppilailla on raportoitu melko vähän. Tietenkin tällaisten tietojen informaatioarvokin on kohtalaisen vähäinen silloin, jos tiedossa ei ole minkälaisella geometrian opetuksella tasot on saavutettu. Vaikka tässä yhteydessä ei eri maiden opetukseen liittyviä kvalitatiivisia ja kvantitatiivisia eroja voida huomioida, tarkastellaan yleiskuvan saamiseksi joitakin oppilaiden van Hielen tasojen jakaumatietoja eri maista. Yleensä raportoidut tasojen jakaumat ovat antaneet varsin synkän kuvan geometrian opetuksen tehosta.

Neuvostoliitossa eri-ikäisten oppilaiden van Hielen tasoja selvitettiin jo kuusikymmentäluvun alkuvuosina. Tulokset olivat masentavia, sillä vielä viidennen kouluvuoden päättyessä 85—90 % oppilaista oli ensimmäisellä vH-tasolla. Tästä vedettiin se johtopäätös, että silloiset opetusmenetelmät ja opetussuunnitelmat tukivat heikosti oppilaiden geometristen taitojen kehitystä. Pyshkalon mukaan geometrian opetussuunnitelmia ja opetuskäytänteitä uudistettiin ja uudistamisen jälkeen kaikki oppilaat voitiin saattaa toiselle vH-tasolle kolmannen kouluvuoden loppuun mennessä (Pyshkalo 1968 Usiskinin 1982 mukaan).

Chaiyasangin (1987) tutkimuksessa suurin osa 3047 thaimaalaisista luokkatasojen 6—9 oppilaista oli ominaisuuksien analysoinnin tasolla eli tasolla vH2. Luokkatasojen 6 ja 7 välillä ei kehitystä näyttänyt tapahtuvan juuri lainkaan ja tasojen muutos oli vähäistä myös luokkien 7 ja 8 sekä 8 ja 9 välillä. Yhdeksäsluokkalaisista Chaiyasangin mukaan noin 40 % kykeni suorittamaan kaksivaiheista deduktiota edellyttävän geometrisen todistustehtävän ja vajaat 15 % moniaskelista deduktiota edellyttävän todistuksen.

Mittavin yhdysvaltalainen aineisto eri-ikäisten oppilaiden van Hielen tasojen jakaumista kerättiin Chicago-projektin yhteydessä, jossa tasot mitattiin kaikkiaan 2699 oppilaalta. Jakaumatiedot tasoista on saatavissa 2361 oppilaan otoksen osalta, joskaan ei ikäkausittain eriteltyinä. Usiskin esittää jakaumatiedot käyttäen kahta eri tasonylityskriteeriä. Kriteerinä oli joko kolme tai neljä oikeata osiota viidestä (Usiskin 1982, 99). Kriteerillä 3/5 tasot vH0, vH1, vH2, vH3, vH4 ja vH5 jakautuivat otoksessa (n = 2361) seuraavasti 6 %, 32 %, 21 %, 9 %, 2 % ja 1 %. Tasoa ei saatu määritetyksi 29 prosentille oppilaista. Kriteerillä 4/5 saatiin tasoille vH0, vH1, vH2, vH3, vH4 ja vH5 vastaavasti jakauma 30 %, 41 %, 13 %, 4 %, 0 % ja 0 %, jolloin 12 prosentille ei saatu määritettyä tasoa. Oppilaista (tosin nyt n = 2699) oli (sikäläisten luokka-asteiden mukaisesti) 7. luokalla 0 % (1 opp.), 8. luokalla 1 %, 9. luokalla 9%, 10. luokalla 56 %, 11. luokalla 26 % ja 12. luokalla 9 %.

Brooklynin projektissa tutkijoiden haastattelemat 32 oppilasta pyrittiin valitsemaan siten, että mukaan saatiin sekä rodullisesti että suorituksiltaan normaalia opetusryhmää vastaava otos. Suppeahko aineisto oppilaiden van Hielen tasoista sopii hyvin Chicago-projektin yhteydessä saatuun yleiskuvaan tämänikäisten oppilaiden van Hielen tasoista. Kuudestatoista kuudesluokkalaisista kolme oli selvästi tasolla vH1, viisi tasojen vH1 ja vH2 välissä, kolme tasojen vH2 ja vH3 välissä kuitenkin yleensä tasolla vH2 ja viisi hyvin lähellä tasoa vH3 (vrt. Fuys ym. 1988, 82—89). Kuudestatoista yhdeksäsluokkalaisesta kaksi oli selvästi tasolla vH1, seitsemän osoitti enimmäkseen tason vH2 ajattelulle tyypillisiä piirteitä ja seitsemän oli tasojen vH2 ja vH3 välillä (vrt. Fuys 1988, 101—118).

Deniksen määrittämät van Hielen tasot 40 Puerto Ricolaiselle luokkien 10—12 oppilaalle olivat jonkinverran korkeammat kuin esimerkiksi ne, joita Senkin tulokset tämänikäisille antaisivat olettaa. Deniksen tutkimuksessa oppilaiden suhteelliset osuudet van Hielen tasoilla vH1, … ,vH4 olivat tässä järjestyksessä mainiten parhaiten hallitun neliökäsitteen osalta 0,0 %, 22,5 %, 57,5 %, 15,0 % (5,0 prosentille ei saatu tasoa) ja vaikeimmaksi osoittautuneen yhtenevyyskäsitteen osalta 10,0 %, 10,0%, 45,0%, 30,0 % (5,0 prosentille ei saatu tasoa) (Denis 1987, 65—69).

Kotimaiset tiedot van Hielen tasojen jakautumisesta eri luokkatasoilla perustuvat Silfverbergin (1986) tutkimusaineistoon (n = 187). Tutkimuksessa ei tosin ensisijaisesti pyritty mittaamaan jakaumia vaan kokeilemaan tasojen mittaukseen käytettyjä mittavälineitä. Aineisto jakaantui kolmella eri mittavälineellä avulla kerättyihin osa-aineistoihin, jotka tässä esitetään yhdistettyinä. Seitsemäs- ja yhdeksäsluokkalaiset jakaantuivat van Hielen tasoille seuraavasti:

Taulukko 1. **Seitsemäs- ja yhdeksäsluokkalaisten oppilaiden maksimaaliset van Hielen tasot Silfverbergin (1986) aineistossa**

	van Hielen taso									
Luokkataso	<vH1		vH1		vH2		≥vH3		ei tasoa	
	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %
7 (n = 91)	37	40,7	40	43,9	13	14,3	1	1,1	0	0,0
9 (n = 96)	22	22,9	34	35,4	28	29,2	9	9,4	3	3,1

Testatuista seitsemäsluokkalaisista vähintään joka kolmas oppilas oli perustason eli tason vH1 alapuolella ennen yläasteen geometrian opetuksen alkamista. Perustasolla tai sen alapuolella oli noin 80 % tutkituista 7.-luokkalaisista. Yhdeksännellä luokallakin vielä noin joka neljäs oppilas oli perustason vH1 alapuolella. Ominaisuuksien analysoinnin tasolle vH2 tai ominaisuuksien järjestämisen tasolle vH3 ylti korkeintaan puolet oppilaista (emt., 74—75).

Myös opettajien omaa geometrian aineenhallintaa on mitattu van Hielen tasoilla. Mayberryn (1983) tutkimuksessa Georgia Collegessa, Yhdysvalloissa, meikäläistä ala-astetta vastaavien koulutasojen opettajiksi opiskelevien opiskelijoiden geometrisen ajattelun van Hielen tasot olivat seitsemän tutkitun aihealueen osalta aihealueesta riippuen 43—68 prosentilla visualisoinnin tai korkeintaan ominaisuuksien analysoinnin tasolla ja huomattava osa opiskelijoista, korkeimmillaan 26 prosenttia, jäi jopa alle ensimmäisen varsinaisen van Hielen tason. Lawrie ja Pegg (1997) saivat samantyyppisellä tutkimusasetelmalla Australiassa jopa jonkun verran heikommat tulokset. Afonso ym. (1999) pitävät välttämättömänä, että opettajan oma vH-taso ylittää vähintään yhdellä tasolla sen tason, jota hänen opettamansa geometrian oppisisältö edellyttää. Aineenhallinnallisten edellytysten lisäksi opettajan tulisi kyetä tulkitsemaan opetussuunnitelmaa van Hielen teorian näkökulmasta, suosia erityisesti yhteiskunnallisia tutkivia työtapoja ja olla kykenevä sekä halukas eriyttämään opetusta eri tasoilla toimivien oppilaiden vaatimusten mukaan.

2.2.2.7 Avaruusgeometrian oppimiseen liittyvät van Hielen tasot

Gutiérrezin johtama tutkimusryhmä muunsi erityisesti tasogeometriseen kontekstiin laaditut van Hielen tasojen kriteeristöt avaruusgeometrian oppimisen arviointiin sopivaan muotoon. Tutkimusryhmä kehitti monien kokeiluversioiden (Gutiérrez ym. 1988; 1991a; 1991b) kautta testin, jolla oppilaille voidaan määrittää van Hielen tasot avaruuskappaleita käsittelevällä oppisisällöllä. Testissä tutkitaan, miten oppilas hahmottaa kolmiulotteisia kappaleita, tuntee ja löytää kappaleiden geometrisia ominaisuuksia, hallitsee ominaisuuksien välisiä suhteita, osaa tehdä niistä johtopäätöksiä, määrittelee kappaleita jne. Guillén (1996) esittää yksityiskohtaisen karakterisoinnin vH-tasoille 1, 2 ja 3 avaruusgeometrian kontekstissa. Kuten aiemmin on todettu Gutiérrezin tutkimusryhmä on vahvasti epäillyt oppilaiden geometrisen ajattelun kehittymistä peräkkäisten vH-tasojen kautta porrasmaisesti taso kerrallaan. Ennemminkin useimmat oppilaat näyttävät samanaikaisesti edistyvän useammalle kuin yhdelle van Hielen tasolle tyypillisissä geometrisen ajattelun piirteissä (Gutiérrez ym. 1991a).

Gutierrezin tutkimusryhmän ohella avaruusgeometrian oppimiseen liittyviä van Hielen tasoja ovat tutkineet Saads ja Davis (1997a; 1997b). Saads ja Davis laativat kirjallisen kyselyn, jolla he määrittivät kahdenkymmenenviiden matematiikan aineenopettajiksi opiskelevan opiskelijan avaruusgeometrisiin käsitteisiin liittyvät van Hielen tasot. Kyselylomake koostui seitsemästä osiosta, joita tutkijat käyttivät toisaalta van Hielen tasojen määrittämiseen ja toisaalta sen selvittämiseen, miten eri van Hielen tasoille sijoittuneet opiskelijat mahdollisesti poikkeavat toisistaan viiden eri spatiaalisen kyvyn osatekijän eli havainnon vakioisuuden, kuvion erottamisen taustastaan, sijainnin hahmottamisen, visuaalisen diskriminaation ja tilasuhteiden havaitsemisen osalta toisistaan. Osioiden lähempi esittely löytyi ainakin tätä työtä kirjoitettaessa Internet-osoitteesta http://www.soton.ac.uk/~gary/Saads&Davis.html. Mainittuja spatiaalisen kyvyn komponentteja mm. Del Grande (1987) on pitänyt erityisen relevantteina geometrian oppimisen kannalta. Seitsemän opiskelijaa osallistui kirjallisen testin lisäksi ryhmäkeskustelun muodossa toteutettuun geometrisen kappaleen tunnistustestiin, jonka idea oli seuraava. Tunnistettava kappale oli kokeessa vain yhden opiskelijan nähtävissä, liikuteltavissa ja tunnusteltavissa, muilta se oli piilossa. Se opiskelija, joka näki kappaleen vastasi muiden kappaleesta esittämiin kysymyksiin. Niiden opiskelijoiden, joiden vuoro oli toimia kyselijöinä ja joilta kappale oli piilossa, tehtävänä oli esittää hyviä kysymyksiä kappaleen ominaisuuksista, jotta voisivat saada selville, millainen piilossa oleva kappale oli. Kukin opiskelija toimi vuorollaan kysymyksiin vastaajana ja muutoin yhtenä kyselijänä. Ryhmäkeskustelun avulla Saads ja Davis pyrkivät selvittämään, millaista geometrista käsitteistöä ja kieltä opiskelijat tilanteessa käyttävät. Tapa, jolla opiskelija ryhmäkeskustelussa muiden kanssa kommunikoi, osoittautui pääsääntöisesti sen van Hielen tason mukaiseksi, johon hänet oli sijoitettu. Havaitut poikkeamat olivat yleensä sen suuntaisia, että kirjallinen testi viittasi alempaan tasoon kuin keskustelun perusteella tehdyt havainnot.

2.2.2.8 Geometrian oppikirjojen van Hielen tasojen analyysi

Brooklynin projekti selvitti oppikirjojen tekstianalyysillä, miten oppikirjojen esitys ottaa huomioon van Hielen tasot ja kuinka vaativia oppikirjojen tehtävät ovat van Hielen tasojen suhteen arvioituina. Yleishavaintona oli, että luokka-asteiden K-8 kirjojen tekstiosat etenevät yleensä johdonmukaisesti tasojen mukaisessa järjestyksessä. Tekstin seuraaminen edellyttää useimmiten huomattavasti kehittyneempää geometrista ajattelua kuin tekstiä vastaavat tehtävät. Tutkijoiden mukaan sikäläisen kahdeksannen luokka-asteen oppikirjat eivät edellytä ensimmäistä vH-tasoa vaativampaa ajattelua lainkaan, jos oppilas tyytyy pelkkien perustehtävien suoritukseen. Kolmannen tason mukaista materiaalia oppikirjoissa oli tuskin lainkaan (Fuys ym. 1988, 169). High school -tasolla useimmat oppikirjat käsittelivät joitakin aiheita neljännen vH-tason mukaisesti ja toisia taas pelkästään visuaalisesti (taso 1) ohittaen tyystin tasot 2 ja 3 (D. Geddesin esitelmään perustuen Shaughnessy & Burger 1985, 426).

2.2.3 Geometrian opetuksen kehittämishankkeet

2.2.3.1 Teorian oppimispsykologinen ja didaktinen osuus

Van Hielen teoriaan sisältyvä oppimispsykologinen näkökulma on hyvin strukturalistinen. Alussa geometrinen tarkastelu kohdistuu helposti havaittaviin geometrisiin kuvioihin ja kappaleisiin eriytymättöminä kokonaisuuksina, sitten aikaa myöden myös näiden ominaisuuksiin ja edelleen ominaisuuksien suhteisiin. Kun geometrinen tietous on oppilaan mielessä ainakin osittain loogisesti järjestyneessä muodossa, tätä järjestystä opitaan käyttämään deduktiivisen päättelyn työvälineenä yhden geometrisen näkökulman, euklidisen geometrian sisällä. Kehityskulun huippuna on kyky tarkastella erilaisten geometrioiden ominaisuuksia ja suorittaa vertailuja näiden välillä.

Teorian didaktinen osa rakentuu Dina van Hiele-Geldofin opetuskokeiluista saamien kokemusten varaan. Dina van Hiele-Geldofin (1957) kuvaamissa luokkatyöskentelytilanteissa näkyy oppilaan omakohtaisen toiminnan ja tutkimisen arvostaminen sekä havainnollisuutta korostavien opetusmenetelmien suosiminen, mikä varmasti ainakin osittain selittyy teorian kehittäjien läheisestä suhteesta Montessori-pedagogiikkaan. Alimmille tasoille tyypillistä intuitiivis-visuaalista tarkastelutapaa käytetään tehokkaasti työvälineenä edettäessä käsitteellisesti täsmällisempään deduktiiviseen geometriaan.

Dina van Hiele-Geldofin didaktisissa tutkimuksissaan käyttämät työtavat ja opetusideat ovat olleet esikuvana monille van Hielen teorian nimissä viime aikoina julkaistuille geometrian opetuksen metodisille suosituksille sekä opetustutkimuksille. Strukturalistisen komponentin painotus on jäsentänyt erityisesti geometrian opetuksen pidemmän aikavälin tavoiteasettelua ja opetussuunnitelmien kehittämistyötä.

2.2.3.2 Geometrian opetussuunnitelman kehitysehdotuksia

Suomessa erityisesti Pehkonen on ottanut monissa kirjoituksissaan kantaa peruskoulun geometrian koulukurssin kehittämiseksi ja pohtinut näissä geometrian opetusta myös van Hielen teorian näkökulmasta (Pehkonen 1981; 1982a—c; 1983; 1985; 1986; ks. myös Pehkonen & Pehkonen 1993). Raportissaan "Peruskoulun geometrian opettamisen periaatteista ja niiden seurauksista opetukseen" Pehkonen esittää ehdotuksen geometrian kurssiksi vuosiluokille 1—9. Tässä ehdotuksessa ala-asteen neljän ensimmäisen vuosiluokan kurssit perustuisivat konkreettiin työskentelyyn. Vuosiluokkien 5—6 aikana siihen mennessä opitut geometrian käsitteet pyritään systematisoimaan sekä oppimaan geometriassa käytettävää sanastoa ja merkintöjä. Yläasteen geometriassa 7. vuosiluokalla keskityttäisiin ehdotuksen mukaan tasokuvioiden piirtämiseen sekä 8. ja 9. vuosiluokalla laskennalliseen geometriaan. Nopeimmin edistyvien oppilaiden kanssa voitaisiin Pehkosen mukaan perehtyä jo yläasteen aikana myös geometriseen todistamiseen (Pehkonen 1985, 59—68).

Pehkosen ehdottama geometrian kurssi painottuu van Hielen tasojen suhteen tarkastellen ala-asteella pääsääntöisesti ensimmäisen van Hielen tason toimintoihin. Yläasteen 7. luokalla olisi tarkoitus päästä koko ikäluokan kanssa van Hielen tasolle 2 ja seuraavalla vuosiluokalla tasolle 3. van Hielen tason 3 saavuttaminen varmennettaisiin 9. vuosiluokan geometrian opetuksella. Pehkonen esittää arvionaan, että myös van Hielen taso 4 olisi etevimpien oppilaiden saavutettavissa yläasteen aikana. (Pehkonen 1985, 68—69.)

Voimassa olevissa opetussuunnitelman perusteissa (Anon. 1994a) kouluille annetaan varsin niukat ohjeet matematiikan ja samalla tietysti geometrian opetuksen järjestämiseksi luokkatasoittain ja päätäntävalta jätetään ajan hengen mukaisesti tässä asiassa viime kädessä kouluille. Opetussuunnitelman perusteiden laadintavaiheen yhteydessä Haapasalo (1993) tarkasteli peruskoulun matematiikan opetuksen järjestämistä kaiken kaikkiaan ja käsitteli tässä yhteydessä myös geometrian opetuksen problematiikkaa. Haapasalo toteaa, että vanhan opetussuunnitelman mukainen ala-asteen "geometria on sisältänyt lähinnä kuvioiden nimityksiä, mutta ei niiden analysoimista tai käyttöä reaalimaailmassa ja matematiikan muiden osa-alueiden konkretisoinnissa ja havainnollistamisessa" (emt., 16). Haapasalo esittää ehdotuksen geometrian oppisisällöistä luokkatasoittain jaettuna. Hän esittää myös monia metodisia suosituksia geometrian opetuksen toteuttamiseksi, joissa oppilaan omakohtainen tutkiminen ja geometrian integraatio matematiikan sisällä ja sen ulkopuolelle korostuvat. van Hielen tasoittain tarkasteltuna siirtyminen visualisoinnin tasolta analysoinnin tasolle tapahtuisi useimpien oppilaiden kohdalla kolmannen luokan aikana (emt., 20). Kuudennella luokalla oppilaat harjaantuisivat ehdotuksen mukaan myös perustelemaan löytämiään geometrisia tuloksia mm. kolmion kulmasummaa koskevan lauseen yhteydessä (emt., 22). Raportissa todetaan ala-asteen geometrian osalta kootusti "Geometriassa pyritään visuaaliseen hahmottamiseen perustuvasta toiminnasta kohti tasokuvioiden ja kappaleiden analysoimista ja järjestämistä täsmällisempien ominaisuuksien mukaan". Tavoitteena olisi siis, että ala-asteen päättövaiheessa valtaosa oppilaista olisi siirtynyt tai siirtymässä kolmannelle van Hielen tasolle, vaikkei sitä ehdotuksessa eksplisiittisesti todetakaan. Varsinainen deduktiivisen päättelyn harjoittelu tapahtuisi vasta yläasteen geometrian opetuksessa (emt., 16, 30), ehdotuksen mukaan yhdeksännellä vuosiluokalla. Tavoite oppilaiden geometrisen ajattelun kehittymiselle oppivelvollisuuskoulun aikana on näin ollen Haapasalon ehdotuksessa vastaava kuin Pehkosella (1985, 68—69). Peruskoulun aikana pyritään varmentamaan kolmannen tason saavuttaminen ja etevimmät oppilaat voivat päästä neljännellekin tasolle ennen toisen asteen opintoja.

Saksalainen Burscheid (1986) on pohtinut mahdollisuutta rakentaa geometrian opetussuunnitelma yhdistämällä van Hielen teorian kuvaama geometrisen näkemyksen kehityskulku, johon vaikuttaa erityisesti formaali geometrian opetus, Piagetin teorian antamaan kuvaan yksilön geometrisen ajattelun spontaanisti tapahtuvasta kehityksestä. Burscheid jakaa oppisisällöt yhdeksään aihealueeseen seuraavasti:

a) tasokuvioiden perusosat;

b) tasokuvioiden analysointi;

c) geometristen kappaleiden analysointi;

d) pinta-ala ja tilavuuslaskut, kulmanmittaus;

e) tason yhtenevyyskuvaukset, kuvausten yhdistäminen;

f) kulmatyypit, kulmia koskevat lauseet;

g) peruskonstruktiot, yhtenevyyslauseet, kolmiokonstruktiot;

h) kolmion pinta-alaa koskevat lauseet;

i) yhdenmuotoisuuskuvaukset , kuvausten yhdistäminen,

j) yhdenmuotoisuuslauseet.

Ehdotuksessa aihealueet sijoittuvat vuosiluokille siten, että vuosiluokilla 5 ja 6 keskitytään pääosin sisältöalueille b)—d) . Tämä pohjustaa siirtymistä analyysin tason tarkasteluihin vuosiluokilla 7 ja 8, jolloin perehdytään aihealueisiin e)—h). Vuosiluokkien 9 ja 10 oppiaines koostuu ehdotuksessa aihealueen i) lisäksi tilavuuslaskuista. Kaavamaisesti esitettynä Burscheidin ehdottaman geometrian opetussuunnitelman rakenne on seuraava:

Avaruus (tila) puhtaan staattisen aistihavainnon kohteena Avaruus havainnointiaktiviteetin kohteena	<u>Perustaso (1.):</u> Geometriset objektit havaittavina kokonaishahmoina (gestalt)	1. vaihe 2. vaihe	Tutkiva kysely Suunnattu orientoituminen	Primarstufe (1.—4. lk)
		3. vaihe 4. vaihe 5. vaihe	Tarkentaminen Vapaa orientoituminen Kokoaminen	
Avaruus mielikuvina	<u>2. taso:</u> Geometriset objektit ominaisuuksiensa yhdistelmänä	1. vaihe 2. vaihe	… …	Sekundarstufe I (5.—8. tai 5.—9. lk)
		3. vaihe 4. vaihe 5. vaihe	… … …	
	<u>3. taso:</u> Geometristen lauseiden muodostaminen	1. vaihe 2. vaihe	… …	
Käsitteellinen avaruus	<u>4. taso:</u> Lauseiden kokoaminen teoriaksi	3. vaihe 4. vaihe 5. vaihe	… … …	Sekundarstufe II (9.—13. tai 10.—13. lk)

Kuvio 1. Ehdotus geometrian oppimäärän jaksottamisesta van Hielen tasojen mukaisesti (Burscheid 1986, 19)

Kansainvälisesti merkittävin viimeaikainen opetussuunnitelmauudistus, jolla on ollut huomattava vaikutus myös geometrian opetuksen uudistumiseen, pantiin alulle Yhdysvalloissa 1980-luvun loppupuolella. Uudistuksen perusteos on ns. Standardsina tunnettu USA:n matematiikan opettajien valtakunnallisen yhdistyksen NCTM:n vuonna 1989 julkaisema teos Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Teppo (1991) on analysoinut raportin geometrian osuutta ja tarkastelu osoittaa selkeästi, että siinä esitetyt suositukset geometrian opetuksen järjestämiseksi eri luokkatasoilla ja monet opetusmetodiset ohjeet perustuvat van Hielen teoriassa esitettyyn käsitykseen geometrisen ajattelun vaiheista, vaikkei sitä opetussuunnitelmasuosituksessa eksplisiittisesti mainitakaan. Myöhemmin ilmestynyt Standardsin geometrian osuuden soveltamisohje (Geddes & Bove 1992) nojaa eksplisiittisestikin van Hielen teoriaan. Stardardsissa (Anon. 1989a, 48) esitetään sekä kuvaus van Hielen teorian mukaisesta geometrisen ajattelun vaiheittaisesta kehityskaaresta että monia suosituksia opetusjärjestelyiksi, joihin on saatu malli van Hielen teorian metodisesta osasta. Teppon mukaan vuosiluokkien K-4 geometrian opetus tähtää lähinnä visuaalisten struktuurien muodostukseen. Vuosiluokilla 5—8 geometrian opetus sisältää sekä tasolle 1 että 2 tyypillisiä tarkasteluja, jolloin parhaassa tapauksessa voidaan yltää ominaisuuksien järjestämisen tasolle asti. Vuosiluokilla 9—12 pyritään omaksumaan taito teoreettiseen ajatteluun geometristen tarkasteluiden vastatessa lähinnä van Hielen tasojen 3 ja 4 toimintoja. (Teppo 1991, 214—216.)

Vaikka eri maiden opetussuunnitelmien vertailuun sisältyy monia vaikeuksia, yhteenvetona edellisistä voidaan kuitenkin todeta, että Pehkosen, Haapasalon ja Burscheidin ehdotuksissa peruskoulun yläastetta vastaavan tason aikana geometrian opetuksen tavoitetasoksi otetaan van Hielen taso vH3. NCTM:n Standardsissa tavoitetaso näyttää olevan jonkinverran edellistä alempi.

Afonso ym. (1997) ovat varoittaneet rakentamasta geometrian opetuksen uudistamista pelkästään sen varaan, mitä tiedetään oppilaiden geometrian oppimisprosessista. Myös opettajan geometrianäkemykset tulisi ottaa huomioon. van Hielen teorian yhteydessä on Afonson ja hänen tutkijakollegojensa mukaan tähän asti tarkasteltu yksipuolisesti opittavan geometrian sisällöllistä struktuuria. On pyritty löytämään opetettaville sisällöille oikea opetusjärjestys sen perusteella, miten geometrian oppimisprosessi näyttää nimenomaan oppimisen näkökulmasta etenevän. Liian vähälle huomiolle on jäänyt opetuksen ja oppimisprosessin suunnittelun tarkastelu opettajan työn näkökulmasta. Tulisi pohtia, mitä muutoksia uudentyyppisen opetussuunnitelman rakentaminen edellyttää opettajan geometriakäsitysten kannalta ja millaisia muutoksia opetussuunnitelman toteuttaminen edellyttää ja saa aikaan opettajan omassa geometrisessa ajattelussa.

2.2.3.3 Opetuskokeilut

van Hielen teoriaan liittyvien opetuskokeilujen perustöitä ovat Dina van Hiele-Geldofin didaktisesti orientoitunut väitöskirjatyö (van Hiele-Geldof 1957) ja Brooklynin projektin yhteydessä tehty Fuysin (Fuys ym. 1985; 1988) johtama opetuskokeilu, jossa sovellettiin ja kehitettiin mainitun väitöskirjan kautta tunnetuiksi tulleita didaktisia ideoita.

Dina van Hiele-Geldof pyrki väitöskirjatyössään (van Hiele-Geldof 1957) kehittämään geometrian opetuksen työtapoja ja sisältöjä sellaisiksi, että ne mahdollisimman hyvin tukisivat oppilaan geometrisen ajattelun kehitystä van Hielen tasojen mukaisesti. Menetelmään kuuluivat oleellisena osana huolellisesti suunnitellut visuaalisia struktuureja hyödyntävät kontekstit, jotka rakensivat siltaa visuaalisesta hahmottamisesta matemaattiseen käsitteenmuodostukseen ja päättelyyn. Tällaisina konteksteina käytettiin esimerkiksi monikulmioilla suoritettua tason peittämistä (lattian laatoitusta) sekä ns. sahanterä- ja tikasmalleja, jotka toimivat eräänlaisina geometristen lauseiden visuaalisina vastineina. Muutenkin opetuksessa käytettiin runsaasti hyväksi toimintamateriaaleja ja oppilasaktiviteetteja.

Väitöskirjasta huomattavan osan muodostaa tutkijan ja hänen kaksi vuotta opettamansa luokan käymien keskustelujen raportointi ja käytettyjen opetusmenetelmien kuvailu. Tutkimusryhmään kuuluneet 38 oppilasta olivat tutkimuksen alkaessa noin 12-vuotiaita. Varsinainen opetuskokeilu kesti kaksi vuotta. Raportoitujen keskustelujen avulla tutkija pyrki osoittamaan, miten oppilaiden ajatustavat kehittyivät opetuksen edistyessä. Eri van Hielen tasoilla geometrisen tarkastelun kohteina osoitettiin olevan erityyppiset struktuurit, joiden rakentumista pyrittiin tukemaan huolella suunniteltujen opetusjärjestelyjen avulla. Tavoiteltuun siirtymiseen ensimmäiseltä vH-tasolta toiselle vH-tasolle van Hiele-Geldof raportoi tarvitun noin 20 oppituntia ja siirtymiseen toiselta tasolta kolmannelle vH-tasolle edellisen lisäksi noin 30 oppituntia (van Hiele-Geldof 1957/Fuys ym. 1984, 208, 211; van Hiele & van Hiele-Geldof 1958, 79). van Hiele-Geldof ei esitä kuitenkaan mitään tarkkaa tietoa siitä, kuinka suuri osa oppilaista todella siirtyi tasolta toiselle opetuskokeilun aikana. Yksi tasolle 2 selviytymistä mittaava testi tehtäväkohtaisine tuloksineen tosin raportoidaan, mutta tähän ei esitetä kuitenkaan kriteeriä, jonka perusteella tasolle siirtyminen katsotaan tapahtuneeksi. Esitettyihin tuntimääriin, joilla tasolta toiselle siirtyminen katsotaan saatavan aikaan, on syytä suhtautua varovaisesti, sillä mainitut ajat koskevat tehtyä tutkimusta ja siinä käytettyjä oppisisältöjä. Erityisen merkittävää van Hiele-Geldofin tutkimuksessa on se, että siinä on perusteellisesti kuvattuna systemaattisesti toteutettu van Hielen teorian käytännön sovellus, joka sisältää omaperäisen ja edelleenkin varsin modernin lähestymistavan geometrian opetukseen.

Dina van Hiele-Geldof (1957) pyrki tutkimuksessaan osoittamaan, että geometrisen ajattelun kehityskulku on yleisesti ottaen sellainen, joksi van Hielen teoria sen kuvaa. Tutkimuksen näkökulma on kuitenkin yleisluontoinen ja oppilaat yksilöidään vain esimerkkivastausten yhteydessä. Sen sijaan Brooklynin projektissa tutkittiin myös yksittäisten oppilaiden ajattelun kehitystä ja kehitettäessä kliinisiin haastatteluihin sopivia oppilasaktiviteetteja. Oppilasaktiviteeteista koottiin kolme opetusmoduulia. Ensimmäisen moduulin sisältö koostui geometrian peruskäsitteistä (yhdensuuntaisuus, kulma, yhtenevyys jne.) ja nelikulmioiden ominaisuuksista. Toisen moduulin sisältö liittyi kulmien mittaamiseen ja kulmien keskinäisten relaatioiden hahmottamiseen. Kolmannessa moduulissa käsiteltiin kolmion ja tavallisimpien nelikulmioiden alan määrittämistä. Opetusmoduuleissa van Hielen tasolta seuraavalle siirtymistä pyrittiin edistämään sisällyttämällä niihin teorian mukaisesti tutkivan kyselyn, suunnatun orientoitumisen, tarkentamisen, vapaan orientoitumisen ja kokoamisen vaiheet. Opetuksessa käytettiin hyväksi runsaasti visuaalisia havaintomateriaaleja, pelaamiseen perustuvaa vuorovaikutusta oppilaan ja haastattelijan välillä ja erilaisia toimintamateriaaleja. Opetus toteutettiin yksilöllisenä, sillä näin opetuskokeiluun voitiin yhdistää oppilaan geometrisen ajattelun kehityksen seuranta. Kaikki haastattelutilanteet videoitiin. Kukin oppilas osallistui yhdistettyihin haastattelu- ja opetustilanteisiin kuudesta kahdeksaan oppituntia. (Fuys ym. 1988, 17—55, 78.)

Fuys ym. eivät ota kantaa siihen, kuinka hyvin tutkimuskäyttöön kehitetyt opetusmoduulit toimisivat normaalissa opetustilanteessa, mutta tutkimustarkoitukseen ne soveltuivat tutkijoiden mukaan hyvin (emt., 143). Edistymistä näytti tutkimusjakson aikana tapahtuneen parhaimmillaan yhden van Hielen tason verran, mitä voi pitää kohtuullisena tuloksena ajallisesti melko lyhyellä opetusjaksolla. Tutkimuksen avulla saatiin myös runsaasti tapauskohtaista aineistoa edellä mainittuihin ryhmiin kuuluvien oppilaiden toimintatavoista tehtävittäin (ks. lähemmin emt., 82—98, 101—132).

Edellä mainitun Chicago-projektin jatkona toteutettiin tutkimushanke The University of Chicago School Mathematics Project's (UCMSP) Everyday Mathematics Program, jonka yhteydessä kehitettiin luokkatasoille K-6 uusi van Hielen teoriaan perustuva geometrian opetussuunnitelma. Käytännön opetustilanteissa suosittiin toiminnallisia ja ongelmakeskeisiä lähestymistapoja. Verrattaessa uudentyyppistä opetusta alusta alkaen saaneiden viides- ja kuudesluokkalaisten (neljä viidettä luokkaa ja kuusi kuudetta luokkaa) geometrian taitoja samanikäisten tavanomaisessa opetuksessa olleiden oppilaiden geometrian taitoihin koeryhmä osoittautui vertailuryhmää paremmaksi kaikilla mitatuilla indekseillä tarkastellen. Lähes kaikki todetut erot olivat myös tilastollisesti merkitseviä. Koeryhmän geometrian kouluosaaminen oli esitestausvaiheessa parempi kuin vertailuryhmällä ja lukuvuoden mittaisen seurantajakson aikana ero edelleen kasvoi. Samoin koeryhmän geometrinen ajattelu seurantajakson alussa oli vH-tasoilla mitaten vertailuryhmää kypsempää ja geometrisen ajattelun kehitystä tapahtui koeryhmän oppilailla enemmän kuin seurantaryhmän oppilailla. (Carroll 1998.)

Hershkowitz ym:n (1987) ja Fuys ym:n (1985) tutkimukset osoittavat varsin selkeästi, että opettajien ja oppilaiden geometrisessa ajattelussa esiintyy usein samantyyppisiä virheellisyyksiä ja väärinkäsityksiä. Swafford ym:n (1997) toimintatutkimuksessa epäkohtaan yritettiin puuttua järjestämällä luokka-asteiden 4—8 opettajille kolmivuotinen täydennyskoulutusohjelma, ns. LINCS-projekti. Siinä pyrittiin parantamaan opettajien edellytyksiä opettaa geometriaa vahvistamalla sekä heidän geometrian aineenhallintaansa että pedagogista sisältötietouttaan. Projektiin osallistuneiden opettajien geometrian aineenhallinta parani selvästi. Aineenhallinnan parantuminen näkyi myös opettajien van Hielen tasoissa. Yli 70 prosentilla opettajista vH-taso nousi projektin aikana vähintään yhden tason ja yli 50 prosentilla opettajista vähintään kaksi tasoa. Yhdenkään opettajan van Hielen taso ei laskenut. Aineenhallinnan parantumisen ohella opettajien opetuskäytänteet ja suhtautuminen geometrian opetukseen muuttuivat. Projektin lopussa opettajat käyttivät enemmän aikaa geometrian opettamiseen kuin ennen. He myös kokivat opettavansa geometriaa paremmin kuin ennen, olivat aikaisempaa halukkaampia kokeilemaan uusia ideoita ja työtapoja, ottivat helpommin riskejä kuin ennen edistääkseen oppimista ja luottivat paremmin omiin kykyihinsä auttaa oppilaiden geometrisen ajattelun kehittymistä.

Edellä mainittujen opetustutkimusten lisäksi on tehty joitakin vähäisempiä van Hielen teoriaan perustuvia geometrian opetusta koskevia tutkimuksia. Esimerkkinä mainittakoon Hanin (1986) tutkimus van Hielen teoriaan pohjaavan ja tavanomaisen geometrian oppikirjan vaikutuksista oppimistuloksiin, McGlendonin (1990) tutkimus geometrian opettamisesta van Hielen teorian mukaisesti ala-asteen opettajien täydennyskoulutukseen tarkoitetulla geometrian kurssilla sekä Talsman ja Hersbergerin (1990) ja Masonin (1989) toteuttamat kokeilut, jossa van Hielen teoriaa on sovellettu matemaattisesti erityislahjakkaiden oppilaiden geometrian opetuksen suunnitteluun ja tulosten arviointiin.

Opettajille tarkoitettuja käytännön ohjeita eri van Hielen tasoille soveltuvista harjoitteista ja aktiviteeteista on esitetty monissa lähteissä (ks. esimerkiksi oppikirja Billstein ym. 1990 ja artikkelit Crowley 1987, 6—13; Geddes 1992; Geddes & Fortunato 1993; Dickson ym. 1984, 19—28; Burger 1985, 54—55; Hoffer 1988; Shaughnessy & Burger 1985, 420—425; Senk & Hirschorn 1990; Teppo 1991; Speer 1993, 393—405; van Hiele 1999). Bruni ja Seidenstein (1990, 203—227) sekä Burger ja Culpepper (1993, 144—147) esittävät opettajien avuksi lukuisan joukon esimerkkejä siitä, millaiset harjoitteet soveltuvat Dina van Hiele-Geldofin kehittämän viisivaiheisen opetusmetodin eri vaiheisiin. Hannibal (1999) esittää artikkelissaan ohjeita 3—6-vuotiaiden lasten geometrian opetukseen perustuen hänen tekemäänsä empiiriseen tutkimukseen tämän ikäisten lasten kuvioiden luokittelutaidoista. Ohjeistot sivuutetaan tässä tutkimuskatsauksessa hyödyllisyydestään huolimatta pelkällä maininnalla, koska näissä esitettyjä suosituksia ei juurikaan ole perusteltu materiaalien ja työtapojen toimivuudesta hankitulla tutkimustiedolla.

2.3 Teorian arviointia suhteessa muihin tutkimusaiheen kannalta keskeisiin matemaattisen ymmärryksen kasvua käsitteleviin teorioihin

2.3.1 Vertailun rajaaminen

Monet tutkijat ovat aiemmin käsitelleet tämän tutkimuksen ydinaluetta eli matemaattisten ja myös spesifimmin geometristen käsitteiden ja käsiterakenteiden oppimista sekä pyrkineet konstruoimaan prosessia käsitteleviä teorioita. Teorioista on lähempään tarkasteluun valittu van Hielen teorian näkökulmasta mielenkiintoisimmat. Keskeisimmiksi on tässä suhteessa katsottu Piagetin teorian, Pirien ja Kierenin, Sfardin ja Schoenfeldin tätä aluetta koskevat tarkastelut. Piagetin käsitykset geometrisen ajattelun kehittymisestä ovat van Hielen teorian näkökulmasta mielenkiintoiset, sillä sekä hän että van Hiele olettavat, joskin eri perusteista lähtien, geometrisessa ajattelussa olevan havaittavissa selkeästi erottuvat kehitystasot. Myös Pirien ja Kierenin sekä Sfardin teorioissa matemaattisen ymmärryksen kasvua tarkastellaan van Hielen teorian tapaan portaittaisena kehitysprosessina. Schoenfeldin analyysi matemaattisen tietämyksen rakentumisesta on geometrian oppimisen kannalta erityisen mielenkiintoinen. Analyysi osoittaa nimittäin selkeästi, kuinka merkityksellinen intuitiivisesti koettu matemaattisten käsitteiden tulkintaympäristö on käsitetiedon kehittymiselle.

Edellä mainittujen teorioiden käsittely jää pintapuoliseksi, vaikka rajaamme tarkastelun pelkästään geometrisen ajattelun kehittymisen näkökulmaan. Samalla joudun tässä yhteydessä jättämään pelkän lähdemaininnan varaan monet matemaattisen käsitteenmuodostuksen kannalta sinänsä tärkeät teoreettiset tarkastelut, kuten esimerkiksi Sierpinska (1994), Battista (1994), Greeno (1978, 1991, 1994) sekä Goldin ja Herscovics (1991).

2.3.2 van Hielen teoria verrattuna Piagetin teoriaan

Piaget käsitteli ympäröivän todellisuuden geometrisen hahmottamisen ja käsitteellistämisen problematiikkaa lähinnä teoksissaan Child's Conception of Geometry (Piaget ym. 1960) ja Child's Conception of Space (Piaget & Inhelder 1956). Koska yläasteikäisiä koskevien selvitysten (vrt. Hautamäki 1984, 121—122) mukaan voidaan pitää hyvin todennäköisenä, että oppilaat ovat tuossa iässä joko konkreettien operaatioiden tai formaalien operaatioiden kehitysvaiheessa, Piagetin tasojen ja van Hielen tasojen erojen ja yhtäläisyyksien tarkastelu rajataan jatkossa koskemaan näitä kehitysvaiheita.

Piagetin mukaan yksilön toiminta ja vuorovaikutus ympäristönsä kanssa muodostaa perustan tämän älylliselle kehitykselle. Toiminnan sisäistymisen kautta syntyvät henkisten rakenteiden peruskomponentit *operaatiot* ja operaatioiden jäsentyneet sarjat *skeemat*. Ne ovat toimintokokonaisuuksia, jotka pyrkivät aktivoitumaan kokonaisina, kun niiden jokin osa aktivoituu. Sisäistynyt ja kokonaisstruktuurin osaksi ankkuroitunut toiminto, operaatio mahdollistaa toiminnon suorituksen mentaalisti ja toiminnon reflektion ilman, että toimintoa tarvitsee suorittaa fyysisesti. Tärkeä toiminnon sisäistymisen kriteeri on se, että operaatioksi kehittynyt toiminto on käännettävissä, siis suoritettavissa tai kuviteltavissa suoritetuksi päinvastaisessa järjestyksessä. Piagetin mukaan kognitiivisen kehityksen vaiheet ilmentävät sitä tasapainottumisprosessia, jossa operaatiot muodostavat kvalitatiivisesti erilaisia organisoituja kokonaisstruktuureja (structures d'ensemble). Tällaisessa tasapainotilassa operaatiot ja skeemat eivät ole ristiriidassa toistensa kanssa. Operaatioiden käännettävyyttä Piaget pitää perustekijänä struktuurien tasapainotilaan pääsemisessä. (Piaget & Inhelder 1958, 276.)

Näistä näkemyksistä van Hielen käsitys poikkeaa selvimmin siinä, että van Hielen mukaan oppilaan geometrisen ajattelun kehitys on enemmän riippuvainen käsitellyistä oppisisällöistä ja opetuksen tasosta kuin oppilaan iästä ja biologisesta kypsymisestä (van Hiele 1986, 65). Piagetin ja van Hielen tarkasteluissa on myös paljon yhteistä. Kumpaakin leimaa vahva strukturalistisuus ja pyrkimys ajattelutapoja karakterisoivan ja laajasti selitysvoimaisen kognitiivisen kehityksen tasorakenteen löytämiseen. Vaikka teorian syntyaikoina van Hiele selvästi rajasi teoriansa koskemaan geometrisen ajattelun kehittymistä Piagetin teorian käsitellessä ajattelun kehittymistä yleisesti, niin myöhemmässä tuotannossaan van Hielellä on ollut pyrkimyksiä osoittaa teoreettisen mallinsa pätevyysalueen ulottuvan matemaattiseen ajatteluun yleisemminkin (emt.).

Pohjimmiltaan sekä Piagetin että van Hielen esittämien kehitystasojen olemassaolo selittyy yksilön kehitysvaiheelle ominaisella loogisella ajattelulla. Se asettaa rajat sille, minkälaiseen älylliseen toimintaan tämä kulloinkin kykenee. Piaget pyrki mallittamaan loogiset rakenteet hyvinkin tarkasti, kun taas van Hiele nostaa esille ennemminkin yksityiskohtia, joissa loogisen ajattelun kehittymättömyys tulee ilmi geometrisissa konteksteissa. Tällaisia ovat luokka-inkluusion välttäminen käsitteenmuodostuksessa, riittävien ja välttämättömien ehtojen sekoittaminen, visuaalisen ajattelun dominoivuus käsitteelliseen ajatteluun nähden, deduktiivisen ajattelun vieraus jne. Piagetilaisittain tarkastellen van Hielen kuvaama geometrisen ajattelun kehitysprosessi, jonka taitekohtana voidaan pitää siirtymistä tasolta vH2 tasolle vH3, ilmentää lähinnä sitä, että oppilas on ajattelussaan siirtymässä tai siirtynyt konkreettien operaatioiden vaiheesta formaalien operaatioiden vaiheeseen. Tämä puolestaan mahdollistaa geometrisen ajattelun muutoksen, joka näkyy myös oppimistuloksissa koulussa. van Hielen teorian näkökulmasta tarkastellen geometria on alkuvaiheessa eräänlaista kuvioita koskevaa luonnontiedettä, jossa oppilaan havainnonteon ja järkeilyn logiikka on perusteiltaan sentyyppistä kuin Piaget on kuvannut. Geometrisen ajattelun kehittyminen ilmentää samalla kuitenkin myös geometrian opetuksen tavoitteiden saavuttamista. Esimerkiksi tarkoituksellinen visuaalisesta havainnoinnista irtautuminen ja täsmällisillä käsitteillä operoiminen, tähän liittyvä määrittelyn idean tajuaminen, deduktiiviseen ajatteluun tottuminen jne. ovat relevantin toiminnan kautta opittuja prosesseja, jotka eivät välttämättä kehity vailla ohjausta.

Piagetin mukaan abstraktioprosessissa voidaan erottaa kolme eri tyyppiä: *empiirinen, pseudo-empiirinen* ja *reflektiivinen abstraktio*. Erilaisten abstraktioiden merkitystä matemaattiselle käsitteenmuodostukselle on pohtinut mm. Dubinsky (1991, 97—98). Piagetin mukaan empiirinen yleistys perustuu reaalisten objektien ominaisuuksista tehtyihin havaintoihin ja johtaa objektien yhteisten ominaisuuksien tajuamiseen. Yleistystä, jossa abstrahoitavina piirteinä eivät ole varsinaisesti havaittavien objektien omat ominaisuudet vaan ennemminkin objekteihin kohdistetun toiminnan säännönmukaisuudet, Piaget nimittää pseudo-empiiriseksi yleistykseksi. Esimerkiksi kahden lukumäärältään saman joukon 1—1-vastaavuus, joka on lukukäsitteen ymmärtämisen kulmakivi, on tällainen pseudo-empiirinen yleistys. Tässä vastaavuus ei perustu niinkään siihen, millaisia verrattavien joukkojen alkiot itse varsinaisesti ovat, vaan alkioiden avaruudelliseen konstellaatioon, johon ne on saatettu tai kuvitellaan voitavan saattaa. Pohjimmiltaan tämänkin tyyppinen yleistys perustuu havaintoon tai mielikuvaan toiminnan lopputuloksena saadusta tilasta. Kolmas yleistämisen tyyppi, jota Dubinsky pitää merkittävänä osana matemaattista käsitteenmuodostusta alkeismatematiikasta korkeimpaan matematiikkaan asti, on ns. reflektiivinen yleistys. Tässä on kysymys sellaisten abstraktien rakenteiden löytämisestä, jotka ovat ennemminkin postuloituja kuin havaittuja.

Piagetin tekemä yleistysten tyypittely empiiriseen, pseudo-empiiriseen ja reflektiiviseen abstraktioon on eräs ilmentymä biologisen kehityksen ja ohjatun oppimisen vaikutuksesta yksilön lisääntyvään kykyyn tarkastella mielenkiinnon kohteena olevia asioita entistä abstraktimmalta kannalta. Tapa, jolla van Hiele lähestyy geometrisen ajattelun kehitysprosessiin liittyvää ajattelun irtautumista konkretiasta, poikkeaa selvästi Piagetin näkökulmasta. Geometrisen ajattelun syveneminen näkyy van Hielen mukaan erityisesti niissä sisällöissä, joihin geometrinen ajattelu kulloinkin kohdentuu. van Hielen tasolla vH1 keskeisimmän geometrisen tarkastelun sisällön muodostaa kuvioiden ja kappaleiden kokonaisvaltainen havainnointi. Tästä huomion painopiste siirtyy tasolla vH2 kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksiin, tasolla vH3 ominaisuuksien välisiin relaatioihin, tasolla vH4 euklidiseen geometriaan deduktiivisena ja aksiomaattisena järjestelmänä ja lopulta eri geometrioiden yhtäläisyyksien ja erojen tarkasteluun tasolla vH5. Geometrisen ajattelun kehittyminen on van Hielen näkökulmasta ennen kaikkea kykyä tarkastella uudentyyppisiä geometrisia sisältöjä. Koska nämä samalla muokkaavat oppijan käsitystä geometrian olemuksesta, kouluopetus on oppilaan geometrisessa ajattelussa tapahtuvien muutosten keskeisin vaikuttaja.

Näkemys siitä, että van Hielen tasot ovat ennen kaikkea oppimisen kautta syntyneitä ja että tasot kuvaavat oppilaan yleistä geometrisen ajattelun laatua, ovat jossain määrin ristiriidassa keskenään. Oma näkemykseni on, että oppilaan geometrisen ajattelun laadun tarkastelu van Hielen tasojen viitoittamassa suunnassa ensisijaisesti geometrisen ajattelun sisällöllisenä kehittyneisyytenä sen mukaisesti, minkätyyppisiin asioihin oppilaan geometrinen ajattelu primaaristi kohdistuu ja antaa mahdollisuuden (objekteihin, niiden yksittäisiin ominaisuuksiin, ominaisuuksien välisiin yksittäisiin relaatioihin, geometriaan matemaattisena teoriana vaiko geometrioihin) ei yksistään riitä, vaan tämän ohella on tärkeää ottaa huomioon se, minkätyyppistä tämä tarkastelu on. Oppilaan geometrisen ajattelun laadun arvioinnin kannalta on oleellista se, mieltääkö oppilas esimerkiksi kuvioiden ominaisuudet ja ominaisuuksien väliset relaatiot empiirisinä tai pseudo-empiirisinä yleistyksinä yksittäisten kuvioiden (ts. kuvien) ominaisuuksina ja ominaisuuksien välisinä suhteina vaiko reflektiivisinä yleistyksinä kuvioiden kautta havainnollistettujen matemaattisten käsitteiden ominaisuuksina ja ominaisuuksien välisinä suhteina.

Seuraava taulukko havainnollistaa tasogeometrian osalta sitä, miten geometrisen ajattelun tasoa voidaan arvioida yhtäältä van Hielen tasojen mukaisesti sillä perusteella, millaisiin sisältöihin geometrinen tarkastelu kohdistuu tyypityksen mukaan ja toisaalta Piagetin abstraktiotasojen mukaisesti tarkasteltujen kohteiden yleisyystason mukaan.

Taulukko 2. Geometrisen ajattelun kehittyneisyyden arviointi van Hielen tasojen ja Piagetin abstraktiotyyppien viitoittamissa suunnissa

Oppijan primaarit geometrisen tarkastelun kohteet	Yleisyystaso, jolla oppija toimii: empiirinen tai pseudo-empiirinen	reflektiivinen
Ominaisuuksien väliset suhteet, kuvioiden määrittely	(C)	F
Kuvioiden yksittäiset irralliset ominaisuudet	B	E
Kuviot	A	D

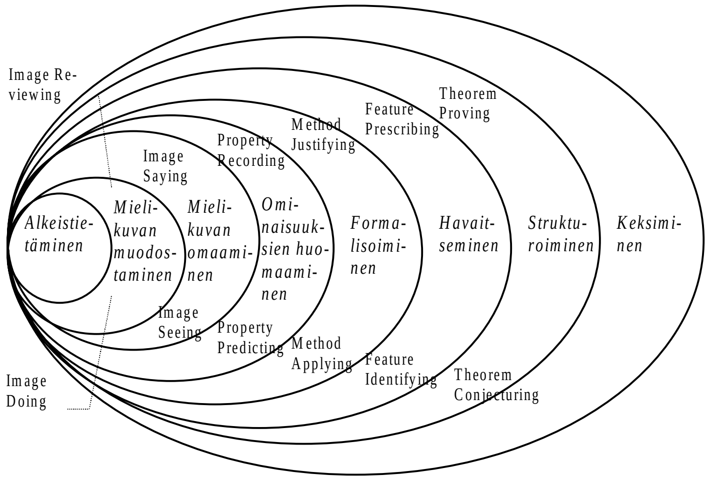
Niiden karakterisointien perusteella, jotka van Hielen tasoille on luvussa 2.1 esitetty, voidaan todeta, että tyypilliset van Hielen tason vH1 mukaiset geometriset tarkastelut sijoittuvat tällä jaottelulla erityisesti soluun A. Sen sijaan van Hielen tason vH2 tulkinta on jo vaikeampi. Tällä tasolla tarkastelujen painopiste on kuvioiden ominaisuuksissa eli solun A ohella solussa B ja konkreettissa, kuvailevassa mielessä myös solun C alueella. Solujen D ja E kuvaamien toimintojen yhteys tasoon vH2 on kysymyksenä vaikeampi. Tähänastisen van Hielen tasoihin kohdistuneen tutkimuksen valossa on epäselvää, millä tasolla oppilas omaksuu ajatuksen ideaalisista kuvioista, joiden malleiksi hän piirretyt kuviot tulkitsee. Empiirisiin yleistyksiin rajautuen taso vH2 voitaisiin tulkita siten, ettei se sisällä vielä solujen D ja E toimintoja. Reflektiivisen yleistyksen mukaisesti tulkiten van Hielen taso vH2 voitaisiin tulkita siten, että sillä viitataan siihen geometrisen ajattelun kehitysvaiheeseen, jossa kaikki soluja A, B, (C), D ja E vastaavat tarkastelut ovat mahdollisia. Tason vH2 epäselvään tulkintaan palataan tutkimuksen empiirisessä osassa siinä vaiheessa, kun perinteinen tulkinnallisesti epäselvä van Hielen taso jaetaan kahdeksi erilliseksi tasoksi. Näistä toinen vastaa empiiriseen ja pseudo-empiiriseen yleistykseen rajoittuvaa toimintaa ja toinen reflektiivistä yleistämistä edellyttävää toimintaa. Tason vH3 tulkinta on selkeämpi. Koska tälle van Hielen tasolle on tyypillistä matemaattisesti määriteltyjen käsitteiden tarkastelu, tämän tason geometrinen näkemys mahdollistaa kaikki taulukon solujen A, B C, D, E, ja F tarkastelutavat.

2.3.3 van Hielen teoria verrattuna Pirien ja Kierenin teoriaan

Pirie ja Kieren rakentavat matemaattisen ymmärryksen kasvua käsittelevän teoriansa konstruktivistiselle näkemykselle, jossa matemaattisen ymmärryksen kasvu nähdään jatkuvana yksilön kognitiivisten struktuurien uudelleen organisoitumisena (Pirie & Kieren 1994, 166). Matemaattisen ymmärtämisprosessin edistymisessä voidaan heidän (1991, 1992 ja 1994) mukaansa erottaa kahdeksan vaihetta

1) alkeistietämisen vaihe (*Primitive Knowing PK*),
2) mielikuvan muodostamisen vaihe (*Image Making IM*),
3) mielikuvan omaamisen vaihe (*Image Having IH*),
4) ominaisuuksien huomaamisen vaihe (*Property Noticing PN*),
5) formalisoinnin vaihe (*Formalising F*),
6) havaitsemisen vaihe (*Observing O*),
7) strukturoinnnin vaihe (*Structuring S*) ja
8) keksimisen vaihe (*Inventising I*).

Kukin vaihe sisältää alkeistietämistä lukuun ottamatta sekä toiminnallisen ymmärryksen että representationaalisen ymmärryksen komponentin. Kumpikin ymmärtämisen muoto tarvitaan ennen kuin yksilön on mahdollista edetä ymmärtämisprosessissaan vaiheesta toiseen. Vaiheet on kuviossa 2 on esitetty sisäkkäisinä kehinä. Kunkin vaiheen toiminnallisen ymmärryksen komponentti on merkitty kehien rajaaman alueen ala-osaan ja representationaalisen ymmärryksen komponentti vastaavasti alueen yläosaan alkuperäisin nimityksin. Keksimisen vaiheen komponentteja Pirie ja Kieren eivät nimeä.



Kuvio 2. Matemaattisen ymmärtämisprosessin vaiheet Pirien ja Kierenin (1994) mukaan

Alkeistietämisen taso ei nimestään huolimatta suinkaan tarkoita sitä, että tällä tasolla tarkasteltava matematiikka olisi sinänsä jollakin tavoin alkeellista. Tason nimi viittaa ennemminkin asiasisällön ymmärtämisprosessin laatuun.

Täysin lineaarinen, vaihe vaiheelta etenevä, oppimisprosessi

$$\boldsymbol{PK \to IM \to IH \to P\,N \to F \to O \to S \to I,}$$

ei ole kovin tavallinen. Tavanomainen tilanne on, että päästyään jollekin tasolle oppija joutuu palaamaan takaisin ja rakentamaan intuitiivista näkemystään uudelleen sopivan alemman tason kautta ennen kuin on kykenevä jatkamaan oppimisprosessiaan. Jossakin tilanteessa oppimisprosessi voisi esimerkiksi näyttää ennemminkin seuraavalta

$$\boldsymbol{PK \to IM \to IH \to \ P\,N \to \ F \to \ O \to \ S \to I\,.}$$

Tällaista dynaamista ja tarkoituksellista vuorottelua alemman ja ylemmän saavutetun abstraktiotason välillä Pirie ja Kieren kutsuvat *takaisin kiertymiseksi* (*folding back*). Takaisin kiertymistä he pitävät eräänä tyypillisimmistä matemaattisen ajattelun ja sen kehittymisen tunnusmerkeistä.

Siirtyminen abstraktiotasolta toiselle ei voi tapahtua miten tahansa. Oppijan kavutessa tietyn käsitteellisen tiedon osalta tasoja ensimmäistä kertaa ylöspäin hän ei voi ohittaa yhtäkään ymmärtämisprosessin vaihetta, mutta takaisin kierron jälkeen hänen on mahdollista uudelleen vaiheita läpikäydessään ohittaa ne vaiheet, joiden prosessointi ei ole enää tarpeen.

Jokaisen käsitteellisen alueen oppimistapahtuma alkaa sellaisella alkeistietämisellä, joka on laadullisesti yksinkertaisempi kuin se, mihin oppimisprosessi johtaa. Tavallisesti yhden käsitteellistämissyklin päätösvaihe (*I*) on toisen käsitteellistämissyklin alku (*PK*):

$$PK_1 \rightarrow IM_1 \rightarrow IH_1 \rightarrow PN_1 \rightarrow F_1 \rightarrow O_1 \rightarrow S_1 \rightarrow I_1$$

$$\rightarrow PK_2 \rightarrow IM_2 \rightarrow IH_2 \rightarrow PN_2 \rightarrow F_2 \rightarrow O_2 \rightarrow S_2 \rightarrow I_2.$$

Mielikuvan muodostamisvaihetta *IM* ja mielikuvan omaamisvaihetta *IH* Pirie ja Kieren (1994) havainnollistavat esimerkillä, jossa oppilaat tutkivat toisen asteen polynomifunktion kuvaajan muodostumista laskettujen pisteiden (x,y) avulla koordinaatistoon. Tason *IM* toiminnallisessa vaiheessa (image doing) kuvaajan muodostuminen on oppilaille yllätyksellinen kokemus ja piirroksissa esiintyy usein tyypillisiä virheitä: kuvaaja piirretään murtoviivaksi, virheellisesti laskettu piste aiheuttaa yllättävän mutkan kuvaajaan, kuvaajan oletetaan alkavan ja päättyvän tiettyihin merkittyihin pisteisiin jne. Tason *IM* esittämistoimintovaiheessa (image reviewing) oppilaat osoittavat ymmärtävänsä piirtämistoimintoon sisältyvän toiminnallisen struktuurin. Tällöin he tietävät esimerkiksi sen, miten kuvaajan pisteet yhdistetään ensimmäisen muuttujan suuruusjärjestyksessä toisiinsa eikä aina siinä järjestyksessä, missä ne on taulukoitu. Vähitellen oikea mielikuva kuvaajasta kiinnittyy ja oppilas osaa ennakoida, minkätyyppinen piirrettävän kuvaajan tulee olla ollakseen oikea. Tällöin oppilas voi esimerkiksi huomata, että jonkin pisteen koordinaatit ovat todennäköisesti väärin lasketut, koska piste ei sovi ennakoidun kuvaajan muotoon. Tällöin oppimisprosessissa on edetty tason *IH* toiminnalliseen vaiheeseen (image seeing). Saman tason esittämistoiminnon asteella (image saying) oppilas kykenee myös kuvaamaan, miltä kuvaajan tulisi näyttää.

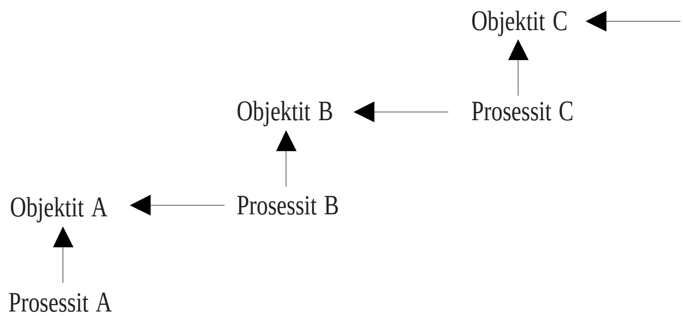
Mielikuvan muodostumisprosessin jälkeen matemaattisen ymmärryksen kasvu jatkuu ominaisuuksien ennakoinnilla (property prediction) ja tästä edelleen ominaisuuden julkilausuttuun toteamisvaiheeseen (property recording) ominaisuuden huomaamisen tasolla *PN*. Formalisoinnin vaiheessa *F* oppija pystyy tarvittaessa operoimaan symboleilla ilman suoraa kiinnekohtaa taustalla oleviin mielikuviin. Observoinnin vaiheessa *O* oppija kykenee muotoilemaan havaintonsa matemaattisiksi lauseiksi. Strukturoinnin vaiheessa *S* käsitteellinen kokonaisuus ymmärretään teorian tyyppisenä kokonaisuutena ja keksimisen, luovan ideoinnin tasolla *I* yksilö kykenee operoimaan teorian tasolla ja kehittämään teoriaa edelleen. Kullakin formaalin ajattelun tasoista *F*, *O* ja *S* ymmärrys syventyy Pirien ja Kierenin mukaan toiminnan kautta toiminnan esittämiskykyyn.

Edellä kuvatussa esimerkissä esiin tulleissa matemaattisen ymmärryksen rakentumisen vaiheissa on paljon samaa, mitä sisältyy van Hielen tasojen karakterisointiin: (1) Ensin oppija toimii kokonaisvaltaisesti varsin jäsentymättömien mielikuvien varassa, mutta sitten vähitellen tarkkaavaisuus kiinnittyy tarkasteltavien kohteiden ominaisuuksiin. (2) Opittavat asiat ymmärretään ensin implisiittisesti, kunnes ne myöhemmin opitaan yhä selkeämmin esittämään myös eksplisiittisesti. (3) Alussa kokonaisuus pilkkoutuu irrallisiin tiedon osiin ja vasta myöhemmin se kyetään hallitsemaan strukturoituneena kokonaisuutena. (4) van Hielen neljäs taso eli päättelyn taso on pitkälti analoginen Pirien ja Kierenin keksimisen, luovan ideoinnin vaiheen *I* kanssa. (5) Ymmärtämisprosessin syklisyys, jossa yhden käsitteellistämissyklin päättövaihe (*I*) johtaa toisen käsitteellistämissyklin alkuun (*PK*), vastaa läheisesti van Hielen teorian keskeistä ideaa siitä, että se, mikä edeltävän van Hielen tason ajattelussa on implisiittisesti ymmärrettyä, muuttuu seuraavalla tasolla eksplisiittisen tarkastelun kohteeksi.

Yhtäläisyyksistään huolimatta van Hielen sekä Pirien ja Kierenin teorioiden välillä on toki paljon erojakin. Tämä on luonnollistakin, sillä van Hiele pyrkii teoriassaan kuvaamaan ensisijaisesti oppilaiden geometrisessa ajattelussa havaittavia globaaleja pitkän aikavälin muutoksia, kun Pirie ja Kieren puolestaan tarkastelevat lähinnä matemaattisessa ongelmanratkaisuprosessissa havaittavaa askelittaista edistymistä. Teoriat ovat myös syntyneet eri aikakautena. Tämä näkyy mm. siinä, että kun esitetään teoriassa van Hielen tasojen muodostama systeemi, niin yleispätevänä oppilaiden geometrisen ajattelun kehityskuvauksena Pirie ja Kieren ovat kiinnostuneita myös oppimisprosessiin liittyvästä yksilöllisestä vaihtelusta. Vaikeiden asioiden alemman tason uudelleen prosessointi eli Pirien ja Kierenin esittämä takaisin kiertymisen (folding back) idea tekee mallista van Hielen lineaarista mallia selvästi dynaamisemman. van Hielen teorian yhtenä puutteena voi pitää myös sen karkeutta. Teoriassa kuvataan koulumatematiikan oppimisen kannalta relevantteja tasoja vain neljä. Näistäkin peruskoulutasolla tulee kysymykseen oikeastaan vain kolme. Tässä suhteessa Pirien ja Kierenin malli matemaattisen ymmärryksen kasvuprosessista on huomattavasti hienorakenteisempi kuin van Hielen tasojen muodostama systeemi. Lisäksi van Hielen oletusta siitä, että oppilaan geometrisen ajattelun tasoa voitaisiin kuvata yhdellä ja samalla vH-tasolla oppisisällöistä riippumatta, on voimakkaasti kritisoitu. Pirien ja Kierenin mallin mukainen yksittäisten ongelmanratkaisuprosessien vaihekuvaus saattaa antaa paremman pohjan tarkastella oppilaan oppimisprosessia kuin van Hielen tasoihin perustuva yleisluokitus. Jossain mielessä Pirien ja Kierenin mallia voi pitää van Hielen tasoihin perustuvan luokituksen tarkennuksena. Jos van Hielen tasot tulkitaan Gutiérrezin tapaan sisältöspesifeiksi, Pirien ja Kierenin malliin sisältyvät vaiheet alkeistietäminen, mielikuvan muodostaminen, ja mielikuvan omaaminen voidaan yhdistää tasoon vH1, ominaisuuksien huomaamisen vaihe tasoon vH2, formalisoinnin vaihe ja observoinnin vaihe tasoon vH3 ja strukturoinnin sekä keksimisen vaihe tasoon vH4.

2.3.4 van Hielen teoria verrattuna Sfardin teoriaan

Sfardin (1991) mukaan yksilötasolla esiin tuleva matemaattisen ymmärryksen kasvuprosessi on monessa suhteessa verrattavissa siihen historialliseen kehitysprosessiin, minkä kautta monet matemaattiset ideat ovat matemaattisen yhteisön jalostamina saaneet vakiintuneen muotonsa. Implisiittisesti ymmärrettyjen käsitteiden ja kokonaisuuksien muuntuminen vähittäin eksplisiittisesti ymmärretyiksi on keskeinen matemaattisen ymmärryksen kasvuun liittyvä piirre niin van Hielen kuin myös Sfardin esittämissä tarkasteluissa. Hänen mukaansa monet matemaattiset ideat ovat alkujaan syntyneet käsitteellistämällä alemman abstraktiotason objekteihin kohdistuneet toiminnot, operaatiot itsenäisiksi objekteiksi. Prosessia, jossa toiminto saa itsenäisen objektin luonteen, Sfard kutsuu objektifioinniksi. Matemaattisen ymmärryksen kasvu voidaan nähdä seuraavan kuvion mukaisesti rakentuvan vaiheittain siten, että kuhunkin kehitysvaiheeseen kuuluvat sille ominaiset objektit, joihin kohdistetaan tälle tasolle tyypillisiä toimintoja, joista vuorostaan objektifioinnin myötä kehittyy aina seuraavan kehitysvaiheen objekteja.



Kuvio 3. Objekti- ja prosessitulkintojen vuorottelu matemaattisen ymmärryksen kasvuprosessissa Sfardin (1991, 221) mukaan

Objektifiointiin liittyy Sfardin mukaan kolme osaprosessia: *sisäistäminen* (*interiozation*), *tiivistäminen* (*condensation*) ja *reifikaatio* (*reification*). Sisäistämisen vaiheessa alemman abstraktiotason matemaattisiin objekteihin esimerkiksi kokonaislukuihin kohdistetut toiminnot, kuten esimerkiksi jakaminen, tulevat oppijalle ymmärrettäviksi ja niiden toteuttaminen käy yksinkertaisissa tapauksissa ja ideatasolla mahdolliseksi myös kuvitteellisesti. Tiivistämisen vaiheessa monivaiheiset operaatiot kyetään hahmottamaan itsenäisinä kokonaisuuksina kaikkine osatoimintoineen. Esimerkiksi kahden seitsemäsosan muodostaminen voidaan kuvitteellisesti ajatella tarkoittavan kokonaisuuden jakamista ensin seitsemäsosiin, joista sitten poimitaan kaksi. Lopullisesti käsitteet muodostuvat matemaattisiksi objekteiksi nk. reifikaatioprosessissa, jossa toiminnot (esim. murto-osien muodostaminen) symboloidaan objekteiksi (murtoluvut), joihin puolestaan seuraavan abstraktiotason operaatiot (murtolukujen laskutoimitukset) voivat kohdistua. Alemman tason objektien reifikaatioprosessi (esimerkiksi murtolukukäsitteen muodostuminen) ja sitä seuraavan tason objektin sisäistämisprosessi (murtoluvuilla laskeminen) muodostuvat näin ollen toinen toistensa edellytyksiksi (Sfard 1991; Sfard & Linchevski 1994).

Yhteenvetona voidaan todeta, että Sfardin malli matemaattisen ymmärryksen kasvusta sisältää oleellisesti ottaen monet Hielen teorian perushypoteesit (vrt. luku 1.2.1):

1. *van Hiele*: Geometrisen ajattelun kehitys on epäjatkuvaa, mikä ilmenee peräkkäisinä van Hielen tasoina. Tasojen järjestys on kiinteä ja mitään tasoa ei voi kokonaan ohittaa. Korkeammalle tasolle siirtyminen edellyttää aina ymmärrystä, joka on kehittynyt edeltävillä tasoilla.

Sfard: Sisältöalueesta riippuva vaiheittainen matemaattisen ymmärryksen kehitysprosessi.

2. *van Hiele*: Kehityskulku suuntautuu implisiittisestä eksplisiittiseen. Jokaisen tason toiminta on seuraavan tason analysoinnin kohteena ts. se, mikä edeltävän tason ajattelussa on implisiittistä, muuttuu seuraavalla tasolla eksplisiittiseksi.

Sfard: Sfard ja Linchevski (1994, 194) toteavat Freudenthalia (1978, 33) lainaten "My analysis of mathematical learning process has unveiled levels in the learning process where mathematics acted out on one level becomes mathematics observed on the next". Siis se, mikä käsitetään tietyllä tasolla prosessiksi, tulee seuraavalla tasolla objektiksi. Geometristen käsitteiden osalta Sfard (1991, 10—11) toteaa kuitenkin toisessa yhteydessä, että "Geometric ideas, for example, for which the unifying, static graphical representations appear to be more natural than any other, can probably be conceived structurally even before full awereness of the alternative procedural descriptions has been achieved."

3. *van Hiele*: Kullakin tasolla on sille ominainen symbolirakenteensa ja eri tasoilla olevien yksilöiden välillä vallitsee ymmärryskuilu. Jokaisella tasolla on juuri sille tasolle ominaiset kielelliset symbolinsa ja näiden symbolien välinen suhdeverkostonsa. Jos oppilaan ajattelu on eri van Hielen tasolla kuin se, mille opetus on suunnattu, niin toivotunlaista edistymistä ei tapahdu. Erityisesti, jos opetus etenee oppilaan van Hielen tasoa ylemmän van Hielen tason mukaisesti, niin oppilas ei voi ymmärtää kunnolla opetusta.

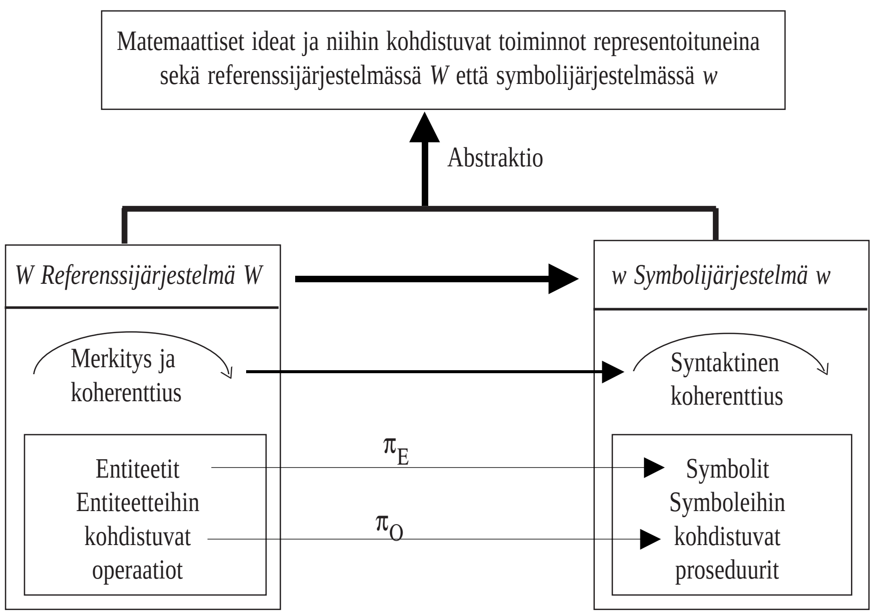
Sfard: Käsitteellistämisprosessin eri vaiheissa toimintojen ja objektien merkitys on erilainen. Sfardin ja Linchevskin (1994, 221—223) mukaan matemaattisten käsitteiden kehittymiseen rakennelmana, jossa tietyn vaiheen näkemys on seuraavan vaiheen kehittyneemmän ja laajemman näkemyksen siemenenä, sisältyy myös vaaroja. Ketjun katketessa matemaattista systeemiä voidaan alkaa opetella teoreettisena merkkipelinä ilman tulkinnallista yhteyttä alemman tason struktuureihin. Sfard kutsuu tällä tavoin syntyvää näkemystä pseudostrukturaaliseksi; oppija oppii merkkejä ilman merkityksiä.

Sfardin tuo kirjoituksissaan painokkaasti esille sen, että monilla algebrallisilla konstruktioilla on samanaikaisesti sekä prosessi- että objektiluonne. Matematiikan operationaalinen (*pro*cesses) ja strukturaalinen näkökulma (con*cepts*) vahvistavat käsitteenmuodostusprosessissa toinen toisiaan duaalisessa vuorovaikutuksessa, jota korostaakseen Sfard on lanseerannut käyttöön käsitteen *procept*. Matemaattisten ideoiden symbolinen merkintätapa antaa tulkitsijalle mahdollisuuden tulkita merkinnät tilanteen mukaan joko prosesseiksi tai objekteiksi. Esimerkiksi merkintä $2 + \sqrt{5}$ voidaan yhtäältä tulkita viittaavan kyseiseen laskutoimitukseen ja toisaalta suoraan toiminnon lopputulokseen eli lukuun $2 + \sqrt{5}$. Sfardin omat tutkimukset ovat kohdistuneet erityisesti algebrallisten käsitteiden kehittymisprosessiin sekä yksilön oppimisprosessissa että yhteisöllisinä kulttuurituotteina. Sfard onkin tästä syystä varovainen kannassaan teoriansa pätevyydestä geometristen käsitteiden kehitysprosessin tarkasteluun. Tässä yhteydessä voidaan kuitenkin todeta, että procept-tyyppinen dualismi esiintyy myös geometristen käsitteiden muodostumisprosessissa kuvioiden ja niiden geometristen ominaisuuksien visuaalisten tulkintojen ja käsitteellisten rajausten vuorovaikutuksena (vrt. ns. figuraaliset käsitteet, luku 3.3.2), vaikkakaan kyse ei tarkalleen ottaen ole samasta ilmiöstä. (Sfard 199; Sfard ja Linchevski 1994.)

2.3.5 van Hielen teoria verrattuna Schoenfeldin teoriaan

Yleensä matemaattisen tietämyksen kasvua tarkastelevissa tutkimuksissa on teoreettisena viitekehyksenä ollut kasvuprosessin tarkastelu toisaalta käsitteellisenä ja toisaalta proseduraalisena tietona (Hiebert & Lefevre 1986). Schoenfeld (1986) on pyrkinyt tarkastelemaan matemaattisen kompetenssin luonnetta laajemmin kuin se, mihin käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon muodostama dikotomia hänen mielestään antaa mahdollisuuksia. Tässä yhteydessä hän tarkastelee myös geometrian oppimista.

Schoenfeldin lähtökohtana on olettamus, että tietyn matemaattisen tiedon alueen ymmärtäminen symbolijärjestelmänä *w* edellyttää sille isomorfisen tulkintaympäristön *W*, jota hän kutsuu referenssimaailmaksi. Ideaalinen tilanne olisi se, jossa referenssimaailma *W* ja matemaattinen symbolijärjestelmä *w* ovat rakenneyhtäläiset (vrt. kuvio 4). Schoenfeldin mukaan matemaattinen abstraktio perustuu juuri tällaisen rakenneyhtäläisyyden, isomorfismin hahmottamiseen maailmojen *W* ja *w* välillä. Tämä isomorfismi toimii siis tulkinnallisena siltana symbolijärjestelmän ja referenssimaailman välillä. Tässä isomorfismissa maailman *W* entiteetit ja maailman *w* symbolit vastaavat toisiaan ja vastaavasti maailman *W* entiteetteihin kohdistuvat operaatiot vastaavat maailman *w* symboleihin kohdistuvia proseduureja siten, että rakenneyhtäläisyys tulkintakuvauksessa säilyy.



Kuvio 4. Referenssijärjestelmän W *ja symbolijärjestelmän* w *välinen rakenneyhtäläisyys* (Schoenfeld 1986, 231)

Täydellinen rakenneyhtäläisyys referenssimaailman *W* ja matemaattisen symbolijärjestelmän *w* välillä ei Schoenfeldin mukaan käytännössä ole mahdollinen. Schoenfeld esittää useita syitä, miksi malli ei näin yksinkertaisena voi toimia kunnolla matemaattisen ymmärrysprosessin selittäjänä. Eräs vaikeus aiheutuu siitä, että tulkintaympäristö *W*, esimerkiksi Dienesin palikoiden avulla havainnollistettu kymmenjärjestelmän malli, on yleensä aina joiltakin piirteiltään symbolijärjestelmän rakennetta rikkaampi. Tietyt *W*:n piirteet ovat *w*:n tulkinnan kannalta relevantteja ja auttavat sen ymmärtämistä, toiset piirteet ovat sen sijaan tulkinnan kannalta irrelevantteja. Symbolijärjestelmä *w* sisältää myös usein piirteitä, joille ei ole referenssimaailman tulkinnallista vastinetta. Opettajat tietävät hyvin, ettei kaikkia matematiikan tunneilla esitettäviä asioita suinkaan ole helppo havainnollistaa reaalimaailman ilmiöillä. Schoenfeldin lähtökohdaksi esittämässä mallissa symbolijärjestelmän tulkintaympäristönä vain yksi referenssimaailma *W*. Käytännössä näitä on kuitenkin yleensä useita. Isomorfismi *W*:n ja *w*:n välillä ei sekään ole ongelmaton. Käytännön oppimistilanteessa oppija hahmottaa rakenteiden välisen tulkintayhteyden yleensä vain osittain, ei suinkaan täydellisesti. Matematiikan tietyn aihealueen ymmärtämisen malli, johon Schoenfeld tarkastelussaan päätyy on, kuten arvata saattaa, mutkikas. Mallin kompleksisuus osoittaa, miksi matematiikan opetuksessa ei ole helppo päästä tavoitteeksi asetettuun ymmärtävään oppimiseen. (Schoenfeld 1986.)

Geometrian oppimisen esteeksi Schoenfeldin mukaan muodostuu usein se, että empiirinen tieto ja deduktiivinen tieto eivät kunnolla kohtaa toisiaan. Hänen mielestään kouluissa käytetty opetustapa jopa ruokkii tällaisen kahtiajaon syntymistä. Schoenfeld nostaa esiin erityisesti geometrisiin konstruktioihin ja todistamiseen liittyvien taitojen irrallisuuden. Oppilaan ymmärtämisprosessille ei ole välttämättä eduksi sekään, että geometrisia tietorakenteita pyritään konstruoimaan monen eri referenssijärjestelmän kautta. Geometrisia ominaisuuksia tarkastellaan sekä konkreettisissa ympäristössä että monilla erityyppisillä geometrisiin tarkasteluihin kehitetyillä representaatiotavoilla. (emt., 249—263.)

van Hielen teorian kannalta tulkiten opettajan ja oppilaan ja vastaavasti eritasoisten oppilaiden on usein vaikea ymmärtää toinen toisiaan, vaikka toiminta näennäisesti näyttää tapahtuvan saman symbolijärjestelmän *w* puitteissa. Geometristen käsitteiden ja käsitesuhteiden, jotka tähän symbolijärjestelmään kuuluvat, tulkintaympäristö eli referenssijärjestelmä *W* voi kuitenkin eri yksilöillä olla kovin erilainen.

3 Geometrinen käsitetieto ja sen oppiminen

3.1 Käsitetiedon olemuksesta

3.1.1 Käsitetiedon määrittelyä

Matemaattisen tietämyksen karttumista on luonnollista tarkastella yhtäältä *käsitetiedon* eli konseptuaalisen tiedon (conceptual knowledge) lisääntymisenä ja toisaalta *menetelmätiedon* (procedural knowledge) oppimisena (Hiebert & Lefevre 1986). Käsitetiedon karttumisella tarkoitetaan tässä tiedonalueen käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien eli *käsitesuhteiden* oppimista ja sitä kautta tapahtuvaa tietorakenteiden kehittymistä. Menetelmätiedon lisääntymisellä viitataan vastaavasti erilaisten toimintojen ja taitojen oppimiseen. Vaikka käsitetieto usein samaistetaan deklaratiiviseen tietoon (Anderson 1983), tai ns. "knowing that" -tietoon (Ryle 1949), kyse ei kuitenkaan ole tarkkaan ottaen samasta asiasta. Käsitetietoon luonnollisesti kuuluu osaksi myös deklaratiivista faktatietoa, mutta käsitetieto ei kuitenkaan ole pelkästään tätä. Käsitetiedolle on Hiebertin ja Lefevren mukaan tunnusomaista erityisesti sen sisältämien tietoelementtien linkittyneisyys. Käsitetiedolla viitataan siis nimenomaan rakenteiseen, merkityssuhteita sisältävään tietoon. Eisenhartin ym:n (1993, 9) tulkinnan mukaisesti käsitetieto on tietämystä, joka selittää ja antaa merkityksen matemaattisille toiminnoille. Hiebertin ja Lefevren esittämän analogian mukaan käsitetietoa voidaan pitää matemaattisen tiedon semanttisena komponenttina ja menetelmätietoa sen syntaktisena komponenttina (Hiebert & Lefevre 1986, 4—8).

Vaikka käsitetieto ja menetelmätieto jossakin mielessä ovatkin erityyppisiä tietämyksen lajeja, niin matemaattinen ymmärrys luonnollisesti koostuu kummankin tyyppisestä osaamisesta ja myös näiden yhteen nivomisesta. Jos oppilaiden käsitteellinen ymmärrys ja algoritminen suoritustaso eivät ole tasapainossa, niin oppilaille voi syntyä intuitiivinen tunne siitä, että he ymmärtävät matematiikkaa, mutta eivät silti osaa ratkaista matemaattisia ongelmia. He voivat saada laskuista oikeita tuloksia, mutta eivät kuitenkaan ymmärrä, mistä laskuissa oikeastaan on kysymys (emt., 9). On selvää, että monet algoritmiset suoritukset ovat opittavissa myös jokseenkin irrallaan siitä käsitteellisestä kehyksestä, johon ne liittyvät. Esimerkiksi Byrnesin ja Wasikin (1991) tutkimus antaa selvän osoituksen siitä, että murtolukujen laskutoimituksissa virheiden määrä ei ole suoraan riippuvainen siitä, kuinka hyvin lapsi hallitsee murtolukukäsitteen. Vaikka menetelmällistä tietoutta voidaan opettaa jossain määrin sellaisenaan, esimerkiksi Silver (1986, 185) tähdentää sitä, että menetelmätiedon sovellettavuus eri tilanteisiin on parempi, jos rutiinien oppiminen ja käsitteellinen ymmärrys ovat tasapainossa.

Tiettyä tiedonaluetta koskevan käsitetiedon voidaan edellä olevan mukaisesti katsoa koostuvan kyseisen tiedonalueen kannalta relevanteista käsitteistä ja näiden käsitteiden välisistä relaatioista eli käsitesuhteista. Tarkastelen seuraavaksi, mitä näillä käsitetiedon komponenteilla oikeastaan tarkoitetaan ja miten yksittäisten oppilaiden johonkin tiedonalueeseen kohdistuvalla käsitetiedon tutkimuksella tavoitellaan.

3.1.2 Käsitteiden tehtävät ajattelussa

Käsitteillä on E.E. Smithin (1989, 501) mukaan ajattelussamme seuraavat kolme perustehtävää:

1) Käsitteet edistävät kognitiivista ekonomiaa so. käsitteiden avulla voimme vähentää käsiteltävän informaation kokonaismäärää jättämällä osan informaatiosta näkökulmamme kannalta epäoleellisena huomiotta ja keskittymällä siihen osaan informaatiota, jota pidämme näkökulmamme kannalta tärkeänä.

2) Käsitteet välittävät menneen ajan nykyisyyteen. Koska kokemiamme reaalimaailman tilanteita emme koskaan elä täsmälleen samanlaisina uudelleen varastoimme käsitteisiimme niitä todellisuuden piirteitä, joilla katsomme olevan pysyvyyttä.

3) Käsitteet mahdollistavat induktiivisen päättelyn, sillä käsitteiden avulla niputamme informaatioyksiköitä yhteen ja havaittuamme, että yksi kokonaisuuden osista toteutuu, odotamme myös muiden kokonaisuuteen kuuluvien toteutuvan.

3.1.3 Käsitteet ja merkitykset

Käsitteitä tai niiden merkityksiä tarkastellessamme emme juuri voi välttää törmäämästä metatason ongelmaan käsitteen käsitteestä ja merkityksen merkityksestä. Vaikka käsitteen olemuksen ongelmaa, jota Flavell (1970, 983) nimitti sanakirjantekijän painajaiseksi, onkin pohdittu perusteellisesti lähes jokaisessa merkityksiä ja käsitteitä tarkastelevassa julkaisussa (ks. esim. Kangassalo 1982; 1991; Kendler 1964; Klausmeier & Allen 1978, 6—11; Klausmeier 1992; Lundh 1983, 126—129; Nelson 1985, 8—17; Palomäki 1991, 94—121; Schaefer 1979, 88—90), vakiintunutta ja kattavaa määritelmää käsitteelle ei ole muodostunut. Eri näkökulmista tarkastellen eri piirteet käsitteiden olemuksesta näyttävät tulevan eri tavoin tärkeiksi. Tästä syystä tarkastelen seuraavissa alaluvuissa käsitteiden yleistä olemusta useammalta eri kannalta. Valitsemani näkökulmat osoittavat likimäärin myös sen ajallisen kehitystrendin, mikä suhtautumisessa käsitteiden olemukseen on tapahtunut. Jaottelulla olen pyrkinyt nostamaan esiin erityisesti niitä käsitteen olemuksen puolia, joilla on tämän tutkimuksen kannalta eniten merkitystä. Pedagogiikan kannalta tällainen tarkastelu on sikäli merkittävää, että pedagogiset ratkaisut koskien käsitteellisen tiedon opettamista perustuvat yleensä enemmän tai vähemmän tiedostettuun näkemykseen käsitteiden olemuksesta ja niiden oppimisesta.

Seuraavissa tarkasteluissa teen tavalliseen tapaan eron käsitteen tai yleisemmin kielellisen ilmauksen *tarkoitteen* eli *ekstension* ja sen *merkityksen* eli *intension* välillä. Ilmauksen ekstensio on niiden olioiden joukko, johon ilmaus soveltuu, ja sen intensio on tieto ilmauksen ekstensiosta eri konteksteissa. Kielelliset ilmaukset voidaan jakaa yksilötermeihin, predikaatteihin ja lauseisiin. Yksilötermin intensiona on yksilökäsite, predikaatin intensiona ominaisuus tai suhde ja lauseen intensiona propositio (vrt. Niiniluoto 1980, 119—123). Käsitteen merkityksellä en jatkossa yleensä tarkoita niinkään ilmauksen lingvististä merkitystä vaan pikemminkin sen koettua psykologista merkitystä.

3.1.4 Klassinen näkemys käsitteestä

Klassinen näkemyksen mukaisesti käsite on ymmärretty entiteetiksi, joka saa merkityksensä sen kaikissa esimerkkitapauksissa havaittavien yhteisten ominaisuuksien kautta. Yksittäin nämä yhteiset ominaisuudet ovat esimerkkitapauksille käsitteen ekstensioon kuulumisen kannalta välttämättömiä ehtoja ja sopivana yhdistelmänä riittäviä ehtoja. Käsite muodostuu tämän mukaisesti abstrahoimalla tarkasteltavista tapauksista niiden yhteisiä ominaisuuksia. Abstrakteille, yksikäsitteisesti määriteltävissä oleville käsitteille, kuten esimerkiksi matematiikan käsitteille, tällainen luonnehdinta vaikuttaa luontevalta. Klassinen tulkinta käsitteistä esittää käsitteet absoluuttisen koherentteina, so. jokaisesta objektista voidaan yksikäsitteisesti sanoa, kuuluuko se käsitteen ekstensioon vaiko ei. Syntyvien todellisuuden käsitteellisten jakojen, kategorioiden luonnollisuuteen klassisessa näkemyksessä ei sen sijaan yleensä oteta kantaa (Komatsu 1992, 502). Kaikkia käsitteen ekstensioon kuuluvia esimerkkitapauksia pidetään tässä näkökulmassa ekvivalentteina muttei täysin identtisinä, jolloin kaikki käsitteen esimerkkitapaukset ovat käsitteen edustajina käsitteen omaksuneelle samanarvoisia (Zimmerman 1979, 60).

Erityisesti vanhemmat lähteet esittävät käsitteen edellä kuvatulla tavoin kaikille esimerkkitapauksille yhteisten ominaisuuksien yhdelmänä. Sama näkökulma esiintyy kuitenkin myös uudemmissa tutkimuksissa. Esimerkiksi Heinze-Fry ja Novak (1990, 461) määrittelevät käsitteen seuraavasti: "Concepts are perceived reguralities or relationships within a group of objects or events and are designated by some sign or symbol". Klassisessa tarkastelutavassa käsitteiden objektiivinen, staattinen ja valmiiksi muotoutunut merkitys korostuu käsitteen yksilöllisen, kehittyvän merkityksen jäädessä vähemmälle huomiolle. Perustaltaan klassisen näkökulman mukainen määritelmä käsitteelle voi kuitenkin tuoda käsitteen olemuksen eri puolet varsin monipuolisestikin esiin. Laine (1984, 16) määrittelee käsitteen seuraavasti: "Käsite on joko samaa kieltä puhuvan ihmisryhmän piirissä yleistynyt tai yksilön mentaalisena konstruktiona muodostama esineiden, symbolien, asioiden tai tapahtumien luokka, joka perustuu ko. esineissä, symboleissa tai tapahtumissa esiintyviin yhteisiin ominaisuuksiin ja johon voidaan viitata tietyn nimen tai symbolin avulla." Klassisessa tulkinnassa on pidetty tärkeänä sitä, että käsitteisiin liittyy aina jokin termi tai symboli. Tällöin käsitteisiin on mahdollista viitata ja niitä voidaan käyttää kommunikoinnin välineenä. Tätä käsitteen liittymistä johonkin kielelliseen ilmaukseen, yleensä nimenomaan sanaan, monet tutkijat ovat pitäneet välttämättömänä edellytyksenä todelliselle käsitteen omaksumiselle (Bolton 1972, 23, 47, 71; Nelson 1985, 71).

Käsitteiden on yleensä edellytetty olevan merkitykseltään täsmennettyjä. Periaatteessa kaikki käsitteet ovatkin klassisessa mielessä tulkittuina esimerkkitapaustensa yhteisten ominaisuuksien avulla määriteltävissä, vaikkakin käytännössä tehtävä saattaa monissa tapauksissa osoittautua hyvin vaikeaksi. Käsitteen määrittelyvaatimus esiintyy usein lievemmässä muodossa tulkintana, että käsitteiden pitää olla tietoisesti koettuja ja niiden ominaisuuksia tulee pystyä kielellisesti kuvaamaan. Flavell ei kuitenkaan laajassa käsitteiden kehitystä tarkastelevien tutkimusten katsauksessaan ole näin jyrkkä. Flavellin mukaan henkilön voi katsoa omaavan käsitteen myös implisiittisesti, jos hänen toimintansa viittaa tämän käsitteen käyttöön, vaikka kyseinen henkilö ei itse pystyisi millään muotoa käsitettä eksplikoimaan (Flavell 1970). Nelson kritisoi voimakkaasti käsitystä, jota Flavell edustaa. Nelson ei voi hyväksyä sitä, että lapsen katsottaisiin omaksuneen esimerkiksi käsitteenä abstraktin, pysyvän objektin käsitteen sillä perusteella, että lapsen toimintatapa tähän viittaa lapsen itse tätä käsitettä kuitenkaan tiedostamatta (Nelson 1985, 71). Ongelma konkretisoituu tässäkin tutkimuksessa tutkittaessa käsitteiden tulkintoja yhtäältä niiden käytön ja toisaalta niille annettujen määrittelyjen kautta. Käsitteen oppimisen ymmärtämisen kannalta keskeistä tulee olemaan myös oletus käsitteen muodostumisesta invarianteiksi havaittujen ominaisuuksien yleistyksenä.

3.1.5 Käsite tulkittuna prototyypiksi

Näkemystä käsitteestä sen alaan kuuluvien tapausten yhteisten ominaisuuksien abstraktiona syntyneenä konstruktiona on perusteltu pääasiassa sellaisten tutkimusten tuloksilla, joissa on käytetty yksinkertaisia, täsmällisesti määriteltyjä ja jopa keinotekoisia käsitteitä. Erityisesti luonnollisten käsitteiden tutkimuksen yhteydessä näkemys on saanut osakseen ankaraa kritiikkiä (esim. Mervis & Rosch 1981). Samoin matemaattisten ja loogisten suhdekäsitteiden oppimisen selittämiseen teorian on katsottu soveltuvan heikosti (Bolton 1977, 108—110).

Monille luonnollisille käsitteille on vaikea antaa tyhjentävää ominaisuusluetteloa tai sitten sellaista ei edes ole olemassa. Vielä hankalammaksi tehtävä muodostuu, jos lisäksi ominaisuuksista pyritään Smithin ym:n (1974) tapaan erottamaan toisistaan määrittelevät ja karakteristiset ominaisuudet. Näitä ovat ominaisuudet, jotka kuuluvat ehdottomasti kaikille luokan edustajille, ja ominaisuudet, jotka kuuluvat vain tyypillisimmille edustajille. Esimerkiksi Macnamara on epäillyt koko määrittelevän tai välttämättömän ominaisuuden mielekkyyttä luonnollisten käsitteiden yhteydessä. Macnamaran mielestä esimerkiksi nelijalkaisuutta voi pitää eräänä luonnollisimpana välttämättömänä ominaisuutena hevoselle. Siitä huolimatta yksittäinen hevonen pysyy yleisen käsityksen mukaisesti hevosena, vaikka yksi sen jaloista amputoitaisiin. Monia ominaisuuksia näytetään pidettävän luonnollisille käsitteille määrittelevinä, vaikka ne eivät ole tarkasti ottaen ole käsitteen välttämättömiä ominaisuuksia (Macnamara 1977, 142).

Toinen luonnollisille käsitteille ominainen piirre, jota perinteinen käsitteen olemukseen kohdistunut tutkimus ei juuri ole käsitellyt, on esimerkkitapauksiin liittyvä tyypillisyysdimensio. Kaikki käsitteen ekstensioon kuuluvat tapaukset eivät ole käsitteen merkityksen kannalta samanarvoisia, vaan toiset käsitteen alaan kuuluvat tapaukset ovat tyypillisempiä käsitteen edustajia kuin toiset. Sekä tämä tyypillisyysdimensio että luonnollisen käsitteen avoimuudesta aiheutuva luokkarajojen epätäsmällisyys, on pyritty selittämään sillä, että käsitettä eivät määrääkään kaikkien ekstensioon kuuluvien kohteiden yhteiset ominaisuudet vaan kohteiden ns. perheyhtäläisyys. Luokkajäsenyyden selittämiseen käytetty käsite perheyhtäläisyys, family resemblance, on peräisin filosofi Ludvig Wittgensteinilta. Samaan luokkaan kuuluvilla objekteilla ei tarvitse välttämättä olla kaikille yhteisiä ominaisuuksia lainkaan, mutta mitä enemmän tietyllä objektilla on yhteisiä ominaisuuksia muiden objektien kanssa sitä tyypillisempänä tätä objektia pidetään. (Rosch 1973; Rosch & Mervis 1975.)

Käsitteen representoituminen muistiin on yleensä tämän näkemyksen piirissä selitetty tapahtuvaksi prototyypin so. eräänlaisen tyypillisen edustajan muodossa eikä määrittelevien piirteiden luettelona (Rosch 1973; Rosch & Mervis 1975; Rosch ym. 1976). Perustan prototyyppioletukselle ovat muodostaneet hahmontunnistukseen ja skeeman muodostukseen liittyvien tutkimusten tulokset (esim. Attneave 1957; Evans & Edmonds 1966; Posner ym. 1967; Posner & Keele 1968). Tällaisissa tutkimuksissa on osoitettu, että muodostuvan prototyypin ei tarvitse olla identtinen minkään oppimistapahtuman yhteydessä havaitun yksittäisen esimerkin kanssa (Posner & Keele 1968; 1970; Reed 1972; Homa & Chambliss 1975; Rosch ym. 1976; Homa & Vossburgh 1976). Prototyyppinen tiedontallennus ei myöskään näytä rajoittuvan pelkästään vaikeasti määriteltävien ja sumearajaisten luonnollisten käsitteiden oppimiseen, vaan kyseinen prosessi havaitaan myös hyvin määriteltyjen abstraktien käsitteiden, kuten esimerkiksi matemaattisten käsitteiden, oppimisen yhteydessä (Hampton 1981; Tennyson & Park 1980; Tennyson ym. 1981; Tennyson ym. 1983).

Prototyypin muodostumistavasta on esitetty kaksi toisistaan poikkeavaa perusmallia: piirteiden keskiarvomalli (feature averaging model, fam) ja piirteiden frekvenssimalli (feature frequency model, ffm). Kummastakin mallista on lisäksi useita variaatioita. Piirteiden keskiarvomallin mukaan prototyypin piirteet saavat havaittujen käsitteen ekstensioon kuuluvien objektien piirteiden keskimääräiset arvot. Mallin ffm mukaan taas prototyypin piirrearvoiksi tulevat käsitteen esimerkkitapausten piirteiden useimmiten havaitut arvot. (Strauss 1979, 618—622; Kellogg ym. 1978, 211—213.)

Perheyhtäläisyysoletukseen tukeutuvaa näkemystä käsitteenmuodostuksesta karakterisoivat Komatsun (1992, 503) mukaan seuraavat hypoteesit (ks. myös Millward 1980, 256—257):

1) Esimerkkitapausten luokkajäsenyys ei ole dikotominen joko—tai-suhde, jolla päätetään, kuuluuko tapaus luokkaan vaiko ei, vaan esimerkkitapaukset ovat enemmän tai vähemmän tyypillisiä luokkansa edustajia. Esimerkkitapausten tyypillisyysdimension ymmärtäminen on osa käsitteen ymmärtämistä.

2) Jokainen käsitteeseen liittyvä attribuutti on useammalla kuin yhdellä käsitteen esimerkkitapauksella, mutta ei välttämättä kaikilla.

3) Käsitteen attribuuteilla on erilaiset painoarvot käsitteen määrittäjinä. Tiettyä käsitteellistä luokkaa karakterisoivan attribuutin painoarvo on sitä suurempi mitä useammalla ko. luokan jäsenellä se esiintyy.

4) Attribuuttien painoarvoja voidaan pitää keskenään riippumattomina ja esimerkkitapauksen perheyhtäläisyys muodostuu eri attribuuttien painoarvoista additiivisesti. Esimerkkitapauksen perheyhtäläisyysside luokan sisällä on sitä voimakkaampi, mitä enemmän sillä on painoarvoltaan korkeita yhteisiä attribuutteja saman käsitteen eri esimerkkitapausten kanssa. Toisaalta perheyhtäläisyys erottaa eri luokat keskenään. Luokan sisällä perheyhtäläisyys on korkea ja eri luokkiin kuuluvien tapausten välillä vastaavasti matala.

5) Käsite varastoi sen alaan kuuluvien tapausten piirteet keskimääräisesti. Eri tutkijat ovat esittäneet toisistaan poikkeavia teorioita siitä, millaisina prosesseina käsitteisiin sisältyvän keskimääräisen informaation tallennusta voisi mallittaa.

Eräissä käsitteiden olemusta käsittelevissä teorioissa oletetaan, että käsite on itse asiassa kokoelma havaittuja ja muistiin tallennettuja esimerkkitapauksia. Teorioittain vaihtelee näkemys siitä, kuinka mittavan määrän esimerkkejä yksilö muistiinsa varastoi. Joissakin teorioissa oletetaan, että kaikki esimerkkitapaukset muistetaan (Reed 1972). Eräissä muissa teorioissa muistin oletetaan toimivan taloudellisemmin ja varastoivan vain tyypilliset tapaukset tai useimmin toistuvat tapaukset (Smith & Medin 1981; Rosch 1975). Yksittäiset muistissa olevat esimerkit muodostavat tämän näkemyksen mukaan perustan uusien havaintojen luokittelulle. Luokittelun teoreettisina malleiksi on ehdotettu joko proseduuria, jossa sopivalla metriikalla määritetään keskimääräinen etäisyys luokiteltavasta tapauksesta jo muistissa oleviin kategorian esimerkkeihin, tai vaihtoehtoisesti proseduuria, jossa etsitään tapaukselle lähin tallennettu esimerkkitapaus. Ensin mainitussa mallissa luokiteltava tapaus liitetään kuuluvaksi siihen kategoriaan, johon näin saatu keskimääräinen etäisyys on pienin, ja jälkimmäisessä mallissa siihen kategoriaan, johon lähimmäksi osoittautunut aikaisemmin muistiin tallentunut tapaus kuuluu. (Barsalou 1990, 132; Millward 1980, 249—254; Medin & Schaffer 1978, 207—238.)

Suoraan yksittäisten esimerkkitapausten kokoelmina rakentuvien käsitteiden on katsottu selittävän hyvin eräitä muistitoimintojen kontekstisidonnaisia ominaisuuksia, joita esimerkiksi perheyhtäläisyyteen perustuvien keskiarvomalleilla on ollut vaikea selittää. Tämäkään näkemys ei ole ongelmaton. Mallin kannattajille on tuottanut vaikeuksia selittää esimerkiksi havainnot, joiden mukaan tietyt kategorian yleispiirteille perustuvat keinotekoiset esimerkit, joita koehenkilö ei ole koskaan ennen nähnyt, voivat tuntua koehenkilölle tutummilta kuin monet niistä esimerkeistä, jotka hänelle todellisuudessa on aiemmin näytetty. (Komatsu 1992, 508—509.)

3.1.6 Käsite osana siihen kytkeytyvää skeemaa ja tietorakennetta

Eri näkökulmista tarkastellen näyttää siltä, että informaationkäsittelyn komponentteina toimiviin käsitteisiin sisältyy sekä yksittäisten esimerkkien tasolta yleistettyä tietoa että spesifiä esimerkkitason tietoa. *Skeeman* (*kehyksen*, *skriptin*) käsitteellä on pyritty tavoittamaan tällaista kehysidean ympärille kytkeytyneen monelle eri abstraktiotasolle sijoittuvan tiedon muodostamaa rakennetta. Saariluoma (1988, 89) määrittelee skeeman abstraktiksi tietorakenteeksi, johon muistettavan asiatyypin elementtien järjestys on kuvautuneena. Komatsun (1992, 510) mukaan käsitteiden tulkitseminen skeemoiksi mahdollistaa sekä käsitteen tulkinnan esimerkkitapaustensa kokoelmaksi että perheyhtäläisyyden yhteen liittämäksi konstruktioksi.

Skeemojen käyttökelpoisuus tietorakenteiden kuvailussa selittyy suurelta osin niiden sisältämän informaation monipuolisuudella. Osa skeeman informaatiosta on esittyneenä käsitteiden perinteisen kuvaustavan mukaisesti piirteisiin eli aukkoihin (slots), esimerkiksi kohteen muoto, väri, sijainti, ja piirteiden saamiin piirrearvoihin (slot values), esimerkiksi pyöreä, sininen, nurkassa jne. Skeema sisältää tavallisesti myös tiedon piirrearvojen todennäköisyyksistä. Jotkin piirrearvot voivat leimautua tietylle piirteelle mahdottomiksi tai toisena rajatapauksena välttämättömiksi. Käsiteltävässä asiayhteydessä muutoin avoimeksi jäänyt piirrearvo voi täyttyä piirteen oletusarvolla. Piirteitä ja niiden arvoja koskevan tiedon lisäksi skeemaan oletetaan sisältyvän tietoa piirteiden välisistä suhteista. Käsitteiden näkökulmasta asiaa tarkastellen skeemat sisältävät informaatiota sekä käsitteiden sisäisestä rakenteesta että niiden keskinäisistä suhteista. Käsitteeseen lintu liittyvään skeemaan sisältyy Smithin (1989, 511) mukaan esimerkiksi skeeman aktivointiin johtava termi (lintu), tieto käsitteen yläkäsitteestä (eläin), skeeman piirteet eli attribuutit (esim. ravinto), piirrearvot (esim. kala), piirrearvojen oletusarvot (esim. hyönteiset), piirteiden rankeeraus tärkeyden mukaan ja piirteiden väliset relaatiot. Piirteiden tärkeysjärjestys voi vaihdella kontekstista toiseen.

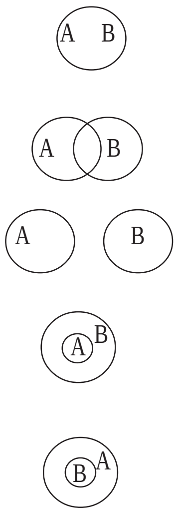
Tietorakenteena skeemat muistuttavat eräänlaisia verkostoja, jonka vuoksi skeemojen ulkoisina representaatioina onkin käytetty erilaisia verkkomalleja. Avainideoihin (käsitteisiin) ankkuroituneiden hierarkkisten skeemojen avulla yksilö voi tarkastella asioita monelta eri abstraktiotasolta käsin. Skeemat voivat sisäiseltä rakenteeltaan olla hierarkkisia ja skeemat voivat hierarkisoitua suhteessa toinen toisiinsa. Alimmalla abstraktiotasolla skeemat voivat sisältää konkreettia esimerkkikohtaista tapaustietoa siitä, miten asiat maailmassa ovat. Toisaalta skeemat voivat sisältää edellisen lisäksi tietoa asioiden välisistä kausaalisista ja loogisista yhteyksistä, luokittelu- ja tunnistamistoiminnon perustaksi tarvittavaa tietoa jne. Skeemat ovat siis eräänlaisia odotusrakenteita, jotka mukautuvat erityyppisiin käyttötilanteisiin. (Esim. Komatsu 1992, 510—511.)

Käsitteen perusideaan liittyvän skeeman ja attribuuttiensa kautta rajautuvan käsitteen välistä suhdetta voidaan havainnollistaa tarkastelemalla erikseen skeeman käyttöä reaalisen ympäristön jäsentämisessä erityisesti tunnistamisprosessissa ja käsitteen ekstension täsmällistä määrittämistä ts. käsitteen rajausta. Osherson ja Smith (1981, 57) erottavat toisistaan *käsitteen ytimen* (core) ja *käsitteen tunnistusproseduurin* (identification procedure). Käsitteen ydin muodostuu sellaisesta informaatiosta, jonka perusteella käsite tulee täsmällisesti määritellyksi. Koska käsitteen ydin sisältää tietoa attribuuttien keskinäisistä suhteista, sen merkitys ajattelussa on keskeinen suhteutettaessa käsitteitä toinen toisiinsa. Esimerkiksi käsitehierarkioiden omaksuminen edellyttää tietoa käsitteiden ytimistä. Käsitteen tunnistusproseduuri mahdollistaa nopeiden ratkaisujen teon koskien kohteen kuulumista johonkin luokkaan. Kosslyn (1978, 185) pitää mahdollisena, että mikäli käsitteen pintainformaatio on koodattu mielikuvina eikä propositionaalisessa muodossa, niin sitä ei pystytä lainkaan käyttämään hyväksi toisten käsitteiden määrittelyssä. Jollakin tapaa tietäminen näyttää jäävän tiedostamatta silloin, kun tieto on koodattu mielikuvina eikä propositioina. Mielenkiintoista on, että senkin jälkeen, kun koehenkilöt ovat omaksuneet käsitteen ytimen käytännöllisesti katsoen täydellisesti, niin usein he silti näyttävät perustavan kohteiden luokituksensa nimenomaan pintainformaatioon eikä käsitteen ytimeen (Bourne 1982).

Todellisuuden käsitteistämistä on monilla eri osa-alueilla kuvattu käyttäen apuna skeemojakin laajempia ja jäsentyneempiä tietorakenteita. Esimerkiksi *mentaalimallit* ovat osoittautuneet toimiviksi tietorakenteiden mallintajiksi mm. selvitettäessä päättelyprosessien luonnetta (Johnson-Laird 1980; 1983; 1987; Holland ym. 1986), käsitteen muodostukseen liittyvien prototyyppieffektien alkuperää (Lakoff 1986; 1990) sekä käsitteellisen tiedon olemusta (Neisser 1990). Erotuksena perinteisestä tavasta hahmottaa käsitteet ja käsiterakenteet staattiseksi säilömuistin tietovarannoksi mentaalimallien kehittäjät ovat korostaneet malliensa dynaamista luonnetta ja työmuistin merkitystä mentaalimallien konstruoinnissa ja modifioinnissa (Gilhooly 1987, 24—25; Barsalou 1990, 118—126).

Yksittäisten käsitteiden merkitysten tarkastelu on keinotekoista tai jopa mahdotontakin, sillä käsitteet saavat merkityksensä toisten käsitteiden kautta. Käsitteiden linkittyminen on aina keskeinen osa tietämystämme. Tietorakenteiden kuvauksissa käsitteiden kytkeytymistä toinen toisiinsa on kuvattu *linkeillä*. Linkkejä on tutkimuskirjallisuudessa tyypitetty monella tavalla (Åhlberg 1990, 31—33; 1991a, 107—110). Åhlbergin arvion mukaan tyypitykset on yleensä kuitenkin tehty vailla valitun luokitustavan riittävää semanttista tai ontologista analyysiä. Åhlberg itse luettelee esimerkkejä joistakin käsitteiden välisistä relaatioista, joiden tarkastelua hän pitää perusteltuna. Näihin kuuluvat mm. luokkien väliset inkluusiosuhteet sekä objektien ja niiden ominaisuuksien väliset suhteet (Åhlberg 1991a, 109—110). Pines (1985, 112) pitää keskeisimpinä käsitteiden välisinä relaatiotyyppeinä seuraavia: 1) joukon ja sen alkioiden välisiä relaatioita ja 2) kokonaisuuden ja osien välisiä relaatioita. Monet koulussa opittavien geometristen käsitestruktuurien sisältämät käsitteiden väliset relaatiot ovatkin jompaa kumpaa Pinesin mainitsemasta relaatiotyypistä. Ensimmäiseen kategoriaan kuuluvat relaatiot muodostavat perustan lukuisille luokitteluille, joita geometriassa käytetään. Silloin, kun ryhmiteltävät alkiot itsessäänkin ovat luokkia, ryhmittely johtaa hierarkkisiin käsiterakennelmiin, joissa relaatiot ovat luokkainkluusioita. Toiseen kategoriaan kuuluvat relaatiot muodostuvat keskeisiksi eksplikoitaessa perusteita, jotka ovat luokitusten taustalla ja generoimassa luokkien välisiä suhteita.

Hierarkioiden ymmärtäminen on käsitteellisen tiedon oppimisen näkökulmasta monimutkainen ongelmakenttä. Tämän työn kannalta kysymys on sikäli merkittävä, että erityisesti luokkainkluusion ymmärtämistä on pidetty yhtenä merkittävänä indikaattorina oppilaiden geometrisen ajattelun kehityksessä. Oppilaiden muodostamien luokitusten keskinäisten relaatioiden selvittäminen on periaatteessa yksinkertaista. Jos haluamme tutkia, millä tavoin esimerkiksi geometristen kuvioiden luokitus A (esimerkiksi neliöt) suhtautuu luokitukseen B (esimerkiksi neljäkkäät), niin oppilaan A:n ja B:n relaatiolle antamia tulkintoja on periaatteessa viisi mahdollista (Sternberg ym. 1980, 221). Havainnollistan tulkintoja jatkossa esittämissäni kaavioissa seuraavin symbolein:



E : **Ekvivalenssi**. Samat kuviot luokitellaan A:ksi ja B:ksi.

L : **Leikkaus**. A voi olla B ja B voi olla A. Osa kuvioista luokitellaan A:ksi mutta ei B:ksi, osa B:ksi mutta ei A:ksi ja osa sekä A:ksi että B:ksi.

D : **Disjunktiivinen, poissulkeva luokitus**. A ei voi olla B. Jos kuvio luokitellaan A:ksi, niin sitä ei voi luokitella B:ksi.

I : **Aito luokkainkluusio**. A on aina B. Jos kuvio luokitellaan A:ksi, niin se luokitellaan aina myös B:ksi. Kaikkia B:ksi luokiteltuja kuvioita ei luokitella A:ksi.

K : **Käänteinen luokkainkluusio**. B on aina A. Jos kuvio luokitellaan B:ksi, niin se luokitellaan aina myös A:ksi.

Kuvio 5. Käsitteiden A ja B välisten relaatioiden tulkinnat

3.2 Käsitetiedon oppiminen ja opettaminen

3.2.1 Yhteisten ominaisuuksien abstrahointiin perustuva käsitteen oppiminen

Aristotelisen tradition mukaista näkemystä käsitteestä voidaan luonnehtia yleistykseksi, joka sisältää joukon määritteleviä ominaisuuksia sekä näiden välisen riippuvuussuhteen (Mervis & Rosch 1981; Bourne 1974). Käsitteen omaksujan oma rooli kuvataan teorioiden ääritapauksissa joko passiiviseksi aistihavaintojen rekisteröijäksi tai aktiiviseksi relevanttien ominaisuuksien etsijäksi ja testaajaksi. Ensin mainitun kaltainen tulkinta esiintyy yleensä puhtaissa S—R-paradigmaan perustuvissa teorioissa, joissa korostetaan käsitteen oppimisen etenevän samojen yleisten periaatteiden mukaan kuin mikä tahansa oppiminen. Käsitteet abstrahoidaan yksittäisten esimerkkitapaustensa yhteisistä ominaisuuksista. Samanlaisina pysyvät ominaisuudet vahvistuvat, mutta vaihtelevat ominaisuudet jäävät vahvistumatta. Käsitteen omaksujan oma aktiivinen rooli on suljettu pois.

Tämä käy ilmi Kendlerin (1964) tunnetussa käsitteen määritelmästäkin, missä käsite määritellään yhteisenä reaktiona vaihteleviin ärsykkeisiin.

Nk. *hypoteesin testaus -teorioissa* (esim. Bruner ym. 1956; Restle 1962; Trabasso & Bower 1968) korostetaan käsitteen oppijan aktiivista osuutta oppimistapahtumassa. Oppija konstruoi käsitteen ominaisuuksista joukon hypoteeseja, jotka ovat joko oikeita, vääriä tai epärelevantteja kyseiseen tilanteeseen. Näitä oppilas oppimisen edetessä testaa, hyväksyy tai muuntaa. (Greene 1977; Cohen 1977.)

Vaikka pinnallisesti tarkastellen näyttää siltä, että hypoteesin testaus -teoriat tavoittavat käsitteenoppimisprosessin luonteesta enemmän kuin puhtaat S—R-paradigman teoriat, on näiden selitystapojen keskinäinen vertailu kuitenkin hankalaa. Cohen (1977) toteaakin, että hermostollisella tasolla oppijat ovat kaikki "passiivisia" ja päätöksentekoprosessin tasolla "aktiivisia". Usein teorian käyttötarkoitus myös määrää sen aktiivisuus—passiivisuus-tason, jolle teoria rakennetaan. Kouluoppimista koskeva teoria luonnollisesti painottuu prosesseihin, kun taas esimerkiksi eläinten ja ihmisten yhteisten oppimismekanismien kuvauksessa korostuu voimakkaammin fysiologinen passiivisen oppijan rooli. Hypoteesin testaus -teoriat pystynevät kuitenkin puhdasta abstraktioteoriaa paremmin vastaamaan alunperin Cassirerin (1953) esittämään syytökseen siitä, että abstraktioteoriat olettavat sen, minkä yrittävät selittää, ts. periaatteen, minkä avulla objektit luokitellaan käsitteen ekstensioon kuuluviksi. Jotta yhteinen ominaisuus voitaisiin yleistää, pitäisi jotenkin tietää, miltä objekteilta se vaaditaan ja miltä ei. Laboratoriokokeissa tämä ei yleensä muodostu lainkaan ongelmaksi. Tällaisessa tilanteessa koehenkilö yleensä tietää mitä tapauksia hänen tulee tutkia ja saa myös välittömän palautteen hypoteesiensa paikkansa pitävyydestä tai pitämättömyydestä. Käytännön oppimistilanteessa puolestaan konteksti tavallisesti määrää, mihin objekteihin hypoteesia testataan ja mihin ei.

3.2.2 Käsitteen oppiminen prototyyppisenä konstruktiona

Prototyyppiteorioissa oletetaan, että käsitteet tallennetaan muistiin prototyypin so. eräänlaisen tyypillisen edustajan muodossa eikä määrittelevien piirteiden luettelona (Rosch 1973; Rosch & Mervis 1975; Rosch ym. 1976). Tyypillisesti näin on ajateltu olevan tilanne luonnollisten vaikeasti määriteltävien käsitteiden osalta. Kuten edellä todettiin tutkimuksissa on saatu kuitenkin näyttöä siitä, että prototyyppistä tiedontallennusta esiintyy myös hyvin määriteltyjen abstraktien käsitteiden oppimisen yhteydessä. (Hampton 1981; Tennyson ym. 1981; Tennyson ym. 1983.) Varsinkin käsitteenmuodostuksen alkuvaiheessa matematiikan käsitteetkin ovat oppijalle luonnollisiin käsitteisiin verrattavia.

Prototyyppimuotoiseen tiedontallennukseen liittyy huomionarvoinen oppimisstrateginen näkökohta. Koska prototyypillä on osoitettu olevan keskimäärin eniten yhteistä muiden luokan edustajien kanssa, sillä on myös eniten vihjearvoa koko luokan ominaisuuksista (Rosch ym. 1976). Yleistämällä prototyypin ominaisuudet koko luokalle päädytään näin varsin usein oikeaan tulokseen. Cohenin (1977) mukaan edellä kuvatun kaltainen yleistys on sikäli tehokas tapa oppia, että sen avulla uusi käsite saadaan nopeasti käyttöön. Lisäksi mahdollinen virheellisen reaktion aiheuttama palaute rajaa käsitettä samalla ulkoapäin. Sitä paitsi käytännön tilanteissa ei aina ole tarvettakaan pyrkiä ehdottoman oikeaan käsitteenmuodostukseen. Posnerin (1973) mukaan käsitteisiin on välillä jopa tarkoituksenmukaista liittää sellaisia ominaisuuksia, jotka eivät sille tarkasti ottaen kuulu. Niinpä esimerkiksi normaalissa kielenkäytössä on tarkoituksenmukaista pitää lintua lentävänä eläimenä, vaikkei tämä ehdottoman oikein olekaan.

Osherson ja Smith (1981) ovat koonneet prototyyppisen käsitteen muodostumista ja oppimista koskevista tutkimuksista seuraavat yhteenvedon:

1) Prototyyppiä voidaan karkeasti ottaen pitää käsitteen ekstensioon kuuluvien objektien dimensioittain määrättynä keskiarvona;
2) Mitä tyypillisempänä objektia pidetään, sitä virheettömämmin ja nopeammin se voidaan luokitella, sitä aikaisemmin se luetellaan esimerkkinä luokan objektista ja sitä aikaisemmin lapsi oppii, että objekti kuuluu käsitteen ekstensioon.

3.2.3 Käsitteen oppimisen kaksi tapaa

Käsitteen oppimiseen liittyy itse asiassa opittavan sisällön näkökulmasta kolme keskeistä komponenttia: varsinainen käsite, käsitteen esimerkit ja käsitettä luonnehtivat ominaisuudet. Komponenttien rooli käsitteenoppimisprosessissa on hypoteesin testaus-teorioissa ja prototyyppiteorioissa nähty erilaiseksi. Käsitteellistäminen sinänsä edellyttää samastuksen kautta tehtävää synteesiä, abstraktiota ja ominaisuuksien erottaminen analyysiä. Hypoteesin testaus -teorioissa on katsottu, että oppija analysoidessaan esimerkkitapauksia abstrahoi niistä käsitteelle relevantit ominaisuudet ja konstruoi käsitteen näiden synteesinä. Tämän tulkinnan mukaisesti käsitteenmuodostuksen prosessia voidaan kuvata kaaviolla (vrt. Nelson 1974).

Käsitteenoppiminen edellyttää täten oppijalta kykyä tehdä induktiivisia yleistyksiä tarkastelemistaan tapauksista ja loogista päättelykykyä yhteisten ominaisuuksien kombinoimiseksi käsitteen kuvaukseksi. Todellisuudessa ohjattu käsitteiden oppimisprosessi ei edes sellaisten käsitteiden osalta, joille on mahdollista löytää selkeä määrittely, useinkaan etene niin lineaarisesti kuin kaaviossa on esitetty. Prosessi on ennemminkin syklinen perustuen analyysin ja synteesin vuorotteluun (vrt. esim. Sahlberg 1988, 33—49).

Prototyyppiteorioissa käsitteen (esikäsitteen) ajatellaan syntyvän esimerkiksi toiminnallisen kontekstin yhteen liittämien esimerkkitapausten synteesinä ennen kuin käsitteelle karakteristiset ominaisuudet edes nousevat tietoiseen tarkasteluun. Oppimisprosessi on kaavion

$$\boxed{\text{esimerkit}} \xrightarrow[\text{teesi}]{\text{syn-}} \boxed{\begin{array}{c}\text{(esi)käsite,}\\ \text{prototyyppi}\end{array}} \xrightarrow[\text{lyysi}]{\text{ana-}} \boxed{\text{ominaisuudet}}$$

mukainen (vrt. Nelson 1974). Koska koulugeometriassa tarkasteltavilla käsitteillä on yleensä hyvin konkreetti tausta, on luontevaa olettaa, että käsitteenoppiminen useissa tapauksissa johtaa aluksi prototyyppisten käsitteiden syntyyn. Geometriset käsitteet poikkeavat kuitenkin monista hankalasti täsmennettävistä luonnollisista käsitteistä siinä, että geometrian käsitteet ovat, lukuun ottamatta peruskäsitteiksi valittuja käsitteitä, määriteltävissä ominaisuuksiensa kautta. Intuitiivinen prototyyppinen käsite pyritäänkin geometrian opetuksessa jossakin vaiheessa täsmentämään määritellyksi käsitteeksi. Koska useimmissa tapauksissa molemmat käsitteenoppimisen prosessit ohjaavat käsitteenmuodostusta, oppilaan omaksuma geometrinen käsite sisältää useasti sekä hyvin määritellyn käsitteen piirteitä että prototyyppisen, sumearajaisen käsitteen piirteitä.

Trzcieniecka-Schneiderin (1993) analyysi osoittaa, miten sekä induktiivisessa että deduktiivisessa käsitteenoppimisprosessissa saattaa molemmissa käydä niin, että käsite loppujen lopuksi kuitenkin mielletään prototyyppisesti tyypillisten esimerkkitapaustensa ominaisuuksien kautta eikä käsitteen määrittelyn kannalta oleelliset piirteet erotu oppijalle. Kun matemaattinen käsite opitaan luonnollisen käsitteen tapaan konstruoimalla käsitteen merkitys induktiivisesti esimerkkitapauksia tarkastelemalla, useimmiten esiintyvien esimerkkitapausten ominaisuuksien merkittävyys korostuu, jolloin epäoleellisia ominaisuuksia voidaan oppia erheellisesti pitämään oleellisina. Esiintyvien esimerkkitapausten kokoelma voi olla myös niin suppea, ettei oleellisten ja epäoleellisten ominaisuuksien erottaminen näiden perusteella ole edes mahdollista. Myöhemmin opittava käsitteen määritelmä voi jäädä ulkokohtaiseksi eikä välttämättä enää korjaa liian väljää tai rajoittunutta intuitiivista mielikuvaa käsitteestä. Käsitteen määritelmästä alkunsa saava kategoriaalinen käsite puolestaan jää helposti intuitiivisesti köyhäksi teoreettiseksi konstruktioksi. Käsitteestä voidaan oppia sen ydinsisältö, muttei välttämättä sitä, millaisen vaihtelun käsitteen ydin sallii sen esimerkkitapauksille. Niiden oppijoiden osalta, joille määritelmä ei anna intuitiivisen ymmärryksen rakennusaineksia, määrittelyn jälkeisessä intuition rakentamisprosessissa käsitteenoppimisprosessi tavallaan palautuu luonnollisen käsitteen oppimiseksi. Tässäkin tapauksessa käsitteen sisältö on vaarassa määrittyä useimmiten esiintyvien, tyypillisten esimerkkien kautta merkitykseltään virheelliseksi. (Trzcieniecka-Schneider 1993, 261—262.)

Trzcieniecka-Schneiderin esiin nostamaan luonnollisen käsitteenmuodostuksen ja formaalin käsitteenmuodostuksen erojen problematiikkaan palataan geometristen käsitteiden osalta käsiteltäessä ns. figuratiivisten käsitteiden kaksoisluonnetta luvussa 3.3.2.

3.2.4 Käsitetiedon opettaminen

Tennysonin ja Cocchiarellan (1986) kehittämässä käsitteiden opettamisen mallissa tarkastellaan sekä opetettavan sisällön organisointiin liittyviä tekijöitä että niitä tekijöitä, jotka tulisi ottaa huomioon suunniteltaessa käsitteen oppimista tukevia opetusjärjestelyjä. Opetusjärjestelyjen suunnittelussa on Tennysonin ja Cocchiarellan mukaan kiinnitettävä erityistä huomiota

- käsitteen nimeämiseen ja määrittelyyn,
- asiayhteyteen, jota kautta käsitteen käyttöön perehdytään,
- käsitteen tyypillisten (parhaiden) esimerkkitapausten esittelyyn,
- muiden esimerkkitapausten tarkasteluun,
- käsitteen suhteuttamiseen relevantteihin rinnakkaiskäsitteisiin,
- toimintoihin, joissa käsitettä käytetään,
- niiden attribuuttien tarkasteluun, jotka ovat keskeisiä käsitteen rajauksen kannalta ja
- käsitteen oppimisen kannalta relevantin aikaisemman tiedon mieleen palauttamiseen.

Käytännön opetustilanteissa opettaja joutuu tekemään strategisen valinnan sen suhteen, miten hän painottaa edellä mainittuja käsitteen oppimisen kannalta tärkeitä osatekijöitä ja mihin ajalliseen järjestykseen hän ne opetuksessaan haluaa sijoittaa.

On selvää, ettei yksittäisten käsitteiden tai yleisemmin käsitetiedon opettaminen voi perustua yksistään sen koommin klassiseen kuin prototyyppiseenkään näkemykseen käsitteistä ja niiden omaksumisesta. Käsitteitä opetetaan harvoin siten, että ainoana tavoitteena olisi saada käsite määritettyä. Yleensä käsitteet pyritään täsmentämisen ohella liittämään määrittelyn edellyttämää tasoa monipuolisemmin kontekstiinsa.

Haapasalo (1994) on tarkastellut käsitteenoppimisprosessia seikkaperäisesti ns. systemaattisen konstruktivismin viitekehyksessä. Haapasalon mukaan käsitteenoppimisprosessin ohjauksessa on kiinnitettävä erityisesti huomiota tiedon prosessointiin eri esitysmuodoissa verbaalisesti, symbolisesti ja kuvallisesti. Haapasalo jäsentää käsitteenmuodostumisprosessin kulkua viiden osavaiheen avulla. Nämä ovat

- käsitteeseen orientoituminen,
- käsitteen määrittely,
- käsitteen tunnistaminen,
- käsitteen tuottaminen ja
- käsitteen lujittaminen.

Orientaatiovaiheen tarkoituksena on suunnata oppilaan aktiviteettia ongelmiin, jotka ovat oppilaan aikaisemman kokemusvaraston ja tietämyksen perusteella tulkittavissa ja jotka ohjaavat häntä käsitteen määrittelyvaiheessa suuntaamaan tarkkaavaisuutensa konstruoitavan käsitteen kannalta relevantteihin tunnusmerkkeihin. Käsitteen määrittely relevanttien tunnusmerkkiensä avulla ei useinkaan ole yksikäsitteistä. Käsitteen määrittely tarjoakin tällaisessa tapauksessa oppilaalle mahdollisuuden kokeilla ja testata piirrekombinaatioita, joilla käsite olisi mahdollista määritellä. Käsitteen tunnistamisvaiheessa oppilas käyttää käsitteelle asettamaansa määrittelyä välineenä tunnistaessaan, mitkä tapaukset täyttävät käsitteelle asetetut ehdot ja mitkä eivät. Käsitteen tuottamisvaiheessa oppilas konstruoi itse esimerkkejä käsitteelle. Käsitteen tunnistamis- ja tuottamisvaiheissa on erityisen tähdellistä käyttää tehtäviä, jotka totuttavat käsitteen käyttöön niin verbaalisessa, kuvallisessa ja symbolisessakin kontekstissakin silloin, kun se on luontevaa ja mahdollista. Käsitteen lujittamisvaiheessa oppilaalle tarjotaan tilaisuuksia käyttää käsitettä eri yhteyksissä, jotta käsite jäisi oppilaan mieleen luonnollisena tapana hahmottaa todellisuutta. (Haapasalo 1994, 51—52 ja 200—207.)

Osa tiedonrakenteiden muutosta on sitä koskevien skeemojen muuntuminen. Uusi informaatio voi pakottaa yksilöä tarkistamaan skeemojaan periaatteessa kolmella eri tavalla. Ensinnäkin skeemaan liittyvä tietomäärä voi yksinkertaisesti kasvaa skeeman perusrakenteen pysyessä muuttumattomana (accretion). Toisaalta skeema voi hitaasti muuntua tai sitä voidaan joutua ns. hienosäätämään, jotta se pysyisi käyttökelpoisena muuntuvissa olosuhteissa (schema evolution tai tuning). Kolmas ja radikaalein vaihtoehto on se, että skeemaa joudutaan voimakkaasti uudelleen strukturoitumaan (restructuring). (Rumelhart & Norman 1981, 335—336; Ropo 1984, 21—22.)

Useimmat tietorakenteet sisältävät lukemattomia toisiinsa kytkeytyviä skeemoja. Vosniadoun ja Brewerin (1987) mukaan laajempien tiedollisten rakenteiden uudelleenstrukturointi voi ilmetä joko globaaleina kognitiivisissa rakenteissa ilmenevinä muutoksina, joita esimerkiksi Piagetin tasot kuvaavat, tai suppeampina tiedonaluekohtaisina muutoksina. Tiedonaluekohtaisen käsitteellisen tiedon muuntumisprosessin (process of conceptual change) tarkastelu on viime aikoina ollut erityisen ajankohtainen tutkimusalue erityisesti luonnontieteiden oppimisen ja opettamisen tutkimuksessa. Vosniadoun ja Brewerin käsityksen mukaan tiedonaluekohtainen käsitteellinen muutos voi olla joko lievää tai radikaalia. Lievällä käsitteellisellä muuttumisella tarkoitetaan tässä yhteydessä jonkin aihealueen tietämyksen rikastumista ts. sen määrän ja jäsentyneisyyden vähittäistä kasvua perusnäkemyksen ja tulkintojen pysyessä oleellisesti samantyyppisinä. Radikaali käsitteellinen muutos puolestaan voi johtaa selitysten taustalla olevien kokonaisten teorioiden hylkäämiseen ja korvaamiseen uusilla. Tätä kautta tiedonaluetta koskeva perusnäkemys voi vaihtua totaalisesti. Piagetin termein tulkiten lievässä käsitteellisessä muutoksessa on kysymys ensisijassa tiedon liittämisestä aikaisempaan tietostruktuuriin assimiloimalla se siihen, kun taas radikaali käsitteellinen muutos edellyttää tietämyksen voimakasta modifiointia ja tiedon akkomodaatiota. (Vosniadou & Brewer 1987, 54—56; Vosniadou 1994, 48—49.) White (1994, 119) muistuttaa siitä, että käsitteellisen muutoksen aikaansaaminen tietyllä tiedonalueella on suuresti riippuvainen siitä, kuinka suuria muutoksia tavoitellaan. Tiedon määrän lisääminen ja käsitteiden merkitysten oikaiseminen lähemmäksi asiantuntijatiedon mukaista tulkintaa ovat opetustavoitteina suhteellisen helppoja. Sen sijaan opetuksen kautta on vaikea muuttaa tiettyyn tiedonalueeseen sovellettua selitysjärjestelmää toisentyyppiseksi.

Alkuperäisen van Hielen teorian mukaan teorian kuvaaman kehitystasot ilmentävät koko geometrisen ajattelun laadullista muuttumista erityyppiseksi siirryttäessä tasolta toiselle. Tämän tulkinnan mukaan tässä työssä tarkasteltavia geometrisen ajattelun muutoksia siirryttäessä van Hielen tasolta seuraavalle voidaan pitää radikaaleina tiedonaluekohtaisina käsitteellisinä muutoksina. Kuten van Hielen teoriaa koskevia tutkimuksia käsittelevässä luvussa aiemmin todettiin, tällainen van Hielen tasojen tulkinta geometrisessa ajattelussa kokonaisuudessaan tapahtuviksi radikaaleiksi muutoksiksi on saanut osakseen runsaasti kritiikkiä. Oikeampi tasojen tulkinta näyttäisikin olevan, että ne kuvaavat ennemminkin niitä käsitteellisen ajattelun lokaaleja muutoksia, joita oppilaalla on menossa eri aihealueilla eri tahtiin.

3.3 Geometrisen käsitetiedon erityispiirteitä

3.3.1 Geometrinen käsite- ja menetelmätieto

Hiebertin ja Lefevren (1986) käsitetiedolle antaman tulkinnan mukaisesti *geometrinen käsitetieto* koostuu oppilaalle kertyneestä geometristen käsitteiden merkityksiä ja käsitteiden välisiä yhteyksiä koskevasta tiedosta. Kyse on siis mm. siitä, mitä oppilas tarkoittaa kolmiolla, suorakulmiolla, suorakulmaisella särmiöllä jne., sekä siitä tiedosta, joka kuvaa sitä, millaisia ominaisuuksia näillä kuvioilla ja kappaleilla hänen mielestään on. Käsitetiedolle on tyypillistä sen linkittyneisyys. Olennaista on, miten tietokokonaisuuteen kuuluvat käsitteet oppijan mielessä liittyvät toisiinsa. Kolmioiden tyypittämiseen liittyy omanlaisensa tiedon rakenne, nelikulmioiden, viisikulmioiden ja yleensä monikulmioiden tyypittämiseen taas kuhunkin omansa. Kieli, jolla kuvataan kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, pitää sisällään puolestaan jälleen omanlaisensa struktuurin jne.

Keskeinen osa matematiikkaan sisältyvästä menetelmätiedosta muodostuu tiedosta, jota tarvitaan, jotta voisimme ymmärtää symbolien merkityksiä ja niiden käyttötapoja. Koulugeometriassa tällä menetelmätiedon komponentilla ei ole kuitenkaan suurta merkitystä. Alkeisgeometriassa kulmien, pisteiden ja suorien merkintäsopimukset ovat lähes ainoat merkitsemistapoihin liittyvät sopimukset ja yläasteen geometriassa kuvioihin tai niiden osiin viitataan harvoin pelkästään symbolien välityksellä. Geometrian kannalta merkittävämmän osan matemaattisesta menetelmätiedosta muodostavat erilaiset algoritmiset toimintasäännöt, kuten esimerkiksi laskusäännöt, joiden avulla määritetään kuvioiden piirejä ja pinta-aloja, kulmien suuruuksia, janojen pituuksia, kappaleiden tilavuuksia yms., ja erilaiset kuvioiden ja kappaleiden piirtämiseen liittyvät sopimukset ja toimintatavat.

Käsitetieto ja menetelmätieto eivät geometrisessa ajattelussakaan toimi toisistaan riippumattomasti. Esimerkiksi piirtäessämme puolisuunnikkaan teemme sen useimmiten tietyllä varsin vakiintuneella, algoritmisella tavalla, mutta toiminnan taustalla on kuitenkin tietomme puolisuunnikkaasta. Mitä syvemmälle konseptuaalinen tietomme piirrettävän kuvion ominaisuuksista on mieleemme sisäistynyt ja mitä vähemmän ongelmalliseksi piirtämistehtävän koemme, sitä algoritmisemmin voimme piirtämisen suorittaa. Vastaavasti mitä vähemmän rutiinimaisesta piirrostehtävästä on kyse, sitä enemmän joudumme toiminnassamme aktiivisesti turvautumaan konseptuaaliseen tietoon.

Arvioidessamme oppilaiden geometrisen ajattelun kehittymistä joudumme yleensä tarkastelemaan tätä kehitysprosessia monien sellaisten iän ja oppimisen myötä kehittyvien toimintaskeemojen kautta, jotka toimivat välittäjinä proseduraalisten taitojen ja käsitteellisen tiedon välillä. Tällaisia geometrisille tarkasteluille tyypillisiä ja keskeisiä toimintaskeemoja, strategioita ja taitoja ovat mm.

a) kuvioiden ja tilasuhteiden hahmotus- ja tunnistamisskeemat,
b kuvioiden vertailuun ja suhteuttamiseen liittyvät skeemat,
c) kuvioiden muodon variointiin liittyvät skeemat,
d) tiedon struktuurin hahmottamiseen ja esittämiseen liittyvät skeemat
e) määrittelytaidot,
f) päättelytaidot,
g) kuvioiden piirtämiseen ja konstruktioiden laadintaan liittyvät skeemat,
h) mittaamiseen ja arviointiin liittyvät skeemat ja
i) laskentastrategiat.

Oppilaiden käsitetiedon kehittymisen selvittämisen kannalta erityisen tärkeitä tutkimuskohteita ovat toimintaskeemat a)—g). Toimintaskeemat h) ja i) liittyvät varsinaisesti oppilaiden proseduraalisen tiedon kehittymiseen. Tässä nimenomaisessa tutkimuksessa en tutkimusmetodisista syistä johtuen paneudu kohtien d) ja g) tyyppisten skeemojen tarkasteluun. Olen aiemmin selvittänyt tämäntyyppisiä piirtämiseen ja konstruktioiden laadintaan liittyviä skeemoja (Silfverberg 1984).

3.3.2 Geometristen käsitteiden figuraalisuus

Visuaalisen ja käsitteellisen komponentin keskinäinen jännite leimaa geometrisia käsitteitä ainutlaatuisella tavalla. Fischbeinin (1993) mukaan koulugeometrian tarkastelemat objektit ovat mentaaleja entiteettejä, joita ei voi pitää pelkästään käsitteellisinä konstruktioina, sillä niihin liittyy aina samanaikaisesti sekä voimakas visuaalinen että käsitteellisen lataus. Tästä syystä näiden käsitteiden voidaan katsoa muodostavan oman omaleimaisen käsiteryhmänsä, jota tämä kaksoisluonne karakterisoi. Fischbein nimittää tämäntyyppisiä käsitteitä *figuraalisiksi käsitteiksi* (figural concepts). Vaikka geometrisia käsitteitä on mahdollista tarkastella abstraktien käsitteiden tapaan määrittelyn kautta kiinnitettyinä ominaisuus-kombinaatioina, tällainen tarkastelutapa ei tavoita käsitteiden koko implisiittistä sisältöä. Alkeisgeometrian tarkastelemiin käsitteisiin liittyy niille määrittelyn kautta kiinnitetyn merkityssisällön ohella erottamattomasti, ehkä jopa ensisijaisesti, aistittu ja kokemuksellinen, visuaalinen idea käsitteen tulkinnallisesta taustasta, ns. käsitteen 'image' (vrt. esimerkiksi kuvion 'muoto', suoran 'suoruus').

Tällaisen 'image'-sisällön merkitys käsitteenmuodostukselle on vanhastaan tunnettu. Jo Kantilta on peräisin ajatus, että varsinaisten käsitteiden ja reaalimaailman objektien lisäksi todellisuuden hahmottamiseen tarvitaan näiden väliin sijoittuva entiteetti. Tätä on usein luonnehdittu termillä mielikuva tai skeema. Siinä geometrisen ajattelun vaiheessa, jossa oppilas tulkitsee geometrian ennen kaikkea reaalimaailman tilasuhteiden mentaaliksi esitykseksi, tällaisen entiteetin merkitys käsitteellistämisprosessissa on hyvin keskeinen. Eri tutkijat ovat eri terminologiaa käyttäen pyrkineet korostamaan käsitteenmuodostuksen visuaalisen komponentin merkitystä. Esimerkiksi Vinner ja Hershkowitz (1983) käyttävät tässä yhteydessä termiä käsitekuva (concept image), Dörfler (1991) puhuu kuvaskeemoista (image schemata) ja Presmeg (1992) mallittavasta kuvittelusta (pattern imagery). Johnson (1987) lähestyy kuvallisen informaation merkitystä kahdelta abstraktiotasolta. Johnsonin termein rikas konkreetti mielikuva (rich concrete image) vastaa sellaista visuaalista mielikuvaa, joka toimii spesifin konkreetin objektin representaationa, ja mielikuvaan liittyvä kuvaskemaattinen struktuuri edellistä yleisemmällä tasolla esittynyttä visuaalisen kohteen sisältämää strukturaalista informaatiota, josta abstrahoinnin tuloksena on suodattunut pois suuri osa konkreetista yksityiskohtatiedosta. Geometriassa yksittäisten piirrettyjen kuvioiden ja konstruoitujen mallien avulla esitetään yleensä nimenomaan tarkasteltavien ideaalisten kuvioiden ja kappaleiden yleisiä kuvaskemaattisia struktuureja, jotka kuvan tulkitsijan on osattava erottaa yksittäisen mallin epäoleellisista piirteistä.

Kuvioiden ja kaavioiden käytöllä on matematiikassa useita tehtäviä. Niiden avulla voidaan mm. havainnollistaa määritelmiä ja lauseita sekä esittää yhteenvetoja laajoista tietokokonaisuuksista. Niiden avulla on myös mahdollista tarkastella suurta osaa ongelmaratkaisuprosessissa tarvittavasta informaatiosta samanaikaisesti. Kuvioiden käyttö helpottaa usein yhteyksien havaitsemista ja hypoteesien laadintaa. Kuvioiden kautta esitetty informaatio voi ohjata päättelyä esimerkiksi lauseiden todistamisessa tai osoittaa tehdyn hypoteesin välittömästi vääriksi (Parzysz 1991, 576).

Näyttää siltä, että eri yksilöt hyötyvät eri tavoin kuvallisen informaation käytöstä. Oppijoita onkin tyypitetty sen suhteen, mikä merkitys kuvallisella ja ei-kuvallisella ilmaisulla on oppijan oppimisprosessille. Tunnettu jako on mm. oppijoiden erottelu ns. visualisoijiin ja verbalisoijiin (Richardson 1977). Vaikka kuviot, kaaviot yms. matematiikan käsitteiden ulkoisina representaatioina yleensä auttavat käsitteiden tulkintaa ja ymmärtämistä, liiallinen tukeutuminen kuvallisen viestin informaatioon saattaa olla myös haitaksi matemaattiselle käsitteenmuodostukselle. Esimerkiksi Presmeg (1986) on tarkastellut vaikeuksia, joita erityisesti visualisoijien riippuvuus kuvallisesta ilmaisusta saattaa aiheuttaa. Presmegin mukaan kontrolloimaton kuvaan tai mielikuvaan sitoutuminen voi estää oppijaa huomaamasta parempaa lähestymistapaa tarkasteltavaan asiaan. Myös Yerushalmy ja Chazan (1990) varoittavat siitä, että käsitysten perustuessa ensisijaisesti kuvioihin ja näiden mentaaleihin vastineisiin, voi yleisen ja spesifin erottaminen vaikeutua. Kuviot sinänsä ovat nimittäin aina yksittäisiä ja peruskuvioiden hallitsematon käyttö edustamaan yleistä tapausta voi kaventaa yksittäistapauksen edustaman luokan merkityssisältöä.

Figuraalisten käsitteiden kaksoisluonteen ilmenemismuotojen tutkiminen on oppilaan geometrisen ajattelun ymmärtämisen kannalta monella tavalla keskeistä. Käsitteenmuodostuksen alkuvaiheissa geometrisen käsite määrittyy ensisijaisesti kuvion kautta. Pitkällisen työstämisen kautta se yleensä täsmentyy figuraaliseksi käsitteeksi, jossa looginen määrittely ja kuvion visuaalinen muunneltavuus ovat tasapainossa (Fischbein & Nachlieli 1998, 1195). Monet tutkijat ovat korostaneet mielikuvien ja spatiaalistyyppisten mentaalien mallien merkitystä päättelytoiminnoissa yleensäkin eikä vain geometriseen kontekstiin liittyvässä päättelyssä (esim. Johnson-Laird 1983; Lakoff 1987; Johnson 1987; Saariluoma 1988). Geometrisessa päättelyssä kuvien ja mielikuvien metonyyminen rooli korostuu, kun yksittäisiä kuvioita käytetään yleiskäsitteiden malleina (ks. erityisesti

Presmeg 1992). Metonyymisellä roolilla tarkoitetaan kategorian yksittäisen jäsenen toimimista koko luokkansa edustajana (Lakoff 1987, 79). Figuraalisten käsitteiden käyttöön liittyy keskeisesti kysymys siitä, miten visuaalinen ja verbaalis-käsitteellinen viesti toimivat eri kehitysvaiheissa olevilla oppilailla, ja millainen lähestymistapa opettaa oppilaita parhaiten hyödyntämään geometristen käsitteiden visuaalista perustaa mahdollistaen kuitenkin oppilaiden kyvyn irtautua visuaalisen mallin käytöstä silloin, kun se on toiminnan kannalta edullista tai jopa välttämätöntä. Visuaalinen mallihan on aina pohjimmiltaan spesifi ja tulkinnallinen siinä suhteessa, milloin ja miten se edustaa yleistä tai korostaa erityistä.

3.3.3 Prototyyppiprosessit, visuaalinen ja karsinoiva luokittelu

Hershkowitzin (1990, 83) mukaan käsitteeseen kytkeytynyt visuaalinen mielikuva voi ohjata käsitteenmuodostusprosessia kahdella tapaa virheellisesti. Tällaisia käsitteen merkitystä vääristäviä virhepäätelmiä Hershkowitz kutsuu *prototyyppiprosesseiksi*. Toisessa Hershkowitzin esiin nostamassa prototyyppiprosessissa prototyyppinä toimivan esimerkkitapauksen erikoispiirteet tulkitaan virheellisesti käsitteen kaikille esimerkkitapauksille välttämättömiksi ominaisuuksiksi, jolloin käsite saa väärän merkityksen. Esimerkiksi koehenkilö voi aikaisemman kokemuksensa perusteella olettaa, että kolmion korkeusjana kulkee aina kolmion sisällä. Virheellinen käsitys voi ohjata häntä piirtämään kärjestä alkavan korkeusjanan aina kolmion sisälle silloinkin, kun sitä näin tehden ei saa piirretyksi kohtisuoraksi kantaa vastaan. Toisessa Hershkowizin kuvaamassa prototyyppiprosessissa prototyyppinä toimivan esimerkin erikoispiirteet yritetään väkisin siirtää muille oletetuille käsitteen esimerkkitapauksille. Kun tämä ei onnistu, tällaiset tapaukset suljetaan virheellisesti pois käsitteen piiristä. Esimerkiksi, jos nelikulmiokäsitteen visuaalisena mielikuvana toimii oppilaan ajattelussa pelkkä neliö, niin hän voi päätellä seuraavasti: Vain neliöt ovat nelikulmioita, sillä kun muuntyyppisissä kuvioissa sivut ovat yhtä pitkät, niin kuvioiden kulmat eivät silloin ole yhtä suuret. Hershkowitz katsoo ensimmäisenä mainitun prototyyppiprosessin olevan karakteristista nimenomaan ensimmäiselle van Hielen tasolle. Siinä visuaalista mielikuvaa käytetään päättelyn tukena kokonaisvaltaisesti analysoimatta sen ominaisuuksia. Toinen Hershkowitzin esiin nostamista prototyyppisistä päätöksentekoprosesseista perustuu prototyyppisen esimerkin ominaisuuksien analysointiin ja liittyy näin lähinnä toiseen van Hielen tasoon. Hershkowitzin kuvaamia prototyyppiprosesseja voidaan luonnehtia myös niin, että ensimmäisessä tilanteessa visuaalinen prototyyppi rajoittaa käsitteen visuaalista variointia ja toisessa prosessissa ei-määritteleviä ominaisuuksia käytetään määrittelevinä (Hershkowitz 1990, 83; Hershkowitz 1989, 74).

Tässä tutkimuksessa tutkin kahta edellisten kaltaista, mutta näistä kuitenkin jossain määrin poikkeavaa, visuaalisen mielikuvan ohjamaa prototyyppiprosessia visuaalista ja karsinoivaa luokittelua.

Visuaalinen luokittelu ilmenee kahdella tapaa. Käsitteen merkityssisältöä laajentavassa muodossaan se ilmenee siten, että jotkin käsitteen alaan todellisuudessa kuulumattomat esimerkit luetaan virheellisesti käsitteen ekstensioon kuuluviksi, koska ne muistuttavat visuaaliselta kokonaishahmoltaan koehenkilön muodostamaa mielikuvaa käsitteen tyypillisestä esimerkkitapauksesta, vaikka näiltä puuttuukin yksi tai useampi selvästi havaittava käsitteen määrittelevä piirre. Esimerkiksi Silfverbergin (1984) tutkimuksessa todettiin, että ala-asteen oppilaista merkittävä osa hyväksyi kaarevasivuisen, silitysraudan pohjaa muistuttavan tasokuvion kolmioksi. Käsitteen merkityssisältöä rajaavassa muodossaan visuaalinen luokittelu tulee ilmi myös niin, että esimerkkitapauksia, joilla on kaikki käsitteeltä edellytettävät määrittelevät piirteet, ei pidetä käsitteen ekstensioon kuuluvina siksi, että niiden visuaalinen kokonaishahmo poikkeaa liiaksi tyypillisten esimerkkitapausten visuaalisesta mielikuvasta. Esimerkiksi oppilaat eivät kolmiokäsitteen kehittymisprosessin alkuvaiheissa välttämättä hyväksy kolmioksi hyvin pitkänomaista, nuolimaista kolmiota (Silfverberg 1984).

Karsinoiva luokittelu tarkoittaa disjunktiivista luokittelua tilanteissa, joissa luokiteltavat esimerkkitapaukset tosiasiassa kuuluvat useampaan hierarkkiseen luokkaan samanaikaisesti. Tällöin käsitteiden tyypillisten esimerkkitapausten visuaaliset mielikuvat ja karakteristiset ominaisuudet ohjaavat esimerkkitapausten luokittelua siinä määrin, että kukin esimerkkitapaus luokitellaan vain siihen kategoriaan, johon se tyypillisimmin kuuluu. Esimerkiksi oppilaalle neliö ei ole suorakulmio, suorakulmio ei ole suunnikas jne. Suunnikkaan prototyypillä on ominaispiirre (vinot kulmat), jota suorakulmion prototyypillä ei ole. Vastaavasti suorakulmion prototyypillä on piirre (pitkänomaisuus), joka neliön prototyypiltä puuttuu. Tällaista luokittelua voi pitää eräänä ilmentymänä jälkimmäisestä Hershkowitzin kuvaamasta prototyyppisestä päätöksentekoprosessista.

Karsinoivaan luokitteluun yhdistyvä, oletettavasti useimmiten tiedostamaton, luokkainkluusion välttäminen näyttäisi liittyvän varhaisen käsitteenmuodostuksen tutkimuksessa todettuun käsitteiden kehittymiseen joko induktiivisen yleistämisen suunnasta tai deduktiivisen päättelyn kautta. Kayn (1986) mukaan käsitteenmuodostus etenee induktiivisesti silloin, kun käsitteen määritelmän ymmärtäminen edellyttää loogista päättelyä ja käsitteen esimerkkitapausten valikoima sisältää samanaikaisesti pienen määrän visuaaliselta hahmoltaan toisistaan poikkeavia tapauksia, ja deduktiivisesti silloin, kun käsitteen esimerkkitapausten visuaalisten hahmojen valikoima on laaja ja sen määrittely on tehtävissä suhteellisen yksinkertaisella tavalla. Esimerkiksi ympyrän käsite on tyypillisesti induktiivista reittiä rakentuva. Ympyrän visuaalinen hahmo on helposti opittavissa ja kaikki ympyrät ovat keskenään yhdenmuotoisia, mutta ympyräviivan määrittely, esimerkiksi uraominaisuuden avulla, vaatii suhteellisesti enemmän käsitteellistä työstämistä kuin ympyrän hahmon tunnistaminen. Nelikulmion käsite puolestaan rakentuu tyypillisesti deduktiivista reittiä. Nelikulmioiden muoto voi vaihdella suuresti, mutta nelikulmion määritelmä on yksinkertainen: Nelikulmio on monikulmio, jossa on neljä kulmaa.

Hierarkkisen luokittelun vaikeus geometrisessa käsitteenmuodostuksessa on yllättävää, sillä muissa yhteyksissä lapset kuitenkin jo hyvinkin nuorina käyttävät yleiskäsitteitä ja ymmärtävät konkreetteja luokkainkluusioita: lassiet ovat koiria, ahvenet ovat kaloja jne. Miksi siis esimerkiksi luokkainkluusio "neliö on suunnikas" näyttää olevan edellisiä selkeästi vaikeampi oppia? Eräs selitys tähän voi olla se, että niin koirien kuin kalojenkin muodostama kokonaisuus voidaan ajatella kokoelmaksi, jonka kullakin yksittäisellä jäsenellä on ainakin periaatteessa jokin yleisnimitystä koira tai kala tarkempi yksilöivä nimitys, jota voi käyttää rinnakkaisena yleisnimitykselle. Suunnikkaiden muodostama kokoelma puolestaan on sellainen, jossa tyypillisimpinä pidetyillä suunnikkailla ei ole mitään muuta yksilöivää alanimikettä. Yleisnimitys suunnikas ikään kuin täyttää alemman tason luokituksessa olevan aukon.

Yhteenvetona edellisestä voidaan todeta, että geometristen käsitteiden yhteydessä oppilasta ohjaa karsinoivaan luokitteluun ainakin seuraavat kolme toisiinsa kytkeytyvää syytä silloinkin, kun hierarkkinen luokittelu olisi käsitteiden standarditulkinnan mukaan oikea luokittelutapa:

1) käsitteenmuodostuksen ankkuroituminen prototyyppisiin toisistaan selvästi erottuviin esimerkkitapauksiin,
2) käsitteen usein esiintyvien esimerkkitapausten muotovaihtelun laajuuden suhde käsitteen määrittelyn kompleksisuuteen ja
3) alemman tason luokituksessa oleva aukko, jonka yläkäsitteen nimitys täyttää.

Oppilaan käyttämien käsitteiden poikkeaminen standarditulkinnasta voi jäädä opettajalta ja oppilaalta itseltään huomaamatta, sillä se ei välttämättä paljastu normaalissa opetustilanteessa. Käsitteiden virheellinen merkityssisältö on kuitenkin niiden käytön kannalta yleensä useimpiin tilanteisiin riittävä.

Luokkainkluusion hallitsemista ja samalla siis ei-toivottavan karsinoivan luokittelun poisjäämistä on yleensä pidetty kolmannen van Hielen tason, informaalin deduktion tason yhtenä tunnusmerkkinä (esimerkiksi Burger & Shaughnessy 1986, 44). Toisaalta on näyttöä myös siitä, että deduktiiviseen ajatteluun kypsyminen ja luokkainkluusion oppiminen ovatkin toisistaan riippumattomia prosesseja eivätkä välttämättä kehity samaa tahtia (de Villiers & Njisane 1987, 122).

3.3.4 Käsitteiden välisten suhteiden oppiminen

Yläasteen oppilaan geometrisen käsitetiedon strukturoitumista tapahtuu kolmella pääsuunnalla:

1) geometristen peruskäsitteiden merkitysten tarkentumisena, mihin kytkeytyy visuaalisten mielikuvien kautta miellettyjen ideoiden (luonnollisiin käsitteisiin liittyvä prototyyppinen käsitteenmuodostus) muuntuminen lähemmäksi ominaisuuksiensa kautta määriteltyjä käsitteitä (käsitteenmuodostuksen klassinen tulkinta),
2) peruskuvioita ja kappaleita kuvaavien käsitteiden suhteuttamisena toinen toisiinsa, esimerkiksi taitona tarkastella niitä toinen toistensa erikoistapauksina ja
3) geometristen ominaisuuksien keskinäisten riippuvuussuhteiden ymmärtämisenä ja taitona käyttää riippuvuuksia hyväksi deduktiivisessa päättelyssä.

Tarkastelen kutakin näistä suunnista erikseen.

(1) **Merkitysten tarkentuminen.** Peruskäsitteiden merkitysten tarkentumista voidaan tarkastella esimerkiksi Malatyn (1982) käyttämän jaottelun avulla. Matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä koskeneessa evaluaatiotutkimuksessaan Malaty erotti käsitteiden ymmärtämisestä kaksi tasoa: ymmärtämisen tunnistamisen tasolla (recognition understanding) ja ymmärtämisen abstraktilla tasolla (abstract understanding). Oppilas osoittaa Malatyn mukaan ymmärtävänsä käsitteen tunnistamisen tasolla, mikäli hän kykenee tunnistamaan käsitteen alaan (space) kuuluvat oleellisesti erityyppiset esimerkkitapaukset. Esimerkiksi suunnikkaan tunnistamisen tason ymmärtäminen edellyttää, että oppilas tunnistaa suunnikkaiksi esimerkkitapaukset, jotka voivat periaatteessa olla neljää tyyppiä: neliöitä, suorakulmioita, neljäkkäitä tai muita nelikulmioita, joilla on kaksi yhdensuuntaista sivuparia. Vastaavasti oppilas ymmärtää käsitteen abstraktilla tasolla, mikäli hän tuntee käsitteen sisällön (content) ts. sen välttämättömät ja riittävät ominaisuudet. Esimerkiksi suunnikkaan abstraktin tason ymmärtäminen edellyttää, että oppilas tietää suunnikkaan olevan nelikulmio, jolla on kaksi paria yhdensuuntaisia sivuja.

Tässä tutkimuksessa Malatyn esittämä jaottelu käsitteen tunnistamisen tasolla tapahtuvaan ymmärtämiseen ja abstraktilla tasolla tapahtuvaan ymmärtämiseen nähdään koulutasolla saavutettavan ymmärrysprosessin eräänlaisina päätepisteinä tai tavoitteina. Harvoilta yläasteen oppilailta onnistuu kaikkien käsitteen alaan kuuluvien oleellisesti erilaisten esimerkkitapausten tunnistaminen tapauksissa, joissa käsistteen esimerkkeihin sisältyy runsaasti erityyppistä muodonvaihtelua. Silfverberg (1986, 75—76) on todennut, että erityisesti ensimmäisellä van Hielen tasolla olevilla oppilailla geometristen käsitteiden tunnistaminen ei suinkaan ole virheetöntä, mutta ei myöskään täysin sattumanvaraista, vaan sitä karakterisoi tunnistaminen tyypillisten esimerkkien (prototyyppien) tasolla.

(2) **Hierarkkiset ja muut luokitukset.** Geometriassa tarkasteltavien objektien moninaista kirjoa eheytetään peruskoulun geometriassa pääasiassa erityyppisillä luokituksilla. Luokitukset voivat perustua helpoimmillaan yhden ominaisuuden varassa tehtävään kvantitatiiviseen ryhmittelyyn, kuten esimerkiksi kulman nimeäminen astelukunsa perusteella nollakulmaksi, teräväksi kulmaksi, suoraksi kulmaksi, tylpäksi kulmaksi, oikokulmaksi, kuperaksi kulmaksi, täyskulmaksi jne. Vastaavasti luokittelu voi perustua suhteellisen helposti havaittavissa olevan relaation näköhavainnon varassa tehtyyn tarkistamiseen. Esimerkiksi kolmioita luokitellaan tasakylkisiksi, tasasivuisiksi, teräväkulmaisiksi, suorakulmaisiksi ja tylppäkulmaisiksi ja monikulmioita säännöllisiksi ja ei-säännöllisiksi. Astetta vaikeampia ovat luokitukset, jotka perustuvat mutkikkaampien ominaisuusyhdistelmien tarkistamiseen, kuten esimerkiksi nelikulmioiden luokittelu eri nimisiksi nelikulmioiksi, kappaleiden nimitysten oppiminen jne.

Monet tarkasteltavista relaatioista ovat luonteeltaan sentyyppisiä, että ne järjestävät käsitteet toisiinsa nähden ylä- ja alakäsitteiksi: tasasivuinen kolmio on tasakylkisten kolmioiden erikoistapaus, neliö on toisaalta suorakulmion ja toisaalta neljäkkään erikoistapaus, neliö, suorakulmio ja neljäkäs ovat suunnikkaan erikoistapauksia, suunnikkaat ovat nelikulmion erikoistapauksia, kolmiot, nelikulmiot, viisikulmiot yms. yhdessä muodostavat monikulmioiden joukon jne. Eri tilanteissa ja eri kehitysvaiheissa luokittelu voi silloinkin, kun lopputulos on sama, perustua erilaiseen tietoon luokituksen perusteista, kuten esimerkiksi suoraan visuaaliseen hahmottamiseen, ulkoa muistettuun faktatietoon, määrittelevien ominaisuuksien tarkasteluun yms. Erityisesti luokkainkluusioiden oppimista on pidetty yhtenä merkittävänä osoituksena oppilaan käsitteellisen ajattelun kehittyneisyydestä. Kyetäkseen perustelemaan ylä- ja alakäsiterelaatiot muulla kuin ulkomuistinvaraisella faktatiedolla oppilaan on ymmärrettävä luokitusten perustuvan ensisijaisesti tapaan, jolla käsitteet on määritelty, eikä käsitteiden esimerkkitapausten herättämiin mielikuviin. Neliö ei ole suunnikas sen takia, että se "näyttää suunnikkaalta" vaan sen takia, että se täyttää suunnikkaan määrittelevän ominaisuuden edellytyksen molempien vastakkaisten sivuparien yhdensuuntaisuudesta. Perustelu sille, miksi neliön vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, voi toisella oppilaalla olla visuaalinen ja toisella käsitteellisellä tasolla jäsentynyt. Vaikka käsitteiden hierarkkisten ja muuntyyppisten suhteiden ymmärtämistä voidaan käsitteellisesti pitää melko vaativana tehtävänä, se ei luonnollisesti estä käyttämästä visualisointia näidenkin asioiden oppimisen tukena. Käsitehierarkioita voidaan havainnollistaa käsitteiden muodostamilla sukupuilla, määrittelevien ominaisuuksien periytymistä yläkäsitteeltä alakäsitteelle merkitsemällä käsitehierarkioihin määrittelevien ominaisuuksien listoja jne.

(3) **Käsitteiden väliset loogiset suhteet.** Peruskoulussa geometristen ominaisuuksien välisistä loogisista suhteista pyritään vakuuttumaan usein pikemmin kuin konkreetin toiminnan kuin deduktiivisen päättelyn avulla. Paperille piirrettyä kuviota taittelemalla voidaan esimerkiksi vakuuttua siitä, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa jne. Edelleen mittaustulosten perusteella käy "uskottavaksi" se, että yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö jne. Toki on myös tilanteita, joissa kuvioiden luokitusten välisiä suhteita tai kuvioiden ominaisuuksien keskinäisiä riippuvuussuhteita on luontevaa perustella deduktiivisesti. Esimerkiksi tasasivuinen kolmio on tasakylkinen, koska tasakylkisyyden edellytys kahden sivun samanpituisuudesta täyttyy tasasivuisuuden edellytyksen voimassa ollessa. On ymmärrettävää, että peruskoulun oppilaille ei voi geometrian opetuksessa kehittyä kovin jäsentyneitä tietostruktuureja, jos geometrisissa tarkasteluissa joudutaan tyytymään lähinnä visuaalisten mielikuvien herättämiseen. Seuraavat otteet yläasteen oppikirjasta (Pehkonen & Tuuri 1996, 53 ja 54) havainnollistavat tämänsuuntaista lähestymistapaa: "Yhteneviksi sanotaan sellaisia kuvioita, jotka päällekkäin asetettaessa peittävät toisensa." ja "Kuvioita, joilla on eri koko mutta sama muoto, sanotaan yhdenmuotoisiksi." Deduktiivinen lähestymistapa geometriaan on Suomessa yleensä mielletty ennemminkin lukion pitkään matematiikkaan kuin peruskoulun yläasteelle kuuluvaksi. Sitä paitsi monet oppilaat kokevat tässä vaiheessa tämän tyyppiset tarkastelut ikävinä, turhina ja itsestään selvinä, koska heille visuaalisesti havaittava ominaisuus on yhtä pätevä, jos ei pätevämpikin, kuin käsitteellisellä tasolla perusteltu.

3.4 Hypoteettinen malli geometrisen käsitetiedon oppimisesta

3.4.1 Geometristen käsitteiden implisiittinen ja eksplisiittinen merkitys

Fischbeinin (1993) esittämän figuraalisten käsitteiden idean mukaisesti tarkastelen jatkossa oppilaiden geometrisiin käsitteisiin kytkemiä merkityksiä sekä *implisiittisinä* että *eksplisiittisinä* geometrisina merkityksinä. Eri kehitysvaiheissa nämä merkityskomponentit painottuvat oppilaan geometrisessa ajattelussa merkittävästi eri tavoin. Käsitteen implisiittisen geometrisen merkityksen jaan tarkastelussani kahteen osaan: (1) *konkreettiin merkitykseen*, joka tulee esiin niissä vakiintuneissa toimintaskeemoissa, joiden avulla oppilas konstruoi käsitteelle representaatioita, ts. piirtää kuvion, rakentaa kappaleen jne. ja (2) *visuaaliseen merkityksiin*, joka saa sisältönsä käsitteestä luotujen visuaalisten mielikuvien kautta. Selvää on, että yllä mainitut merkityskomponentit tukevat toistensa kehittymistä.

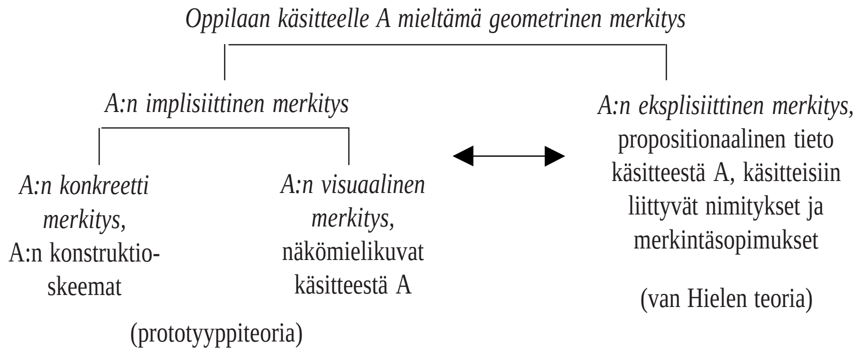
Epäilemättä lähes kaikkien koulugeometrian käsitteiden oppimisen perustan muodostavat käsitteisiin liitetyt konkreetit tulkinnat. Konkreetilla merkityksellä viitataan siihe, että monien geometristen käsitteiden ymmärtäminen perustuu oleellisilta osin oppijalle muodostuneeseen käsitykseen siitä, miten käsitettä vastaava malli, kuten kuvio, kappale tai muu havainnollistus tehdään tai voidaan ajatella syntyneeksi. Esimerkiksi suoran ja tason käsite on useimmille oppilaille ymmärrettävä nimenomaan sen perusteella, mitä suoruudella ja tasaisuudella konkreetisti tarkoitetaan. Oppilaalle suora ei juuri muuta merkitsekään kuin viivaa, joka ei muuta (kulku)suuntaansa, tai viivaa, joka syntyy, kun viiva piirretään "suoraan". Mahdollisesti juuri tästä syystä käsitteenmuodostuksen alkuvaiheessa oppilaat eivät useinkaan tee eroa suoran ja janan välillä, koska fyysisenä toimintona suoran ja janan piirtäminen vastaavat toisiaan. Suoraa ei voi rajatta jatkaa molempiin suuntiin muutoin kuin kuvitteellisesti. Monet vastaavan tyyppiset konkreetteja merkityksiä hyödyntävät metaforat toimivat tehokkaina analogioina matematiikan opinnoissa pidemmälle edenneidenkin ajattelussa: suoria tarkastellaan nousevina ja laskevina, kuvioita peilataan, kierretään ja siirretään, funktion kuvaajien ajatellaan kulkevan vasemmalta oikealle, käyrien ajatellaan syntyneen liikkuvien pisteiden urina jne.

Geometrisen käsitteen ns. visuaalisella merkityksellä viittaamme merkitykseen, jonka käsitteen liittyvät näkömielikuvat virittävät. Kaikille oppilaille, geometrisen ajattelun kehitystasosta riippumatta, kehittyy viimeistään kouluoppimisen myötä lukuisa määrä näkömielikuvia siitä, miltä esimerkiksi geometriset peruskuviot näyttävät ja mitä niiden ominaisuudet visuaalisesti tarkoittavat. Joskus käsitteen näkömielikuvat ovat niin voimakkaita ja tehokkaita käsitteen merkityksen määrittäjiä, että käsitteisiin liittyvät geometriset tarkastelut vaikuttavat oppilaista jopa keinotekoiselta saivartelulta. Toisiin käsitteisiin assosioituvat näkömielikuvat tukevat käsitteiden matemaattisesti oikean tulkinnan syntymistä ja toisiin käsitteisiin assosioituvat mielikuvat jopa haittaavat sitä.

Jatkossa kutsun oppilaan geometriselle käsitteelle liittämiä konkreetteja ja visuaalisia merkityksiä käsitteen implisiittisiksi merkityksiksi. Hautamäki (1991, 13) käyttää jokseenkin samalle asialle termiä implisiittinen representoituminen viitaten representoitumiseen, jossa representaatiot eivät ole muodostuneet kognitiiviselle agentille objekteiksi, vaan toimivat pikemminkin taitoina kuin tietoina. Oppilas voi ymmärtää geometriset ideat implisiittisesti paljon ennen kuin nämä nousevat hänen tietoisuuteensa eksplisiittisinä. Esimerkiksi suorakulmion määrittelevät ominaisuudet, kulmien suoruus ja vastakkaisten sivujen samanpituisuus, voivat jo varhain olla nähtävissä oppilaan piirtämistoimintoa ohjaavassa toimintaskeemassa. Silti oppilas ei välttämättä ole käsitteellistänyt näitä ominaisuuksia suorakulmioita karakterisoiviksi ominaisuuksiksi.

Mitä pidemmälle oppilas geometrisen ajattelun kehityksessään etenee, sitä todennäköisemmin hän perustaa tarkastelunsa kohteen geometrisiin ominaisuuksiin, sitä luontevammin hän kommunikoidessaan käyttää geometrista käsitteistöä ja sitä enemmän hänelle on kertynyt verbalisoitua, päteväksi tiedettyä tai päteväksi luultua tietoa käsitteestä. Tällaista käsitteen propositionaalista merkitystä, jonka oppilas mieltää nimenomaan geometrisen tarkastelutavan kautta, kutsun sen *eksplisiittiseksi geometriseksi merkitykseksi*. Käsitteen eksplisiittisellä geometrisella merkityssisällöllä viittaan oppilaan omintakeiseen ja kehitysvaiheesta riippuvaan tapaan mieltää käsite geometristen ominaisuuksien karakterisoimana yhdistelmänä. Useinkaan se ei ole sama kuin ns. asiantuntijatiedon mukainen käsitys käsitteen merkityksestä. Eksplisiittinen geometrinen merkitys voi vaihdella jäsentyneisyyden asteeltaan hajanaisesta yksittäisten tietoyksiköiden muodostamasta kokoelmasta pitkälle jäsentyneeseen eheään tietorakenteeseen. Geometristen käsitteiden implisiittinen merkityssisältö ei käy turhaksi, vaikka niiden geometrinen merkityssisältö aikaa myöden täsmentyykin. Käsitteiden implisiittiset ja eksplisiittiset geometriset merkitykset tukevat toinen toistensa kehittymistä. Konkreetit tulkinnat tarjoavat oppilaalle viitekehyksen abstraktimman, käsitteellisen geometrisen tiedon ymmärtämiselle, ja kääntäen, oppilaan geometrinen käsitteistö vaikuttaa oleellisesti siihen, miten hän jäsentää ja ymmärtää ympäristömme tilasuhteita ja miten hän kykenee niistä kommunikoimaan.

Kuvio 6 havainnollistaa käsitteen edellä kuvattujen merkityskomponenttien osuutta oppilaan geometriselle käsitteelle antaman tulkinnan rakentumisessa.



Kuvio 6. Oppilaan geometriselle käsitteelle mieltämät merkityskomponentit

Kuvioon merkityt kaksi teoriaa, luonnollisten käsitteiden oppimisprosessia kuvaava prototyyppiteoria sekä geometrian kouluoppimisen vaiheita valottava van Hielen teoria, muodostavat sen tutkimustiedollisen viitekehyksen, jonka avulla käsitteiden implisiittisen ja eksplisiittisen geometrisen merkityksen kehitysprosessia voidaan lähestyä. Tässä yhteydessä en enää puutu teorioiden yksityiskohtiin, sillä kummankin teorian luonnetta olen käsitellyt edellä. Sen sijaan keskityn siihen, miten teoriat yhdessä auttavat ymmärtämään van Hielen tasoihin 0—3 liittyvän geometrisen ajattelun kehityskulkua. Prototyyppiteorioiden tarjoama näkökulma tarkentaa van Hielen teorian kautta syntyvää globaalia ja strukturalistista näkökulmaa geometrian oppimiseen ja auttaa meitä paremmin ymmärtämään käsitteiden implisiittisten merkitysten osuutta oppilaan geometrisen käsitetiedon rakentumisessa van Hielen teorian rajoittuessa pääosin oppilaiden geometrisen tiedon eksplisiittisten merkitysten kehittymisen kuvailuun. Geometrisen käsitetiedon kehittymisprosessi näkyy toisaalta yksittäisiin käsitteisiin kytkeytyvän tietouden käsitteellistymisenä eli painopisteen siirtymisenä entistä voimakkaammin implisiittisistä merkityksistä eksplisiittisiin merkityksiin ja toisaalta käsitteiden keskinäisten suhteiden lisääntyvänä jäsentymisenä.

3.4.2 Mallin rakenne ja perushypoteesit

Geometrisen käsitetiedon kehittyminen ei ole pelkästään yksittäisten käsitteiden merkitysten kehittymistä, sillä oleellisen osan prosessia muodostaa kyseisen tietorakenteen eheytyminen. Kuviossa 7 on esitetty kaavio, jolla koetan havainnollistaa geometrisen käsitetiedon kehittymisprosessin kannalta oleellisimpina pitämiäni piirteitä. Malli rakentuu seuraavien perusolettamusten varaan:

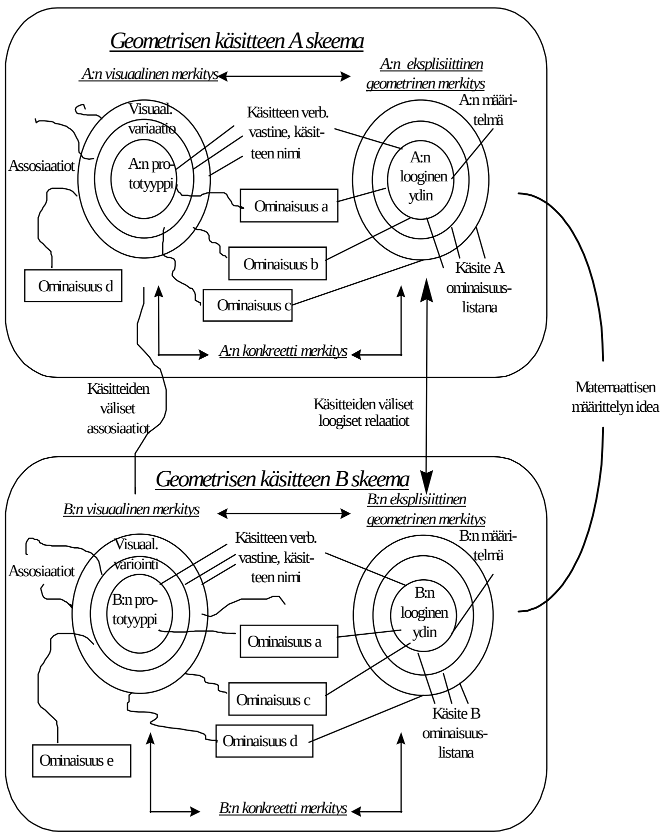
1) Geometristen käsitteiden merkitys koostuu niiden implisiittisestä (so. konkreetista ja visuaalisesta) ja eksplisiittisestä merkityksestä.

2) Visuaalisen merkityksen kehittymisprosessi on samantyyppistä kuin ns. luonnollisten käsitteiden merkityksen rakentuminen. Prototyyppien muodostuminen on tälle kehitysprosessille ominaista.

3) Käsitteiden merkityssisältö eli laajasti tulkiten käsitteeseen kytkeytyvä skeema koostuu Schaeferia (1979) mukaellen käsitteiden loogisesta ytimestä (käsitettä vastaavan luokan kaikille objekteille yhteisten ominaisuuksien struktuurista), käsitteen nimestä ja käsitteeseen liittyvistä assosiaatioista.

4) Loogisen ytimen kehittymiseen vaikuttaa oleellisesti henkilön käsitys matemaattisten käsitteiden määrittelyn ideasta.

5) van Hielen teoria antaa yleiskuvauksen siitä kehitysprosessista, joka liittyy erityisesti geometristen käsitteiden eksplisiittisten merkitysten kehittymiseen.



Kuvio 7. Malli oppilaan geometrisen käsitetiedon kehittymisestä

Geometriseen käsitteeseen liittyvällä skeemalla tarkoitan tässä sitä yleensä löyhästi organisoitunutta ja rajoiltaan sumeata tietokokonaisuutta, joka on assosioituneena käsitteeseen. Käsitteen itsessään voi spesifioida mielikuva (concept image), deskriptio (luonnehdinta, ominaisuuslista) tai täsmällinen määritelmä (käsitteen looginen ydin). Käsitteeseen kytkeytyvää skeemaa voi pitää analogisena esimerkiksi Leshin ym:n (1983, 264) käyttämälle käsitteellisen mallin idealle. Heidän mukaansa käsitteellinen malli sisältää

a) käsitteen sisäisen suhde- ja toimintoverkoston, jonka avulla oppilas hallitsee käsitteen merkityssisältöä,
b) käsitteiden väliset suhteet, jotka linkittävät käsitteiden sisäisten suhteiden verkostoja toisiinsa,
c) käsitteen representaatiotavat ja representaatioiden väliset muunnosmahdollisuudet, ja
d) käsitteen reaalimaailman sovellukset.

Kuvioon 7 merkitty käsitepari A, B voi viitata joko toisiinsa linkitettyihin kuvioihin (suorakulmio, suunnikas), ominaisuuksiin (tasasivuisuus, tasakylkisyys) tai relaatioihin (yhdensuuntaisuus). Käsitteen virittämään skeemaan voi sisältyä monentyyppistä käsitettä karakterisoivaa informaatiota, josta käsitteen eri käyttötilanteissa aktivoituu eri osa. Geometrisen käsitteen esimerkkitapauksen nopeaa tunnistamista vaativassa tilanteessa riittää yleensä näkömielikuviin perustuva lähes tiedostamaton visuaalisen tason prosessointi, mutta esimerkiksi käsitteiden määrittelyä tai lähikäsitteiden keskinäisten suhteiden arviointia edellyttävässä ei-rutiinimaisessa tilanteessa joudutaan turvautumaan edellistä huomattavasti käsitteellisempään tiedon analyysiin.

Kuvion 7 vasemmalla reunalla on kaavamaisesti esitetty geometristen käsitteiden visuaalisten merkitysten kehitysprosessi näkömielikuviin rakentuvan prototyypin muodostumisena ja mielikuvien ns. visuaalisen varioinnin kehittymisenä. Kehitysprosessi on verrattavissa vastaavaan prosessiin ns. luonnollisilla käsitteillä. Luonnollisiin käsitteisiin mielletyt merkitysrakenteet rakentuvat usein käsitteen prototyypeistä eli tyyppitapauksista muodostuneitten mielikuvien varaan eikä niinkään käsitteelliseen tietoon käsitteen määrittelevistä ominaisuuksista. Tyypillisyys/epätyypillisyysdimensio antaa käsitteelle sisäisen struktuurin, jota kaaviossa kuvataan prototyypin ympärille piirretyllä kehillä. Mitä enemmän tarkasteltava tapaus esimerkiksi ulkonäöltään poikkeaa prototyypistä, sitä epätyypillisempänä käsitteen edustajana sitä pidetään. Jos poikkeavuus ylittää sen, minkä henkilö on valmis sallimaan, tapausta ei luokitella käsitteen alaan kuuluvaksi. Geometristen käsitteiden tunnistamis-, nimeämis- ja luokittelutehtävien yhteydessä on etenkin käsitteenmuodostuksen varhaisvaiheissa havaittu vastaavaa prototyyppistä käsitteenmuodostusta ja sisäisen struktuurin muodostumista kuin luonnollisilla käsitteilläkin (Silfverberg 1984; 1986; Herskowitz ym. 1987). Prototyyppisesti muodostuneen käsitteen rajaus ei selvien kriteerien puuttuessa yleensä voi muodostua kovin täsmälliseksi. Värien luokittelu tarjoaa tästä hyvän esimerkin. Eri yksilöt pitävät esimerkiksi tiettyjä värisävyjä sinisinä ja toiset vihreinä. Tutkimusten mukaan myös geometristen käsitteiden rajaus on oppilailla varsin horjuvaa silloin, kun oppilaiden geometrinen käsitteenmuodostus perustuu pääasiallisesti näkömielikuviin käsitteestä eivätkä oppilaat ole käsitteellistäneet käsitteen määritteleviä piirteitä luokittelutoiminnon työvälineiksi. Esimerkiksi omassa tutkimuksessani (1984) totesin, että viidesluokkalaisista (n = 46) noin joka toinen, seitsemäsluokkalaisista (n = 40) noin joka neljäs ja yhdeksäsluokkalaisistakin (n = 20) noin joka viides piti kaarevasivuisia kolmiomaisia kuvioita kolmioina. Vastaavia havaintoja matemaattisten käsitteiden prototyyppisistä tulkinnoista ovat raportoineet esimerkiksi Burger ja Shaughnessy (1986), Hershkowitz ym. (1987) ja Presmeg (1992). Kaavioon merkityillä assosiaatioilla viitataan toisaalta siihen, että käsitettä karakterisoivat ominaisuudet eivät liity käsitteeseen niinkään loogisten siteiden kautta vaan ennemminkin asiayhteyden kautta. Vastaavasti käsitesuhteet saavat merkityksensä lähinnä yhteisestä visuaalisesta tai toiminnallisesta kontekstista: kolmiot, neliöt, suorakulmiot jne. ovat geometrisia kuvioita, ympyrän jänteet, säde, halkaisija ympyrän osia jne. Hyvin varhain geometriset käsitteet assosioituvat myös monella tavalla reaalimaailman tilanteisiin ja objekteihin. Geometrisia muotoja voidaan verrata liikennemerkkien, ikkunoiden, laatikoiden jne. muotoihin.

Kuvioon 7 merkityllä *visuaalisella varioinnilla* tarkoitetaan yksilön kykyä luoda tarkoituksellisesti mielikuvia erilaisista käsitteeseen liittyvistä esimerkkitapauksista siten, että tähän käsitteeseen liittyvää muodon tai muiden geometristen ominaisuuksien vaihtelua voidaan hallita kuvittelemalla.

Visuaalinen variointia voidaan pitää erikoistapauksena päättelystä, jota Martin Simon (1996) kutsuu transformatiiviseksi päättelyksi. Tutkittuaan oppilaiden matemaattista päättelyä erilaisissa yhteyksissä Simon totesi, että oppilaat käyttivät usein päättelyä, joka perustui ennemminkin tilanteesta luodun dynaamisen mentaalimallin muunteluun kuin varsinaisesti induktiiviseen tai deduktiiviseen päättelyyn. Simon kutsuu tällaista transformaatioiden kuvitteluun tai koetteluun perustuvaa päättelyä transformatiiviseksi ja määrittelee sen seuraavasti:

> "Transformational reasoning is the mental or physical enactment of an operation or set of operations on an object or objects that allows one to envision the transformations that these objects undergo and the set of results of these operations. Central to transformational reasoning is the ability to consider, not a static state, but a dynamic process by which a new set state or a continuum of states are generated" (Simon 1996, 201).

Tutkimukseni empiirisessä osassa oppilaiden visuaalisen varioinnin kykyä testataan geometriatestillä G2. Testiä suunniteltaessa oletettiin, että ne oppilaat, joilla on ahtaan prototyyppiset mielikuvat geometrisista käsitteistä, myös määrittelevät käsitteet liian ahtaina eivätkä kykene kunnolla käsittelemään käsitteiden välisiä inkluusiorelaatioita. Visuaalisella varioinnilla oppilas voi kuvitteellisesti hallita geometrisen käsitteen merkityssisältöön liittyviä välttämättömyyksiä ja vastaavasti arvioida sen tarjoamia mahdollisuuksia. Esimerkiksi pohtiessaan, voiko tasakylkinen kolmio olla suorakulmainen, oppilas voi mielessään testata, kykeneekö hän kuvittelemaan tasakylkisen kolmion, jonka yksi kulmista on suora. Visuaalisen varioinnin näkökulmasta prosessi on asymmetrinen. Käänteinen kysymyksenasettelu suorakulmaisen kolmion mahdollisesta tasakylkisyydestä ei välttämättä johda samaan mielikuvien tuottamisprosessiin kuin arvioitaessa tasakylkisen kolmion suorakulmaisuuden mahdollisuutta.

Kuvion 7 oikeanpuoleisella kaavion osalla havainnollistetaan käsitteiden eksplisiittisen geometrisen merkityksen kehitystä. Geometristen käsitteiden käsitteellisten tulkintojen kehityskulusta van Hielen teoria esittää seikkaperäisen ja myöhemmissä tutkimuksissa pääpiirteittäin validiksi osoitetun kuvauksen Teorian mukaan geometrisen käsitteenmuodostuksen perustan muodostavat geometrista ajattelua ohjaaviksi käsitteellisiksi kehikoiksi valikoituvat geometriset ominaisuudet ja näiden jäsentyminen tietorakenteiksi.

Käsitteenmuodostuksen varhaisvaiheissa geometrisilla ominaisuuksilla ei ole preferoitua asemaa muiden mahdollisten näkökulmien joukossa. Tässä vaiheessa geometrista ajattelua ohjaavat nimenomaan yksittäisten kuvioiden tarkasteluihin kytkeytyvät implisiittiset merkitykset. Oppimisprosessin edetessä käsitteiden geometristen merkitysten painoarvo lisääntyy niiden säädellessä yhä voimakkaammin käsitteiden visuaalista ja fyysistä merkityssisältöä.

Aito geometrinen käsitteenmuodostus saa varsinaisesti alkunsa vasta vH-tasolla 2 eli ominaisuuksien analysoinnin tasolla, jolloin geometrinen näkökulma ja sitä vastaava käsitteistö alkavat vakiintua. Ennen sitä geometrinen ajattelu on kokonaisvaltaista ja perustuu van Hielen mukaan lähinnä ns. visuaalisten struktuurien hahmottamiseen (näkömielikuviin ja konkreettiin tekemiseen liittyviin toimintaskeemoihin) ja havaintojen kuvailuun normaalikielellä. Saavuttaessaan van Hielen tason 2 oppilas on tottunut käyttämään geometristen tarkasteluidensa työvälineinä geometrian kannalta relevantteja ominaisuuksia ja geometrian termistöä. Oppilaan geometrinen käsitetieto on tässä vaiheessa vielä kuitenkin irrallista ja jäsentymätöntä. Tutkimukseni empiiristä osaa varten konstruoituja mittavälineitä suunniteltaessa oletin, että tällä tasolla oppilaan geometrista ajattelua ohjaavat edelleen voimakkaasti käsitteistä syntyneet näkömielikuvat ja konkreettia toimintaa ohjaavat toimintaskeemat. Käsitteet määrittyvät tässä vaiheessa oppilaan mielessä ominaisuuslistoina, joilla ei ole selkeätä struktuuria.

Kolmatta van Hielen tasoa vastaavalle geometriselle ajattelulle on tyypillistä se, että käsitteiden looginen ydin osataan erottaa muusta käsitettä koskevasta informaatiomassasta. Tässä kehitysvaiheessa oppilas osaa erottaa käsitettä karakterisoivista ominaisuuksista ne, jotka ovat sen määrittelyn kannalta riittäviä ja välttämättömiä, ja osaa ratkoa käsitteen alan rajaamiseen liittyviä ongelmia sekä suhteuttaa käsitteitä toinen toisiinsa esimerkiksi ymmärtää luokkainkluusion riippuvuuden käsitteiden määrittelystä. Käsitteiden välisten suhteiden hallinta ei aina tarvitse perustua käsitteiden määritelmien analyysiin, sillä esimerkiksi luokkainkluusiosuhteet voidaan oppia ulkomuistinvaraisena faktatietonakin, jolle ei ole mitään käsitteellistä perustetta.

Käsitettä luonnehtivat ominaisuudet on sijoitettu kuvioon 7 visuaalisen ja geometrisen käsitteenmuodostuksen väliin, sillä käsitteellinen syvyys, jolla ominaisuudet mielletään, voi vaihdella suuresti. Käsitettä karakterisoiva ominaisuus voi oppijan mielessä olla hyvinkin pitkälle käsitteellistynyt tai sitten ominaisuuden ymmärtäminen voi perustua lähinnä näkömielikuviin. Esimerkiksi oppilas voi suunnikkaan ominaisuuksia kuvaillessaan todeta vastakkaisten sivujen yhdensuuntaisuuden ja todella tietää, mitä yhdensuuntaisuus geometrisena käsitteenä tarkoittaa, tai sivujen yhdensuuntaisuus voi merkitä hänelle pelkästään visuaalista mielikuvaa yhdensuuntaisesti kulkevista sivuista. van Hielen teoriassa käsitteellisen syvyyden muuttumista tasolta toiselle siirryttäessä on kuvattu mm. siten, että se mikä edellisellä geometrisen ajattelun kehitystasolla on implisiittistä, on seuraavalla tasolla eksplisiittistä (Freudenthal 1973, 125).

Kuvioon 7 käsitteiden A ja B skeemojen väliin piirretyt käsitteiden väliset assosiaatiot ja loogiset suhteet ovat erityisen merkityksellisiä tämän tutkimuksen empiirisen osan kannalta, sillä tutkimuksessa tarkasteltava käsitetieto on nimenomaan tietoa käsitteistä ja niiden välisistä suhteista. Osa geometristen käsitteiden välisistä suhteista ovat suhteellisen helposti ymmärrettäviä käsitteisiin liittyvien näkömielikuvien varassa, eivätkä edellytä oppilaalta sen syvempää geometristen merkitysten analyysiä. Esimerkiksi mielikuvien tasolla on ilmeistä, että suunnikas voidaan jakaa kahdeksi samankokoiseksi ja samanmuotoiseksi (yhteneväksi) kolmioksi. Relaatio, jopa luokkainkluusio, voi joskus myös kontekstinsa vuoksi muodostua itsestään selväksi, kuten esimerkiksi se, että tasakylkinen kolmio on kolmio. Monet käsitesuhteista ovat kuitenkin sellaisia, että ne edellyttävät käsitteiden ymmärtämistä määriteltyinä käsitteinä. Esimerkiksi kysymys siitä, luetaanko puolisuunnikas suunnikkaan erikoistapaukseksi vai ei, riippuu kyseisten käsitteiden määrittelystä eikä ole pääteltävissä käsitteisiin liitetyistä näkömielikuvista (vrt. esimerkiksi oppikirjoissa Silfverberg ym. 1994, 43; Pehkonen & Tuuri 1996, 47 esitettyjä toisistaan poikkeavia määrittelyjä). Vastaavasti keskenään yhtenevät kuviot eivät ole niiden oppilaiden mielestä yhdenmuotoisia, jotka ovat mieltäneet yhdenmuotoisuuden oppikirjassa Pehkonen ja Tuuri (1996, 54) esitetyllä tavalla "Kuvioita, joilla on eri koko mutta sama muoto, sanotaan yhdenmuotoisiksi" mutta ovat yhdenmuotoisia, mikäli he käsittävät yhdenmuotoisuuden esimerkiksi Erkinjuntti (1994, 50) määrittelemällä tavalla "Kun kahdella kuviolla on sama muoto, niitä sanotaan keskenään yhdenmuotoisiksi".

Tässä esitettävän geometrisen käsitetiedon kehityksen mallin kannalta edellä luvussa 3.3.4 käsiteltyä Malatyn (1982) esittämää jakoa tunnistamisen ja abstraktin tason ymmärrykseen voidaan tarkentaa erottamalla geometristen käsitteiden tunnistamisen tason ymmärtämisessä kolme vaihetta:

1) kuviotyypin tyypillisten esimerkkien, prototyyppien tunnistaminen näkömielikuvien avulla taso vH1),
2) oikea, mutta disjunktiivinen, karsinoiva ja luokkainkluusion kieltävä tunnistaminen (tasot vH1-2 ja vH2) sekä
3) Malatyn tavoin tulkittu tunnistamisen tason ymmärtäminen, joka siis tarkoittaa hierarkkista, luokkainkluusion huomioonottavaa tunnistamista (vH3, vH4 ja vH5).

Vastaavasti abstraktin tason ymmärtämisessä voidaan käsitteiden määrittelyssä erottaa neljä kehitysvaihetta, jotka tulevat ilmi käsitteiden

1) naiivina määrittelynä (tasot vH0 ja vH1),
2) listamäärittelyinä (tasot vH1-2 ja vH2),
3) määrittelevien ominaisuuksien minimikombinaatioihin perustuvina disjunktiivisina määrittelyinä (taso vH3) sekä
4) matemaattisesti oikeantyyppisinä määrittelyinä (tasot vH3, vH4 ja vH5).

3.4.3 Oppilaan geometrisen tietämyksen kasvusuunnat

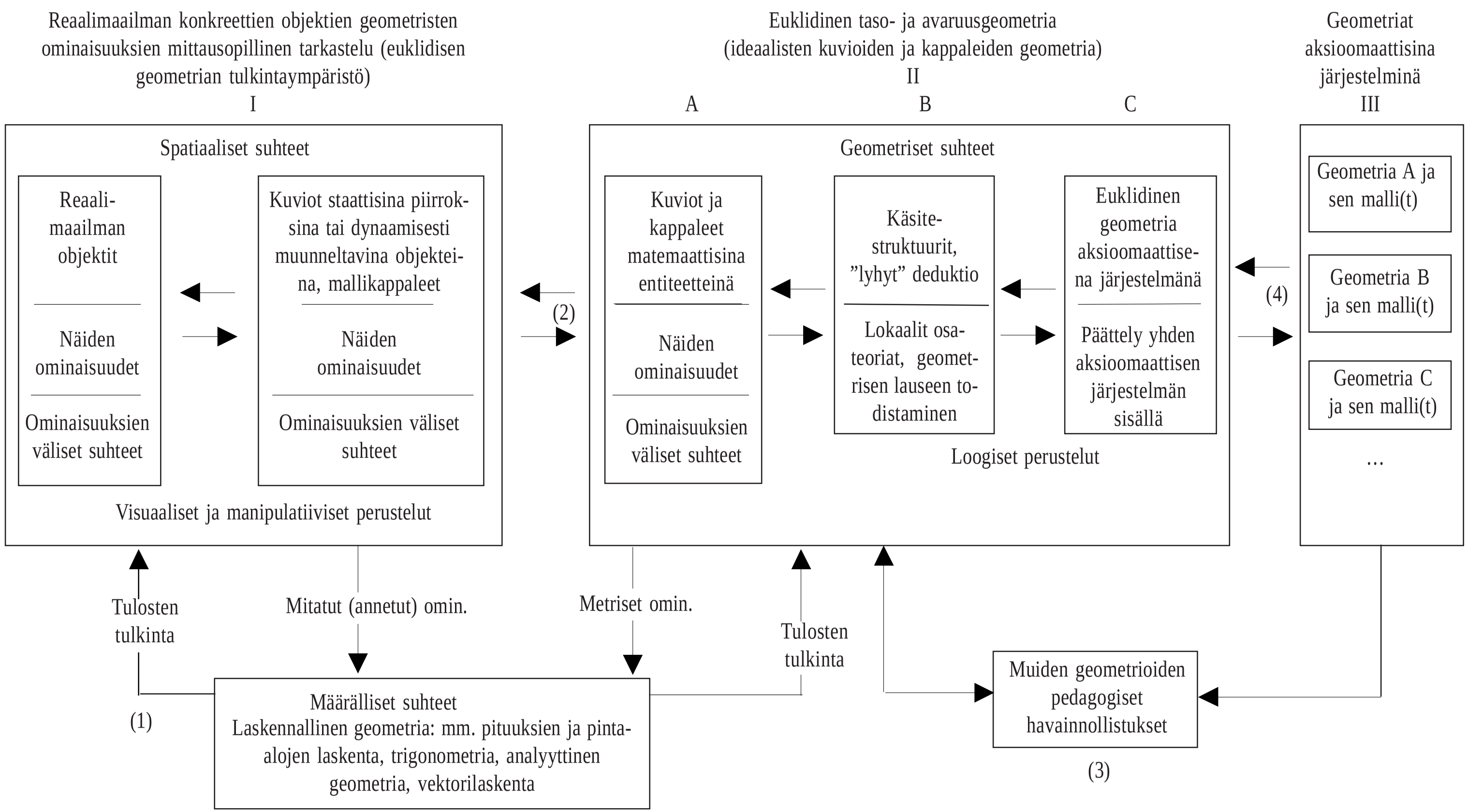
Seuraavalle sivulle sijoitetussa kuviossa 8 esitetty kaavio havainnollistaa niitä oppilaan geometrisen tietämyksen kehityssuuntia, joille koulun geometrian opetus erilaisten opetussuunnitelmallisten painotusten kautta vaihtelevasti luo pohjaa. Tämän tutkimuksen polttopisteessä olevaa geometrista käsitetietoa tarvitaan erityisesti reaalimaailman geometrisia ominaisuuksia tarkastelevan mittausopillisen näkökulman ja euklidisen geometrian näkökulman kautta kertyvän geometrisen tietouden linkittämiseen.

Edellisessä luvussa esitetyn mallin mukaisesti käsitetietouden rakentumisen kannalta huomionarvoista on, että prototyyppinen, käsitteiden visuaalisiin merkityksiin painottuva geometrinen ajattelu (vrt. kuvion 8 lohko I) antaa kunnolla mahdollisuuden vain konkreetin reaalimaailman geometrian mittausopillisen näkökulman mukaisiin tarkasteluihin. Euklidisen geometrian tarkastelut sitä vastoin edellyttävät geometrisen ajattelun painopisteen siirtymistä käsitetietoudessa eksplisiittisten geometristen merkitysten suuntaan (vrt. kuvion 8 lohko II). Koska euklidisessa geometriassa tarkastelun kohteina ovat konkreettien objektien muotoja ja avaruussuhteita vastaavat idealisoidut matematiikan käsitteet, oppilaiden käsitteiden määrittelytaidot sekä käsitteiden loogisten suhteiden hallinta korostuvat.

Tiedon pätevyyden koettelu tehdään mittausopillisessa lähestymistavassa eri kriteerein kuin euklidisessa geometriassa. Mittausopillisissa tarkasteluissa konkreettien objektien mahdolliset geometriset ominaisuudet hyväksytään tai hylätään luonnontieteellisen tarkastelun tapaan havaintoon tukeutuen. Tällainen lähestymistapa on ollut tyypillistä peruskoulun geometrian opetukselle. Kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia on perusteltu visuaalisesti havainnollistamalla niitä piirrosten ja mallien avulla (vrt. esim. Pythagoraan lauseen visuaaliset havainnollistukset) tai manipulatiivisesti konstruoimalla mallikappaleita, leikkaamalla, taittelemalla yms. (vrt. esim. kolmion kulmasumman tutkiminen repimällä kolmiosta kulmat irti ja kokoamalla kulmista oikokulma). Euklidisen, synteettisen geometrian näkökulmassa sen sijaan uutena esitettävä tieto, geometrinen lause vaatii todistusmetodiin perustuvan pätevyyden osoituksen, mikä luonnollisesti asettaa käsitetietoudelle uusia vaatimuksia.

Mittausopillisen ja euklidisen geometrian näkökulmaero heijastuu siihen, miten oppilas tulkitsee piirroksina esitettyjen tasokuvioiden tai kappaleiden luonteen. Oppilas, joka geometriassa on tottunut tarkastelemaan pelkästään konkreettien objektien geometrisia ominaisuuksia, on helposti taipuvainen ymmärtämään piirroksina esitetyt kuviot ja kappaleetkin ennemminkin yksittäisinä reaalimaailman konkreetteina objekteina kuin euklidisen geometrian käsitteiden esimerkinomaisina representaatioina. Kuvien erottaminen kuvioista on keskeinen geometrisen ajattelun virstanpylväs (Laborde 1993, 41—42) ja eräs tason vH3 kriteereistä.

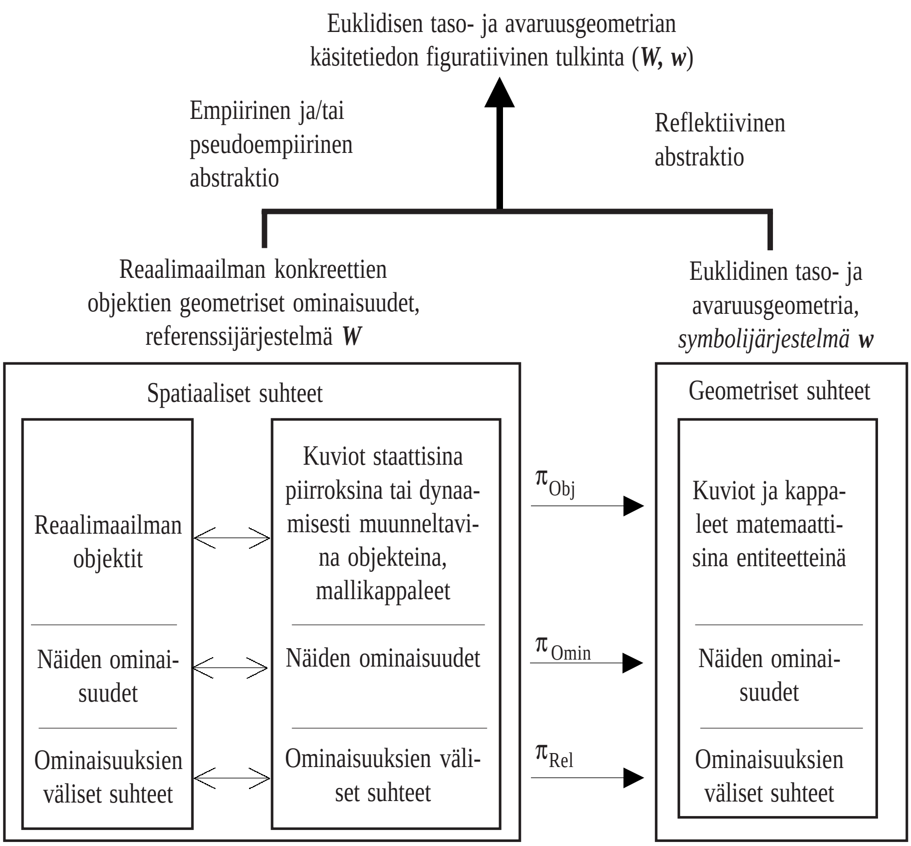
van Hielen tasoittain tulkiten spatiaalisia suhteita kuvaavan laatikon sisällä tarkastelutavan syveneminen objektien kokonaisvaltaisesta tarkastelusta niiden ominaisuuksien ja edelleen ominaisuuksien välisten suhteiden tarkasteluun vastaa siirtymisiä tasojen vH0, vH1 ja vH2 välillä. Euklidisen geometrian näkökulman syveneminen siirryttäessä kuvion 8 geometrisia suhteita kuvaa-



Kuvio 8. Oppilaan geometrisen tietämyksen kehityssuuntia

van lohkon II sisällä suunnassa IIA → IIB → IIC vastaa van Hielen tasoittain tarkastellen siirtymistä tasolta vH3 tasolle vH4. Tasolla vH3 käsitteet ymmärretään määrittelyn kautta täsmennetyiksi, hallitaan käsitteiden ominaisuuksia ja ominaisuuksien välisiä riippuvuuksia ns. lyhyttä deduktiota, kyetään seuraamaan deduktiivista päättelyä jne. Tasolle vH4 tyypillistä on käsiterakennelmien eheytyminen ja deduktion omaehtoinen ja tarkoitushakuinen hyväksikäyttö perusteluissa ja todistamisessa jne. Kaikkien kuviossa 8 havainnollistettujen geometrisen käsitetiedon komponenttien I, II ja III hallinta vastaa van Hielen tason vH5 luonnehdintaa.

Varsinaisen geometrisen merkityksensä reaalimaailman objektien spatiaalisia suhteita kuvaavat käsitteet saavat vasta sitten, kun ne opitaan mieltämään konkreettien objektien muotoja ja avaruussuhteita kuvaavina abstraktioina, jotka konkreetista tulkinnastaan huolimatta elävät myös omaa elämäänsä käsitteellisinä ideatason konstruktioina. Schoenfeldin terminologiaa käyttäen (vrt. luku 2.3.5 ja erityisesti kuvio 4) reaalimaailman geometria (*W*) objekteineen, niiden ominaisuuksineen ja ominaisuuksien suhteineen toimii siis geometrian ideaalisten objektien isomorfisena tulkintaympäristönä (*w*). Geometristen käsitteiden figuratiivisen kaksoisluonteen mukaisesti geometrinen käsitetietous muodostuu em. tulkintojen *W* ja käsitteellistysten *w* kombinaationa (*W*,*w*).



Kuvio 9. Geometristen käsitteiden intuitiivisen ja eksplisiittisen merkityksen yhteen nivoutuminen euklidisen taso- ja avaruusgeometrian figuratiiviseksi tulkinnaksi ***(W, w)***

Tällainen konkreetin ja abstraktin näkökulman yhteensovittaminen on käsitteellisellä tasolla merkki van Hielen tason vH3 saavuttamisesta.

3.4.4 Geometrisen käsitetiedon kehittämisen merkitys

3.4.4.1 Määritelmätiedon merkitys

Euklidisen geometrian tarkastelemat käsitteet voidaan jakaa kahteen tyyppiin: (1) määrittelemättömiin, intuitiivisesti selviksi oletettuihin peruskäsitteisiin, kuten piste, suora, taso ja relaatiot "piste on suoralla", "piste on kahden muun pisteen välissä" ja (2) peruskäsitteiden avulla määriteltyihin käsitteisiin, kuten jana, kulma, suorien yhdensuuntaisuus jne. Koulun geometrian opetuksessa peruskäsitteiden intuitiivinen merkityssisältö rakentuu tulkitsemalla käsitteet eräänlaisiksi visuaalisiksi interpolaatioiksi vastaavista reaalimaailman olioista: pisteellä ei ole pituutta eikä leveyttä, suora on tasossa tai avaruudessa kulkeva yhtenäinen "suora" viiva, jolla ei ole leveyttä ja joka jatkuu kumpaankin suuntaan loputtomiin jne. Tällainen geometristen käsitteiden konkreettiin perustaan rakentuva tulkinta oppilaiden on helppo ymmärtää jo varhaisella iällä. Kuitenkin ennen kuin oppilas kykenee tarkastelemaan muotoja ja tilasuhteita tavalla, joka on ominaista euklidisen geometrian matemaattiselle näkökulmalle, hänen on opittava ymmärtämään, että geometriset kuviot ja kappaleet saavat matemaattisina käsitteinä merkityksensä nimenomaan määritelmiensä eikä visuaalisten hahmojensa kautta. Matemaattisen määrittelyn idean oppiminen edellyttäisi, että määrittelemistä harjoitellaa. Malleja määrittelytaitojen opettamiseksi on olemassa (vrt. esim. de Villiers 1998). Harjoittamatta ei ole takeita siitä, että edes hyvin menestyvät oppilaat ymmärtäisivät, mistä määrittelyssä on kyse. Linchevskyn ym:n (1992) tutkimuksen perusteella kaikki matematiikkaan collegessa tai yliopistossa opiskelevat opiskelijatkaan eivät tiedä, mitä määrittely tarkoittaa. Mariottin (1993) ja Mariottin ja Fischbeinin (1997) tutkimukset osoittavat, miten vaikeaa oppilaan on määritellä käsitettä tavalla, jossa käsitteen implisiittinen ja eksplisiittinen merkityssisältö eivät olisi ristiriidassa keskenään (vrt. luku 3.4.1).

Oppilaan määritelmätietous voi olla monenlaista ja monen tasoista. Osittain käsite saa merkityksensä esimerkkiensä kautta ja geometriassa tällöin nimenomaan visuaalisesti. Varsinaisesti käsitteen määrittely kuitenkin yleensä mielletään verbaalisesti (ja symbolisesti) esitetyn määritelmän asiasisällön ymmärtämiseksi. Määritelmän verbaalisen sisällön ulkoa muistaminen ei sinänsä vaadi käsitteellisesti paljoa. Määritelmän kuvaama tilanne on myös yleensä helppo esittää yksittäisten mallikuvioiden avulla tai muilla keinoin havainnollistettuna. Oleellisesti selvästi vaikeampaa oppilaalle on oppia ymmärtämään, millaisia variointimahdollisuuksia määritelmä käsitteelle sallii ja millaisia ei. Myös määritelmän muotoileminen vaatii harjaannusta. Alkeellinen tapa määritellä käsite on kuvata kaikki sen tiedetyt ominaisuudet ns. listamääritelmänä. Tämä vastaa reaalimaailman objektin kuvailua sanakirjatyyppisesti. Matemaattisen määrittelyn ideaan kytkeytyy kuitenkin vielä määrittelyn tarkoituksenmukaisuuden ja lyhyyden vaatimus. Kaikista käsitteen määrittelevistä ominaisuuksista määritelmään otetaan mukaan minimimäärä tarkoituksenmukaisimpina pidettyjä ehtoja. Oppilaan tulisi myös oppia, että sen jälkeen, kun geometrisen käsitteen määrittely on tehty, niin määrittely, ei konkretia, määrää sen, miten määritelty asia pitää tulkita. Matemaattisen määrittelyn idean oppiminen näyttää vievän aikansa. Linchevskyn ym. (1992) tutkimuksen perusteella asia ei ole selvä kaikille matematiikkaa college- tai yliopistotasolla opiskeleville opiskelijoillekaan. Toisaalta malleja määrittelytaitojen systemaattiseksi opettamiseksi on olemassa (vrt. esim. deVilliers 1998).

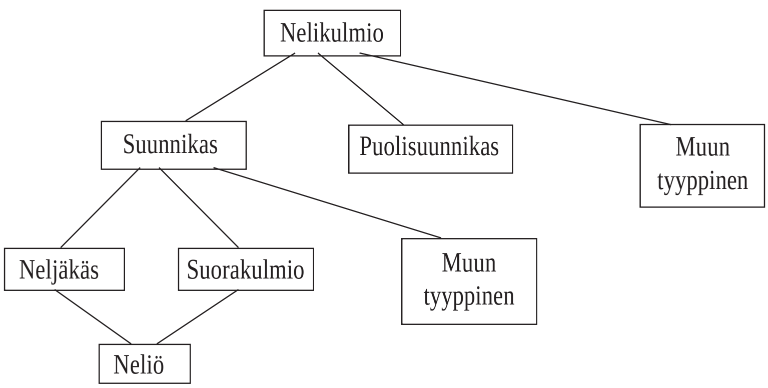
Määritelmien ymmärtämisen merkitys on käsitestruktuurien oppimisen kannalta keskeinen, sillä käsitteiden määrittely määrää käsitteiden välille rakentuvat suhteet. Esimerkiksi, jos käsitteen A tiedetään määritelmänsä perusteella tai muusta syystä toteuttavan käsitteen B määritelmässä edellytetyt ehdot, niin A on B:n alakäsite. Tällainen tilanne voi vallita kahden käsitteen välillä joko triviaalisti tai vähemmän triviaalisti. Tasasivuinen kolmio on triviaalisti aina kolmio, mutta se, että tasasivuinen kolmio on myös tasasivuinen, ei ole triviaali suhde. Viimeksi mainittu relaatio johtuu käsitteiden tasasivuisuus ja tasakylkisyys määrittelystä. Tapaa, jolla kahden käsitteen välinen keskinäinen relaatio päätellään vertaamalla käsitteiden määritelmiä, kutsun jatkossa "lyhyeksi" deduktioksi erotuksena "pitkistä" monivaiheisista deduktioketjuista, jotka ovat tavanomaisia lauseiden todistamisessa.

Geometristen käsitteiden oppimisen kannalta voidaan pitää ongelmallisena sitä, että ne mallit ts. piirrokset ja muut konstruktiot, joilla näitä käsitteitä kuvataan, ovat useimmiten staattisia eivätkä havainnollista riittävän hyvin sitä kokonaisvariaatiota, jonka määrittely niille sallii. Tietokoneympäristöihin ja kehittyneimpiin graafisella näytöllä varustettuihin laskimiin kehitettyjä dynaamisen geometrian ohjelmistoja, kuten Cabri Géomètre, Geometers' Sketchpad, Euklid ja Dr. Geo, käyttäen tätä yksittäisen kuvion spesifiyden ongelmaa on pyritty kiertämään (vrt. esim. Laborde 1993; Schumann & Green 1994). Dynaamisen geometrian ohjelmilla piirrettyä tasokuviota on mahdollista muuntaa dynaamisesti kuvion määrittelyn sallimissa puitteissa. Ominaisuudet, joiden avulla dynaaminen kuvio on konstruoitu, ovat sen määritteleviä ominaisuuksia, jotka tietokoneohjelma kuviota muunneltaessa muistaa ja pitää voimassa. Ohjelman käyttäjä siten tosiasiassa määrittelee jokaisen piirtämänsä kuvion tavalla, jolla hän kuvion konstruoi. Kun kuvio on konstruoitu (määritelty) voidaan tarkastella, mitkä piirteet dynaamisesti muunneltavassa kuviossa pysyvät silmämääräisesti tai mittaustyökaluja käyttäen invariantteina ja mitkä eivät. On oletettu, että käsitteitä vastaavat visuaaliset mielikuvat kehittyvät tällaisten järjestelmien käytön myötä rikkaammiksi ja paremmin käsitteen todellista merkitystä vastaaviksi kuin staattista havainnollistusta käytettäessä. Dynaamisten geometriaohjelmien avulla voidaan näin uudella tavalla konkretisoida käsitteen määrittelevät ehdot, määrittelyn mahdollistamat esimerkkitapausten variaatiot ja invariantit ominaisuudet, jotka määrittely geometriseen käsitteeseen kytkee.

3.4.4.2 Tiedonrakenteiden merkitys

Jonesin ja Bushin (1996) mukaan euklidisen geometrian opiskelun myötä opitaan kahdenlaisia tiedonrakenteita, joita he kutsuvat *käsitestruktuureiksi* ja *aksiomaattisiksi struktuureiksi*. Käsitestruktuurit muodostuvat samaan asiayhteyteen kuuluvista määritellyistä käsitteistä ja niiden keskinäisistä suorista riippuvuussuhteista. Käsitestruktuurien hallinta on itse asiassa juuri tämän tutkimuksen käsittelemää geometrista käsitetietoa. Aksiomaattiset struktuurit, joilla kuvataan käsitejärjestelmien ja lauseiden järjestymistä teorioiksi, liittyvät enemmän lukio- ja korkeakoulutason geometrian opetuksen problematiikkaan.

Käsitestruktuurien oppiminen edellyttää oppilaalta erityisesti määritelmätietoutta ja taitoa tehdä päätelmiä käsitteiden välisistä suhteista. Koulukursseihin sisältyvien käsitestruktuurien oppimista on eräissä oppikirjoissa pyritty tukemaan havainnollistamalla käsitteiden välisiä suhteita alla olevan kuvion tyyppisillä käsitekaavioilla.

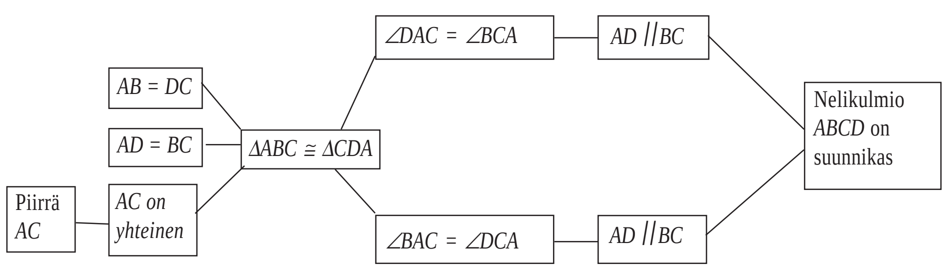


Kuvio 10. Erityyppisten nelikulmioiden muodostama käsitekaavio (Silfverberg ym. 1994, 45)

Kaavioiden avulla on pyritty helpottamaan käsitestruktuurien oppimista ja muistamista sekä luomaan yhteenvetoja kurssissa käsitellyistä käsitteistä ja näiden keskinäisistä suhteista. Esimerkiksi kuviosta 10 käy selvästi ilmi, miten mainitussa oppikirjassa puolisuunnikas on tulkittu suunnikkaan rinnakkais- eikä yläkäsitteeksi. Käsitekaavioilla voidaan havainnollistaa sekä objektikäsitteiden että ominaisuuksien välisiä relaatioita. Opetuksessa käsitekaavioita on laadittu miellekarttojen tapaan täydentäen niitä sitä mukaa, kun uusia käsitteitä opitaan. Tällä tavoin oppilaiden tarkkaavaisuutta on pyritty suuntaamaan käsitteiden merkitysten pohdintaan ja käsitteiden välisten suhteiden analysointiin. Jo viisikymmentäluvulla van Hiele-Geldof (1957) käytti käsitekaavioita tehokkaasti geometrian opetuksen apuna, joten mikään uusi didaktinen keksintö käsitekaavioiden käyttö geometrian opetuksessa ei ole. Oppilaiden tuottamia käsitekaavioita on käytetty myös oppilaiden oman itsearvioinnin välineinä (ks. esim. Åhlberg 1991b, 36—50) tai tutkimuksellisena keinona verrattaessa oppilaiden tuottamia käsitekaavioita käsitteiden standarditulkinnan mukaisiin käsitekaavioihin (ks. esim. Shavelson 1972).

Geometrisen tiedon muodostamat aksiomaattiset struktuurit ovat käsitestruktuureja globaalimpia tiedonrakenteita, joiden oppiminen käy Jonesin ja Bushin (1996) mukaan välttämättömäksi silloin, kun euklidista geometriaa tarkastellaan deduktiivisesti matemaattisena järjestelmänä. Aksiomaattisia struktuureja voidaan kuvata tiedonrakenteiksi, jotka syntyvät, kun geometrian määrittelemättömät peruskäsitteet, määritellyt käsitteet, aksioomat ja lauseet järjestetään yhtenäiseksi matemaattiseksi teoriaksi, jossa kukin lause on johdettavissa aksiomista ja jo johdetuista lauseista ja käsitteiden määritelmät rakennetaan peruskäsitteiden tai aiemmin määriteltyjen käsitteiden varaan. On selvää, ettei geometrian aksiomaattista struktuuria voida oppia kerralla. Normaalisti deduktiivisen geometrian rakennetta lähestytäänkin lokaalisti valitsemalla tarkastelun kohteeksi jokin geometrian osa-alue, kuten esimerkiksi yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuslauseet sovelluksineen, jonka puitteissa harjoitellaan käsitteiden eksaktia käyttöä ja deduktiivista todistamista. Tällainen velvoite sisältyy mm. lukion opetussuunnitelman perusteissa esitettyyn pitkän matematiikan lukiokurssin Geometria sisältökuvaukseen (Anon. 1994b, 71). Kuviossa 8 tällaisia tiedonrakenteita on kutsuttu euklidisen geometrian lokaaleiksi osateorioiksi. Sen jälkeen, kun ne geometriset perustotuudet, joita pidetään annettuina ja joita ei perustella, on lyöty lukkoon, lokaalin osateorian kartuttaminen tapahtuu todistamalla uudet lauseet deduktiivisesti jo tiedetyn perusteella. Edellytyksenä sille, että oppilas voi ymmärtää, mistä tässä on kyse on, että hän on tuntee käsiteltävien käsitteiden merkitykset ja sen tietostruktuuriin kuuluvien käsitteiden väliset riippuvuudet, joihin todistukset perustetaan. Suppeampien käsitestruktuurien tuntemus on näin ollen lauseiden todistamisen ja lokaalien osateorioiden rakentamisen keskeinen perusedellytys.

Yleensä lauseen todistamisessa tarvitaan useamman kuin yhden askeleen pituisia deduktioketjuja ja päätelmät tulevat rakenteeltaan helposti monimutkaisemmiksi kuin ne lyhyet deduktiot, joita käytetään kuvaamaan määritelmistä johdettuja käsitteiden välisiä suhteita. Euklidisen geometrian yhteydessä esiin tulevat todistukset poikkeavat merkittävästi niistä visuaalisista tai manipulatiivisista perusteluista, joilla konkreettien objektien geometrisista ominaisuuksista tehtyjä havaintoja perustellaan ennen deduktiivisen metodin käyttöönottoa. Oppilaan todistamisajattelulle tämä vaihe merkitsee ratkaisevaa käännekohtaa. Eräissä oppikirjoissa (vrt. esim. Serra 1993; Silfverberg ym. 1994) geometrisen lauseen todistuksen ymmärtämiskynnystä on pyritty alentamaan tuomalla todistuksen looginen rakenne esiin käyttämällä verbaalisen todistuksen ohella esimerkiksi kuvion 11 tyyppisiä visuaalisia todistuskaavioita.



Kuvio 11. Esimerkki geometrisen lauseen "Nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, on suunnikas" visuaalisesta todistuskaaviosta

Peruskoulussa deduktiivista geometriaa ei ainakaan nykyisillä resursseilla voida ajatella opetettavan koko ikäluokalle kuin korkeintaan esittelemällä malliksi geometrisen todistamisen idea joissakin yksittäisissä geometrian kurssien osissa. Valinnaiskurssien yhteydessä tilanne on kuitenkin toinen. Tällaisilla kursseilla oppilaille voidaan rajatulla euklidisen geometrian osa-alueella lokaalisti pyrkiä havainnollistamaan myös matemaattisen systeemien rakennetta, geometrisen todistamisen ideaa ja jopa erilaisten geometrioiden olemassaoloa. Joen (1994a ja b; 1995) opetuskokeilut antavat tästä oivallisen esimerkin.

Eri geometrioiden aksiomaattinen tarkastelu (kuvion 8 lohko III) kuuluu van Hielen teorian mukaan geometrisen ajattelun kehitysprosessin viimeiselle tasolle eli van Hielen tasolle 5. Koulugeometrian opetuksen näkökulmasta erilaisten geometrioiden tutkiminen aksiomaattisina järjestelminä esimerkiksi siihen tapaan, miten Nevanlinna (1973) yliopistotason opintoihin tarkoitetussa kirjassaan "Geometrian perusteet" tarkastelee affiinin geometrian aksioomajärjestelmän rakentumista, on käytännöllisesti katsoen mahdotonta. Silti sopivia tulkintaympäristöjä käyttäen voidaan jopa peruskoulutasolla oppilaille antaa viitteitä siitä, mitä ominaisuuksia tavanomaisesta euklidisesta geometriasta poikkeavilla geometrioilla on.

Esimerkiksi ns. taksinkuljettajan geometriaa, jonka metriikka poikkeaa tavanomaisesta euklidisen geometrian metriikasta, on helppo havainnollistaa ruutukaava-alueen katuverkostoanalogialla (vrt. esim. Viilo ym. 1995, 151; Krause 1973). Pallogeometrian tutkimiseen Lénárth (1996) on kehittänyt monipuolisen opetusvälineistö- ja oheismateriaalisarjan. Hyperbolisen geometrian Poincarén mallin ominaisuuksia voidaan tutkia esimerkiksi Ricen Universityssä Houstonissa kehitetyllä tietokoneohjelmalla NonEuclid (Castellanos ym. 1993). Vastaava Poincarén mallin havainnollistus on toteutettu myös dynaamisen geometrian ohjelman Geometers' Sketchpadin sovelluksena. Yksittäisiä kaarevien pintojen geometrisia ominaisuuksia, kuten esimerkiksi kolmion kulmasummia, voidaan sopivia apuvälineitä käyttäen mitata vaikkapa talousastioiden tai hedelmien pinnoilta (Casey 1994) ja todeta, etteivät kaikki euklidisen geometrian itsestään selvyyksiltä tuntuvat tulokset päde kaarevilla pinnoilla.

3.4.5 Laskennallisen ja käsitteellisen geometrian opetuksen tasapaino

Tarkasteltaessa peruskoulun geometrian opetukselle asetettavia tavoitteita kuviossa 8 esitettyjen geometrisen tietämyksen erilaisten kasvusuuntien kannalta useammanlaiset painotukset näyttävät mahdollisilta. Nostan näistä tässä yhteydessä esiin kolme vaihtoehtoa:

1.Laskennallista geometriaa painottava vaihtoehto: Tyydytään käsitteellisellä tasolla siihen, että oppilaat hallitsevat geometrian peruskäsitteet lähinnä käytännön sovellusten edellyttäminä konkreetteina tulkintoina, ja yleisesti ottaen geometrian opetuksessa tavoitellaan pääasiassa laskennallisten valmiuksien saavuttamista. Kuvion 8 kannalta tulkiten tämä tarkoittaisi etenemistä lähes yksinomaan suunnassa (1).

2. Laskennallisen ja käsitteellisen näkökulman tasapainoon tähtäävä vaihtoehto: Laskennallisissa valmiuksissa pyritään samaan suoritustasoon kuin edellisessä vaihtoehdossa, mutta käsitteellisellä tasolla pyritään siihen, että oppilaat oppisivat keskeisimpien käsitteiden matemaattiset merkitykset ja osaisivat päätellä käsitteiden välisiä relaatioita. Kuvion 8 kannalta tulkiten tämä tarkoittaisi etenemistä pääasiassa suunnassa (1) ja sen lisäksi maltillisesti myös suunnassa (2), jolloin tavoitteeksi asetettaisiin se, että oppilaat ymmärtävät matemaattisen määrittelyn idean ja hallitsevat kohtuullisesti ainakin keskeisimmät geometriset käsitestruktuurit. Lukion geometrian opetus voitaisiin rakentaa alkavaksi tältä perustasolta.

3. Käsitteellistä näkökulmaa painottava, deduktiivisen geometrian perusteiden oppimiseen tähtäävä vaihtoehto: Oppilaiden geometrista ajattelua pyritään kehittämään kuvion 8 horisontaalisessa suunnassa mahdollisimman pitkälle kohden deduktiivista geometriaa. Edistyneimpien oppilaiden toivotaan saavan lokaalien osateorioiden tarkastelun kautta myös käsityksen geometriasta aksiomaattisena järjestelmänä sekä ymmärtävän, että euklidisen geometrian lisäksi on muitakin geometrioita.

Geometrisen ajattelun kehitysprosessi on, kuten kuvioiden 7, 8 ja 9 rakennekin osoittaa, tavattoman monisäikeinen ilmiö. Tämän tutkimuksen teoreettisen kehyksen perusrungon muodostava van Hielen teoria kuvaa tämän kehitysprosessin etappeja erityisesti käsitteellisen, deduktiivisen geometrian näkökulmasta. Pirien ja Kierenin sekä Sfardin teoriat antavat lisävalaistusta oppimisprosessin vaiheittaisuuskysymykseen. Fischbeinin sekä Schoenfeldin tarkastelut valottavat sitä ongelmakenttää, joka liittyy geometrian intuitiivisen tulkintaympäristön ja geometrian käsitestruktuurien oppimisen yhteen sovittamiseen.

Luonnollisesti van Hielen teoria heijastaa oman aikansa, 1950-luvun lopun, geometrian opetuksen tavoitteita, jolloin geometrian opetus tähtäsi selkeästi deduktiivisen geometrian oppimiseen. Nykyisen suomalaisen peruskoulun geometrian opettamisen tavoitteissa deduktiivisen geometrian oppimisella ei ole samaa asemaa. Opetuksen painopiste on laskennallisessa, käytännön taitoja korostavassa geometrian opetuksessa edellä esitetyn vaihtoehdon 1 tapaan. Oma näkemykseni on, että tähän sisältyy vaara, että osalle oppilaista ei koko kouluaikana avaudu geometriaan juuri muunlaista näkymää kuin se, minkä intuitiivinen reaalimaailman konkreettien objektien ja yksittäisten kuvioiden geometrisia ominaisuuksia käsittelevä geometrian tulkinta tarjoaa. Valtaosa, jollei peräti kaikki, siitä laskennallisesta geometriasta, jonka oppilas peruskoulussa oppii, on opittavissa ja sovelluttavissa hyvinkin pinnallisen käsitteellisen tiedon varassa. Jos siis geometrian opetuksessa tähdätään ensi sijassa vain laskennallisten valmiuksien kehittämiseen eikä käsitteellisen ajattelun kehittämistä pidetä tärkeänä, on vaarana, että monet oppilaat eivät ainakaan geometrian opiskelun kautta yllä niihin matemaattisen ajattelun kehittämiseen tähtääviin tavoitteisiin, jotka on kirjattu esimerkiksi peruskoulun opetussuunnitelman perusteisiin (vrt. Anon. 1994a, 76). Kuitenkin esimerkiksi lukion pitkän matematiikan geometrian kursseissa edetään varsin nopeasti asiasisältöihin, jotka edellyttävät käsitteellisen ajattelun kehittyneisyyttä ja deduktiivisen päättelyn valmiuksia.

Oppilaiden saavutustaso laskennallisen geometrian valmiuksissa on helpommin mitattavissa kuin heidän käsitteellisen ajattelunsa taso. Laskennallisen geometrian valmiuksia voidaan mitata tavanomaisilla koulukokeissakin käytetyillä geometrisilla laskutehtävillä. Hankalampaa on kuitenkin hankkia tietoa siitä, millaisia merkityksiä oppilaat liittävät geometrisiin käsitteisiin, ja siitä, miten he hahmottavat käsitteiden välisiä suhteita. Oppilaiden geometrisen käsitetiedon hallinnasta on mm. koulusaavutuskokeilla mitattuihin laskennallisiin taitoihin verrattuna, kertynyt vähemmän sekä käytännön tason "näppituntumaa" että tutkimustietoa. Osaltaan juuri tästä syystä kohdistan tässä tutkimuksessa geometrisen ajattelun kehittymisen tarkastelun nimenomaan yläasteen oppilaiden geometrisen käsitetietouden arviointiin. Tutkimuksen empiirisessä osassa paneudun siihen, miten oppilaat eri-ikäisinä ymmärtävät geometrisia käsitteitä ja hahmottavat näiden keskinäisiä suhteita. Tämän lisäksi pyrin tutkimuksellani selvittämään yleisemminkin yläasteikäisten oppilaiden geometrisen ajattelun kehitysprosessin luonnetta niissä puitteissa, jotka nykyinen geometrian opetus tarjoaa. Yhtenä keskeisenä tutkimustehtävänäni on myös arvioida van Hielen teorian validisuutta tämän kehitysprosessin kuvaajana.

4 Geometrisen käsitetiedon oppimisen yleisedellytyksiä

4.1 Perusteet tarkasteltavien piirteiden valinnalle

Eräs van Hielen teorian perusolettamuksista on, että oppilaan geometrisen ajattelun edistyminen on ensi sijassa oppimisprosessin tulosta eikä niinkään iän myötä tapahtuvaa spontaania henkistä kasvua (van Hiele 1986, 65). Geometrian kouluopetuksella on tämän näkemyksen mukaisesti ratkaiseva merkitys siihen, millaiseen geometriseen ajatteluun oppijan on mahdollisuus yltää. Oppilaan yleinen kognitiivinen kehitystaso, jota voidaan arvioida esimerkiksi Piaget-tasolla, luo puitteet sille, minkä tyyppinen geometrinen näkökulma oppilaan on kulloinkin mahdollista omaksua.

Geometrisen ajattelun kehittyminen ei ole pelkästään opittujen tietojen ja taitojen määrällistä lisäystä vaan myös sellaista geometrisen ajattelun laadullista muutosta, joka on varsin vähän kytköksissä geometrian opinnoissa käsiteltyihin yksittäisiin oppisisältöihin. Alimmilla van Hielen tasoilla olevien oppilaiden visuaalisen informaation käsittely on luonteeltaan pääosin kokonaisvaltaista. Informaatio hahmotetaan suurina yksikköinä, joita kerrallaan käsitellään vain harvoja. Geometrinen päättely on enimmäkseen induktiivista, luokitteluun tähtäävää. Siirryttäessä kohden korkeampia van Hielen tasoja visuaalisen informaation käsittely muuttuu enenevässä määrin analyyttiseksi ja valikoivaksi, verbaalisesti esitetyn informaation osuus lisääntyy ja deduktiivisen päättelyn merkitys kasvaa. Kerrallaan saatetaan tarkastella mittaviakin tietomääriä.

Tutkimuksen empiirisen osan keskeisenä ongelma-alueena on sen selvittäminen, kuinka yhdenmukaista samoille van Hielen tasoille sijoittuvien oppilaiden geometrinen ajattelu on. van Hielen tasojen testit antavat valaistusta kysymykseen sellaisen geometrisen ajattelun osalta, joka tulee esiin tarkasteltaessa geometrista ajattelua koulussa opittujen geometristen sisältöjen määräämässä kontekstissa. Tässä tutkimuksessa van Hielen tasojen koherenssin ongelmaa haluttiin lähestyä myös tarkastelemalla sitä, missä määrin sellaiset oppilaiden geometrian oppimisen yleisedellytykset, jotka ovat vain vähän sidoksissa geometrisiin oppisisältöihin, vaikuttavat van Hielen tasojen saavuttamiseen. Mahdollisina esteinä siirtymisessä alemmilta van Hielen tasoilta ylemmille nähtiin puutteet, joita oppilailla mahdollisesti oli spatiaalisessa ajattelussa, loogisessa ajattelussa ja muistikapasiteetissa.

4.2 Spatiaalinen ajattelu

4.2.1 Mitä spatiaalisella ajattelulla tarkoitetaan?

Spatiaalinen tarkoittaa normaalin sanakirjamäärittelyn mukaisesti tilaa koskevaa tai avaruudellista. *Spatiaalisella ajattelulla* tarkoitetaan Libenin (1981, 12) mukaan ajattelua, joka joko kohdistuu avaruudellisiin suhteisiin tai käyttää niitä hyväksi. Usein spatiaalinen ajattelu yhdistyy visuaalisen, näköhavaintoon liittyvään tiedon käsittelyyn. Tällöin voidaan puhua myös *visuo-spatiaalisesta* ajattelusta. Spatiaalisia suhteita voidaan käsitellä myös verbaalisessa tai symbolisessa muodossa, jolloin spatiaaliseen ajatteluun ei välttämättä liity visuaalista aspektia. Kuvittelulla (imagery) on keskeinen merkitys spatiaalisessa ajattelussa. Todellisuuden käsitteellistäminen on mielikuvien muodostamista havaituista ulkoisen avaruuden tilasuhteista ja tällaisilla mielikuvilla operointia. Merkittävä osa aivoihimme tallentuneesta spatiaalisten suhteiden representaatiosta, jota käytämme hyväksemme hahmottaessamme ympäristömme tilasuhteita, säädellessämme liikkeitämme jne., on tiedostamatonta. Liben (1981, 12) ei pidä tällaista "tacitia" spatiaalista tietovarastoa varsinaisesti spatiaaliseen ajatteluun kuuluvana, joka hänen mukaansa on tietoista spatiaalisten suhteiden hallintaan tähtäävää ajattelua. Spatiaalisen ajattelun apuneuvoina toimivat erityyppiset spatiaalisten suhteiden esittämiseen kehitetyt ulkoiset representaatiot, kuten geometriset kuviot, mallikappaleet, kartat, kaaviot, verbaalit kuvaukset jne. Spatiaalisen ajattelun kehittyneisyys tulee ilmi sitä kautta, miten hyvin yksilö kykenee tulkitsemaan, tuottamaan ja käyttämään hyödykseen tällaisia representaatioita.

Spatiaalisilla kyvyillä viittaan tässä työssä sellaisiin spatiaalisen ajattelun taitoihin, jotka ovat suhteellisen pysyviä sekä vaikeasti kehitettäviä ja myös lähellä sitä, mitä me yhdeltä osalta ymmärrämme yleisellä älykkyydellä. *Spatiaalisiksi taidoiksi* puolestaan kutsun jatkossa sentyyppisiä spatiaalisen ajattelun muotoja, jotka ovat spatiaalisia kykyjä helpommin kehitettäviä. Kirjallisuudessa käytetty terminologia on kuitenkin tässä suhteessa varsin kirjavaa. Matematiikan oppimisen näkökulmasta spatiaalisten taitojen ohella on pidetty tärkeinä erityisesti näihin läheisesti liittyviä *visualisoinnin taitoja*. Visualisoinnin taidoilla on tällöin yleensä tarkoitettu taitoa käyttää visuaalisia apuneuvoja apuna sellaisen informaation prosessoinnissa, joka on alun perin esitetty muussa kuin visuaalisessa muodossa.

Geometrista ajattelua voidaan pitää eräänä spatiaalisen ajattelun muotona silloin, kun geometria tulkitaan koulugeometrian tapaan oppina avaruudellisista suhteista ja niiden keskinäisistä riippuvuuksista. Omalla tavallaan geometrian historia on ollut yritystä löytää kulloisenakin aikakautena yhteisesti hyväksyttävissä oleva, standardi näkökulma avaruudellisten suhteiden hahmottamiseen ja kuvaamiseen. Koulugeometrian oppimista voi tässä mielessä pitää tällaisen standardin näkökulman tai useiden vaihtoehtoisten, loogisesti yhtä mahdollisina pidettyjen näkökulmien oppimisena.

Wilson ja Davis (1991) toteavat, että spatiaaliseen ajatteluun kohdistuneet tutkimukset antavat varsin yhdenmukaisen kuvan seuraavista seikoista:

1. Spatiaalinen ajattelu kehittyy toiminnan kautta.
2. Yksilön on luotava omat spatiaaliset mielikuvansa ennen, kuin niitä voidaan käyttää tilan hahmottamisen apuna. Spatiaalinen ajattelu on siten ennemminkin spatiaalisten mielikuvien manipulointia kuin niiden muodostamista.
3. Representaatiot ja representaatiojärjestelmät ovat välttämätön mutta samalla hyvin kompleksinen spatiaalisen ajattelun osa-alue.
4. Spatiaalisen ajattelun tutkimuksessa kaivataan lisää kvalitatiivisella otteella tehtyä tutkimusta.
5. Spatiaalisissa taidoissa esiintyy runsaasti yksilöllisiä eroja.
6. Spatiaalinen ajattelu on dynaamista ja edellyttää jatkuvaa mielikuvien uudelleen koodausta. Mielikuvilla operointi tuottaa uusia mielikuvia ja johtaa täten sykliseen prosessiin. (Wilson & Davis 1991, xiii—xiv.)

Tämän tutkimuksen yhteydessä spatiaalisen ajattelun piirteitä sekä spatiaalisen ajattelun kehittymistä ja kehittämistä tarkastellaan erityisesti geometrian oppimisen kannalta. Spatiaalisen ajattelun kehittäminen on nähty tärkeäksi kuitenkin monien muidenkin alojen kuin vain matemaattisen asiantuntijuuden kehittymisessä. Tietoteknisten apuvälineiden kehittyessä reaalimaailman objektien visuo-spatiaalisia malleja ja erilaisten prosessien tietokonesimulointeja käytetään enenevässä määrin mm. insinööritieteissä, luonnontieteissä ja lääketieteessä. Erityisen tärkeiksi spatiaalisen ajattelun taidot tänä tekniikan aikakautena on tehnyt tarve pystyä esittämään käsitteellisesti ja erilaisina piirroksina teollisesti tuotettavien kappaleiden muotoja (vrt. esim. Yakimanskaya 1991, 5—13).

4.2.2 Spatiaalisen ajattelun kykyrakenne

Spatiaaliseen kykyyn kohdistuneella faktorianalyyttisellä tutkimuksella on takanaan jo vuosikymmenien perinne. Faktorianalyyttisellä tutkimuksella on pystytty paljastamaan erityisesti ne keskeiset osa-alueet, joihin spatiaalisia suhteiden hyväksikäyttöä edellyttävissä ongelmanratkaisutilanteissa havaittavat yksilöiden väliset suorituserot näyttävät painottuvan. Monet tutkijat ovat todenneet spatiaalisen kyvyn määrittelyn käsitteellisesti vaikeaksi tehtäväksi. Yleensä ollaankin yksimielisiä siitä, että spatiaalisen kyvyn käsitettä on lähestytty niin monelta eri kannalta ja mitattu niin monen erilaisen testin avulla, ettei enää voi pitää oikeutettuna puhua yhdestä yksittäisestä spatiaalisen informaation käsittelyyn liittyvästä kyvystä vaan ennemminkin useasta eri kyvystä, joita sitoo yhteen samantyyppinen konteksti, jossa nämä kyvyt tulevat käyttöön (esim. Bishop 1983, 181—182; Clements 1983, 8; Halpern 1986, 48; Voyer ym. 1995, 251—252).

Avaruudellisten suhteiden tajuamista on kauan pidetty yhtenä inhimillisen älykkyyden keskeisenä osatekijänä eikä se ole asemaansa menettänyt näihin aikoihinkaan tultaessa. Mm. Gardnerin (1983) moniälykkyyden teoriassaan ("Theory of multiple intelligences") käsittelemästä seitsemästä lahjakkuuden lajista spatiaalinen intelligenssi (lahjakkuus) on yksi. Älykkyystutkimuksen psykometrisen tutkimuksen alkuaikoina esimerkiksi Stern (1928) kutsui spatiaalisuuteen liittyvää älykkyyden osatekijää Raumschauungsvermögeniksi, Cox (1928) mekaaniseksi faktoriksi eli m-faktoriksi ja Thurstone (1938) visuaaliseksi faktoriksi. Yhden jakamattoman spatiaalisen space-faktorin aikakauden voidaan sittemmin katsoa päättyneen Guilfordin ja Laceyn (1947) tutkimukseen, jossa he jakoivat spatiaalisen kyvyn kahteen faktoriin: visualisoinnin faktoriin ja spatiaalisten suhteiden faktoriin. Ensin mainitulle faktorille latautuivat voimakkaimmin sellaiset osiot, joilla mitattiin kuvioiden ja kappaleiden visuaalista manipulointikykyä ja jälkimmäiselle faktorille osiot, joilla mitattiin esimerkiksi suuntien tajuamiskykyä ja avaruudellisiin struktuureihin sisältyvien järjestysten tajuamista (Guilford & Lacey 1947, 80). Käsitykset spatiaalisen kyvyn faktorien lukumäärästä ja faktorien tulkinnoista ovat tämän jälkeen vaihdelleet huomattavasti. Esimerkkinä faktorirakenteen monipuolistumisesta mainittakoon Roycen ja Powellin (1983) kognitiivisen systeemin rakennemalli, jossa spatio-visuaalisen faktorin alle sijoittuu seitsemän alemman kertaluvun faktoria (spatial relations, flexibility of closure, speed of closure, figural adaptive flexibility, spatial scanning, perceptual speed, visualization). Lisäksi rakennemalliin kuuluvaan muistamiskykyyn sisältyy vielä yksi visuaaliseen informaationprosessointiin liittyvä faktori (memory for design). Carrollin (1985) älykkyyden hierarkkisessa mallissa päädytään hyvin samantapaiseen ratkaisuun. Toisen kertaluvun visuaalisen hahmotuksen faktori (G_V) sisältää tässä mallissa neljä samaa (samoin nimettyä) ensimmäisen kertaluvun faktoria kuin Roycen ja Powellin mallissa, nimittäin faktorit spatial relations, visualization, flexibility of closure, speed of closure.

Viiden vuosikymmenen ajalta kertyneitä spatiaalisen kyvyn faktorianalyyttisiä tutkimuksia on sittemmin analysoitu uudelleen ja tutkimuksissa on pyritty löytämään esitettyjen faktorirakenteiden yhteisiä tekijöitä, jotta faktorirakenteen hajoamisen myötä ei menetettäisi kokonaan tutkimusten ja muodostettujen mallien keskinäistä vertailukelpoisuutta. Tällaisia meta-analyysejä ovat tehneet mm. McGee (1979), Lohman (1979) sekä Linn ja Petersen (1985).

McGeen (1979) mukaan on perusteltua erottaa spatiaalisesta kyvystä kaksi kykykomponenttia: visualisointikyky (Vz) ja orientaatiokyky (S). Visualisoinnille ja orientaatiolle McGee esittää Ekstromiltä, Frenchiltä ja Harmonilta (1976) lainaamansa määrittelyt:

Vz: Kyky käsitellä tai muuttaa toiseen muotoon spatiaalisista muodoista syntyneitä mielikuvia; edellyttää joko kuvion osien kuviteltua uudelleenstrukturointia tai lyhytaikaismuistin varassa suoritettua spatiaalisen objektin mentaalia rotaatiota ja mahdollisesti peräkkäisten operaatioiden suorittamista analyyttisellä strategialla.

S: Kyky havaita spatiaalisia muotoja tai säilyttää suuntaus suhteessa avaruuden objekteihin; edellyttää kuvion hahmottamista kokonaisuutena.

McGeen määrittelyistä saa vaikutelman, että tutkija on halunnut kytkeä Vz-faktoriin analyyttisen ja S-faktoriin holistisen prosessointitavan. Clementsin (1983, 11) mielestä kokonaisvaltaisen prosessoinnin idean liittäminen S-faktoriin aiheuttaa samalla kuitenkin epämääräisyyttä faktorin määrittelyyn. S-faktori tuleekin määritellyksi lähinnä testisuoritusten kautta faktoriin liittyvien ajatustapojen ja prosessien jäädessä hämäriksi. S-faktorin määrittelyvaikeuksiin ajautui myös Tartre koettaessaan löytää jonkin spatiaalisen orientaation testiosioiden suoritustapoja yleisesti kuvaavan ominaisuuden. Muuta yhteistä piirrettä spatiaalisen orientoinnin testiosioille Tartre ei voinut esittää, kuin sen, että spatiaalisen orientaation testiosiot eivät edellytä spatiaalisten objektien kuviteltua siirtelyä (Tartre 1990, 217).

Lohman (1979) pyrki tutkimuksessaan yhdenmukaistamaan tutkimusmenetelmälliset ratkaisut aikaisemmin Thurstonen (1938 ja 1944), Guilfordin ja Laceyn (1947), Guilfordin (1967) sekä Hornin ja Cattelin (1966) keräämien mittavien aineistojen faktorianalyyttisissä tarkasteluissa.

Lohmanin analyysit osoittavat, että faktorirakenteet ovat yllättävän yhdenmukaisia, vaikka faktorien tulkinnoissa esiintyy vaihtelua. Lohmanin mukaan spatiaaliseen kykyyn sisältyy kolme pääfaktoria, jotka hän nimeää spatiaalisten relaatioiden, spatiaalisen orientaation ja spatiaalisen visualisoinnin faktoreiksi. Spatiaalisten relaatioiden faktorille latautuivat ensisijaisesti testit, jotka edellyttävät mentaalin rotaation suoritusta. Spatiaalinen orientaatio edellyttää kykyä hahmottaa, miltä jokin spatiaalisen kontekstin konfiguraatio näyttää eri perspektiiveistä tarkasteltuina. Visualisointi on spatiaalisen kyvyn komponentti, jota tarvitaan testisuorituksen edellyttäessä monipuolista ja vaativaa spatiaalisen informaation nopeata prosessointia (Lohman 1979).

Linnin ja Petersenin (1985) tekemässä spatiaalisia kykyjä koskevien tutkimusten meta-analyysissä päätutkimuskohteena oli spatiaalisten kykyjen yhteydessä havaitut sukupuolierot. Tässä yhteydessä tarkastellaan kuitenkin vain tapaa, jolla tutkijat karakterisoivat spatiaalisten kykyjen sisältöä. Linnin ja Petersenin mukaan spatiaaliset testit voidaan jakaa kolmeen luokkaan: (1) spatiaalisen havainnoinnin testeihin, jotka mittaavat taitoa tehdä spatiaalista todellisuutta koskevia havaintoja oman kehon antamiin perussuuntiin perustuen, (2) mentaalin rotaation testeihin, joiden suoritus edellyttää objektien ajateltua kiertoa ja (3) spatiaalisen visualisoinnin testeihin, joiden suoritus sisältää analyyttistä tarkastelua ja joiden ratkaisuprosessit ovat monimutkaisia ja moniaskelisia. Linnin ja Petersenin kolmijako on pitkälti analoginen Lohmanin esittämän faktorirakenteen kanssa. Tyyppiä (1) olevat testejä voidaan pitää spatiaalisten relaatioiden testeinä, tyyppiä (2) olevia testejä spatiaalisen orientaatioiden testeinä ja tyyppiä (3) olevia testejä visualisoinnin testeinä. McGeen luokittelussa visualisointi faktoria (Vz) ilmeisesti mitattaisiin sekä Linnin ja Petersenin tyyppien (2) että (3) testeillä. Tyypin (1) testit soveltuisivat taas lähinnä McGeen S-faktorin mittaamiseen.

Näyttää siltä, että erityisesti faktorianalyyttisten tarkastelujen perusteella spatiaalisten kykyjen rakenteesta selvimmin esiin nousevat komponentit ovat spatiaaliset relaatiot eli herkkyys spatiaalisten suhteiden kokonaisvaltaiseen tajuamiseen, spatiaalinen orientaatio eli kyky vaihtaa tarkastelun näkökulmaa niin, että muuttuvat ja invariantteina pysyvät spatiaalisen kontekstin piirteet hallitaan ja spatiaalinen visualisointi eli kyky suorittaa visuo-spatiaalisiin struktuureihin kohdistuvia tai niitä hyödyntäviä moniaskelisia päättelyjä ja analyyttisiä tarkasteluja. Mentaalin rotaation testien ja eräiden kuutioiden vertailutestien katsotaan tyypillisesti latautuvan lähinnä spatiaalisten relaatioiden komponentille. Spatiaalista orientaatiota voidaan mitata esimerkiksi testeillä Gestalt Completion Test, Rod and Frame Test ja Hidden Figures Test sekä spatiaalista visualisointia mm. testeillä Paper Folding Test, Surface Development Test, Form Board Test (Eliot 1987, 7; Juhel 1991, 118; Salthouse ym. 1990, 188—189; Tartre 1990, 217—218). Testien luokittelu eri spatiaalisen kyvyn komponenteille on kuitenkin kirjavaa (vrt. esim. Salthouse ym. 1990, 188 ja Tartre 1990, 217).

Viime vuosikymmeninä informaationprosessoinnin näkökulman vahvistuminen on suunnannut spatiaalisten kykyjen tutkimusta erityisesti niiden prosessitekijöiden selvittämiseen, jotka aiheuttavat yksilöllisiä eroja spatiaalistyyppisten tehtävien suorituksessa. Ns. kognitiivisella komponenttianalyysillä on spatiaalisen kyvyn testeissä mitattuja tehtäväsuorituksia jaettu suppeampien osaprosessien jonoiksi ja selvitetty, miten kukin osaprosessi toimii kokonaisuuden osana. Tällainen prosessikuvaus on tehty useille tavallisimmille spatiaalisen kyvyn testeissä käytetyille tehtävätyypeille. Spatiaalista visualisointia edellyttävien tehtävien prosessimalleja on kuitenkin tutkittu vähemmän kuin spatiaalisia relaatioita käsitteleviä tehtäviä (Pellegrino ym. 1985, 49). Suoritusprosessin komponenttirakenteen selvittämisen ohella kiinnostuksen kohteena on ollut myös se, miten erilaiset strategiset valinnat vaikuttavat minkäkin tyyppisten tehtävien suoritukseen. Samoin on tutkittu sitä, minkälaisia yksilöllisiä eroja strategioiden valinnassa esiintyy ja miten spatiaalinen kyvyn taso vaikuttaa strategian valintaan.

4.2.3 Spatiaalisten kykyjen sukupuolierot

Vanhastaan spatiaalista ajattelua on pidetty sellaisena intellektuaalisen toiminnan osa-alueena, jossa miehet ovat naisia parempia. Eri vuosikymmeninä tehdyissä spatiaalista kykyä koskeneiden tutkimusten yhteenvedoissa miespuolisten koehenkilöiden onkin yleensä todettu suoriutuvan spatiaalisen kyvyn testeistä keskimäärin paremmin kuin naispuoliset (Anastasi 1958; Tyler 1965; Maccoby & Jacklin 1976; Halpern 1986). Sukupuolierojen suuruus vaihtelee spatiaalisen kyvyn osa-alueittain. Linnin ja Petersenin (1985) meta-analyysi osoitti, että miespuoliset koehenkilöt selviytyvät erityisesti mentaalia rotaatiota edellyttävistä tehtävistä selvästi naispuolisia paremmin. Spatiaalista havainnointia edellyttävissä testeissä todettiin miespuolisten koehenkilöiden suoriutuneen lievästi naispuolisia paremmin. Spatiaalisessa visualisoinnissa Linn ja Petersen eivät havainneet sukupuolieroja.

Tartren ja Fenneman (1995) tutkimuksen perusteella näyttää siltä, että spatiaalisen kyvyn eri komponenteilla on erilainen yhteys matematiikan saavutustasoon eri sukupuolilla. Tartren ja Fenneman tutkimuksessa spatiaalinen visualisaatio oli tyttöjen joukossa merkittävä matematiikan koulusaavutusten selittäjä mutta ei poikien. Sama tulos saatiin systemaattisesti kaikissa erilaisissa regressioanalyyseissä, jotka tehtiin. Aikaisemmassa tutkimuksessaan Fennema ja Tartre (1985) olivat jo todenneet, että ne oppilaat, jotka olivat saaneet korkean pistemäärän erityisesti spatiaalisen visualisointikyvyn testissä, käyttivät muihin oppilaisiin verrattuna useammin ja tehokkaammin piirroksia probleemanratkaisun apuna ja että tytöt käyttivät piirroksia apunaan ongelmanratkaisutilanteissa poikia useammin. Spatiaalisen orientaation osa-alueen osalta, jota mitattiin Gestalt Completion Testillä, havainnot olivat samantyyppiset. Myös spatiaalinen orientaatio korreloi tilastollisesti merkitsevästi matematiikan osaamisen kanssa vain tytöillä. Etsittäessä spatiaalisen kyvykkyyden ja matematiikan hallinnan välille kausaalista selitystä joudutaan helposti "muna ja kana"

-ongelman eteen. On vaikea arvioida kumpi edistää kumpaa, spatiaalinen kyvykkyys matematiikan oppimista vai matematiikan opiskelu spatiaalisia taitoja. Yleisemminkin sen arvioiminen, kummat tekijät ovat spatiaalisten kyvyissä havaittujen sukupuolierojen syinä uskottavampia, biologiset vaiko sosiaaliset, on hankalaa (Harris 1981, 11—117).

4.2.4 Spatiaaliset taidot

Kuten edellä todettiin spatiaalisilla taidoilla viitataan erityisesti niihin spatiaalisen ajattelun piirteisiin, jotka ovat spatiaalisia kykyjä helpommin harjaannutettavia. Rajanveto sen välillä, mitä spatiaalisen ajattelun osatekijöitä pidämme taitoina ja mitä kykyinä on luonnollisesti vaikeaa ja jää monesti makuasiaksi. Arvioidessaan spatiaalisen ajattelun merkitystä matematiikan oppimiselle Bishop (1983, 184—186) pitää tässä suhteessa kahta spatiaalisen kyvykkyyden osa-aluetta erityisen merkittävänä. Bishopin ehdottama toinen komponentti IFI (ability for interpreting figural information) tarkoittaa oppijan kykyä tulkita kuvioita, kaavioita ym. kuvamuotoista esitystä sekä ymmärtää avaruudellisia suhteita kuvaavaa sanastoa. Toinen komponentti VP (visual processing), viittaa yksilön kykyyn käsitellä ja muuntaa kuvan muodossa esitettyä informaatiota sekä ulkoisina representaatioina että mentaalisesti. Tähän komponenttiin kytkeytyy myös kyky esittää alkuperältään ei-visuaalisten abstraktien käsitteiden väliset suhteet visuaalisesti. Spatiaalista kyvykkyyttä voidaan Bishopin mukaan harjaannuttaa nimenomaan IFI-komponentin osalta, mutta VP-komponenttiin vaikuttaminen on selvästi epävarmempaa.

Del Grande (1987, 127—129) nostaa esiin seitsemän spatiaalista taitoa, joilla näyttäisi olevan erityisesti merkitystä geometrian oppimiselle. Hän esittää myös käytännön esimerkkejä siitä, miten näitä taitoja voi opetustilanteissa harjaannuttaa. Tällaisia perustaitoja ovat:

1) silmänliikkeiden koordinaatio, joka on edellytyksenä sille, että lapsi kykenee koordinoimaan näköhavaintonsa oman kehonsa liikkeisiin,
2) kuvion erottaminen taustastaan,
3) havainnon (muodon ja koon) konstanssi eli taito mieltää kuvio tai esine samankokoiseksi eri etäisyyksiltä tarkasteltaessa ja mieltää kuvio tai esine samanmuotoiseksi, vaikka sen asento suhteessa havaitsijaan muuttuu,
4) avaruudellisen sijainnin hahmottaminen eli lapsen taito hahmottaa eri esineiden sijoittumista suhteessa toinen toisiinsa ja suhteessa lapseen itseensä,
5) tilasuhteiden tajuaminen eli edelliseen läheisesti liittyvä taito verrata kohteita toinen toisiinsa,
6) visuaalinen diskriminaatio eli taito havaita yhtäläisyyksiä ja eroja eri kohteiden välillä,
7) visuaalinen muisti eli taito säilöä visuaalista informaatiota muistiin ja palauttaa sitä tarvittaessa prosessoitavaksi.

Yhdysvalloissa toteutetun opetussuunnitelmauudistuksen vauhdittamiseksi julkaistiin eräiden muiden matematiikan aihealueiden ohella myös spatiaalisten taitojen kehittämistä ja geometrian opetetusta koskevat ns. standardien soveltamisoppaat (Del Grande & Morrow 1993; Geddes ym. 1992). Näissä oppaissa geometrian oppimisen perustan nähtiin rakentuvan edellä mainittuihin spatiaalisen hahmottamisen taitoihin. Pitkällä aikavälillä luokkatasoilla K-8 oppilaiden geometrisen ajattelun kehityskulun katsottiin noudattavan van Hielen teoriassa kuvattuja vaiheita. Luokkatasojen K-8 opetuksessa on Geddesin mielestä järkevää pitäytyä lähinnä kolmelle ensimmäiselle van Hielen tasolle tyypillisen ajattelun harjoitteissa (Geddes ym. 1992, 5).

4.2.5 Spatiaalisen ajattelun kehittyminen

Piaget työtovereineen keskittyi spatiaalisen ajattelun kehittymistä koskeneissa tutkimuksissaan (Piaget & Inhelder 1956; 1971; Piaget ym. 1960) erityisesti fyysisen avaruuden hahmottamiseen liittyvien kehityspsykologisten tekijöiden selvittämiseen. Piaget, Inhelder ja Szeminska tarkastelivat näissä tutkimuksissaan lapsen kykyä käsitteellistää ulkoisen fyysisen avaruuden objektien välisiä avaruudellisia suhteita. Piagetin mukaan lapsella on kyky havaita avaruudellisia suhteita jo sensomotorisella kaudella ja tähän perustuen lapsi jo varhain muodostaa käsityksen avaruudesta ns. perseptuaalisena avaruutena. Avaruuden käsitteellinen representoituminen on Piagetin mukaan yksilön aktiiviseen toimintaan perustuva konstruktivistinen prosessi. Se perustuu avaruudellisia suhteita hyväksikäyttävien toimintojen sisäistämiseen ja sitä kautta syntyvään tietoon objektien välisistä suhteista. Käsitteellisen representaatio avaruudesta muodostuu perseptuaalista representaatiota hitaammin ja sen varaan. Avaruuden käsitteellistymisen ja ulkoisen toiminnan välillä on kaksisuuntainen vaikutussuhde. Toisaalta avaruussuhteiden käsitteellistyminen edellyttää kokemuksellista tietoa fyysisestä avaruudesta ja toisaalta avaruudesta muodostuneen käsitteellisen representaation muoto määrää minkälaiseen toimintaan lapsi on kykenevä. Koska avaruuden representoituminen on loogis-kognitiivinen prosessi, representaation muoto seuraa lapsen yleistä loogis-kognitiivista kehitystasoa.

Geometrinen näkemys avaruudesta on yksilöllä pitkän kehitysprosessin tulos. Piagetin esittämän topologisten ominaisuuksien primaarisuushypoteesin mukaan yksilön avaruuden hahmotusprosessi saa alkunsa topologisten ominaisuuksien tarkastelulla. Projektiivinen ja euklidis-metrinen näkökulma avaruuden hahmottamiseen kehittyvät vasta tämän topologisen näkökulman jälkeen. Yksilötasolla geometrisen ajattelun kehityskulku poikkeaa näin matematiikan historiallisesta kehityskulusta, jossa klassisen geometrian euklidinen näkökulma kuten tunnettua on edeltänyt projektiivisen geometrian ja topologian tarkastelutapaa. (Clements & Battista 1992, 422—424; Smock 1976, 46—58.)

Perseptuaalinen ja käsitteellinen avaruusnäkemys eivät kehity tasatahtia. Kun tietty perseptuaalinen avaruuden hahmotusmuoto, topologinen, projektiivinen tai euklidis-metrinen, on saavutettu, kestää yleensä useita vuosia ennen kuin vastaava käsitteellinen avaruuden hahmotustapa muodostuu. Lapsen perseptuaalinen avaruus kehittyy yleensä projektiiviselle tai kvasimetriselle tasolle yleensä jo ensimmäisen ikävuoden aikana (emt., 47). Lapset ovat avaruussuhteiden käsitteellisellä tasolla tapahtuvassa tarkastelussa sidottuja yhteen näkökulmaan normaalisti vielä ensimmäisten kouluvuosienkin aikana. Käsitteellisellä tasolla projektiivinen ja euklidis-metrinen näkökulma omaksutaan vasta tämän jälkeen (Eliot 1987, 105—106). Esimerkiksi jo hyvin varhain lapsi kykenee havaintotoiminnan tasolla erottamaan suoran viivan käyrästä viivasta. Kuten Piagetin kokeista käy ilmi, lapset eivät kuitenkaan välttämättä pysty siirtämään välittömän havainnon kautta syntynyttä suoruuden ideaa toiminnan tasolle esimerkiksi asettamaan esineitä suoraviivaiseen jonoon käyttäen apuna tähtäämistä tai etäisyyden mittaamista yhdestä tai useammasta perussuorasta lähtien. Tähtäämismetodi edellyttää projektiivista ja suunnan määrääminen mittaamalla euklidista näkemystä suorasta. (Smock 1976, 51.)

Eliot (1987) tiivistää Piagetin mallin spatiaalisen ajattelun kehityksestä neljään päähavaintoon:

1) Tieto avaruudesta perustuu toimintoihin, niiden sisäistämiseen ja koordinointiin. Havainto on tietoa objekteista, joka saadaan havaitsijan ollessa suorassa kontaktissa objekteihin. Avaruuden esittyminen mielessä mahdollistaa objekteja vastaavien mielikuvien pitämisen mielessä silloin, kun objektit eivät ole läsnäolevina suoraan havaittavissa, ja silloin, kun niitä voidaan tarkkailla samanaikaisesti sekä mielikuvina että läsnäolevina objekteina.

2) Spatiaalinen tietous kehittyy neljässä vaiheessa kognitiivisen kehitysvaiheisiin kytkeytyneenä. Näin syntyvät sensorismotorisen vaiheen, varhaisoperationaalisen vaiheen, konkreettien operaatioiden vaiheen ja formaalien operaatioiden vaiheen avaruuden representaatiot. Kukin representaatio rakentuu edeltävän representaation varaan, poikkeaa kvalitatiivisesti edeltävästä representaatiosta ja toimii perustana seuraavalle representoitumistavalle.

3) Spatiaalinen tietous sisältää topologisen, projektiivisen ja euklidis-metrisen elementin. Avaruudellisia suhteita opitaan hahmottamaan ensin topologisten ominaisuuksien kannalta. Tällaisia varhain hahmottamaan opittavia topologisia erotteluja ovat mm. erottelut lähellä/kaukana, erillään/yhdessä ja avoin/suljettu. Vähitellen avaruuden tilasuhteita opitaan tarkastelemaan myös sellaisten erottelujen kannalta kuten edessä/takana, oikealla/vasemmalla, yläpuolella/alapuolella, jotka ovat toisin kuin topologiset erottelut tarkasteluperspektiiviin sidottuja. Topologisen näkökulman keskittyessä objektien sisäisten ominaisuuksien tarkasteluun projektiivinen näkökulma kohdistuu objektien ja havaitsijan välisen suhteen, perspektiivin hallitsemiseen ja objektien keskinäisten avaruussuhteiden hahmottamiseen. Euklidis-metrisen tarkastelutavan myötä spatiaaliseen ajatteluun tulee mukaan kvantitatiivinen aspekti. Tilasuhteita opitaan kuvaamaan etäisyyksien, kulmien suuruuksien, pituuksien, pinta-alojen, tilavuuksien ym. suureiden avulla.

4) Kuvittelulla on merkittävä funktio spatiaalisessa ajattelussa. Kuvittelun avulla lapsi kykenee tarkastelemaan tilan sisältämiä kohteita eri perspektiiveistä. Kuvittelu mahdollistaa myös kuviteltujen transformaatioiden suorittamisen ilman todellista toimintaa. (emt., 103—108; ks. myös Smock 1976, 46—58.)

Piaget, Inhelder ja Szeminska tarkastelivat euklidis-metrisen avaruuden hahmotus- ja käsitteellistämistavan kehittymistä vuonna 1960 julkaistussa teoksessaan The Child's Conception of Geometry. Teoksessa selvitetään mm. niitä kehitystasoja, joita voidaan havaita mittaamisen idean ymmärryksessä eri-ikäisillä lapsilla, ja sitä, miten eri-ikäiset lapset ymmärtävät pituuden, pinta-alan, tilavuuden ja kongruenssin säilymisen erityyppisissä transformaatioissa, joita tarkasteltaville objekteille tehdään. Euklidisen avaruuskäsityksen kehitysprosessissa voidaan Piagetin, Inhelderin ja Szeminskan mukaan erottaa kolme tasoa. Ensimmäinen näistä vaiheista saavutetaan yleensä kognitiivinen kehityksen edettyä Piagetin tasolle IIIA (Piagetin tasojen luonnehdintojen osalta ks. esim. Hautamäki 1984). Tällöin erityyppiset säilyvyydet kuvioiden ja kappaleiden transformaatioissa hallitaan kvalitatiivisesti mutta ei kvantitatiivisesti. Esimerkiksi, kun kuvio ositetaan tai kun kuviosta leikattu osa siirretään toiseen paikkaan kuvion viereen, ymmärretään, että kuvion pinta-ala ei tällöin muutu. Suuruuksien yhteydessä hallitaan myös koon transitiivisuus: Jos A on samankokoinen kuin B ja B samankokoinen kuin C, niin A ja C ovat samankokoiset. Toisessa vaiheessa, joka liittyy Piagetin tasoon IIIB, lapsi käyttää spatiaalisessa ajattelussa apunaan myös yksinkertaista mittaamista. Pituuksia, pinta-aloja ja tilavuuksia osataan mitata samaa dimensiota olevan mitan avulla ja mittaustuloksia osataan käyttää apuna kokovertailuissa. Esimerkiksi tarkastellun kuvion pinta-ala osataan määrittää yksiköksi valitun konkreetin pienemmän kuvion pinta-alan monikertana mutta tässä vaiheessa ei vielä laskemalla pinta-alaa mitatuista pituuksista lähtien. Kolmannessa euklidisen avaruuskäsityksen kehitysvaiheessa, joka liittyy Piagetin tasoilla kuvattuna kognitiivisen kehityksen vaiheeseen IV, kappaleiden muotoa ja kokoa kyetään kuvaamaan kvantitatiivisesti käyttäen apuna laskettuja suureita. Tällöin pystytään tarkastelemaan, miten kappaleesta sopivasti mitatut pituudet ja sen pinta-ala sekä tilavuus ovat yhteydessä toinen toisiinsa ja minkä suureiden arvot muuttuvat minkäkin tyyppisissä transformaatiossa. (Piaget ym. 1960, 389—408; Smock 1976, 58—66.)

Piagetin konstruktivistisen perusnäkemyksen mukaisesti spatiaalisten ja geometristen käsitteiden kehittymisen lähtökohta on toiminnallinen. Monissa tutkimuksissa on osoitettu, että elinympäristö vaikuttaa siihen, millainen spatiaalinen käsitteistö yksilölle kehittyy. Eri kulttuureissa erilaiset tilan hahmottamista edellyttävät toiminnot muodostuvat tärkeiksi. Spatiaalisen ja geometrisen ajattelun kulttuurisidonnaisia piirteitä ovat tutkineet mm. Bishop (1983) ja Pinxten (1991). Mitchelmore (1976) osoitti vertailevassa tutkimuksessaan, että jamaikalaiset 7—15-vuotiaat koululaiset olivat kolmiulotteisten mallikappaleiden piirtämistaidoissa noin kolme vuotta jäljessä vastaavan ikäisistä yhdysvaltalaisista ja nämä taas saman verran jäljessä samanikäisistä englantilaisista. Saavutuserot johtuivat Mitchelmoren mukaan sekä oppilaiden elinympäristön fyysisistä että koulutuksellisista eroista. Yleensä koulutuksella on voimakas spatiaalista ja geometrista ajattelua yhdenmukaistava vaikutus.

4.2.6 Spatiaalisen ajattelun merkityksestä matemaattiselle ajattelulle

Spatiaalisia kykyjä ja taitoja on yleisesti pidetty eräinä todennäköisinä matematiikan oppimisessa havaittavien yksilöllisten erojen selittäjinä. Vanhemmissa tutkimuksissa spatiaalisen ajattelun ja matematiikan oppimisen välistä yhteyttä on selvitetty enimmäkseen spatiaalisen kyvyn ja matematiikan oppimistulosten välisenä korrelatiivisena riippuvuutena. Korrelaatiot spatiaalisen kyvyn ja geometrian oppimistulosten välillä ovat olleet jonkin verran korkeammat kuin algebrallisella kontekstilla mitatut 0.30—0.60 (Battista 1990, 47; Clements & Battista 1992, 455; Bishop 1983, 181). Uudemmissa tutkimuksissa spatiaalisen ajattelun merkitys matemaattiselle ajattelulle on noussut esiin erityisesti tarkasteltaessa visuaalisen ja verbaalisanalyyttisen lähestymistavan roolia matemaattisessa käsitteenmuodostuksessa ja ongelmanratkaisuprosessissa (Bishop 1989, 7). Battistan (1990) tutkimuksen tulokset antavat viitteitä siitä, että spatiaalinen ajattelu saattaa olla eri tavoin merkittävä tekijä geometrian oppimisprosessissa hyvin ja heikommin menestyvillä oppilailla. Battistan tulosten mukaan looginen päättelykyky korreloi positiivisesti jokseenkin yhtä voimakkaasti kuin spatiaalinen kyky geometrisen ongelmanratkaisukyvyn kanssa (+.25—+.41) geometrian testissä keskinkertaisesti tai hyvin menestyneillä. Sen sijaan geometrian testissä heikosti menestyneiden oppilaiden ryhmässä loogisen päättelykyvyn ja geometrisen ongelmanratkaisukyvyn korrelaatio oli -.13 ja spatiaalisen kyvyn ja geometrisen ongelmanratkaisukyvyn korrelaatio +.79 (Battista 1990, 54).

Krutetskii osoitti jo 1950- ja 1960-luvuilla, ettei spatiaalisella ajattelulla ole kaikille yksilöille samaa välineellistä arvoa matemaattisessa ajattelussa. Krutetskii päätyi matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden matematiikan oppimista koskevissa tutkimuksissaan neljään erityyppiseen matemaattiseen kykyyn: analyyttiseen, geometriseen ja kahteen muuhun, joita kumpaakin hän kutsui harmoniseksi. Krutetskiin mukaan verbaalis-looginen ajattelu on matemaattisen kykyrakenteen tärkeä osatekijä ja se määrää pitkälti matemaattisen ajattelun maksimaalisen tason, johon yksilö kykenee. Sen sijaan visuo-spatiaalisten menetelmien suosiminen tai välttäminen vaikuttaa ennemminkin henkilön matemaattisen ajattelun muotoon kuin sen tasoon (Krutetskii 1976; Campbell ym. 1995, 179). Krutetskiin (1976, 317) tyypityksen mukaan analyyttisen oppilaan vahva verbaalis-looginen komponentti dominoi heikompaa visuaalis-kuvallista komponenttia tämän matemaattisessa ajattelussa. Analyyttinen oppilas operoi mielellään abstrakteilla käsitteillä eikä koe tarvetta käyttää visuaalisia lähestymistapoja edes sellaisissa matemaattisissa tarkasteluissa, jotka ulkopuolisesti arvioiden näyttäisivät suosivan näiden käsittelyä. Vastaavasti geometriseksi tyypitetty oppilas pyrkii visualisoimaan tarkastelemansa abstraktitkin matemaattiset käsitteet ja on tässä myös taitava (Krutetskii 1976, 321).

Vaikka kykyrakenneselvityksillä ei enää ole matematiikan didaktiikassa vastaavaa merkitystä kuin muutama vuosikymmen sitten, Clementsin (1983) mukaan Krutetskiin tutkimusten kääntäminen 1970-luvun puolivälissä englannin kielelle oli tärkeä alkusysäys sille, että noina aikoina alettiin systemaattisemminkin tutkia spatiaalisen kyvyn, kuvittelun (imagery) ja matemaattisen ajattelun välisiä yhteyksiä. Tällä hetkellä eräs tunnetuimmista tämän alan tutkijoista on Norma

Presmeg. Presmeg hyväksyy Krutetskiin näkemyksen, jonka mukaisesti henkilön loogisen ajattelun taso rajaa tämän matemaattisen ajattelun mahdollisuudet, kun taas taipumus ja halu käyttää matemaattisessa ongelmanratkaisussa visualisointia vaikuttaa ennen kaikkea yksilön matemaattisen kognition sisältöön, ei niinkään sen laatuun. Visuaalinen kuvittelu voi Presmegin mukaan jopa haitata oppilaan matemaattista ajattelua, mikäli tämä ei pysty yhdistämään visuaalista ja holistista tarkastelutapaa analyyttiseen tarkasteluun. Visuaalisen lähestymistavan kautta yksittäistapausten konkreetit piirteet voivat kiinnittää oppilaan huomion epäoleellisiin seikkoihin ja johtaa oppilaan ajattelua harhaan. Standarditapauksiin fiksoituneet mielikuvat voivat lisäksi myöhemmin aiheuttaa joustamattomuutta uusien erilaisten tapausten käsittelyyn (Presmeg 1986; 1992a). Myös Yerushalmy ja Chazan (1990) tähdentävät sitä, että ajattelun kiinnittyessä liikaa kuvioihin ja niiden mentaaleihin vastineisiin, voi yleisen ja spesifin erottaminen vaikeutua, sillä kuviot itsessään ovat kuitenkin aina yksittäisiä objekteja. Toisaalta samojen yksittäisten peruskuvioiden toistuva käyttö edustamaan yleistä kuvioluokkaa voi kaventaa yksittäistapauksen edustaman luokan merkityssisältöä.

Visualisointi on usein tehokas tapa konkretisoida vaikeasti lähestyttäviä abstrakteja käsitteitä. Konkreettia yksittäistapausta voidaan esimerkiksi käyttää metonyymisesti edustamaan kokonaista matemaattisten entiteettien luokkaa (Presmeg 1992a, 308). Tunnettuja esimerkkejä koulugeometrian alalta yksittäisen objektin metonyymisestä käytöstä ovat esimerkiksi vektorin havainnollistaminen sen yksittäisellä edustajalla ja yksittäisen kuvion käyttö edustamaan koko tarkasteltavaa kuvioluokkaa. Ulkoisten visualisointien ohella matematiikan käsitteiden merkitykset välittyvät usein enemmän tai vähemmän konkreettien tai abstraktien visuaalisten mielikuvien kautta. Presmeg (1986b) erottaa visuaalisten mielikuvien muodostuksessa viisi kategoriaa: (1) konkreettien mielikuvien muodostuksen (pictures in the mind), (2) riippuvuussuhteiden hahmottamisen visuo-spatiaalisina kaavioina, (3) mentaalien mielikuvien muodostamisen kaavoista, (4) kinesteettisen kuvittelun (lihastoimintojen kuvittelun) ja (5) dynaamisen (liikkeen) kuvittelun.

Spatiaalisten suhteiden hahmottaminen on geometrian oppimisen kannalta keskeinen taito. Tartren (1990) tutkimus tarjoaa tästä hyvän osoituksen. Tartre muodosti tutkimuksessaan oppilaista kaksi koeryhmää sillä perusteella, miten nämä olivat menestyneet lähes automaattista hahmontunnistusta edellyttävässä testissä (Gestalt Completion Test). Testillä mitattu spatiaalinen orientaatio oli merkittävä selittäjä sille, kuinka hyvin kuvion kokoa osattiin arvioida, kuinka helposti kuvion ominaisuuksia kyettiin mentaalisti muuntelemaan ja kuinka joustavasti tehtävän ratkaisun yhteydessä valittua hahmotustapaa kyettiin varioimaan. (Tartre 1990, 226—227.)

Spatiaalisen kyvyn ja geometrian oppimistulosten välisen yhteyden olemassaolo on eräällä tapaa itsestäänselvyys, sillä koulussa opetettava geometria perustuu merkittävissä määrin tasokuvioiden ja avaruuskappaleiden visuaalisesti havaittujen ominaisuuksien tarkastelulle. Kuvilla on geometriassa ja matematiikassa yleensäkin useita tehtäviä. Niiden avulla voidaan havainnollistaa määritelmiä ja lauseita, esittää yhteenvetoja laajoista tietokokonaisuuksista sekä tarkastella suurta osaa ongelmaratkaisuprosessissa tarvittavasta informaatiosta samanaikaisesti. Lisäksi kuvan käyttö helpottaa yhteyksien havaitsemista ja hypoteesien laadintaa. Kuvat voivat ohjata päättelyä lauseiden todistamisessa tai osoittavaa, että tehty hypoteesi on virheellinen (Parzysz 1991, 576).

Spatiaalista ajattelua käytetään myös tilanteissa, jotka eivät välittömästi liity avaruudellisten suhteiden tarkasteluun tai kuvan prosessointiin. Loogista päättelyä koskevissa tutkimuksissa on osoitettu, että visuaalisten mentaalimallien muodostaminen on keskeinen osatekijä monissa päättelyprosesseissa. Mentaalimallien avulla alkuaan ei-visuaaliset loogiset suhteet ja suhteiden struktuurit saavat visuaalisen sisällön ja helpottavat päättelyä (Ford 1994; Greeno 1991; 1994; Huttenlocher 1968; Johnson-Laird 1983; Wagener-Wender & Wender 1990). Myös monet matemaattisista operaatioista muistuttavat toimintoja, jotka ovat tai ovat ainakin alun perin olleet oppijalle spatiaalis-kinesteettisiä toimintoja. Esimerkkeinä voidaan mainita vaikkapa peruslaskutoimitukset yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku, jotka perustuvat yhdistämisen, pois ottamisen, monikerran muodostamisen, ja osittamisen ideaan puhumattakaan monista geometrisista operaatioista kuten projisiointi, kiertäminen, peilaus jne. Lisäksi monet matematiikassa käytetyt ulkoiset representaatiot perustuvat visuaalisiin analogioihin (vrt. esim. lukusuora, ylä- ja alakäsite, erilaiset puukaaviot jne.).

4.3 Looginen ajattelu

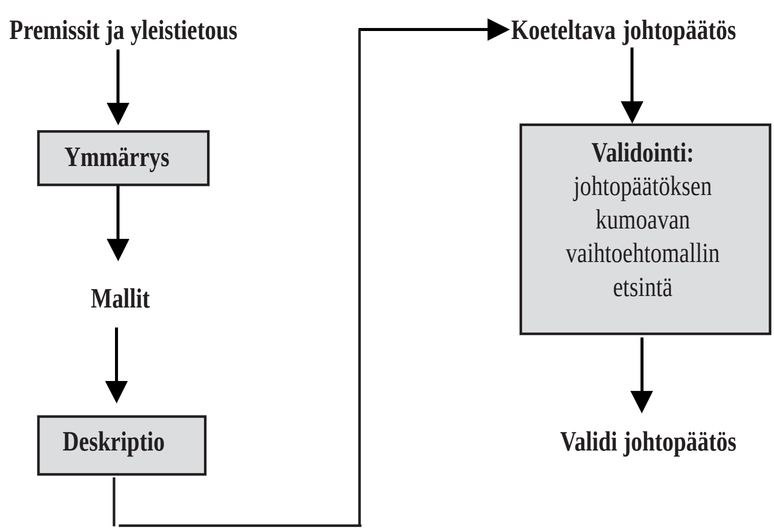
4.3.1 Mitä loogisella ajattelulla tarkoitetaan?

Yleisen käsityksen mukaan matemaattinen ja looginen ajattelu liittyvät läheisesti toisiinsa. Yhtäältä matemaattisen ajattelun katsotaan edellyttävän taitoa ajatella loogisesti ja toisaalta myös kehittävän tätä taitoa. Loogisen ajattelun ja päättelyn määrittely on yleensä osoittautunut vaikeaksi. Eri tutkimuksissa niihin on liitetty erilaisia merkityssisältöjä (Galotti 1989, 331). Tässä tutkimuksessa *päättely* ymmärretään toimintana, joka tähtää johtopäätösten tekoon annetuista lähtöoletuksista. Päättely on *loogista*, jos se etenee logiikan päättelysääntöjen mukaan. Eri toimintatilanteissa päättelyn loogisuutta arvioidaan erilaisten logiikkojen, kuten esimerkiksi lause-, predikaatti- tai modaalilogiikan tarjoamin kriteerein. Logiikka toimii ihmisen päättelyprosessin normatiivisena mallina. Päättely on *pätevää*, jos sillä päädytään premisseistä samaan johtopäätökseen kuin mihin looginen tarkastelukin johtaa. Psykologinen päättelyn tutkimus on Saariluoman (1988a, 50) mukaan kohdistunut erityisesti niihin päättelyprosesseihin, joita voidaan mallittaa lauselogiikan, syllogistiikan ja induktiologiikan avulla. Inhimillisessä toiminnassa tapahtuva johtopäätösten teko on osoittautunut niin monisäikeiseksi toiminnoksi, ettei sitä yleensä voida pitää pelkästään loogisten päättelysääntöjen noudattamisena. Tosiasiassa yksilön päätöksentekoa ohjaavat formaalin päättelyn ohella usein myös sisällölliset kontekstista johtuvat olettamukset sekä erilaiset kausaalit tai finalistiset päätelmät (vrt. Malinen 1993a, 103).

Looginen päättely voidaan karkeasti ottaen jakaa kahteen perustyyppiin, *induktiiviseen* ja *deduktiiviseen* päättelyyn. Induktiivisen päättely etenee yksittäisistä tiedoista yleiseen ja deduktiivinen päättely yleisestä yksittäiseen. Deduktiivisen päättelyn premissit ovat usein induktiivisia yleistyksiä (Mehtäläinen 1992, 43). Matemaattisten tehtävien ratkaisussa oppilaat käyttävät Simonin (1996) mukaan usein päättelyä, jota ei voi pitää sen koommin induktiivisena eikä deduktiivisena. Simon esittää useita esimerkkejä oppilaiden *transformatiivisista* päättelyprosesseista, joissa oppilaat eivät johtopäätöstä tehdessään yleistä esimerkkitapauksissa havaitsemaansa yhteistä piirrettä induktiivisesti yleiseksi säännöksi mutta eivät myöskään johda erikoistapausta yleisestä säännöstä. Ennemminkin oppilaat näyttävät käyttävän päättelyn tukena kuvitteellisen mentaalimallin transformaatiota, joka monesti muistuttaa konkreetin objektin fyysistä manipulaatiota. (Simon 1996, 201.)

4.3.2 Deduktiivinen päättely

Johnson-Laird ja Byrne (1991) luokittelevat deduktiivista päättelyä edellyttävien tehtävien suoritusprosesseja kuvaavat teoreettiset selitysmallit kolmeen kategoriaan. Ensimmäisen kategorian muodostavat deduktiivisen päättelyn ns. sääntöteoreettiset mallinnukset, joissa päättelyprosessin oletetaan noudattavan logiikan formaaleja päättelysääntöjä. Tähän kategoriaan kuuluu myös edempänä käsiteltävä Piagetin teoria loogisen päättelyn kehityksestä. Toisen deduktiivista päättelyä kuvaavien teorioiden kategorian muodostavat ns. sisältöspesifit päättelyn teoriat, joissa korostetaan erityisesti kontekstin merkitystä päättelyprosessissa. Merkittävimpiä tämän tyyppisistä deduktiivisen ajattelun prosessikuvauksista ovat päättelyn teoriat, jotka perustuvat tuotossääntöihin (Anderson 1983) sekä pragmaattisiin päättelyskeemoihin, kuten esimerkiksi arkiajattelun mukaisiin päätelmiin siitä, onko tietyssä tilanteessa esimerkiksi lupa tai vastaavasti pakko toimia tietyllä tavalla tai nojautua oletettuihin kausaalisyihin (Cheng & Holoyak 1985; 1989). Kolmannen kategorian muodostavat mentaalimallien konstruointiin ja näiden koetteluun perustuvat deduktiivisen päättelyn malliteoriat. Johnson-Lairdin ja Byrnen esittämän malliteoreettisen selityksen mukaan deduktiivinen päättely etenee kolmessa päävaiheessa kuviossa 12 esitetyllä tavalla.



Kuvio 12. Deduktiivisen päättelyn osaprosessit (Johnson-Laird & Byrne 1991, 36)

Päättelyn ensimmäinen askel koostuu lähtötietojen tulkinnoista ja ymmärtämisestä. Tämä vaihe voi edellyttää myös havainnointia. Tulkintavaiheessa lähtötietojen kuvaamasta tilanteesta konstruoidaan mentaalimalleja. Näiden pohjalta deskriptiovaiheessa työstetään malli, joka sisältää johtopäätöksen, jota alkuperäisessä kuvauksessa ei ole eksplisiittisesti ilmaistu. Jos malli ei eksplikoi mitään uutta, päätelmää ei synny. Päätelmää validoitaessa pyritään kuvittelemaan jokin malli, jossa oletettu johtopäätös ei päde. Mikäli päätelmän kanssa ristiriidassa olevaa mallia ei pystytä konstruoimaan, oletettua johtopäätöstä pidetään oikeana (Johnson-Laird & Byrne 1991, 36). Johnson-Lairdin ja Byrnen deduktiivisen päättelyn mallissa oletetaan mentaalimallien konstruoinnin ja testauksen noudattavan itse asiassa loogisen seurauksen määritelmää "q on p:n looginen seuraus, jos ja vain jos ei ole olemassa yhtään sellaista tulkintaa, jossa p olisi tosi ja q epätosi" (vrt. Allwood ym. 1980, 112) ainakin implikaatiomuodossa "q on p:n looginen seuraus, jos ei ole olemassa yhtään sellaista tulkintaa, jossa p olisi tosi ja q epätosi" Mielenkiintoista on, että deduktion pätevyys tämän selityksen mukaisesti arvioidaan oikeastaan induktiivisesti perustamalla päätelmän pätevyyden arvio malleihin, jotka päättelijä kykenee mielessään konstruoimaan. Geometrisen käsitetiedon kehittymistä tarkastelevassa luvussa 3.4.2 käsitelty visuaalinen variointi ja tässä esitetty deduktion validointiprosessi ovat itse asiassa toimintoina hyvin samankaltaiset.

Fordin (1994) syllogistisia päättelyjä koskeva tutkimus antaa viitteitä siitä, että deduktiivisen päättelyn malliteorian mukainen prosessikuvaus ei ole ottanut riittävästi huomioon prosessissa havaittavia yksilöllisiä eroja. Hänen mukaansa koehenkilöiden omat selostukset siitä, millä tavoin he olivat eri tilanteissa päätelleet, osoittavat, että nämä voidaan jakaa ainakin kahteen toisistaan poikkeavaan pääryhmään, joita Ford kutsuu verbaalisiksi ja spatiaalisiksi päättelijöiksi. Verbaalisiksi päättelijöiksi nimetyt koehenkilöt näyttivät operoivan verbaalisessa muodossa esitetyillä premisseillä samaan tapaan kuin muuttujilla ja lausekkeilla. Verbaalinen päättelijä saattoi esimerkiksi päätyä premissien "Jotkut verenluovuttajat ovat lentäjiä" ja "Kaikki lentäjät ovat elokuvaintoilijoita" perusteella johtopäätöksen "Jotkut verenluovuttajat ovat elokuvaintoilijoita" sijoittamalla ensimmäiseen premissiin sanan lentäjiä paikalle toisen premissin perusteella sanan elokuvaintoilijoita. Koska menetelmä ei ole yleispätevä, tällainen strategia johtaa päättelijän usein virhepäätelmään. Spatiaalisiksi päättelijöiksi kutsutuille koehenkilöille näytti olevan tyypillistä yritys havainnollistaa lauseissa esiintyvien termien ja asiantilojen välisiä suhteita kuvioilla ja kaavioilla. Spatiaalisiksi luokiteltujen päättelijöiden konstruoimat mallit eivät nekään kuitenkaan Fordin mukaan olleet sentyyppisiä mentaalimalleja kuin päättelyn malliteoreettisissa selityksissä on oletettu.

4.3.3 Induktiivinen päättely

Klauer (1990, 191) määrittelee *induktiivisen päättelyn* säännönmukaisuuksien keksimistoiminnoksi, jonka avulla pyritään löytämään yhtäläisyyksiä ja eroja objekteja karakterisoivissa ominaisuuksissa tai objektien välisissä suhteissa. Omaksi induktiivisen päättelyn tyypikseen erotetaan yleensä *analoginen päättely*, jonka esimerkiksi English ja Sharry (1996, 138) karakterisoivat strukturaalisen informaation siirroksi systeemistä toiseen. Eri tilanteissa esiintyvien samankaltaisuuksien hahmottaminen ja yleistysten teko perustuu merkittäviltä osin induktiiviseen päättelyyn. Tätä kautta käsitteenmuodostus, analogioiden hahmottaminen, metaforien ymmärtäminen ja käyttö, korkeamman-asteinen ongelmanratkaisu, teorian muodostus jne. ovat isolta osaltaan juuri induktiivista päättelyä. Induktiivisen päättelyn kykyä on testitilanteissa mitattu esimerkiksi säännön keksimistä edellyttämillä jonon jatkamistehtävillä (Täydennä lukujono 2, 5, 9, 14, ?) ja tehtävillä, joiden ratkaisu perustuu objektijoukkoa yhdistävän struktuurin hahmottamiseen (Mikä luku ei kuulu joukkoon 6, 3, 5, 2, 8?) sekä relaatioiden hahmottamista vaativilla numeerisilla, geometrisilla ja verbaalisilla analogiatehtävillä, joiden tavanomainen muoto testeissä on A:B :: C:X. Näissä vastaajalta edellytetään sellaisen objektin X keksimistä, joka suhtautuu objektiin C samalla tai vastaavalla tavalla kuin objekti B suhtautuu objektiin A (Mikä sana kuuluu X:n paikalle analogiassa kauppias:asiakas::lääkäri:X ?). Analogiatehtävän ratkaisu, joka ei perustu arvaukseen, edellyttää tehtävässä esiintyvien alemman tason suhteiden A:B ja C:D sekä ylemmän tason suhteen (A:B) :: (C:X) hahmottamista. Tämän tutkimuksen kannalta keskeisimpiä induktiivisen päättelyn esiintymismuotoja ovat yleistäminen ja siihen kytkeytyvä käsitteenmuodostus, joita tarkastelin luvussa 3, ja analoginen päättely, josta seuraavassa tarkemmin.

Piagetin selitys analogiapäättelyn kehityksestä perustuu analogiatehtävissä esiintyvien alemman tason suhteiden A:B ja C:D sekä ylemmän tason suhteen, joka itse asiassa on suhteiden suhde, erilaiseen tajuamiskynnykseen. Piagetin mukaan taitekohta analogiapäättelyn kehityksessä osuu ikävuosiin 11—12 eli vaiheeseen, jolloin lapsi normaalisti on siirtymässä ajattelussaan formaalien operaatioiden tasolle. Tätä ikää nuoremmilta lapsilta analogiapäättelyt eivät yleensä onnistu edes kontekstissa, jossa analogiassa esiintyvät alemman tason suhteet A:B ja C:D ovat helposti hahmotettavia. Analogiapäättelyn vaikeus johtuu ensi sijassa lasten kykenemättömyydestä tarkastella ylemmän tason suhdetta, joka vallitsee alemman tason suhteiden välillä. Piaget erottaa kolme analogiapäättelyn kehitysvaihetta. Ensimmäinen vaihe ajoittuu esioperationaaliseen kauteen, toinen konkreettien operaatioiden kauteen ja kolmas formaalien operaatioiden kauteen. Ensimmäisessä kehitysvaiheessa lapsi ei yleensä hahmota tehtävissä esiintyviä alemman tason suhteita muutoin kuin lapselle hyvin tutuissa konteksteissa. Toisessa kehitysvaiheessa alemman tason relaatiot jo hahmotetaan oletetulla tavalla. Aluksi kuitenkin suhteiden välisen relaation käsittely on hapuilevaa ja silloinkin, kun lapsi löytää tälle oikean tulkinnan, hän helposti vaihtaa mielipidettään tehtyjen vastaehdotusten mukaisiksi. Myöhemmin myös suhteiden välinen riippuvuus löydetään eikä mielipidettä vaihdeta vastaehdotuksen mukaiseksi. Piagetin mukaan tällä tasolla päättelytehtävän suoritus perustuu kuitenkin edelleen yritys-erehdys-metodiin. Suhteilla ei tässä vaiheessa varsinaisesti operoida mentaalisti. Tähän kyetään vasta kolmannessa analogiapäättelyn kehitysvaiheessa, jolloin analogiapäättelyiden suoritus tulee virheettömäksi. (Goswami 1992, 17—22.)

Goswamin (emt., 141—143) mukaan analogia A:B :: C:D hahmotetaan siten, että yhteinen tulkinta relaatioille A:B ja C:D löydetään etsimällä kummankin relaation A:B ja C:D vaihtoehtoisten tulkintojen joukosta oleellisesti sama relaatio. Goswamin esittämä mekanismi analogian keksimiselle muistuttaa jossakin määrin hypoteesintestaukseen perustuvaa käsitteenmuodostusta, missä tarkasteltavien esimerkkitapausten yhteisten ominaisuuksien avulla konstruoidaan tapauksia toisiinsa liittävä käsite. Analogiapäättelyssä esimerkkitapaukset ovat käsitepareja ja niiden ominaisuudet käsitteiden välisiä suhteita. Puhtaimmillaan edellä käsitellyn tyyppinen analoginen päättely tulee esiin verrannollisessa päättelyssä, jossa tarkasteltavat relaatiot ovat kvantiteettien välisiä suhteita. Vaikka yhtälöksi kirjoitetun verrannon ratkaiseminen onkin ennen pitkää oppilaalle mekaaninen laskennallinen suoritus, verrannon muodostaminen ja sen tulkinta edellyttää analogista päättelyä.

Analogista päättelyä tarvitaan matematiikassa monella eri tavalla. Monesti uusi matemaattinen sisältöalue on ymmärrettävissä aikaisemman tiedon varassa sitomalla se aikaisempaan tietämykseen juuri sopivan analogian avulla. Usein analogiat ohjaavat myös uusien ideoiden syntyä. Erityistä didaktista mielenkiintoa on analogiapäättelyä koskevilla tutkimuksilla, joissa on yritetty selvittää, missä määrin ja millaisissa tilanteissa koehenkilöt pystyvät hyödyntämään analogioita ongelmanratkaisutilanteissa. Tämän suuntaisten tutkimusten perusteella näyttää varsin selvältä, että analogiapäättelyä pystytään yleensä käyttämään vain konteksteissa, joista koehenkilölle on muodostunut käsitteellisesti selkeä tietokokonaisuus. Erityisesti matemaattisten ongelmien yhteydessä analogioiden huomaaminen ja hyödyntäminen on hajanaisen tietostruktuurin omaavalle oppilaalle vaikeaa. (Emt., 141—143.)

Analogioiden ymmärtämistä on testattu tyyppiä A:B::C:X olevilla testiosioilla. Näissä annettujen vaihtoehtojen joukosta pitää löytää termi X, joka suhtautuu termiin C samoin kuin B suhtautuu A:han. Osioiden ratkaisuprosessi tunnetaan informaation prosessoinnin näkökulmasta hyvin. Sternbergin komponenttiteorian mukaan päättelytehtävän suoritus sisältää seuraavat kuusi osaprosessia:

1) termien A, B, C koodaus (encoding);
2) termien A ja B välisen suhteen päättely (inference);
3) termien A ja C välisen relaation kuvaus (mapping);
4) hypoteettisen neljännen termin X päättely soveltamalla aikaisemmissa osavaiheissa pääteltyjä termien välisiä relaatioita kolmanteen termiin C ja näin saatujen eri vaihtoehtojen keskinäinen arviointi (application);
5) vakuuttumisprosessi, jolla useista vaihtoehtoisista epätäydellisistä ratkaisuista päädytään yhteen (justification), kaikissa tehtävissä tätä vaihetta ei kuitenkaan tarvita;
6) vastauksen ilmoittaminen (respond). (Esim. Sternberg 1977, 135—137; Pellegrino & Glaser 1980, 189.)

4.3.4 Päättelyn yhtenäisteoria

Yleensä yksilön päättelyä koskevat tutkimukset pyrkivät mallintamaan erikseen erityyppisiä päätöksentekoprosesseja. Erityisesti Sternberg on tarkastellut loogista päättelyä myös yhtenäisenä ilmiönä. Sternbergin mukaan erityyppisille päättelytilanteille on löydettävissä myös lukuisia yhteisiä piirteitä. Päättelykykyä mittaamaan käytettyjen testiosioiden suoritusprosessit sisältävät Sternbergin (1986, 285) mukaan aina vähintään yhden seuraavista osaprosesseista:

1) havainnon kautta saatavan informaation valikoivan koodauksen työmuistin sisällöksi,
2) säilömuistissa olevan tiedon sekä työmuistin sisällön valikoivan vertailun ja
3) työmuistin sisältöjen valikoivan yhdistelyn.

Esimerkiksi päättelijän etukäteistietojen, työmuistin kapasiteetin ja tehtävän esitysmuodon vaikutus päättelyprosessiin on yllä mainittujen päättelyprosessin komponenttien kautta melkoisen selvää. Samaten havainnot päättelijän kognitiivisen tyylin vaikutuksesta päättelyprosessin kulkuun tuntuvat mallin kautta ymmärrettäviltä (vrt. esim. Overton ym. 1985). Vaikeudet induktiivista päättelyä edellyttävien tehtävien suorituksessa juontuvat Sternbergin mukaan ensi sijassa hankaluuksista erottaa relevantti informaatio irrelevantista erityisesti valikoivassa koodauksessa ja valikoivassa vertailussa. Deduktiiviseen päättelyn vaikeudet johtuvat hänen mukaansa erityisesti hankaluuksista valikoivassa vertailussa (Sternberg 1986, 293—294).

4.3.5 Päättelytehtävien vaativuus

Loogiselta rakenteeltaan erityyppisten propositioiden keskinäisten merkityserojen ja yhtäläisyyksien ymmärtämisen kehittymistä (Osherson 1975; 1976) sekä propositiorakenteiden keskinäisiä vaikeussuhteita ja niiden riippuvuutta konteksteista, joihin propositiot viittaavat (Jansson 1986; Piburn 1990) on tutkittu lähinnä Piagetin teorian kannalta. Tutkimuksissa käytetyt propositiot ovat yleensä olleet loogiselta rakenteeltaan formaalien operaatioiden kauden ajattelua mallintavan binaarilogiikan 16 perusproposition mukaisia. Tämä ei silti tarkoita sitä, etteikö näitä lauseita, joilla on ko. propositioiden looginen muoto, voitaisi ymmärtää jo ennen formaalien operaatioiden kautta. Yksittäisten lauseiden asiasisältö voidaan tietenkin konkreetissa tilanteessa ymmärtää ennemmin, kuin lauseilla voidaan formaalien operaatioiden vaiheen mukaisesti operoida sisällöllistä tulkinnoista riippumattomina propositioina.

Formaalien operaatioiden kauden ajattelulle on Piagetin teorian mukaan tyypillistä mm. (1) teoreettinen päättely ts. taito käyttää mm. moninkertaista luokittelua, säilyvyyspäättelyä ja sarjoittamista myös sellaisten riippuvuuksien ja ominaisuuksien yhteydessä, jotka eivät ole välittömästi havaittavia; (2) kombinatorinen päättely ts. kyky tarkastella kaikki mahdolliset konkreettisten tai abstraktien tapausten yhdistelmät; (3) muuttujien kontrolli ts. taito kontrolloida muut muuttujat tutkittaessa yhtä muuttujaa. Piaget käytti formaalien operaatioiden kauden ajattelun loogisten piirteiden karakterisoimiseen kehittämäänsä ns. 16 operaation binaarilogiikkaa. Piagetin propositiologiikan systeemi voidaan rakentaa pitäen lähtökohtana kahta propositiota (asiantilaa) p, q, näiden negaatioita $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ sekä edellä mainituista konjuktion ($\wedge$) avulla saatuja neljää yhdistettyä peruslausetta

$$(1)\ p \wedge q\,,\ (2)\ p \wedge \bar{q}\,,\ (3)\ \bar{p} \wedge q \ \text{ ja } \ (4)\ \bar{p} \wedge \bar{q},$$

joista mitkään kaksi eivät voi yhtä aikaa olla tosia. Kombinoimalla kaksi tai useampi lauseista (1)—(4) edelleen disjunktion ($\vee$) kanssa saadaan 11 uutta yhdistettyä lausetta, jotka yhdessä ns.

tyhjän lauseen kanssa muodostavat 16 proposition binaarilogiikan. Piagetin binaarilogiikassaan tekemiä tulkintoja on myös voimakkaasti kritisoitu (Parsons 1960; Ennis 1975).

Eräät päättelyt, joiden ei pitäisi binaarilogiikan perusteella olla ylivoimaisia enää formaalien operaatioiden vaiheessa, ovat osoittautuneet oletettua vaikeammiksi. Tunnettu esimerkki useimmille aikuisillekin vaikeasta päättelytehtävästä on ns. Wasonin valintatehtävä (Wason 1966; Bell ym. 1983, 36—38), jossa koehenkilön tehtävänä on analysoida implikaation $p \Rightarrow q$ suhdetta propositioihin p, q, $\bar{p}$ ja $\bar{q}$. Tehtävä esitetään käyttäen kortteja, joiden toisella puolen koehenkilö tietää olevan kirjaimen ja toisella puolen positiivisen kokonaisluvun. Koehenkilölle esitetään neljä korttia, joiden näkyvissä olevat puolet ovat

A	**D**	**4**	**7**

ja korttien lisäksi sääntö *"Jos kortin toisella puolella oleva kirjain on vokaali, niin toisella puolella oleva numero on parillinen".*

Varsinainen tehtävä on "*Kerro, mikä tai mitkä korteista, sinun pitää vähintään kääntää saadaksesi selville, päteekö sääntö näille korteille vai ei."*

Piagetin teorian perusteella formaalien operaatioiden tasolla olevan henkilön pitäisi pystyä löytämään oikea vastaus (käännetään kortit A ja 7) muuntamalla implikaatio: "jos kirjain on vokaali, niin luku on parillinen" ehdoksi, ettei missään kortissa saa olla vokaalia toisella puolella ja paritonta lukua toisella puolella, kuten Inhelderin ja Piagetin kuvaus implikaation tulkinnasta osoittaa

> "… when they assume a complex combination such as $p \Rightarrow q$ as a hypothesis, they know how to verify it by going back to its elements $p \wedge q$, and $\bar{p} \wedge q$ or by looking for counterproof in the falsehood $p \wedge \bar{q}$ (Inhelder & Piaget 1958, 304)."

Yleensä näin ei kuitenkaan tapahdu (vrt. esim. Lawson 1983, 298). Sopivan kontekstin valinnalla päättelyjen onnistumista voidaan kuitenkin tällaisissakin tapauksissa merkittävästi helpottaa, mikä ei näyttäisi tukevan oletusta päättelyn perustumisesta formaalien sääntöjen noudattamiseen.

Seuraavassa tarkastellaan tutkimuksia, jotka valottavat sitä, missä vaiheessa erityyppisiä propositioita vastaavia lauseita opitaan ymmärtämään standardilla tavalla ja minkälaisia väärinkäsityksiä propositioiden ymmärtämiseen liittyy ennen tätä vaihetta.

Jansson (1986) analysoi tutkimuksessaan järjestysteoriaan (ks. esim. Aitola 1980, 47—49; Silfverberg 1986, 56—57) perustuen binaarilogiikan propositioiden ymmärtämisen keskinäisiä vaativuussuhteita. Jansson tutkimus osoitti, että myös konteksti, jossa propositio verbalisoitiin, vaikutti propositioiden keskinäiseen tulkinnalliseen vaikeusjärjestykseen.

Propositioiden verbalisoinnisssa käytetty kieliasu vaikutti selvästi propositioiden ymmärrettävyyteen. Esimerkiksi propositio "The paths must have at least one of the properties (parallel, same lenght)", jonka katsottiin loogiselta muodoltaan vastaavan lausetta $(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge q)$, ymmärrettiin paremmin kuin loogisesti samansisältöinen propositio " "The paths are the same lenght or [they are] parallel.", jonka katsottiin vastaavan lausetta $p \vee q$. Vastaavasti implikaatiomuotoon operationaalistetut propositiot osoittautuivat vaikeammin ymmärrettäviksi kuin niitä vastaavat muita konnektiiveja sisältävät samaa tarkoittavat ilmaukset. Esimerkiksi lause "If the paths are parallel, then they are also the same lenght." [$p \Rightarrow q$] oli vaikeammin ymmärrettävä kuin samansisältöinen lause "The paths are not parallel, or they are the same lenght." [$\bar{p} \wedge \bar{q}$]. (Jansson 1986, 10—11.)

Piburnin (1990) tutkimuksessa tarkasteltiin kolmen ikäjakaumaltaan erilaisen oppilasjoukon esittämiä väitelauseiden tulkintoja. Koehenkilöinä oli 1990 australialaista college-tason opiskelijaa. Seuraavat päättelyn virheet olivat yleisiä: (a) pyrkimys tulkita kaikki propositiot konjunktioiksi, (b) pyrkimys tulkita erityisesti ehdolliset väitteet konjuktioiksi, (c) ehdollisen väitteen jonkin osan kiinnittäminen todeksi ja muiden vaihtoehtojen jättäminen tutkimatta ja (d) implikaation tulkitseminen ekvivalenssiksi (Piburn 1990, 890). Toisessa Piburnin raportoimassa tutkimuksessa (n = 275) todettiin, että disjunktioiden tulkinta konjunktioiksi väheni selvästi siirryttäessä luokkatasolta 7 luokkatasolle 9, mutta implikaatioiden loogisesti oikea tulkinta oli harvinaista koko otoksessa luokkatasosta riippumatta. Kolmannessa tutkimuksessa kohdejoukkona olivat kymmenennen luokkatason oppilaat. Havainnot olivat kahdessa edellisessä tutkimuksessa saatujen havaintojen kaltaisia. Tässä tutkimuksessa propositioiden ymmärtämistä verrattiin myös osaryhmittäin jakamalla oppilaat koulumenestyksen perusteella hyviin, keskitasoisiin ja heikkoihin. Konjunktioiden ymmärtämisessä eritasoisten oppilasryhmien kesken ei havaittu juurikaan eroja, mutta disjunktioiden ymmärtämisessä erot olivat selvät (keskimääräinen suoritustaso hyvillä 71,0 %, keskitasoisilla 40,0 % ja heikoilla 33,3 %). Implikaatioita ja ekvivalensseja osasivat käsitellä käytännössä vain kyvykkäimpään osaryhmään kuuluneet ja heistäkin tähän kykeni vain noin joka kolmas (Piburn 1990, 894—895). Implikaatioiden tulkinta ekvivalensseiksi on todettu monissa muissakin kouluikäisten loogista ajattelua koskevissa tutkimuksissa ja sitä on pidetty tyypillisenä piirteenä "lasten logiikalle" tai ns. transduktiiviselle logiikalle (ks. esim. Bell ym. 1983, 34).

Tutkimuksissa käytetyt analogiapäättelytehtävät ovat yleensä osoittautuneet alle 9-vuotiaille lapsille liian vaikeiksi. Valmius analogiatehtävien ratkaisuun saavutetaan yleensä vasta 11—12 iässä. Kuitenkin riittävän yksinkertaisessa kontekstissa jo 4—5-vuotiaiden lasten on todettu pystyvän analogiapäättelyyn. (Alexander ym. 1987, 401; Goswami 1992, 3 ja 69.)

Tyyppiä A:B::C:D oleva analogian ymmärtämisen vaikeus johtuu Goswamin tulkinnan mukaisesti lähinnä siitä, kuinka vaikeasti keksittävä se yhteinen relaatio on, joka liittää luontevalla tavalla yhteen kummatkin tarkasteltavat käsiteparit A ja B sekä C ja D. Monista muista analogiapäättelyn tutkijoista poiketen Goswami onkin sitä mieltä, että analogiapäättelyn onnistuminen tai epäonnistuminen johtuu lähinnä käsiteparien A ja B sekä C ja D välillä olevien relaatioiden tuttuudesta tai outoudesta. Goswamin mukaan lapset kykenevät analogiapäättelyyn kaikissa kehitysvaiheissaan, kunhan konteksti on sopiva. (Goswami 1992, 13—14.)

4.3.6 Peruskoulun oppilaiden loogisen päättelyn oppimiseen ja opettamiseen kohdistuneita tutkimuksia

Peruskoulun oppiaineista juuri matematiikan yhteydessä on yleensä uskottu oppilaiden oppivan loogiseen ajattelun perustaitoja. Yhdeksi matematiikan opetuksen tavoitteeksi on Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissakin mainittu oppilaiden harjaannuttaminen johdonmukaiseen ja täsmälliseen ajatteluun. Yläasteen matematiikan opetuksen tavoitteissa todetaan vielä erikseen, että oppilaan tulisi tutustua päättelyn merkitykseen matematiikassa. (Anon. 1994a, 74—76.) Yleensä on ajateltu, että päättelyn taitoja opitaan muun opetuksen ohessa, vaikkei minkään yksittäisen oppiaineen oppisisältöihin sinänsä sisällykään logiikkaa tai loogista päättelyä koskevaa osuutta.

Suomalaisten koululaisten loogisen päättelyn taitojen tasosta on saatavilla myös empiiristä tutkimustietoa (vrt. Hautamäki 1984; Malinen 1992; 1993a; 1993b; 1997; Vestergren 1993). Hautamäen (1984) tutkimuksessa peruskoululaisten loogista ajattelua lähestyttiin erityisesti luonnontieteissä käytettävän päättelyn eli ns. science reasoningin näkökulmasta. Piagetin teoriaan perustuvan testisarjan (Science Reasoning Task) avulla hän tutki, miten eri-ikäiset peruskoulun oppilaat hahmottivat horisontaali-vertikaali erottelua, tajusivat perspektiivin merkityksen, ymmärsivät erityyppisiä säilyvyyksiä, kuten ainemäärän, painon ja tilavuuden säilymisen erilaisissa transformaatioissa, pystyivät tunnistamaan ja kontrolloimaan muuttujia sekä tajuamaan muuttuvien tekijöiden vaikutuksen tarkasteltaviin tapahtumiin. Hautamäen keräämä tutkimusaineisto oli varsin laaja. Tietoa oppilaiden päättelytaidoista kerättiin yhteensä 33 peruskoululuokalta ja yhteensä seitsemältä lukion ja aikuisopetuksen ryhmältä. Peruskoululuokat edustivat eri luokkatasoja lukuun ottamatta ensimmäistä luokkaa. Tutkimuksen mukaan ainakin eräillä tutkimuksessa tarkastelluilla loogisen ajattelun alueilla vain noin kolmannes oppilaista saavutti formaalien operaatioiden vaiheen yläasteen aikana. Suuri osa oppilaista näytti tutkimuksen mukaan pääsevän muodollisen ajattelun kynnykselle, mutta ei siitä eteenpäin. Suurelle osalle oppilaita muodollinen, sisällöstä riippumaton älykkyys ja ajattelu osoittautui vaikeaksi ja Hautamäki (1984, I—II) toteaakin, että kouluopetuksella on vielä paljon tehtävää loogisen ajattelun edistämiseksi.

Vestergrenin (1993) tutkimuskokonaisuuden toinen osa toteutettiin Yhdysvalloissa ja toinen Suomessa. Ensimmäinen osa koostui New Yorkin osavaltiossa toteutetusta kokeilusta, jonka tarkoituksena oli selvittää ns. Sleuth-harjoitusohjelman tehokkuutta esikouluikäisten oppilaiden loogisen ajattelun kehittämisessä. Toisessa osassa selvitettiin, millaisia kvalitatiivisia eroja lahjakkuudeltaan eritasoisiksi arvioiduilla peruskoulun oppilailla esiintyi loogisen päättelyssä. Tapaustutkimukseen valittiin kolme toista luokkaa käyvää tyttöä, jotka olivat kahden opettajan arvion mukaan eritasoisesti lahjakkaita. Haastattelun yhteydessä tytöt saivat suoritettavakseen kaksi verbaalista analogiatehtävää ja kaksi lineaarista syllogismia. Oppilaan lahjakkuustasolla näytti olevan selvä yhteys sekä hänen päättelytehtävissä saavuttamaansa suoritustasoon että tehtävien yhteydessä tekemiinsä strategisiin valintoihin. Sekä analogioiden että syllogismien onnistuneet suoritukset perustuivat usein spatialisiin strategioihin (Vestergren 1993, 84—85).

Malinen (1992, 1993a ja 1993b) selvitti tutkimuksessaan peruskoulun 3.—6. luokan oppilaiden (n = 40) ajatteluprosesseja deduktiivisissa päättelytilanteissa. Malisen tutkimus kohdistui erityisesti kouluoppimisen kannalta merkitykselliseen validiin deduktiiviseen ajatteluun. Siinä päätelmiä tehdään olettaen, että premissit ovat tosia. Tutkimuksessa tarkasteltiin oppilaiden deduktiivisen päättelyn muotoja Johnson-Lairdin ja Byrnen (1991) esittämien kolmen vaihtoehtoisen mallin kannalta. Johnson-Lairdin ja Byrnen mukaan yksilön deduktiivista päättelyä voidaan kuvata joko formaalin logiikan päättelysääntöjä noudattavana prosessina, sisältösidonnaisten sääntöjen soveltamisena tai ns. malliteorian mukaisena mentaalimallien konstruointina ja koetteluna. Malisen tutkimustulokset olivat pääosin tulkittavissa malliteorian mukaisesti. Silti myös sisältösidonnaisten sääntöjen varassa tehtyä päättelyä havaittiin. Tällaisessa päättelyssä premissejä voitiin tulkita vapaasti ja selitykset voivat perustua kausaalipäätelmiin. Oppilas voi tutkia erilaisia vaihtoehtoja ja testata niitä, muttei käytä suoranaisesti päättelysääntöjä apunaan. Joidenkin oppilaiden johtopäätösten teko perustui Malisen mukaan lähinnä arvaukseen tai satunnaiseen koetteluun ilman varsinaista ajattelumallia.

Kuten mm. Malinen (1997, 100) on todennut, päättelyprosessien opettamista tulisi opettaa lapsille jo varhain. Poikkeuksellista on kuitenkin ollut Alppilan yläasteella ja lukiossa Helsingissä toteutetun kokeilun kaltainen toiminta, jossa ajattelun ja tiedon hallinnan taitoja on pyritty systemaattisesti kehittämään muun kouluopetuksen ohessa (vrt. Mehtäläinen 1992). Varsinkin edellä mainitun Hautamäen tutkimuksen perusteella voidaan olettaa, ettei enemmistö oppilaista yläasteen päättövaiheessakaan vielä ole kuitenkaan kovin harjaantunut formaaliin ajatteluun ja loogiseen päättelyyn. Jos näin on, niin sillä on tämän tutkimuksen kannalta sikäli merkitystä, että työn teoreettisen viitekehyksen yhtenä peruspilarina toimivan van Hielen teorian lähtökohtana oli oman aikansa geometrian kouluopetuksen todellisuus, jossa oppilaita pyrittiin nykyistä selvästi varhaisemmalla iällä harjoituttamaan sitovaan päättelyyn ja deduktiiviseen ajatteluun.

4.4 Visuo-spatiaalisen työmuistin kapasiteetti

Informaation reaaliaikaisesta prosessoinnista huolehtiva muisti on kahdella tavalla rajoittunut: Ensinnäkin prosessoitavana olevaa tietoa ei voida pitää muistissa kovinkaan pitkää aikaa kerrallaan, sillä tieto voidaan varastoida lyhytkestoiseen muistiin (Short Term Memroy, STM) yleensä korkeintaan puoleksi minuutiksi, jonka jälkeen se joko häviää, tallennetaan pysyvämmin pitkäkestoiseen muistiin (Long Term Memory, LTM) tai se on uudelleen palautettava lyhytkestoisen muistin työstettäväksi. Toiseksi muistissa ei voida työstää samanaikaisesti kuin muutamaa harvaa informaatioyksikköä (engl. chunk) kerrallaan. Muistin määrällisestä rajoittuneisuudesta Miller (1956) esitti kuuluisaksi tulleen arvion, että ihminen ei samanaikaisesti kykene käsittelemään kuin 7 ± 2 verbaalista informaatioyksikköä kerrallaan. Työmuistin (Working Memory, WM) eli lyhytkestomuistin sen osan kannalta, jossa tiedon aktiivinen työstäminen tapahtuu (vrt. esim. Schneider & Pressley 1989, 23), Millerin arvio samanaikaisesti työstettävissä olevien mieltämisyksiköiden määrästä näyttää sekin yleisesti ottaen olleen ylioptimistinen. Nykyisen käsityksen mukaan työmuistissa samanaikaisesti käsiteltävien mieltämisyksiköiden maksimimäärä on pikemminkin 5 ± 2 (Rauste-von Wright & Wright 1994, 81—85; Niemi & Poskiparta 1995, 276; Saariluoma 1988, 80). Työmuistin kapasiteetti ei todennäköisesti myöskään ole niin vakioinen kuin Miller aikoinaan oletti. Kapasiteetti näyttää vaihtelevan sekä muistia rasittavan tehtävän laadun mukaan että muistettavan materiaalin mukaan (Lehto 1996, 10).

Työmuistista voidaan erityisesti eurooppalaisen työmuistitutkimuksen käsityksen mukaan erottaa useampia toiminnallisesti erityyppisiä osia, joiden toimintaa ns. työmuistin keskusyksikkö (central executive) ohjaa. Se huolehtii myös tiedon siirrosta työmuistista pitkäkestoiseen muistiin ja takaisin. Ns. fonologinen työmuisti huolehtii kielellisen informaation ja visuo-spatiaalinen työmuisti eli ns. visuo-spatiaalinen luonnoslehtiö näköinformaation ja mielikuvien prosessoinnista. (Baddeley 1986; Lehto 1997.)

Eri tutkijat ovat esittäneet toisistaan poikkeavia käsityksiä työmuistin kapasiteetin muutoksista. Pascual-Leonen (1987) mukaan työmuistin kapasiteetti kasvaa lapsuus- ja nuoruusvuosina tasaisesti iän lisääntyessä. Ikävuosittain tarkastellen työmuistin kapasiteetti (tarkemmin sanottuna ns. M-power) on hänen mukaansa normaalisti noin kolmen tai neljän vuoden ikäisillä lapsilla e+1, josta se kasvaa keskimäärin yhdellä yksiköllä joka toinen vuosi saavuttaessa maksimiarvonsa e+7 lapsen ollessa noin 15 vuoden ikäinen (Pascual-Leone 1987, 557; ks. myös Keranto 1983, 40—41). Vakio e viittaa arviossa työmuistin vireystilan ylläpitämiseksi vaadittavaan ns. toimeenpanevaan skeemaan. Vastaavasti luku tarkoittaa edellä niiden skeemojen lukumäärää, joita yksilö voi kerrallaan prosessoida työmuistissaan. Monet tutkimukset ovat vahvistaneet sen, että työmuisti todella kehittyy iän mukana, vaikkakaan sen keskimääräinen kehittymistahti ei välttämättä ole niin lineaarinen kuin Pascual-Leonen mallissa esitetään (ks. esim. Virsu 1995, kuvio sivulla 267; Schneider & Pressley 1989, kuvio sivulla 25). Lehdon (1997, 51) mukaan sekä fonologisen että visuo-spatiaalisen työmuistin kapasiteetti kasvaa voimakkaasti ikävuosien kuusi ja yksitoista välillä mutta ei juurikaan tämän vaiheen jälkeen. Sen sijaan työmuistin keskusyksikön kapasiteetti kasvaa noin 18-vuotiaaksi asti, jonka jälkeen se hitaasti heikkenee. Lapsuus- ja nuoruusiässä havaittava työmuistin toiminnan tehostuminen iän karttuessa voi selittyä kuitenkin muullakin kuin pelkällä määrällisellä muistin kapasiteetin lisäyksellä. Esimerkiksi Case (1985) tuo esiin sen, että iän karttuessa myös työmuistin käyttötapa tehostuu mm. havaintoärsykkeiden tunnistamisen ja tiedon prosessoinnin nopeutuessa.

Samanikäisilläkin henkilöillä työmuistin käytön tehokkuudessa voi esiintyä suuria eroja. Mm. de Ribaupierre ja Pascual-Leone (1979, 4) ovat kiinnittäneet huomiota siihen, että henkilön todellisuudessa käyttämä muistikapasiteetti ei useimmiten ole sama kuin hänen maksimaalisesta muistikapasiteettinsa. Työmuistin käytön tehokkuus on yksilöllistä ja siihen vaikuttaa mm. yksilön taipumus kenttäriippuvuuteen (field dependence) visuaalisissa havaintotoiminnoissaan. Prosessoitavan informaation kannalta epäoleellinen taustainformaatio voi rasittaa vahvasti kenttäriippuvien yksilöiden työmuistin kapasiteettia.

Koska työmuistin rajallista kapasiteettia tarvitaan sekä käsiteltävän informaation lyhytaikaiseen tallennukseen että sen prosessointiin, nämä kaksi tehtävää joutuvat helposti kilpailemaan keskenään samasta muistitilasta. Mitä työläämpää ja resursseja kuluttavampaa informaation prosessointi on sitä harvempia tietoyksiköitä voidaan pitää muistissa ja mitä useampia tietoyksiköitä yritetään muistaa sitä vähemmän niille voidaan tehdä mitään (Engle ym. 1992, 973). Tuttua on, miten heikon lukijan on vaikea muistaa lukemansa tekstin sisältöä ja miten helposti laskualgoritmien harjoitteluvaiheessa oppilailta unohtuu tavoite, mihin he laskuillaan pyrkivät. Tehokkaan informaation prosessoinnin kannalta keskeiseksi muodostuukin se, kuinka hyvin yksilö kykenee mieltämään informaation milloin suurempina ja milloin pienempinä yksikköinä sekä organisoimaan tietorakenteensa siten, että yksittäiset tiedot muodostavat jäsentyneitä, linkittyneitä tietokokonaisuuksia. Esimerkiksi matemaattisen tiedon jäsentyminen monen tasoisiksi ylä- ja alakäsitteiden muodostamiksi hierarkkisiksi struktuureiksi ja linkittyminen mm. tätä kautta siten, että tietyllä hetkellä eksplisiittisesti prosessoiduista tiedoista ja niiden yhdistelmistä voidaan dedusoida sellaista, joka ei ole juuri sillä hetkellä tiedossa tai tiedostettuna, mahdollistaa sen, että työmuistin kapasiteetin rajoittamaa samanaikaista tiedon prosessointia voidaan kompensoida tarkoitushakuisella, suunnitelmallisella peräkkäisprosessoinnilla.

Erityisesti ns. uuspiagetilaiset tutkijat, kuten Pascual-Leone (1987) ja Case (1985) ovat korostaneet sitä, että Piaget-tasojen kvalitatiivisilla eroilla ja työmuistin (tarkemmin sanoen Pascual-Leonilla suureen M-power ja Casella suureen EPS eli Executive Processing Space) määrällisillä rajoitteilla on selkeä kehityksellinen yhteytensä.

Yhteys selittyy tämän näkemyksen mukaisesti sillä, että työmuistin kapasiteetti asettaa kvantitatiiviset rajoitteet niille kvalitatiivisille kognitiivisten rakenteiden muutoksille, jotka ilmenevät Piaget-tasoina. Vasta, kun työmuistin kapasiteettia on riittävästi, monimutkaisempien kognitiivisten rakenteiden kehittyminen tulee mahdolliseksi. Niazin (1991) mukaan erityisesti formaalien operaatioiden tasoa edellyttävien tehtävien ratkaisussa yksilölliset erot selittyvät nimenomaan iän mukana kehittyvästä strukturaalisesta muistikapasiteetista ja paljon vähemmässä määrin yksilöllisiä eroja selittävästä funktionaalisesta muistikapasiteetista, jolla kuvataan käytettävissä olevan muistikapasiteetin käyttötehokkuutta. Tässä tutkimuksessa oppilaiden työmuistin kapasiteetin erot nähtiin vastaavasti erääksi mahdolliseksi selittäjäksi niille eroille, joita esiintyy eri van Hielen tasoille sijoittuneiden oppilaiden geometrisen ajattelun ja siinä yhteydessä erityisesti oppilaiden geometrisen käsitetiedon olemuksessa. Geometrisen sisällön prosessoinnissa työmuistilla on oletettavasti kaiken kaikkiaan hyvin samantyyppinen, kerralla käsiteltävissä olevan informaation määrää rajoittava rooli kuin minkä muun matemaattisen oppisisällön prosessoinnissa tahansa. Lehdon (1997, 55) mukaan työmuistin kapasiteetti selittää matematiikan koulusaavutustestien tulosten ja vastaavasti matematiikan kouluarvosanojen vaihtelusta tilastollisesti noin 30 %, mutta korostaa samalla, ettei tämä suinkaan välttämättä osoita kausaalisuhteen olemassaoloa näiden kahden asian välillä. Yhdeksäsluokkalaisten oppilaiden matematiikan koulusaavutusten ja työmuistin keskusyksikön toimintaa mittaavien tehtävien välinen korrelaatio oli Lehdon (1995, 278) tutkimuksessa testistä riippuen välillä .48—.53.

Taulukko 3. Piagetin tasojen ja maksimaalisen M-power -indeksin välinen yhteys Niazin (1994, 25) mukaan

M-power	Piaget-taso
e+1	Aikainen esioperationaalinen
e+2	Myöhäinen esioperationaalinen
e+3	Aikainen konkreettien operaatioiden vaihe
e+4	Myöhäinen konkreettien operaatioiden vaihe
e+5	Siirtymävaihe konkreeteista formaaleihin operaatioihin
e+6	Aikainen formaalien operaatioiden vaihe
e+7	Myöhäinen formaalien operaatioiden vaihe

Koska koulugeometrian oppiminen on hyvin suurelta osalta visuaalisen havainnoinnin ja käsitteellisen tiedon yhteen sulattamista, tässä tutkimuksessa juuri visuo-spatiaalisella työmuistilla oletettiin olevan erityisen merkittävä rooli geometrisen informaation prosessoinnin näkökulmasta. Empirian tasolla visuo-spatiaalisen työmuistin kapasiteetin mittaus edellyttää niiden visuaalisten skeemojen lukumäärän arviointia, joita yksilö kykenee samanaikaisesti prosessoimaan työmuistissaan. Visuo-spatiaalisen työmuistin kapasiteetin mittaukseen on varsinkin kasvatustieteellisesti orientoituneissa tutkimuksissa (esimerkiksi Niatz 1988; 1989; 1991) käytetty Pascual-Leonen ja Burtisin (1974) kehittämää Figural Intesection Test -testiä FIT. Tätä testiä käytettiin myös tämän tutkimuksen empiirisessä osassa. Testin perusidea, rakenne ja ominaisuudet esitellään tarkemmin luvussa 5.3.5. Vaikka visuo-spatiaalisen muistikapasiteetin testi FIT on käsitteellisesti hyvin yksinkertainen, niin sitä voidaan silti pitää eräänlaisena älykkyystestinä. Bereiterin ja Scardamalian (1979) suorittama analyysi osoittaa, että FIT-testin tuloksista voidaan luetettavasti ennakoida esimerkiksi Ravenin testin taso ja kääntäen. Lehto (1997, 56) toteaa kuitenkin, että älykkyyden ja työmuistin suhde on edelleen kiistanalainen ja vailla luotettavaa empiiristä näyttöä. Virsun (1995, 226) mukaan älykkyyttä ja muistia ei voidakaan erottaa toisistaan, vaan niitä on pidettävä saman ilmiön eri puolina.

5 Empiirisen osan toteuttaminen

5.1 Tutkimuksen ongelmat

Tutkimuksen ensisijainen tarkoitus oli rakentaa teoriatasolla mahdollisimman uskottava kuvaus geometrisen käsitetiedon kehittymisestä ja selvittää empiirisellä aineistolla, missä määrin van Hielen tasot antavat tästä kehitysprosessista luotettavaa tietoa. Painopiste tutkimuksella oli siis alla mainituissa ongelmaryhmissä I ja II. Koska näitä tavoitteita varten tarvittavalla mittausjärjestelyllä kuitenkin joka tapauksessa sain samalla melkoisen määrä tietoa oppilaiden geometrisesta käsitetiedosta sinänsä, katsoin mielekkääksi laajentaa tutkimustani evaluaatiotutkimuksen suuntaan ja pyrkiä vastaamaan myös kohdan III ongelmiin. Kaiken kaikkiaan hain tutkimuksella vastausta seuraaviin ongelmiin:

I van Hielen tasot geometrisen käsitetiedon kehittymisen yleisindikaattorina

1. Kuinka yhdenmukaisen tai vastaavasti heterogeenisen ryhmän muodostavat ne oppilaat, jotka sijoittuvat samalle (perinteiselle) van Hielen tasolle, kun oppilaiden geometrista ajattelua tarkastellaan seuraavilta näkökulmilta
   a) käsitteiden merkityksen ymmärtäminen (prototyyppiprosessit, visuaalinen variaatio, määrittelyt),
   b) käsitteiden välisten relaatioiden ymmärtäminen ja käsitestruktuurien muodostuminen,
   c) visuaaliseen kontekstiin sijoittuva looginen päättely (väitelauseiden ymmärtäminen, päättelyä edellyttävät laskut ja analogioiden hahmottaminen),
   d) spatiaalinen kyky,
   e) visuaalinen muistikapasiteetti.

2. Miten mitatut van Hielen tasot (perinteiset ja tarkennetut) segmentoituvat ja hierarkisoituvat ja antaako aineisto tukea tasorakenteelle? Onko van Hielen tasoille syytä olettaa alatasoja ja jos on niin, millaisia ne tässä tapauksessa ovat?

II Käsitetiedon kehittymistä kuvaavan mallin (luku 3.4) empiirinen koettelu

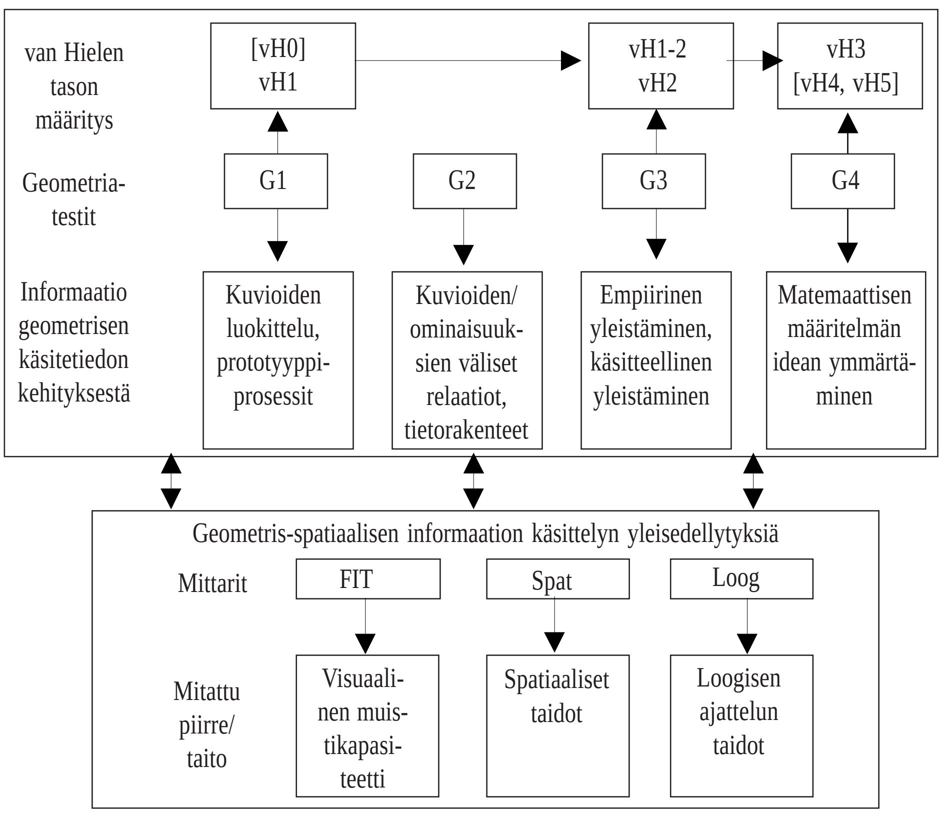
3. Kuinka hyvin empiirinen havaintoaineisto tukee käsitetiedon kehittymistä kuvaavaa mallia?

III Yläasteen oppilaiden geometrisen käsitetiedon arviointi

4. Miten oppilaiden geometrinen käsitetieto kehittyy yläasteen aikana?
5. Eroavatko hyvin ja heikosti matematiikassa menestyvät oppilaat (matematiikan arvosana) geometrisen käsitetiedon suhteen toisistaan ja millaisia nämä erot siinä tapauksessa ovat? Onko aineistosta todettavissa muita selviä osaryhmäeroja kuten esimerkiksi eroja eri sukupuolten välillä?

5.2 Tutkimusasetelma

Kuvio 13 havainnollistaa tutkimuksen koeasetelmaa.



Kuvio 13. Tutkimusasetelma kaaviona

Oppilaiden geometrista ajattelua selvitettiin tutkimuksessa kolmesta eri näkökulmasta käsin. Ensinnäkin kullekin oppilaalle määritettiin geometriatesteillä G1, G3 ja G4 van Hielen taso. Tässä yhteydessä tasojen vH1, vH2 ja vH3 kriteerien ylittymisen lisäksi tutkittiin myös uuden ns. välitason vH1-2 (empiiristen yleistysten taso) kriteerien ylittymistä. Toiseksi geometriatestit G1—G4 suunniteltiin sellaisiksi, että niillä saatiin van Hielen tasojen määrityksen ohella laajemminkin tietoa oppilaiden geometrisen käsitetietouden olemuksesta, kuten esimerkiksi mahdollisista prototyyppiseen käsitteenmuodostukseen liittyvistä piirteistä, käsitteiden välisistä relaatioista, oppilaiden käsitteiden määrittelytavoista. Kolmanneksi tutkimuksella pyrittiin selvittämään, mikä merkitys oppilaiden yleisillä visuaalis-spatiaalisen informaation käsittelyn taidoilla on geometrian oppimiseen.

Tutkimusaineisto kerättiin kaikkiaan seitsemällä eri mittarilla: neljällä geometriatestillä G1, G2, G3 ja G4 (liitteet 1—4), spatiaalisten taitojen testillä Spat (liite 5), loogisen ajattelun taitoja mittaavalla testillä Loog (liite 6), ja muistikapasiteetin testillä FIT (malliosio ja kuvaus testin instruktiosta on esitetty luvussa 5.3.5, itse testi ei ole julkinen).

Geometriatestit liittyivät läheisesti oppilaille tutkimusajankohtaan mennessä opetettuihin geometrian sisältöihin, kun taas testien Loog, Spat ja FIT suoritus ei edellyttänyt varsinaista geometrista sisältötietoutta. Testisuorituksiin sisältyi kaikkiaan yli 450 päätöksentekotilannetta. Näitä suorittaessaan oppilaat tunnistivat ja luokittelivat kuvioita, tutkivat ja pohtivat niiden ominaisuuksia, tekivät johtopäätöksiä kuvioiden ominaisuuksien välisistä riippuvuuksista, määrittelivät käsitteitä jne. Mittarien voidaan näin ollen katsoa antaneen laaja-alaisen kuvan oppilaiden geometrisesta käsitetietoudesta.

Spatiaalisten taitojen testi Spat ja loogisen ajattelun taitojen testi Loog laadittiin modifioimalla ja yhdistämällä eräitä aikaisempia samantyyppisiä testejä. Itse koottujen testien laadintaan päädyttiin pääasiassa kahdesta syystä. Ensinnäkin testien konteksti haluttiin saada tutkimusasetelmaan sopivasti visuaalis-geometriseksi. Toiseksi testien toivottiin mittaavan kohdealuettaan mahdollisimman monipuolisesti edellyttämättä kuitenkaan kohtuuttoman pitkää testausaikaa, joka olisi luultavasti laskenut testattavien oppilaiden osallistumismotivaatiota. Testien luotettavuutta pyrittiin lisäämään sillä, että testien osiot laadittiin käyttäen mallina huolella koeteltujen testien osioita (vrt. luvut 5.3.3 ja 5.3.4). Visuaalisen muistikapasiteetin mittaamiseen käytettiin professori Juan Pascual-Leonen kehittämää FIT-testiä (ks. esim. de Ribaupierre & Pascual-Leone 1979, 5—6), jonka käyttöön hän ystävällisesti myönsi luvan tätä tutkimusta varten.

5.3 Tutkimusaineiston hankinta

5.3.1 Kohdejoukko ja aineiston keruumetodi

Kaikki tutkitut oppilaat kävivät Tampereen normaalikoulun yläastetta. Tavoitteeksi asetettiin kaikkien mainitun yläasteen 262 oppilaan testaus keväällä 1992 ja mahdollisimman monen tuolloin seitsemännellä luokalla olleen 82 oppilaan uudelleentestaus yläasteen yhdeksäsluokkalaisina vuonna 1994. Tällä katsottiin taattavan riittävä variaatio oppilaiden geometrisen ajattelun piirteiden selvitystä varten ja saatavan kohtuullinen määrä dataa seurantatutkimusosaa varten. Tutkimuksen tavoitteena ei ollut suorittaa tutkittujenkaan piirteiden osalta erityistä valtakunnallista kartoitusta geometrian oppimisen tilasta Suomessa, vaan selvittää eroja eri van Hielen tasoille sijoittuneiden oppilaiden geometrisessa ajattelussa. Sen vuoksi aineiston monipuolisuutta pidettiin tärkeämpänä tekijänä kohderyhmän valinnassa kuin sen edustavuutta valtakunnallisessa mielessä. Tutkimuskouluksi valittua yläastetta voidaan oman arvioni mukaan pitää niin oppilasaineksen, koulun opetussuunnitelman kuin koulussa käytettyjen opetusmetodien suhteen varsin tavanomaisena keskisuurena lähiökouluna, joten tulokset antavat ainakin viitteenomaista tietoa yläasteen oppilaiden geometrian käsitteiden hallinnasta tutkituilta osin myös yleisemmin.

Empiirinen aineisto kerättiin kahdessa osassa. Ensimmäinen mittausvaihe toteutettiin huhti- ja toukokuussa 1992 ja toinen vaihe vastaavana aikana keväällä 1994. Testikerroilta poissaolleiden oppilaiden rästitestausten avulla ensimmäisessä mittausvaiheessa aineistoon saatiin mukaan geometriatestien osalta tiedot 245 oppilaalta, joten koko yläasteen oppilasmäärästä onnistuttiin tavoittamaan 93,5 %. Kukin testatuista oppilaista osallistui tuolloin neljään yhden oppitunnin mittaiseen testikertaan, joissa oppilas vastasi kaikkiin neljään geometriatestiin G1, G2, G3 ja G4 sekä testiryhmästä riippuen kahteen testeistä Loog (loogisen päättely), FIT (muistikapasiteetti) ja Spat (spatiaalinen kyky). Testattavia opetusryhmiä oli kaikkiaan kullakin neljällä testikerralla 19. Sen jälkeen, kun oppilaiden van Hielen tasot oli tulosten perusteella määritetty, valittiin lisäksi eri van Hielen tasoilta kuusitoista oppilasta, joiden osalta tutkimusaineistoa täydennettiin ennen lukukauden loppumista tarkentavin haastatteluin. Kaikki haastattelut videoitiin. Kevään 1994 aineisto kerättiin vain geometriatesteillä G1, G2, G3 ja G4. Tässä vaiheessa tavoitettiin vuonna 1992 tutkimukseen osallistuneesta 76 seitsemäsluokkalaisesta 68 eli 89,5 %.

Tutkimuksessa pyrittiin arvioimaan oppilaan visuaalisen prosessoinnin taitoja ja geometrista ajattelua laaja-alaisesti. Kohderyhmänä olivat lisäksi valitun peruskoulun yläasteen kaikki oppilaat heidän osallistumishalukkuudesta piittaamatta. Tästä aiheutui eräitä rajoitteita aineistonkeruulle. Ensinnäkään yksittäiset testikerrat eivät voineet olla yhtä oppituntia pidempiä. Pidemmät testausjaksot eivät olisi sopineet koulun työskentelyrytmiin eikä oppilailla olisi riittänyt motivaatiota pohtia kysymyksiä kunnolla. Jaksotus, jossa varattiin yksi oppitunti kahden geometriatestin vastaamiseen (G1+G2 ja vastaavasti G3+G4) ja yhteensä yksi oppitunti molempien muiden testien (Spat+Loog, Spat+FIT tai Loog+FIT) suorittamiseen osoittautui sopivaksi ylläpitämään vastaushalukkuutta kysymyksiin, jotka olivat kuitenkin erilaisia kuin normaalisti koulukokeissa esitetyt. Oppilaat merkitsivät kaikkiin testipapereihin nimensä, mikä oli eri testeistä saatujen tietojen yhdistämisen kannalta välttämätöntä. Oppilaille luvattiin, että tietoja käytetään vain tutkimustarkoituksiin ja etteivät testisuoritukset vaikuta kouluarvosanoihin. Nimellä vastaamisella pyrittiin lisäämään oppilaiden vastuullisuutta suorituksestaan.

5.3.2 Geometriatestit G1, G2, G3 ja G4

Koulussa opetettuun geometriseen sisältöön (monikulmiot, niiden ominaisuudet ja ominaisuuksien suhteet) liittyvän tietouden mittaaminen ja tähän liittyvän geometrisen ajattelun van Hielen teorian mukainen tyypitys tehtiin geometriatestien G1, G2, G3 ja G4 avulla.

Testin G1(liite 1) perustan muodostivat van Hielen tasoja selvittäneen Chicago-projektin käyttämän CDASSG-testin (Usiskin 1982) suomalaisessa versiossa (ks. Silfverberg 1986, 116—119) van Hielen tason 1 (ja 0) määrittämiseen käytetyt osiot. Osioiden rakennetta uudistettiin melkoisesti. Osioiden uudelleen muotoilua selostetaan edempänä. CDASSG-testistä peräisin oleviin osioihin lisättiin ylimääräisiä kuvioita, joiden avulla pyrittiin selvittämään oppilaiden käsitteenmuodostuksessa mahdollisesti ilmeneviä prototyyppiprosesseja (vrt. luku 3.3.3). Lisäksi testiin liitettiin erilaisten nelikulmioiden ja kolmioiden tunnistamis- ja luokittelutehtäviä, joiden avulla tutkittiin toisaalta kuviotyyppien tunnistamista ja luokittelua sinänsä ja toisaalta epäsuoralla tavalla sitä, miten oppilaat hahmottavat kuviotyyppien keskinäisiä relaatioita.

Testi G2 (liite 2) suunniteltiin edellä kuvatun visuaalisen variaation testaamiseen. Testillä tutkitaan, millaisia mahdollisuuksia oppilas näkee verbaalisesti nimetyn kuviotyypin muodon vaihtelulle ja vastaavasti mitä rajoitteita hän tälle kuviotyypille asettaa ts. mitä ominaisuuksia hän pitää kuviotyypille välttämättöminä. Testi antaa myös toisesta perspektiivistä kuin G1 lisäinformaatioita kuviotyyppien relaatioiden hahmottamisesta.

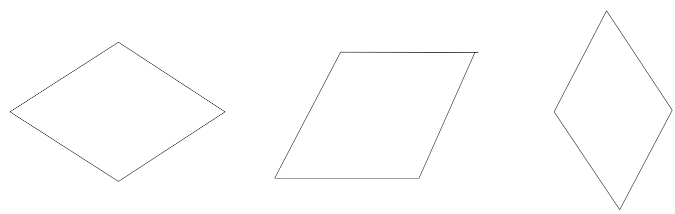
Testin G3 (liite 3) sisältö on oleellisesti sama kuin CDASSG-testin toisen van Hielen tason määrittämiseen tarkoitettu osa. Tässä tutkimuksessa tarkoituksena on kuitenkin osoittaa, että toinen van Hielen taso jakaantuu luvun 2.3.2 tarkastelun mukaisesti kahtia: Tasolla vH1-2 oppilaat tarkastelevat kuvioiden yhteisiä ominaisuuksia yleistyksinä koskien vain kuvioita, joita eksplisiittisesti tarkastellaan, ja tasolla vH2 aitoina koko kuvioluokkaa koskevina reflektiivisinä yleistyksinä. Tämän vuoksi alkuperäiset CDASSG-testin väittämät muutettiin muotoon, jossa oppilas arvioi väitteiden paikkansapitävyyttä sekä esitettyjen kuvioiden että kaikkien mahdollisten tätä tyyppiä olevien kuvioiden osalta.

Testin G4 (liite 4) osioihin 1—4 sisältyneet 20 alaosiota on laadittu mukaellen CDASSG-testin suomalaisen version kolmannen van Hielen tason määrittämiseen tarkoitettuja osioita. Toisen kokonaisuuden testistä muodostavat osiot 5—9 ja niihin sisältyvät 25 alaosiota, joilla tutkittiin oppilaan tapaa ymmärtää määrittelyn idea sekä kykyä muotoilla määritelmiä.

Geometriatestit suunniteltiin sellaisiksi, että ne antoivat mahdollisuuden tarkastella van Hielen tasoja sekä perinteisesti globaaleina tasoina että perinteistä tapaa selvästi yksityiskohtaisemmin ja laaja-alaisemmin. Etukäteen ei haluttu sulkea pois sitäkään mahdollisuutta, että joku muu kuin van Hielen teorian mukainen esitystapa kuvaisikin paremmin oppilaan geometrisen ajattelun kehitysprosessia. Tämän takia van Hielen tasojen testaukseen käytettyjen testiosioiden pisteytystapaa tarkennettiin. Alkuperäisessä van Hielen tasojen määrittämiseen kehitetyssä testissä kussakin osiossa esitettiin viisi vaihtoehtoista vastausta kysymykseen tai viisi väitettä, joista vain yksi oli oikea. Osio katsottiin oikein suoritetuksi, jos vastaaja tunnisti oikean vastauksen vaihtoehtojen joukosta. Todennäköisyydellä 1/5 vastaaja voi päätyä oikeaan tulokseen myös sattumanvaraisella arvauksella. Todennäköisyys, että koko ajan sattumanvaraisesti arvanneen oppilaan katsottaisiin selvittäneen tietylle van Hielen tasolle testissä kuuluneet osiot hyväksyttävästi, kun tasoa kohti on viisi osiota ja läpäisykriteerinä käytetään vähintään neljän osion oikeata suoritusta, on alkuperäisessä testissä vain suuruusluokkaa 0,0067. Testin formaatti antaa kokonaisten tasojen määrittämiseen tilastollisesti riittävän luotettavan pohjan.

Alkuperäisen van Hielen teorian formaatin yhtenä ongelmana on se, että sen vuoksi hukkaantuu tavattoman paljon siitä informaatiosta, joka samoilla osioilla toisenlaisella testiformaatilla olisi oppilaan geometrisesta ajattelusta saatavissa. Tarkastellaan vanhan CDASSG-testin ja uudistetun testin muotoeroja vertaamalla yhtä van Hielen tason mittaamiseen käytettyä osiota vanhassa ja uudessa muodossaan (kielivirheet säilytetty: vasten po. vastaan, yhtäpitkät po. yhtä pitkät jne.). Esimerkiksi toisen vH-tason kolmas testiosio 8 oli aikaisemmassa muodossaan seuraava (instruktiossa, oppilaalle annettiin ohjeena tieto, että vain yksi vaihtoehdoista (A)—(E) on oikea ja sitä vastaava kirjain ympyröidään)

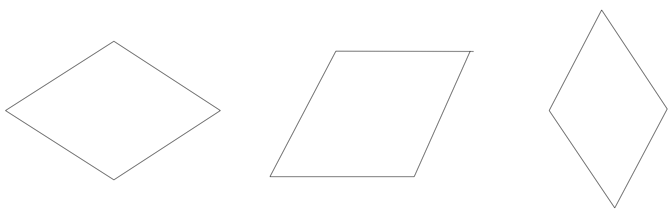
8. Neljäkäs on nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Alla on kolme esimerkkiä.



Mikä väitteistä (A)—(D) ei ole tosi kaikille neljäkkäille?
(A) Lävistäjät ovat yhtä pitkät.
(B) Kumpikin lävistäjä puolittaa kaksi neljäkkään kulmaa.
(C) Lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.
(D) Vastakkaiset kulmat ovat yhtäsuuret.
(E) Kaikki väitteet (A)-(D) ovat tosia jokaiselle neljäkkäälle.

Testiosion muotoilusta aiheutuu monia tulkinnallisia ongelmia. Ensinnäkin osion tulisi toiselle van Hielen tasolle tarkoitettuna mitata sellaisten ominaisuuksien tunnistamista, jotka ovat voimassa kaikille neljäkkäille. Kuitenkin osio voidaan ratkaista esitetyssä muodossa tarkastelemalla vain annettuja mallikuvioita: mikä ei ole voimassa jollekin mallikuviolle ei ole voimassa yleisestikään. Testaus jättää näin epäselväksi sen, tekeekö oppilas konkreetteja yksittäistarkasteluja vaiko todellisia yleistyksiä. Toiseksi, kun oppilas on todennut, ettei vaihtoehto (A) ole tosi, hänen ei tarvitse muita vaihtoehtoja edes käydä läpi, sillä instruktion mukaan vain yksi vaihtoehto kussakin osiossa on oikea ja ympyröidään. Oikean suorituksen (A) antaneen oppilaan osalta suhtautumisesta väitteisiin (A)—(D) on siis epävarmaa päätellä mitään. Kolmanneksi kysymyksen kielteinen muotoilu "Mikä väitteistä (A)—(D) ei ole tosi …" lisää turhaan oppilaan muistirasitusta (vrt. luku 4.4) suorituksen aikana ja tekee vaihtoehdon (E) aseman kummalliseksi varsinkin, kun se on epätosi A:n ollessa epätosi. Edellä kuvattujen tulkintaongelmien vähentämiseksi ja sen takaamiseksi, että oppilas pohtii kutakin vaihtoehtoa ja vastaa siihen erikseen, van Hielen tasojen mittaamiseen käytetyt osiot muotoiltiin uudelleen. Muotoilussa pyrittiin (a) välttämään, jos mahdollista kielteistä muotoa kysymyksen asettelussa, (b) saamaan selville vastaajan eksplisiittinen kanta jokaiseen väitteeseen ja (c) erottamaan toisistaan konkreetit, mallikuvioiden kokoelmaa koskevat (taso vH1-2) ja aidot, koko kuvioluokkaa koskevat yleistykset (taso vH2) toisistaan. Uudelleen muotoilun seurauksena aikaisempien "Kaikki vaihtoehdot ovat (epä)tosia" tilalle tehtiin uudet kuvioiden ominaisuuksia koskevat väitelauseet.

Alkuperäistä osiota 8 vastaa testissä G3 kaksi osiota, jotka oli ylä- alaviivoin erotettu muista vastaavista osiopareista. Parin toisen osion (osio 5) kysymykset koskevat esitettyjä mallikuvioita ja toisen (osio 6) kaikkia neljäkkäitä. Instruktiossa oppilaalle kerrottiin, että oikeita vaihtoehtoja ei ole välttämättä yhtään tai sitten niitä voi olla yksi tai useampia. Kussakin testin G3 viidestä osioparista täsmälleen yksi väite oli tosi esitetyille mallikuvioille mutta ei kaikille vastaavaa tyyppiä oleville kuvioille (1B ja 2B, 3H ja 4H, 5D ja 6D, 7J ja 8J sekä 9E ja 10E).



5. **Neljäkäs määritellään nelikulmioksi, jonka kaikki sivut ovat yhtäpitkiä.** Alla on kolme esimerkkiä neljäkkäistä

   Mitkä väitteistä A)—E) ovat tosia **yllä oleville** neljäkkäille?
   A) Lävistäjät ovat yhtäpitkät.
   B) Kumpikin lävistäjä puolittaa kaksi neljäkkään kulmaa.
   C) Lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.
   D) Vierekkäiset kulmat ovat erisuuret.
   E) Vastakkaiset kulmat ovat erisuuret.

6. Mitkä samoista väitteistä A)—E) ovat tosia **kaikille** neljäkkäille?
   (Ympyröi oikeat vaihtoehdot) A) B) C) D) E)

Osioiden rakenteen uudelleenmuotoilun lisäksi testiin tehtiin eräitä aikaisemman tutkimuksen antamien kokemusten perusteella (Silfverberg 1986) välttämättömäksi katsottuja sisällöllisiä muutoksia. Testin G3 osioista 1A—1E ja 2A—2E poistettiin alkuperäiseen muotoiluun kuuluneet tyyppiä PR, RS jne. olleet viittaukset neliön PQRS sivuihin ja lävistäjiin, koska nämä kokemuksen mukaan aiheuttivat oppilaille tarpeetonta vaikeutta tulkita osioiden väitteitä.

5.3.3 Spatiaalisten taitojen testi Spat

Spatiaalisten taitojen mittari *Spat* (liite 5) laadittiin käyttäen pohjana testikokoelmaa National Association of Secondary School Principals (NASSP), Learning style profil (Keefe & Monk 1986). Tästä oppimistyylin mittaamiseen suunnitellusta testistöstä valittiin tutkimuksessa käytettyyn testiin mukaan ne visuaalista prosessointia edellyttävät osiot, jotka kuuluivat osataitojen analytic skill, spatial skill, gestalt, sequential processing skill ja discrimination skill alueille. Joihinkin NASSP-testin suomalaisen version instruktioihin tehtiin tarpeelliseksi katsotut tarkennukset ja korjaukset. Lisäksi testiin lisättiin kahdeksan NASSP-testiin kuulumatonta osiota. Tällaisia ovat lopullisen testin osiot 10, 17—20 ja 26—28. Osiot 17—20 kehiteltiin Werdelinin (1961, 58) käyttämistä Cubes-osioista. Näillä toimenpiteillä kohtuullisen pituinen testi saatiin suhteellisen hyvin kattamaan ne spatio-visuaalisen prosessoinnin osa-alueet, jotka tulevat esiin sekä NASSP-testistössä noudatetussa että Eliotin (1987, 9—12) esittämässä spatiaalisten kykyjen/taitojen luokituksessa. Testin kokeiluvaiheessa todettiin, että osalla oppilaista oli vaikeuksia ehtiä suorittaa testi yhden oppitunnin aikana. Tämän vuoksi osa osioista jätettiin pois testin lopullisesta versiosta.

5.3.4 Loogisen päättelyn testi Loog

Oppilaan loogisen päättelyn tasoa arvioitiin testillä *Loog* (liite 6) kolmen osa-alueen kannalta: (a) oppilaan taitoa ja tapaa ymmärtää propositioita, joissa esiintyi loogisia konnektiiveja (negaatio, konjunktio, disjunktio, implikaatio) ja universaalikvanttori (jokainen/molemmat) ja joiden totuusarvon päättely edellytti lauseiden tulkintaa suhteessa kuvan avulla annettuun informaatioon, (b) oppilaan kykyä muodostaa toimiva mentaalimalli laskutehtävänä annetusta tilanteesta, jossa esiintyy toisiinsa kytkettyjä suurevertailuja, (c) oppilaan taitoa hahmottaa geometrisia analogioita.

Tavoitteeksi asetettiin kehittää testi, joka soveltuisi vaikeustasoltaan peruskoulun yläasteen oppilaan päättelytaitojen mittaamiseen ja olisi kontekstiltaan geometris-visuaalinen. Ensimmäisen kokonaisuuden muodostavat yhdeksän propositiota, joiden paikkansapitävyyttä vastaaja arvioi jokaisen annetun kuuden kuvasarjan A, B, C, D, E ja F osalta (vrt. liite 6, osiot 1—9 ja vastauslomakkeen kuvasarja A—F). Useamman kuvasarjan arvioimisella pyrittiin vähentämään sattumanvaraisella arvauksella saadun oikean vastauksen todennäköisyyttä ja takaamaan se, että loogiselta muodoltaan erilaisten väitelauseiden oikeat vastaukset erottuivat toisistaan. Instruktion mukaan oikeita vaihtoehtoja voisi olla yksi tai useampia. Tällä järjestelyllä sattumanvarainen arvaus tuottaa oikean vastauksen todennäköisyydellä $1:(2^6-1) = 1:63$. Suorituksen oikeellisuuden lisäksi testiosioihin annetut vastaukset tarjoavat vastausvaihtoehtojen runsauden vuoksi myös mahdollisuuden tarkastella oppilaiden tyypillisimpiä virhetulkintoja ja muun oppilaista tiedossa olevan informaation avulla myös sitä, minkälaisille oppilaille minkäkin tyyppiset tulkinnat ovat tyypillisiä. Kuvasarjat A, … ,F olivat samat jokaisessa osiossa.

Osioiden suoritus edellyttää oppilaalta ainakin kahta asiaa:

(1) lauseiden loogisen rakenteen analyysiä sekä
(2) lauseiden merkityssisällön ja havainnon vastaavuuden toteamista.

Tämän lisäksi on oletettavaa, että oppilaan suoritukseen vaikuttaa myös oppilaan työmuistin prosessointikapasiteetti, sillä etenkin mutkikkaimmissa osioissa onnistunut suoritus edellyttää useiden asioiden yhtäaikaista mielessä pitämistä.

Loog-testin toisen osan muodostavat neljä numeerisesti yksinkertaista laskutehtävää, joissa esiintyy toisiinsa kytkettyjä suurevertailuja. Tehtävät (vrt. liite 6, osiot 10—13) konstruoitiin Werdelinin (1961) käyttämien tehtävien pohjalta, joiden tämä toteaa latautuvan erityisesti reasoning-faktorille. Visualisoinnin voidaan olettaa oleellisesti helpottavan tehtävien ratkaisua. Alla on esimerkki yhdestä testiin sisältyneestä laskusta.

> **Osio 14**. *Sami on 9 kg painavampi kuin Jani. Jani on 3 kg kevyempi kuin Esa. Esa on 4 kg painavampi kuin Pasi. Kuinka paljon Pasi on Samia kevyempi?*

Loog-testin kolmannen osan neljä osiota (vrt. liite 6, osiot 14—17) mittaavat geometrisen analogiapäättelyn hallintaa. Osatestin laadinnassa käytettiin esikuvana Novickin ja Tverskyn (1987, 53—54) käyttämiä geometrisia analogioita. Analogiat ovat tyyppiä A:B::C:?, missä koehenkilön tehtävänä on kuvioiden A ja B välillä vallitsevan suhteen keksittyään valita annettujen viiden vaihtoehtokuvan joukosta se, joka suhtautuu kuvioon C samoin kuin B suhtautuu A:han. Analogiatehtävien kirjallinen instruktio pyrittiin saamaan mahdollisimman konkreetiksi, jotta oppilas varmasti ymmärtäisi, mitä häneltä odotettiin. Tämän vuoksi kuvioiden A ja B välistä suhdetta A:B havainnollistettiin metaforalla "Kuviteltu kone muuttaa kuvion 1 kuvioksi 2." Suhteiden välistä suhdetta (kuvio 1: kuvio 2)::(X:?) konkretisoitiin metaforalla "Millaiseksi sama kone muuttaa kuvion X?"

Testi kehitettiin kahden koeversion kautta. Ensimmäinen koeversio sisälsi vain lopullisen testin alkuosaa vastaavan väitelauseosan. Propositioiden loogisen rakenteen kehittelyssä käytettiin apuna Janssonin (1986) kehittämän Geometric Garden testin osioita. Alkuperäiseen testiin sisältyy 20 väitelausetta, joissa päätelmät tehdään tarkastelemalla neljää nelikulmion muotoista puutarhaa ja kuhunkin puutarhaan merkittyä kahta polkua. Väitteet käsittelevät polkujen yhdensuuntaisuutta ja samanpituisuutta. Loogiselta rakenteeltaan Janssonin käyttämät lauseet vastaavat Piagetin 16 binääristä operaatiota. Jansson selvitti ns. järjestysteoriaan perustuen myös osioita vastaavien loogisten suhteiden todennäköisen oppimishierarkian. Testattujen oppilaiden keski-ikä oli 13.6 vuotta. Ensimmäinen koeversio tehtiin Geometric Garden -testistä lyhentämällä se 12 osioiseksi. Lisäksi testi muutettiin helpommin käytettävään lomakemuotoon. Puutarha ja polut korvattiin tekstissä nelikulmiolla ja sen sivuilla. Koeversioon valittiin osiot Janssonin raportoiman osioiden hierarkiarakenteen perusteella siten, että osiot kattoivat hierarkiarakenteen eri osat. Koeversio testattiin opettajankoulutukseen kuuluvana ainedidaktisena seminaarityönä (n = 67) (Korpinen 1990). Ensimmäisestä kokeiluvaiheesta saadun palautteen perusteella jouduttiin eräiden väitelauseiden sisältöä jonkin verran muuttamaan. Koska ensimmäisen koeversion yhteydessä oppilaille todettiin aiheutuvan sekaannusta siitä, ovatko piirroksissa esitetyt janat yhdensuuntaiset ja vastaavasti tarkalleen yhtä pitkät vai näyttävätkö vain siltä ja pitääkö päätelmät tehdä mittausten perusteella vaiko silmämääräisesti, kuvat vaihdettiin samantapaisiksi, joita Piburn (1990) käytti kehittämässään mittarissa Propositional Logic Test. Tässä vaiheessa testiin lisättiin sen monipuolistamiseksi myös geometrista päättelyä edellyttävät laskut ja geometriset analogiaosiot. Propositioiden määrä vähennettiin samalla yhteentoista. Toinen koeversio testattiin ainedidaktisena seminaarityönä (Ali-Myllymaa 1992). Toisen kokeiluvaiheen kokemusten perusteella testi toimi suhteellisen moitteettomasti. Eräitä testin sanamuotoja vielä paranneltiin ja propositioiden määrä vähennettiin lopullisessa testiversiossa yhdeksään, jotta testi varmasti ehditään suorittaa yhden koulun oppitunnin aikana.

5.3.5 Visuaalisen muistikapasiteetin testi FIT

Visuo-spatiaalisen muistikapasiteetin testaukseen käytettiin Pascual-Leonen kehittämää ns. *FIT*-testiä (Figural Intersection Test), jolla mitataan maksimaalista visuaalisten skeemojen määrää, joiden yhtäaikaiseen prosessointiin koehenkilö kykenee (Burtis & Pascual-Leone 1974; de Ribaupierre & Pascual-Leone 1979; Johnson 1982). Testi *FIT* palveli visuaalisuutensa vuoksi tämän tutkimuksen tavoitteita paremmin kuin eräät muut tunnetut muistikapasiteetin mittaamiseen käytetyt lukujänne- ja numerojännetestit, kuten esimerkiksi Digit Backward Span, Digit Placement Task, Counting Span Task (Keranto 1983, 41—42), tai mekaanisen apulaitteen käyttöä edellyttävä ns. Rho-task-testi (Pascual-Leone 1987, 558—564). Testin kaikki osiot edellyttivät pelkästään kuvan muodossa esitetyn informaation mielessä pitämistä ja prosessointia.

Kuviossa 14 on esimerkki *FIT*-testin osioista (toinen neljästä yhdessä läpikäydystä harjoitusosiosta). Useimmat varsinaiset testiosiot olivat harjoitusosioita huomattavasti mutkikkaampia. Koska testi ei ole julkinen ja sen käyttö on luvanvaraista, varsinaisista testiosioista ei tässä esitetä esimerkkejä. Harjoitusosioiden avulla oppilaalle osoitettiin rauhallisesti edeten ja piirtoheitinkalvolla tehden, että hänen tehtävänään oli jokaisessa testiosiossa

1) etsiä yksi kerrallaan jokainen oikean puolen kuvio vasemman puolen yhdistelmästä,
2) merkitä rasti oikean puolen kuvion sisään sitten, kun sen vastinkuvio on löytynyt vasemmalta puolelta,
3) etsiä kaikkien oikean puolen kuvioiden vastinkuvioiden yhteisesti rajaama alueen vasemman puolen kuvioyhdistelmästä ja

4) merkitä selvästi näkyvä piste tähän yhteiseen alueeseen (leikkaukseen).

Ohjeissa (liite 7) todettiin lisäksi, että vasemmanpuolen kuvioissa voi olla ylimääräisiä kuvioita (vrt. neljäkäs kuviossa 14), joita ei esiinny oikean puolen kuvioissa ja, että näitä ei oteta huomioon kuvioiden yhteistä aluetta määritettäessä.

Kuvio 14. FIT-testin toinen harjoitusosio

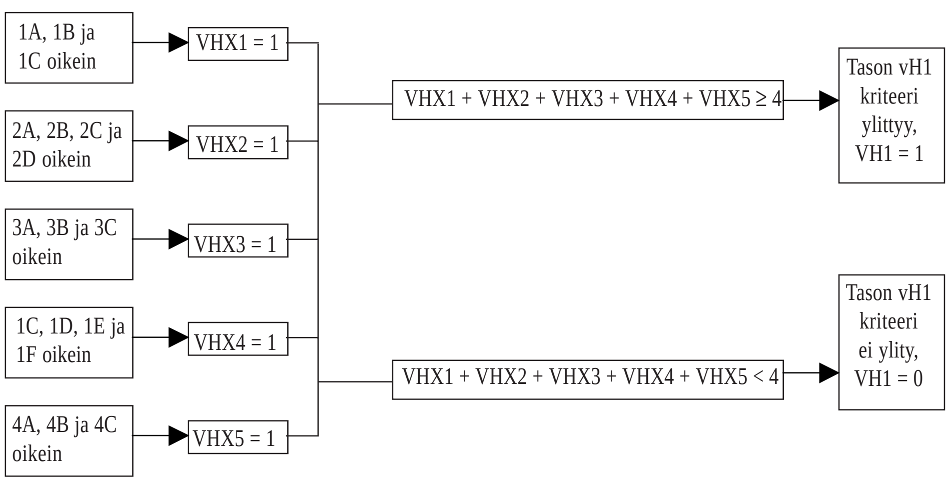
FIT-testin suoritus voidaan pisteittää neljällä vaihtoehtoisella muistikapasiteettia mittaavalla indeksillä (Johnson 1982). Näistä tähän tutkimukseen valittiin oikein suoritettujen osioiden kokonaismäärää tarkoittava summamuuttuja FIT-score (0, 1, 2, … , 36) ja siitä johdettu seitsenportainen indeksi SIT (1, 2, … , 7), joka viittaa indeksiä FIT-score suoremmin niiden visuaalisten skeemojen maksimimäärään, joita koehenkilö kykenee samanaikaisesti prosessoimaan. Johnsonin (1982, 13) mukaan testin keskimääräinen Cronbachin α-kerroin oli tuohon mennessä raportoiduissa tutkimuksissa ollut 0,88. Myöhemmin esimerkiksi Niaz on tutkimuksissaan raportoinut FIT-testin eri versioille vastaavat reliabiliteettiarvot 0,88 (Niaz 1988), 0,73 (Niaz 1989) ja 0,83 (Niaz 1991).

6 Oppilaiden van Hielen tasot

6.1 van Hielen tasojen määritystapa

Tasot vH0 ja vH1:

Testin G1 osioissa 1—4 on yhteensä 24 vaihtoehtoa. Kustakin vaihtoehdosta muodostettiin dikotominen muuttuja x1—x24, jolle annettiin arvo 1, jos oppilas hyväksyi (rengasti) sitä vastaavan vaihtoehdon, ja arvo 0, jos hän ei sitä hyväksynyt. Päätös tason 1 kriteerin ylittymisestä tai ylittymättä jäämisestä tehtiin vertailukelpoisuuden saavuttamiseksi samantyyppisellä menetelmällä, miten se tehdään käytettäessä rakenteeltaan toisentyyppisestä mutta sisällöllisesti samanlaista Chicago-projektin yhteydessä kehitettyä CDASSG-testiä (ks. Silfverberg 1986, 40—42, 116—119). Kuviossa 15 esitetty päätöksentekokaavio havainnollistaa kriteerin soveltamista (1A, 1B, jne. viittaavat testin G1 osioissa esitettyihin vaihtoehtoihin).

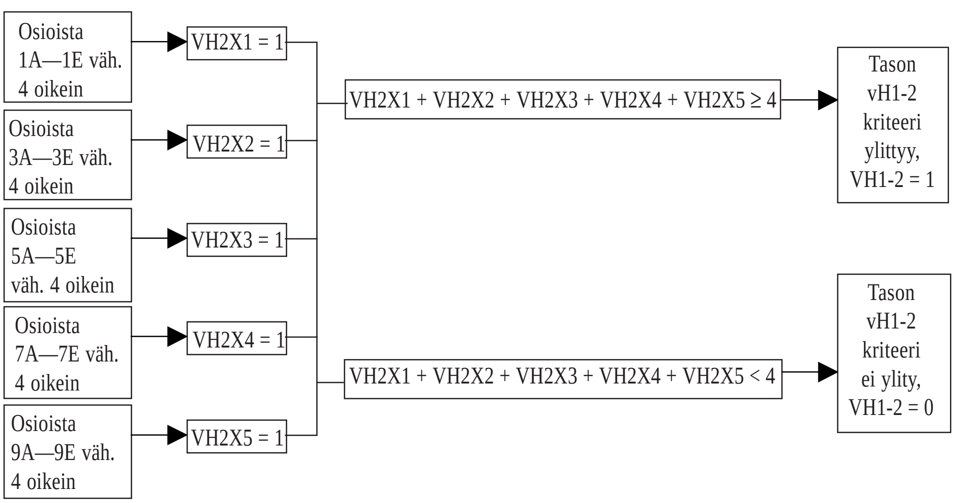


Kuvio 15. Kaavio menettelystä, jolla van Hielen tason 1 saavuttaminen päätettiin testin G1 osioihin 1—4 annettujen vastausten avulla

Mikäli oppilas ei ylittänyt tason 1 kriteeriä, hänet luokiteltiin tasolle vH0. Taso vH0 otettiin tässä yhteydessä käyttöön lähinnä nimityssopimuksena ottamatta kantaa siihen, esiintyikö näiden oppilaiden geometrisessa ajattelussa muuta yhteistä kuin se, etteivät he ylittäneet tason vH1 kriteeriä. Dikotomisen muuttujan VH1 (kriteeri ylittyy/ei ylity) lisäksi muodostettiin summamuuttuja VH1PROS, joka sai arvokseen kuvioista 1A, 1B, 1C, 1D, 1E, 1F, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 4A, 4B, 4C oikein tunnistettujen kuvioiden suhteellisen lukumäärän ilmoitettuna desimaalimuodossa ja skaalattuna välille 0 ≤ VH1PROS ≤ 1.

Tasot vH1-2 ja vH2:

Tasojen vH1-2 ja vH2 saavuttamista mitattiin testin G3 avulla. Testin G3 parittomat osiot mittasivat tason vH1-2 toimintoja, empiiristä yleistämistä, ja parilliset osiot tason vH2 toimintoja, abstraktia yleistämistä. Kriteerin ylitys tarkistettiin kummallakin tasolla samalla periaatteella, jota tason vH1-2 osalta havainnollistaa kuviossa 16 esitetty päätöskaavio. Tason saavuttamiskriteeriksi asetettiin, että osioita, joissa oli vähintään neljä viidestä vaihtoehdosta osattu oikein, oli vähintään neljä. Menettelyllä pyrittiin tavoittamaan mahdollisimman hyvä vertailukelpoisuus CDASSG-testin kanssa. Tasoille vH1-2 ja vH2 konstruoitiin lisäksi summamuuttujaa VH1PROS vastaavat summamuuttujat VH1-2PROS ja VH2PROS, jotka saivat arvokseen oikeiden vastausten suhteellisen lukumäärän osioissa 1A—1E, 3A—3E, 5A—5E, 7A—7E, 9A—9E ja vastaavasti osioissa 2A—2E, 4A—4E, 6A—6E, 8A—8E, 10A—10E.



Kuvio 16. Kaavio menettelystä, jolla van Hielen tason 1-2 saavuttaminen päätettiin testin G3 osioihin 1, 3, 5, 7 ja 9 annettujen vastausten avulla. Päätös van Hielen tason 2 saavuttamisesta tehtiin vastaavalla tavalla testi G3 osioiden 2, 4, 6, 8 ja 10 vastausten avulla

Taso vH3:

Päätös tason vH3 saavuttamisesta tehtiin testin G4 osioiden 1—4 ja testin G1 osioiden 3D, 3E ja 3F avulla. G4 testin osiot 1—4 katsottiin oikein suoritetuiksi, mikäli oppilas oli vastannut niissä vähintään neljään alakohtaan viidestä oikein. G1-testin osiot muodostivat 3D, 3E ja 3F testin viidennen osion, joka hyväksyttiin oikein suoritetuksi, jos kuviot oli kaikki tunnistettu suorakulmioiksi (luokkainkluusion hyväksyminen). Oppilaan katsottiin saavuttaneen tason vH3, mikäli hän suoritti edellä mainituista viidestä osiosta vähintään neljä hyväksytysti. Myös tasolle vH3 muodostettiin muuttujia VH1PROS, VH1-2PROS ja VH2PROS vastaava muuttuja VH3PROS, jolla kuvattiin oppilaan antamien oikeiden vastausten suhteellista lukumäärää G4-testin 20 osioon 1A—1E, 2A—2E, 3A—3E ja 4A—4E sekä G1-testin suorakulmion tunnistamiskokonaisuuteen (3D, 3E ja 3F).

6.2 van Hielen tasojen määrittämiseen käytettyjen mittarien luotettavuus

6.2.1 Mittarien validiteetti

Hautamäen (1984, 38) mukaan sisällön validiteetin ydinkysymys on, missä määrin mittavälineen sisältö (osiot) on asianmukainen tiettyjä tietoja, taitoja tai toimintoja ajatellen. Tasojen määrittämiseen käytetty mittaväline on asiasisällöllisesti sama kuin ns. CDASSG-mittari, joka kehitettiin edellä kuvatun Chicago-projektin yhteydessä. CDASSG-mittarissa van Hielen tasojen operationaalistaminen tehtiin huolellisesti. Osioiden konstruktio perustettiin suoraan van Hielen teorian kehittäjien P. van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin kirjallisesta tuotannosta löytyviin kommentteihin tasojen luonteesta. Toinen sisällön validiteettiin liittyvä kysymys on se, missä määrin mittarin sisältämää geometrista ainesta voidaan pitää mielekkäästi valittuna kokonaisuutena. Geometrian aihepiiri, lähinnä monikulmioiden ominaisuudet, joka van Hielen tasojen mittareissa on keskeisimpänä sisältönä, sopii tähän tutkimukseen hyvin, koska se on käsitestruktuuriltaan rikas ja kaikille yläasteen oppilaille jollakin tapaa tuttu.

Olen aiemmin (Silfverberg 1986) selvittänyt van Hielen tasojen mittareiden, mm. CDASSG-testin, rakennevaliditeettia. Eräitä CDASSG-mittarissa havaittuja puutteita olen pyrkinyt korjaamaan tässä tutkimuksessa käytetyssä testiversiossa. Korjauksia on käsitelty luvussa 5.3.2.

6.2.2 Mittarien reliabiliteetti

Cronbachin α-kerroin summamuuttujalle vH1 oli 0,47. Kertoimen alhainen arvo selittyy osaksi sillä, että muuttujan arvot saadaan summaamalla vain viiden dikotomisen muuttujan VHX1, … , VHX5 arvot. α-kertoimen arvo on kuitenkin jonkin verran korkeampi kuin aikaisemmassa tutkimuksessani (Silfverberg 1986) pienemmällä otoksella saamani arvo 0,37 (nyt n = 244, v. 1986 n = 87) ja Chicago-projektin yhteydessä lähes 2700 oppilaan aineistolla kahdella eri testikerralla saadut arvot 0,31 ja 0,39 (Senk 1989, 313). Reliabiliteetin kohoaminen todennäköisesti johtuu siitä, että käytetyssä testiversiossa jokainen kuvio oli tunnistettava erikseen (16 päätöstä), kun taas CDASSG-testin jokaisessa viidessä osiossa vastaajan on tunnistettava oikea kuvioiden yhdistelmä viiden vaihtoehdon joukosta, joista osa on itsestään selvästi poissuljettuja (vrt. Silfverberg 1986, 116). Kolmioiden tunnistamistehtävän eli muuttujan VHX2 poisjättäminen testistä olisi lisännyt sen reliabiliteettia arvoon 0,50. Kuudentoista dikotomisen muuttujan summamuuttujan VH1PROS α-kerroin sai jo arvon 0,68, joten lähinnä van Hielen tasojen 0 ja 1 keskinäiseen erottamiseen tarkoitettujen kuvioiden tunnistamistehtävien voidaan kuitenkin jatkotarkastelujen kannalta katsoa muodostavan riittävän yksidimensionaalisen kokonaisuuden.

Cronbachin α-kerroin muuttujalle vH1-2 oli 0,73 (n = 241), muuttujalle vH2 0,63 (n = 241) ja muuttujalle vH3 0,54 (n = 242). Tasoa vH1-2 ei ole aiemmin mitattu, joten α-kertoimelle ei löydy vertailuarvoja muista tutkimuksista. Tasojen vH2 ja vH3 mittarien α-kertoimiksi Silfverberg (1986, 55) sai 0,55 ja 0,40. Senk (1989, 313) sai vastaaviksi α-kertoimiksi 0,44 (vH2-tason 1. mittauskerta), 0,55 (vH2-tason 2. mittauskerta), 0,49 (vH3-tason 1. mittauskerta) ja 0,56 (vH3-tason 2. mittauskerta). Cronbachin α-kertoimet muuttujille VH1-2PROS, VH2PROS ja VH3PROS olivat tässä järjestyksessä 0,77, 0,75 ja 0,65 eli kaikki suhteellisen korkeita.

6.3 van Hielen tasojen vahva vs. heikko hierarkia

Aikaisemmissa tutkimuksissa van Hielen teoriaan sisältyvää hypoteesia vH-tasojen hierarkiasta on tulkittu eri tavoin. Jatkossa viittaan kahteen tyypilliseen hierarkiatulkintaan termeillä vahva ja heikko hierarkia seuraavasti:

1) *Vahva hierarkia*: Oppilaan geometrisen ajattelun kehitys tapahtuu askelittain taso kerrallaan. Tasojen saavuttamisen järjestys on vakio, vH1 saavutetaan ennen vH1-2:ta, vH1-2 ennen vH2:ta jne. Oppilas on kypsä toimimaan tietyn van Hielen tason mukaisella tavalla vasta, kun hän on saavuttanut sitä edeltävät tasot. (van Hiele & van Hiele-Geldof 1958.)

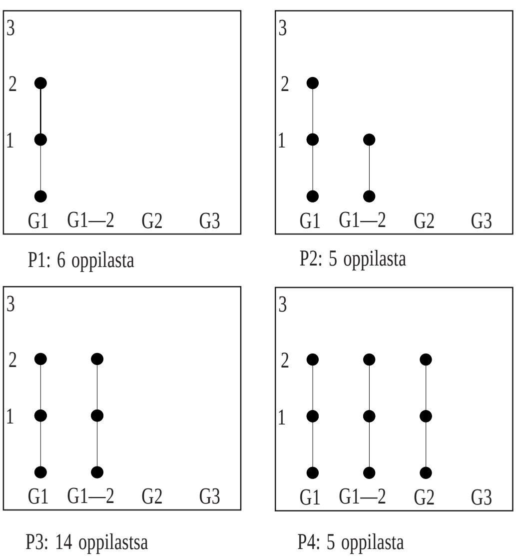
2) *Heikko hierarkia*: Tasot kuvaavat geometrisen ajattelun kehityssuuntia, joissa voidaan edetä joko saman- tai eriaikaisesti. Alemman van Hielen tason mukaiset piirteet ovat kuitenkin kehityksessä edellä sitä korkeampien van Hielen tasojen mukaisen ajattelun piirteitä. (Gutiérrez ym. 1991a.)

Jos merkitsemme kunkin vH-tason 1, 1-2, 2 ja 3 kriteerin ylittymistä ykkösellä ja ylittymättä jäämistä nollalla ja noudatamme tasojen mukaista järjestystä, voimme kuvata yksittäisen oppilaan suoriutumista van Hielen tason testeistä ykkösistä ja nollista koostuvalla lukujonolla. Sekä vahvan että heikon hierarkian tapauksessa vain jonot 1000, 1100, 1110, 1111 ovat hierarkiaoletuksen mukaisia eivätkä sisällä ns. hierarkiavirheitä. Sen sijaan esimerkiksi jono 1011 viittaisi suoritukseen, johon sisältyy kaksi hierarkiavirhettä, sillä toisen tason kriteeri ei tällöin ole ylittynyt, vaikka kolmannen ja neljännen tason kriteerit ovat ylittyneet. Jos tutkimusaineisto sisältää runsaasti hierarkiavirheitä, se kumoaa molemmat hierarkiaoletukset, mutta vähäinen hierarkiavirheiden lukumäärä ei vielä ratkaise sitä, kumpi hierarkiaoletus, vahva vai heikko, on oikeutetumpi.

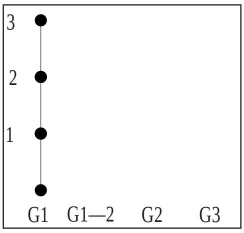
Mahdollista van Hielen tasojen hierarkkisuutta ja hierarkian olemusta tutkittiin ensin selvittämällä, missä määrin oppilaat hallitsevat eri tasoille tyypillisiä toimintoja silloin, kun tason kriteeri jää ylittymättä. Oppilaille määritettiin ensin ns. Gutiérrez-tasot eli G-tasot, vastaavalla tavalla, millä Gutiérrez ym. (1988) selvittivät avaruusgeometrian oppimiseen liittyvien van Hielen tasojen rinnakkaista kehittymistä. Kutakin vH-tasoa vastaava G-taso G1, G1-2, G2 ja G3 määritettiin vastaavan van Hielen tason osioiden prosentuaalisen suoritustason vH1pros, vH1-2pros, vH2pros, vH3pros perusteella seuraavasti: Gi-tasolle, missä i = 1, 1-2, 2 tai 3, annettiin arvo 0, kun vHipros ≤ 63 %, 1, kun 63 % < vHipros ≤ 76 %, 2, kun 76 % < vHipros ≤ 88 %, ja 3, kun vHipros > 88 %.

Prosentuaaliset rajat valittiin sillä perusteella, että ensimmäinen raja, 63 %, vastaa niiden oppilaiden suoritustason odotusarvoa, jotka osaavat tason mittaamiseen käytetyistä osioista neljäsosan ja arvaavat loput. Vastaavasti rajat 76 % ja 88 % vastaavat niiden oppilaiden suoritustason odotusarvoa, jotka osaavat puolet tai vastaavasti kolme neljäsosaa van Hielen tason osioista ja arvaavat loput.

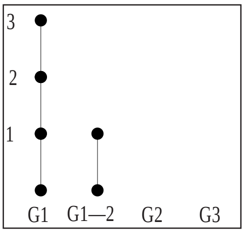
Kuvioissa 17—20 on esitetty tyypillisimmät oppilailla esiintyneet G-tasojen profiilit ryhmiteltyinä sen mukaan, mille van Hielen tasolle profiilin mukainen suoritus sijoittuu. Kaikkiaan kuvien mukaisille profiileille sijoittui 151 oppilasta eli 63,2 % kaikista niistä 239 oppilaasta, jotka osallistuivat kaikkien neljän van Hielen tason mittauksiin.



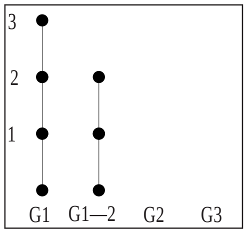
Kuvio 17. Niiden oppilaiden G-tasot, jotka van Hielen tasojen määrityksessä sijoittuivat tasolle vH0



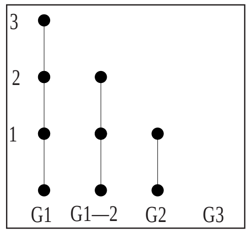
P5: 14 oppilasta



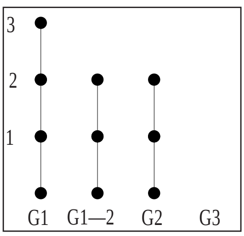
P6: 5 oppilasta



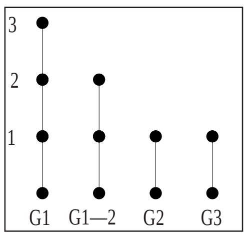
P7: 20 oppilasta



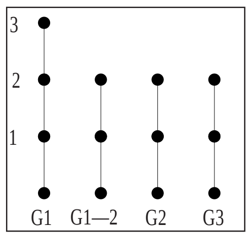
P8: 12 oppilasta



P9: 15 oppilasta

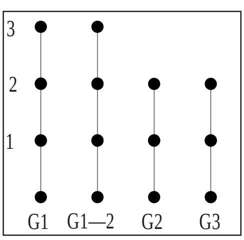


P10: 8 oppilasta

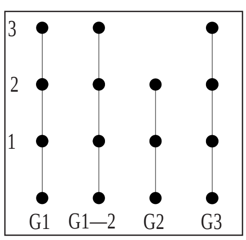


P11: 6 oppilasta

Kuvio 18. Niiden oppilaiden G-tasot, jotka van Hielen tasojen määrityksessä sijoittuivat tasolle vH1

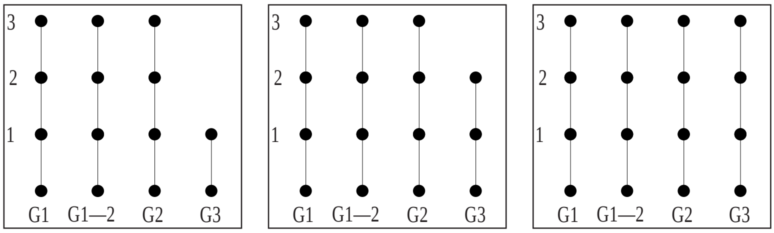


P12: 19 oppilasta



P13: 6 oppilasta

Kuvio 19. Niiden oppilaiden G-tasot, jotka van Hielen tasojen määrityksessä sijoittuivat tasolle vH1-2



P14: 5 oppilasta vH2 | P15: 5 oppilasta vH2 | P16: 6 oppilasta ≥vH3

Kuvio 20. Niiden oppilaiden G-tasot, jotka van Hielen tasojen määrityksessä sijoittuivat tasolle vH2, ≥ vH3 tai näitä korkeammalle

Profiilit 1, 5, 6, 7, 14, 15 ja 16 tukevat olettamusta vahvasta hierarkiasta, eivätkä poissulje heikon hierarkian mahdollisuutta. Kyseiset profiilit vastaavat 61 oppilaan suoritusta. Profiilit 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11 ja 12, jotka vastaavat 84 oppilaan suoritusta, viittaavat ennemminkin heikkoon hierarkiaan. Niiden perusteella näyttäisi siltä, että useammalle eri van Hielen tasolle tyypilliset geometrisen ajattelun muodot kehittyvät samanaikaisesti kuitenkin siten, että alemman van Hielen tason mukainen ajattelun kehitys on lähes poikkeuksetta (profiili 13) edellä tai vähintään samalla tasolla kuin sitä ylempien tasojen mukainen ajattelu.

Hierarkian olemassaoloa voidaan arvioida kvantitatiivisesti laskemalla todettujen hierarkiavirheiden avulla Guttmanin hierarkkisuusindeksi $REP = 1 - \frac{E}{L \times N}$ (coefficient of reproducibility), missä E on hierarkiavirheiden kokonaismäärä koko otoksessa, *N* otoskoko ja *L* tasojen lukumäärä. Hierarkiavirheiden kokonaismäärää määritettäessä on huomattava, että yksittäiseltä oppilaalta tutkittujen tasojen kriteerien ylittymisiä kuvaavassa jonossa voi esiintyä samalla kertaa useampiakin hierarkiavirheitä.

Niillä vuoden 1992 aineiston 239 oppilaalla, joilta kaikki neljä tasoa saatiin mitattua, tasojen 1, 1-2, 2 ja 3 hierarkiavirheitä esiintyi 40 oppilaalla eli 16,7 % oppilaista. Yhteensä hierarkiavirheitä esiintyi 54 kappaletta. Hierarkkisuusindeksin *REP* arvoksi saadaan 0,94, mikä ylittää Torgesonin (1967) hierarkiaoletuksen hyväksymisrajaksi ehdottaman 0,90. G-tasojen hierarkiavirheitä esiintyi 55 oppilaalla (23,0 %) yhteensä 79 kappaletta. Indeksin *REP* arvoksi saadaan 0,92, joka sekin ylittää kriittisen arvon 0,90. Jos taas hierarkiavirheiksi lasketaan kaikki ne tapaukset, missä vH1pros < vH1-2pros tai vH1-2pros < vH2pros tai vH2pros < vH3pros, hierarkiavirheitä esiintyy 109 oppilaalla yhteensä 162. Indeksin REP arvoksi saadaan tällöin vain 0,83 (< 0,90). Jos sallitaan 10 prosentin virhetoleranssi ja hierarkiavirheeksi lasketaan se, että alemman van Hielen tason osioiden prosentuaalinen suoritustaso on vähintään 10 % heikompi kuin sitä ylemmän van Hielen tason suoritustaso, niin hierarkiavirheitä esiintyi 33 oppilaalla yhteensä 40. Indeksi *REP* on tässä tapauksessa 0,96.

Havainnot eivät tue vahvan hierarkian olemassaoloa. Ilmeisesti joko tasojen operationaalistaminen ei ole mittavälineessä onnistunut tai tasojen struktuuri ei ole vahvan hierarkiaoletuksen mukainen. Jälkimmäinen vaihtoehto vaikuttaa todennäköisemmältä, kun muistaa, että Gutiérrez ym. (1991a) tekivät vastaavan havainnon toisentyyppisellä van Hielen tasojen mittavälineellä ja eri sisällöillä. Hierarkiaoletusta ei ole syytä kuitenkaan kokonaan hylätä. Erityisesti G-tasoista muodostuvien profiilien perusteella oletus heikon hierarkian olemassaolosta van Hielen tasojen välillä näyttää todennäköiseltä. On kuitenkin syytä muistaa, että G-tasojen tarkasteluissakin hierarkiavirheitä esiintyi noin neljäsosalla oppilaista.

6.4 van Hielen tasojen jakaumat

van Hielen tasot saatiin mitattua kaikkiaan 242 oppilaalle. Hierarkiavirhe eli tilanne, jossa oppilas ylitti tason 1-2, 2 tai 3 kriteerin ylittämättä kaikkia sitä alempien tasojen kriteerejä, esiintyi 40 (16,5 %) oppilaalla. Niiden 202 oppilaan, joilla ei esiintynyt hierarkiavirhettä, maksimaaliseksi van Hielen tasoksi katsottiin korkein taso, jonka kriteerin oppilas ylitti. Näiden oppilaiden maksimaaliset van Hielen tasot jakautuivat seuraavasti:

Taulukko 4. Tutkittujen peruskoulun yläasteen oppilaiden maksimaaliset van Hielen tasot keväällä 1992

Maksimaalinen van Hielen taso	Luokkataso						Sukupuoli				Kaikki	
	7		8		9		pojat		tytöt			
	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]
< 1	9	14,1	8	13,1	12	15,6	15	15,0	14	13,7	29	14,4
1	16	25,0	16	26,2	15	19,5	27	27,0	20	19,6	47	23,3
1-2	19	29,7	15	24,6	21	27,3	21	21,0	34	33,3	55	27,2
2	10	15,6	15	24,6	17	22,1	21	21,0	21	20,6	42	20,8
≥ 3	10	15,6	7	11,5	12	15,6	18	18,0	11	10,8	29	14,4
Yhteensä	64	100,0	61	100,0	77	100,0	100	100,0	102	100,0	202	100,0

Taulukoiden perusteella maksimaalisissa van Hielen tasoissa ei ole suuriakaan luokkatasokohtaisia eroja. Tästä näkökulmasta näyttäisi siis siltä, ettei oppilaiden geometrisessa käsitetiedossa yläasteen aikana tapahdu juurikaan kehittymistä. Näytteen pienestä koosta huolimatta yllätyksenä voidaan pitää sitä, että korkeimmalle mitatulle van Hielen tasolle yltäneissä on poikia (18) enemmän kuin tyttöjä (11). Vastaavasti kuitenkin myös toiseksi alimmalla tasolla poikia (27) on selvästi enemmän kuin tyttöjä. Geometrian hallinnassa pojilla hajontaa on tyttöjä enemmän, mutta keskimäärin hallinnan taso on hyvin samankaltainen kummallakin ryhmällä.

Seitsemäs- ja yhdeksäsluokkalaisten osalta tuloksia voidaan verrata aikaisempiin, vastaavantyyppisellä testillä saamiini (Silfverberg 1986) tuloksiin yhdistämällä van Hielen tasot 1 ja 1-2. Yhdistäminen on sikäli mielekästä, että oppilaat, jotka tässä tutkimuksessa sijoitettiin tasolle 1-2 olisivat vuoden 1986 tutkimuksessa noudatetuilla kriteereillä sijoittuneet tasolle 1. Vertailukelpoisiksi modifioituina van Hielen tasojen jakaumat olivat taulukossa 5 esitetyt.

Taulukko 5. Maksimaalisten van Hielen tasojen jakaumat 7.- ja 9.-luokkalaisilla oppilailla vuosien 1986 ja 1992 aineistoissa

	Maksimaalinen van Hielen taso			
	< 1	1	2	≥ 3
	f [%]	f [%]	f [%]	f [%]
7.-luokkalaiset				
v. 1986 aineisto (n = 24)	33,3	50,0	16,7	0,0
v. 1992 aineisto (n = 64)	14,1	54,7	15,6	15,6
9.-luokkalaiset				
v. 1986 aineisto (n = 24)	22,2	38,9	19,4	11,1
v. 1992 aineisto (n = 77)	15,6	46,8	22,1	15,6

Aineistojen tasojen jakaumat vastaavat melko hyvin toisiaan yhdeksäsluokkalaisten osalta. Seitsemäsluokkalaisten kohdalla jakaumissa esiintyy huomattavia eroja kategorioissa <1 ja ≥3. Erojen todennäköinen syy on aineistojen pienuus varsinkin vuoden 1986 tutkimuksessa. Jakaumatietoihin näin pienillä aineistoilla on kuitenkin suhtauduttava hyvin suurella varauksella. Esimerkiksi tässä tutkimuksessa vuoden 1992 aineiston perusteella yhdeksäsluokkalaisille saatu van Hielen tasojen jakauma poikkeaa huomattavasti siitä jakaumasta, joka saadaan tässä vaiheessa seitsemännellä luokalla olleiden oppilaiden uusintamittauksen tuottamasta aineistosta vuonna 1994. Näitä van Hielen tasojen muutoksia kahden vuoden seurantaperiodin aikana tarkastellaan tarkemmin seuraavassa luvussa.

Johtopäätöksinä aiemmasta tutkimuksestani (1986) ja tästä tutkimuksesta voidaan todeta seuraavat seikat:

1) Eri mittariversioilla mitaten jokaiselta yläasteen luokkatasolta näyttää löytyvän huomattava määrä oppilaita, jotka eivät yllä edes van Hielen tasolle 1 (visualisoinnin taso).

2) Yleensä enintään 15 % oppilaista millään yläasteen luokkatasolla yltää kolmannelle (ominaisuuksien järjestämisen tasolle) tai sitä ylemmälle van Hielen tasolle. Joka tapauksessa määrä on huomattavasti pienempi kuin lukio-opinnoissa jatkavien oppilaiden määrä ja näyttää selvästi alittavan lukion pitkän oppimäärän valitsevien oppilaidenkin määrän.

3) Enemmistö yläasteen oppilaista joka luokkatasolla on geometrisen ajattelun (geometrisen käsitetiedon) kehityksessään van Hielen tasojen 1 (visualisoinnin taso) ja 1-2 (empiiristen yleistysten taso) kuvaamassa vaiheessa.

6.5 van Hielen tasojen muutokset yläasteen aikana

Koska tutkimusasetelmaan sisältyi samojen oppilaiden van Hielen tasojen kehittymisen seuranta 7.-luokan keväältä vastaavaan ajankohtaan 9.-luokan keväälle, tutkimuksessa voitiin tarkastella oppilaiden van Hielen tasojen muuttumista kahden vuoden ajanjaksossa. Taulukkoon 6 on ristiintaulukoitu seurantajakson alussa sekä lopussa oppilaille määritetyt van Hielen tasot.

Taulukko 6. **Seurantatutkimukseen osallistuneiden oppilaiden (n = 85) van Hielen tasot keväällä 1992 ja 1994**

van Hielen taso keväällä 1992	van Hielen taso keväällä 1994: 0	1	1—2	2	≥ 3	Hierarkiavirhe	vH-taso puuttuu	Σ
0000	1	2	1	1	2	2	9	
1000		6	2	1	1	5	1	16
1100		6	4	2	4	1	2	19
1110		1	3	2	3		1	10
1111					10			10
Hierarkiavirhe	1	2	3	2	2		2	12
vH-taso puuttuu		1	3		1	4	—	9
Σ	2	18	16	8	21	12	8	85

Niistä 50 oppilaasta, joille van Hielen taso saatiin määritetyksi ilman hierarkiavirhettä sekä keväällä 1992 että keväällä 1994, oli van Hielen taso seurantajakson aikana alentunut 10 oppilaalla (20,0 %) ja noussut 17 oppilaalla (34,0 %). Seurantajakson päättyessä 23 oppilaalla (46,0 %) van Hielen taso oli sama kuin sen alkaessa. Kaikki ne kymmenen oppilasta, jotka seurantajakson alkaessa sijoittuivat korkeimmalle mitatulle van Hielen tasolle säilyttivät tasonsa. Näiden oppilaiden edistymisestä ei kattoefektin takia tällä mittausmenetelmällä saada muuta tietoa kuin se, ettei oppilaiden van Hielen taso ainakaan ollut laskenut.

7 Oppilaiden geometriset tietorakenteet

7.1 Tietorakenteiden tutkimuksen perusidea tässä tutkimuksessa

Käsitteiden välisten suhteiden ja oppilaille muodostuneiden tietorakenteiden tutkimus perustuu kahteen aineistoon. Yhtäältä geometriatestin G1 osiossa 5 oppilaat valitsivat annetuista esimerkkikuvioista ne, joita pitivät neliöinä, suorakulmioina, suunnikkaina, nelikulmioina ja monikulmioina, ja osiossa 6 annetuista kolmioista ne, joita pitivät suorakulmaisina, teräväkulmaisina, tylppäkulmaisina, tasakylkisinä ja tasasivuisina (vrt. liite 1). Toisaalta kuvioiden luokitteluaineistosta tehtyjä havainnot pyrittiin varmentamaan datalla, joka kertyi oppilaiden vastatessa geometriatestin G2 osioissa 5, 6 ja 7 esitettyihin erityyppisten ominaisuusyhdistelmien mahdollisuuksia koskeviin väitelauseisiin (vrt. liite 2). Näissä oppilaan oli otettava kantaa seuraavan tyyppisten väitelauseiden paikkaansa pitävyyteen (vrt. liite 2):

Osio G2/5A: Mikään kolmio ei voi olla yhtäaikaa tasakylkinen ja suorakulmainen.

Osio G2/6C: Jokainen suorakulmainen kolmio on myös teräväkulmainen.

Osio G2/7E: Mikään kuvio ei voi olla yhtäaikaa nelikulmio ja monikulmio.

Tarkastelemme jatkossa oppilaille nelikulmiokäsitteistä ja erilaisista kolmiotyypeistä muodostuneita tietorakenteita seuraavalta kolmelta näkökulmalta:

Ensiksi pyrin muodostamaan käsityksen siitä, minkä tyyppisiä ovat oppilaiden tiedonrakenteiden elementteinä toimivat yksittäiset käsitteet. Ydinkysymykseksi muodostuu tällöin se, missä määrin oppilaiden käsitteenmuodostusta voi pitää visuaalisten prototyyppien ohjaamana implisiittisenä käsitteenmuodostuksena ja missä määrin taas oppilaat kykenevät eksplisiittisesti reflektoimaan omia käsitteitään. Tässä yhteydessä tarkastelen ns. prototyyppiprosessien ja visuaalisen varioinnin osuutta oppilaiden käsitteenmuodostuksessa ja käsitteen määrittelyn merkitystä matemaattisen käsitteen rajauksessa.

Toiseksi tarkastelen sitä, kuinka hyvin oppilaat hallitsevat käsitteiden välisiä suhteita eli kyseisen tietorakenteen linkkejä, ja millaisia ovat yleisimmät käsitteiden välisiä suhteita koskevat virhetulkinnat, joita eri ryhmiin kuuluvilla oppilailla esiintyy.

Kolmanneksi pyrin löytämään yleisimmät tietorakennetyypit, joita oppilaat käyttävät luokitellessaan kuvioita. Tässä yhteydessä tarkastelemme myös sitä, missä määrin ne oppilaat, jotka näyttävät ymmärtävät matemaattisen määrittelyn idean käsitteiden täsmennyksessä, todella käyttävät käsitteiden määritelmiä hyväkseen käsitteiden välisiä suhteita selvitellessään.

Tietorakenteiden oppimisen tarkastelu toteutettiin sekä poikittais- että pitkittäistutkimuksena. Poikittaistutkimuksen luotettavuutta lisää aineiston laajuus (n = 240), mutta heikentää se, että eri luokkatasoilla olevien oppilasryhmien vertailu kohdistuu eri oppilaisiin. Poikittaistutkimukseen sisältyviä epävarmuustekijöitä pyritiin minimoimaan varmentamalla havainnot pitkittäistutkimuksena suppeammalla aineistolla (n= 73), joka saatiin toistamalla mittaus tutkimuksen alkaessa seitsemännellä luokalla olleiden oppilaiden osalta kaksi vuotta myöhemmin heidän ollessaan yhdeksännen luokalla.

7.2 Prototyyppiprosessit

Poikittaistarkastelut

Kumpaakin prototyyppiprosessia, prototyyppistä luokittelua ja karsinoivaa luokittelua, mitattiin kolmella osiolla, joissa kyseinen luokittelutyyppi joko ilmeni (1) tai ei ilmennyt (0). Summamuuttujat PROTEFF1 ja PROTEFF2 saivat näin ollen kumpikin kokonaislukuarvoja 0, 1, 2 tai 3. Mitä suurempi summamuuttujan arvo oli sitä voimakkaampana kyseinen luokittelutyyppi tuli esiin. Prototyyppistä luokittelua esiintyi jossain määrin noin joka kolmannella oppilaalla ja selvimmin joka kymmenellä oppilaalla. Vastaavasti karsinoivaa luokittelua esiintyi jossakin muodossa noin viidellä oppilaalla kuudesta ja karkeasti arvioiden kolmelle neljästä se oli tyypillistä.

Taulukko 7. Prototyyppisen ja karsinoivan luokittelun yleisyys tutkituilla oppilailla

Visuaalinen luokittelu (n = 245)			Karsinoiva luokittelu (n = 245)		
PROTEFF1	f	f [%]	PROTEFF2	f	f [%]
0	153	62,4	0	41	16,7
1	68	27,4	1	17	6,9
2	23	9,3	2	82	33,5
3	1	0,4	3	105	42,9

Ennakkoon oletettiin, että prototyyppinen ja karsinoiva luokittelu ovat itse asiassa saman figuraalisten käsitteiden muodostukselle tunnusomaisen ilmiön ilmentymiä eri konteksteissa. Kumpikin luokittelutyyppi on osoitus siitä, että oppilaan kuviotyypistä luomat visuaaliset mielikuvat ohjaavat käsitteenmuodostusta voimakkaammin kuin käsitteen propositionaalinen tarkastelu, kuten siihen liittyvät geometriset ominaisuudet ja näiden kautta tapahtuva käsitteen määrittely. Luokittelutyypit kytkeytyvät aineiston mukaan toisiinsa siten, että jos oppilas luokittelee selvästi prototyyppisesti (PROTEFF1 ≥ 2) niin hän luokittelee todennäköisesti myös karsinoivasti (PROTEFF2 ≥ 2). Karsinoivaa luokittelua esiintyy kuitenkin yleisesti (PROTEFF2 ≥ 2) myös oppilailla, joille prototyyppinen luokittelu ei ole tyypillistä (PROTEFF1 = 0).

Taulukko 8. Prototyyppisen ja karsinoivan luokittelun yhteys tutkituilla oppilailla (n = 245)

Visuaalinen luokittelu PROTEFF1	Karsinoiva luokittelu PROTEFF2			
	0	1	2	3
0	28	11	55	59
1	9	4	21	34
2	2	2	6	11
3	—	—	—	1

Prototyyppinen luokittelu oli tilastollisesti erittäin merkitsevästi yleisempää (varianssianalyysin F-ratio 14,7 ja F-prop. 0,0) niille 28 oppilaalle, jotka eivät yltäneet edes ensimmäiselle van Hielen tasolle, kuin niille oppilaille, jotka ylsivät van Hielen tasoille 1 (n = 47), 1-2 (n = 55), 2 (42) ja ≥3 (n = 29). Muuttujan PROTEFF1 keskiarvot nousevien van Hielen tasojen 0, 1, 1-2, 2, ≥3 mukaan lueteltuina olivat 1,18; 0,45; 0,27; 0,29 ja 0,31 ja vastaavat keskihajonnat 0, 86; 0,69; 0,49; 0,55 ja 0,60. Van Hielen tasoille 1-2, 2 ja ≥3 yltäneiden oppilaiden kohdalla prototyyppinen luokittelu oli kaiken kaikkiaan harvinaista.

Kummankaan luokittelutyypin yleisyydessä ei havaittu tilastollisesti merkitseviä eroja eri sukupuolten välillä (tytöillä PROTEFF1:n keskiarvo oli 0,43 ja keskihajonta 0,65, kun pojilla vastaavat arvot olivat 0,52 ja 0,72, tytöillä PROTEFF2:n keskiarvo oli 2,16 ja keskihajonta 1,06, sekä pojilla vastaavat arvot 1,89 ja 1,02). Prototyyppisen luokittelun yleisyydessä ei havaittu myöskään mainittavia luokkatasokohtaisia eroja. Karsinoiva luokittelu sen sijaan oli tilastollisesti erittäin merkitsevästi harvinaisempaa seitsemäsluokkalaisten keskuudessa (PROTEFF2:n keskiarvo 1,54 ja keskihajonta 1,16) kuin seitsemäs- ja kahdeksasluokkalaisten keskuudessa, joiden kesken ei tässä suhteessa havaittu eroja (8.-luokkalaisilla PROTEFF2:n keskiarvo 2,16 ja keskihajonta 0,99, 9.-luokkalaisilla vastaavat arvot 2,31 ja 0,96). Tämä selittynee sillä, että nelikulmioiden nimitykset luokkainkluusioneen oli kurssin mukaisesti kerrattu seitsemännellä luokalla. Oppiminen saattaa kuitenkin monen oppilaan kohdalla perustua ulkomuistin varaiseen faktatietoon eikä niinkään luokkainkluusion ymmärtämiseen, koska asia ylemmille luokille siirryttäessä näyttää unohtuvan ja alkeellisempi mutta ilmeisesti oppilaille luonnollisempi karsinoiva luokittelu valtaa alaa.

Pitkittäistarkastelut

Seurantatutkimuksen yhteydessä 73 oppilaalta selvitettiin prototyyppiprosessien ts. prototyyppisen luokittelun ja karsinoivan luokittelun voimakkuutta. Prototyyppistä luokittelua (PROTEFF1 ≥ 1) todettiin seurantajakson alussa 25 seitsemäsluokkalaisella (34,2 %). Näistä oppilaista vain neljällä (5,5 %) prototyyppistä luokittelua esiintyi yhdeksännellä luokalla eli seurantajakson lopussa. Niistä 48 oppilaasta (65,8 %), joilla prototyyppistä luokittelua ei havaittu seitsemäsluokkalaisina, sitä ilmeni kaksi vuotta yhdeksäsluokkalaisina (21,9 %), tosin viidellätoista vain yhden osion yhteydessä kullakin. Näyttää siis siltä, että yläasteen aikana prototyyppinen luokittelu käy ennemminkin harvinaisemmaksi kuin yleistyy.

Taulukko 9. Prototyyppisen luokittelun esiintyminen tasokuvioiden luokittelutehtävissä oppilaiden ollessa seitsemännellä luokalla (v. 1992) ja yhdeksännellä luokalla (v. 1994)

	Kuvioiden prototyyppisen luokittelun esiintyvyys (n, oppilaiden lkm) 9. luokalla				
7. luokalla	Ei lainkaan[1]	Jonkin verran[2]	Systemaattisesti[3]	Yhteensä	
Ei lainkaan[1]	32	16	0	48	(65,8)
Jonkin verran[2]	21	3	0	24	(32,9)
Systemaattisesti[3]	0	1	0	1	(1,3)
Yhteensä	53	20	0	73	
	(72,6)	(27,4)	(0,0)		(100,0)

[1]PROTEFF1 = 0, [2]PROTEFF1 = 1 tai 2, [3]PROTEFF1 = 3

Laajempi poikittaistarkasteluaineisto antoi olettaa karsinoivan luokittelun (PROTEFF2) yleistyvän yläasteen aikana. Seurantatutkimuksen aineisto ei tällaista oletusta tue. Karsinoiva luokittelun yleisyydessä ei yläasteen aikana näytä tapahtuvan isoja muutoksia. Siirtymisiä väärästä tulkinnasta oikeaan tulkintaan havaittiin jokseenkin yhtä paljon kuin siirtymisiä päinvastaiseen suuntaan. 34 oppilaalla (46,6 %) suhtautumisessa luokkainkluusioon ei tapahtunut muutosta suuntaan eikä toiseen.

Taulukko 10. **Karsinoivan luokittelun esiintyminen tasokuvioiden luokittelutehtävissä oppilaiden ollessa seitsemännellä luokalla (v. 1992) ja yhdeksännellä luokalla (v. 1994)**

	Karsinoivan luokittelun esiintyvyys (n oppilaiden lkm) 9. luokan lopussa				
7. luokan lopussa	Ei lainkaan[1]	Jonkin verran[2]	Systemaattisesti[3]	Yhteensä	
Ei lainkaan[1]	9	10	4	23	(31,5)
Jonkin verran[2]	11	17	5	33	(45,2)
Systemaattisesti[3]	3	6	8	17	(23,3)
Yhteensä	23	33	17	73	
	(31,5)	(45,2)	(23,3)		(100,0)

[1]PROTEFF1 = 0, [2]PROTEFF1 = 1 tai 2, [3]PROTEFF1 = 3

7.3 Visuaalinen variointi

Poikittaistarkastelut

Kuten edellä todettiin tässä työssä käsitteen visuaalisella varioinnilla tarkoitetaan yksilön kykyä luoda tarkoituksellisesti mielikuvia erilaisista käsitteen alaan kuuluvista esimerkkitapauksista siten, että tähän käsitteeseen liittyvää muodon tai muiden geometristen ominaisuuksien vaihtelua voidaan hallita kuvittelemalla. Geometriatesteistä testi G2 suunniteltiin mittaamaan oppilaan visuaalisen varioinnin kykyä tavanomaisten kolmio- ja nelikulmiokäsitteiden osalta. Visuaalisen varioinnin indeksinä käytettiin testin G2 oikein suoritettujen osioiden lukumäärää koodaamalla kukin osio dikotomisesti joko oikein (1) tai väärin (0) suoritetuksi. Maksimipistemäärä näin muodostetulle muuttujalle oli 54 ja Cronbachin α-kerroin 0,53.

Visuaalisessa varioinnissa ei ollut mainittavia eroja eri luokkatasojen kesken, kuten alla olevasta taulukosta voi todeta.

Taulukko 11. **Visuaalisen varioinnin taito (maksimi 54) eri luokkatasoilla**

Luokkataso		Visuaalinen variointi/ testin G2 kokonaispistemäärä keskiarvo	keskihajonta
7. lk	(n = 75)	35,8	6,2
8. lk	(n = 75)	34,7	5,1
9. lk	(n = 91)	35,8	5,0
Kaikki	(n = 241)	35,5	5,4

Sen sijaan visuaalisen varioinnin taito näytti lisääntyvän van Hielen tason kohotessa.

Taulukko 12. Visuaalisen varioinnin taito (maksimi 54) eri van Hielen tasoilla

van Hielen taso		Visuaalinen variointi/ testin G2 kokonaispistemäärä keskiarvo	keskihajonta
0	(n = 28)	32,6	4,2
1	(n = 47)	32,9	4,2
1-2	(n = 55)	34,6	3,5
2	(n = 42)	36,7	4,8
≥ 3	(n = 29)	42,1	5,2

Visuaalisen varioinnin taidon yhteys oppilaan van Hielen tasoon on osaksi testien rakenteesta johtuvaa, sillä vH-tasoilla pyritään ensisijaisesti kuvaamaan juuri geometrisen käsitetiedon oppimisprosessia. Esimerkkikuvioiden generointi mielikuvien tasolla on visualisointiin perustuva keino, jolla oppilas voi koetella hypoteesejaan käsitteiden välisten suhteiden luonteesta. Visuaalinen variointitaito kytkeytyy läheisesti siihen missä määrin oppilaan käsitteenmuodostus on prototyyppistä ja visuaalisten mielikuvien ohjaamaa ja missä määrin puolestaan analyyttistä määritelmätietouden ohjaamaa. Prototyyppinen sumea käsitteenmuodostus näyttää kytkeytyvän visuaalisen variointitaidon rajoittuneisuuteen (korrelaatio visuaalisen varioinnin ja karsinoivan luokittelun välillä oli -0,37, p = 0,00) ja vastaavasti kehittyneempi käsitteenmuodostus tehokkaampaan visuaaliseen variointitaitoon (korrelaatio visuaalisen varioinnin ja seuraavassa luvussa tarkemmin esiteltäviä määrittelytaitoja kuvaavan muuttujan TOTDEF välillä oli 0,48, p = 0,00).

Pitkittäistarkastelut

Seurantatutkimuksen aineiston mukaan visuaalisen varioinnin taito oli oppilailla (n = 72) yleensä ennemminkin kehittynyt kuin taantunut mittausten välisenä kahtena vuotena. Visuaalisen varioinnin testin keskiarvoksi oppilaiden ollessa seitsemäsluokkalaisia saatiin 0,68 (k-haj. 0,12) ja oppilaiden ollessa yhdeksäsluokkalaisia 0,74 (k-haj. 0,11). Korrelaatio visuaalisen varioinnille seurantajakson alussa ja lopussa mitattujen testipistemäärien välillä oli lähes nolla r = .05 (p = 0,67), joten muutoksia suuntaan ja toiseen tapahtui runsaasti.

7.4 Määrittelytaidot

Poikittaistarkastelut

Oppilaiden käsitys määritelmästä osoittautui yleisesti hyvin kehittymättömäksi, mikä näkyi mm. siinä, että selvä enemmistö oppilaista kaikilla van Hielen tasoilla hyväksyi suorakulmion määritelmäksi triviaalit luonnehdinnat

> F: *Suorakulmio on yksi geometrisista peruskuvioista,* ja
> H: *Suorakulmio näyttää venytetyltä neliöltä.*

Yleistä oli myös neliön ja suorakulmion toisensa poissulkeva, mahdollisesti prototyyppisen mielikuvan ohjaama, määrittely vaihtoehdon J mukaisesti:

> J: *Suorakulmio on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria ja vierekkäiset sivut ovat eripituiset.*

Listamääritelmä, jossa pyritään kertomaan kaikki mahdollinen käsitteestä vaihtoehdon

> I: *Suorakulmiossa on neljä suoraa kulmaa, neljä suoraa sivua, kaksi yhtä pitkää lävistäjää, vastakkaiset sivut yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset*

tapaan, kelpuutettiin yleisesti suorakulmion määritelmäksi. Erityisesti ylemmillä van Hielen tasoilla tämä oli havaittavissa. Suorakulmion tavanomaisen määritelmän

> G: *Suorakulmio on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria,*

kelpuuttaminen määritelmäksi kävi sitä yleisemmäksi mitä korkeampaa van Hielen tasoa tarkasteltiin. Vaihtoehto

> K: *Suorakulmio on monikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset*

oli huonosti muotoiltu. Oppilaiden vastauksista oli vaikea jälkikäteen tietää, kuinka monelta tämän vaihtoehdon kelpuuttaneista jäi huolimattoman lukemisen seurauksena kokonaan huomaamatta se, ettei lauseessa suorakulmiota rajata nelikulmioksi ja kuinka moni todella piti sitä epäoleellisena rajauksena. Taulukosta 13 saa tarkemman kuvan siitä, miten eri van Hielen tasoilla olleet oppilaat suhtautuivat annettuihin vaihtoehtoihin.

Taulukko 13. **Oppilaat (f%), jotka kelpuuttivat geometriatestin G4 osiossa 7 esitetyt vaihtoehdot suorakulmion määritelmäksi, van Hielen tasoittain**

	van Hielen taso				
Vaihtoehto	0 (n = 29)	1 (n = 45)	1-2 (n = 56)	2 (n = 44)	≥3 (n = 28)
F	65,5	62,2	69,6	77,3	71,4
G	41,4	44,4	69,6	81,8	100,0
H	62,1	62,2	73,2	72,2	60,7
I	63,5	51,1	58,9	88,6	92,9
J	41,4	51,1	73,2	72,7	42,9
K	17,2	24,4	32,1	27,3	35,7

Sukupuolien väliset erot olivat määritelmätyypin valinnan suhteen muutoin vähäisiä, mutta oppikirjoissa esitettävän suorakulmion määritelmän G pojat kelpuuttivat tyttöjä useammin suorakulmion määritelmäksi ja listamäärittely I oli tyypillisempää tytöille kuin pojille.

Yleisesti voidaan todeta, ettei oppilaiden käsitteen määrittelytaito näytä ainakaan kehittyvän yläasteen aikana. Ennemminkin on havaittavissa taantumista. Luokkatason kohotessa oikea määritelmätyyppi G kelpuutetaan suorakulmion määritelmäksi yhä harvemmin. Listamäärittelyn J kannatus sen sijaan yleistyy.

Taulukko 14. **Oppilaat (f%), jotka kelpuuttivat geometriatestin G4 osiossa 7 esitetyt vaihtoehdot suorakulmion määritelmäksi, luokkatasoittain ja sukupuolittain**

	Luokkataso			Sukupuoli		Kaikki
	7.	8.	9.	Pojat	Tytöt	
Vaihtoehto	(n = 77)	(n = 74)	(n = 93)	(n = 129)	(n = 115)	(n = 244)
F	74,0	68,9	65,6	71,3	67,0	69,3
G	76,6	63,5	61,3	70,5	62,6	66,8
H	68,8	63,5	67,7	66,7	67,0	66,8
I	68,8	68,9	71,0	69,8	69,6	69,7
J	51,9	55,4	60,2	51,2	61,7	56,l
K	29,9	21,6	25,8	29,5	21,7	25,8

Oppilailta kysyttiin myös, mikä esitetyistä vaihtoehdoista F, G, H, I, J vai K olisi heidän mielestään paras suorakulmion määritelmäksi. Taulukossa 15 on esitetty valintojen jakautuminen eri vaihtoehtojen kesken luokkatasoittain, sukupuolen mukaan sekä sen mukaan ylittyikö vastaajalla van Hielen tason mittauksessa tason vH3 kriteeri vaiko ei.

Taulukko 15. **Suorakulmion määritelmäksi parhaiten sopivaksi katsotun vaihtoehdon kannatuksen yhteys oppilaan luokkatasoon, sukupuoleen ja van Hielen tason 3 kriteerin ylittymiseen.**

	Luokkataso			Sukupuoli		vH3:n kriteeri	
	7.	8.	9.	Pojat	Tytöt	ylittyi	ei ylitt.
Vaihtoehto	(n = 66)	(n = 62)	(n = 85)	(n = 106)	(n = 107)	(n = 35)	(n = 178)
F	10,6	6,5	11,8	8,4	8,4	0,0	11,8
G	10,6	11,3	5,9	8,5	9,3	20,0	6,7
H	15,2	11,3	10,6	14,2	10,3	5,7	13,5
I	47,0	59,7	56,5	55,7	53,3	65,7	52,2
J	16,7	9,7	12,9	9,4	16,8	8,6	14,0
K	0,0	1,6	2,4	0,9	1,9	0,0	1,7

Erot luokkatasoittain olivat vähäiset. Myös tyttöjen ja poikien vastaukset olivat hyvin samantyyppiset. Kullakin luokkatasolla noin puolet oppilaista piti parhaana määritelmänä listamääritelmää I. Vain harvat oppilaat valitsivat oppikirjoissa normaalisti esiintyvän määritelmän G parhaaksi. van Hielen tason määrityksessä tason 3 kriteerin ylittäneistäkin vain joka viides oppilas valitsi vaihtoehdon G. *Ne geometrisen ajattelun piirteet, jotka käytetyssä van Hielen tasojen mittarissa ovat kriteereinä tasolle 3 eivät tämän aineiston perusteella näytä kehittyvän samaa tahtia määritelmän idean ymmärtämisen kanssa, vaikka näin yleensä on otaksuttu.*

Oppilaat, joiden matematiikan taidot yleensäkin olivat heikot (kevättodistuksen arvosana 5 tai 6, oppilaita 41) valitsivat parhaaksi määritelmäksi yleensä joko jommankumman naiiveista vaihtoehdoista F ja H (46,3 %) tai sitten listamääritelmän I (34,1 %). Heikoimmista oppilaista vaihtoehdon G valitsi vain 4,9 %. Tyydyttävän arvosanan (7 tai 8) saaneista 76 oppilaasta puolet (50,0 %) pitivät parhaana määritelmätyyppinä listamäärittelyä. Muut vaihtoehdot olivat likimain yhtä suosittuja. Määritelmätyypin G valitsi parhaaksi 7 (9,2 %) tämän ryhmän oppilasta. Nekin oppilaat, joiden arvosana oli kiitettävä (9 tai 10) valitsivat ylivoimaisesti yleisimmin listamäärittelyn parhaaksi (67,4%). Noin joka kymmenes (10,5 %) tämän ryhmän oppilaista piti standardimääritelmää G parhaana.

Määrittelytaidon testaamiseen suunniteltujen G4-testin osioiden 5, 6, 8, 9A ja 9B perusteella muodostettiin dikotomiset muuttujat OSIO5, OSIO6, OSIO8 ja DEF1 sekä DEF2. Kullekin muuttujalle annettiin arvo 1, jos oppilas oli vastannut sitä vastaavaan osioon oikeaksi katsotulla tavalla (osioon 5 ACE, BE tai CE, osioon 6 AD, AE, CE, tai CD, osioon 8 G ja osioihin 9A ja 9B määritelmällä, joka tutkijan arvion mukaan täsmensi käsitteen oikein ja osoitti määritelmän idean ymmärrystä) ja muutoin arvo 0. Tämän jälkeen muodostettiin summamuuttuja TOTDEF = OSIO5 + OSIO6 + OSIO8 + DEF1 + DEF2, jonka arvot voivat siis vaihdella joukossa 0, 1, … ,5.

Määrittelytaidolla ja oppilaan van Hielen tasolle todettiin tilastollisesti erittäin merkitsevä yhteys (χ^2 = 55,398, df = 20, p = 0,0004). Alimmille van Hielen tasoille sijoittuneet oppilaat kykenivät kuvioiden määrittelyyn selvästi heikommin kuin ylemmille van Hielen tasoille sijoittuneet oppilaat. Todettava kuitenkin on, että myös osalle van Hielen tason 3 kriteerin ylittäneistä oppilaista kuvioiden määrittely tuotti suuria vaikeuksia.

Taulukko 16. Määrittelytaidon (TOTDEF) yhteys van Hielen tasoon

	van Hielen taso				
TOTDEF	0 (n = 24)	1 (n = 39)	1-2 (n=49)	2 (n = 42)	≥ 3(n = 29)
0	62,5	53,8	34,7	26,2	17,2
1	20,8	30,8	32,7	33,7	10,3
2	16,7	15,4	26,5	19,0	27,6
3	0,0	0,0	6,1	14,3	24,1
4	0,0	0,0	0,0	7,1	17,2
5	0,0	0,0	0,0	0,0	3,4

Luokkatasoittain ja sukupuolen mukaan tarkasteltuina erot määrittelytaidossa osoittautuivat pieniksi eivätkä olleet tilastollisesti merkitseviä. Useimmille oppilaille määrittelyosiot olivat vaikeita. Kaikissa osaryhmissä oikein suoritettujen määrittelyosioiden mediaani oli 1 osio ja vaihteluväli joko 0—4 tai 0—5 osiot.

Taulukko 17. Määrittelytaito (TOTDEF) luokkatason ja sukupuolen mukaan

	Luokkataso			Sukupuoli		
	7.	8.	9.	Pojat	Tytöt	Kaikki
TOTDEF	(n = 68)	(n = 66)	(n = 85)	(n = 112)	(n = 107)	(n = 219)
k.-arvo	1,04	1,17	1,12	1,13	1,08	1,11
k.-haj.	1,18	1,06	1,22	1,20	1,11	1,16

Matematiikan osaamistasolla ja kuvioiden määrittelykyvyllä oli selvä tilastollinen yhteys (χ^2 = 53,0420, df = 25, p = 0,0004), jonka voi todeta silmämääräisestikin oheen liitetystä taulukosta.

Taulukko 18. Määrittelytaidon (TOTDEF) yhteys matematiikan kouluarvosanaan

	Oppilaan matematiikan arvosana					
TOTDEF	5 (n = 18)	6 (n = 27)	7 (n = 30)	8 (n = 48)	9 (n = 65)	10 (n = 30)
0	72,2	55,6	63,3	37,5	27,7	10,0
1	11,1	33,3	23,3	31,3	29,2	26,7
2	16,7	11,1	13,3	22,9	24,6	23,3
3	0,0	0,0	0,0	8,3	13,8	20,0
4	0,0	0,0	0,0	0,0	4,6	16,7
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,3

Pitkittäistarkastelut

Seurantatutkimuksessa useimpien oppilaiden suhtautuminen tarjottuihin suorakulmion määritelmävaihtoehtoihin oli samanlainen kahden vuoden seurantajakson alussa ja lopussa (vrt. taulukko 19). Eniten muuttui oppilaiden suhtautuminen listamäärittelyyn (vaihtoehto I). Peräti 19 niistä 24 oppilaasta (79,2 %), jotka eivät kelpuuttaneet listamääritelmää suorakulmion määritelmäksi ollessaan seitsemännellä luokalla hyväksyi sen kuitenkin yhdeksännellä luokalla. Vastaavasti kylläkin lähes joka viides niistä oppilaista, jotka pitivät listamääritelmää sopivana suorakulmion määritelmäksi seitsemäsluokkalaisena hylkäsi sen yhdeksäsluokkalaisena. Prototyyppiseen määrittelyyn suhtauduttiin hieman kielteisemmin yhdeksännellä luokalla verrattuna siihen, miten siihen oli suhtauduttu seitsemännellä luokalla.

Taulukko 19. **Oppilaiden suhtautuminen suorakulmion määritelmäksi tarjottuihin vaihtoehtoihin kahden vuoden seurantajakson alussa sekä lopussa.**

	Niiden oppilaiden suhteellinen osuus (%), jotka		
	suhtautuivat vaihtoehtoon samoin seurantajakson	kelpuuttivat vaihtoehdon määritelmäksi seurantajakson	
Vaihtoehto	alussa sekä lopussa	alussa	lopussa
F	67,6	74,0	77,9
G	66,2	76,6	74,0
H	58,8	68,8	68,8
I	62,3	68,8	80,5
J	58,5	51,9	46,8
K	59,7	29,9	28,6

Seurantatutkimuksessa oppikirjatyyppisen määritelmän G valitsi oppilaista 7.-luokkalaisina parhaaksi määritelmävaihtoehdoksi 6 oppilasta (10,5 %) ja kaksi vuotta myöhemmin 10 oppilasta (17,5 %). Samoin listamääritelmän I kannatus kasvoi edelleen, 7.-luokkalaisena sen valitsi parhaaksi määritelmätyypiksi 26 oppilasta (45,6 %) ja 9.-luokkalaisena 31 oppilasta (54,4 %). Naiiveja määritelmävaihtoehtoja F ja H valittiin parhaaksi määritelmäksi yhä harvemmin. Pitkälle menevien johtopäätösten teko aineisto on kuitenkin uskaliasta, sillä seurantatutkimukseen osallistuneiden oppilaiden lukumäärä oli pieni ja myös siirtymisiä kehittyneemmistä määritelmävaihtoehdoista naiiveimpiin vaihtoehtoihin päin tapahtui runsaasti (taulukon alakolmio). Yksikään niistä viidestä oppilaasta, jotka pitivät seurantajakson alussa parhaana määritelmänä vaihtoehtoa G, eivät valinneet sitä parhaaksi vaihtoehdoksi enää seurantajakson lopussa.

Taulukko 20. **Suorakulmion määritelmäksi parhaiten sopivaksi katsottu vaihtoehto kahden vuoden seurantajakson alussa sekä lopussa**

7.-luokan lopulla	Parhaana pidetty määritelmävaihtoehto 9.-luokan lopulla					
	F tai H	J	I	G	Yhteensä	
F tai H	4	3	5	3	15	(26,3)
J	3	1	4	2	10	(17,5)
I	2	2	17	5	26	(45,6)
G	1	0	5	0	6	(10,5)
Yht.	10	6	31	10	57	(100,0)
	(17,5)	(10,5)	(54,4)	(17,5)	(100,0)	

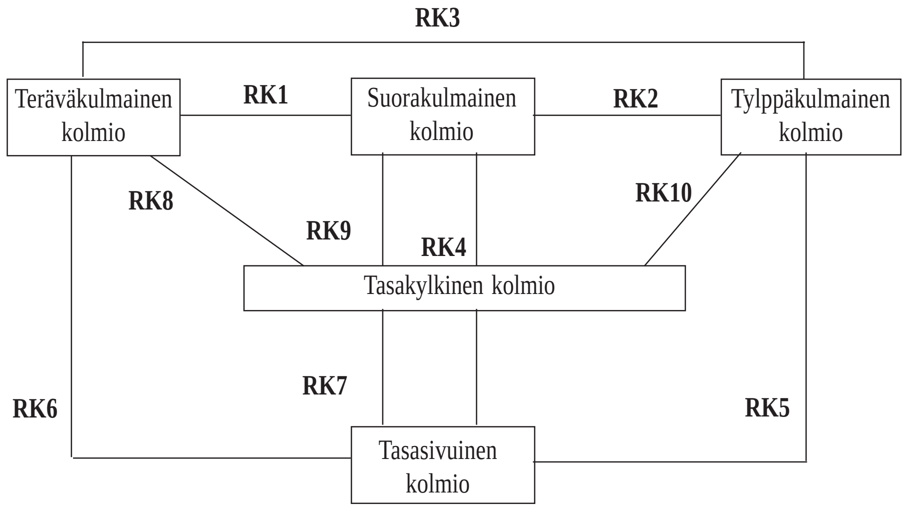
Kun oppilaiden määrittelytaitojen kehitystä tarkastellaan kaikkien testiin G4 sisältyneiden viiden määrittelyosion perusteella, voidaan näissä taidoissa todeta edellistä selvemmin kehittymistä. Vuonna 1992 kerätyssä aineistossa muuttujan TOTDEF keskiarvo oli 1,07 ja keskihajonta 1,07 ja vuonna 1994 kerätyssä aineistossa vastaavasti keskiarvo 2,03 ja keskihajonta 1,38. Keskiarvot poikkeavat toisistaan tilastollisesti erittäin merkitsevästi (t-arvo 6,63, df = 60).

7.5 Käsitteiden välisten suhteiden tulkinnat

7.5.1 Kolmiotyyppien väliset käsitesuhteet

Poikittaistarkastelut

Testin G1 osioissa 6 a)—e) oppilaalta kysyttiin, mitkä kymmenestä esimerkkikolmiosta ovat suorakulmaisia, teräväkulmaisia, tylppäkulmaisia, tasakylkisiä ja tasasivuisia. Luokittelujen perusteella tutkittiin kymmentä kolmiotyyppien välistä kuviossa 21 havainnollistettua käsitesuhdetta RK1-RK10.



Kuvio 21. Kolmiotyyppien tasasivuinen kolmio, tasakylkinen kolmio, teräväkulmainen kolmio, suorakulmainen kolmio ja tylppäkulmainen kolmio väliset käsitesuhteet RK1—RK10

Oppilaan kullekin käsitesuhteelle antamia tulkintoja on periaatteessa viisi mahdollista (Sternberg ym. 1980, 221; vrt. myös luku 3.1.6 kuvio 5). Näitä viittä tulkintaa merkitään jatkossa esitettävissä kaavioissa seuraavin symbolein:

E: **Ekvivalenssi**. Samat kuviot luokitellaan A:ksi ja B:ksi.

L: **Leikkaus**. A voi olla B ja B voi olla A. Osa kuvioista luokitellaan A:ksi mutta ei B:ksi, osa B:ksi mutta ei A:ksi ja osa sekä A:ksi että B:ksi.

D: **Disjunktiivinen, poissulkeva luokitus**. A ei voi olla B. Jos kuvio luokitellaan A:ksi, niin sitä ei voi luokitella B:ksi.

I: **Aito luokkainkluusio**. A on aina B. Jos kuvio luokitellaan A:ksi, niin se luokitellaan aina myös B:ksi. Kaikkia B:ksi luokiteltuja kuvioita ei luokitella A:ksi.

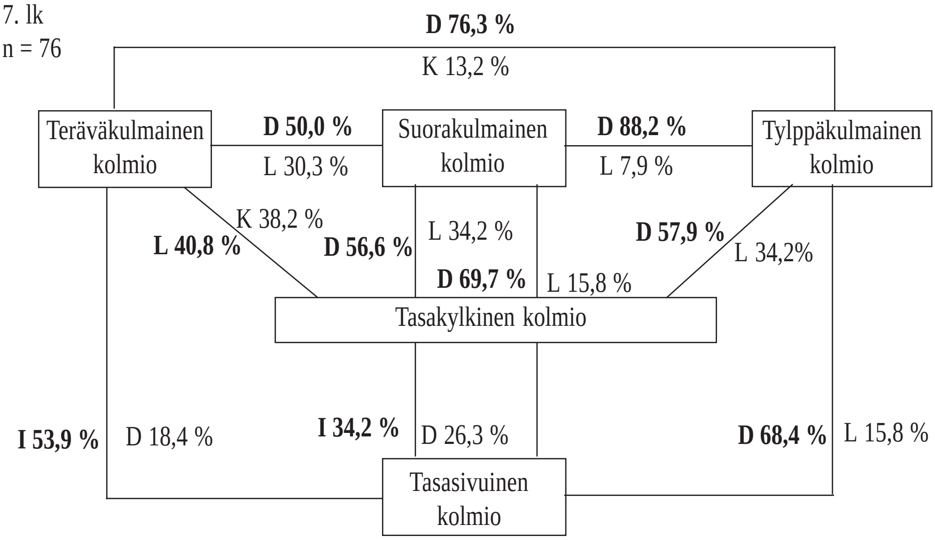
K: **Käänteinen luokkainkluusio**. B on aina A. Jos kuvio luokitellaan B:ksi, niin se luokitellaan aina myös A:ksi.

Liitteessä 8 on esitetty esimerkki tilasto-ohjelman SPSS PAD-tiedostosta, jonka mukaisesti oppilaan kullekin käsitesuhteelle antama tulkinta tunnistettiin testin G1 luokitteluosioiden vastauksista. Merkillepantavaa on, että tulkinnan tyypityksessä ei kiinnitetä huomiota siihen, ovatko kuviot objektiivisessa mielessä oikein tunnistettuja vaiko eivät. Tarkasteltavina ovat nimenomaan oppilaan itsensä kuviotyypeille liittämien merkitysten keskinäiset suhteet. Jos siis oppilas luokittelee kaikki tasasivuisina pitämänsä kolmiot myös teräväkulmaisiksi kolmioiksi, hänen käsitejärjestelmässään tasasivuisten kolmioiden ja teräväkulmaisten kolmioiden välinen relaatio on luokkainkluusio; myös siinä tapauksessa, että osa kuvioista ei ole toisen tai kummankaan käsitteen mukaisesti oikein luokiteltu.

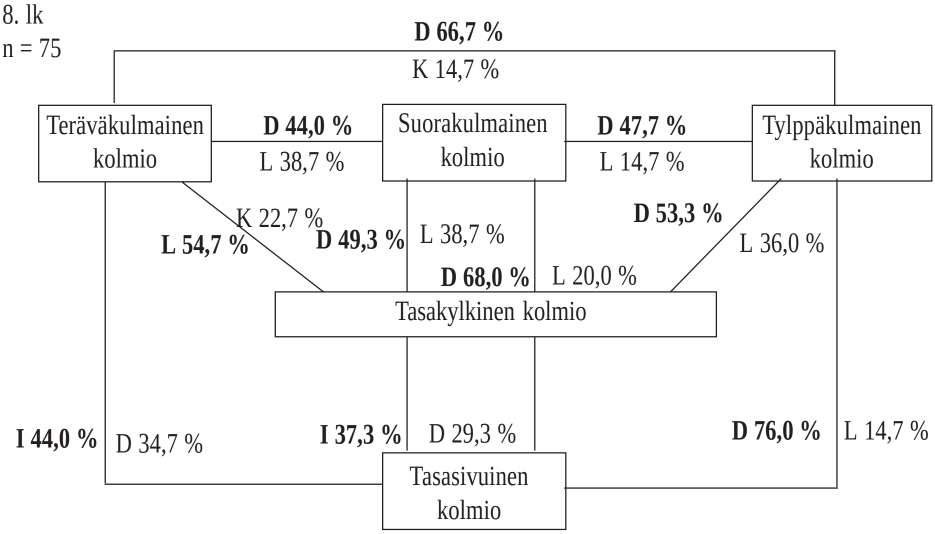
Seuraavissa kaavioissa esitetään kaksi yleisimmin esiintynyttä käsitesuhteiden RK1—RK10 tulkintaa (E, D, L, I tai K) luokkatasoilla 7, 8 ja 9. Yleisimmin esiintyneen tulkinnan suhteellinen frekvenssi on merkitty kuvan tekstiin lihavoituna. Normaalitekstillä esitetty prosenttiluku viittaa toiseksi yleisintä tulkintaa vastaavaan suhteelliseen frekvenssiin.

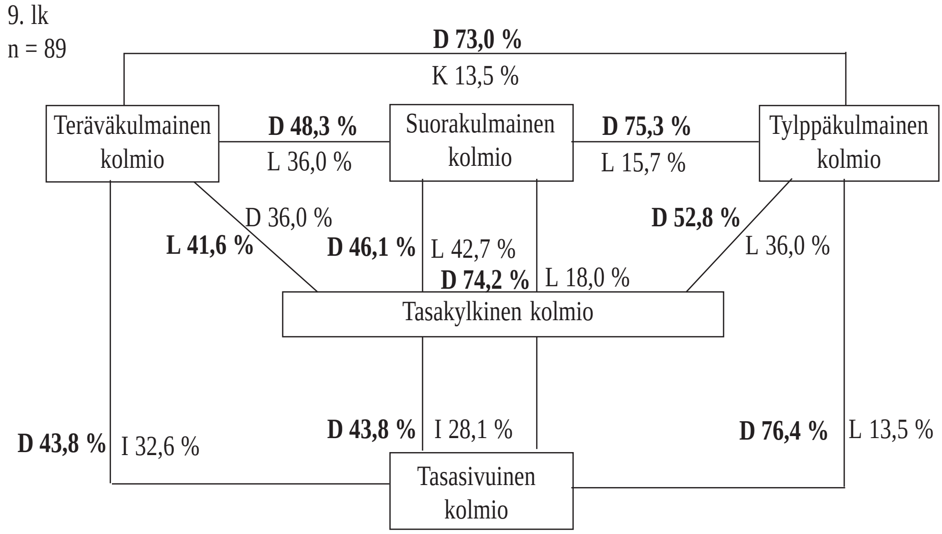
Käytännön opetustyössäni olen usein todennut, miten yläasteen oppilaat tulkitsevat, että kolmion teräväkulmaisuuteen riittää jo yhdenkin kolmion kulman terävyys, jolloin itse asiassa kaikki kolmiot olisivat teräväkulmaisia. Samansuuntainen prototyyppiseen käsitteenmuodostukseen liittyvä teräväkulmaisuuden kriteeri on se, että kolmion yhdeltä kulmalta edellytetään subjektiivisen

7. lk
n = 76



8. lk
n = 75





Kuvio 22. Kaksi yleisimmin esiintynyttä kolmiotyyppien välisten käsitesuhteiden tulkintaa luokkatasoilla 7, 8 ja 9

arvion mukaisesti "erityistä terävyyttä". Tällainen teräväkulmaisuuden tulkinta tuli ilmi tässäkin aineistossa. Monet oppilaat kaikilla luokka-asteilla pitivät eräitä suorakulmaisia kolmioita teräväkulmaisina todennäköisesti juuri siitä syystä, että niissä oli yksi kulma "erityisen terävä". Käsitesuhteiden RK1, RK2 ja RK3 (kolme ylintä kuvion 22 kaavioissa) yhteydessä esiintyy suhteellisen runsaasti tulkintaa L. Seitsemännellä ja kahdeksannella luokalla noin joka seitsemäs oppilas luokitteli kaikki tylppäkulmaisiksi katsomansa kolmiot myös teräväkulmaisiksi (tulkinta K), jonka taustalla mitä todennäköisimmin on edellä kuvattu virheellinen käsitys teräväkulmaisuudesta.

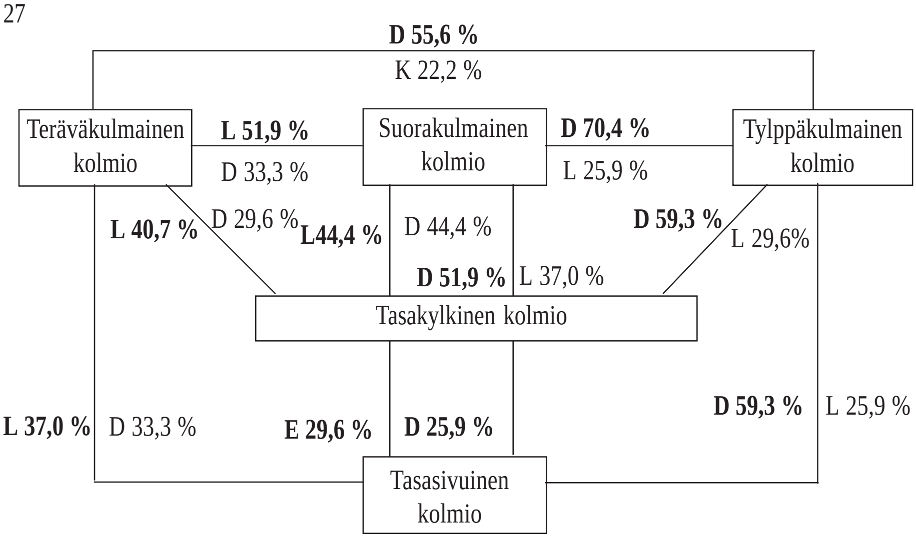
Enin osa oppilaista eli noin kolme oppilasta neljästä piti tylppäkulmaisuutta ja suorakulmaisuutta sekä vastaavasti tylppäkulmaisuutta ja teräväkulmaisuutta toisensa poissulkevina ominaisuuksina (tulkinta D). Teräväkulmaisuutta ja suorakulmaisuutta piti kuitenkin vain noin puolet oppilaista toisensa poissulkevina ominaisuuksina. Luokkatasoittain näissä tulkinnoissa ei esiintynyt mainittavia eroja.

Karkeasti ottaen noin puolet oppilaista joka luokkatasolla luokitteli jotkut kolmiot sekä tasakylkisiksi että teräväkulmaisiksi (RK8:n tulkinta L), mutta enin osa oppilaista vältti saman kolmion luokittelua sekä tasakylkiseksi että suorakulmaiseksi tai tasakylkiseksi sekä tylppäkulmaiseksi (RK9:n ja RK10:n tulkinta D). Noin joka kymmenes oppilas kullakin luokka-asteella luokitteli samat kolmiot tasakylkisiksi ja tasasivuisiksi (tulkinta E). Noin kolmannes oppilaista kullakin luokkatasolla luokitteli tasasivuisen kolmion myös tasakylkiseksi (tulkinta I). Tasasivuista kolmiota piti teräväkulmaisena noin puolet seitsemäsluokkalaisista mutta vain noin kolmannes kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisista. Tasasivuisuuden ja tylppäkulmaisuuden välinen relaatio hallittiin joka luokalla melko hyvin. On tosin huomattava, että niitä relaatioita koskevia tulkintoja, joissa relaation toisena osapuolena on joko tasakylkisyys tai tasasivuisuus saattaa jonkin verran vääristää se, että joillekin oppilaille kolmion tasakylkisyys ja tasasivuisuus sekoitetaan ominaisuuksina toisiinsa.

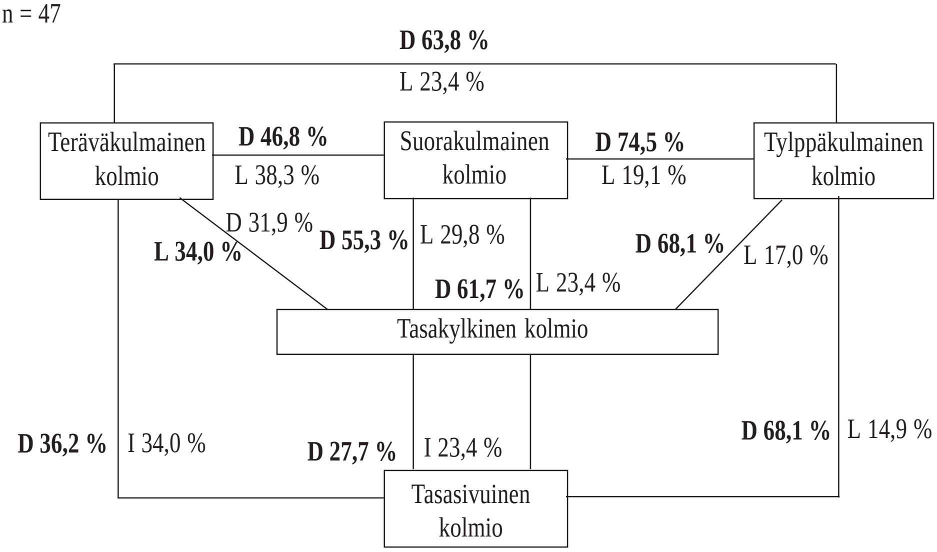
Yleisesti ottaen voidaan todeta, että erityisesti monelle yhdeksäsluokkalaiselle oli tyypillistä karsinoiva luokittelu (tulkinta D).

Seuraavissa kaavioissa esitetään kaksi yleisimmin esiintynyttä käsitesuhteiden RK1—RK10 tulkintaa (E, D, L, I tai K) kullakin tutkitulla van Hielen tasoilla. Vastaavasti kuin edellä yleisimmin esiintyneen tulkinnan suhteellinen frekvenssi on merkitty kuvan tekstiin lihavoituna. Normaalitekstillä esitetty prosenttiluku viittaa toiseksi yleisintä tulkintaa vastaavaan suhteelliseen frekvenssiin.

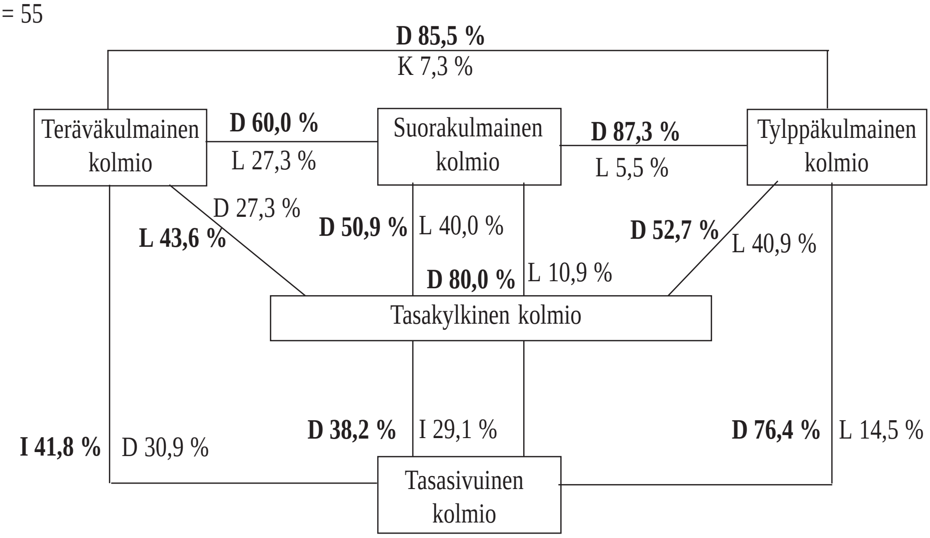
vH0:
n = 27



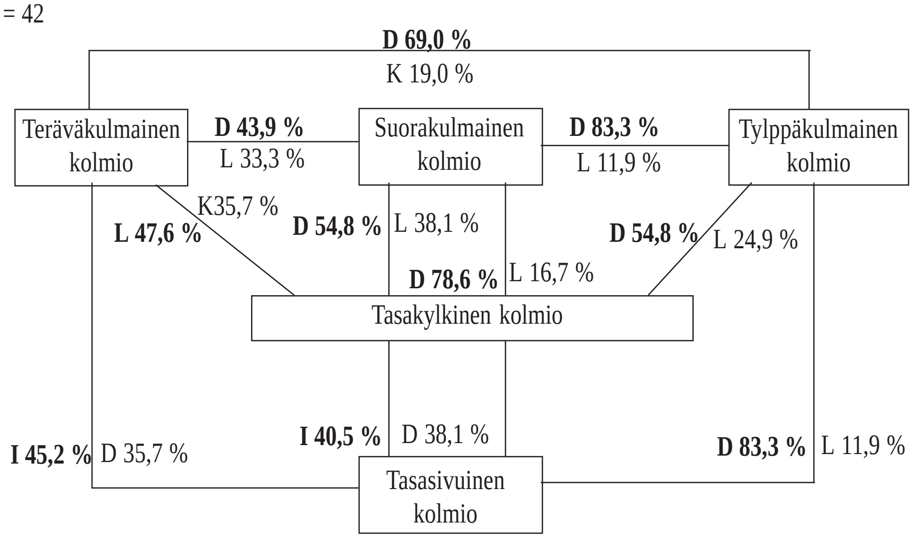
vH1:
n = 47



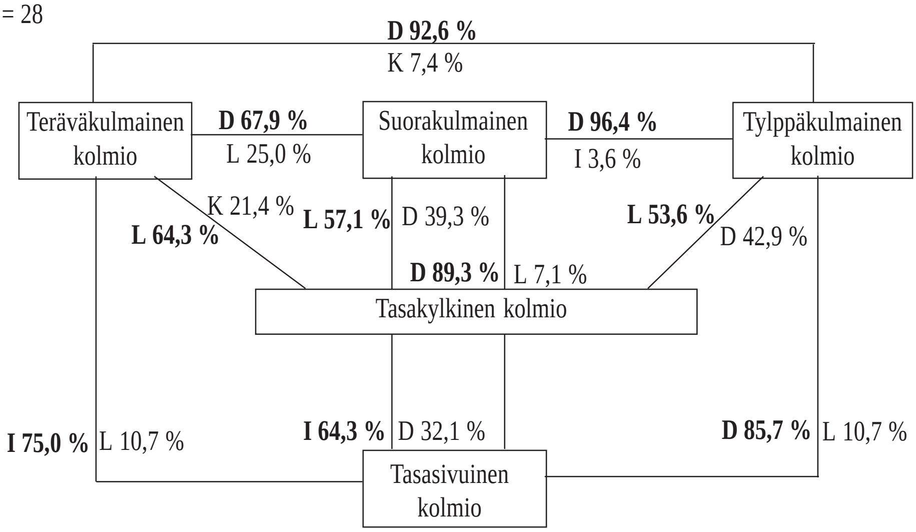
vH1-2:
n = 55



vH2:
n = 42



≥vH3:
n = 28



Kuvio 23. Kaksi yleisimmin esiintynyttä kolmiotyyppien välisten suhteiden tulkintaa tutkituilla van Hielen tasoilla

Yleiskommenttina eri van Hielen tasoille sijoittuneiden oppilaiden käsitesuhdetulkinnoista voidaan todeta, että mitä ylempää vH-tasoa tarkastellaan sitä useammalla oppilaalla tulkinnat ovat standarditulkintojen mukaisia. Tässä suhteessa voidaan sanoa, että tasot kuvaavat geometrisen ajattelun kehitystä myös käsitteiden välisten suhteiden oppimisen osalta. Mitään yksittäistä tasoa ei kuitenkaan voida erottaa, josta lähtien käsitteiden väliset suhteet yleisesti ottaen hallittaisiin. Edes kolmannelle van Hielen tasolle yltäneet oppilaat eivät kaikki tulkitse näitä tavalla, joka matematiikassa on tavanomaista. Monien relaatioiden osalta jopa 30—40 % oppilaista tulkitsee ne epästandardilla tavalla. Myös monet alimmille van Hielen tasoille sijoittuneet oppilaat näyttävät hahmottavan käsitteiden välisiä suhteita oikein. Edellä sanotun nojalla käsitesuhteiden ymmärtämistä ei tämän aineiston perusteella voi pitää kovin luotettavana van Hielen tasoa 3 ja sitä alempia tasoja erottavana piirteenä vastoin kuin monissa van Hielen tasojen karakterisoinneissa on otaksuttu.

Pitkittäistarkastelut

Kvantitatiivisesti tarkastellen kolmiotyyppien välisten käsitesuhteiden tuntemisessa tapahtui lievää edistymistä. Tämän voi todeta vertaamalla seurantajakson alussa ja lopussa kerätyistä aineistoista oppilaan oikein tulkitsemien käsitesuhteiden RK1—RK10 kokonaislukumäärää kuvaavan summamuuttujan RELSUMK saamia arvoja. Seurantajakson alussa muuttujan RELSUMK keskiarvo oli 5,19 ja keskihajonta 2,83. Jakson lopussa vastaavat arvot olivat 6,20 ja 2,34. Jälkimmäinen keskiarvo on tilastollisesti merkitsevästi korkeampi kuin edellinen (t-arvo 2,86, df = 68, $p < .006$).

Tarkastellaan muutoksia vielä käsitesuhteittain.

Taulukko 21. Yhteenveto oppilaiden käsitesuhteille RK1—RK10 antamista tulkinnoista vuosina 1992 ja 1994 (kummassakin aineistossa samat 69 oppilasta)

	Oikeiden tulkintojen suht. lkm. (%) oppilaiden ollessa		Yleisin virhetulkinta ja sen yleisyys (%) oppilaiden ollessa				Niiden oppilaiden suhteellinen frekvenssi (%), joilla tulkinta on	
Kolmiorelaatio	7. luokalla	9. luokalla	7. luokalla		9. luokalla		pysynyt oikeana*	korjaantunut**
RK1	43,5	37,7	L	37,7	L	37,7	40,0	46,2
RK2	89,9	79,7	L	5,8	L	18,8	79,0	85,7
RK3	72,5	82,6	K	13,0	K	10,1	80,0	89,5
RK4	72,5	84,1	L	15,9	L	10,1	86,0	78,9
RK5	72,5	73,9	L	13,0	L	14,5	74,0	73,7
RK6	56,5	52,2	D	18,8	D	26,1	48,7	56,7
RK7	33,3	59,4	D	27,5	D	29,0	56,5	60,9
RK8	40,6	52,2	K	40,6	K	26,1	53,6	51,2
RK9	33,3	39,1	D	60,9	D	59,4	43,5	37,0
RK10	36,2	49,3	D	56,5	D	43,5	68,0	38,6

* niiden oppilaiden lukumäärä, jotka tulkitsivat relaation oikein sekä 7. että 9. luokalla suhteessa relaation 7. luokalla oikein tulkinneiden määrään

** niiden oppilaiden lukumäärä, jotka tulkitsivat relaation oikein 9. luokalla suhteessa relaation 7. luokalla virheellisesti tulkinneiden määrään

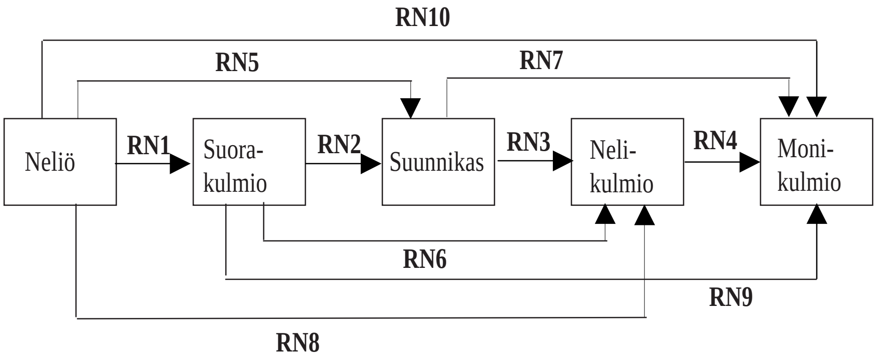
Opetuksen tulisi kyetä toisaalta säilyttämään ja vahvistamaan oppilaiden oikeita käsityksiä ja toisaalta korjaamaan oppilaiden virhekäsityksiä. Tässä mielessä taulukon 21 kahden oikeanpuoleisimman sarakkeen prosenttilukujen pitäisi olla mahdollisimman lähellä 100 prosenttia. Käsitesuhteet, joihin opetuksella näytti olleen vähäisin positiivinen säilyttävä vaikutus olivat RK1 (teräväkulmaisuus—suorakulmaisuus), RK9 (tasakylkisyys—suorakulmaisuus), RK6 (tasasivuisuus—teräväkulmaisuus), RK8 (tasakylkisyys—teräväkulmaisuus), RK7 (tasasivuisuus—tasakylkisyys). Näiden relaatioiden suhteen vain noin puolet niistä oppilaista, jotka olivat tulkinneet suhteen oikein 7.-luokkalaisina tulkitsivat sen oikein myös 9.-luokkalaisina. Käsitesuhteet, joihin opetuksella oli ollut vähäinen virheellisiä käsityksiä korjaava vaikutus, olivat edellä mainitut sekä myös RK10 (tasakylkisyys—tylppäkulmaisuus).

Eräät virhetulkinnat ovat erityisen sitkeässä. Esimerkiksi monet oppilaat tulkitsivat teräväkulmaisuuden tarkoittavan kolmion yhden tai kahden kulman (erityistä) terävyyttä, eivätkä näyttäneet edellyttävän kolmion kaikkien kulmien terävyyttä. Samoin useille oppilaille oli vaikeaa mieltää, millaiset kolmiot voivat olla tasakylkisiä. Erityisen vaikeaa tuntui olevan hyväksyä suorakulmaisten ja tylppäkulmaisten kolmioiden tasakylkisyysmahdollisuutta.

7.5.2 Nelikulmiotyyppien väliset käsitesuhteet

Poikittaistarkastelut

Testin G1 osioissa 5 b)—f) oppilaita pyydettiin tunnistamaan, mitkä viidestätoista annetusta esimerkkikuviosta ovat suorakulmioita, neliöitä, suunnikkaita, nelikulmioita ja monikulmioita. Vastausten perusteella selvitettiin oppilaiden tulkintoja kymmenen kuvan osoittaman käsitesuhteen osalta. Standarditulkinnan mukaan kukin suhteista on luokkainkluusio.



Kuvio 24. Käsitteiden monikulmio, nelikulmio, suunnikas, suorakulmio ja neliö keskinäiset suhteet RN1—RN10

Näillekin käsitesuhteille on periaatteessa viisi eri tulkintaa, joihin jatkossa viitataan seuraavin symbolein:

E: **Ekvivalenssi**. Samat kuviot luokitellaan A:ksi ja B:ksi.

L: **Leikkaus**. A voi olla B ja B voi olla A. Osa kuvioista luokitellaan A:ksi mutta ei B:ksi, osa B:ksi mutta ei A:ksi ja osa sekä A:ksi että B:ksi.

D: **Disjunktiivinen, poissulkeva luokitus**. A ei voi olla B. Jos kuvio luokitellaan A:ksi, niin sitä ei voi luokitella B:ksi.

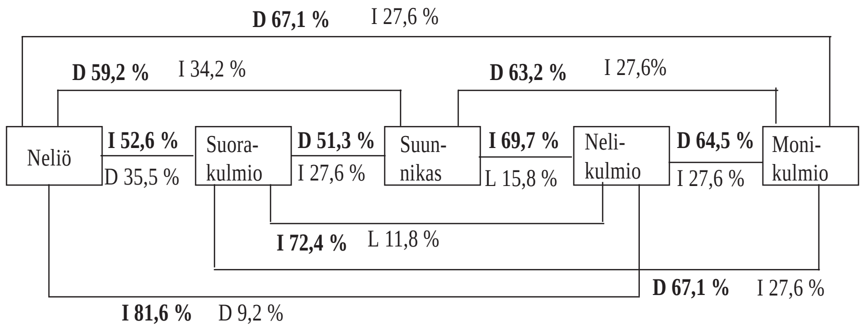
I: **Aito luokkainkluusio**. A on aina B. Jos kuvio luokitellaan A:ksi, niin se luokitellaan aina myös B:ksi. Kaikkia B:ksi luokiteltuja kuvioita ei luokitella A:ksi.

K: **Käänteinen luokkainkluusio**. B on aina A. Jos kuvio luokitellaan B:ksi, niin se luokitellaan aina myös A:ksi.

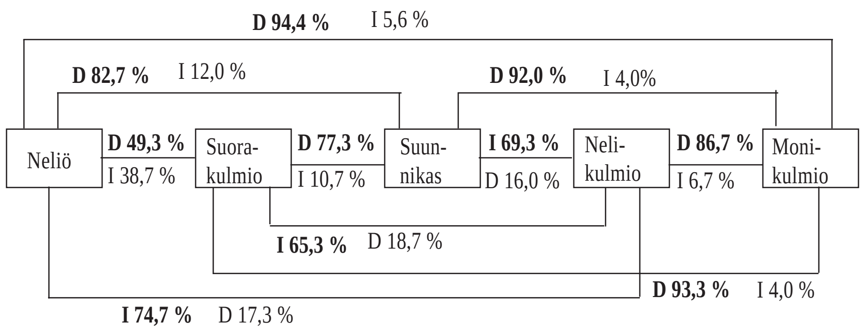
Liitteessä 8 on esitetty esimerkki tilasto-ohjelman SPSS PAD-tiedostosta, jonka mukaisesti oppilaan käsitesuhteille antamat tulkinnat tunnistettiin testin G1 luokitteluosioiden vastauksista. Nytkään tulkinnan tyypityksessä ei kiinnitetä huomiota siihen, ovatko kuviot objektiivisessa mielessä oikein tunnistettuja vaiko eivät. Tarkasteltavina ovat nimenomaan oppilaan itsensä kuviotyypeille liittämien merkitysten keskinäiset suhteet. Jos siis oppilas luokittelee kaikki neliöinä pitämänsä kuviot myös suorakulmioiksi, hänen käsitejärjestelmässään neliön ja suorakulmion välistä relaatiota pidetään luokkainkluusiona siinäkin tapauksessa, että osa neliöksi luokitelluista kuvioista ei tosiasiassa olisi neliö tai edes suorakulmio.

Seuraavissa kaavioissa esitetään kaksi yleisimmin esiintynyttä käsitesuhteiden RN1—RN10 tulkintaa (E, D, L, I tai K) luokkatasoilla 7, 8 ja 9. Vastaavasti kuin edellä yleisimmin esiintyneen tulkinnan suhteellinen frekvenssi on merkitty kuvan tekstiin lihavoituna. Normaalitekstillä esitetty prosenttiluku viittaa toiseksi yleisintä tulkintaa vastaavaan suhteelliseen frekvenssiin.

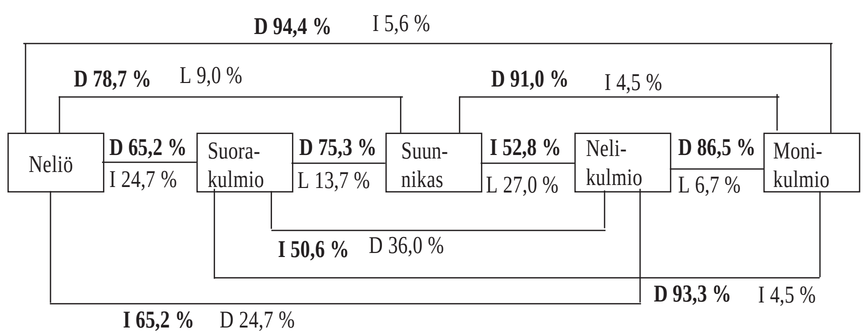
7.lk:
n= 76



8.lk:
n= 75



9. lk:
n= 89



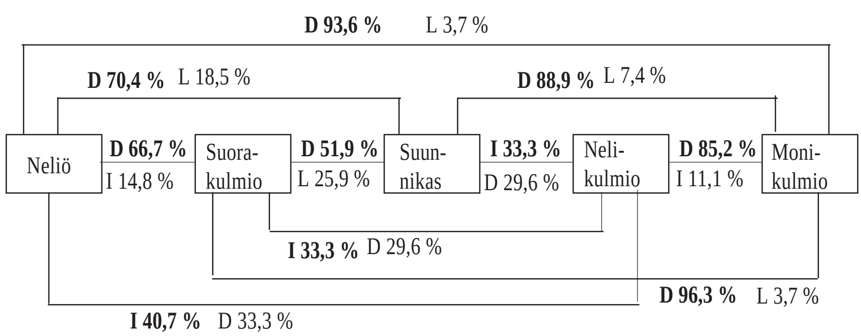
Kuvio 25. Kaksi yleisimmin esiintynyttä käsitesuhteiden RN1—RN10 tulkintaa luokkatasoilla 7, 8 ja 9

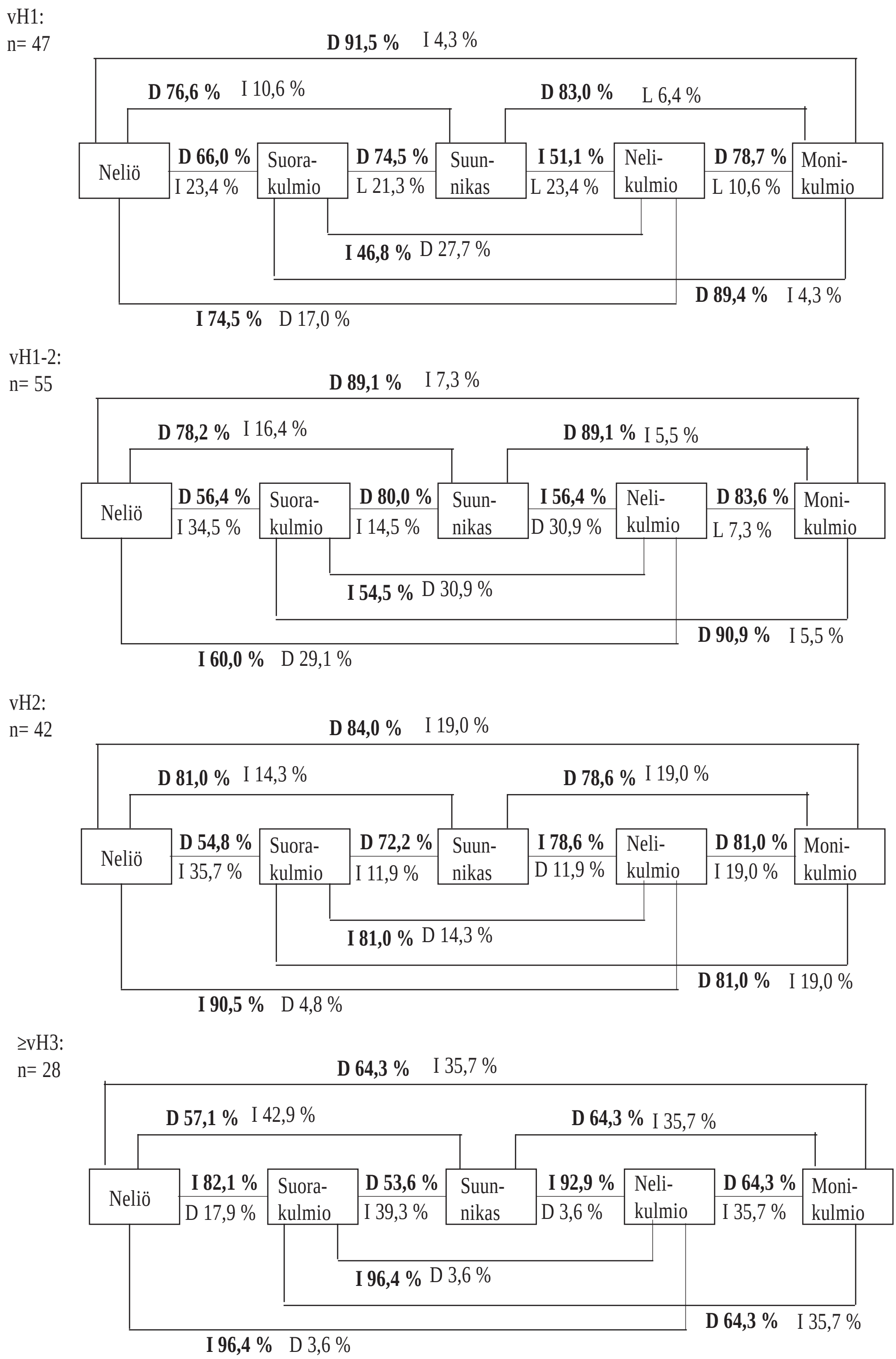
Kolmiotyyppien välisten käsitesuhteiden tulkinnat antoivat jo viitteitä siihen suuntaan, että yläasteen oppilaat siirtyessään seitsemänneltä luokalta kahdeksannelle ja edelleen yhdeksännelle luokalle jossain määrin taantuvat tulkitsemaan käsitteiden merkityksiä enenevässä määrin prototyyppiseen käsitteenmuodostukseen tyypillisellä tavalla karsinoivasti (relaatiotulkinta D). Vielä selvemmin tämän tyyppinen trendi on havaittavissa käsitesuhteiden RN1—RN10 tulkinnoissa. Standarditulkinnan mukainen inkluusiotulkinta (I) käy yläasteen aikana aina harvinaisemmaksi ja karsinoiva luokittelu (D) yleistyy. Oletettavaa on, että monien oppilaiden aikanaan nelikulmiorelaatiolle oppima inkluusiotulkinta, jos tällaista on edes missään vaiheessa opittu, ei ole perustunut riittävästi käsitteiden keskinäisen suhteen ymmärrykselle vaan enemmänkin ulkomuistinvaraiseen nimityssopimukseen, mikä ei ole luonut edellytyksiä asian muistissa pysymiseen. Tällaisen seikan varmentamiseen tarvitaan kuitenkin pitkittäistutkimuksella saatavaa tietoa samojen oppilaiden käsitteenmuodostuksen piirteistä pidemmällä aikavälillä. Asiaan palataan tarkasteltaessa sitä dataa, joka saatiin tarkasteltaessa oppilaiden käsitesuhteille antamien tulkintojen muutoksia kolmen vuoden seurantatutkimuksessa.

Seuraavissa kaavioissa esitetään kaksi yleisimmin esiintynyttä käsitesuhteiden RN1—RN10 tulkintaa (E, D, L, I tai K) kullakin tutkitulla van Hielen tasoilla. Kuvion 26 kaavioissa yleisimmin esiintyneen tulkinnan suhteellinen frekvenssi on vastaavasti kuin edellä merkitty lihavoituna. Normaalitekstillä esitetty prosenttiluku viittaa toiseksi yleisintä tulkintaa vastaavaan suhteelliseen frekvenssiin.

Relaatioiden tulkintaerot eri van Hielen tasoille sijoittuneiden oppilaiden kesken olivat sensuuntaisia kuin saatettiin odottaakin, jos van Hielen tasot todella ilmentävät kehittymistä myös tietorakenteiden jäsentymisen suhteen. Toinen toisensa poissulkeva, karsinoiva luokittelu (D) vähenee varsin systemaattisesti siirryttäessä alemmilta van Hielen tasoilta ylemmille. Vastaavasti standarditulkinnan mukainen hierarkkinen luokkainkluusio (I) yleistyy. Erityisesti tietorakenteiden eheytyminen näkyy tasolla vH3. Yllätyksenä voidaan kuitenkin pitää, että vielä tälläkin tasolla eräät tulkinnoista poikkeavat varsin yleisesti standarditulkinnasta. Tämän voi katsoa olevan ristiriidassa van Hielen tasolle vH3 annettujen luonnehdintojen kanssa.

vH0:
n= 27





Kuvio 26. Kaksi yleisimmin esiintynyttä käsitesuhteiden RN1—RN10 tulkintaa tutkituilla van Hielen tasoilla (kaikissa käsitesuhteissa luokkainkluusio I on standarditulkinta suhteelle)

Kuten edellä esitetyistä kaavioista voi todeta selvä enemmistö oppilaista luokitteli jokaisella van Hielen tasolla monikulmioiksi vain ne monikulmiot, jotka eivät heidän mielestään olleet neliöitä, suorakulmioita, suunnikkaita tai nelikulmioita. Niiden käsitesuhteiden tulkinnat, joissa monikulmio oli toisena osapuolena, olivat hyvin yhdenmukaisia. Käsitesuhdepareittain tarkastellen sama tulkinta esiintyi 91,3—96,7 prosentilla oppilaista. Ylimmälle van Hielen tasolle sijoittuneista oppilaista 18 tulkitsi kaikki mainitut relaatiot disjunktiivisesti (D) ja loput 10 inklusiivisesti (I). Monikulmioidea näytti siis oppilailla tarkoittavan lähinnä suljetun murtoviivan rajaamaa kuviota, jossa on enemmän kuin neljä kulmaa.

Nelikulmion idean oppilaat ymmärsivät kaikilla van Hielen tasoilla yleensä paremmin kuin monikulmion. Nelikulmioiksi luettiin yleensä nekin kuviot, jotka oli luokiteltu myös neliöiksi, suorakulmioiksi tai suunnikkaiksi. Neliö, suorakulmio ja suunnikas tulkittiin van Hielen tasoilla vH0, vH1, vH1-2 ja vH2 yleisimmin toinen toisensa poissulkeviksi käsitteiksi (D). Neliö oli helpompi hyväksyä suorakulmioksi kuin neliö tai suorakulmio suunnikkaaksi.

Pitkittäistarkastelut

Kolmiotyyppien käsitesuhteista poiketen oppilaiden nelikulmiotyyppien käsitesuhteiden osaamisessa ei voida todeta selvää edistymistä seurantajakson aikana. Summamuuttujan RELSUMN, joka sai arvokseen oppilaan oikein tulkitsemien käsitesuhteiden RN1—RN10 kokonaislukumäärän, seurantajakson alun aineistosta laskettu keskiarvo 4,54 (keskihaj. 2,76) on tosin lievästi korkeampi kuin seurantajakson lopun aineistosta määritetty keskiarvo 4,03 (keskihaj. 3,12), mutta keskiarvojen ero ei ole tilastollisesti merkitsevä (t-arvo 1,32, df = 68, $p < .192$).

Taulukkoon 22 on koottu tietoja, joiden avulla muutoksia voidaan tarkastella lähemmin.

Taulukko 22. Yhteenveto oppilaiden seitsemäs- ja yhdeksäsluokkalaisina osoittamista käsitesuhteiden RN1—RN10 tulkinnoista (kummassakin aineistossa samat oppilaat (n = 69))

Nelikulmio-relaatio RN	Oikeiden tulkintojen suht. lkm. (%) oppilaiden ollessa		Yleisin virhetulkinta ja sen yleisyys (%) oppilaiden ollessa		Niiden oppilaiden suhteellinen frekvenssi (%), joilla tulkinta on	
	7. luokalla	9. luokalla	7. luokalla	9. luokalla	pysynyt oikeana*	korjaantunut**
1 (ne-sk)	47,8	62,3	D 40,6	D 26,1	66,7	58,3
2 (sk-su)	21,7	24,6	D 53,6	D 65,2	20,0	25,9
3 (su-nk)	71,0	79,7	L 18,8	D 10,1	81,6	75,0
4 (nk-mk)	20,3	20,3	D 68,1	D 72,5	13,3	22,2
5 (ne-su)	30,4	27,5	D 60,9	D 63,8	19,0	31,3
6 (sk-nk)	73,9	78,3	L 13,0	L 13,0	84,3	61,1
7 (su-mk)	21,7	20,3	D 68,1	D 71,0	13,3	54,5
8 (ne-nk)	84,1	88,4	D 7,2	L 5,8	89,7	90,9
9 (sk-mk)	21,7	20,3	D 72,5	D 75,4	13,3	22,2
10 (ne-mk)	21,7	21,7	D 72,5	D 75,4	13,3	24,1

* niiden oppilaiden lukumäärä, jotka tulkitsivat käsitesuhteen oikein sekä 7. että 9. luokalla suhteessa käsitesuhteen 7. luokalla oikein tulkinneiden määrään

** niiden oppilaiden lukumäärä, jotka tulkitsivat käsitesuhteen oikein 9. luokalla suhteessa käsitesuhteen 7. luokalla virheellisesti tulkinneiden määrään

Käsitesuhteiden RN1 (neliö—suorakulmio), RN3 (suunnikas—nelikulmio), RN6 (suorakulmio—nelikulmio) ja RN8 (neliö—nelikulmio) oikeat tulkinnat olivat säilyneet oppilailla suhteellisen muuttumattomina ja virheelliset tulkinnat olivat pyrkineet korjaantumaan. Käsitesuhteiden RN2 (suorakulmio—suunnikas), RN4 (nelikulmio—monikulmio), RN5 (neliö—suunnikas), RN7 (suunnikas—monikulmio), RN9 (suorakulmio—monikulmio) ja RN10 (neliö—monikulmio) virhetulkinnat olivat yleisiä ja näyttivät olevan hyvin pysyviä. Virhetulkintojen voidaan olettaa johtuvan lähinnä kahdesta toisiinsa kytkeytyvästä seikasta. Ensinnäkin voimakkaasta pyrkimyksestä disjunktiiviseen, karsinoivaan luokitukseen (D) ja toiseksi virheellisestä monikulmiokäsitteen tulkinnasta. Monille oppilaille monikulmio tarkoittaa murtoviivan rajaamaa kuviota, jossa on monta, ainakin enemmän kuin neljä, kulmaa. Pyrkimys karsinoivaan luokitteluun suosii luonnollisesti tällaista monikulmiokäsitteen virhetulkintaa. Kuten taulukon 22 kahdesta oikeanpuoleisesta sarakkeesta voidaan huomata, opetus ei juuri ole kyennyt korjaamaan oppilaiden tämänsuuntaisia käsityksiä eikä useassa tapauksessa edes säilyttämään oppilaiden oikeita käsityksiä.

7.6 Tietorakenteiden hallinta

7.6.1 Kvantitatiiviset yleisindeksit kolmio- ja nelikulmiotyyppien hallinnalle

Oppilaiden käsitesuhteille antamia tulkintoja tarkasteltiin edellä ryhmäkohtaisesti. Koetan seuraavaksi havainnollistaa siitä, millaisia olivat yksittäisten oppilaiden tietorakenteet. Aloitan konstruoimalla oppilaan relaatioiden hallinnalle eräitä kvantitatiivisia yleisindeksejä ja jatkan tarkastelua kvalitatiivisemmin tarkastelemalla tyypillisimpiä tietorakenteita, joita oppilailla esiintyi.

Tutkin oppilaan käsitesuhteille antamien tulkintojen oikeellisuutta testin G1 kuvioiden luokitteluosioiden 5 ja 6 avulla muodostamalla muuttujat RELSUMK1 ja RELSUMN1. Muuttujan RELSUMK1 arvoksi asetettiin oppilaan oikein tulkitsemien kolmiotyyppien välisten suhteiden RK1—RK10 kokonaismäärä ja RELSUMN1 vastaavasti oppilaan oikein tulkitsemien nelikulmiotyyppien välisten käsitesuhteiden RN1—RN10 kokonaismäärä. Kannattaa kuitenkin huomata, että relaation tulkinta saattoi oppilaalla olla oikea vaikka yksittäisten kuvioiden tunnistamisessa olikin puutteita. Jos esimerkiksi oppilas luokitteli systemaattisesti jokaisen neliönä pitämänsä kuvion suorakulmioksi, hänen relaatiota RN1 koskeva luokkainkluusion mukainen tulkinta katsottiin oikeaksi, vaikka hän olisi tehnyt virheitä toisen tai molemman kuvion tunnistamisessa.

Oppilaiden kolmio- ja nelikulmiotyyppien rakenteen hallintaa mitattiin myös edellistä suoremmin testin G2 loppuosaan sijoitetuilla osioilla, jotka käsittelivät erityyppisiin kolmioihin (osiot 5A, 5B, … , 5G ja 6A, 6B, … , 6G) ja nelikulmioihin (osiot 7A, 7B, … , 7H) liittyvien luokitusten keskinäisiä suhteita. G2-testin dikotomisesti (0/1) pisteytettyjen alaosioiden 5A, … , 5G ja 6A, …, 6G avulla muodostettiin kolmiotyyppien keskinäisten suhteiden hallintaa mittaava summamuuttuja RELSUMK2. Vastaavasti testin G2 osioiden 7A, … , 7H avulla muodostettiin nelikulmiotyyppien keskinäisten suhteiden hallintaa mittaava summamuuttuja RELSUMN2.

Oppilaan käsitesuhdetulkinnoista kerätyn tiedon luotettavuutta voitiin arvioida tulkitsemalla yhtäältä summamuuttujat RELSUMK1 ja RELSUMK2 ja toisaalta summamuuttujat RELSUMN1 ja RELSUMN2 samaa ominaisuutta mittaavien rinnakkaistestien kokonaispistemääriksi, vaikkakin toinen tieto oli saatu epäsuorasti luokitteluosioiden ja toinen väitelauseiden kautta. Korrelaatio muuttujien RELSUMK1 ja RELSUMK2 välillä oli .39 ($n = 229$), joka vastaa kolmiorelaatiotestauksen reliabiliteettia .56. Vastaavasti muuttujien RELSUMN1 ja RELSUMN2 korrelaatio oli .39 ($n = 230$), joka vastaa nelikulmiorelaatiomittarin reliabiliteettia .56.

Jatkossa käytän käsitesuhteiden hallinnan yleisindekseinä pelkästään muuttujia RELSUMK1 ja RELSUMN1, sillä nämä ilmoittavat suoraan sen, kuinka monta relaatioista RK1—RK10 ja RN1—RN10 oppilas tulkitsi oikein.

van Hielen tasoittain tarkastellen sekä erilaisten kolmioiden että neliöiden väliset suhteet hallittiin keskimäärin sitä paremmin mitä korkeammalle oppilaat olivat van Hielen tasojen suhteen sijoittuneet. Sekä kolmio- että nelikulmiotyyppien välisten suhteiden hallinnassa oli van Hielen tasojen kesken tilastollisesti merkitseviä eroja (edellisellä varianssianalyysin F-ratio on 11,6451 ja F-prop. 0,000 ja jälkimmäisellä F-ratio 20,8992 sekä F-prop. 0,000). Varsinkin nelikulmiotyyppien väliset suhteet hallittiin ylemmillä vH-tasoilla alempia paremmin. Kolmiotyyppien välisten suhteiden hallinta oli varsin samantyyppistä tasoilla 0 ja 1 ja vastaavasti tasoilla 1-2 ja 2. Tasolle 3 tai sitä korkeammalle tasolle sijoittuneet oppilaat hallitsivat kolmiotyyppien väliset suhteet keskimäärin muita oppilaita paremmin. Havainnot tukevat jossain määrin usein esitettyä olettamusta, että käsitteiden välisten kytkentöjen hallitseminen on ominaista nimenomaan van Hielen tasolle 3. Erityisen hyvin näitä relaatioita ei kuitenkaan tämän aineiston perusteella hallittu millään van Hielen tasolla.

Taulukko 23. Muuttujien RELSUMK1 ja RELSUMN1 keskiarvot ja keskihajonnat van Hielen tasoittain tarkasteltuina

Van Hielen		RELSUMK1		RELSUMN1	
taso	(n)	k-a	k-haj.	k-a	k-haj.
vH0	(27)	4,1	2,0	1,3	1,4
vH1	(46)	4,5	2,0	2,3	1,9
vH1-2	(55)	5,8	2,2	2,6	2,416
vH2	(44)	5,6	2,1	3,8	2,420
vH3	(27)	7,6	2,8	6,1	2,4

Taulukko 24. Muuttujien RELSUMK1 ja RELSUMN1 keskiarvot ja keskihajonnat luokkatasoittain tarkasteltuina

Luokka		RELSUMK1		RELSUMN1	
taso	(n)	k-a	k-haj.	k-a	k-haj.
7.	(76)	5,5	2,6	4,5	3,2
8.	(75)	5,4	2,3	2,9	2,0
9.	(90)	5,2	2,4	2,2	2,1
Kaikki		5,4	2,4	3,1	2,6

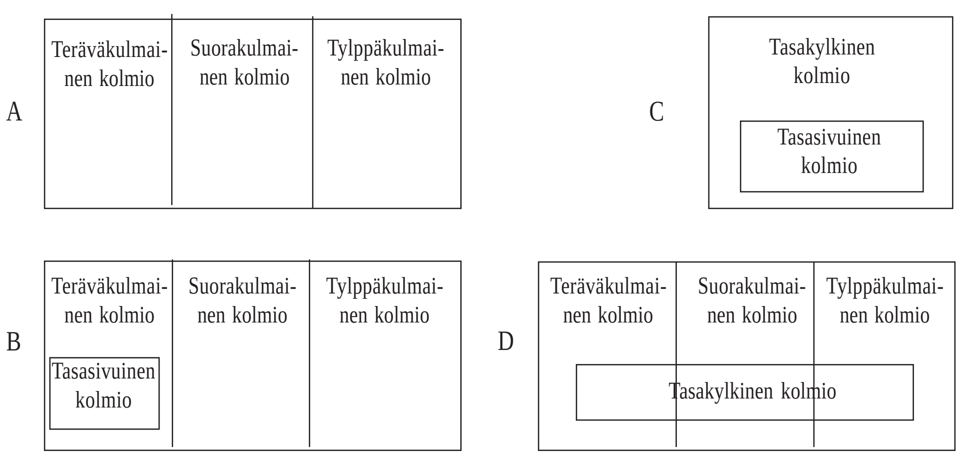
Kolmiotyyppien väliset suhteet hallittiin jokseenkin yhtä hyvin kaikilla kolmella luokka-asteella, mutta nelikulmiotyyppien välisten suhteiden hallinta sitä vastoin näytti jopa heikkenevän yläasteen aikana Yhtenä syynä tähän on todennäköisesti se, että geometristen kuvioiden luokittelua kerrataan ja harjoitellaan nimenomaan 7. luokalla, mutta ei juurikaan sen jälkeen. Tietorakenteiden oppiminen ei tämän tutkimuksen poikittaistarkasteluiden perusteella näytä olevan kovin pysyvää. Osaksi tämä voi johtua seuraavasta. Kun käsitteiden määritelmiä ei tunneta eikä käsitteiden välisiä suhteita ymmärretä käsitteiden määrittelyistä johtuviksi, niin käsitteiden väliset relaatiot yritetään muistaa silloin, kun siihen on tarvetta, helposti unohtuvana faktatietona. Tietorakenteiden hajoamiseen liittyy karsinoivan luokittelun yleistyminen. Toistensa ylä- ja alakäsitteet tulkitaan ylemmillä luokkatasoilla yhä useammin virheellisesti toisensa poissulkeviksi käsitteiksi, minkä voi todeta mm. nelikulmiotyyppien välisten suhteiden tulkintoja havainnollistavista kaavioista (kuvio 25).

7.6.2 Oppilaiden kolmiokäsitteistä muodostamien tietorakenteiden tyypitys

Kolmiotyyppien tulkinnoista muodostuneita tietorakenteita tutkittiin selvittämällä ensin, missä määrin oppilaat hallitsivat seuraavat relaatioyhdistelmät:

A: Terävä-, suora- ja tylppäkulmaisuus ovat toisensa poissulkevia ominaisuuksia.
B: Tasasivuinen kolmio on teräväkulmainen eikä suora- tai tylppäkulmainen.
C: Tasasivuinen kolmio on tasakylkinen.
D: Tasakylkinen kolmio voi olla terävä-, suora- tai tylppäkulmainen.

Seuraava kuvio havainnollistaa vastaavia tietorakenteista.



Kuvio 27. Kolmiokäsitteisiin liittyvät tietorakennekomponentit

Edellisten lisäksi tutkittiin tietorakennekomponenteista A—D koostuvan koko kolmiokäsitteisiin liittyvän tietorakenteen ABCD hallintaa.

ABCD

Kuvio 28. Kolmiokäsitteisiin liittyvä tietorakennekokonaisuus

Poikittaistarkastelut

Tietorakenteiden oppiminen ei juurikaan näytä edistyvän yläasteen aikana. Pikemminkin havaittavissa on taantumista. Johtopäätöksiä on kuitenkin tehtävä varoen, sillä tässä tehtävät tarkastelut perustuvat poikittaistutkimuksiin, jolloin tarkasteltavina olivat eri luokkatasoilla eri oppilaat. Taulukosta 25 voi todeta, että tietorakennekomponentit A, B ja C näyttää sisäistäneen noin 30—40 % oppilaista, mutta kolmion kulmien suuruuteen perustuvan luokittelun ja sivujen kongruenssiin perustuvan luokittelun kytkeminen toisiinsa tuottaa vaikeuksia (komponentti D). Vain harva yläasteen oppilas näyttää tämän perusteella jäsentävän kolmioiden luokitukset standardilla tavalla (tietorakenne D).

Taulukko 25. Kolmioiden luokituksiin liittyvien tietorakennekomponenttien hallinta eri luokkatasoilla

	Luokka-aste					
Tietorakenne-	7. lk (n = 76)		8. lk (n = 75)		9. lk (n = 89)	
komponentti	f	f [%]	f	f [%]	f	f [%]
A	34	44,7	24	32,0	36	40,4
B	35	46,1	29	38,7	26	29,2
C	26	34,2	28	37,3	25	28,1
D	14	18,4	16	21,3	16	18,0
ABCD	7	9,2	3	4,0	3	3,4

Yleisesti ottaen voidaan todeta, että käsitteiden välisiä yhteyksiä hallitaan jonkin verran kaikilla van Hielen tasoilla (vrt. taulukko 26) mutta ylemmillä tasoilla kuitenkin keskimäärin paremmin kuin alemmilla. Tietorakenteiden muodostuminen ei näytä olevan mitenkään erityisesti kolmannelle van Hielen tasolle ominainen piirre. Oppilaan van Hielen tason määräytyminen tapahtuu ainakin tämän aineiston valossa ja tässä tutkimuksessa käytetyllä testistöllä muilla perusteilla kuin käsitteiden välisten suhteiden hallinnalla. Joko siis van Hielen tasoille yleisesti käytetyissä kriteereissä tai näiden operationaalistammisessa on korjattavaa. Merkille pantavaa on, että niistäkin oppilaista, jotka ylsivät vähintään tasolle vH3, tietorakenteen ABCD oli sisäistänyt vain noin joka kuudes oppilas. Kuitenkin käsitteet, joista tämä tietorakenne koostuu ovat hyvin tavanomaisia ja oppilaille tuttuja geometrian peruskäsitteitä.

Taulukko 26. Kolmioiden luokituksiin liittyvien tietorakennekomponenttien hallinta eri van Hielen tasoilla

Tietorakenne-komponentti	van Hielen taso 0 (n = 27) f	f [%]	1 (n = 47) f	f [%]	1-2 (n = 55) f	f [%]	2 (n = 42) f	f [%]	≥3 (n = 28) f	f [%]
A	7	25,9	14	29,8	28	50,9	15	35,7	19	67,9
B	4	14,8	13	27,7	22	40,0	19	45,2	20	71,4
C	5	18,5	11	23,4	16	29,1	17	40,5	18	64,3
D	5	18,5	3	6,4	13	25,6	9	21,4	9	32,1
ABCD	0	0,0	0	0,0	4	7,3	2	4,8	5	17,9

Pitkittäistarkastelut

Seuraava taulukko havainnollistaa muutoksia, joita tietorakenteissa havaittiin verrattaessa pitkittäistarkasteluna samojen oppilaiden tietorakenteita seitsemäs- ja yhdeksäsluokkalaisina.

Taulukko 27. Yhteenveto samojen oppilaiden (n = 69) kolmiokäsitteisiin liittyvistä tietorakenteista seitsemäsluokkalaisina ja yhdeksäsluokkalaisina

7. luokalla	**Kolmiokäsitteiden tietorakenne, joka oppilaalla esiintyy (Kyllä) tai ei esiinny (Ei) yhdeksännellä luokalla** A Ei	Kyllä	Yht.	B Ei	Kyllä	Yht.	C Ei	Kyllä	Yht.	D Ei	Kyllä	Yht.	ABCD Ei	Kyllä	Yht.
Ei	25	18	43	36	14	50	18	28	46	53	8	61	58	5	63
	36,2	26,1	62,3	52,2	20,3	72,5	26,1	40,6	66,7	76,8	11,6	88,4	84,1	7,2	91,3
Kyllä	17	9	26	16	3	19	10	13	23	8	9	8	6	0	6
	24,6	13,0	37,7	23,2	4,3	27,5	14,5	18,8	33,3	11,6	13,0	11,6	8,7	0,0	8,7
Yht.	42	27	69	52	17	69	28	41	69	61	8	69	64	5	69
	60,9	39,1	100,0	75,4	24,6	100,0	40,6	59,4	100,0	88,4	11,6	100,0	92,8	7,2	100,0

Tietorakennekomponenttien hallinta pysyi kahden vuoden seurantajakson aikana jokseenkin muuttumattomana. Ainoastaan tietorakennekomponentin C (RK7, tasasivuinen kolmio on tasakylkinen) osalta tapahtui selkiytymistä.

7.6.3 Oppilaiden nelikulmiokäsitteistä muodostamien tietorakenteiden tyypitys

Oppilaiden nelikulmiokäsitteistä muodostamien tietorakenteiden mallittamisessa seuraavat kysymykset osoittautuivat aineiston tulkinnan kannalta erityisen tärkeiksi (vrt. kuvio 24):

1° Ymmärtääkö oppilas käsitteet neliö, suorakulmio ja suunnikas hierarkkisina käsitteinä (RN1, RN2 ja RN5 luokkainkluusioita I) vaiko rinnakkaisina käsitteinä (edellä mainitut käsitesuhteet toisensa poissulkevia luokituksia D)?

2° Onko nelikulmio neliön, suorakulmion ja suunnikkaan yläkäsite (RN3, RN6 ja RN8 luokkainkluusioita I) vaiko niille rinnakkainen rinnakkainen käsite (edellä mainitut käsitesuhteet toisensa poissulkevia luokituksia D)?

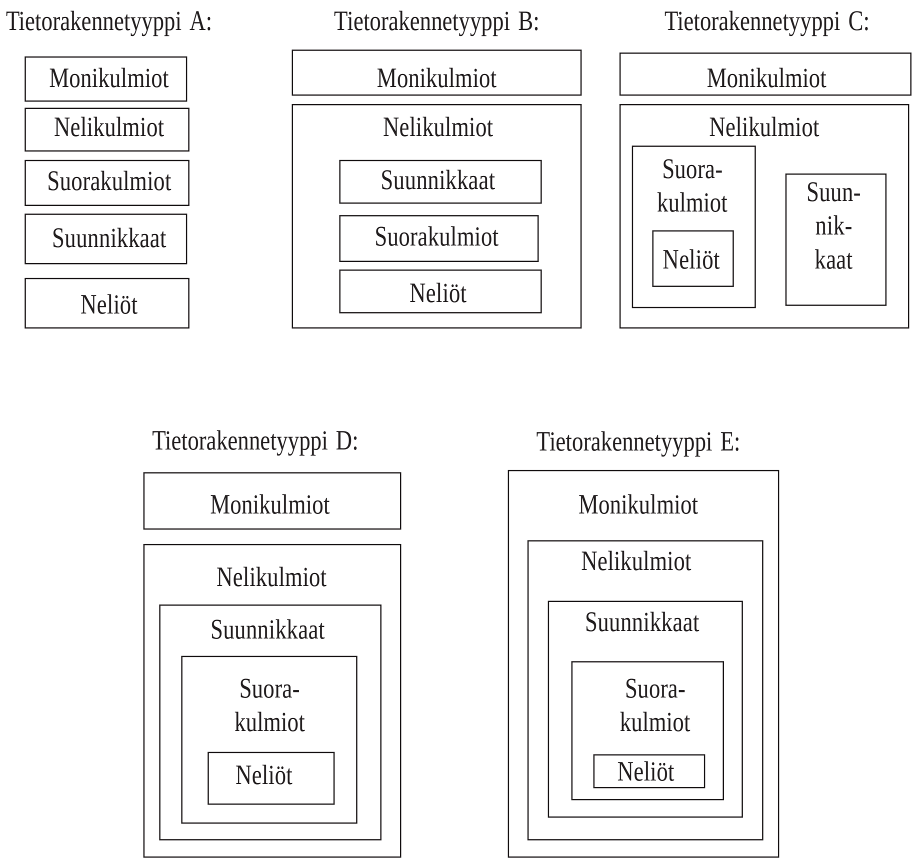
3° Onko monikulmio neliön, suorakulmion, suunnikkaan ja nelikulmion yläkäsite (RN4, RN7, RN9 ja RN10 luokkainkluusioita I) vaiko niille rinnakkainen käsite (edellä mainitut käsitesuhteet toisensa poissulkevia luokituksia D)?

Poikittaistarkastelut

Taulukko 28. Nelikulmioiden luokituksiin liittyvien tietorakennekomponenttien hallinta eri luokkatasoilla

Oppilaan luokitellessa kuvioita	Luokka-aste 7. lk (n = 76) f	f [%]	8. lk (n = 75) f	f [%]	9. lk (n = 89) f	f [%]
a° neliöt ovat suorakulmioita ja suunnikkaita, suorakulmiot ovat suunnikkaita	18	23,7	5	6,7	4	4,5
b° neliöt, suorakulmiot ja suunnikkaat ovat nelikulmioita	47	61,8	45	60,0	41	46,1
c° neliöt, suorakulmiot, suunnikkaat ja nelikulmiot ovat monikulmioita	21	27,6	3	4,0	4	4,5
a°, b° ja c° on voimassa ts. koko tietorakenne on standardi-tulkinnan mukainen	12	15,8	1	1,3	1	1,1

Seuraavat tietorakennetyypit esiintyivät oppilaiden tulkinnoissa yleisimmin:



Kuvio 29. Viisi oppilailla yleisimmin esiintynyttä nelikulmiokäsitteiden tietorakennetta

Käsitteiden neliö, suorakulmio ja suunnikas keskinäisten suhteiden jäsentyminen näytti tapahtuvan asteittain (vrt. tietorakennetyypit B, C ja D). Seuraava taulukko osoittaa tietorakennetyyppien esiintymisfrekvenssit koko oppilasjoukossa ja eri luokkatasoilla. Noin puolet oppilaista saatiin luokiteltua tietorakennetyyppien A—E mukaisiin ryhmiin. Vain 14 oppilasta (5,8 %) tutkituista 240 oppilaasta jäsensi tutkittujen viiden peruskäsitteen neliö, suorakulmio, suunnikas, nelikulmio ja monikulmio keskinäiset suhteet standardilla tavalla. Näistäkin oppilaista 12 oli seitsemäsluokkalaisia. Karsinoiva luokittelu on tyypillisintä 9.-luokkalaisten joukossa.

Taulukko 29. **Tietorakenteiden A—E esiintyminen oppilailla luokkatasoittain tarkasteltuna** (sulkeissa suhteelliset frekvenssit prosentteina koko oppilasmäärästä 240)

Tietorakennetyyppi	Luokka-aste 7. lk	(n = 76)	8. lk	(n = 75)	9. lk	(n = 89)	Yht.	(n = 240)
A	1	(1,3)	7	(9,3)	16	(18,0)	24	(10,0)
B	7	(9,2)	13	(17,3)	14	(15,7)	34	(14,2)
C	9	(11,8)	16	(21,3)	9	(10,1)	34	(14,2)
D	6	(7,9)	3	(4,0)	3	(3,4)	12	(5,0)
E	12	(15,8)	1	(1,3)	1	(1,1)	14	(5,8)
Yhtensä	35	(46,1)	40	(53,3)	43	(48,3)	118	(49,2)

Tarkastellaan seuraavaksi tietorakennetyyppien A—E esiintymistä van Hielen tasoittain.

Taulukko 30. **Tietorakenteiden A—E esiintyminen oppilailla van Hielen tasoittain tarkasteltuna** (sulkeissa suhteelliset frekvenssit prosentteina koko oppilasmäärästä 240)

Tietorakennetyyppi	van Hielen taso vH0 (n=27)		vH1 (n=47)		vH1-2 (n=55)		vH2 (n=42)		≥vH3 (n=28)		Yhteensä (n=199)	
A	2	(7,4)	5	(10,6)	13	(23,6)	1	(2,4)	1	(3,6)	22	(10,0)
B	1	(3,7)	6	(12,8)	11	(20,0)	13	(31,0)	1	(3,6)	32	(14,2)
C	0	(0,0)	2	(4,3)	6	(10,9)	6	(14,3)	11	(39,3)	25	(14,2)
D	0	(0,0)	0	(0,0)	4	(7,3)	1	(2,4)	5	(17,9)	10	(5,0)
E	0	(0,0)	1	(2,1)	0	(0,0)	2	(4,8)	5	(17,9)	8	(5,8)
Yhtensä	3	(11,1)	14	(29,8)	34	(61,8)	23	(54,8)	23	(82,1)	97	(49,2)

Aineistosta on havaittavissa tietorakenteiden kehittyminen suunnassa A—E siirryttäessä kohden ylempiä van Hielen tasoja. Ylimmällä mitatulla tasolla (≥vH3) käsitteiden väliset suhteet ovat harkitumpia kuin alemmilla tasoilla, olkoonpa ne sitten tulkinnoiltaan matemaattisesti oikeita tai eivät. Tämä näkyy mm. siitä, että luokitukset noudattavat varsin tarkasti 'rationaalisia' tietorakennetyyppejä A—E. Näiden kattavuus on 82,1 %. Tässäkin ryhmässä kuitenkin tietorakennetyyppi C oli ylivoimaisesti tavallisin.

Nelikulmiotyyppien jäsentymisestä tehdyt havainnot vahvistavat johtopäätöksiä, jotka tehtiin kolmiokäsitteisiin liittyvien tietorakenteiden yhteydessä. Rakenteellisen tiedon oppimisessa näyttää yläasteen aikana tapahtuvan ennemmin taantumista kuin edistymistä (vrt. taulukot 28 ja 29). Ylemmillä van Hielen tasoilla tieto on kuitenkin paremmin jäsentynyttä kuin alemmilla. <u>Tietorakenteiden hallinta ei näytä kuitenkaan olevan ainakaan tässä käytetyn mittaustavan puitteissa erityisesti tasoa vH3 karakterisoiva ominaisuus</u> (vrt. taulukko 30), kuten yleensä on oletettu (esim. Hoffer 1982, 4). Tietorakenteet ovat monilla tälle tasolle yltävillä oppilailla vielä standarditulkinnoista poikkeavia.

Pitkittäistarkastelut

Nelikulmiokäsitteiden tietorakennekomponenttien hallinnan muutokset olivat kahden vuoden seurantajakson aikana jääneet varsin vähäisiksi.

Taulukko 31. **Yhteenveto samojen oppilaiden (n = 69) nelikulmiokäsitteisiin liittyvistä tietorakennekomponenttien 1°, 2°, ja 3° hallinnasta seitsemäsluokkalaisina ja yhdeksäsluokkalaisina**

	Nelikulmiokäsitteiden tietorakennekomponentti, jonka oppilas joko hallitsee (Kyllä) tai ei hallitse (Ei) yhdeksännellä luokalla											
7-luokalla	**1°**			**2°**			**3°**			**1°, 2°, ja 3°**		
	Ei	Kyllä	Yht.	Ei	Kyllä	Yht.	Ei	Kyllä	Yht.	Ei	Kyllä	Yht.
Ei	45	11	56	27	0	27	42	12	54	55	6	61
	65,2	15,9	81,2	39,1	0,0	39,1	60,9	17,4	78,3	79,9	8,7	88,4
Kyllä	10	3	13	10	32	42	13	2	15	8	0	8
	14,5	4,3	18,8	14,5	46,4	60,9	18,8	2,9	21,7	11,6	0,0	11,6
Yht.	55	14	69	37	32	69	55	14	69	63	6	69
	79,7	20,3	100,0	53,6	46,4	100,0	79,7	20,3	100,0	91,3	8,7	100,0

Komponentin 2° harvinaistuminen osoittaa, miten karsinoiva luokittelu yleistyy. Esimerkiksi nelikulmioiksi luokitellaan yhä useammin vain ne nelikulmiot, joille ei ole erityisnimeä.

Nelikulmiokäsitteisiin liittyvien tietorakennetyyppien A—E muutosten tarkastelu pitkittäistarkasteluna ei ole erityisen informatiivista, sillä oppilaita, joiden tietorakenne oli sekä 7. luokalla että 9. luokalla tyyppiä A—E, oli kaikkiaan vain 15. Mainittakoon kuitenkin, että niillä 12 oppilaalla, joilla seitsemäsluokkalaisina todettiin tietorakenteen olleen matemaattisesti oikea eli E, kahdella oppilaalla tietorakenne oli yhdeksäsluokkalaisena edelleen tyyppiä E, kolmella tyyppiä C ja kahdella tyyppiä B.

Sekä poikittais- että pitkittäistarkasteluissa esiin noussutta karsinoivan luokittelun yleisyyttä voidaan selittää sekä oppimispsykologisilla että pedagogisilla syillä. Psykologisia syitä karsinoivaan luokitteluun on tarkasteltu luvussa 3.3.3. Pedagogisesti tarkastellen oppilaiden käsitteenmuodostusta voi ohjata tähän suuntaan yhtäältä oppikirjoissa käytetty tyypillisiä esimerkkitapauksia korostava käsitesuhteiden tarkastelua välttävä esitystapa. Toisaalta opettaja voi käyttää käsitteitä tarkoituksella tai tahattomasti karsinoivasti. Didaktisesti mielenkiintoinen kysymys onkin, missä määrin ja mihin asti on tarkoituksenmukaista välttää tarkoituksella luokkainkluusion käyttämistä ja opettaa käsitteitä tässä mielessä väärin, kun tiedetään luokkainkluusion ymmärtämisen olevan oppimisen varhaisvaiheissa vaikeaa tai jopa ylivoimaista.

8 Yleisedellytyksiä geometrisen käsitetiedon oppimiselle

8.1 Spatiaalisen ajattelun taidot

8.1.1 Testin rakenne ja testituloksia kuvaavat muuttujat

Spatiaalisen ajattelun taitoja mittaavan testin konstruktiotapa on selitetty tarkemmin luvussa 5.3.3. Tässä yhteydessä tarkastellaan testin rakennetta vain siltä osin kuin se on tarpeellista testitulosten tulkinnan kannalta. Testi jakaantui rakenteellisesti kuuteen osaan: (1) Hahmon tunnistus, osiot 1—4, (2) Kätketyt kuviot, osiot 5—10, (3), Kuvion koon vertailu, osiot 11—16, (4) Kuution kääntely ja kokoaminen, osiot 17—24, (5) Paperin taittelu, osiot 25—28, (6) Osien tunnistus, osiot 29—34.

Kustakin osiosta k muodostettiin vastaava dikotominen muuttuja xk, joka sai arvon 1, kun osio oli oikein suoritettu ja muulloin arvon 0. Koko testin reliabiliteetin kohottamiseksi osiot 2, 4, 11, 13, 16, 30 ja 34 jätettiin heikoimmin toimineina osioina lopullisesta analysoidusta testistä pois, jolloin testiin jäi kaikkiaan 27 osiota. Tämän jälkeen muodostettiin testin kuutta osakokonaisuutta vastaavat summamuuttujat

spl = x1 +x3, sp2 = x5+x6+x7+x8+x9+x10, sp3 = x12+x14+x15
sp4 = x17+x18+x19+x20+x21 +x22+x23+x24, sp5 = x25 + x26 + x27 + x28 ja
sp6 = x29 + x31 + x32 + x33

sekä summamuuttuja sptotal = spl+sp2+sp3+sp4+sp5+sp6. Cronbachin α-kertoimet muuttujen sp1—sp6 olivat kerätyssä aineistossa (n = 108) 0.49, 0.62, 0.57, 0.81, 0.85 ja 0.88. Koko testin suoritustasoa kuvaavalla summamuuttujalla sptotal α-kerroin sai arvon 0.81.

Testi rakennettiin alun perin sillä ajatuksella, että mukaan otetut kuusi osakokonaisuutta mittaavat spatiaalisen kyvyn kuutta eri osatekijää. Koska testi ei voinut kestää ajallisesti kovin pitkään osioita osatekijää kohden ei voinut olla kovin montaa, mikä aiheuttaa sen, ettei tuloksia juuri kannata tarkastella spatiaalisen kyvyn osatekijöittäin. Tämän tutkimuksen kannalta tärkein indeksi onkin testin kokonaispistemäärä sptotal. Muuttujat spl—sp6 korreloivat keskenään ja muuttujan sptotal kanssa seuraavasti

Taulukko 32. **Muuttujien spl—sp6 ja sptotal keskinäiset korrelaatiot**

	sp1	sp2	sp3	sp4	sp5	sp6
sp2	.13					
sp3	.13	.08				
sp4	.31***	.37***	.15			
sp5	.23*	.25**	.07	.34**		
sp6	.25**	.32***	.02	.19*	.36	
sptotal	.43***	.66***	.28**	.78***	.66***	.61***

*p<0,1; **p<0,01 ja ***p<0,001

8.1.2 Tyttöjen ja poikien sekä eri luokkatasoilla olleiden oppilaiden spatiaalisen ajattelun taitoerot

Pojat (n = 55) menestyivät spatiaalisen kyvyn testissä jonkin verran tyttöjä (n = 48) paremmin, mutta ero ei ollut tilastollisesti merkitsevä. Pojilla kokonaispistemäärän sptotal keskiarvo oli 18,0 (k-haj. 5,0) ja tytöillä 17,4 (k-haj. 5,8).

Yhdeksäsluokkalaisten (n = 62) kokonaispistemäärien keskiarvo 18,5 (k-haj.) oli tilastollisesti melkein merkitsevästi korkeampi kuin seitsemäsluokkalaisten (n = 41) vastaava arvo 16,5 (k-haj. 6,3).

Oppilaiden spatiaalisen kyvyn testituloksissa oli runsaasti hajontaa siitä huolimatta, että kysymyksiin oli sinänsä vastattu asiallisesti. Koko aineistossa (n = 103) muuttujan sptotal keskiarvoksi muodostui 17,7 ja keskihajonnaksi 5,3.

8.1.3 Eri van Hielen tasoille sijoittuneiden oppilaiden spatiaalisen ajattelun taitoerot

Niistä 103 oppilaasta, jotka testattiin spatiaalisen kyvyn testillä, van Hielen taso saatiin määritettyä ilman hierarkiavirhettä 88 oppilaalle. Spatiaalisen kyvyn testin kokonaispistemäärien keskiarvot ja keskihajonnat muodostuivat vH-tasoittain tarkastellen seuraaviksi:

Taulukko 33. **Spatiaalisen testin kokonaispistemäärän sptotal keskiarvot ja keskihajonnat van Hielen tasoittain**

Oppilaan (maks.) van Hielen taso	n	sptotal k-arvo	k-haj.
0	9	13,0	5,4
1	17	13,8	6,5
1-2	24	17,5	4,6
2	19	18,9	3,3
väh. 3	19	22,0	3,6
Kaikki	88	17,6	5,5

Keskimääräisesti voidaan todeta, että spatiaalisen kyvyn indeksi kasvoi van Hielen tason kohotessa. Peräkkäisten van Hielen tasojen välillä muuttujan sptotal keskiarvojen poikkeama oli tilastollisesti melkein merkitsevä tasojen 1 ja 1-2 välillä ja tilastollisesti merkitsevä tasojen 2 ja 3 välillä.

8.2 Loogisen ajattelun taidot

8.2.1 Testin rakenne

Loogisen ajattelun testi jakaantui kolmeen osaan. Ensimmäinen osa koostui yhdeksästä osiosta, joiden avulla selvitettiin sitä, miten oppilas tulkitsee loogisia relaatioita sisältäviä propositioita. Oppilaan piti näihin osioihin vastatessaan verrata lauseissa kuvattuja ominaisuuksien yhdistelmiä ja ominaisuuksien keskinäisiä riippuvuussuhteita kuuteen kuvasarjaan A—F ja päättää, missä kuvasarjoissa kaikki kolme kuviota toteuttivat propositiossa kuvatut ominaisuudet. Toinen päättelytestin kokonaisuus muodostui neljästä laskusta, jotka olivat ratkaistavissa yksinkertaisilla yhteen- tai vähennyslaskuilla, mutta edellyttivät loogista päättelyä ratkaisustrategian löytämiseksi. Kolmas kokonaisuus sisälsi neljä analogiapäättelyä edellyttävää hahmotustehtävää.

8.2.2 Propositioiden tulkinnat sekä tulkintojen loogis-matemaattinen korrektius

Propositioiden tulkintaa koskeva osatesti osoittautui oppilaille vaikeaksi. Propositioiden tulkintatapojen analysoimiseksi on tarkoituksenmukaista erottaa implikaatioiden tulkinnassa kaksi tapaa tulkita implikaatio $p \Rightarrow q$. Lauselogiikan tulkinnan mukaan implikaatio $p \Rightarrow q$ on epätosi, jos p on tosi ja q on epätosi, ja muulloin tosi. Matematiikassa päätelmät tehdään yleensä ns. *valideina* *implikaatioina* olettaen, että premissinä esiintyvä lause p on tosi. Tapauksia, joissa p ei ole tosi, pidetään implikaatiopäätelmän kannalta epärelevantteina. Kutsumme jatkossa proposition tulkintaa *loogisesti korrektiksi*, jos siinä esiintyvät negaatiot, konjunktiot, disjunktiot ja implikaatiot on tulkittu normaalin lauselogiikan totuusarvosääntöjen mukaisesti. Vastaavasti, jos lauseessa esiintyvät negaatiot, konjunktiot, disjunktiot on tulkittu normaalin propositiologiikan totuusarvosääntöjen mukaisesti ja implikaatio on tulkittu joko logiikan totuusarvosääntöjen mukaisesti tai validina implikaationa, kutsumme proposition tulkintaa *matemaattisesti korrektiksi*.

Yleensä oppilaat eivät tulkinneet testin propositioita loogisesti korrektilla tavalla, kuten seuraava frekvenssitaulukko osoittaa.

Taulukko 34. Päättelytestin loogisesti korrektilla tavalla tulkittujen propositioiden frekvenssijakauma

Oppi- laat	Loogisesti korrektilla tavalla tulkittujen propositioiden kokonaislukumäärä (maks. 9) 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Yht.
f	8	16	31	30	14	4	4	1	0	0	108
f [%]	7,4	14,8	28,7	27,8	13,0	3,7	3,7	0,9	0,0	0,0	100,0

Oppilaat tulkitsivat yhdeksästä testiosiosta loogisesti korrektilla tavalla keskimäärin 2,5 osiota keskihajonnan ollessa 1,4 osiota. Taulukossa 34 esitettyjen frekvenssien voidaan katsoa kuvaavan varsin luotettavasti sitä, missä määrin oppilaiden propositioille antamat tulkinnat vastaavat niiden loogisesti korrekteja tulkintoja, sillä todennäköisyys, että oppilas löytäisi oikean vastauskombinaation puhtaasti arvaamalla, on vain $1/63 \approx 0{,}016$.

Eräs mahdollinen selitys oppilaiden vaatimattomalle suoritustasolle loogisten väitelauseiden tulkinnassa voisi olla se, että kaikki eivät ohjeista huolimatta ymmärtäneet, miten heidän oletettiin vastaavan testin alkuosan lauseosioihin. Selitys vaikuttaa kuitenkin kahdestakin syystä epätodennäköiseltä. Ensinnäkin oppilaille näytettiin esimerkkiosiota käyttäen havainnollisesti ennen varsinaisen testitilanteen alkua, miten testiosioihin teknisesti kuuluu vastata, eikä epätietoisuutta tässä suhteessa ilmennyt. Toiseksi siitä huolimatta, että vain harvat oppilaat tulkitsivat osiot loogisesti korrektisti, loogisesti epätyydyttävät tulkinnat eivät kuitenkaan olleet sattumanvaraisia, vaan ne kasautuivat yleensä muutamaan tyypilliseen ja ymmärrettävään tulkintaan, minkä voi todeta seuraavasta taulukosta.

Taulukko 35. Päättelytestin lauseosioiden yleisimmät vastaustyypit

	Loogisesti oikea vastaus			Yleisin vastaus			Toiseksi yleisin vastaus			Kolmanneksi yleisin vastaus		
Lause	Yhdist.	f	f [%]	Yhdist.	f	f [%]	Yhdist.	f	f [%]	Yhdist.	f	f [%]
1	**D**	73	67,6	**D**	73	67,6	ACDF	14	13,0	BDF	9	8,3
2	**A**	93	86,1	**A**	93	86,1	AF	11	10,2	AC, AD	2	1,9
3	**AC**	49	45,4	**AC**	49	45,4	ACD	15	13,9	C	6	5,6
4*	**ACDF**	3	2,8	C**	63	58,3	AC	17	15,7	**ACDF**	3	2,8
5	**BCDE**	11	10,2	C	24	22,2	CE	16	14,8	**BCDE**	11	10,2
6*	**BCDE**	4	3,7	D**	57	52,8	BD	19	17,6	BDF	13	12,0
7*	**DE**	4	3,7	D**	52	48,1	BF	7	6,5	BDF	6	5,6
8*	**ACE**	7	6,5	A**	77	71,3	AF	10	9,3	**ACE**	7	6,5
9	**DE**	31	28,7	**DE**	31	28,7	D	12	11,1	AD	11	10,2

*Lause on implikaatio eli tyyppiä ”jos A, niin B”. ** Lauseen tulkinta vastaa validia implikaatiota.

Lauseet 1 $(p \wedge q)$, 2 $(p \wedge \overline{q})$, 3 $((p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q))$ ja 9 $((p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}))$, joissa esiintyi vain negaatio, konjunktio ja disjunktio, tulkittiin yleisimmin logiikan standarditulkinnan mukaisesti. Lauseen 5 $(\overline{p} \vee q)$ tulkinta osoittautui kuitenkin yllättävän vaikeaksi. Vain noin joka kymmenes oppilas osasi kytkeä lauseen merkityssisällön kuviosarjojen A—F kontekstiin. Osioon 5 yleisimmin tarjottu vastaus C viittasi siihen, että lauseessa esiintynyt disjunktio tulkittiin useimmiten konjunktioksi $(\overline{p} \wedge q)$.

Yleisimmät tulkinnat implikaatiomuotoisille lauseille 4 $(\overline{p} \Rightarrow q$ eli $p \vee q)$, 6 $(p \Rightarrow q)$, 7 $((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q))$ ja 8 $(p \Rightarrow \overline{q})$ vastaavat lauseiden tulkintaa valideina implikaatioina, jolloin kuvioiden edellytetään täyttävän ne ominaisuudet, jotka esiintyvät johtopäätösten premisseinä, kuten matemaattisessa päättelyssä on tavanomaista. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi lauseen 7 "Jos kuvio on ympyrä tai viivoitettu, niin sitten se on niitä molempia" kannalta vain kuviosarjoja A, C ja D, joissa esiintyvät kuviot todella ovat ympyröitä tai viivoitettuja kuvioita, pidetään tarkasteltavan proposition kannalta relevantteina. Kuviosarjat B, E ja F ovat proposition 7 sisällön kannalta epärelevantteja eikä niitä pidetä mahdollisina vastausehdokkaina. Koska relevanteista vaihtoehdoista vain D:ssä toteutuu lauseessa mainittu jälkimmäinen ominaisuusyhdistelmä "kuviot ovat ympyröitä ja viivoitettuja", D yksistään annetaan vastaukseksi.

Matemaattisesti korrektilla tavalla tulkittujen propositioiden lukumäärät olivat oppilailla seuraavat:

Taulukko 36. **Päättelytestin matemaattisesti korrektilla tavalla tulkittujen propositioiden frekvenssijakauma**

	Matemaattisesti korrektilla tavalla tulkittujen propositioiden kokonaislukumäärä (maks. 9)										
Oppilaat	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Yht.
f	4	6	5	10	18	13	28	19	5	0	108
f [%]	3,7	5,6	4,6	9,3	16,7	12,0	25,9	17,6	4,6	0,0	100,0

Oppilaat tulkitsivat matemaattisesti korrektilla tavalla keskimäärin 4,8 osiota yhdeksästä keskihajonnan ollessa 2,0 osiota.

8.2.3 Lasku- ja analogiaosiot

Testin lasku- ja analogiaosiot osoittautuivat oppilaille selvästi propositio-osioita helpommiksi. Osioittain oikeita suorituksia esiintyi seuraavasti:

Taulukko 37. **Päättelytestin lasku- analogiaosioiden suoritusprosentit luokkatasoittain ja sukupuolittain. Sulkeissa oleva luku ilmoittaa keskihajonnan osioon liittyvälle dikotomiselle muuttujalle, osio oikein (= 1) tai osio väärin (= 0).**

	Laskut				Analogiat			
	1	2	3	4	1	2	3	4
7. lk	85,0	82,5	42,5	47,5	90,0	77,5	42,5	90,0
(n = 40)	(0,362)	(0,385)	(0,501)	(0,506)	(0,304)	(0,423)	(0,501)	(0,304)
9. lk	91,2	88,2	50,0	52,9	91,2	82,4	60,3	91,2
(n = 68)	(0,280)	(0,325)	(0,504)	(0,503)	(0,286)	(0,384)	(0,493)	(0,286)
Tytöt	87,8	79,6	40,8	49,0	95,9	85,7	53,1	95,9
(n = 49)	(0,331)	(0,407)	(0,497)	(0,505)	(0,200)	(0,354)	(0,504)	(0,200)
Pojat	89,8	91,5	52,5	52,5	86,4	76,3	54,2	86,4
(n = 59)	(0,305)	(0,281)	(0,504)	(0,504)	(0,345)	0,429)	(0,502)	(0,345)
Kaikki	88,9	86,1	47,2	50,9	90,7	80,6	53,7	90,7
(n = 108)	(0,316)	(0,347)	(0,502)	(0,502)	(0,291)	(0,398)	(0,501)	(0,291)

Oppilaat saivat neljästä laskusta keskimäärin 2,7 oikein keskihajonnan ollessa 1,0. Vastaavasti neljästä analogiaosiosta oikein suoritettiin keskimäärin 3,2 osiota keskihajonnan ollessa 1,2 osiota.

8.2.4 Päättelytaidon testin kokonaispistemäärän määräytyminen

Oppilaan suoriutumista päättelytaidon testistä arvioitiin kahdella summamuuttujalla *LoogPäätt* ja *MatPäätt*, joita kutsuttiin mainitussa järjestyksessä loogiseksi päättelytaidoksi ja matemaattiseksi päättelytaidoksi. Sekä *LoogPäätt* että *MatPäätt* muodostettiin summamuuttujina yhdeksästä propositio-osiosta, neljästä laskuosiosta ja neljästä analogiaosiosta. Kukin osio pisteitettiin ykköseksi (1), jos siihen oli vastattu oikein ja muussa tapauksessa nollaksi (0). Kumpikin muuttujista *LoogPäätt* ja *MatPäätt* saivat näin arvokseen kokonaislukuarvon väliltä 0, …, 17. Muuttujaa *LoogPäätt* muodostettaessa implikaatiomuotoisten propositioiden oikeaksi suoritukseksi hyväksyttiin vain propositioiden loogisesti korrekti tulkinta. Muuttujan *MatPäätt* arvoa määritettäessä näiden propositioiden oikeaksi tulkinnaksi hyväksyttiin edellistä väljempi matemaattisesti korrekti tulkinta.

Alfa-kertoimeksi summamuuttujalle *LoogPäätt* saatiin 0,74 ja summamuuttujalle *MatPäätt* 0,72, joten päättelytaidon testiä voi kokonaisuutena pitää kohtalaisen reliaabelina.

8.2.5 Päättelytaidon erot tyttöjen ja poikien sekä eri luokkatasojen välillä

Päättelytestiin osallistui 49 tyttöä, joista 13 oli 7.-luokkalaisia ja 36 9.-luokkalaisia sekä 59 poikaa, joista 27 oli 7.-luokkalaisia ja 32 oli 9.-luokkalaisia. Testatuista oppilaista oli siis seitsemäsluokkalaisia 40 ja yhdeksäsluokkalaisia 68.

Propositioiden tulkinnoissa ei esiintynyt sen enempää tulkintatavoissa kuin tulkintojen oikeellisuudessakaan suorituseroja eri sukupuolten eikä eri luokkatasoilla olleiden oppilaiden kesken.

Laskujen ja analogiatehtävien keskimääräisessä suoritustasossa tyttöjen ja poikien välillä ei esiintynyt tilastollisesti merkitseviä eroja. Huomionarvoinen yksityiskohta on kuitenkin se, että pojat selviytyivät laskuista keskimäärin paremmin kuin tytöt ja tytöt puolestaan analogiaosioista keskimäärin paremmin kuin pojat. Oikein suoritettujen laskujen keski-arvo oli pojilla 2,86 (k.-haj. 0,99) ja tytöillä 2,57 (k.-haj. 1,00). Oikein suoritettujen analogiaosioiden keski-arvo oli tytöillä 3,31 (k.-haj. 0,90) ja pojilla 3,03 (k.-haj. 1,31).

Yhdeksäsluokkalaiset suoriutuivat sekä päättelytestiin sisältyneistä laskuista että analogiatehtävistä jonkin verran paremmin kuin seitsemäsluokkalaiset. Suorituserot eivät kuitenkaan olleet tilastollisesti merkitseviä. Oikein suoritettujen laskujen keski-arvo oli 7.-luokkalaisilla 2,58 (k.-haj. 0,93) ja 9.-luokkalaisilla 2,82 (k.-haj. 1,04). Vastaavasti oikein suoritettujen analogiatehtävien keski-arvo oli 7.-luokkalaisilla 3,00 (k.-haj. 1,18) ja 9.-luokkalaisilla 3,25 (k.-haj. 1,13).

Summamuuttujan *LoogPäätt* keskiarvo oli tytöillä 8,39 (k.haj. 2,19) ja pojilla 8,47 (k.haj. 3,21). Vastaavasti summamuuttujan *MatPäätt* keskiarvo oli tytöillä 10,88 (k.haj. 2,63) ja pojilla 10,63 (k.haj. 3,62). Erot eivät olleet tilastollisesti merkitseviä.

Summamuuttujan *LoogPäätt* keskiarvo oli 7.-luokkalaisilla 8,15 (k.haj. 3,02) ja 9.-luokkalaisilla 8,60 (k.haj. 2,65). Vastaavasti summamuuttujan *MatPäätt* keskiarvo oli 7.-luokkalaisilla 10,48 (k.haj. 3,16) ja 9.-luokkalaisilla 10,90 (k.haj. 3,23). Erot eivät olleet tilastollisesti merkitseviä.

8.2.6 Eri van Hielen tasoille sijoittuneiden oppilaiden päättelytaidon erot

Niistä 108 oppilaasta, jotka osallistuivat tutkimuskokonaisuuteen sisältyneeseen päättelytestiin, van Hielen taso saatiin ilman hierarkiavirhettä määritettyä 85 oppilaalle.

Tulokset osoittavat, että mitä korkeampi oppilaan van Hielen taso oli, sitä todennäköisemmin hän kykeni vertaamaan loogisia konnektiiveja ja relaatioita sisältävän lauseen merkityssisältöä kuvan antamaan informaatioon. Sama trendi on havaittavissa laskujen ja analogioiden ratkaisujen suhteen, kuten taulukosta 38 voidaan todeta.

Taulukko 38. Päättelytaidon komponentit ja päättelytaitotestin kokonaissuoritustaso van Hielen tasoittain

Oppilaan van Hielen taso	Propositioiden tulkinta: loogisesti korrektisti (maks. 9)		Propositioiden tulkinta: matem. korrektisti (maks. 9)		Laskut (maks. 4)		Analogiat (maks. 4)		Kokonaispistemäärä: LoogPäätt (maks. 17)		Kokonaispistemäärä: MatPäätt (maks. 17)	
vH0 (n = 8)	1,38	(1,06)	3,13	(2,30)	1,75	(1,39)	2,50	(1,51)	5,63	(2,50)	7,38	(3,25)
vH1 (n =12)	1,75	(1,87)	3,92	(2,07)	2,17	(1,03)	2,92	(1,38)	6,83	(3,59)	9,00	(3,62)
vH1-2 (n = 23)	2,30	(1,11)	5,04	(2,03)	2,70	(0,88)	3,00	(1,17)	8,00	(2,52)	10,74	(3,28)
vH2 (n = 21)	2,45	(1,08)	5,05	(1,91)	2,81	(0,93)	3,48	(0,68)	8,76	(1,84)	11,33	(2,52)
≥vH3 (n = 19)	4,11	(1,15)	6,21	(1,03)	3,26	(0,87)	3,58	(0,84)	10,9	(1,90)	13,05	(1,75)

Kuten taulukosta voidaan todeta, erot peräkkäisten van Hielen tasojen päättelytestin kokonaispistemäärien keskiarvoissa olivat suhteellisen pieniä verrattuina korkeisiin hajonta-arvoihin, joten keskiarvojen erot eivät nousseet tilastollisesti merkitseviksi. Sen sijaan muiden kuin peräkkäisten van Hielen tasojen määräämien oppilasryhmien päättelytaitotestin kokonaispistemäärien keskiarvot poikkesivat tilastollisestikin merkitsevästi.

8.3 Visuaalinen muistikapasiteetti

8.3.1 Testin rakenne ja testituloksia kuvaavat muuttujat

Visuaalisen muistikapasiteetin testi *FIT* sisältää yhteensä 36 kuvaosiota, joilla mitataan niiden visuaalisten skeemojen kokonaislukumäärää, joita koehenkilö kykenee yhtä aikaa käsittelemään. Kukin osio pisteitettiin siten, että sitä vastaava dikotominen muuttuja sai arvon 1, jos osio oli oikein suoritettu, ja arvon 0 muulloin. Dikotomisista osioista muodostettiin testin kokonaispistemäärää kuvaava summamuuttuja FIT-score, jonka maksimiarvoksi näin tuli 36. Testi on laatijoidensa toimesta huolellisesti esitestattu, joten yllätys ei ollut, että testin reliabiliteetti oli tälläkin aineistolla (n = 97) korkea. Cronbachin α-kertoimen arvoksi saatiin 0,91, mikä vastaa hyvin niitä arvoja, joita testin α-kertoimelle on aiemmissa tutkimuksissa saatu. Johnsonin (1982, 13) mukaan testin keskimääräinen α-kerroin oli tuohon mennessä raportoiduissa tutkimuksissa ollut 0,88.

8.3.2 Tyttöjen ja poikien sekä eri luokkatasojen oppilaiden erot visuaalisessa muistikapasiteetissa

Kaikkien testiin osallistuneiden oppilaiden testin kokonaispistemäärien FIT-score keskiarvo oli 26,4 pistettä keskihajonnan ollessa 6,8 pistettä. Tytöt (n = 51) menestyivät visuaalisen muistikapasiteetin testissä lievästi poikia (n = 38) paremmin. Ero oli tilastollisesti melkein merkitsevä ($p < 0,032$). Tytöillä testin kokonaispistemäärän keskiarvo oli 27,8 (k-haj. 6,3) ja pojilla 24,7 (k-haj. 6,8).

Yhdeksäsluokkalaisten (n = 45) kokonaispistemäärien keskiarvo 27,2 (k-haj. 6,1) oli hivenen, mutta ei tilastollisesti merkitsevästi, korkeampi kuin seitsemäsluokkalaisten (n = 44) vastaava arvo 25,8 (k-haj. 7,2).

8.3.3 Eri van Hielen tasoille sijoittuneiden oppilaiden muistikapasiteetin erot

Visuaalisen muistikapasiteetin testillä testatuista oppilaista van Hielen taso saatiin määritettyä ilman hierarkiavirhettä 74 oppilaalle. Muistikapasiteettitestin kokonaispistemäärien FIT-score keskiarvot ja keskihajonnat muodostuivat van Hielen tasoittain tarkastellen seuraaviksi:

Taulukko 39. Visuaalisen muistikapasiteetin testin *FIT* kokonaispistemäärän FIT-score keskiarvot ja keskihajonnat van Hielen tasoittain

Oppilaan (maks.) van Hielen taso	n	FIT-score k-arvo	k-haj.
vH0	15	22,1	8,4
vH1	21	23,8	6,2
vH1-2	24	29,0	4,4
vH2	10	28,5	6,8
≥vH3	4	33,3	3,1
Kaikki	74	26,3	6,9

Keskimääräisesti voidaan todeta, että indeksi FIT-score on ylemmillä van Hielen tasoilla pääsääntöisesti korkeampi kuin alemmilla (vrt. tasot 1-2 ja 2). Peräkkäisten van Hielen tasojen välillä muuttujan FIT-score keskiarvojen poikkeama oli tilastollisesti melkein merkitsevä tasojen 2 ja ≥3 välillä ja tilastollisesti merkitsevä tasojen 1 ja 1-2 välillä. Korrelaatio FIT-score -muuttujan ja muuttujan vHcum, joka saatiin summaamalla kunkin van Hielen tason 1, 1-2, 2 ja 3 testien välille 0,00—1,00 koodattu suhteellinen suoritustaso, oli 0,36 ($p = 0{,}001$).

Muistikapasiteetti asettaa luvussa 4.4 viitatun näkemyksen mukaisesti kvantitatiivisen rajan sille, millaisia Piaget-tasojen kautta kuvattuja kvalitatiivisia piirteitä yksilön kognitiivisissa rakenteissa voi ilmetä. Mahdollista on, että oppilaan muistikapasiteetti säätelee samantyyppisesti myös geometrisessa ajattelussa ilmeneviä laadullisia tietorakenteen muutoksia, joiden kuvaamiseen on käytetty mm. van Hielen tasoja. van Hielen tason ja muistikapasiteetin välisen kytkennän selvittämiseksi oppilaille muodostettiin seitsenportainen indeksi SIT (1, 2, …, 7), joka viittaa niiden visuaalisten skeemojen maksimimäärään, joita koehenkilö kykenee samanaikaisesti prosessoimaan. SIT-indeksi muodostettiin summamuuttujasta FIT-score testin manuaalissa (Johnson 1982) olevan luokituksen mukaisesti

FIT-score	0—4	5—9	10—15	16—20	21—25	26—30	31—36
SIT	1	2	3	4	5	6	7

Oppilaita, joille saatiin määritetyksi sekä muistikapasiteetin indeksi SIT että maksimaalinen van Hielen taso oli kaikkiaan 74. vH-tasoittain tarkastellen oppilaiden muistikapasiteetin arvot vaihtelivat seuraavasti:

Taulukko 40. **Oppilaan samanaikaisesti hallitsemien visuaalisten skeemojen maksimaalinen lukumäärä suhteessa oppilaan van Hielen tasoon**

	Oppilaan van Hielen taso					
SIT	vH0	vH1	vH1-2	vH2	≥vH3	Yht.
3	3	1				7
4	3	3	1	1		8
5	3	9	3	3		18
6	1	4	8	2	1	16
7	5	4	12	6	3	30
Yht.	15	21	24	10	4	74

Taulukon solufrekvenssit ovat niin alhaisia, ettei van Hielen tason ja muistikapasiteetin välisestä riippuvuudesta voi tällä perusteella sanoa mitään varmaa. Testisuureen χ^2 arvo on 26,009 (df = 16), jolloin riippumattomuusoletus voitaisiin hylätä riskitasolla $p < .054$. Viitteitä aineisto kuitenkin antaa siitä, että korkeimmille van Hielen tasoille yltäminen edellyttää oppilaalta myös riittävää visuaalista muistikapasiteettia.

9 Tutkimustulosten yleistarkastelu

9.1 Käsitetiedon kehittymistä kuvaavan mallin arviointi

Tutkimuksen teoreettisessa osassa rakennettiin yleinen viitekehys geometrisen käsitetiedon kehittymisen kuvaukseen, eräänlainen malli kehityskulun osatekijöistä. Tarkastelujen ytimen muodosti geometrisen ajattelun kehittymisen van Hielen teoriassa kuvattu eteneminen ns. van Hielen tasojen kautta. Mallissa vH-tasojen tarkastelunäkökulmaa pyrittiin edelleen kehittämään suuntaan, joka paremmin ottaisi huomioon erityisesti geometrisen käsitetiedon kehittymisen ominaispiirteet.

Työn empiirisen osan tavoitteena oli yhtäältä koetella mallin kannalta keskeisiä van Hielen tasoihin liittyviä hypoteeseja ja konstruoidun mallin toimivuutta geometrisen käsitetiedon kehittymisen kuvauksessa yleensäkin. Tällä tutkimuksen osalla pyrittiin kartuttamaan tietoa geometrisen käsitetiedon kehittymisestä lähinnä perustutkimuksen tasolla. Toisaalta spesifimpänä empiirisen osan tavoitteena oli tarkastella mallin keskeisten piirteiden osalta yläasteen oppilaille kertyneen geometrisen käsitetietouden ominaispiirteitä ja sitä, miten tämä tietous yläasteen aikana kehittyy. Tutkimuksellisista syistä geometrista käsitetietouden karttumista ja jäsentymistä tarkasteltiin vain yhden varsin rajatun sisältöalueen osalta. Empiirinen aineisto kerättiin yhden keskisuuren tamperelaisen yläasteen lähes kaikilta luokkatasojen 7, 8 ja 9 oppilailta (n = 241). Useampien koulujen mukaan ottamista ei nähty välttämättömäksi, koska tutkimuksen pääasiallinen tarkoitus oli testata konstruoidun geometrisen käsitetiedon mallia ja löytää riittävä määrä esimerkkiaineistoa tämän pohjaksi. Tällaisenaankin aineisto muodostui niin laajaksi, että se antaa viitteenomaista tietoa myös yleisemmin peruskoulun yläasteen oppilaiden geometrisen käsitetietouden laadusta ja tämän tietouden kehityksestä yläasteen aikana. Eri luokkatasoilla olleiden oppilaiden käsitetietouden keskinäisen vertailun kautta saatiin tietoa käsitetietouden luokkatasoittaisista eroista ja poikittaistutkimuksellisesti ainakin viitteitä tämän tyyppisen tietouden kehittymisestä yläasteen aikana.

Poikittaistarkasteluissa todetut geometrisen käsitetietouden kehittymisen piirteet pyrittiin varmentamaan pitkittäistutkimuksen kautta. Osa tutkituista oppilaista (n = 85) testattiin sekä seitsemäs- että yhdeksäsluokkalaisina, jotta oppilaiden käsitetietouden kehittymistä yläasteen aikana voitiin arvioida myös samojen oppilaiden geometrisen ajattelun kehittymisen osalta. Varsinkin tietorakenteiden tutkimuksen osalta työ vaati uusien tutkimusmenetelmien kehittelyä. Geometristen tietorakenteiden kehittyminen on kaiken kaikkiaankin ollut vähän tutkittu aihealue kansainvälisestikin. Sekä teoreettisista syistä että van Hielen tasojen mittavälineen toimivuuden varmistamiseksi perinteisiin van Hielen tasoihin lisättiin taso, jota kutsuttiin empiiristen yleistysten tasoksi ja merkittiin vH1-2, tasojen vH1 ja vH2 väliin samalla kuitenkin täsmentäen myös tason vH2 tulkintaa. Uuden tason sopivuus systeemin osaksi oli luonnollisesti eräs tutkimuksessa tarkasteltava ongelma.

Geometrisen käsitetiedon kehittymistä koskevan mallin kannalta van Hielen tasojen käyttökelpoisuus oppilaiden geometrisen käsitetiedon muutosprosessien etappeina muodosti työn keskeisen ongelman.

Tarkastelen ensiksi konstruoidun mallin kannalta tärkeää van Hielen teorian perusolettamusta van Hielen tasojen muodostamasta hierarkiasta. Ongelmana oli, missä mielessä tasojen voidaan väittää muodostavan alkuperäisen teorian olettamusten mukaisesti lineaarisen hierarkian vH0 → vH1 → vH2 → vH3 → vH4 → vH5? "Tasolla" vH0 viitattiin tällöin niiden oppilaiden suoritustasoon, jotka eivät ylitä edes ensimmäisen van Hielen tason kriteeristöä. Tasojen lineaarinen järjestys tai sen puuttuminen on didaktisesti relevantti kysymys, sillä monissa yhteyksissä on aiemmin esitetty, että geometrian opetuksen sisältöineen ja metodeineen tulisi edetä noudattaen van Hielen tasojen mukaista järjestystä.

Tässä tutkimuksessa hierarkisoitumisoletusta testattiin yläasteen geometrian opetuksen kannalta relevanteimpien tasojen vH0, vH1, vH2 ja vH3 osalta siten, että edellä sanotun mukaisesti tasojen vH1 ja vH2 väliin konstruoitiin kokeilumielessä uusi välitaso vH1-2, jossa tarkasteltavat kuvioiden yhteiset geometriset ominaisuudet tulkittiin empiirisen abstraktion mukaan yleistyksiksi yli sen ja vain sen kuviojoukon, jota testiosion kuvat konkreetisti esittivät. Samalla taso vH2 tulkittiin tiukemman vaihtoehdon mukaan siten, että tälle tasolle sijoittuvat oppilaat kykenevät tarkastelemaan kuvioiden ominaisuuksia reflektiivisen abstraktion mukaan koko kuvioluokan yhteisinä ominaisuuksina.

Testattu hierarkisoitumisoletus oli tässä tutkimuksessa muotoa vH0 → vH1 → vH1-2 → vH2 → vH3. Työssä erotettiin kaksi erityyppistä tulkintaa mahdolliselle hierarkialle eli ns. vahva ja heikko hierarkia (ks. luku 6.3). Testitulokset eivät tukeneet oletusta vahvasta hierarkiasta, joka olisi tarkoittanut, että tasojen saavuttamisen järjestys on alkuperäisen van Hielen teorian mukaisesti vakio, vH1 saavutetaan ennen vH1-2:ta, vH1-2 ennen vH2:ta jne. Ennemminkin, kun van Hielen tasoja tarkasteltiin ns. Gutiérrez-tasojen (vrt. Gutiérrez 1991a) tyyppisinä G-tasoina, tasot näyttivät muodostavan heikon hierarkian. Tämän tulkinnan mukaan on todennäköistä, että oppilaiden geometrian taidoissa tapahtuu edistymistä useamman kuin yhden tason toimintojen osalta samanaikaisesti alemman van Hielen tason mukaisten piirteiden ollessa kehityksessä kuitenkin yleensä edellä sitä korkeampien van Hielen tasojen mukaisen ajattelun piirteitä.

Struktuuriin lisätty taso vH1-2 erottui tarkasteluissa omaksi tasokseen yhtä hyvin kuin muutkin tarkastellut kehitystasot. Hierarkiatarkasteluissa se sijoittui tasohierarkiassa sille paikalle, mihin sen karakterisointinsa ja käsitetiedon kehittymisen teoreettisen tarkastelun mukaan oletettiinkin sijoittuvan (ks. luku 2.3.2). Tässä mielessä lisätyn tason vH1-2 olemassaoloa voi pitää oikeutettuna ja tarkennuksena alkuperäisten van Hielen tasojen muodostamaan struktuuriin.

Näkökulma, jonka van Hielen teoria tarjoaa geometrisen ajattelun kehittymiseen, on varsin yleinen. Teoria kuvaa lähinnä globaaleja koko geometriakäsityksessä ja kulloinkin prosessoinnin kohteena olevien asioiden havainnointitavassa tapahtuvia suuria muutoksia. Tässä globaalissa mielessä teoriaa voidaan tämänkin tutkimuksen tulosten kannalta edelleen pitää validina — varsinkin, jos taso vH2 jaetaan edellä esitetyn mukaisesti kahtia ja tasojen muodostama hierarkia tulkitaan heikoksi hierarkiaksi. Teoria kertoo kuitenkin itse asiassa vähän niistä prosesseista, joiden kautta geometrinen käsitetietous, joka tässä tutkimuksessa oli tarkastelun polttopisteessä, karttuu ja syvenee. Tässä tutkimuksessa van Hielen teorian tarkastelutapaa haluttiin spesifioida konstruoimalla tarkempi hypoteettinen malli geometrisen käsitetietouden kehittymisestä, joka ottaa huomioon sellaiset seikat, jotka entuudestaan tiedetään olevan tyypillisiä eri-ikäisten ja eri kehitystasoilla olevien oppilaiden geometriselle käsitteenmuodostukselle (ks. luku 3.4). Yhtäältä mallilla pyritään kuvaamaan sitä kehityskulkua, jolla geometrisen käsitetiedon elementit eli yksittäiset geometriset käsitteet kypsyvät oppilaan mielessä visuaaliseen prototyyppiin tai useisiin sellaisiin ankkuroituvista geometristen käsitteiden konkreeteista esi-ideoista vähitellen matemaattisesti määritellyiksi ideatason käsitteiksi. Toisaalta malli kuvaa myös sitä pitkäkestoista kehityskulkua, jossa erilliset geometriset käsitteet vähitellen muodostavat tietorakenteita. Käsitteenmuodostuksen etenemisen kriittinen elementti on se, millaisin välinein oppija itse kykenee reflektoimaan ts. tässä tapauksessa visualisoimaan, kuvaamaan verbaalisesti ja rajamaan käsitteidensä merkityssisältöä. Laajasti tulkittuna kyse on tällöin määrittelytaitojen kehittymisestä.

Empirian perusteella matemaattisen määrittelyn idea näyttää kehittyvän seuraavien van Hielen tasojen luonnehdintoihin hyvin sopivien vaiheiden kautta. Alussa käsitteen merkityssisällön ensisijainen määrittäjä on mielikuva käsitteen tyypillisestä edustajasta tai edustajista eli ns. käsitteen 'image', prototyyppi. Tämän jälkeen vuoroon näyttää tulevan käsitteen määrittely listamääritelmänä, jossa määrittelevien piirteiden kokonaisuus on lähestulkoon jäsentymätön ja oppilaan mielestä sitä parempi, mitä pidempi lista on. Matemaattisen määrittelyn idea kehittyy vasta pitkän työstämisen jälkeen. Kysyä sopii kummasta tämä ensisijaisesti johtuu, asian syvällisyydestäkö, vaiko siitä, ettei määrittelytaitojen oppimista ole koulussa pidetty arvossa eikä niiden oppimisesta siksi ole kannettu huolta.

Vasta taito määritellä käsitteet valikoivasti riittävien ja välttämättömien ehtojen yhdistelmänä eli käsitteen loogisen ytimen ymmärtäminen antaa mahdollisuuden tarkastella käsitteiden välisiä yhteyksiä. Tietorakenteiden jäsentyminen edellyttää käsitteiden merkityssisältöjen analysoimista ja sitä kautta kehittyneitä määrittelytaitoja. Tutkimuksen empiirinen aineisto osoittaa selvästi, miten käsitteiden erillisyys, karsinoiva luokittelu on tyypillistä siinä oppimisprosessin vaiheessa, jolloin määrittelytaidot ovat puutteellisesti kehittyneet ja käsitteiden merkityssisällöt määräytyvät prototyyppisesti käsitteen esimerkkitapausten kautta ja listamäärittelynä.

Kuten erityisesti Fischbein on viime vuosien aikaisessa tutkimuksissaan korostanut, geometrisille käsitteille on tyypillistä niiden ns. figuratiivinen kaksoisluonne (Fischbein 1993 ja Fischbein

& Nachlieli 1998; ks. myös luku 3.3.2). Vaikka geometrinen käsite hallittaisiin eksplisiittisesti so. ymmärrettäisiin määritelmänsä kautta spesifioiduksi matemaattiseksi entiteetiksi, niin osa sen merkityssisällöstä kuitenkin aina määrittyy intuitiivisesti käsitteen visuaalisen merkityssisällön kautta. Tässä tutkimuksessa esitetyssä geometrisen käsitetiedon kehittymisen kuvauksessa keskeiseksi tekijäksi esiin nostettujen implisiittisten ja eksplisiittisten merkitysten (ks. luvut 3.3.4.1 ja 3.3.4.2) yhteensovittamisessa nähtiin ns. visuaalisen varioinnin kyky, jolla tarkoitettiin oppijan kykyä tuottaa mielikuvatasolla tarkoitushakuisesti erityyppisiä esimerkkitapauksia tarkastelemilleen geometrisille käsitteille tai niiden relaatioille. On selvää, että hypoteesien koettelu ja erityisesti virheellisten hypoteesien hylkääminen tapahtuu usein juuri visuaalisen varioinnin keinoin. Toisaalta juuri käsitteen eksplisiittinen merkitys asettaa rajat mielikuvituksen lennolle visuaalisessa varioinnissa. Kuten edellä todettiin, määrittelytaitojen kehittymisellä on merkittävä osuus siihen, miten käsitteen implisiittinen merkitys pääsee täsmentymään eksplisiittisen merkityksen kautta.

Toinen van Hielen tasoihin liittynyt ongelmakenttä, jota tässä tutkimuksessa tarkasteltiin, oli kysymys siitä, kuinka selkeästi sellaiset geometrisen käsitetiedon kehittymisen mallissa tärkeäksi nähdyt piirteet, kuten (a) prototyyppiprosessien väheneminen, (b) visuaalisen variaatiokyvyn kasvu, (c) määrittelytaitojen kehittyminen ja (d) käsitteiden välisten relaatioiden selkiytyminen, jotka eivät eksplisiittisesti ole sisältyneet tähänastisiin yleisimmin käytettyihin van Hielen tasojen määritystapoihin, kytkeytyvät oppilaan van Hielen tasoilla mitattuun geometrisen ajattelun kehitykseen.

Keskimääräisesti tarkastellen yllä mainituissa piirteissä tapahtui odotettua edistymistä van Hielen tasojen nousun myötä. Prototyyppinen luokittelu oli tilastollisesti erittäin merkitsevästi yleisempää niillä oppilailla, jotka eivät yltäneet edes ensimmäiselle van Hielen tasolle, kuin niillä oppilailla, jotka ylsivät varsinaisille van Hielen tasoille vH1, vH1-2, vH2 ja vH3 (tai sen yli). Myös visuaalisen varioinnin taito lisääntyi systemaattisesti van Hielen tason kohotessa. Määrittelytaidolla ja oppilaan van Hielen tasolla oli tilastollisesti erittäin merkitsevä yhteys. Ylemmille van Hielen tasoille sijoittuneet oppilaat kykenivät kuvioiden määrittelyyn selvästi paremmin kuin alemmille van Hielen tasoille sijoittuneet oppilaat. Edelleen mitä ylempää van Hielen tasoa tarkastellaan sitä useammalla oppilaalla kolmioiden tyypitysten ja käsitesuhteiden tulkinnat ovat standarditulkintojen mukaisia. Nelikulmioiden tyypitysten ja käsitesuhteiden tulkintaerot eri van Hielen tasoille sijoittuneiden oppilaiden kesken olivat monessa suhteessa odotusten mukaiset. Toinen toisensa poissulkeva, karsinoiva luokittelu (D) väheni systemaattisesti siirryttäessä alemmilta van Hielen tasoilta ylemmille. Vastaavasti standarditulkinnan mukainen hierarkkinen luokkainkluusio (I) yleistyi. Erityisesti tietorakenteiden eheytyminen näkyi tasolla vH3, mutta yllätyksenä voidaan kuitenkin pitää sitä, että vielä tälläkin tasolla eräät käsitesuhteiden tulkinnoista poikkeavat varsin yleisesti standarditulkinnasta. Tämän voi katsoa olevan ristiriidassa van Hielen tasolle vH3 yleensä annettujen luonnehdintojen kanssa.

Kovin yhtenäistä ryhmää samalle van Hielen tasolle sijoittuneet oppilaat eivät geometrisen käsitetiedon kehittyneisyyden suhteen muodosta, mikä vähentää uskottavuutta selvästi erillisten van Hielen tasojen olemassaoloon geometrisen käsitetiedon kehityskulussa. Edellä kuvattu heikon hierarkian mukainen kehitystrendi vaikuttaa tässäkin mielessä uskottavammalta. van Hielen teorian vastaisesti esimerkiksi kuvioiden määrittely tuotti suuria vaikeuksia myös merkittävälle osalle kolmannen van Hielen tason kriteerin ylittäneistä oppilaista. Kuvaileva, jäsentymätön listamäärittely oli yleensäkin tavallista kaikilla van Hielen tasoilla. Myöskään mitään yksittäistä van Hielen tasoa ei voida erottaa, josta lähtien käsitteiden väliset suhteet yleisesti ottaen olisi hallittu. Edes kolmannelle van Hielen tasolle yltäneet oppilaat eivät kaikki tulkinneet käsitesuhteita tavalla, joka matematiikassa on tavanomaista. Monien relaatioiden osalta jopa 30—40 % oppilaista tulkitsi ne epästandardilla tavalla. Toisaalta monet alimmille van Hielen tasoille sijoittuneet oppilaat näyttivät hahmottavan käsitteiden välisiä relaatioita oikein. Edellä sanotun nojalla käsitesuhteiden ymmärtämistä ei tämän aineiston perusteella voi pitää kovin luotettavana van Hielen tasoa 3 ja sitä alempia tasoja erottavana piirteenä vastoin kuin monissa van Hielen tasojen karakterisoinneissa on otaksuttu. Mikäli määrittelytaito halutaan säilyttää van Hielen tason vH3 kriteerinä, se entisestään loitontaa tasoja vH2 ja vH3 toisistaan. Tasojen erottumisen kannalta tämä on hyvä asia, mutta jos käsitetietouden kehittymistä pyritään ymmärtämään prosessina, tämä lisää paineita välitason vH2 ja vH3 lisäämiseksi systeemiin.

Kolmantena tutkimusongelmana selvitettiin van Hielen tasojen yhteyttä eräisiin visuo-spatiaalisen informaation prosessoinnin yleisedellytyksiin, jotka ovat geometrisista oppisisällöistä riippumattomia. Tällaisia olivat oppilaan loogisen päättelyn ja spatiaalisen ajattelun taidot sekä oppilaan visuaalisen työmuistin kapasiteetti. Kaikilla näillä kolmella taustamuuttujalla oli selkeä tilastollinen yhteys oppilaan van Hielen tasoon. Niistä 108 oppilaasta, jotka osallistuivat tutkimuskokonaisuuteen sisältyneeseen päättelytestiin, van Hielen taso saatiin ilman hierarkiavirhettä määritettyä 85 oppilaalle. Mitä korkeampi oppilaan van Hielen taso oli, sitä todennäköisemmin hän kykeni vertaamaan loogisia konnektiiveja ja relaatioita sisältävän lauseen merkityssisältöä kuvan antamaan informaatioon, suoriutumaan loogista päättelyä sekä visualisointia edellyttävistä laskuista ja ratkaisemaan visuaalisia analogiatehtäviä. Niistä 103 oppilaasta, jotka testattiin spatiaalisen kyvyn testillä ja jotka vastasivat testiin niin täydellisesti, että heille testin kokonaispistemäärä oli mielekästä määrittää, van Hielen taso saatiin määritettyä ilman hierarkiavirhettä 88 oppilaalle. Keskimääräisesti voidaan todeta, että mitattu spatiaalisen kyvyn indeksi nousi systemaattisesti siirryttäessä ylemmille van Hielen tasoille. Visuaalisen muistikapasiteetin testillä testatuista oppilaista van Hielen taso saatiin määritettyä ilman hierarkiavirhettä 74 oppilaalle. Oppilaan van Hielen tasolla ja hänen visuaalisella muistikapasiteetillaan todettiin olevan suhteellisen selkeä yhteys toisiinsa. Sen koommin spatiaalisen ajattelun, loogisen päättelyn tai työmuistin kapasiteetin testikään ei edellyttänyt juuri minkäänlaista geometrian tietämystä, joten näiden tekijöiden näinkin selkeä yhteys van Hielen tasoihin heijastanee sitä, että jäsentyneen käsitetiedon rakentumisessa visualisoinnin taidoilla, struktuurien hahmottamisella, loogisella päättelyllä ja kyvyllä tarkastella monia tekijöitä samanaikaisesti on osuutensa. Siihen, missä määrin tällaiset taidot ovat opetuksen kautta kehitettävissä, tämä tutkimus ei anna vastausta.

9.2 Yläasteen oppilaiden geometrisen käsitetiedon arviointi

Seuraavaksi tarkastelen sitä, miten oppilaiden geometrinen käsitetieto tarkastellussa kontekstissa kehittyi yläasteen aikana. Ongelmaan haettiin vastausta sekä poikittais- että pitkittäistarkastelulla. Käsitetiedon kehittyneisyyden tunnusmerkkeinä käytin van Hielen tasojen lisäksi (a) prototyyppiprosessien vähenemistä, (b) visuaalisen variointikyvyn kasvua, (c) määrittelytaitojen kehittyneisyyttä ja (d) käsitteiden välisten relaatioiden lähentymistä kohden standarditulkintoja. Lisäksi selvitin, eroavatko eritasoisesti matematiikassa menestyvät (matematiikan arvosana) geometrisen käsitetiedon kehittyneisyyden suhteen toisistaan ja millaisia nämä erot siinä tapauksessa, ja onko aineistosta todettavissa muita selviä osaryhmäeroja, kuten esimerkiksi eroja eri sukupuolten välillä?

Maksimaalisissa van Hielen tasoissa ei havaittu merkittäviä luokkatasokohtaisia eroja. Tästä näkökulmasta näytti siis siltä, ettei oppilaiden geometrisessa käsitetiedossa yläasteen aikana tapahdu juurikaan kehittymistä. Yllätyksenä voitaneen pitää sitä, että korkeimmalle mitatulle van Hielen tasolle yltäneissä poikia (18) oli selvästi enemmän kuin tyttöjä (11), kuten myös toiseksi alimmalla van Hielen tasolla, johon poikia sijoittui 27 ja tyttöjä 20. Näytti siis siltä, että poikien saavutustasoissa oli hajontaa enemmän kuin tytöillä.

Tämän tutkimuksen ja aiemmin saamieni tulosten (Silfverberg 1986) perusteella voin varovaisesti todeta, että

(1) eri mittariversioilla mitaten jokaiselta yläasteen luokkatasolta näyttää löytyvän huomattava määrä oppilaita, jotka eivät yllä edes van Hielen tasolle 1 (visualisoinnin taso),

(2) yleensä enintään 15 % oppilaista kullakin yläasteen luokkatasolla sijoittuu kolmannelle (ominaisuuksien järjestämisen tasolle) tai sitä ylemmälle van Hielen tasolle. Joka tapauksessa määrä on huomattavasti pienempi kuin lukio-opinnoissa jatkavien oppilaiden suhteellinen osuus ja näytti selvästi alittavan lukion pitkän oppimäärän valitsevien oppilaidenkin suhteellisen osuuden.

(3) enemmistö yläasteen oppilaista joka luokkatasolla on geometrisen ajattelun (geometrisen käsitetiedon) kehityksessään van Hielen tasojen 1 (visualisoinnin taso) ja 1-2 (empiiristen yleistysten taso) kuvaamassa vaiheessa.

Niistä 50 oppilaasta, joille van Hielen taso saatiin määritettyä ilman hierarkiavirhettä sekä kaksivuotisen seurantajakson alussa että lopussa, van Hielen taso oli alentunut joka viidennellä ja noussut keskimäärin joka kolmannella. Noin puolella oppilaista van Hielen taso oli seurantajakson päättyessä sama kuin sen alkaessa. Kaikki ne kymmenen oppilasta, jotka seurantajakson alkaessa sijoittuivat korkeimmalle mitatulle van Hielen tasolle säilyttivät tasonsa. Kattoefektin takia näiden oppilaiden edistymisestä ei tällä mittausmenetelmällä saada muuta tietoa kuin se, että ainakaan oppilaiden van Hielen taso ei ollut laskenut.

Prototyyppisen luokittelun yleisyydessä ei havaittu mainittavia luokkatasokohtaisia eroja. Kolmioluokituksiin liittyvät tulkinnat antoivat viitteitä siitä, että yläasteen oppilaat siirtyessään seitsemänneltä luokalta kahdeksannelle ja edelleen yhdeksännelle luokalle jossain määrin taantuvat tulkitsemaan käsitteiden hierarkkisia suhteita karsinoivasti. Karsinoiva luokittelu oli tilastollisesti erittäin merkitsevästi harvinaisempaa seitsemäsluokkalaisten keskuudessa kuin luokkatasojen 8 ja 9 oppilailla. Vielä selvemmin tämän tyyppinen trendi oli havaittavissa nelikulmioiden luokituksiin liittyvissä tulkinnoissa. Standarditulkinnan mukainen inkluusiotulkinta (I) kävi näissä relaatioissa yläasteen aikana harvinaisemmaksi ja karsinoiva luokittelu (D) yleistyi. Tämä selittynee osaksi sillä, että seitsemännellä luokalla nelikulmioiden nimitykset luokkainkluusioineen oli kurssin mukaisesti kerrattu. Käsitteiden välisten suhteiden oppiminen saattoi kuitenkin monen oppilaan kohdalla olla perustunut ulkomuistinvaraiseen faktatietoon eikä niinkään luokkainkluusion ymmärtämiseen. Asia näytti nimittäin ylemmille luokille siirryttäessä unohtuvan ja alkeellisempi, mutta ilmeisesti oppilaille luonnollisempi, karsinoiva luokittelu yleistyvän. Tarkempaa selvitystä kaipaisi myös se, mikä yhteys oppikirjojen valinnalla ja käsitteiden käytöllä yleensä on luokkainkluusiotulkintojen vähäisyyteen. Visuaalisessa variaatiossa ei ollut merkittäviä eroja eri luokkatasojen kesken.

Luokkatasoittain tehdyt poikittaistarkastelut osoittivat, ettei tietorakenteiden oppiminen juurikaan näyttänyt edistyvän yläasteen aikana. Rakenteellisen tiedon oppimisessa näyttikin yläasteen aikana tapahtuvan ennemmin taantumista kuin edistymistä. Johtopäätöksiä poikittaistarkasteluista on kuitenkin tehtävä varoen, koska tämäntyyppinen vertailu ei perustu samojen oppilaiden kehityksen seuraamiseen vaan luokkakohtaisiin keskiarvoeroihin. Vain ani harva yläasteen oppilas näytti jäsentävän kolmioiden luokitukset standardilla tavalla ja vain kaksitoista oppilasta (5,0 %) tutkituista 240 oppilaasta jäsensi viiden käsitellyn peruskäsitteen neliö, suorakulmio, suunnikas, nelikulmio ja monikulmio keskinäiset suhteet standardilla tavalla. Näistäkin oppilaista kymmenen oli seitsemäsluokkalaisia.

Seurantatutkimusaineiston perusteella oppilaiden kolmiorelaatioiden tuntemisessa tapahtui lievää mutta kuitenkin tilastollisesti merkitsevää edistymistä. Eräät kolmiotyyppien virhetulkinnat olivat kuitenkin erityisen sitkeässä. Esimerkiksi monet oppilaat tulkitsivat teräväkulmaisuuden tarkoittavan kolmion yhden tai kahden kulman (erityistä) terävyyttä, eivätkä näyttäneet edellyttävän kolmion kaikkien kulmien terävyyttä. Samoin useille oppilaille oli vaikeaa mieltää, millaiset kolmiot voivat olla tasakylkisiä. Erityisen vaikeaa tuntui olevan hyväksyä sitä, että suorakulmainen tai tylppäkulmainen kolmio voisi olla tasakylkinen. Seurantajakson aikana nelikulmiotyyppeihin liittyvien käsitesuhteiden osaamisessa ei voitu todeta tapahtuneen yhtä selkeää edistymistä kuin kolmiotyyppeihin liittyvien käsitesuhteiden hallinnassa. Relaatioiden virhetulkinnat olivat pysyneet samantyyppisinä ja niiden voi katsoa johtuvan lähinnä kahdesta toisiinsa kytkeytyvästä seikasta: voimakkaasta pyrkimyksestä disjunktiiviseen luokitukseen (D) ja virheellisestä monikulmiokäsitteen tulkinnasta.

Määrittelytaitojen kehityksestä tutkimus antaa osittain ristiriitaisen kuvan. Poikittaistutkimusaineiston perusteella oppilaiden käsitteen määrittelytaidoissakin oli eräissä suhteissa havaittavissa ennemminkin taantumista kuin edistymistä. Luokkatason kohotessa esimerkiksi oikea määritelmätyyppi kelpuutettiin eri vaihtoehtojen joukosta suorakulmion määritelmäksi yhä harvemmin ja ns. listamäärittelyn kannatus yleistyi. Kuitenkin, kun määrittelytaidon kehittymistä tarkasteltiin kaikkien tätä ominaisuutta mittaavien kuuden osion summamuuttujan TOTDEF avulla, ei todettu tapahtuneen juuri minkäänlaista muutosta luokkatason kohotessa. Pitkittäistarkastelu antoi määrittelytaidon kehityksestä pääpiirteittäin samanlaisen kuvan kuin poikittaistarkastelukin. Summamuuttujalla TOTDEF mitaten määrittelytaidon kehittyminen seurantajakson aikana oli kuitenkin varsin selvää, vaikka oppilaiden määrittelytaidoissa olikin vakavia puutteita myös yhdeksäsluokkalaisina.

Tietorakenteiden oppiminen ei tämän tutkimuksen poikittaistarkasteluiden perusteella näytä olevan kovin pysyvää. Osaksi tämä voi johtua siitä, että kun käsitteiden määritelmiä ei tunneta eikä käsitteiden välisiä suhteita ymmärretä käsitteiden määrittelyistä johtuviksi, niin käsitteiden väliset relaatiot yritetään muistaa silloin, kun siihen on tarvetta, helposti unohtuvana faktatietona.

Osaryhmittäin tarkastellen merkittävimmät erot oppilaiden geometrisessa käsitetietoudessa ilmenivät verrattaessa eritasoisesti matematiikan opinnoissa menestyneitä oppilaita keskenään. Oppilaat, joiden matematiikan taidot yleensäkin olivat heikot valitsivat parhaaksi määritelmäksi yleensä joko jommankumman tarjotuista naiiveista vaihtoehdoista tai sitten listamääritelmän. Heikoimmista oppilaista standardimääritelmän valitsi vain 4,9 %. Nekin oppilaat, joiden kevätarvosana oli kiitettävä valitsivat ylivoimaisesti yleisimmin listamäärittelyn parhaaksi ja vain noin joka kymmenes tämänkin ryhmän oppilaista piti standardimääritelmää parhaana.

Tyttöjen ja poikien erot käsitetiedon hallinnassa olivat jokseenkin olemattomat. Selvä enemmistö korkeimmalle van Hielen yltäneistä oppilaista oli kuitenkin poikia (18,0 % pojista ja 10,8 % tytöistä). Tämän tutkimuksen puitteissa ei voida sanoa, johtuiko korkeimmalle van Hielen tasolle yltäneiden määrässä havaittu sukupuolten välinen ero pelkästä sattumasta.

10 Pohdinta

Väitöskirjatyön tavoitteena oli tuottaa teoreettinen malli peruskoulun yläasteen oppilaan geometrisen käsitetiedon kehityskulusta ja tarkastella mallin avulla yläasteen oppilaiden geometrisen käsitetiedon kehittymistä yläasteen aikana. Tutkimus nostaa esiin monia oppimisprosessin teoreettiseen kuvaukseen kytkeytyviä ongelmia ja jatkotutkimusaiheita ja antaa aihetta pohtia keinoja, joilla käsitetiedollinen aspekti opetuksessa tulisi paremmin huomioiduksi.

Tutkimus osoitti, ettei van Hielen teorian tarjoama malli geometrisen ajattelun kehityksestä sinällään riitä selittämään sitä kokonaisvariaatiota, mikä oppilaiden geometrisessa ajattelussa ilmenee. Tässä tutkimuksessa kyseistä mallia pyrittiin täydentämään liittämällä siihen yksi kehitysvaihe lisää ja ottamalla tarkasteluihin mukaan eräät käsitetiedon kehityksen kannalta merkittävinä pidetyt käsitteenmuodostuksen piirteet, kuten esimerkiksi ns. prototyyppiefektit, visuaalinen variaatio, määrittelytaidot. Tutkimuksen tekijän näkemys on, että van Hielen teoria, varsinkin jos se täydennetään empiirisen yleistyksen tasolla vH1-2, antaa edelleen hyvän teoreettisen pohjan geometrisen ajattelun yleispiirteiden tarkasteluille. Erityisen kriittisesti kannattaa tämän tutkimusalueen jatkokehittelyissä kuitenkin suhtautua van Hielen tasojen hierarkkisuusoletukseen ns. vahvana hierarkiana, jossa alemman tason toimintojen oletetaan aina olevan edellytyksiä ylemmän tason toimintojen saavuttamiselle. Tutkimus tukee Gutiérrezin tutkimusryhmän toisen tyyppisellä kontekstilla saamia havaintoja alkuperäisen van Hielen tasojen hierarkkisuusoletuksen paikkansa pitämättömyydestä (vrt. Gutiérrez ym. 1991a). Oppilaiden geometrisessa ajattelussa näyttää tämän tutkimuksen perusteella olevan meneillään kehittymistä samanaikaisesti useammalle van Hielen tasolle ominaisissa piirteissä. Epäselvää on, mikä osuus kehityskulussa on sillä, että geometrian opetus kouluissa ei tavallisesti etene van Hielen malliin sisältyvän kehitysidean mukaisesti. Tarkempaa tutkimusta kaivattaisiinkin van Hielen tasojen hierarkian ilmenemisestä ns. vahvana tai heikkona hierarkiana silloin, kun opetuksen eteneminen on suunniteltu sen mukaisesti, mitä geometrisen käsitetiedon kehittymisestä tiedetään. Ponnistelua on myös jatkettava niiden geometrisen ajattelulle keskeisten piirteiden löytämiseksi, joihin geometrisen ajattelun kehityskuvauksissa kannattaisi keskittyä.

Se geometrisen käsitetietouden oppimisprosessin kehityskuvaus, joka tässä tutkimuksessa konstruoitiin, ei tietenkään ole viimeinen sana tällä saralla. Toivottava jatkotutkimuksen kohde onkin tässä tutkimuksessa konstruoidun mallin selkiyttäminen ja sentyyppisen sovelluksen luominen, jota voitaisiin käyttää esimerkiksi opettajien perus- ja täydennyskoulutuksessa raamina kuvattaessa merkityksellisimpiä kehityssuuntia, joita oppilaiden geometrisessa ajattelussa nykyisenkaltaisessa opetuksessa havaitaan ja joihin samoilla opetusresursseilla olisi mahdollisuutta pyrkiä. Tämäntyyppiseen käyttötarkoitukseen laadittaessa geometrisen ajattelun kehityssuuntien karakterisointi muodostaa eräänlaisen optimointiongelman. Jotta mallilla olisi käyttöä geometrian opetuksen jäntevöittäjänä, sen tulee olla riittävän selkeä ja suppea mutta kuitenkin validi kuvaus geometrisen ajattelun eri piirteiden kehittymistavoista.

Myös mittavälineiden kehittämisen saralla on edelleen työtä tehtävänä. Mittavälineet, joita tutkimuksessa käytettiin, konstruoitiin nimenomaan tätä tutkimusta varten. Siinä suhteessa ne täyttivätkin kohtuullisesti paikkansa, jos ei oteta huomioon sitä työmäärää, jonka niillä kerätyn aineiston analysoiminen edellyttää. Erityisesti käsitteiden välisistä suhteista oppilailla olevien käsitysten tutkimukseen jouduttiin tässä tutkimuksessa luomaan oma tutkimusmetodinsa, koska tämäntyyppistä tutkimusta ei juuri ole aiemmin tehty. Kuitenkin käsitetiedon oppimisen ja opettamisen näkökulmasta oppilaiden konstruoimien laajempien tietorakenteiden tutkimusta voi pitää yhtä tärkeänä tutkimuskohteena kuin oppilaiden yksittäisille käsitteille antamien tulkintojen tutkimistakin. Toivottavaa olisi, että saatavilla olisi käyttäjälle helppokäyttöisempiä välineitä empiirisen aineiston keräämiseksi geometrisen käsitetiedon kehittymisen eri piirteistä. Käytännön tasolla erityisesti oppikirjoihin, opettajan oppaisiin yms. materiaaleihin tulisi kehittää malleja koe- ja testitehtävistä, joilla opettaja ja oppilaat voivat saada palautetta geometrian oppimistuloksista myös käsitetiedon oppimisen näkökulmasta. Perustyötä tämäntyyppisten mittavälineiden kehittämiseksi onkin tehty (Jaime & Gutiérrez 1994; Gutiérrez & Jaime 1995).

Miten sitten peruskoulun geometrian opetusta voitaisiin tämän tutkimuksen näkökulmasta kehittää? Vaikuttamisen keinot ovat luonnollisesti samat kuin oppimisympäristöjen kehittämisessä ylipäätään eli opetussuunnitelman ja oppimateriaalien kehittäminen, opetusmenetelmien kehittäminen ja opettajien perus- sekä täydennyskoulutuksen tehostaminen. Päätöksenteon pohjaksi kaivattaisiin tutkimustietoa siitä, minkä tyyppinen geometrian opetus johtaisi parhaisiin tuloksiin käsitetiedon oppimisessa laskennallisten valmiuksien oppimistasosta tinkimättä.

Laadittaessa seuraavia matematiikan opetuksen valtakunnallisia opetussuunnitelman perusteita tulisi tarkkaan pohtia, mikä tehtävä geometrian opetuksella on toisaalta peruskoulun nykyistä alaastetta vastaavilla luokkatasoilla 1—6 ja toisaalta yläastetta vastaavilla luokkatasoilla. Lukion geometrian opetuksen tavoitteet ja mahdollisuudet ovat vahvasti kytköksissä siihen, millaiseen tasoon peruskoulun geometrian opetuksessa ylletään. Nykyisellään näyttää siltä, että lukion ja peruskoulun työnjako on suhteellisen selkeä ja vakiintunut laskennallisten valmiuksien opetuksen osalta, mutta eri kouluasteiden opetuksen niveltäminen ei toimi yhtä hyvin geometrisen käsitetiedon ja päättelyn oppimisen näkökulmasta. Pitkään myös koulutasolla toimineen opettajan kokemuksella en pidä lainkaan kohtuuttomana vaatimuksena sitä, että peruskoulun päättövaiheen tavoitteeksi asetettaisiin oppilaista selvälle enemmistölle sellaisen käsitteellisen tietotason saavuttaminen, joka toimisi suoraan riittävänä lähtötasona lukion pitkän matematiikan päättelyä ja todistamista harjoituttaviin geometrian opintoihin. Käytännössä tämä tarkoittaisi sitä, että peruskoulun aikana oppilas oppisi tavanomaisten geometristen käsitteiden merkityksen standarditulkinnan mukaisina matemaattisina käsitteinä, omaksuisi matemaattisen määrittelyn idean ja kykenisi oma-aloitteisesti käsitteiden määritelmiin tukeutuen analysoimaan peruskäsitteiden välisiä suhteita ts. tottuisi ns. lyhyen deduktion käyttöön. Luvussa 3.4.3 esitetyn kuvion 8 merkinnöin tämä merkitsisi etenemistä peruskoulun kaikille yhteisessä geometrian kurssissa suunnassa 2 kaavion lohkoon IIA asti ja osin myös lohkoon IIB asti lukiotason pitkän matematiikan opintojen keskittyessä käsitiedon osalta kaavion lohkoon IIB. Tämän tutkimuksen tulosten perusteella edellinen merkitsisi geometrian opetuksen tavoitetason selkeää nostamista nykyisestä ja sitä, että myös geometrisen käsitetiedon oppimista koulussa ryhdytään tämänhetkistä enemmän arvostamaan.

Jotta oppilaiden geometrisen käsitetiedon tason nostaminen käytännössä toteutuisi, se edellyttää myös muutoksia oppimateriaaleihin ja opetusmetodeihin. Oppikirjojen geometrian tehtävät eivät voi olla pelkästään laskuja eikä geometrian opetus voi koostua pelkästään laskennallisen geometrian opettamisesta. Jos näin on, niin jotakin olennaista geometrian olemuksesta menetetään. Kuten tässä tutkimuksessa monessa yhteydessä on tuotu esiin, geometriset käsitteet ovat luonteeltaan figuratiivisia ja geometristen tarkastelujen olennainen osa on vuorovaikutteinen visuaalisten ja konkreettien representaatioiden muodostaman geometristen käsitteiden tulkintaympäristön ja geometrian käsitteiden muodostaman käsiterakenteiden tarkastelu. Sekä oppikirjojen geometrian tehtävien että oppilaalta edellytettävien aktiviteettien tulisi olla sillä tavoin monipuolisia, että ne yhtäältä auttavat oppilasta luomaan visuaalisen ja konkreetin tulkintaympäristön geometriselle tiedolle ts. hahmottamaan, luokittelemaan, nimeämään, testaamaan hypoteeseja kokeellisesti yms. ja toisaalta kehittävät hänen taitoaan reflektoida omia käsityksiään ja käsitteitään ts. auttavat oppilasta suhtautumaan omiin tulkintoihin terveen kriittisesti, konstruoimaan itse käsitteiden määritelmiä, tekemään päätelmiä, etsimään perusteluja jne.

Opettajan oma geometrianäkemys on keskeinen tekijä geometrian opetuksen sisältöjen ja toimintatapojen osalta. Geometriaa opetetaan sen mukaisesti, millaiseksi se nähdään. Jos käsitetiedollisia tavoitteita arvostetaan, niiden oppimisesta pidetään huolta, jos taas niitä ei arvosteta, opetusaika käytetään johonkin muuhun. Opettajan geometriakäsitykseen vaikuttavat monet tekijät, kuten esimerkiksi hänen koulutustaustansa, opetussuunnitelman linjaukset, oppikirjojen painotukset ja koetehtäviksi vakiintuneet tehtävätyypit. Stereotyyppinen käsitys yläasteikäisen oppilaan oppimiskyvystä voi estää opettajaa tähtäämästä peruskoulussa tarkkaan käsitteenmuodostukseen ja käsitteellisen ajattelun sekä päättelyn harjaannuttamiseen. Kuinka tosissaan meidän tulisi esimerkiksi ottaa piagetilaisuuden nimissä usein esitetty väite, että keskimääräinen peruskoulun oppilas on konkreettisten operaatioiden vaiheessa eikä kykene formaaliin ajatteluun? Opettajien geometriakäsitykset muodostavat varsinkin opettajien perus- ja täydennyskoulutuksen kannalta erään mielenkiintoisen ja tärkeän tutkimusaiheen geometrian didaktiikasta kiinnostuneille. Tässä tutkimuksessa todettiin, että sellaisilla geometrisen ajattelun tasoon vaikuttavilla yleispiirteillä, kuten oppilaan spatiaalisen ajattelun ja loogisen päättelyn taidoilla sekä visuaalisella muistikapasiteetilla, oli varsin selkeä yhteys oppilaan geometrisen ajattelun kehittyneisyyteen, esimerkiksi van Hielen tasoon. Siihen, missä määrin esimerkiksi spatiaalisen ja loogisen ajattelun taidot ovat kouluopetuksen kautta kehitettävissä, kaipaisi lisäselvitystä. Vaikkei tämä tutkimus anna spatiaalisten ja loogisen päättelyn taitojen opittavuuden suhteen sen paremmin aihetta koulutusoptimismiin kuin koulutuspessimismiinkään, haluan säilyttää luottamukseni siihen, että myös peruskoulun opetuksella on vaikutuksensa näiden taitojen omaksumiseen, kunhan niitä harjoitetaan. Kaiken kaikkiaan on todettava, että yläasteen oppilaiden saamat tulokset varsinkin loogisen päättelyn testissä olivat hyvin vaatimattomat.

Tutkittavaa riittää myös siinä, mitä mahdollisuuksia tietotekniikka ja erityisesti ns. dynaamisen geometrian ohjelmistojen käyttö tuo geometrian opetukseen? Uusi laskinteknologia ns. hand held -teknologia mahdollistaa dynaamisen geometrian käytön normaalissa luokkatilassa myös ilman tietokoneita, mutta käyttäjäystävällisyydessä tietokoneympäristöt ovat edelleen ylivoimaisia. Dynaamisten geometriaohjelmien kokeilua on meillä tehty vähän, mutta esimerkiksi Yhdysvalloissa, Saksassa ja Ranskassa dynaamisten geometriaohjelmien käyttöön perustuvaa opetusta on tutkittu runsaasti. Dynaamisilla geometriaohjelmilla kuviot konstruoidaan konkreetisti näytölle määrittelevien ominaisuuksiensa kautta. Itse konstruktiotapa jäljittelee yleensä geometrista harpilla ja viivaimella piirtämistä. Kerran konstruoitua kuviota voidaan muunnella ns. tartu ja vedä -periaatteella tarttumalla kiinni johonkin sen pisteeseen, esimerkiksi monikulmion tapauksessa sen kärkeen, ja liikuttelemalla pistettä vetämällä. Kuvion muoto muuntuu niissä rajoissa, joita konstruktion kautta sille annettu määrittely sallii. Tämä mahdollistaa kuvion invarianssien ja muuttuvien ominaisuuksien tarkastelun kokeellisesti, ts. geometristen lauseiden löytämisen ja koettelun kokeellisesti. Ohjelman käyttäjän ei tarvitse tyytyä pelkästään silmämääräiseen ominaisuuksien tarkasteluun, sillä kehittyneemmät geometrian ohjelmat sisältävät myös lukuisan joukon mittaus- ja laskentatyökaluja, vaikkakin tarkastelut luonnollisesti joka tapauksessa ovat likimääräisiä. Käsitetiedon kehittymisen kannalta dynaamisilla geometriaohjelmilla työskentely näyttäisi tarjoavan erinomaisen oppimisympäristön geometristen käsitteiden merkityssisältöjen oppimiseen ja käsitteiden välisten suhteiden tarkasteluun. Monet edellä konstruoidun käsitetiedon kehittymisen mallissa keskeisinä pidetyt prosessit, kuten prototyyppisten käsitysten koettelu, visuaalisen varioinnin taitojen harjaannuttaminen, määrittelytaitojen kehittäminen ja päättelytaitojen harjaannuttaminen, korostuvat tämäntyyppisessä oppimisympäristössä. Tutkimuksellisesti mielenkiintoista on, ohjaako tällaisen oppimisympäristön käyttö oppilaan tietorakenteen kehittymistä oikeampaan ja eheämpään suuntaan verrattuna perinteisen opetuskäytännön mukaiseen tietorakenteeseen. Aikaresurssin jako erilaisten oppimistavoitteiden saavuttamiseksi on sekin suurelta osin avoin kysymys. Perinteiseen laskennallista geometriaa painottavaan tarkasteluun kuluu nykyisellään helposti lähes koko geometrian opetukseen varattu aika. Vaikka dynaamisen geometrian ohjelmistojen käyttö todettaisiin tehokkaaksi geometrian oppimisen tavaksi, niin näitäkään ohjelmistoja ei opita hetkessä eivätkä ne tue suoranaisesti laskennallisen geometrian opetuksen tavoitteita.

Tässä vaiheessa, kun tutkimusalueesta eli oppilaiden geometrisen käsitetiedon olemuksesta tiedettiin etukäteen melko vähän, pidin kvantitatiivista otetta tiedonkeruumenetelmänä tarkoituksenmukaisena. Tutkimusta täydentämään ja tarkentamaan tarvittaisiin kvalitatiivisella otteella sopivassa ongelmanratkaisuympäristössä tehtyjä oppilashavainnointeja ja haastatteluja, joilla saataisiin syvempää tietoa siitä, miten oppilaat itse omia käsityksiään analysoivat.

Loppuarviointina tutkimusprosessin kulusta totean, että tutkimus toi lisävalaistusta geometrisen käsitetiedon oppimisprosessista. Tällaisen tiedon pedagoginen arvo riippuu oleellisesti siitä, millaiseksi käsitetiedon opettamisen ja oppimisen merkitys peruskoulutasolla nähdään. Kyse on pitkälti siitä, miten haluamme painottaa geometrian opetuksessa käsitteenmuodostusta ja päättelyä suhteessa algoritmiseen ajatteluun ja laskemiseen. Jo tämän tutkimuksen aihevalinta osoittaa, että mielestäni geometrisen käsitetiedon opettamiseen kannattaa panostaa. Tutkimuksen näkökulma käsitetiedon oppimisen laatuun oli tässä vaiheessa vielä eräänlainen vallitsevan tilanteen kartoitus. Oppilaiden geometrisia tietorakenteita tarkasteltiin sellaisenaan selvittämättä, mikä yhteys niillä on esimerkiksi opettajien matematiikka- ja geometriakäsityksiin sekä opetuksen painotuksiin.

Mielestäni merkittävimpiä tässä tutkimuksessa saatuja tuloksia olivat seuraavat

1) uuden välitason liittäminen van Hielen tasojen viitoittamaan geometrisen ajattelun kehitysmalliin,
2) ns. heikon hierarkian toteaminen van Hielen tasoille tutkitussa kontekstissa,
3) geometrisen käsitetiedon kehittymisen mallin konstruointi, jonka komponentteina toimineet prototyyppiprosessit, visuaalinen variointi, määrittelytaidot sekä käsitteiden väliset relaatiot osoittautuivat empiirisen datan valossa merkittäviksi piirteiksi sekä geometrisen käsitetiedon kehittymisen teorian rakentamisen kannalta että oppilaan geometrian oppimisen tason arvioinnin kannalta.

Niin kuin laajemmat tutkimukset yleensäkin tämäkin tutkimus selvitti valittua tutkimusaluetta vain osaltaan. Erityisesti toivon, että jatkotutkimukset kohdistuisivat kahteen tämän tutkimusalueen kannalta tärkeänä pitämääni ongelma-alueeseen. Yhtäältä matematiikan didaktiikan perustutkimuksen kannalta olisi tärkeää, että tässä työssä eräänlaisena pelinavauksena esitettyä geometrisen käsitetiedon kehittymistä kuvaavaa mallia, van Hielen teoria mukaan lukien, kehitettäisiin edelleen ja tarvittaessa korjattaisiin empiriaa paremmin vastaavaksi. Kukin nyt käsitelty osa-alue, kuten prototyyppinen käsitteenmuodostus, visuaalinen variointi, määrittelytaitojen kehittyminen, tietorakenteiden jäsentyminen, kaipaisi tarkempaa selvittelyä. Mielestäni tässä suunnassa tulisi edetä erityisesti kvalitatiivisen tutkimuksen keinoin. Tähän tutkimukseen valittu alueen kokonaisselvityksen tyyppinen tutkimusasetelma ei valitettavasti antanut mahdollisuutta paneutua riittävän syvällisesti yksittäisiin ongelma-alueisiin. Toisaalta geometrian kouluopetuksen kehittämiseksi olisi tärkeää pohtia yleensäkin käsitetiedollisten tavoitteiden asemaa matematiikan opetuksessa. Kiintoisan tutkimuskohteen tarjoaisi esimerkiksi käsitetiedon ja päättelytaitojen yhteyksien selvittely, joka tässä tutkimuksessa jäi varsin yleiselle tasolle. Tässä tutkimuksessa kerätty aineisto ei antanut mahdollisuutta paneutua käsitetiedon oppimisen ja opetuksen välisen yhteyden kiintoisaan ja tärkeään problematiikkaan. Toivon kuitenkin, että työn teoreettiset tarkastelut ja empiiriset havainnot voisivat olla pontimena myös opetustutkimuksellisesti painottuneiden jatkoselvitysten suunnittelulle.

Lähteet

Afonso, M.C., Camacho, M. & Socas, M. 1997. The implementation of a microcurriculum: Angles, measurements and rotations from the point of view of van Hiele. Epistemological problems. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti (Finland). Volume 1, 216.

Afonso, M.C., Camacho, M. & Socas, M.M. 1999. Teachers profile in the geometry curriculum based on the van Hiele theory. Teoksessa O. Zaslavsky (toim.) Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa (Israel). Volume 2, 1—8.

Aitola, A. 1980. Kriteeriin perustuvat testit ja niiden laadinnat: Item form –menetelmän käyttö peruskoulun matematiikan testien laadinnassa. Tampereen yliopiston kasvatustieteen laitos. Julkaisusarja A: Tutkimusraportti N:o 19.

Alexander, P.A. & Wilson, V.L. 1987. Analogical reasoning in young children. Journal of Educational Psychology 79 (4), 401—408.

Ali-Myllymaa, R. 1992. Loogisesta päättelystä matematiikassa. Julkaisematon ainedidaktiikan seminaariesitelmä. Tampereen yliopisto. Tampereen opettajankoulutuslaitos.

Allwood, J., Andersson, L.-G. & Dahl, Ö 1980 Logiikka ja kieli. Helsinki: Gaudeamus.

Anastasi, A. 1958. Differential psychology. New York: MacMillan.

Anderson, J.R. 1983. The architecture of cognition. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Anon. 1988. Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean välimietintö 1988:30. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Anon. 1989a. National Council of Teachers of Mathematics. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Anon. 1989b. Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean loppumietintö 1989:45. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Anon. 1990. Julkilausuma peruskoulun matematiikan opetuksen kehittämisestä: Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL ry 3.6.1990.

Anon. 1991. Matematiikan opetuksen kehittämistyöryhmän väliraportti 29.5.1991. Julkaisematon lähde. Opetushallitus.

Anon. 1994a. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.

Anon. 1994b. Lukion opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.

Anon. 1994c. The International Commission on Mathematical Instruction 1994. ICMI Study: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Discussion Document. ICMI Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction. No: 37, 6—16.

Anon. 1995. The International Commission on Mathematical Instruction 1995. Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Educational Studies in Mathematics 28 (1), 91—98.

Assaf, S.A. 1985. The effects of using logo graphics in teaching geometry on eight grade students' level of thought, attitudes toward geometry and knowledge of geometry. The University of Wisconsin, Dissertation Abstracts International 46 (10A), DA 8512288.

Attneave, F. 1957. Transfer of experience with a class-schema to identification — learning of patterns and shapes. Journal of Experimental Psychology 54, 81—88.

Baddeley, A. 1986. Working memory. Oxford Psychology Series No. 11. Oxford: Clarendon Press.

Barsalou, L.W. 1990. The instability of graded structure: Implications for the nature of concepts. Teoksessa U. Neisser (toim.) Concepts and conceptual development: Ecological and intellectual factors in categorization. Cambridge: Cambridge University Press, 101—140.

Battista, M.T. 1990. Spatial visualization and gender differences in high school geometry. Journal for Research in Mathematics Education 21 (1), 47—60.

Battista, M.T. 1994. On Greeno's environmental/model view of conceptual domains: A spatial/geometric perspective. Journal for Research in Mathematics Education 25 (1), 86—94.

Bell, A.W., Costello, J. & Küchemann, D.E. 1983. A review of research in mathematics education. Part A: Research on learning and teaching. Windsor: NFER-NELSON.

Bereiter, C. & Scardamalia, M. 1979. Pascual-leone's M construct as a link between cognitive-developmental and psychometric concepts of intelligence. Intelligence 3, 41—63

Bergeron, J.C. & Herscovics, N. 1990. Psychological aspects of learning early arithmetic. Teoksessa P. Nesher & J. Kilpatrick (toim.) Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the psychogy of mathematics education. Icmi Study Series, 31—69.

Bishop, A.J. 1983. Space and geometry. Teoksessa R. Lesh & M. Landau (toim.) Acquisition of mathematical concepts. New York: Academic Press, 175—203.

Bishop, A.J. 1989. Review of research on visualization in mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics 11 (1), 7—16.

Bobango, J. C. 1987. Van Hiele levels of geometric thought and student achievement in standard content and proof writing: The effect of phase-based instruction. The Pennsylvania State University, Dissertation Abstracts International 48 (10A), DA 8727983.

Bolton, N. 1972. The psychology of thinking. London: Methuen & Co.

Bolton, N. 1977. Concept formation. Oxford: Pergamon Press.

Bourne, L.E. 1974. An inference model for conceptual rule learning. Teoksessa R.L. Solso (toim.) Theories in cognitive psychology. The Loyola symbosium. Potomac, MA: Erlbaum.

Bourne, L.E. 1982. Typicality effects in logically defined categories. Memory & Cognition 10 (1), 3—9.

Bruni, J.V. & Seidenstein, R.B. 1990. Geometric concepts and spatial sense. Teoksessa J.N. Payne & C.C.E. Clements (toim.) Mathematics for the young child. Reston, VA: NCTM, 203—227.

Bruner J.S. & Goodnow, J.J. & Austin, G.A. 1956. A study of thinking. New York: Wiley.

Burger, W.F. 1981. Thought levels in geometry. Interim report of the study. Prepared for a project directors meeting of the National Science Foundation. Washington, D.C., 1981.

Burger,W.F. 1985. Geometry. Arithmetic Teacher 32 (1), 52—56.

Burger, W.F & Culpepper, B. 1993. Restructuring geometry. Teoksessa P.S. Wilson (toim.) Research ideas for the classroom. High school mathematics. New York: Macmillan (NCTM), 140—154.

Burger, W.F. & Shaughnessy, J.M. 1986. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. Journal for the Research in Mathematics Education 17 (1), 31—48.

Burscheid, H.J. 1986. Braucht der Geometrieunterricht Anregungen? Der Mathematik-Unterricht 32 (4), 5—21.

Burtis, P.J. & Pascual-Leone, J. 1974. FIT: Figural Intersection Test. A group measure of M-space. Unpublished manuscript, York University.

Byrnes , J.P. & Wasik, B.A. 1991. Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. Developmental Psychology 27 (5), 777—786.

Campbell, K.J., Collis, K.F. & Watson, J.M 1995. Visual processing during mathematical problem solving. Educational Studies in Mathematics 28 (2), 177—194.

Carrol, J.B. 1985. Domains of cognitive ability. Paper presented at AERA conference, Los Angeles, May 1985. (ks. Eliot, J. 1987 Models of psychological space. New York: Springer, 71—74.)

Carroll, W.M. 1998. Geometric knowledge of middle school students in a reform-based mathematics curriculum. School Science and Mathematics 98 (4), 188—197.

Carter, C.C., LaRussa, M.A. & Bodner, G.M. 1987. A Study of two measures of spatial ability on rredictors of success in different levels of general chemistry. Journal of Research in Science Teaching 24 (7), 645—657.

Case, R. 1985. Intellectual development: Birth to adulthood. Orlando, FL: Academic Press.

Casey, J. 1994. Using a Surface Triangle to Explore Curvature. Mathematics Teacher 87 (2), 69—77.

Cassirer, E. 1953. Substance and function and Einstein's theory of relativity. London: Constable.

Castellanos, J., Austin, J.D. , Darnell, E. & Estrada, M. 1993. An Empirical Exploration of the Poincaré Model for Hyperbolic Geometry. Mathematics and Computer Education 27 (1), 51—68.

Chaiyasang, S. 1987. An investigation into level of geometric thinking and ability to construct proof of students in Thailand. The University of Iowa, Dissertation Abstracts International 49 (8A), DA 8815067.

Cheng, P.W. & Holoyak, K.J. 1985. Pragmatic reasoning schemas. Cognitive Psychology 17, 391—416.

Cheng, P.W. & Holoyak, K.J. 1989. On the natural selection of reasoning theories. Cognition 33, 285—313.

Clements, D.H. & Battista, M.T. 1989. Learning of geometric concepts in a Logo environment. Journal for the Research in Mathematics Education 20 (5), 450—467.

Clements, D.H. & Battista, M.T. 1991. Van Hiele levels of learning geometry. Teoksessa F. Furinghetti (toim.) Proceedings of the 15th P.M.E. Conference, (2), 223—230. Assisi (Italy): University of Genova.

Clements, D.H. & Battista, M.T. 1992. Geometry and spatial reasoning. Teoksessa D.A. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics, 420—464. Reston, VA: NCTM.

Clements, D.H., Sarama, J. & Swaminathan, S. 1997. Young children's concept of shape. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti (Finland). Volume 2, 161—168.

Clements, M.A. 1983. The question of how spatial ability is defined, and its relevance to mathematics education. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 15 (1), 8—20.

Cohen, G. 1977. The psychology of cognition. London: Academic Press.

Cooper, L.A. & Mumaw, R.J. 1985. Spatial aptitude. Teoksessa R.F. Dillon (toim.) Individual differences in cognition. Vol. 2. Orlando, FL: Academic Press, 67—94.

Cox, J.W. 1928. Mechanical aptitude. Its existence, nature and measurement. London: Methuen.

Crowley, M. L. 1987. The van Hiele model of the development of geometric thought. Teoksessa M.M. Lindquist & A.P. Shulte (toim.) Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook, 1—16. Reston, VA: NCTM.

de Ribaupierre, A. & Pascual-Leone, J. 1979. Formal operations and M power. A neo-piagetian investigation. Intellectual development beyond childhood 1979 (5), 1—44.

de Villiers, M.D. & Njisane, R.M. 1987. The development of geometric thinking among black high school pupils in Kwazulu (Republic of South Africa). Teoksessa J. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (toim.) Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Montreal (Canada).Volume 3, 117—123.

Del Grande, J.J. 1987. Spatial perception and primary geometry. Teoksessa M.M. Lindquist & A.P. Shulte (toim.) Learning and teaching geometry, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: NCTM, 126—135.

Del Grande, J.J. & Morrow, L. 1993. Geometry and spatial sense. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Addenda series, grades K-6. Reston, VA: NCTM.

Denis, L. P. 1987. Relationships between stage of cognitive development and van Hiele level of geometric thought among Puerto Ricon Adolescents. Fordhan University, New York. University Microfilms International).

Denis, M. 1991. Image and cognition. Hertfordshire, UK: Harvester Wheatsheaf.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. 1984. Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research. London: Cassell.

Dienes, Z.P. 1973. The six stages in the process of learning mathematics. Windsor, Berks: NFER.

Dieudonné, J. 1981. The universal domination of geometry. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 13 (1), 5—7.

Dubinsky, E. 1991. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Teoksessa D. Tall (toim.) Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, 95—123.

Dziak, N.J. 1985. Programming computer graphics and the development of concepts in geometry. The Ohio State University, Dissertation Abstracts International 46 (7B), DA 8510566.

Dörfler, W. 1991. Meaning: Image schemata and protocols. Teoksessa F. Furinghetti (toim.) Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Assisi (Italy), vol. 1, 17—32.

Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D. & Agard, P. 1993. Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. Journal for Research in Mathematics Education 24 (1), 8—40.

Ekstrom, R.B., French J.W. & Harmon, H.H. 1976. Manual for kit of factor-referenced cognitive tests. Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Eliot, J. 1987. Models of psychological space. Psychometric, developmental, and experimental approaches. New York: Springer.

Engle, R.W., Cantor, J. & Carullo, J.J. 1992. Individual differencies in working memory and comprehension: A test of four hypotheses. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition 18 (5), 972—992.

English, L.D. & Sharry, P.V. 1996. Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. Educational Studies in Mathematics 30 (2), 135—157.

Ennis, R.H. 1975. Children's ability to handle Piaget's propositional logic: A conceptual critique. Review of Educational Research 45 (1), 1—41.

Evans, S.H. & Edmonds, E.M. 1966. Schema discrimination as a function of training. Psychonomic Science 5, 303—304.

Fennema, E. H. & Sherman, J. A. 1978. Sex related differencies in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. Journal for Research in Mathematics Education 9 (3), 189—203.

Fennema, E. H. & Tartre, L.A. 1985. The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. Journal for Research in Mathematics Education 16 (3), 184—206.

Fischbein, E. 1993. The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics 24 (2), 139—162.
Fischbein, E. & Nachlieli, T. 1998. Concepts and figures in geometrical reasoning. International Journal of Science Education 20 (10), 1193—1211.
Flawell, J.H. 1963. The developmental psychology of Jean Piaget. Princeton, NJ: Van Nostrand.
Flavell, J.H. 1970. Concept development. Teoksessa P.H. Mussen (toim.) Carmichael's manual of child psychology. Third edition. Vol.1. New York: Wiley.
Ford, M. 1994. Two modes of mental representation and problem solution in syllogistic reasoning. Cognition 54 (1), 1—71.
Freudenthal, H. 1973. Mathematics as an educational task. Dordrecht, Netherlands: Reidel.
Freudenthal, H. 1978. Weeding and sewing. Dordrecht, Netherlands: Reidel.
Freudenthal, H. 1983. Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Reidel.
Frykholm, J.A. 1994. External variables as predictors of van Hiele levels in algebra and geometry students. Abstract, Eric no ED 372924.
Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. 1984. English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. New York: Brooklyn College.
Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. 1985. An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. (Final report of the investigation of the van Hiele model of thinking. Teoksessa D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (toim.) Geometry Among Adolescents Project. New York: Brooklyn College, School of Education.
Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. 1988. The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal for the Research in Mathematics Education Monograph (3).
Galotti, K.M. 1989. Approaches to studying formal and everyday reasoning. Psychological Bulletin. 105 (3), 331—351.
Gardner, H. 1983. Frames of mind. New York: Basic Books.
Geddes, D. 1981. An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry applied to inner city adolescents. Research precession. NCTM, annual meeting, St. Louis, Missouri.
Geddes, D. 1992. Geometry in the middle grades. Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series. Grades 5—8. Reston, VA: NCTM.
Geddes, D., Bove, J., Fortunato, I., Fyus, D.J., Morgenstern, J. &Welchman-Tischler, R. 1992. Geometry in the middle grades. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Addenda series. Grades 5—8. Reston, VA: NCTM.
Geddes, D. & Fortunato, I. 1993. Geometry: Research and classroom activities. Teoksessa D.T. Owens (toim.) Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics. New York: Macmillan, 199—222.
Gilhooly, K.J. 1987. Mental modeling: A framework for the study of thinking. Teoksessa D.N. Perkins, J. Lockhead & J. Bishop (toim.) Thinking: The second international conference. IEA. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 19—32.
Goldin, G.A. & Herscovics, N. 1991. Toward a conceptual-representational analysis of the exponential function. Teoksessa F. Furighetti (toim.) Proceedings of the 15th PME conference, Assisi (Italy), Vol. II, 64—71.
Goswami, U. 1992. Analogical reasoning in children. Howe, UK: Erlbaum.
Gravemeijer, K. 1994. Educational development and developmental research in mathematics education. Journal for the Research in Mathematics Education 25 (5), 443—471.
Greene, J. 1977. Ajattelu ja kieli. Espoo: Weilin & Göös.

Greeno, J.G. 1978. A study of problem solving. Teoksessa R. Glaser (toim.) Advances in instructional psychology. Vol. 1. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 13—75.
Greeno J.G. 1991. Number sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for Research in Mathematics Education 22 (3), 170—218.
Greeno J.G. 1994. Some further observations of the environment/model metaphor. Journal for Research in Mathematics Education 25 (1), 94—99.
Guilford, J.P. & Lacey, J.I. (toim.) 1947. Printed classification tests, AAF. — Aviation psychological progress report, no. 5, Washington DC: U.S. Government Printing Office.
Guilford, J.P. 1967. The nature of human intelligence. New York: McGraw Hill.
Guillén, G. 1996. Identification of van Hiele levels of reasoning in three-dimensional geometry. Teoksessa L. Puig & A. Gutiérrez (toim.) Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia (Spain). Volume 3, 43—50.
Gutiérrez, A. & Jaime, A. 1987. Estudio de las caracteristicas de los niveles de van Hiele. [Study of the characteristics of the van Hiele levels]. Teoksessa J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (toim.) Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Montreal (Canada). Vol. 3, 131—137.
Gutiérrez, A. & Jaime, A. 1995. Towards the design of a standard test for the assessment of students' reasoning in geometry. Teoksessa L. Meira & D. Carraher (toim.) Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Refice (Brasil). Volume 1, 11—18.
Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny J.M. 1988. Van Hiele levels and visualization in three dimensions. Unpublished paper in the Sixth International Congress on Mathematical Education, Budabest 1988.
Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny J.M. 1991a. An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. Journal for the Research in Mathematics Education 22 (3), 237—251.
Gutiérrez, A., Jaime, A., Shaughnessy, J.M. & Burger, W.F. 1991b. A comparative analysis of two ways of assessing the van Hiele levels of thinking. Teoksessa F. Furinghetti (toim.) Proceedings of the 15th P.M.E. Conference, Assisi (Italy). Vol. 2, 109—116.
Haapasalo, L. 1993. Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehittämisnäkymiä. Jyväskylän yliopisto, opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 2.
Haapasalo, L. 1994. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Vaajakoski: MEDUSA-Software.
Halinen, I., Hänninen, L., Joki, J., Leino, J., Näätänen, M., Pehkonen, E., Pehkonen, L., Sahlberg, P., Sainio, E., Seppälä, R. & Strang, T. 1991. Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla. Helsinki-VAPK-Kustannus.
Halford, G.S. & Wilson, W.H. 1980. A category theory approach to cognitive development. Cognitive Psychology 12, 356—411.
Halpern, D.F. 1986. Sex differences in cognitive abilities. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Hampton, J.A. 1981. An investigation of the nature of abstract concepts. Memory & Cognition 9 (2), 149—156.
Han, T.-S. 1986. The effects of achievement and attitude of a standard geometry textbook and a textbook consistent with the van Hiele theory. The University of Iowa, Dissertation Abstracts International 47 (10A), DA 8628106.
Handsen, V. L. 1998. General considerations on curricula design in geometry. Teoksessa C. Mammana & V. Villani (toim.) Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 235—242.
Hannibal, M.A. 1999. Young children's developing understanding of geometric shapes. Teaching children mathematics 5 (6), 353—358.

Harris, L.J. 1981. Sex-related variations in spatial skill. Teoksessa L.S. Liben, A.H. Patterson & N. Newcombe (toim.) Spatial representation and behavior across the life span: Theory and application. New York: Academic Press, 83—125.

Hautamäki, A. 1991. Tietävät ja taitavat koneet. Keskustelua representaatioista. Suomen Tekoälyseuran Tiedotuslehti 1/91, 12—20.

Hautamäki, J. 1984. Peruskoululaisten loogisen ajattelun mittaamisesta ja esiintymisestä. Joensuun yliopiston yhteiskuntatieteellisiä julkaisuja. N:o 1.

Hautamäki, J. 1995. Älyllinen kehitys ja koulutus. Teoksessa P. Lyytinen, M. Korkiakangas & H. Lyytinen (toim.) Näkökulmia kehityspsykologiaan. Kehitys kontekstissaan. Helsinki: WSOY, 219—247.

Heinze-Fry, J.A. & Novak, J.D. 1990. Concept mapping brings long term movement toward meaningful learning. Science Education 74 (4), 461—472.

Hershkowitz, R. 1989. Visualization in geometry — two sides of the coin. Focus on Learning Problems in Mathematics 11 (1), 61—76.

Hershkowitz, R. 1990. Psychological aspects of learning geometry. Teoksessa P. Nesher & J. Kilpatrick (toim.) Mathematics & Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. ICMI Study Series. Cambridge: Cambridge University Press, 70—95.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M. & Vinner, S. 1987. Activities with teachers based on cognitive research. Teoksessa M.M. Lindquist & A.P. Shulte (toim.) Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook Reston, VA: NCTM, 222—235.

Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An inroductory analysis. Teoksessa James Hiebert (toim.) 1986. Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1—27.

Hoffer, A. 1981. Geometry is more than proof. Mathematics Teacher 74 (1), 7—18.

Hoffer, A. 1983. Van Hiele based research. Teoksessa R. Lesh. & M. Landau (toim.) Acquisition of mathematics: Concepts and processes. New York: Academic Press, 205—227.

Hoffer A. 1988. Geometry and visual thinking. Teoksessa T.R. Post (toim.) Teaching mathematics in grades K-8. Research based methods. Newton, MA: Allyn & Bacon, 232—261.

Holland, J.H., Holoyoak, K.J., Nisbett, R.E & Thagard, P.R. 1986. Induction. Processes of inference, learning and discovery. Cambridge, MA: MIT Press.

Homa, D. & Chambliss, D. 1975. The relative contributions of common and distinctive information on the abstraction of ill-defined categories. Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory 1, 351—359.

Homa, D. & Vossburgh, R. 1976. Category breadth and the abstraction of prototypical information. Journal of Human Learning and Memory 2, 322—330.

Honkela, T. 1991. Symbolit ja neuroniverkot luonnollisen kielen semantiikan mallinnuksessa. Teoksessa E. Marjomaa & T. Vadén (toim.) Ihmisen tiedonkäsittely, symbolien manipulointi ja konnektionismi. Filosofisia tutkimuksia Tampereen yliopistosta XXII. Tampereen yliopiston jäljennepalvelu, 175—219.

Horn, J. L. & Cattel, R. B. 1966. Refinement of test theory of fluid and crystalized general intelligence. Journal of Educational Psychology 57, 254—270.

Huttenlocher, J. 1968. Constructing spatial images: A strategy in reasoning. Psychological Review 75, 286—298.

Jansson, L.C. 1986. Logical reasoning hierarchies in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education 17 (1), 3—20.

Jaime, A. & Gutiérrez, A. 1994. A model of test design to assess the van Hiele levels. Teoksessa J. P. Pedro & J.F. Matos (toim.) Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lissabon (Portugal). Volume III, 41—48.

Johnson, I.E.D. 1988. The prediction of achievement in secondary school courses in regular, informal, and honors geometry by a test of van Hiele levels. Texas A&M University, Dissertation Abstracts International 50 (5A), DA 8913386.

Johnson, J.M. 1982. Figural Intersection Test (FIT): A measure of mental (M) attentional energy. York University. Unpublished Manuscript. Appendix A: FIT task instructions.

Johnson, M. 1987. The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination and reason. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Johnson-Laird, P.N. 1980. Mental models in cognitive science. Cognitive Science 4, 71—115.

Johnson-Laird, P.N. 1983. Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and conciousness. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Johnson-Laird, P.N. 1987. The mental representation of the meaning of words. Cognition 25, 189—211.

Johnson-Laird, P.N. & Byrne, R.M.J.1991. Deduction. Hove, UK: Erlbaum.

Joki, J. 1994a. Kaksi kohtaa tasogeometriasta. Teoksessa R. Seppälä (toim.) Matematiikka, taitoa ajatella. Opetushallitus 1994. Jyväskylä: Gummerus, 80—87.

Joki, J. 1994b Peruskoulun deduktiivinen geometria. Matematiikan pro gradu -tutkielma. Joensuun yliopisto. Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta. Matematiikan laitos.

Joki, J. 1995. Tasogeometrian punainen lanka. Forssa: MFKA-Kustannus.

Jones, D. & Bush, W.S. 1996. Mathematical structures: Answering the why questions. Mathematics Teacher 89 (9), 716—722.

Joutsenlahti, J. 1997. Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa. Teoksessa P. Räsänen, P., P. Kupari, Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka — näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 336—351.

Juhel, J. 1991. Spatial abilities and individual differences in visual information processing. Intelligence 15, 117—137.

Jurdak, M. 1991. van Hiele levels and the SOLO taxonomy. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 22 (1), 57—60.

Kangasniemi, E. 1989. Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 28.

Kangassalo, H. 1982. On the concept of concept in a conceptual schema. University of Tampere. Dep. of Math. Sc. rep. A67, 1982.

Kangassalo, H. 1991. Käsitteellisen mallintamisen perusteita. Teoksessa E. Marjomaa & T. Vadén (toim.) Ihmisen tiedonkäsittely, symbolien manipulointi ja konnektionismi. Filosofisia tutkimuksia Tampereen yliopistosta XXII. Tampereen yliopiston jäljennepalvelu, 75—92.

Kaufman, E.L., Lord, M.W., Reese, T.W. & Volkman, L. 1949. The discrimination of visual number. American Journal of Psychology 62, 498—525.

Kay, C.S. 1986. Is a square a rectangle? The development of first-grade students' understanding of quadrilaterals with implications for the van Hiele theory of the development of geometric thought. University of Georgia, Dissertation Abstracts International 47 (8A), DA 8628890.

Keefe, J.W. & Monk, J.S. 1986. Learning style profil. Examiner's manual. Reston, VA: National Association of Secondary School Principals (NASSP).

Kellogg, R.T. & Bourne, L.E. Jr. & Ekstrand, B.R. 1978. Feature frequency and the acquisition of natural concepts. American Journal of Psychology 91 (2), 211—222.

Kendler, H.H. 1964. The concept of concept. Teoksessa A.W. Melton (toim.) Categories of human learning, New York: Academic Press, 1964, 211—237 ja teoksessa J. Eliot (toim.) Human development and cognitive processes. New York: Holt Reinhart and Winston, 1971, 437—459.

Keranto, T. 1983. Matemaattiset ajatteluprosessit ja strategiat: Yhteydet yksilön tiedollisen rakentumiseen ja informaation ksäittelykapasiteettiin. Tampereen yliopiston Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos. Julkaisu N:o 8.

Klauer, K.J. 1990. A process theory of inductive reasoning tested by the teaching of domain specific thinking strategies. European Journal of Psychology of Education 5 (2), 191—206.

Klausmeier, H.J. 1992. Concept learning and concept teaching. Educational Psychologist 27 (3), 267—286.

Klausmeier, H.J. & Allen P. 1978. Cognitive development of children and youth. New York: Academic Press.

Komatsu, L.K. 1992. Recent views of conceptual structure. Psychological Bulletin 112 (3), 500—526.

Korhonen, H. 1994. Peruskoulun päättöluokan matematiikan opetuksen arviointi. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 127. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Korhonen, H. 1999. Peruskoulun matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 1998. Oppimistulosten arviointi 1/1999. Helsinki: Opetushallitus.

Korpinen, P. 1990. Loogisen ajattelun mittaaminen peruskoulun 9.-luokkalaisilla ja lukion 1.-luokkalaisilla. Julkaisematon ainedidaktiikan seminaariesitelmä. Tampereen yliopisto. Tampereen opettajankoulutuslaitos.

Kosslyn, S.M. 1978. The representational-developmental hypothesis. Teoksessa P.A. Ornstein (toim.) Memory development in children. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Krainer, K. 1993. Powerful tasks. A contribution to a high level of acting and reflecting in mathematics instruction. Educational Studies in Mathematics 24 (1), 65—93.

Krause, E. F. 1973. Taxicab geometry. Mathematics Teacher 66 (8), 695—706.

Krutetskii, V.A. 1976. The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Translated from russian by J. Teller. Edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Kupari, P. 1989. Some features in the development of geometry teaching. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Geometry teaching — geometrieunterricht. Conference on the teaching of geometry in Helsinki 1.—4.8.1989. Department of Teacher Education. University of Helsinki. Research report 74, 171—181.

Kupari, P. 1993a. Laskutaidotko kadonneet? Peruskoululaiset matematiikan kokijoina ja taitajina. Teoksessa P. Linnankylä & H. Saari (toim.) Oppiiko oppilas peruskoulussa? Peruskoulun arviointi 90 -tutkimuksen tuloksia. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81—104.

Kupari, P. 1993b. Millä tavoin matematiikan opiskelu ja opetus on muuttunut? Teoksessa V. Brunell & P. Kupari (toim.) Peruskoulu oppimisympäristönä. Peruskoulun arviointi 90 -tutkimuksen tuloksia. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81—104.

Kupari, P. 1997. Mitä matematiikasta opitaan koulussa? Valtakunnallisten arviointitutkimusten tuloksia. Teoksessa P. Räsänen, P., P. Kupari, Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka — näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 216—237.

Kynigos, C. 1993. Children's inductive thinking during intrinsic and euclidean geometrical activities in a computer programming environment. Educational Studies in Mathematics 24 (2), 177—197.

Laborde, C. 1993. Do the pupils learn and what do they learn in a computer based environment? The case of Cabri-geométrè. Teoksessa B. Jaworski (toim.) Technology in mathematics teaching. TMT 93. Conference proceedings, 39—52

Laine, K. 1984. Ympäristöopin käsitteiden hallinta. Koulunkäynnin alussa ja luokittavan käsitteiden opetusstrategian vaikutus siihen. Turun yliopiston julkaisuja. Acta Universitas Turkuensis. Sarja C. Osa 49.

Lakoff, G. 1987. Women, fire, and dangerous things. What categories reveal about the mind. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Lakoff, G. 1990. Cognitive models and prototype theory. Teoksessa U. Neisser (toim.) Concepts and conceptual development: Ecological and intellectual factors in categorization. Cambridge: Cambridge University Press, 63—100.

Land, J.E. 1990. Appropriateness of the van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebra tasks as typified by college students' learning of functions, Boston University. Dissertation Abstracts International 51 (11), DA 9104369.

Lawrie, C. & Pegg, J. 1997. Some issues in using Mayberry's test to identify van Hiele levels. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti (Finland). Volume 3, 184—191.

Lehtinen, E., Kinnunen, R. Vauras, M., Salonen, P., Olkinuora, E. & Poskiparta, E. 1989. Oppimiskäsitys koulun kehittämisessä. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Lehto, J. 1995. Working memory and school achievement in the ninth form. Educational Psychology 15 (3), 271—281.

Lehto, J. 1996. Työmuistin yhteys tekstin tiivistämiseen, ongelmanratkaisuun ja koulumenestykseen. Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia 149.

Lehto, J. 1997. Työmuisti ja oppiminen. Kasvatus 28, (1), 49—58.

Leik, R.K. 1966. A measure of ordinal consencus. Pacific Sosiological Review 9, 85—90.

Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. 1983. Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. Teoksessa R. Lesh & M. Landau (toim.) Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press, 264—343.

Liben, L.S. 1981. Spatial representation and behavior across the life span: Multiple perspectives. Teoksessa L.S. Liben, A.H. Patterson & N. Newcombe (toim.) Spatial representation and behavior across the life span: Theory and application. New York: Academic Press, 3—36.

Linchevsky, L. Vinner, S. & Karsenty, R. 1992. To be or not to be minimal? Students teachers' views about definitions in geometry. Teoksessa I. Hirabayashi ym. (toim.) Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Durham, NH (USA). Volume 2, 48—55.

Linn, M.C. & Kyllonen, P. 1981 The field dependence — independence construct: some, one, or none. Journal of Educational Psychology 73 (2), 261—273.

Lohman, D.F. 1979. Spatial ability: A review and reanalysis of the correlational literature. Tech. Rep. No. 8. Stanford, CA: Stanford University School of Education, Aptitude Research Project.

Lundh, L-G. 1983. Mind and meaning. Towards a theory of the human mind considered as a system of meaning structures. Acta Universitatis Upsaliensis. Studia Psychologia Upsalensia 10.

Lunkenbein, D. 1980. Observations concerning the child's concept of space and its concequences for the teaching of geometry to younger children. [Summary]. Teoksessa: M. Suydam (toim.) Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. Boston, MA: Birkhäuser , 172—174.

Maccoby, E.D. & Jacklin, C. 1976. The psychology of sex differences. Stanford, CA: Stanford University Press.

Macnamara, J. 1977. Problems about concepts. Teoksessa J. Macnamara (toim.) Language learning and thought. New York: Academic Press, 141—146.

Magne, O. 1989. An experiment on preschool geometry. Didakometry 73/1989.

Malaty, G.N. 1982. Understanding of mathematical concepts: classification, evaluation, results. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 13 (3), 347—354.

Malaty, G. 1989. Do we still need Euklid? Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Geometry teaching — geometrieunterricht. Conference on the teaching of geometry in Helsinki 1.—4.8.1989. Department of Teacher Education. University of Helsinki. Research report 74, 193—202.

Malinen, P. 1992. Looginen ajattelu matematiikan opetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 49.

Malinen, P. 1993a. Osaavatko peruskoululaiset ajatella loogisesti? Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.) Matematiikan opetus ja konstruktivismi — teoriaa ja käytäntöä.. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116, 103—109.

Malinen, P. 1993b. Can finnish elementary school pupils think logically? Teoksessa P. Kupari & L. Haapasalo (toim.) Constructivist and curriculum issues in school mathematics education. Mathematics education research in Finland: Yearbook 1992—1993. The Finnish Association of Mathematics and Science Education Research. The University of Jyväskylä. Institute for Educational Research. Publication series B. Theory into Practice 82, 35—41.

Malinen, P. 1997. Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka — näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 99—110.

Mammana, C. & Villani, V. 1998 (toim.) Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI study. Dordrecht: Kluwer.

Mariotti, M.A. 1993. Figural and conceptual aspects in a defining process. Teoksessa I. Hirabayashi ym. (toim.) Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tsukuba, Ibaraki (Japan). Volume II, 232—237.

Mariotti, M.A. & Fischbein, E. 1997. Defining in classroom activities.Educational Studies in Mathematics 34 (3), 219—248.

Masami, I. 1988. The thinking levels of function based on van Hiele's theory. Teoksessa J. Lux (toim.) Abstracts of short communications. 2. Poster presentations. Sixth International Congress on Mathematical Education. ICMI, Budapest, 161.

Mason, M.M. 1989. Geometric understanding and misconceptions among gifted fourth-eight graders. Abstract, Eric no ED 310922.

Matsuo, N.Y. 1993. Students' understanding og geometrical figures in transition from van Hiele level 1 to 2. Teoksessa I. Hirabayashi ym. (toim.) Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tsukuba, Ibaraki (Japan). Volume II, 113—120.

Mayberry, J. 1983. The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. Journal for the Research in Mathematics Education 14 (1), 58—69.

McGee, M.G. 1979. Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. Psychological Bulletin 86 (5), 889—918.

McGlendon, M.E. 1990. Application of the van Hiele model in evaluating elementary teachers' understanding of geometric concepts and improving their attitudes toward teaching geometry. University of South Florida, Dissertation Abstracts International 51 (5A), DA 9024906.

Medin, D.L. & Schaffer, M.M. 1978. Context theory of classification learning. Psychological Review 85 (3), 207—238.

Mehtäläinen, J. 1992. (toim.) Tiedollinen kasvatus ja ajattelun kehittäminen. Helsinki: VAPK-Kustannus.

Mervis, C.B. & Rosch, E. 1981 Categorization of natural objects. Annual Review of Psychology 32, 89—115.

Miller, G.E. 1956. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. Psychological Review 63, 81—97.

Millroy, W.L. 1992. An ethnographic study of the mathematical ideas of a group of carpenters. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph number 5. Reston VA: NCTM.

Millward, R.B. 1980. Models of concept formation. Teoksessa R.E. Snow, P-A. Federico & W.E. Montaque (toim.) Aptitude, learning and instruction. Vol.2. Cognitive process analysis of learning and problem solving. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 245—275.

Mitchelmore, M.C. 1976. Cross-cultural research on concepts of space and geometry. Teoksessa J.L Martin (toim.) Space and geometry. Ohio: ERIC/SMEAC.

Neisser, U. 1981. Kognitio ja todellisuus. Helsinki: Weilin+Göös.

Neisser, U. 1990. From direct perception to conceptual structure. Teoksessa U. Neisser (toim.) Concepts and conceptual development: Ecological and intellectual factors in categorization. Cambridge: Cambridge University Press, 11—24.

Nelson, K. 1974. Concept, word and sentence: Interrelations in acquisition and development. Cambridge: Harvard University Press.

Nelson, K. 1985. Making sense. The acquisition of shared meaning. Orlando, FL: Academic Press.

Niaz, M. 1988. Manipulation of M-demand of chemistry problems and its effect on students performance: A neo-piagetian study. Journal of Research in Science Teaching 25 (8), 643—657.

Niaz, M. 1989. Relation between Pascual-Leone's structural and functional M-space and its effect on problem solving chemistry. International Journal of Science Education 11 (1), 93—99.

Niaz, M. 1991. Correlates of formal operational reasoning: A neo-piagetian analysis. Journal of Research in Science Teaching 28 (1), 19—40.

Niaz, M. 1994. Pascual-Leone's theory of constructive operators as an explanatory construct in cognitive development and science achievement. Educational Psychology 14 (1), 23—43.

Niemi, P. & Poskiparta, E. 1995. Muistiprosessit lukemisessa ja lukemishäiriöissä. Teoksessa H. Lyytinen ym. (toim.) Oppimisvaikeudet. Helsinki: WSOY, 264—280.

Niiniluoto, I. 1980. Johdatus tieteenfilosofiaan. Käsitteen- ja teorianmuodostus. Helsinki: Otava.

Novick, L.R. & Tversky B. 1987. Cognitive constraints on ordering operations: The case of geometric analogies. Journal of Experimental Psychology: General 116 (1), 50—67.

Nykänen, A. 1945 Alkeisgeometrian opetuksesta Suomessa — erityisesti oppikirjojen kehitystä silmällä pitäen. Jyväskylä: Gummerus.

Osherson, D.N. 1975. Logical abilities in children. Vol. III: Reasoning in adolescence: Deductive inferences. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Osherson, D.N. 1976. Logical abilities in children. Vol. IV: Reasoning and concepts. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Osherson, D.N. & Smith, E.E. 1981. On the adequacy of prototype theory as a theory of concepts. Cognition 9 (1), 35—58.

Overton, W., Byrnes, J.P. & O'Brien, D.P. 1985. Developmental and individual differences in conditional reasoning: The role of contradiction training and cognitive style. Developmental Psychology 21 (4), 692—701.

Palomäki, J. 1991. Käsitteen käsite — ontologinen tarkastelu. Teoksessa E. Marjomaa & T. Vadén (toim.) Ihmisen tiedonkäsittely, symbolien manipulointi ja konnektionismi. Filosofisia tutkimuksia Tampereen yliopistosta XXII. Tampereen yliopiston jäljennepalvelu, 94—121.

Parsons, C. 1960. Inhelder and Piaget's The growth of logical thinking, II: A logicians's viewpoint. British Journal of Psychology 51, 75—84.

Parzysz, B. 1991. Representation of space and students' conceptions at high school level. Educational Studies in Mathematics 22 (6), 575—593.

Pascual-Leone, J. 1987. Organismic processes for neo-piagetian theories: A dialectic causal account of cognitive development. International Journal of Psychology 22, 531—570.

Pascual-Leone, J. & Burtis, P.J. 1974. FIT: Figural Intersection Test, a group measure of M-space. Unpublished manuscript, York University.

Pegg, J. & Baker, P. 1999. An exploration of the interface between van Hiele's levels 1 and 2: Initial findings. Teoksessa O. Zaslavsky (toim.) Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa (Israel). Volume 4, 25—32.

Pegg, J. & Currie, P. 1998. Widening the interpretation of van Hiele's levels 2 and 3: Initial findings. Teoksessa A. Olivier & K. Newstead (toim.) Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stellenbosch (South Africa). Volume 3, 335—342.

Pegg, J. & Davey G. 1989. Clarifying level descriptors for childrens' understanding of some basic 2-D geometric shapes. Mathematics Education Research Journal 1 (1), 16—27.

Pegg, J. & Davey, G. 1998. Interpreting student understanding in geometry. A synthesis of two models. Teoksessa R. Lehrer & D. Chazan (toim.) Designing learning environments for developing understanding of geometry and space. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Pehkonen E. 1981. Geometrian opettaminen yläasteella. I. Miksi geometrian opettaminen on tärkeätä? Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja 45 (6), 521—526.

Pehkonen E. 1982a. Geometrian opettaminen yläasteella. II. Yläasteen geometrian kurssi. Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja 46 (2), 181—186.

Pehkonen E. 1982b. Geometrian opettaminen yläasteella. III. Todistaminen geometriassa. Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja 46 (4), 341—345.

Pehkonen E. 1982c. Geometrian opettaminen yläasteella. IV. Todistamisen opettamisesta. Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja 46 (5), 433—440.

Pehkonen, E. 1983. Entwicklung des Geometrieunterrichts in Finnland innerhalb der letzten zwanzig Jahre. Mathematica didactica 6 (3/4), 117—128.

Pehkonen, E. 1985. Peruskoulun geometrian opettamisen periaatteista ja niiden seurauksista opetukseen. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 32.

Pehkonen, E. 1986. Richtlinien zum Geometrieunterricht. Teoksessa P. Kupari (toim.) Mathematics education research in Finland. Yearbook 1985, 35—60. Institute for educational research. Publication series B. Theory into practice 3. University of Jyväskylä.

Pehkonen, E. 1997. Peruskoulun matematiikan opetuksen arviointi 1995. Kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia 152. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Pehkonen E. & Pehkonen L. 1993. Kohti uutta opetussuunnitelmaa! Dimensio 57 (2), 40—43.

Pehkonen, E. & Soro, R. 1998. Peruskoulun oppilaiden matemaattinen taso kansainvälisten vertailujen valossa. Dimensio 62 (6), 4—9.

Pellegrino, J.W. & Glaser, R. 1980. Components of inductive reasoning. Teoksessa R.E. Snow, P-A. Federico & W.E. Montaque (toim.) Aptitude, learning and instruction. Vol.2. Cognitive process analysis of learning and problem solving. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 175—215.

Pellegrino, J.W., Mumaw R.J. & Shute V.J. 1985. Analyses of spatial aptitude and expertise. Teoksessa S.E. Embertson (toim.) Test design, developments in psychology and psychometrics. Orlando FL: Academic Press, 45—76.

Piaget, J. & Inhelder, B. 1956. The child's conception of space. London: Routledge and Kegan Paul.
Piaget, J. & Inhelder, B. 1958. The growth of logical thinking from childhood to adolescence. New York: Basic Books.
Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. 1960. The child's conception of geometry. New York, Basic Books.
Piburn, M.D. 1990. Reasoning about logical propositions and success in science. Journal of Research in Science Teaching 27 (9), 887—900.
Pines, A.L. 1985. Toward a taxonomy of conceptual relations and the implications for the evaluation of cognitive structures. Teoksessa L.H.T. West & A.L. Pines (toim.) Cognitive structure and conceptual change. Orlando, FL: Academic Press.
Pinxten, R. 1991. Geometry education and culture. Learning and Instruction 1, 217—227.
Pippola, L. 1993. Matematiikan tuntijaot ja opetussuunnitelmat. Dimensio 57 (6), 10—13.
Pirie, S.E.B. & Kieren, T.E. 1991. Folding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding. Teoksessa F. Furighetti (toim.) Proceedings of the 15th PME conference, Assisi (Italy). Vol. III, 169—176.
Pirie, S.E.B. & Kieren, T.E. 1994. Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? Educational Studies in Mathematics 26 (2), 191—228.
Posner, M.I. 1973. Cognition. An introduction. Illinois: Scott, Foresman.
Posner, M.I., Goldsmith, R. & Welton, K.E. Jr. 1967. Perceived distance and the classification of distorted patterns. Journal of Experimental Psychology 73 (1), 28—38.
Posner, M.I., Keele, S.W. 1968. On the genesis of abstract ideas. Journal of Experimental Psychology 77, 353—363.
Posner, M.I., Keele, S.W. 1970. Retention of abstract ideas. Journal of Experimental Psychology 83, 304—308.
Presmeg, N.C. 1986. Visualization in high-school mathematics. For the Learning of Mathematics 6 (3), 42—46.
Presmeg, N.C. 1992a. Book review: M. Johnson, Body in the mind: The bodily basis of meaning, imanigation and reason. Educational Studies in Mathematics 23 (3), 307—314.
Presmeg, N.C. 1992b. Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. Educational Studies in Mathematics 23 (6), 595—610.
Pyshkalo, A.M. 1968. Geometriya v I—IV klassakh (Problemy formirovaniya geometricheskikh predstavlenii u mladshikh shkolnikov). Moscow: Prosveschenie.
Päivänsalo, P. 1971 Kasvatuksen tutkimuksen historia Suomessa vuoteen 1970. Helsinki: Ylioppilastuki.
Rauste-von Wright, M. & von Wright, J. 1994. Oppiminen ja koulutus. Helsinki: WSOY.
Reed, S.K. 1972. Pattern recognition and categorization. Cognitive Psychology 3, 382—407.
Restle, F. 1962. The selection of strategies in cue learning. Psychological Review 69, 329—343.
Richardson, A. 1977. Verbalizer-visualizer: A cognitive style dimension. Journal of Mental Imagery 1 (1), 109—125.
Ropo, E. 1984. Oppiminen ja oppimisen tyylit. Viitekehyksen kehittäminen ja oppimisen tyylien empiirinen tarkastelu peruskoulussa ja korkeakoulussa. Acta Universitatis Tamperensis ser. A vol. 172.
Rosch, E. 1973. On the internal structure of perceptual and semantic categories. Teoksessa T.E. Moore (toim.) Cognitive development and the acquisition of language. New York: Academic Press, 136—154.
Rosch, E. & Mervis, C.B. 1975. Family resemblanches: Studies in the internal structure of categories. Cognitive Psychology 7, 573—605.

Rosch, E., Mervis, C.B., Gray, W.D., Johnson, D.M. & Boyes-Braem, P. 1976. Basic objects in natural categories. Cognitive Psychology 8, 382—439.

Royce, J.R. & Powell, A. 1983. Theory of personality and individual differences: factors, systems and processes. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Rumelhart, D.E. & Norman, D.A. 1981. Accretion, tuning, and restructuring: Three modes of learning. Teoksessa J.W. Cotton & R. Klatzky (toim.) Semantic factors in cognition. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ryle, G. 1949. The concept of mind. New York: Barnes and Noble.

Saads, S. & Davis, G. 1997a. Visual perception and image formation in three dimensional geometry. Preprint. URL-osoite http://www.soton.ac.uk/~gary/Saads&Davis.html [Osoite tarkistettu viimeksi 20.7.1999].

Saads, S. & Davis, G. 1997b. Spatial abilities, van Hiele levels, & language use in three dimensional geometry. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti (Finland). Volume 4, 104—111.

Saariluoma, P. 1988a. Ajattelu kognitiivisena prosessina. Teoksessa A. Hautamäki (toim.) Kognitiotiede. Helsinki: Gaudeamus, 43—70.

Saariluoma, P. 1988b. Ihmisen muisti. Teoksessa A. Hautamäki (toim.) Kognitiotiede. Helsinki: Gaudeamus, 71—99.

Sahlberg, P. 1988. Peruskoulun ja lukion opetuksen opas: luonnontieteet. Luonnontieteen opetuksen työtapoja 1. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Salthouse, T.A., Babcock, R.L., Mitchell, D.R.D., Palmon, R. & Skovronek, E. 1990. Sources of individual differences in spatial visualization ability. Intelligence 14, 187—230.

Schaefer, G. 1979. Concept formation in biology. The concept 'growth'. European Journal of Science Education 11 (1), 87—101.

Schneider, W. & Pressley, M. 1989. Memory development between 2 and 20. New York: Springer.

Schoenfeld, A.H. 1986. On having and using geometric knowledge. Teoksessa J. Hiebert (toim.) Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 225—265.

Schumann, H. & Green, D. 1994. Discovering geometry with a computer — using Cabri Géomètre. Lund: Chartwell-Bratt.

Senk, S.L. 1983. Proof-writing achievement and van Hiele levels among secondary school geometry students. The University of Chicago. Dissertation Abstracts International 44 (2), 417-A.

Senk, S.L. 1985. How well do students write geometry proof. Mathematics Teacher 78 (6), 448—456.

Senk, S.L. 1989. van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. Journal for Research in Mathematics Education 20 (3), 309—321.

Senk, S.L. & Hirschorn, D.B. 1990. Multiple approaches to geometry: Teaching similarity. Mathematics Teacher 83 (4), 274—280.

Seppälä, R. 1994. Mihin matematiikan opetus tähtää peruskoulun yläasteella ja lukiossa. Teoksessa R. Seppälä (toim.) Matematiikka, taitoa ajatella. Jyväskylä: Gummerus, 15—24.

Seppälä, R. 1997. Kommentti FK Riitta Soron kirjoitukseen. Dimensio 61 (6), 27—28.

Sfard, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics 22 (1) 1—36.

Sfard, A. & Linchevski, L 1994. The gains and the pitfalls of reification — The case of algebra. Educational Studies in Mathematics 26 (2), 191—228.

Shaughnessy, J.M. & Burger, W.F. 1985. Spadework to deduction in geometry. Mathematics Teacher 78 (6), 419—428.

Shavelson, R.J. 1972. Some aspects of the correspondence between content structure and cognitive structure in physics instruction. Journal of Educational Psychology 63 (3), 225—234.

Sierpinska, A. 1994. Understanding in mathematics. London: Falmer Press.

Silfverberg, H. 1984a. Kolmioihin ja nelikulmioihin liittyvien käsitteiden oppimisen tarkastelua van Hielen mallin kannalta. Tampereen yliopisto. Painamaton kasvatustieteen sivulaudatur-tutkielma.

Silfverberg, H. 1984b. Study of learning concepts related to triangles and quadrangles on the basis of van Hiele theory. Teoksessa P. Kupari (toim.) Mathematics education research in Finland. Yearbook 1984, 115—124.

Silfverberg, H. 1986. van Hielen teoria geometrian oppimisessa ilmenevistä tasoista: Tasojen teoreettinen tarkastelu ja mittausmenetelmien kokeilu. Tampereen yliopiston kasvatustieteen laitos. Julkaisusarja A: Tutkimusraportti n:o 39, 1986.

Silfverberg, H. 1989. van Hielen tasot geometristen käsitteiden oppimisessa. Teoksessa K. Seinelä (toim.) Matemaattis-luonnontieteellisten aineiden didaktiikan päivät 23.—24.9.1988 Tampereen yliopistossa. Tampereen yliopisto. Tampereen opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A12, 191—200.

Silfverberg, H. 1994. Geometria matematiikan ainedidaktisena tutkimuskohteena. Teoksessa P. Kaikkonen & P. Pihlainen (toim.) Aineenopettajakoulutuksen ja koulun kehittämisen suuntaviittoja Tampereen opettajankoulutuslaitoksella. Tampereen opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A19, 160—176.

Silfverberg, H. 1998. Finnish lower secondary school students' geometrical concept knowledge — a network of mathematically defined concepts or a collection of undefined conceptions? Teoksessa G. Törner (toim.) Current State of Research on Mathematical Beliefs VI. Proceedings of the MAVI Workshop. University of Duisburg, March 6—9, 1998. Gerhard Mercator Universität Gesamthochschule Duisburg, 101—106.

Silver, E.A. 1986. Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. Teoksessa J. Hiebert (toim.) Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 181—198.

Simon, M.A. 1996. Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sence of knowing. Educational Studies in Mathematics 30 (2), 197—210.

Smith, E.E. 1989. Concepts and induction. Teoksessa M.I. Posner (toim.) Foundations of cognitive science. Cambridge, MA: A Bradford Book, MIT Press, 501—526.

Smith, E.E. & Medin, D.L. 1981. Categories and Concepts. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Smith, E.E., Schoben, E.J & Rips, L.J. 1974. Structure and process in semantic memory: a feautural model for semantic decisions. Psychological Review 81, 214—241.

Smock, C.D. 1976. Piaget's thinking about the development of space concepts and geometry. Teoksessa J.L. Martin (toim.) Space and geometry. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 31—73.

Soon, Y-P 1989. An investigation of van Hiele-like levels of learning in transformation geometry of secondary school students in Singapore. The Florida State University, Dissertation Abstracts International 50 (3A), DA 8915764.

Soro, R. 1997. Peruskoululaisten matemaattiset taidot kansainvälisessä vertailussa. Dimensio 61 (6), 24—27.

Soro, R. & Pehkonen, E. 1998. Kassel-raportti, osa 1. Peruskoulun oppilaiden matemaattiset taidot kansainvälisessä vertailussa. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 197.

Speer, W.R. 1993. Ideas. Arithmetic Teacher 40 (7), 393—405.

Stern, W. 1928. Die Intelligenz der Kinder und Jugendlichen und die Methoden ihrer untersuchung. Leipzig: Darth.

Sternberg, R.J. 1977. Intelligence, information processing and analogical reasoning. The componential analysis of human abilities. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sternberg, R.J. 1985. Beyond IQ. A triarchic theory of human intelligence. Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R.J. 1986. Toward a unified theory of human reasoning. Intelligence 10, 281—314.

Sternberg, R.J., Guote, M.J. & Turner, M.E. 1980. Deductive reasoning. Teoksessa R.E. Snow, P.-A. Federico & W.E. Montaque (toim.) Aptitude, learning and instruction. Vol. 1. Hillsdale NJ: Erlbaum, 219—245.

Stover, N.F. 1989. An exploration of students' reasoning ability and van Hiele levels as correlates of proof-writing achievement in geometry. The University of Oregon, Dissertation Abstracts International 51 (3A), DA 9020231.

Strauss, M.S. 1979. Abstraction of prototypical information by adults and 10-month-old infants. Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory 5 (6), 618—632.

Suydam, M.N. 1985. The shape of instruction in geometry: Some highlights from research. Mathematics Teacher 78 (6), 481—486.

Swafford, J.O, Jones, G.A. & Thornton C.A. 1997. Increased knowledge in geometry and instructional practice. Journal for Research in Mathematics Education. 28 (4), 467—483.

Talsma G.W. & Hersberger J. 1990. STAR Experimental geometry: Working with mathematically gifted middle school students. Mathematics Teacher 83 (5), 351—357.

Tartre, L.A. 1990. Spatial orientation skill and mathematical problem solving. Journal for Research in Mathematics Education 21 (3), 216—229.

Tartre, L.A. & Fennema, E. 1995. Mathematics achievement and gender: A longitudinal study of selected cognitive and affective variables [grades 6—12]. Educational Studies in Mathematics 28 (3), 199—217.

ten Voorde, H.T. 1979. Verbalizing and understanding. Dissertation summary. European Journal of Science Education 1 (4), 469—471.

Tennyson, R.D., Chao, J.N. & Youngers, J. 1981. Concept learning and skill development presentation forms. Journal of Educational Psychology 73 (3), 326—334.

Tennyson, R.D. & Cocciarella, M.J. 1986. An empirically based instructional design theory for teaching concepts. Review of Educational Research 56 (1), 40—71.

Tennyson, R.D. & Park, O.-C. 1980. The teaching of concepts: A review of instructional design research literature. Review of Educational Research 50 (1), 55—70.

Tennyson, R.D., Youngers, J. & Suebsonthi, P. 1983. Concept learning by children using instructional presentation forms for prototype formation and classification skill development. Journal of Educational Psychology 75 (2), 326—334.

Teppo, A. 1991. van Hiele levels of geometric thought revisited. Mathematics Teacher 84 (3), 210—220.

Thurstone, L.L. 1938. Primary mental abilities. Psychometric Monographs, 1938, 1.

Thurstone, L.L. 1944. Factorial study of perception. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Torgerson, W.S. 1967. Theory and methods of scaling. New York: Wiley.

Trabasso, T.R. & Bower, G.H. 1968. Attention in learning. New York: Wiley.

Trzcieniecka-Schneider, I. 1993. Some remarks on creating mathematical concepts. Educational Studies in Mathematics 24 (3), 257—264.

Tyler, L.E. 1965. The psychology of human differences. New York: Appelton-Century-Crofts.

Usiskin, Z. 1980. What should not be in the algebra and geometry curricula of average-bound students? Mathematics Teacher 73 (6), 413—424.

Usiskin, Z. 1982. Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the cognitive development and achievement in Secondary School Geometry Project). Chicago, IL: The University of Chicago. ED 220228.

Usiskin, Z. & Senk, S. 1990. Evaluating a test of van Hiele levels: A response to Crowley and Wilson. Journal for the Research in Mathematics Education 21 (3), 242—245.

van Hiele, P. M. 1957. De problematiek van het inzicht. Unpublished thesis. University of Utrecht.

van Hiele, P.M. 1986. Structure and insight. A theory of mathematics education. Orlando, FL: Academic Press.

van Hiele, P. 1999. Developing geometric thinking through activities that begin with play. Teaching Children Mathematics 5 (6), 310—316.

van Hiele, P.M. & van Hiele-Geldof, D. 1958. A method of initiation into geometry at secondary schools. Teoksessa H. Freudenthal (toim.) Report on methods of initiation into geometry. Groningen: J.B. Wolters, 67—80.

van Hiele-Geldof, D. 1957. De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O. Unpublished thesis. University of Utrecht.

Wason, P.C. 1966. Reasoning. Teoksessa B. Foss (toim.) New horizons in psychology. Vol. 1. Harmonsworth: Penguin Books.

Werdelin, I. 1961. Geometrical ability and space factors in boys and girls. (Diss.). Lund: Lund studies in psychology and education. Investigationes X.

Vestergren, L. 1993. Logisk tänkande och begåvning. Publikationer från Pedagogiska fakulteteten vid Åbo Akademi nr 7 1993.

White R.T. 1994. Commentary: Conceptual and conceptional change. Learning and Instruction 4 (1), 117—121.

Wilson, P.S. & Davis, E.J. 1991. Introduction to the english language edition. Teoksessa P.S. Wilson & E.J. Davis (toim.) Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 3. I.S. Yakimanskaya: The development of spatial thinking in schoolchildren, xiii—xiv.

Wilson, M. 1989. Saltus: A psychometric model of discontinuity in cognitive development. Psychological Bulletin 105 (2), 276—289.

Wilson, M. 1990. Measuring a van Hiele geometry sequence: A reanalysis. Journal for the Research in Mathematics Education 21 (3), 230—237.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. 1983. On concept formation in geometry. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 15 (1), 20—25.

Virsu, V. 1995. Muisti ja älykkyys aivojen hermoverkoissa. Psykologia 30, 266—277.

Wirszup, I. 1976. Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry: Teoksessa J.L. Martin & D.A. Bradbard (toim.) Space and geometry. Papers from a research workshop. Athens, GA: University of Georgia, Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics, 75—97.

von Glasersfeld 1987. Learning as a constructive activity. Teoksessa C. Janvier (toim.) Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 3—17.

Vosniadou, S. 1994. Capturing and modeling the process of conceptual change. Learning and Instruction 4 (1), 45—69.

Vosniadou, S. & Brewer, W.F. 1987. Theories of knowledge restructuring in development. Review of Educational Research 57 (1), 51—67.

Välijärvi, J. 1997. Millä eväillä yliopistoon?: lukiolaisten opiskeluvalmiudet korkeakoulujen opettajien arvioimina. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitoksen julkaisusarja A, Tutkimuksia 68.

Wagener-Wender, M. & Wender, K.F. 1990. Expectations, mental representations and spatial inferences. The Psychology of Learning and Motivation 25, 137—157.

Wheatley, G.W. 1990. Spatial sense and mathematics learning. Arithmetic Teacher 37 (6), 10—11.

Voyer, D., Voyer, S. & Bryden, M.P. 1995. Magnitude of sex differences in spatial abilities: A meta-analysis and consideration of critical variables. Psychological Bulletin 117 (2), 250—270.

Yakimanskaya, I.S. 1991. The development of spatial thinking in schoolchildren. Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 3. Volume editors P.S. Wilson and E.J. Davis. English translation. Originally published 1980 by Pedagogika, Moscow.

Yerushalmy, M. & Chazan, D. 1990. Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. Educational Studies in Mathematics 21 (3), 199—219.

Yoder, V.A. 1988. Exploration of the interaction of the van Hiele levels of thinking. The Pennsylvania State University, Dissertation Abstracts International 49 (10A), DA 8826845.

Ysuf, M.M. 1991. LOGO based instruction in geometry. Abstract, ERIC Document Reproduction Service N0. ED 348218.

Zimmermann, B.J. 1979. Concepts and classification. Teoksessa G.J. Whitehurst & B.J. Zimmermann (toim.) The functions of language and cognition. New York: Academic Press, 57—81.

Åhlberg, M. 1990. Käsitekarttatekniikka ja muut vastaavat graafiset tiedonesittämistekniikat opettajan ja oppilaiden työvälineinä. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia. N:o 30. Savonlinnan opettajankoulutuslaitos.

Åhlberg, M. 1991a. Concept mapping, concept matrices, link tables and argumentation analysis as techniques for educational research on textbooks and educational discourse and as tools for teachers and their pupils in their everyday life. Teoksessa M.-L. Julkunen, S. Selander & M. Åhlberg (toim.) Research on texts at schools. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia. No 37, 89—154.

Åhlberg, M. 1991b. Oppimisen, opetuksen ja opetussuunnitelman evaluaatio. Loimaa: Finn Lectura.

Oppikirjaviittaukset

Billstein, R., Libeskind, S. & Lott, J. 1990. A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers, Fourth Edition. Redwood City, CA: Benjamin/Cummings.

Coxford, A., Usiskin, Z. & Hirschhorn, D. 1993. The University of Chicago School Mathematics Project. Geometry. Glenview, Illinois: Scott, Foresman.

Erkinjuntti, R., Hihnala, K. Juntunen, A., Järvinen, M., Kytölä, R. & Laine, S. 1994—1996. Luvut ja kuviot 1, 2 ja 3. Espoo: Weilin+Göös.

Heinonen, M., Kupiainen, A. & Sainio, E. 1995—1997. Yläasteen Plussa. Keuruu: Otava.

Hoffer, A. 1979. Geometry, a model of the universe. Menlo Park: Addison Wesley.

Lénárth, I. 1996. Non-Euclidean adventure on the Lénárth sphere. Activities comparing planar and spherical geometry. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Metiäinen, A., Paasonen, J. & Voutilainen E. 1994—1996. Matematiikan maailma 1, 2 ja 3. Helsinki: WSOY.

Nevanlinna, R. 1973. Geometrian perusteet. Helsinki: WSOY.

Pehkonen, E. & Tuuri, T. 1996. Matka matematiikkaan. Teoriakirja. Helsinki: Edita.

Serra, M. 1993. Discovering geometry. An inductive approach. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Silfverberg, H., Viilo, M.-L. & Pippola, L. 1994. Matematiikan Taito 3. Geometria. Espoo: Weilin+Göös.

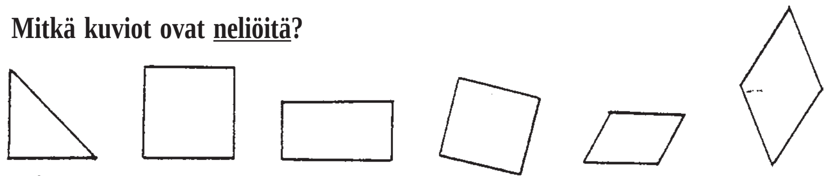
Viilo, M.-L., Pippola, L. & Silfverberg, H. 1995. Matematiikan Taito 5. Analyyttinen geometria. Espoo: Weilin+Göös.

Geometrian testi G1

Kuvioiden tunnistaminen

Testin tehtävien vastaukset kirjataan erilliseen vastauslomakkeeseen. Älä tee mitään merkintöjä tehtäväpapereihin.

1. Mitkä kuviot ovat <u>neliöitä</u>?

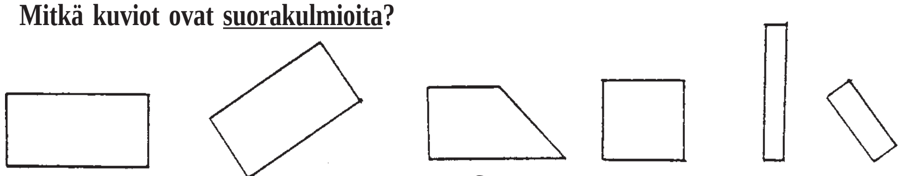


A B C D E F

2. Mitkä kuviot ovat <u>kolmioita</u>?

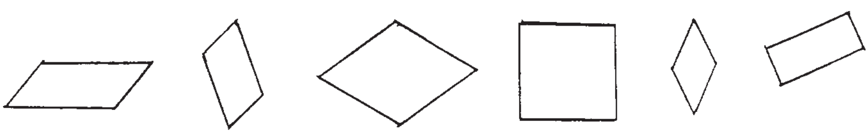
A B C D E F

3. Mitkä kuviot ovat <u>suorakulmioita</u>?



A B C D E F

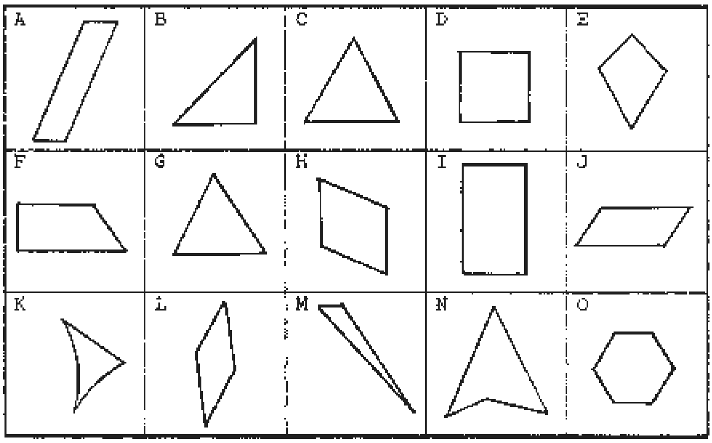
4. Mitkä kuviot ovat <u>suunnikkaita</u>?



A B C D E F

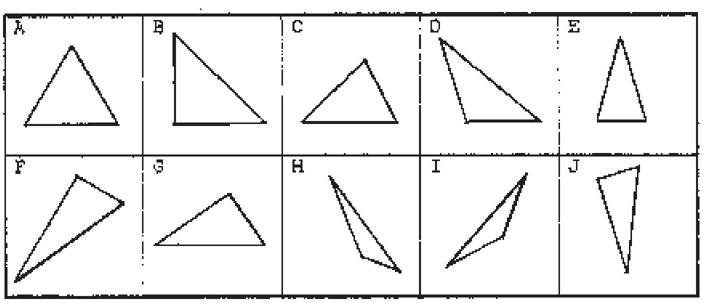
5. Mitkä ruudukon kuvioista ovat

a) kolmioita
b) suorakulmioita
c) neliöitä
d) suunnikkaita
e) nelikulmioita
f) monikulmioita?



6. Mitkä ruudukon kuvioista ovat

a) suorakulmaisia kolmioita
b) teräväkulmaisia kolmioita
c) tylppäkulmaisia kolmioita
d) tasakylkisiä kolmioita
e) tasasivuisia kolmioita?



Nimi: ______________________________ Luokka: ______________________

YMPYRÖI OIKEAT VAIHTOEHDOT

1.		Neliöitä ovat	A B C D E F
2.		Kolmioita ovat	A B C D E F
3.		Suorakulmioita ovat	A B C D E F
4.		Suunnikkaita ovat	A B C D E F
5	a)	Kolmioita ovat	A B C D E F G H I J K L M N O
	b)	Suorakulmioita ovat	A B C D E F G H I J K L M N O
	c)	Neliöitä ovat	A B C D E F G H I J K L M N O
	d)	Suunnikkaita ovat	A B C D E F G H I J K L M N O
	e)	Nelikulmioita ovat	A B C D E F G H I J K L M N O
	f)	Monikulmioita ovat	A B C D E F G H I J K L M N O
6	a)	Suorakulmaisia kolmioita ovat	A B C D E F G H I J
	b)	Teräväkulmaisia kolmioita ovat	A B C D E F G H I J
	c)	Tylppäkulmaisia kolmioita ovat	A B C D E F G H I J
	d)	Tasakylkisiä kolmioita ovat	A B C D E F G H I J
	e)	Tasasivuisia kolmioita ovat	A B C D E F G H I J

Liite 2.

Geometrian testi G2

Kuvioiden ominaisuudet

Nimi: ________________________________ Luokka: ______________________

Ympyröi jokaisessa testin tehtävässä oikeina pitämiesi vastausvaihtoehtojen kirjaintunnukset A), B), … . Oikeita vaihtoehtoja ei välttämättä ole yhtään tai sitten niitä voi olla yksi tai useampia.

---

1. Missä alla mainituissa kuvioissa VOI OLLA <u>ainakin kaksi erisuurta kulmaa</u>?

A) jossakin neliössä
B) jossakin suorakulmiossa
C) jossakin suunnikkaassa
D) jossakin nelikulmiossa
E) jossakin kolmiossa
F) jossakin tasakylkisessä kolmiossa
G) jossakin tasasivuisessa kolmiossa
H) jossakin suorakulmaisessa kolmiossa

2. Missä alla mainituissa kuvioissa ON AINA <u>vähintään kaksi erisuurta kulmaa</u>?

A) kaikissa neliöissä
B) kaikissa suorakulmioissa
C) kaikissa suunnikkaissa
D) kaikissa nelikulmioissa
E) kaikissa kolmioissa
F) kaikissa tasakylkisissä kolmioissa
G) kaikissa tasasivuisissa kolmioissa
H) kaikissa suorakulmaisissa kolmioissa

3. Missä alla mainituissa kuvioissa VOI OLLA <u>ainakin kolme samanpituista sivua</u>?

A) jossakin neliössä
B) jossakin suorakulmiossa
C) jossakin suunnikkaassa
D) jossakin nelikulmiossa
E) jossakin kolmiossa
F) jossakin tasakylkisessä kolmiossa
G) jossakin tasasivuisessa kolmiossa
H) jossakin suorakulmaisessa kolmiossa

4. Missä alla mainituissa kuvioissa ON AINA <u>vähintään kaksi samanpituista sivua</u>?

A) kaikissa neliöissä
B) kaikissa suorakulmiossa
C) kaikissa suunnikkaissa
D) kaikissa nelikulmioissa
E) kaikissa kolmioissa
F) kaikissa tasakylkisissä kolmioissa
G) kaikissa tasasivuisissa kolmioissa
H) kaikissa suorakulmaisissa kolmioissa

5. Mitkä väitteistä ovat tosia?

Mikään kolmio ei voi olla yhtäaikaa

A) teräväkulmainen ja suorakulmainen
B) teräväkulmainen ja tylppäkulmainen
C) suorakulmainen ja tylppäkulmainen
D) tasakylkinen ja tasasivuinen
E) tasakylkinen ja teräväkulmainen
F) tasakylkinen ja suorakulmainen
G) tasakylkinen ja tylppäkulmainen

6. Mitkä väitteistä ovat tosia?

A) Jokainen teräväkulmainen kolmio on myös suorakulmainen tai tylppäkulmainen.
B) Jokainen teräväkulmainen kolmio on myös tasakylkinen tai tasasivuinen.
C) Jokainen suorakulmainen kolmio on myös teräväkulmainen.
D) Jokainen tasakylkinen kolmio on myös teräväkulmainen.
E) Jokainen tasakylkinen kolmio on myös tasasivuinen.
F) Jokainen tasasivuinen kolmio on myös tasakylkinen.
G) Jokainen tasasivuinen kolmio on myös teräväkulmainen.

7. Mitkä väitteistä ovat tosia?

Mikään kuvio ei voi olla yhtäaikaa

A) neliö ja suorakulmio
B) neliö ja suunnikas
C) neliö ja nelikulmio
D) neliö ja monikulmio
E) suorakulmio ja suunnikas
F) suunnikas ja nelikulmio
G) suunnikas ja monikulmio
H) nelikulmio ja monikulmio.

Geometrian testi G3

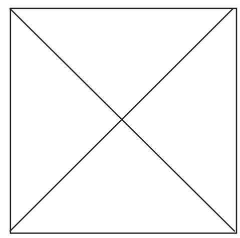
Kuvioiden tulkinta ja yleistykset

Nimi: ____________________________________ Luokka: ________________

Ympyröi jokaisessa testin tehtävässä oikeina pitämiesi vastausvaihtoehtojen kirjaintunnukset A)—E). Oikeita vaihtoehtoja ei välttämättä ole yhtään tai sitten niitä voi olla yksi tai useampia.

---

1. Mitkä väitteistä **A)—E)** ovat tosia **kuvassa olevalle** neliölle?



   A) Neliön sivu ja lävistäjä ovat yhtäpitkät.

   B) Neliössä on kaksi vaakasuoraa ja kaksi pystysuoraa sivua.

   C) Neliön lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

   D) Neliön vastakkaiset sivut ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

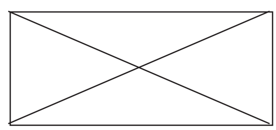
   E) Neliön vierekkäiset sivut ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

2. Mitkä samoista väitteistä **A)—E)** ovat tosia **kaikille** neliöille?

   (Ympyröi oikeat vaihtoehdot) **A) B) C) D) E)**

---

3. Mitkä väitteistä **F)—J)** ovat tosia **kuvassa olevalle** suorakulmiolle?



   F) Suorakulmiossa on neljä suoraa kulmaa.

   G) Suorakulmiossa on neljä sivua.

   H) Suorakulmion vierekkäiset sivut ovat erimittaiset.

   I) Suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtäpitkät.

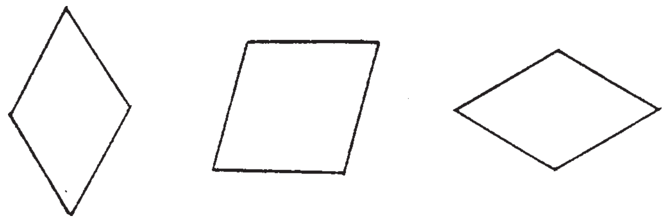
   J) Suorakulmion lävistäjät ovat yhtäpitkät.

4. Mitkä samoista väitteistä **F)—J)** ovat tosia **kaikille** suorakulmioille?

   (Ympyröi oikeat vaihtoehdot) **F) G) H) I) J)**

---

5. **Neljäkäs määritellään nelikulmioksi, jonka kaikki sivut ovat yhtäpitkiä.** Alla on kolme esimerkkiä neljäkkäistä.



Mitkä väitteistä **A)—E)** ovat tosia **yllä oleville** neljäkkäille?

A) Lävistäjät ovat yhtäpitkät.

B) Kumpikin lävistäjä puolitaa kaksi neljäkkään kulmaa.

C) Lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

D) Vierekkäiset kulmat ovat erisuuret.

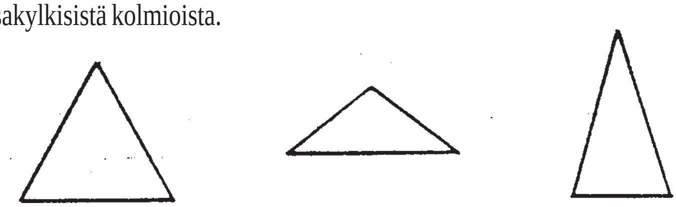
E) Vastakkaiset kulmat ovat erisuuret.

6. Mitkä samoista väitteistä **A)—E)** ovat tosia **kaikille** neljäkkäille?

(Ympyröi oikeat vaihtoehdot) **A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

---

7. Kolmio on **tasakylkinen, jos sen kaksi sivua ovat yhtäpitkät**. Alla on kolme esimerkkiä tasakylkisistä kolmioista.



Mitkä väitteistä **F)—J)** ovat tosia **yllä oleville** tasakylkisille kolmioille?

F) Kaikki sivut ovat samanpituisia.

G) Yksi sivuista on kaksi kertaa niin pitkä kuin jokin toinen sivu.

H) Ainakin kaksi kulmaa ovat samansuuruiset.

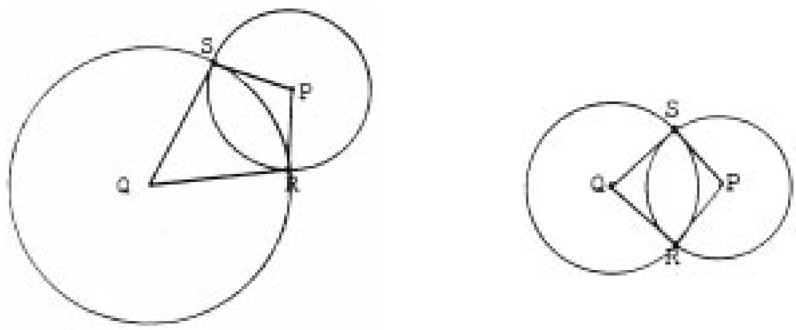
I) Kolme kulmaa ovat samansuuruiset.

J) Yksikään kolmion kulmista ei ole suora kulma.

8. Mitkä samoista väitteistä **F)—J)** ovat tosia **kaikille** tasakylkisille kolmioille?

(Ympyröi oikeat vaihtoehdot) **F)** **G)** **H)** **I)** **J)**

9. Kaksi ympyrää, joiden keskipisteet ovat P ja Q, leikkaavat pisteissä R ja S ja muodostavat näin nelikulmion PRQS. Alla on kaksi esimerkkiä.



Mitkä väitteistä **A)—E)** ovat tosia **kahdelle kuvassa esitetylle esimerkkitapaukselle**?

A) Nelikulmiossa PRQS on kaksi paria yhtäpitkiä sivuja.

B) Nelikulmiossa PRQS on ainakin kaksi yhtäsuurta kulmaa.

C) Janat PQ ja RS ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

D) Kulmat P ja Q ovat yhtäsuuret.

E) Sivut PS ja QS ovat aina eripituiset.

10. Mitkä samoista väitteistä **A)—E)** ovat tosia **kaikille mahdollisille yllä kuvatulla tavalla muodostuville nelikulmioille PRQS**?

(Ympyröi oikeat vaihtoehdot) **A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

Liite 4.

Geometrian testi G4

Ominaisuuksien suhteet, päätelmät, kuvioiden määrittely

Nimi: ______________________________ Luokka: ________________

Ympyröi jokaisessa testin tehtävässä oikeina pitämiesi vastausvaihtoehtojen kirjaintunnukset A), B), … . Oikeita vaihtoehtoja ei välttämättä ole yhtään tai sitten niitä voi olla yksi tai useampia.

---

1. Olkoot lauseet 1 ja 2 seuraavat:

   Lause 1: **Kuvio F on suorakulmio**
   Lause 2: **Kuvio F on kolmio.**

   Mitkä alla olevista väitteistä A)—E) ovat tosia?

   A) Jos lause 1 on tosi, niin lause 2 on tosi.

   B) Jos lause 1 ei ole tosi, niin lause 2 on tosi.

   C) Lauseet 1 ja 2 eivät voi molemmat olla tosia.

   D) Lauseet 1 ja 2 eivät voi molemmat olla epätosia.

   E) Jos lause 1 on tosi, niin lause 2 on epätosi.

2. Olkoot lauseet S ja T seuraavat:

   Lause S: **Kolmiossa ABC on kolme yhtäpitkää sivua.**
   Lause T: **Kolmion ABC kulmat B ja C ovat yhtäsuuret.**

   Mitkä alla olevista väitteistä A)—E) ovat tosia?

   A) Lauseet S ja T eivät molemmat voi olla tosia.

   B) Jos S on tosi, niin T on tosi.

   C) Jos T on tosi, niin S on tosi.

   D) Jos S ei ole tosi, niin T ei sekään ole tosi.

   E) Jos T ei ole tosi, niin S ei sekään ole tosi.

3. **Mitkä alla olevista väitteistä A)—E) ovat tosia?**

A) Kaikki suorakulmioiden ominaisuudet ovat voimassa myös kaikille neliöille.

B) Kaikki neliöiden ominaisuudet ovat voimassa myös kaikille suorakulmioille.

C) Kaikki suorakulmioiden ominaisuudet ovat voimassa myös kaikille suunnikkaille.

D) Kaikki neliöiden ominaisuudet ovat voimassa myös kaikille suunnikkaille.

E) Kaikki nelikulmioiden ominaisuudet ovat voimassa myös kaikille neliöille.

4. **Mitkä väitteistä A)—E) ovat tosia kaikille suorakulmioille, mutta eivät ole tosia kaikille suunnikkaille?**

A) Vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

B) Lävistäjät ovat yhtä pitkät.

C) Vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

D) Vastakkaiset kulmat ovat yhtäsuuret.

E) Vierekkäiset kulmat ovat yhtäsuuret.

5. **Valitse alla mainituista ominaisuuksista sellainen yhdistelmä, että valitsemillasi ominaisuuksilla varustettu kuvio on varmasti neliö. Ympyröi valitsemiasi ominaisuuksia vastaavat tunnukset A)—F). Yritä selviytyä tehtävästä mahdollisimman vähällä määrällä ominaisuuksia.**

A) Kuvio on suunnikas.

B) Kuvio on suorakulmio.

C) Kuvion kaikki kulmat ovat suoria.

D) Vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

E) Vierekkäiset sivut ovat yhtäpitkät.

F) Vastakkaiset sivut ovat yhtäpitkät.

6. **Valitse alla mainituista ominaisuuksista sellainen yhdistelmä, että valitsemillasi ominaisuuksilla varustettu kuvio on varmasti <u>suorakulmainen kolmio</u>. Ympyröi valitsemiasi ominaisuuksia vastaavat tunnukset A)—E). Yritä selviytyä tehtävästä mahdollisimman vähällä määrällä ominaisuuksia.**

A) Kuvio on kolmio.

B) Kuviossa on vain kaksi terävää kulmaa.

C) Kaikkien kulmien astelukujen summa on 180°.

D) Kuvion korkeusjanaksi voidaan valita kuvion sivu.

E) Kuvion kahden kulman summa on 90°.

7. **Mitkä lauseista F)—K) kelpaavat suorakulmion määritelmäksi?**

F) Suorakulmio on yksi geometrisista peruskuvioista.

G) Suorakulmio on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria.

H) Suorakulmio näyttää venytetyltä neliöltä.

I) Suorakulmiossa on neljä suoraa kulmaa, neljä suoraa sivua, kaksi yhtä pitkää lävistäjää, vastakkaiset sivut yhtäpitkät ja yhdensuuntaiset.

J) Suorakulmio on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria ja vierekkäiset sivut ovat eripituiset.

K) Suorakulmio on monikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

8. **Mikä yllä esitetyistä vaihtoehdoista on paras suorakulmion määritelmäksi.**

(Ympyröi valitsemasi vaihtoehto) **F) G) H) I) J) K)**

9. **Jatka alla aloitettuja lauseita niin, että niistä muodostuu kaksi vaihtoehtoista määritelmää neliölle.**

A) Neliö on nelikulmio, jonka ______________________________

____

____

____

B) Neliö on suorakulmio, jonka ______________________________

____

____

____

KIITOS VAIVANNÄÖSTÄSI JA ASIALLISESTA SUHTAUTUMISESTA TUTKIMUKSEEN!

Spatiaalisen ajattelun testi Spat

Katso jokaista kuvaa. Onko kyseessä miehen, naisen vai lapsen kuva? Merkitse valintasi kirjain vastauspaperiisi. Jos et osaa päättää, niin merkitse D. Älä arvaa.

1. 

A. Mies B. Nainen
C. Lapsi D. En tiedä

2. 

A. Mies B. Nainen
C. Lapsi D. En tiedä

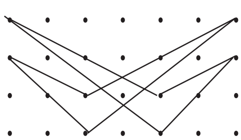
3. 

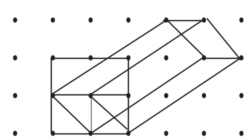
A. Mies B. Nainen
C. Lapsi D. En tiedä

4. 

A. Mies B. Nainen
C. Lapsi D. En tiedä

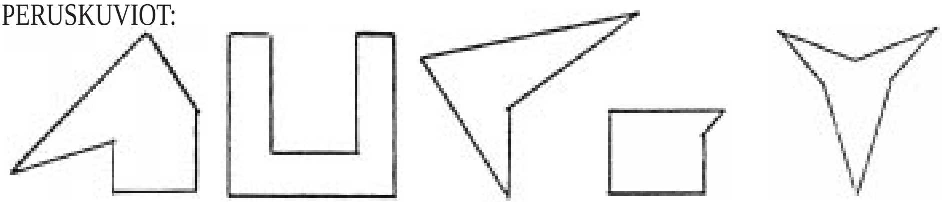
Kopioi alla olevat kuviot vastauspaperissa oleviin pistepohjiin.

5. 

6. 

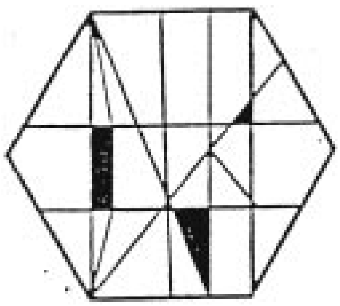
Yksi viidestä alla olevasta peruskuviosta on kätketty kuhunkin tämän sivun monimutkaiseen kuvioon. Kätketty peruskuvio on SAMAN KOKOINEN, SAMAN MUOTOINEN ja SAMASSA ASENNOSSA kuin YKSI alla olevista. Merkitse vastauspaperiisi kätketyn kuvion kirjain.

PERUSKUVIOT:

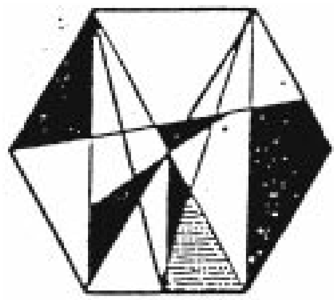


A B C D E

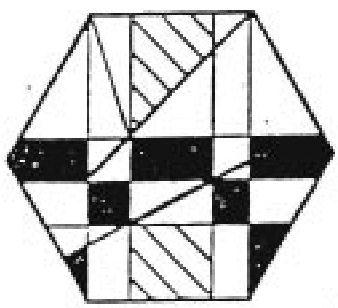
7. Mikä peruskuvio on kätketty tähän monimutkaiseen kuvioon?



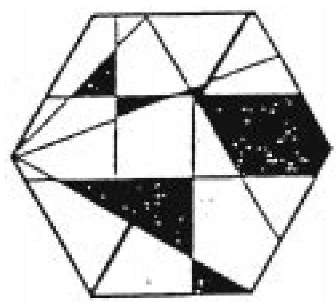
8. Mikä peruskuvio on kätketty tähän monimutkaiseen kuvioon?



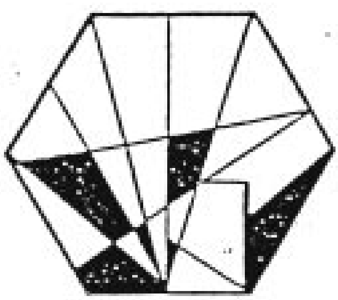
9. Mikä peruskuvio on kätketty tähän monimutkaiseen kuvioon?



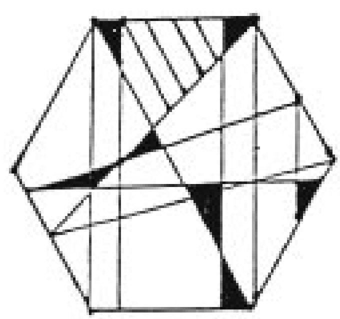
10. Mikä peruskuvio on kätketty tähän monimutkaiseen kuvioon?



11. Mikä peruskuvio on kätketty tähän monimutkaiseen kuvioon?



12. Mikä peruskuvio on kätketty tähän monimutkaiseen kuvioon?

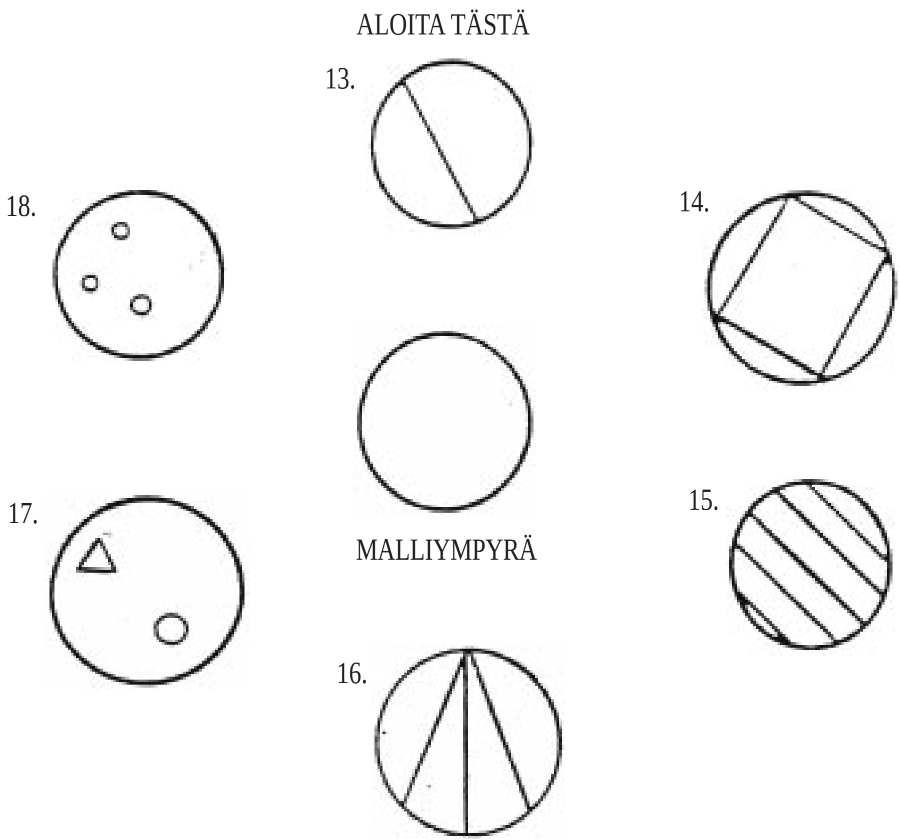


Tämän sivun keskellä on malliympyrä. Vertaa malliympyrän kokoa jokaisen numeroidun kuuden ympyrän kokoon. Älä mittaa ympyröitä. Merkitse vastauspaperiisi jokaisesta kuudesta ympyrästä:

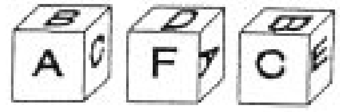
A. jos se on pienempi kuin malliympyrä

B. jos se on suurempi kuin malliympyrä

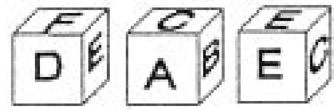
C. jos se on samankokoinen kuin malliympyrä



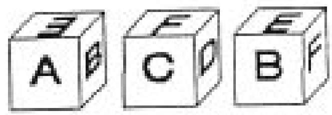
19. Viereisessä kuvassa on kolme keskenään samanlaista noppaa eri asennoissa esitettyinä. Merkitse vastauspaperiisi, mitkä kirjainparit ovat vastakkaisilla puolilla noppaa.



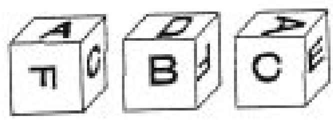
20. Mitkä kirjainparit ovat tämän nopan vastakkaisilla puolilla? Merkitse kirjainparit vastauspaperiisi.



21. Mitkä kirjainparit ovat tämän nopan vastakkaisilla puolilla? Merkitse kirjainparit vastauspaperiisi.

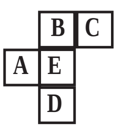


22. Mitkä kirjainparit ovat tämän nopan vastakkaisilla puolilla? Merkitse kirjainparit vastauspaperiisi.

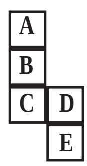


Näistä neliöistä voidaan taittaa kuution muotoinen päältä avoin laatikko. Mikä kirjain jää tällöin laatikon POHJALLE?

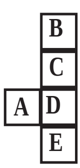
23.



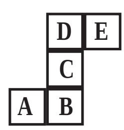
24.



25.

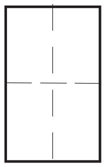


26.



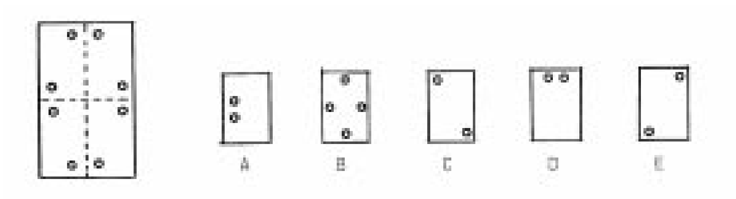
Kuvittele mielessäsi, miten alla olevan kuvan taittamaton paperinpala voidaan taittaa nelinkerroin taittamalla se ensin toista katkoviivaa pitkin alhaalta ylös ja sitten toista katkoviivaa pitkin vasemmalta oikealle.

Taittamaton paperi

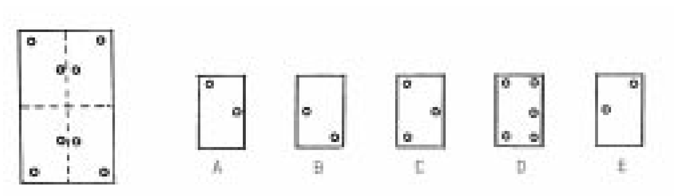


Taitettu nelinkertainen paperi

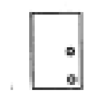
27. Reijitetty paperi taitetaan nelinkerroin yllä kuvatulla tavalla. Miltä paperi näyttää taitettuna:



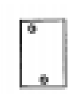
28. Miltä tämä reijitetty paperi näyttää samalla tavoin nelinkerroin taitettuna?



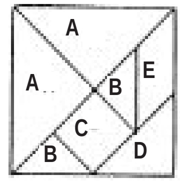
29. Taitetaan ehjä paperi nelinkerroin samalla tavalla kuin edellä ja reijitetään se taittamisen jälkeen viereisen kuvan mukaisesti. Miltä paperi näyttää avattuna? Merkitse kaikki avatun paperin reijät vastauspaperissa olevaan kuvaan.



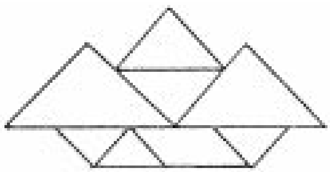
30. Miltä tämä reijitetty paperi näyttää avattuna? Taitokset on tehty samalla tavoin kuin edellä. Merkitse kaikki avatun paperin reijät vastauspaperissa olevaan kuvaan.



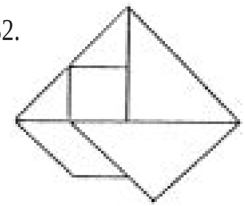
Katso vieressä olevaa kuviota, jonka osia on merkitty kirjaimilla A, B, C, D ja E. Joitakin näistä osista ei ole käytetty tämän sivun muissa kuvissa. Vain yksi osatyyppi puuttuu kustakin kuviosta. Merkitse puuttuvan osatyypin kirjain vastauspaperiisi.



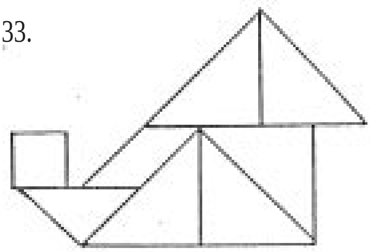
31.



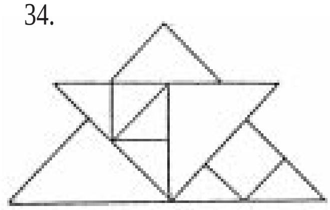
32.



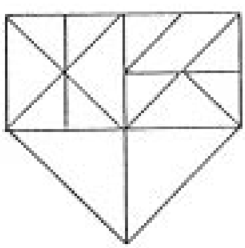
33.



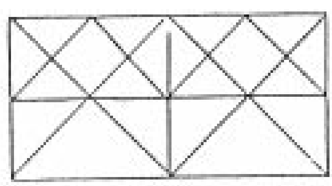
34.



35.



36.

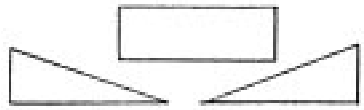


Jaa alla olevat peruskuviot vieressä olevien pienempien kuvioiden kokoisiin ja muotoisiin osiin. Merkitse ratkaisu vastauspaperiin. Älä tee tähän paperiin mitään merkintöjä. Alla on yksi esimerkki.

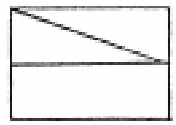
ESIMERKKI:

PERUSKUVIO:

OSAT:

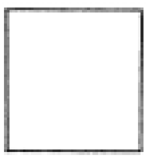


PERUSKUVION JAKO ESIMERKKITAPAUKSESSA:

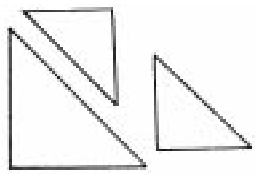


37.

PERUSKUVIO:

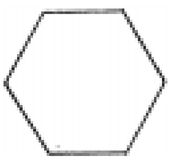


OSAT:

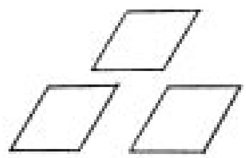


38.

PERUSKUVIO:

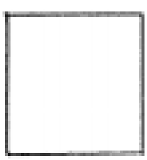


OSAT:

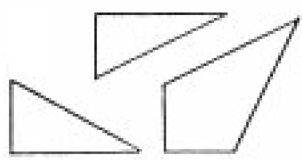


39.

PERUSKUVIO:

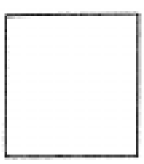


OSAT:

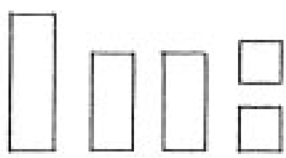


40.

PERUSKUVIO:

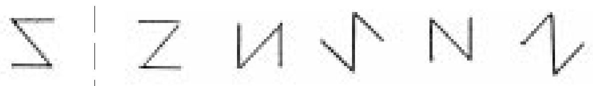


OSAT:



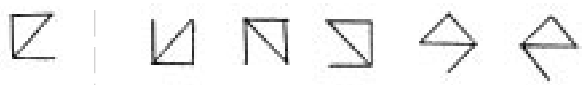
Osa alla olevista kuvioista A, B, C, D ja E ovat muodoltaan samanlaisia kuin niiden vieressä esitetty peruskuvio ja osa kuvioista A, B, C, D ja E ovat samanlaisia kuin peruskuvan peilikuva. Ympyröi vastauslomakkeeseen ne vaihtoehdot, jotka esittävät PERUSKUVION PEILIKUVAA EIKÄ ITSE PERUSKUVIOTA.

41. PERUSKUVIO



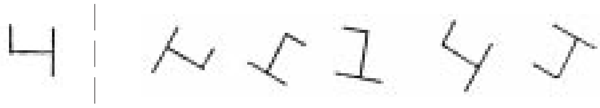
A B C D E

42. PERUSKUVIO



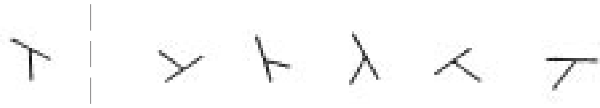
A B C D E

43. PERUSKUVIO



A B C D E

44. PERUSKUVIO



A B C D E

Päättelytesti

Vastauslomakkeestasi löydät kuusi kuvasarjaa A, B, C, D, E ja F. Kuhunkin kuvasarjaan kuuluu kolme kuviota. Käy läpi alla olevat lauseet 1—10 yksi lause kerrallaan ja selvitä mille kokonaisille kuvasarjoille kukin lause on voimassa. Ympyröi oikeat vaihtoehdot vastauslomakkeeseen. Oikeita vaihtoehtoja voi olla yksi tai useampia.

1. Jokaiselle sarjan kuviolle on voimassa:
   Kuvio on ympyrä ja viivoitettu.
2. Jokaiselle sarjan kuviolle on voimassa:
   Kuvio on ympyrä mutta ei ole viivoitettu.
3. Jokaiselle sarjan kuviolle on voimassa:
   Kuvio on joko ympyrä tai viivoitettu mutta ei molempia.
4. Jokaiselle sarjan kuviolle on voimassa:
   Jos kuvio ei ole ympyrä, niin sitten se on viivoitettu.
5. Jokaiselle sarjan kuviolle on voimassa:
   Kuvio ei ole ympyrä tai se on viivoitettu.
6. Jokaiselle sarjan kuviolle on voimassa:
   Jos kuvio on ympyrä, niin sitten se on myös viivoitettu.
7. Jokaiselle sarjan kuviolle on voimassa:
   Jos kuvio on ympyrä tai viivoitettu, niin sitten se on niitä molempia.
8. Jokaiselle sarjan kuviolle on voimassa:
   Jos kuvio on ympyrä, niin sitten se ei ole viivoitettu.
9. Jokaiselle sarjan kuviolle on voimassa:
   Kuvio on joko molempia, ympyrä ja viivoitettu, tai sitten ei kumpaakaan.

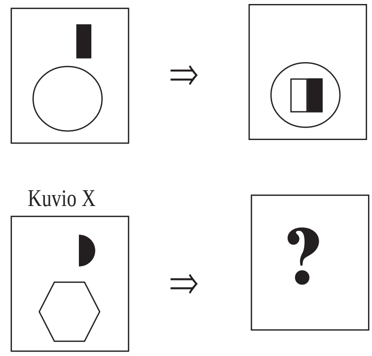
Ratkaise tehtävät 10—13 ja merkitse vastaukset vastauslomakkeeseen. Vastauslomakkeen vapaata tilaa voit käyttää laskemiseen.

10. Antti on 10 cm pidempi kuin Kari ja Heikki on 15 cm lyhyempi kuin Kari.
    Kuinka paljon Antti on Heikkiä pidempi?
11. Ari painaa 15 kg enemmän kuin Pertti ja Kalle painaa 3 kg enemmän kuin Pertti.
    Kuinka pajon enemmän Ari painaa kuin Kalle?
12. Sami on 9 kg painavampi kuin Jani. Jani on 3 kg kevyempi kuin Esa. Esa on 4 kg painavampi kuin Pasi. Kuinka paljon Pasi on Samia kevyempi?
13. Anne on 25 cm pidempi kuin Tiina. Tiina on 10 cm lyhyempi kuin Suvi. Minna on 10 cm pidempi kuin Suvi. Kuinka paljon Minna on Annea lyhyempi?

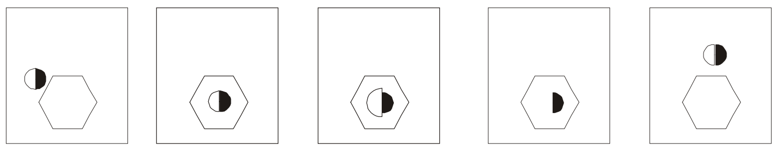
14. Kuviteltu kone muuttaa kuvion 1 kuvioksi 2 (katso vieressä olevia kuvia).

Kuvio 1 Kuvio 2

Kuvio X



Millaiseksi sama kone muuttaa kuvion X? Ympyröi oikeaa vaihtoehtoa A—E vastaava kirjain vastauspaperistasi.

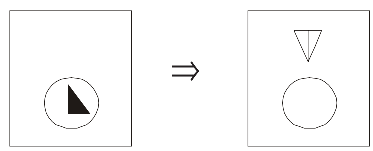


A B C D E

---

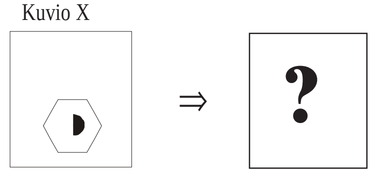
15. Toinen erilainen kone muuttaa kuvion 1 kuvioksi 2 (katso kuvaa).

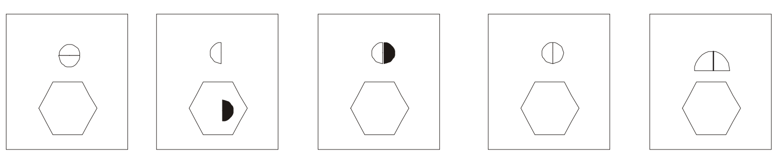
Kuvio 1 Kuvio 2



Millaiseksi tämä kone muuttaa kuvion X? Ympyröi oikeaa vaihtoehtoa vastaava kirjain vastauspaperistasi

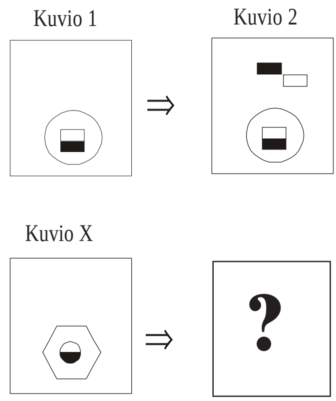
Kuvio X



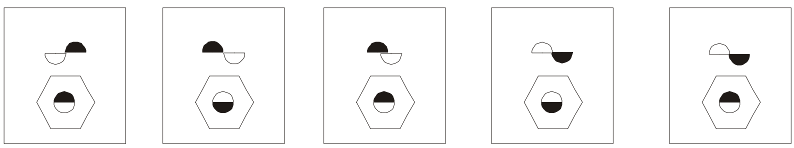


A B C D E

16. Kolmas erilainen kone muuttaa kuvion 1 kuvioksi 2 (katso kuvaa).



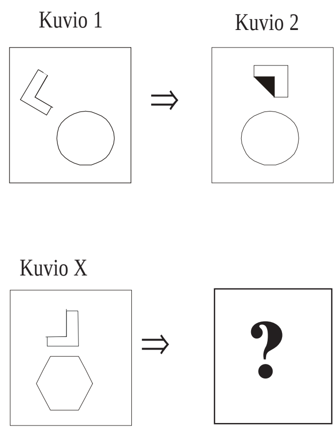
Millaiseksi tämä kone muuttaa kuvion X? Ympyröi oikeaa vaihtoehtoa A—E vastaava kirjain vastauspaperistasi.



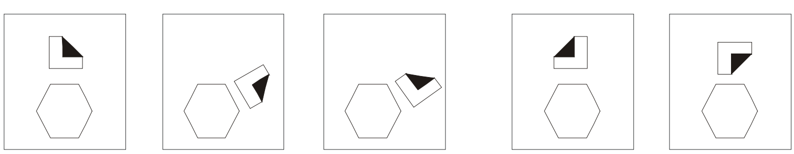
A B C D E

---

17. Neljäs erilainen kone muuttaa kuvion 1 kuvioksi 2 (katso kuvaa).



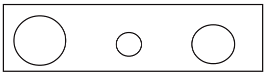
Millaiseksi tämä kone muuttaa kuvion X? Ympyröi oikeaa vaihtoehtoa vastaava kirjain vastauspaperistasi



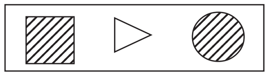
A B C D E

Vastauslomake

Nimi: ______________________________ Luokka: ____________________

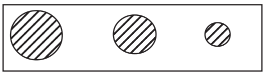


A

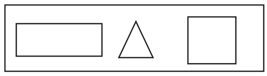


B

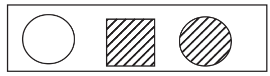
C



D



E



F

1. A B C D E F
2. A B C D E F
3. A B C D E F
4. A B C D E F
5. A B C D E F
6. A B C D E F
7. A B C D E F
8. A B C D E F
9. A B C D E F

10. Antti on ________ cm pidempi kuin Heikki.
11. Ari painaa ________ kg enemmän kuin Kalle.
12. Pasi on ________ kg kevyempi kuin Sami.
13. Minna on ________ cm lyhyempi kuin Anne.

14. A B C D E
15. A B C D E
16. A B C D E
17. A B C D E

FIT-TESTIN OHJE OPETTAJALLE

Testillä mitataan ns. muistikapasiteettia ts. sitä kuinka monta skeemaa henkilö pystyy pitämään kerrallaan työmuistissaan.

Jokaisessa testiosiossa on

— arkin oikeassa reunassa ryhmä erilleen piirrettyjä kuvioita ja
— arkin vasemmassa reunassa ryhmä "päällekkäin" piirrettyjä kuvioita

Vasemman reunan kuvioyhdistelmästä löytyy jokaista oikean reunan erilleen piirrettyä kuviota vastaava yhdenmuotoinen kuvio. Lisäksi vasemman reunan yhdistelmässä voi olla yksi (mutta ei useampia!) ylimääräinen 'hämäyskuvio'.

Käy läpi harjoitusosiot ja näytä, miten oikean reunan kuvioita vastaavat kuviot löytyvät vasemman reunan yhdistelmästä. Kiinnitä huomiota kuvion koon ja/tai asennon muutoksiin ja totea, ettei tällaisilla eroilla ole mitään merkitystä vastakuvioiden etsimisessä. Osoita myös mahdollinen ylimääräinen kuvio.

Oppilaan tehtävänä testissä on

1) etsiä yksi kerrallaan jokainen oikean puolen kuvio vasemman puolen yhdistelmästä,
2) merkitä rasti oikean puolen kuvion sisään sitten, kun sen vastinkuvio on löytynyt vasemmalta puolelta,
3) etsiä kaikkien oikean puolen kuvioiden vastinkuvioiden yhteisesti rajaama alue vasemman puolen kuvioyhdistelmästä,
4) merkitä selvästi näkyvä piste tähän yhteiseen alueeseen (leikkaukseen).

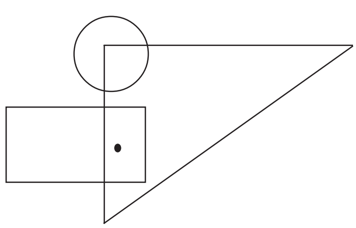
HUOM.:

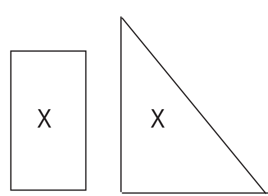
1) Ylimääräinen kuvio jätetään huomiotta yhteistä aluetta etsittäessä.
2) Vasemmalle puolelle ei saa merkitä mitään muuta kuin yhden hyvin erottuvan pisteen yhteisen alueen sisälle. Mitään kuvioiden rajojen selvennyksiä tms. ei saa tehdä.

KORJAUKSIA EI SAA TEHDÄ, JOTEN KEHOTA MERKITSEMÄÄN PISTE VASTA SITTEN KUN ON AIVAN VARMA SEN PAIKASTA.

Käy lopuksi kaikki harjoitusosiot kalvolta läpi ja merkitse rastit oikeanpuolen kuvioiden sisään sitä mukaa, kun niitä vastaavat kuviot löytyvät vasemmalta puolelta, ja merkitse viimeksi selvästi erottuva piste vasemmanpuolen kuvioita vastaavien kuvioiden yhteisen osan sisään. Muista todeta ylimääräinen 'hämäyskuvio'. Varmistu, että kaikki ymmärtävät, mitä pitää tehdä.

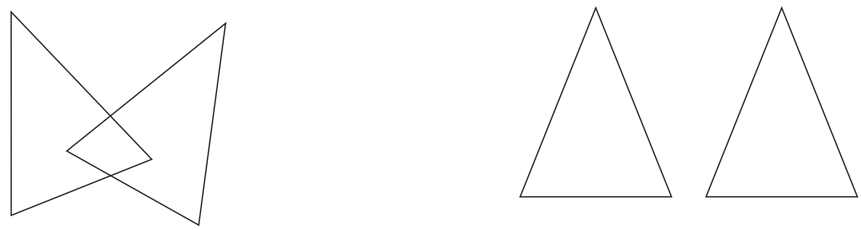
MALLI:





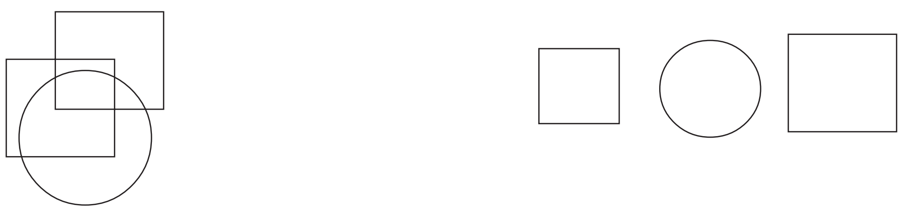
FIT-TESTIN HARJOITUSOSIOT

1.



2.

3.



4.

Esimerkki SPSS-ohjelman PAD-tiedostosta, jolla kolmiorelaation KREL1 eri tulkinnat tunnistettiin testivastauksista. Vastaavat ohjelmat laadittiin kaikille kymmenelle kolmiorelaatiolla ja kymmenelle nelikulmiorelaatiolle.

Tiedosto Krel.1.PAD

```
COUNT NA = X101 TO X110 (1).
COUNT NB = X91 TO X100 (1).
COMPUTE RK1= 'L'.
IF (NA NE 0 AND X101=X91 AND X102=X92
AND X103=X93 AND X104=X94 AND X105=X95
AND X106=X96 AND X107=X97 AND X108=X98
AND X109=X 99 AND X110=X100) RK1 = 'E'.
IF (NA NE 0 AND NA LE NB AND X101*X91=X101
AND X102*X92=X102 AND X103*X93=X103
AND X104*X94=X104 AND X105*X95=X105
AND X106*X96=X106 AND X107*X97=X107
AND X108*X98=108 AND X109*X99=109
AND X110*X100=X110) RK1 = 'I'.
IF (NA NE 0 AND NB NE 0 AND X101*(1-X93)=X101
AND X102*(1-X92)=X102 AND X103*(1-X93)=X103 AND
X104*(1-X94)=X104 AND X105*(1-X95)=X105 AND
X106*(1-X96)=X106 AND X107*(1-X97)=X107 AND
X108*(1-X98)=X108 AND X109*(1-X99)=X109 AND
X110*(1-X100)=X110) RK1 = 'D'.
IF (NA EQ 0) OR (NB EQ 0)) RK1 = '?'.
IF (NB GE 1 AND NB LE NA AND X91*X101=X91 AND X92*X102=X92
AND X93*X103=X93
AND X94*X104=X94 AND X95*X105=X95 AND X96*X106=X96 AND
X97*X107=X97
AND X98*X108=X98 AND X99*X109=X99 AND X100*X110=X100) RK1 = 'K'.
FREQUENCIES/VARIABLES RK1.
```