Tampereen yliopisto

Eeva Pyrhönen

LERAY-HIRSCHIN LAUSE SERRE-JONON SOVELLUKSENA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Joulukuu 2025

TIIVISTELMÄ

Eeva Pyrhönen: Leray-Hirschin lause Serre-jonon sovelluksena
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Joulukuu 2025

Tutkielmassa osoitetaan Leray-Hirschin lause, joka luo yhteyden fibraatioon liittyvien avaruuksien singulaaristen kohomologiamodulien välille. Esiteltävä todistus pohjautuu erityisten algebrallisten rakenteiden, *spektraalijonojen*, käyttöön.

Tutkielman alkupuolella valmistellaan todistuksen pienempiä yksityiskohtia. Aluksi esitellään spektraalijonon konstruoimista varten CW-kompleksien homotopiateoreettisia perusominaisuuksia sekä osoitetaan, että jokaista avaruutta vastaa homotopiaryhmältään isomorfinen CW-kompleksi. Tämän jälkeen kerrataan ja määritellään fibraatioihin liittyviä käsitteitä, erityisesti *säiehomotopia* ja fibraation *suunnistuvuus*. Myöhemmin osoittautuu, että näistä jälkimmäinen on Leray-Hirschin lauseen oletusten taustalla.

Spektraalijonoja käsittelevässä luvussa esitellään ensin spektraalijono algebrallisena rakenteena ja alustetaan niitä algebrallisia argumentteja, joita jonoa käytettäessä myöhemmin tarvitaan. Näistä oleellisimpia ovat spektraalijonon *suppeneminen* sekä spektraalijonojen keskinäinen vertailu *spektraalijonokuvausten* kautta. Luvun loppupuolella muodostetaan kohomologinen spektraalijono topologisen avaruuden *suodatuksen* pohjalta ja esitetään riittävä ehto sille, että näin määritelty spektraalijono todella suppenee.

Tutkielman lopussa johdetaan kohomologinen *Serre-jono* suunnistuville fibraatioille, missä CW-approksimaatiot mahdollistavat suppenevan spektraalijonon muodostamisen ilman fibraation maaliavaruuteen liittyviä lisäoletuksia. Todistuksetta esitellään kaksi jonon rakenteesta seuraavaa ominaisuutta: jonon *luonnollisuus*, joka helpottaa jonon vertailtavuutta sekä jonolle määriteltävä tulorakenne, joka puolestaan yksinkertaistaa jonon suppenemisen vahvinta muotoa, *romahtamista*, koskevia päättelyitä. Näistä ominaisuuksista seuraa lopulta myös Leray-Hirschin lause.

Avainsanat: Leray-Hirschin lause, spektraalijonot, Serre-jono, fibraatiot

Sisällys

Merkintöjä

Seuraavia merkintöjä käytetään tutkielmassa selityksettä.

$[X, Y]$	Jatkuvien kuvausten $f : X \to Y$ homotopialuokkien joukko.
D^n	Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.
$H^*(X, G)$	Avaruuden X singulaaristen kohomologiaryhmien jono.
$H_*(X, G)$	Avaruuden X singulaaristen homologiaryhmien jono.
H_t	Jos X ja Y ovat topologisia avaruuksia, ja $H : X \times I \to Y$ on jatkuva kuvaus, niin $H_t : X \hookrightarrow X \times \{t\} \to Y$, $x \mapsto H(x, t)$.
I	Yksikköväli $[0, 1]$.
S^n	Avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ osajoukko $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$.

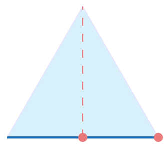
1 Johdanto

Leray-Hirschin lause on algebrallisen topologian klassinen tulos, joka luo yhteyden joko *säiekimppuun* tai *fibraatioon* liittyvien avaruuksien kohomologiamodulien välille. Lauseen todistivat ensimmäisen kerran 1940-luvun lopulla J. Leray ja G. Hirsch. Modernimmassa kirjallisuudessa Hatcherin ja Spanierin kirjojen verrattain suoraviivaiset todistukset ([2] lause 4D.1, [15], lause 7.9) säiekimppujen singulaariselle homologia- ja kohomologiamoduleille ovat monen sovelluksen kannalta riittäviä. Fibraatioiden tapauksessa vaaditaan kuitenkin raskaampaa todistusteknistä välineistöä, jota tämä tutkielma esittelee.

Säiekimpun ja fibraation käsitteissä keskeisenä elementtinä on tietyt ehdot täyttävä jatkuva kuvaus. Hyvin suuressa osassa tapauksista säiekimppu määrittelee fibraation: W. Hubsch ja W. Hurewicz ovat todistaneet ([15] korollaari 7.14), että jos säiekimpun määrittelevän kuvauksen maaliavaruus on parakompakti Hausdorffin avaruus, se on fibraatio. Koska metriset avaruudet toteuttavat nämä ehdot ([12] lause 41.4), voidaan metristen avaruuksien tapauksissa säiekimppuja pitää fibraatioiden alikäsitteenä. Käsitteitä ei tässä rajoitetussakaan tilanteessa voida kuitenkaan samastaa. Tätä voidaan havainnollistaa seuraavalla yksinkertaisella esimerkillä ([2], harjoitustehtävä 4.3.9).

Tarkastellaan tavallista 2-simpleksiä ja kuvausta, joka projisoi kaikki simpleksin pisteet jollekin sivulle kyseisen sivun normaalin suuntaisesti. Jos projektio olisi säiekimppuun liittyvä kuvaus, maalijoukon pisteiden alkukuvat, *säikeet*, olisivat silloin homeomorfisia keskenään. Kuvasta 1.1 kuitenkin nähdään, että määritellyllä projektiolla ei voi olla tätä ominaisuutta. Sen sijaan sivun pisteiden säikeet ovat keskenään homotopiaekvivalentteja, mikä ei ole sattumaa: voidaan nimittäin osoittaa, että kyseinen projektiokuvaus on fibraatio, ja että polkuyhtenäisillä avaruuksilla pisteiden alkukuvat ovat homotopiaekvivalentteja. Tämä on intuitiivista myös Leray-Hirschin lauseen voimassaolon kannalta, sillä homotopiaekvivalenttien ja homeomofisten avaruuksien kohomologiamodulit ovat yhtä lailla isomorfisia.

Leray-Hirschin lauseen todistus tässä eräässä mielessä yleistetyssä muodossaan edellyttää kahta suurta 1900-luvun puolivälissä kehitettyä matemaattista innovaatiota. Ensimmäinen näistä on Lerayn toisen maailmansodan jälkeen esittelemä *spektraalijo-*



Kuva 1.1: Projektio 2-simpleksin pohjasivulle. Sivun päätepisteiden alkukuvat ovat vain yksittäisiä pisteitä, keskipisteen alkukuva taas homeomorfinen minkä tahansa suljetun välin kanssa.

non idea, joka tässä tapauksessa tarkentaa kohomologiamodulin rakennetta. Spektraalijonot eivät aluksi saaneet kovinkaan innostunutta vastaanottoa, kuten G.W. Whitehead kuvaili vuonna 1997 ([6]):

> Most people [...] found Leray's papers obscure.

Suhtautuminen spektraalijonoihin muuttui kuitenkin toisen merkittävän tuloksen, *Serre-jonon* löytymisen myötä. Tuloksen todisti J.-P. Serre vuonna 1951 väitöskirjassaan [14], jonka esitys oli Lerayn julkaisuista poiketen erityisen selkeä. Tämä lisäsi kiinnostusta soveltaa spektraalijonon ideaa algebrallisen topologian tutkimuksen kentällä niin, että jo vuonna 1955 W.S. Massey arvioi ([8]):

> It is now abundantly clear that the spectral sequence is one of the fundamental algebraic structures needed for dealing with topological problems.

Spektraalijonot ja Serre-jono ovat myös tämän tutkielman ydintä. Alkuperäisessä Serre-jonossa teknisenä apuvälineenä käytettiin kuutiokomplekseja[1], jotka tässä tutkielmassa esitetyssä todistuksessa on korvattu nykyisin yleisemmässä käytössä olevilla CW-komplekseilla. Luvussa 2 perehdytäänkin CW-kompleksien homotopiateoriaan ja osoitetaan, että jokaista topologista avaruutta voidaan approksimoida CW-kompleksilla. Luvussa 3 esitellään fibraatioiden ja *indusoitujen* fibraatioiden perusominaisuuksia, joista jälkimmäiset poistavat CW-approksimaatioiden vuoksi Serre-jonossa fibraatioiden maaliavaruuksia koskevat rajoitukset. Luvussa 4 avataan spektraalijonon käsitettä algebrallisena rakenteena ja näytetään, miten tällainen rakenne voidaan muodostaa jonkin *suodatetun* avaruuden pohjalta. Viimein luvussa 5 johdetaan kohomologinen Serre-jono, josta Leray-Hirschin lause lopulta seuraa.

Tutkielman tärkeimpinä lähteinä mainittakoon Hatcherin kirja lisälukuineen ([2], [3]), McClearyn kirja [9] sekä Switzerin kirjan [16] luku 15. Lukijan oletetaan tuntevan algebrallisen topologian peruskäsitteistöä, jota esitellään useimpien yliopistojen algebrallisen topologian johdantokurssilla. Lisäksi liitosavaruudet, universaalien kertoimien lauseet kohomologialle sekä kohomologiarenkaiden määrittely oletetaan tunne-

[1] eng. *cubical complex*

tuiksi. Lukija voi tarvittaessa täydentää tietojaan Rotmanin kirjan [13] luvuista 1-9 ja 12.

2 CW-kompleksien homotopiateoriaa

J.H.C. Whiteheadin vuonna 1949 esittelemä CW-kompleksin käsite ([17]) on vakiintunut algebrallisen topologian kirjallisuuteen yhtä aikaa tarpeeksi joustavana, mutta kuitenkin riittävästi kombinatorista luonnetta säilyttävänä kompleksirakenteena. Määritelmän vahvuudet näkyvät erityisesti homotopiateoreettisissa tuloksissa[1].

Tässä luvussa esitellään aluksi CW-kompleksien homotopiateoriaan liittyviä perustuloksia. Näistä oleellisin on lause, jonka mukaan jokainen CW-kompleksien välinen kuvaus on homotooppinen jonkin *solukuvauksen* kanssa. Tästä seuraa kaksi myöhemmin tarpeellista isomorfiatulosta: yleisesti homotopiaryhmien funktoriaalisesta isomorfisuudesta seuraava homologia- ja kohomologiaryhmien isomorfisuus, sekä erityisesti CW-kompleksien *rankojen* tiettyjen homotopiaryhmien isomorfisuus koko avaruuden homotopiaryhmien kanssa.

Luvun jälkipuoliskolla todistetaan, että jokaista topologista avaruutta vastaa sellainen CW-kompleksi, että avaruuden ja CW-kompleksin välille saadaan homotopiaekvivalenssia heikompi vastaavuus, *heikko homotopiaekvivalenssi*. Tätä heikkoa homotopiaekvivalenssia kutsutaan avaruuden CW-approksimaatioksi.

Luvun tulokset perustuvat pääosin Hatcherin kirjan [2] lukuun 4.

2.1 Tuloksia CW-komplekseille

Esitetään lyhyesti CW-kompleksien ja korkeampien homotopiaryhmien määritelmät, ja niiden oleellisimmat perusominaiuudet.

Määritelmä 2.1. Solu (myös p-solu) on avaruuden $D^p \setminus S^{p-1}$ homeomorfinen kopio jollakin $p \in \mathbb{N}$. **CW-kompleksi** on kolmikko (X, E, ϕ), missä X on Hausdorffin avaruus, E solujen perhe avaruudessa X ja $\{\phi_e \mid e \in E\}$ perhe kuvauksia. Merkitään avaruuden X k-**rankaa** $X^k = \{e \in E \mid \dim(e) \leq k\}$. Kolmikolle ovat voimassa seuraavat ehdot:

[1] Määritelmä motivoitui alunperin juuri homotopiateorian kautta ([1]).

1) Avaruus X on erillinen yhdiste $\bigcup\{e \mid e \in E\}$.

2) Jokaiselle k-solulle e^k on **karakteristinen kuvaus**

$$\phi_{e^k} : (D^k, S^{k-1}) \to (e^k \cup X^{k-1}, X^{k-1}),$$

joka on **relatiivinen homeomorfismi**, eli

$$\phi_{e^k} \restriction (D^k \setminus S^{k-1}) : D^k \setminus S^{k-1} \to (e^k \cup X^{k-1}) \setminus X^{k-1}$$

on homeomorfismi.

3) Jos $e \in E$, niin silloin solun sulkeuma $\overline{e}$ kuuluu äärelliseen yhdisteeseen soluja perheessä E.

4) Avaruudella X on joukon $\{\overline{e} \mid e \in E\}$ määrittelemä heikko topologia.

Lisäksi CW-kompleksin (X, E, ϕ) **alikompleksiksi** sanotaan sellaista CW-kompleksia (Y, E', ϕ'), että $E' \subset E$, $\phi_{e^k} = \phi'_{e^k}$, kun $e^k \in E'$ ja $\operatorname{im}(\phi_{e^k}) \subset \bigcup\{e \mid e \in E'\}$ kaikilla $e^k \in E'$.

Määritelmä 2.2. Olkoot X ja Y CW-komplekseja. Tällöin kuvaus $f : X \to Y$ on **solukuvaus**, jos $f(X^k) \subset Y^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

CW-komplekseilla on myös seuraava *homotopialaajennusominaisuus.*

Lause 2.3. *([13] lause 8.33.) Olkoon X CW-kompleksi, Y kompleksin X alikompleksi ja olkoon Z topologinen avaruus. Jos $f : X \to Z$ on jatkuva ja $h : Y \times I \to Z$ on sellainen homotopia, että $h(y, 0) = f(y)$ kaikilla $y \in Y$, niin on olemassa homotopia $H : X \times I \to Z$, jolle pätee*

$$H(x, 0) = f(x) \text{ kaikilla } x \in X$$

ja

$$H(y, t) = h(y, t) \text{ kaikilla } (y, t) \in Y \times I.$$

Määritelmä 2.4. (*Korkeammat homotopiaryhmät.*) Olkoon X topologinen avaruus ja $n \geq 2$. Avaruuden X **n:nnäs homotopiaryhmä** $\pi_n(X, x_0)$ kantapisteenä x_0 on Abelin ryhmä, jonka alkioina ovat jatkuvien kuvausten $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ homotopialuokat $[f]$ [2], ja jonka ryhmäoperaatio $+$ on määritelty seuraavasti:

$$[f] + [g] = [h],$$

[2]Huomautetaan, että tässä tutkielmassa hakasulkumerkintää käytetään yleisesti ilmaisemaan luokkaa. Se, mitä milloinkin tarkoitetaan, ilmenee asiayhteydestä.

missä
$$h(t_1,...,t_n) = \begin{cases} f(2t_1,t_2,...,t_n), \ t_1 \in [0,1/2] \\ g(2t_1-1,t_2,...,t_n), \ t_1 \in [1/2,1], \end{cases} .$$
kun $f, g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ ovat jatkuvia funktioita.

Olkoon lisäksi (X, A) topologinen pari ja $x_0 \in A$, ja olkoon J^n joukon
$$\{x = (x_1, ..., x_n) \in \partial I^n \mid x_n \neq 0\}$$
sulkeuma. Tällöin jatkuvien funktioiden $f : (I^n, \partial I^n, J^n) \to (X, A, x_0)$ homotopialuokkien muodostama ryhmä $\pi_n(X, A, x_0)$ on **relatiivinen n:nnäs homotopiaryhmä**.

Koska edellisen määritelmän mukaiset kuvaukset kuvaavat reunan ∂I^n kantapisteelle x_0, voidaan homotopialuokkien määrittelyyn käyttää myös suoraan kuvauksia $f : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$. Samoin relatiivisen homotopiaryhmän tapauksessa voidaan käyttää kuvauksia $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$.

Seuraava lemma konkretisoi, millaiset kuvaukset määrittelevät relatiivisissa homotopiaryhmissä neutraalialkioita.

Lemma 2.5. *([2], s. 343.) Olkoon X topologinen avaruus, $Y \subset X$ ja $f : (D^k, S^{k-1}, s_0) \to (X, Y, x_0)$. Kuvauksen $[f]$ homotopialuokka on triviaali jos ja vain jos f on homotooppinen* $\operatorname{rel} S^{k-1}$ *sellaisen kuvauksen kanssa, jonka kuvajoukko sisältyy aliavaruuteen Y.*

Relatiivisille homotopiaryhmille voidaan myös määritellä jono
$$\cdots \to \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to \cdots \to \pi_0(X, x_0)$$
missä inkluusiot $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ ja $j : (X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0)$ indusoivat kaksi ensimmäistä kuvausta ja reunahomomorfismi ∂ kuvaa jokaisen kuvauksen $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ homotopialuokan sen rajoittuman $f \restriction S^{n-1}$ homotopialuokalle. Tämän jonon voidaan osoittaa olevan eksakti ([2], s. 344-345).

Määritellään seuraavaa teknistä lemmaa varten muutama apukäsite. [3]

Määritelmä 2.6. Olkoon X topologinen avaruus. Avaruuden X **kolmioinniksi** sanotaan paria (K, h), missä K on abstrakti simpleksinen kompleksi, $|K|$ sen geometrinen realisaatio jossakin euklidisessa avaruudessa ja h homeomorfismi $h : |K| \to X$[4].

[3] Nämä määritelmät eroavat kirjallisuudessa esitetyistä. Esimerkiksi kirjassa [13] (s. 132) ei vaadita, että monikulmio olisi avaruuden $\mathbb{R}^k$ osajoukko, ja toisaalta kirjassa [2] (s. 350) monikulmio määritellään kolmioinnista irrallisena. Määritelmät riittävät kuitenkin lauseen tarpeisiin.

[4] Simpleksisen kompleksin ja abstraktin simpleksisen kompleksin määritelmät esitetään Rotmanin kirjassa [13] sivuilla 131 ja 141.

Kolmioinnin **dimensio** on n, jos simpleksisen kompleksin K dimensio on n. Kolmiointi on **äärellinen**, jos K on äärellinen. Kolmiointi on **simpleksinen**, jos $h = \mathrm{Id}$.

Olkoon $k \geq 1$. Avaruuden $\mathbb{R}^k$ **monikulmio** on sen osajoukko, jolle on olemassa äärellinen, simpleksinen kolmiointi. N**-monikulmio** on monikulmio, jonka kolmioinnin dimensio on N.

Paloittain lineaarinen kuvaus $f : M \to \mathbb{R}^k$, missä M on monikulmio, on lineaarinen kuvaus tämän kolmioinnin suhteen.

Lemma 2.7. *([2] lemma 4.10.) Olkoon $h : I^n \to Z$ kuvaus, missä Z on saatu aliavaruudesta W liittämällä solu e^k. Tällöin on olemassa sellainen homotopia $H : I^n \times I \to Z \operatorname{rel} h^{-1}(W)$, että $H(x, 0) = h(x)$ kaikilla $x \in I^n$, $H(x, t) \in e^k$ kaikilla $x \in h^{-1}(e^k)$ ja $t \in I$ sekä $H(x, 1) = g(x)$ kaikilla $x \in I^n$ sellaisella g, että on olemassa n-monikulmio $M \subset I^n$, jolle seuraavat ehdot ovat voimassa:*

1) *$g(M) \subset e^k$ ja $(\chi \circ g){\restriction}M$ on paloittain lineaarinen jollakin samastuksella $\chi : e^k \to \mathbb{R}^k$,*

2) *$g^{-1}(U) \subset M$ jollakin avoimella epätyhjällä joukolla $U \subset e^k$.*

Lemman sovelluksena saadaan seuraava tulos, johon kirjallisuudessa viitataan *soluapproksimaationa*[5].

Lause 2.8. *([2] lause 4.8.) Olkoot X ja Y CW-komplekseja ja $f : X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin f on homotooppinen jonkin solukuvauksen kanssa. Jos $A \subset X$ on kompleksin X alikompleksi ja $f \restriction A$ on solukuvaus, niin tälle homotopialle $F : X \times I \to Y$ voidaan valita $F(x, t) = f(x)$ kaikilla $x \in A$, $t \in I$.*

Lauseesta 2.8 seuraa erityisesti seuraava tulos CW-komplekseille.

Korollaari 2.9. *Olkoon X CW-kompleksi. Tällöin $\pi_k(X, X^n) = 0$ kaikilla $k \leq n$. Tällöin myös inkluusiokuvauksen $i : X^n \to X$ indusoima homomorfismi $i_* : \pi_k(X^n) \to \pi_k(X)$ on isomorfismi, kun $0 < k < n$, ja vastaavasti bijektio, kun $0 = k < n$. Kuvaus i_* on surjektio, kun $k = n$.*

Todistus. Tarkastellaan jatkuvaa kuvausta $g : (D^k, S^{k-1}, s_0) \to (X, X^n, x_0)$, missä $k < n$. Ensin todetaan, että $g \restriction S^{k-1} : (S^{k-1}, s_0) \to (X^n, x_0)$ on homotooppinen jonkin solukuvauksen g' kanssa $\operatorname{rel} s_0$. Tämä homotopia laajenee homotopian laajennusominaisuudella siten, että saadaan kuvaukselle g' jatkuva jatke (määritelmä 3.1.i)

$$g'' : (D^k, S^{k-1}, s_0) \to (X, X^{k-1}, x_0).$$

[5]eng. *cellular approximation*

Tämäkin kuvaus on homotooppinen jonkin solukuvauksen

$$g''' : (D^k, S^{k-1}, s_0) \to (X^k, X^{k-1}, x_0)$$

kanssa $\mathrm{rel}(S^{k-1})$, joten jos $k \leq n$, niin $\pi_k(X, X^n, x_0) = 0$ lemman 2.5 nojalla. Kun tarkastellaan homotopiaryhmien eksaktia jonoa, niin korollaarin väite seuraa indekseille $k \neq 0$:

$$\cdots \to \underbrace{\pi_k(X, X^n, x_0)}_{=0} \to \pi_{k-1}(X^n, x_0) \overset{i_*}{\to} \pi_{k-1}(X, x_0) \overset{j_*}{\to} \underbrace{\pi_{k-1}(X, X^n, x_0)}_{=0} \to \cdots$$

Väite pätee myös, kun $k = 0$, sillä jokaisesta avaruuden X pisteestä on polku johonkin aliavaruuden X^n pisteeseen, sillä X on CW-kompleksi. □

Osoittautuu, että korollaarin isomorfismi on voimassa myös singulaarisille homologiaryhmille. Tämä seuraa seuraavista, yleisemmistä tuloksista.

Lause 2.10. *([2], s.356.) Olkoon G Abelin ryhmä ja olkoon (X, A) sellainen topologinen pari, että $\pi_k(X, A, x_0) = 0$ kaikilla $k \leq n$ ja sekä X että A ovat polkuyhtenäisiä. Tällöin myös $H_k(X, A; G) = 0$ ja $H^k(X, A; G) = 0$ kaikilla $k \leq n$.*

Todistus. Todistetaan väite homologiaryhmille. Väite seuraa tästä myös kohomologiaryhmille, sillä kirjan [13] lauseen 12.11.ii nojalla

$$H^n(X, A; G) = \mathrm{Hom}(H_n(X, A), G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X, A), G).$$

Käytetään merkintää $S_*(-)$ singulaarisille ketjukomplekseille. Olkoon

$$\sigma = \sum g_i \sigma_i \in S_*(X)/S_*(A), \quad \sigma_i : \Delta_i^k \to X$$

jokin k-sykli. Määritellään tämän perusteella topologinen avaruus K erillisen yhdisteen $\bigcup_i \Delta_i^k$ tekijäavaruutena, missä samastetaan simpleksien Δ_i^k ja Δ_j^k $(i \neq j)$ sivut s_i ja s_j keskenään, mikäli $\sigma_i \restriction s_i = \sigma_j \restriction s_j$ [6]. Näin saadaan kuvaus $\sigma' : K \to X$. Hyödynnetään seuraavaa lemmaa, jonka todistus on samanlainen kuin lauseen 2.8 todistus, mutta yksinkertaisempi:

Lemma 2.11. *([2], lemma 4.6.) Olkoon Y CW-kompleksi ja B kompleksin Y alikompleksi. Olkoon (Z, C) topologinen pari kantapisteenä z_0, missä $C \neq \varnothing$. Oletetaan lisäksi, että jos on olemassa p-solu $e^p \in Y \setminus B$, niin $\pi_p(Z, C, z_0) = 0$. Jos $f : (Y, B) \to (Z, C)$ on jatkuva kuvaus, niin $f \simeq f' \,\mathrm{rel}(B)$, missä $f' : Y \to C$*

[6] Hatcher käyttää kirjassaan [2] tällä tavalla muodostetusta avaruudesta nimitystä Δ-*kompleksi*.

on jatkuva kuvaus.

Muodostettu avaruus K on myös CW-kompleksi, sillä avaruus voitaisiin muodostaa myös induktiivisesti liittämällä soluja (tai tässä tapauksessa simpleksejä) samastusten mukaisesti. Olkoon $L \subset K$ avaruuden K samastettujen $(k-1)$-sivujen muodostama aliavaruus. Koska $\partial\sigma$ on ketju ketjukompleksissa $S_*(A)$, niin $\sigma'(L) \subset A$, ja σ' indusoi ketjukuvauksen. Koska oletetaan, että $\pi_k(X, A, x_0) = 0$, niin lemman 2.11 nojalla kuvaus $\sigma' : (K, L) \to (X, A)$ on homotooppinen kuvauksen $\sigma'' : K \to A$ kanssa $\mathrm{rel}\, L$. Olkoon $i : A \to X$ inkluusio. Tällöin homomorfismeille

$$\sigma'_* : H_k(K, L; G) \to H_k(X, A; G),$$

ja

$$i_* \circ \sigma''_* : H_k(K, L; G) \xrightarrow{\sigma''_*} H_k(A, A; G) \xrightarrow{i_*} H_k(X, A; G)$$

on voimassa $\sigma'_* = i_* \circ \sigma''_*$.

Määritellään CW-kompleksiin K ketju $\tau = \sum g_i \tau_i$ siten, että $\tau_i : \Delta^k \to \Delta^k_i$ ja $\sigma' \circ j \circ \tau_i = \sigma_i$, missä $j : \Delta^k_i \to K$ kuvaa simpleksin Δ^k_i samastetulle simpleksille kompleksissa K. Tästä seuraa, että $\sigma'_\#(j_\#(\tau)) = \sigma$. Nyt

$$i_* \circ \sigma''_*([j_\#(\tau)]) = \sigma'_*([j_\#(\tau)]) = [\sigma'_\#(j_\#(\tau))] = [\sigma],$$

joten $[\sigma] \in \mathrm{im}(i_*)$. Kuitenkin $H_k(A, A; G) = 0$, joten i_* on nollakuvaus ja $[\sigma] = 0$. $\square$

Seuraavassa korollaarissa käytetään työkaluna jatkuvan kuvauksen määräämää *kuvaussylinteriä*. Sen avulla voidaan tehdä päätelmiä sekä maali- että lähtöavaruudesta.

Määritelmä 2.12. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f : X \to Y$ jatkuva kuvaus. **Kuvaussylinteri** on tekijäavaruus

$$M_f := (X \times I) \amalg_f Y / \sim,$$

missä

$$(x, 1) \sim f(x)$$

ja muuten relaatio $\sim$ on refleksiivinen.

Määritelmästä huomataan, että Y on kuvaussylinterin M_f vahva deformaatioretrakti, mikä riittääkin seuraavan tuloksen todistamiseen.

Korollaari 2.13. *Olkoon jatkuva kuvaus $f : X \to Y$ sellainen, että $\pi_k(f) : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$ on isomorfismi kaikilla $x_0 \in X$ (ja $y_0 = f(x_0)$), kun $k \leq n$. Tällöin $f_* : H_k(X; G) \to H_k(Y; G)$ ja $f^* : H^k(Y, G) \to H^k(X, G)$ ovat isomorfismeja kaikilla $k < n - 1$. Indusoidut homomorfismit ovat homologiaryhmien tapauksessa epimorfismeja ja kohomologiaryhmien tapauksessa monomorfismeja, kun $k = n - 1$.*

Todistus. Voidaan yleisyyden kärsimättä olettaa, että X ja Y ovat polkuyhtenäisiä, koska homotopiaryhmille indusoitua isomorfismia voidaan tarkastella polkukomponenteittain. Todetaan, että oheinen kaavio kommutoi homotopiaa vaille,

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{j_x}{\underset{\cong}{\hookrightarrow}} & X \times \{0\} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ Y & \overset{j_y}{\hookrightarrow} & M_f \end{array}$$

missä $j_x : X \to X \times \{0\}, x \mapsto (x, 0)$ ja j_y on inkluusiokuvaus. Tällöin vastaavat kaaviot homotopia-, homologia- ja kohomologiaryhmien välillä kommutoivat. Koska lisäksi j_y on homotopiaekvivalenssi, niin riittää osoittaa, että inkluusiokuvaus i indusoi isomorfismit homologia- ja kohomologiaryhmien välille. Vastaava tulos on voimassa jo homotopiaryhmille kommutoivan kaavion perusteella, sillä $\pi_k(f)$ on isomorfismi kaikilla $k \leq n$. Väite seuraa tarkastelemalla parin (M_f, X) eksakteja jonoja:

$$\cdots \longrightarrow \pi_k(M_f, X, x_0) \longrightarrow \pi_{k-1}(X, x_0) \overset{i_*}{\to} \pi_{k-1}(M_f, x_0) \overset{j_*}{\to} \pi_{k-1}(M_f, X, x_0) \to \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_k(M_f, X; G) \longrightarrow H_{k-1}(X; G) \overset{i_*}{\to} H_{k-1}(M_f; G) \overset{j_*}{\to} H_{k-1}(M_f, X; G) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^{k-1}(M_f, X; G) \to H^{k-1}(M_f; G) \overset{i_*}{\to} H^{k-1}(X; G) \overset{j_*}{\longrightarrow} H^k(M_f, X; G) \to \cdots$$

Koska $i_* : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(M_f, x_0)$ on isomorfismi, kun $k \leq n$, niin $\pi_k(M_f, X, x_0) = 0$, kun $k < n$. Tällöin lauseen 2.10 nojalla $H^k(M_f, X, x_0) = H_k(M_f, X, x_0) = 0$, kun $k < n$, joten i_* ja i^* ovat isomorfismeja, kun $k < n - 1$. Vastaavasti kun $k = n - 1$, keskimmäisessä jonossa i_* on epimorfismi ja alimmaisessa i^* monomorfismi. □

Korollaari 2.14. *Olkoon X CW-kompleksi. Tällöin inkluusiokuvauksen $i : X^n \to X$ indusoimat homomorfismit $i_* : H_k(X^n; G) \to H_k(X; G)$ ja $i^* : H^k(X; G) \to H^k(X^n; G)$ ovat isomorfismeja, kun $k < n$. Homomorfismi i_* on epimorfismi ja i^* puolestaan monomorfismi, kun $k = n$.*

Todistus. Isomorfisuusväite on jo voimassa indekseille $k < n - 1$ korollaarin 2.13 nojalla. Väite seuraa seuraavillekin indekseille korollaarin 2.13 todistuksen eksakteista jonoista, joissa pari (M_f, X) on korvattu parilla (X, X^n), sillä korollaarin 2.9 nojalla $\pi_n(X, X^n) = 0$. $\square$

2.2 CW-approksimaatioiden olemassaolo

Edellä nähtiin, miten CW-kompleksien kohdalla riittävän suurella indeksillä n, inkluusio $X^n \hookrightarrow X$ indusoi isomorfismin k:nsien homotopiaryhmien välillä. Heikko homotopiaekvivalenssi on tätä vahvempi ominaisuus.

Määritelmä 2.15. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Jos on olemassa sellainen kuvaus $f : X \to Y$, että $f_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ on isomorfismi jokaisella $n \geq 0$ ja jokaisella kantapisteen x_0 valinnalla, niin X ja Y ovat **heikosti homotopiaekvivalentit**.

Korollaarin 2.13 perusteella heikko homotopiaekvivalenssi indusoi isomorfismit myös homologia- ja kohomologiaryhmien välille. Jos $f : X \to Y$ on heikko homotopiaekvivalenssi, niin useita homologiaan ja kohomologiaan liittyviä tuloksia voidaan todistaa vain toisen avaruuden tapauksessa, ja samalla käsitellään toisenkin avaruuden tapaus isomorfiaa vaille. Erityisen hyödyllistä tämä on, kun X tai Y on CW-kompleksi, sillä tällöin saadaan käyttöön paljon todistusta helpottavia lisäoletuksia.

Määritelmä 2.16. Olkoon X topologinen avaruus ja Y CW-kompleksi. **CW-approksimaatio** avaruudelle X on heikko homotopiaekvivalenssi $f : Y \to X$.

Lause 2.17. *([2], lause 4.13) Jokaisella topologisella avaruudella X on CW-approksimaatio $f : Y \to X$.*

Todistus. Muodostetaan kuvaus ja samalla CW-kompleksi Y induktiivisesti siten, että jokaisella askeleella k pätee:

(†) Jokaisella kantapisteellä y_γ kuvauksen $f : (Y', y_\gamma) \to (X, f(y_\gamma))$ indusoima homomorfismi $f_* : \pi_i(Y', y_\gamma) \to \pi_i(X, f(y_\gamma))$ on injektio, kun $i \leq k-1$ ja surjektio, kun $i = k$.

Määritellään Y_n siten, että se kuvaa CW-approksimaation lähtöavaruutta askeleella n ja vastaavasti f^n väitteen (†) kuvausta askeleella n. Kun $n = 0$, valitaan avaruuden X jokaiselle polkukomponentille X_γ jokin edustaja x_γ. Määritellään jokaista kantapistettä x_γ kohti kuvaus $\varphi_\gamma : D^0_\gamma \to X$, ja muodostetaan näiden perusteella erillinen yhdiste $Y_0 = \coprod_\gamma D^0_\gamma$, jolloin Y_0 täyttää CW-kompleksin määritelmän. Tällöin voidaan määritellä kuvaus $f^0 = \{\varphi_\gamma\} : Y_0 \to X$, joka indusoi bijektion $\pi_0(f^0) : \pi_0(Y_0, y_\gamma) \to \pi_0(X, x_\gamma)$.

Oletetaan sitten, että (†) on voimassa jollekin $k = n-1$. Muokataan avaruutta Y_{n-1} ja kuvausta f^{n-1} siten, että muokkaamisen seurauksena saatava

$$f^{n-1,i} : (Y_{n-1}, y_\gamma) \to (X, f(y_\gamma))$$

täyttää väitteen (†) injektiivisyysehdon indeksillä n. Olkoon $\phi_\alpha : (S^{n-1}, s_0) \to (Y_{n-1}, y_\gamma)$ sellainen, että $[\phi_\alpha] \neq 0$ ja $[\phi_\alpha] \in \ker(f_*^{n-1})$. Lauseen 2.8 nojalla voidaan olettaa, että ϕ_α on solukuvaus. Liitetään nyt n-solu e^n approksimaatioon Y_{n-1} kuvauksella ϕ_α, ja merkitään tätä liitosavaruutta Y_{n_α}:lla. Koska oletettiin, että $f^{n-1}\phi_\alpha$ on nollahomotooppinen, niin homotopia $F : S^{n-1} \times I \to X$, $f^{n-1}\phi_\alpha \simeq c$ (missä c on jokin vakiokuvaus) indusoi ensin kuvauksen $f^{n-1}\phi_\alpha$ jatkeen

$$\tilde{F} : D^n (\cong CS^{n-1}) \to X,$$

missä merkinnällä CS^{n-1} tarkoitetaan avaruuden S^{n-1} kartiota. Tämä puolestaan indusoi kuvauksen

$$f' : \overline{e^n} \to X.$$

Kuvauksen f' avulla f^{n-1} laajenee avaruuteen Y_{n_α}. Lisäksi ϕ_α on avaruudessa Y_{n_α} nollahomotooppinen. Se, että kuvausta f^{n-1} laajennettaessa injektiivisyys on edelleen voimassa edellisille indekseille, seuraa korollaarista 2.9, sillä sen perusteella inkluusiokuvauksen indusoima homomorfismi $i_* : \pi_j(Y_{n-1}, y_\gamma) \to \pi_j(Y_{n_\alpha}, y_\gamma)$ on isomorfismi kaikilla $j \leq n-2$ ja oheinen kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_j(X, x_\gamma) \\
\pi_j(Y_{n_\alpha}, y_\gamma) \arrow[ur, "f_*^{n-1}"] \arrow[dr, shift left, "i_*^{-1}"] & \\
& \pi_j(Y_{n-1}, y_\gamma) \arrow[uu, "(f\restriction Y_{n-1})_*"'] \arrow[ul, shift left, "i_*"]
\end{tikzcd}$$

Kun vastaavat vaiheet toistetaan[7] homomorfismin f_*^{n-1} ytimen jokaisen epätriviaalin alkion kohdalla, f_*^{n-1} on lopulta injektio $f_*^{n-1,i}$.

Laajennetaan sitten kuvaus $f_*^{n-1,i}$ surjektiiviseksi laajentamalla approksimaatiota $Y(n_i)$ (joka kuvaa approksimaation lähtöavaruutta sen jälkeen, kun f_* on muutettu

[7]Tässä toistaminen ei viittaa numeroituvuuteen: ylinumeroituvissa tapauksissa tarvitaan vain hyvinjärjestysperiaatetta tai tämän kanssa yhtäpitävää valinta-aksioomaa.

indeksillä $n-1$ injektioksi). Olkoon $\xi : (S^n, s_0) \to (X, x_\gamma)$ jokin nollasta eroavan homotopialuokan edustaja, jolle $f_*^{n-1,i}$ ei kuvaudu. Liitetään taas n-solu e approksimaatioon $Y(n_i)$ vakiokuvauksella $c_{y_\gamma} : S^{n-1} \to X$, $x \mapsto y_\gamma$. Uuden solun e karakteristiselle kuvaukselle ϕ_e pätee, että on olemassa homeomorfismi $h : (S^n, s_0) \to (\mathrm{im}(\phi_e), y_\gamma)$. Tällöin kuvausta $f^{n-1,i}$ voidaan laajentaa suoraan kuvauksella ξ, ja

$$[h] \overset{f_*^{n-1,i}}{\mapsto} [f^{n-1,i} \circ h] = [\xi].$$

Solun liittäminen ei taaskaan vaikuta edellisten askeleiden injektiivisyyteen.

Näin jatkamalla saadaan lopulta kuvaus, joka indusoi väitteen isomorfismin. $\square$

3 Fibraatioista

Tämä luku käsittelee fibraatioiden, ja erityisesti *indusoitujen* fibraatioiden perusominaisuuksia. Erityinen fibraatioiden ominaisuus, *suunnistuvuus*, ja teoria sen ympärillä on erityisen oleellista luvun 5 tulosten kannalta.

Luvun ensimmäinen osa perustuu kirjan [2] määrittelyyn (s. 415-416, s. 375-376). Luvun toinen osa seuraa Switzerin kirjan [16] esitystä luvussa 15 (s. 341-344).

3.1 Määritelmä ja sen muunnelmat

Fibraatio määritellään seuraavien perustavanlaatuisten käsitteiden avulla.

Määritelmä 3.1. Olkoot A, B, Z ja E topologisia avaruuksia ja $A \subset Z$.

i) Olkoon $f : A \to E$ jatkuva kuvaus ja $i : A \hookrightarrow Z$ inkluusio. Kuvaus $f' : Z \to E$ on kuvauksen f **jatke**, jos seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & E \\ Z \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

ii) Olkoot $g : Z \to B$ ja $q : E \to B$ jatkuvia kuvauksia. Kuvaus $\tilde{g} : Z \to E$ on kuvauksen g **nosto**, jos seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "q"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

iii) Olkoot f, g, i ja q kuten aiemmissa kohdissa. Oletetaan lisäksi, että $g \circ i = q \circ f$. Kuvaus $\tilde{g}$ on **nostolaajennus**, jos se on sekä jatke kuvaukselle f että nosto kuvaukselle g, eli seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & E \arrow[d, "q"] \\ Z \arrow[r, "g"] \arrow[ur, "\tilde{g}"] & B \end{tikzcd}$$

Jos aina, kun ylläolevan kaavion neliö kommutoi, on olemassa jokin nostolaajennus $\tilde{g}$, niin kuvauksella q on **nostolaajennusominaisuus** parin (Z, A) suhteen.

Määritelmän kohdan iii ehdon ollessa voimassa riittää siis aina etsiä nosto f kuvauksen g rajoittumalle, että saadaan nosto koko kuvaukselle.

Määritelmä 3.2. Olkoot E, X ja B topologisia avaruuksia ja $p : E \to B$ jatkuva kuvaus. Kuvauksella p on **homotopian nosto-ominaisuus** avaruuden X suhteen, mikäli kuvauksella p on nostolaajennusominaisuus parin $(X \times I, X \times \{0\})$ suhteen. Olkoon lisäksi $A \subset X$. Tällöin kuvauksella p on **homotopian nosto-ominaisuus parin** (X, A) **suhteen**, jos kuvauksella p on nostolaajennusominaisuus parin $(X \times I, X \times \{0\} \cup A \times I)$ suhteen.

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{H}_0"] \arrow[d, hook, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Homotopian nosto-ominaisuus.

Määritelmä 3.3. Olkoot E ja B topologisia avaruuksia ja $p : E \to B$ jatkuva kuvaus. Jos kuvauksella p on homotopian nosto-ominaisuus jokaisen topologisen avaruuden suhteen, se on **fibraatio** [1]. Fibraation p **säikeillä** tarkoitetaan joukon $\{p^{-1}(b) \mid b \in B\}$ alkioita, käytetään niistä merkintää $F_b = p^{-1}(b)$ jokaisella $b \in B$, kun fibraatio on asiayhteydestä selvä. Jos avaruudelle on määritelty kantapiste b_0, niin sanotaan, että **fibraation** p **säie** on F_{b_0}.

Homotopian nosto-ominaisuudesta voidaan esittää erilaisia variaatioita, kuten seuraava lemma osoittaa.

[1] Kirjallisuudessa esiintyy tästä määritelmästä myös nimitys *Hurewiczin fibraatio*. Jos kuvauksella p on homotopian nosto-ominaisuus vain kiekkojen D^p suhteen kaikilla $p \in \mathbb{N}$, sitä kutsutaan *Serren fibraatioksi.*

Lemma 3.4. [2] *Olkoot E, B ja X topologisia avaruuksia ja $p : E \to B$ fibraatio. Tällöin pätee:*

i) Kuvauksella p on homotopian nosto-ominaisuus parin (D^k, S^{k-1}) suhteen kaikilla $k \geq 1$.

ii) Kuvauksella p on homotopian nosto-ominaisuus parin $(X \times I, X \times \partial I)$ suhteen.

iii) Olkoon $A = \{0\} \times I \cup I \times \partial I$. Tällöin kuvauksella p on nostolaajennusominaisuus parin $(X \times I \times I, X \times A)$ suhteen.

Todistus. Perustellaan ensin hieman yleisempi väite. Olkoon Z topologinen avaruus sekä A ja A' avaruuden Z aliavaruuksia. Olkoon lisäksi $p : E \to B$ fibraatio, ja $f : Z \to B$ jatkuva kuvaus. Oletetaan vielä, että on olemassa sellainen homeomorfismi $h : (Z, A) \to (Z, A')$, että $h(A) = A'$, ja että kuvauksella p on nostaolaajennusominaisuus parin (Z, A) suhteen. Nyt kuvauksella p on nostolaajennusominaisuus myös parin (Z, A') suhteen: tarkastellaan seuraaavaa kommutoivaa kaaviota, missä $h' = h \restriction A$, $g = f \circ h$ ja $\tilde{g} \restriction A = f' \circ h'$.

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dd, "p"] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr, "h'"] \arrow[dd, hook, "i"'] & & A' \arrow[ul, "f'"'] \arrow[dd, hook, "i'"] \\
& B & \\
Z \arrow[uur, "\tilde{g}"] \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h"] & & Z \arrow[ul, "f"'] \arrow[uul, dashed]
\end{tikzcd}$$

Nyt $\tilde{g} \circ h^{-1} : Z \to E$ on haluttu nosto kuvaukselle f, sillä

$$\tilde{g} \circ h^{-1} \circ i' = \tilde{g} \circ i \circ (h')^{-1} = f' \circ h' \circ (h')^{-1} = f'$$

ja toisaalta

$$p \circ \tilde{g} \circ h^{-1} = g \circ h^{-1} = f \circ h \circ h^{-1} = f.$$

Etsitään siis sopivat homeomorfismit

$$\begin{aligned}
h_1 :&(D^k \times I, D^k \times \{0\}) \to (D^k \times I, D^k \times \{0\} \cup S^{k-1} \times I) \\
h_2 :&(X \times I \times I, X \times I \times \{0\}) \to (X \times I \times I, X \times I \times \{0\} \cup X \times \partial I \times I), \\
h_3 :&(X \times I \times I, X \times I \times \{0\}) \to (X \times I \times I, X \times A)
\end{aligned}$$

[2]Tämä lemma esiintyy todistuksetta useissa lähteissä.

i) Voidaan sylinterin $D^k \times I$ sijaan tarkastella sylinteriä $D^k \times 2I$, missä $2I = [-1, 1]$, ja kohdan i) tapaan sylinterin $D^k \times 2I$ sijasta palloa D^{k+1}. Voidaan nimittäin määritellä jatkuva kuvaus $\mathrm{pr} : (D^k \times 2I) \setminus \{0, 0\} \to D^k \times 2I$, joka projisoi sylinterin pisteen sylinterin keskipisteen $(0, 0)$ ja pisteen (tämä järjestys säilyttäen) kautta kulkevaa janaa pitkin sylinterin reunapisteelle. Määrittelemällä vielä kuvaus

$$g : D^k \times 2I \to D^{k+1},\ (x, t) \to \begin{cases} \frac{(x,t)}{\|\mathrm{pr}(x,t)\|}, \text{ kun } (x, t) \neq (0, 0), \\ (0, 0), \text{ muuten}, \end{cases}$$

saadaan haluttu homeomorfismi, joka ei muuta pisteiden suuntaa keskipisteeseen nähden.

Tutkitaan joukon $D^k \times \{1\}$ kuvautumista: tämän joukon pisteet kuuluvat sylinterin reunaan, joten kun $(x, 1) \in D^k \times \{1\}$, niin

$$g(x, 1) = \frac{(x, 1)}{\sqrt{\|x\|^2 + 1}}.$$

Koska kaikilla $x \in D^k \times \{1\}$ pätee täsmälleen $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\|x\|^2+1}} \leq 1$, niin tällöin

$$G_+^\partial := g(D^k \times \{1\}) = S^k \cap \{(x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_{k+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\},$$

ja vastaavasti

$$G_-^\partial := g(D^k \times \{0\}) = S^k \cap \{(x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_{k+1} \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

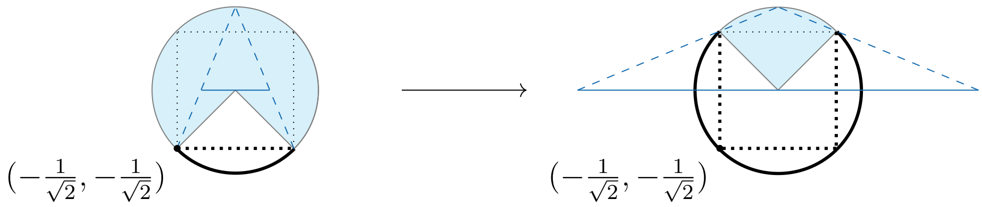
$$L_+^\partial := g(D^k \times \{0\} \cup S^{k-1} \times I) = S^k \cap \{(x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_{k+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\},$$

$$L_-^\partial := g(D^k \times \{0\}) = S^k \cap \{(x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_{k+1} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

Tällöin L_-^∂ voidaan esimerkiksi kuvata k-tasolle stereografisen projektion avulla. Koska kuvajoukko on k-kiekko, kiekon sädettä voidaan skaalata niin, että stereografisen projektion käänteiskuvaus kuvaa kiekon takaisin joukolle L_+^∂. Skaalaus ja stereografinen projektio ovat molemmat upotuksia, joten saadaan homeomorfismi $h_L^\partial : L_-^\partial \to L_+^\partial$. Tätä voidaan edelleen laajentaa lineaarisesti joukkoihin

$$L_- := D^{k+1} \cap \{x = (x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \frac{x_{k+1}}{\|x\|} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\},$$

$$L_+ := S^k \cap \{x = (x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \frac{x_{k+1}}{\|x\|} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$



Kuva 3.1: Kohdan i) homeomorfismi, kun k=1. Molemmissa kuvissa näkyy joukon L^{∂}_{-} stereografinen projektio tasolla $y = 0$.

määrittelemällä

$$h_L : L_- \to L_+,\ x \mapsto \begin{cases} \|x\| h_L^{\partial}\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tällöin h_L on homeomorfismi. Samalla periaatteella saadaan homeomorfismi $h_G : G_- \to G_+$, missä

$$G_- := D^{k+1} \cap \{x = (x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \frac{x_{k+1}}{\|x\|} \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}\},$$
$$G_+ := D^{k+1} \cap \{x = (x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \frac{x_{k+1}}{\|x\|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

Stereografisen projektion ominaisuuksien nojalla nämä kaksi funktiota ovat samoja rajoittumissa joukkoon $G_- \cap L_-$, joten määrittelemällä

$$h_3 : D^{k+1} \to D^{k+1},\ x \mapsto \begin{cases} h_L(x), & \text{kun } x \in L_-, \\ h_G(x), & \text{kun } x \in G_-, \end{cases}$$

saadaan haluttu homeomorfismi.

ii) Todetaan, että on olemassa homeomorfismi

$$h : (I \times I, I \times \{0\}) \to (I \times I, I \times \{0\} \cup \partial I \times I),$$

edellisen kohdan nojalla. Tällöin on olemassa samoin homeomorfismi

$$h_2 := \mathrm{Id} \times h : (X \times I \times I, X \times I \times \{0\}) \to (X \times I \times I, X \times I \times \{0\} \cup X \times \partial I \times I).$$

iii) On olemassa homeomorfismi

$$\hbar : (X \times I \times I, X \times I \times \{0\} \cup X \times \partial I \times I) \to (X \times I \times I, X \times \{0\} \times I \cup X \times I \times \partial I),$$
$$(x, s, t) \mapsto (x, t, s),$$

joten valitaan $h_3 = \hbar \circ h_2$.

$\square$

Lemman 3.4 kohdasta *iii)* seuraa avaruuden B aliavaruuksiin liittyvä tulos:

Korollaari 3.5. *Olkoon $p : E \to B$ fibraatio, $B' \subset B$ ja $\pi_k(B, B', b_0) = 0$. Tällöin $\pi_k(E, p^{-1}(B'), e_0) = 0$, kun $p(e_0) = b_0$.*

Todistus. Olkoon $g : (D^k, S^{k-1}, s_0) \to (E, p^{-1}(B'), e_0)$ jatkuva kuvaus. Tällöin $[p \circ g] = 0$, joten lemman 2.5 nojalla on olemassa sellainen homotopia $H : D^k \times I \to B$ $\operatorname{rel} S^{k-1}$, että $H_0 = p \circ g$ ja kuvauksen H_1 kuvajoukko sisältyy aliavaruuteen B'. Koska kuvauksella p on homotopian nosto-ominaisuus parin (D^k, S^{k-1}) suhteen, tälle homotopialle on nosto H' $\operatorname{rel} S^{k-1}$. Koska vielä kuvauksen H'_1 kuvajoukko sisältyy aliavaruuteen $p^{-1}(B')$, niin tällöin $[g] = [H'_1] = 0$. $\square$

Käyttäen lemman 3.4 kohtaa *i)* voidaan osoittaa ([2] lause 4.41, s. 376), että fibraatio määrittelee pitkän eksaktin jonon

$$\cdots \to \pi_k(F_{b_0}, e_0) \to \pi_k(E, e_0) \to \pi_k(B, b_0) \to \pi_{k-1}(F_{b_0}, e_0) \to \cdots \to \pi_0(E, e_0) \to 0$$

kun $e_0 \in F_{b_0}$. Myöhemmin nähdään, että tämä on erityisen hyödyllistä CW-approksimaatioiden kannalta.

3.2 Kuvauksen indusoima fibraatio ja säiehomotopia

Fibraation $p : E \to B$ ja jatkuvan kuvauksen $f : X \to B$ avulla saadaan uusi fibraatio.

Lause 3.6. *Olkoot E, B ja X topologisia avaruuksia, olkoon $p : E \to B$ fibraatio ja $f : X \to B$ jatkuva kuvaus. Määritellään*

$$E_f = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}.$$

Olkoot lisäksi $p_f : E_f \to X$ ja $\not{f} : E_f \to E$ projektiokuvausten rajoittumia. Tällöin kaavio

$$\begin{array}{ccc} E_f & \xrightarrow{\not{f}} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p_f} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

kommutoi, ja kuvaus $p_f : E_f \to X$ on fibraatio. Jos lisäksi kuvaus f on kantapisteet x_0 ja b_0 säilyttävä kuvaus $(X, x_0) \to (B, b_0)$, niin fibraation p_f säie $p_f^{-1}(x_0)$ on homeomorfinen säikeen $p^{-1}(b_0)$ kanssa.

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa helposti siitä, että

$$(x, e) \overset{\not{f}}{\mapsto} e \overset{p}{\mapsto} p(e) \ \text{ ja } (x, e) \overset{p_f}{\mapsto} x \overset{f}{\mapsto} f(x).$$

Olkoon sitten $g : Y \to E_f$ jokin jatkuva kuvaus. Oletetaan, että on olemassa homotopia $H : Y \times I \to X$ siten, että $p_f \circ g(y) = H(y, 0)$ kaikilla $y \in Y$. Huomataan, että kuvaus $f \circ H : Y \times I \to B$ on homotopia kuvaukselta $f \circ p_f \circ g = p \circ \not{f} \circ g : Y \to B$. Homotopian nosto-ominaisuuden perusteella on olemassa sellainen homotopia $H'' : Y \times I \to E$, että $p \circ H'' = f \circ H$ ja $H''(y, 0) = \not{f} \circ g$ kaikilla $y \in Y$. Koska siis $p(H''(y, t)) = f(H(y, t))$ kaikilla $y \in Y$ ja $t \in I$, niin $(H(y, t), H''(y, t)) \in E_f$. Määritelläänkin homotopia $H' : Y \times I \to E_f$, $(y, t) \mapsto (H(y, t), H''(y, t))$. Tälle homotopialle on voimassa

$$(H(y, 0), H''(y, 0)) = (p_f \circ g(y), \not{f} \circ g(y)) = g(y).$$

$$\begin{tikzcd}
E_f \arrow[rr, "\not{f}"] \arrow[dd, "p_f"'] & & E \arrow[dd, "p"] \\
& Y \times \{0\} \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "\not{f}\circ g"'] \arrow[dd, hook] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & B \\
& Y \times I \arrow[ul, "H"] \arrow[ur, "f\circ H"'] \arrow[uuul, dashed, "H'"] \arrow[uuur, "H''"'] &
\end{tikzcd}$$

Lopuksi nähdään, että

$$\begin{aligned}
p_f^{-1}(x_0) &= \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e), x = x_0\} \\
&= \{x_0\} \times \{e \in E \mid p(e) = f(x_0) = b_0\} = \{x_0\} \times F_{b_0} \overset{\not{f}}{\cong} F_{b_0}.
\end{aligned}$$

□

Huomautus 3.7. Fibraatio voidaan tietenkin indusoida myös useamman kerran. Jos $p : E \to B$ on fibraatio, $p_f : E_f \to X$ on kuvauksen $f : X \to B$ indusoima fibraatio ja edelleen on olemassa jatkuva kuvaus $g : Y \to X$, niin tästä saadaan taas uusi fibraatio $(p_f)_g : (E_f)_g \to Y$, missä

$$(E_f)_g := \{(y, x, e) \in Y \times X \times E \mid g(y) = p_f(x, e) = x, f(x) = p(e)\}.$$

Itse asiassa on myös voimassa, että $(E_f)_g \cong E_{f\circ g}$:

$$\begin{aligned}(E_f)_g &= \{(y,x,e) \in Y \times X \times E \mid p_f(x,e) = g(y), p(e) = f(x)\} \\ &= \{(y,x,e) \in Y \times X \times E \mid x = g(y), p(e) = f(x)\} \\ &= \{(y,x,e) \in Y \times X \times E \mid x = g(y), p(e) = f \circ g(y)\} \overset{\pi_1 \times \pi_3}{\cong} E_{f\circ g},\end{aligned}$$

missä $\pi_1 \times \pi_3$ on projektiokuvauksen $Y \times X \times E \to Y \times E, (y,x,e) \mapsto (y,e)$, rajoittuma.

Säeihomotopia on fibraation kanssa yhdistettynä kuvauksena triviaali, "näkymätön" homotopia.

Määritelmä 3.8. Olkoon $p : E \to B$ fibraatio. **Säiehomotopia** $H : Y \times I \to E$ on sellainen homotopia, että jos $H(y,s) \in F_b$ jollakin $s \in I$, niin $H(y,t) \in F_b$ kaikilla $t \in I$. Jos kuvaukset $f_0, f_1 : Y \to E$ ovat säiehomotooppiset, niin merkitään $f_0 \simeq_p f_1$. Olkoon myös $p' : E' \to B'$ fibraatio. Jos $\mathscr{f} : E \to B$ on sellainen jatkuva kuvaus, että seuraava kaavio kommutoi,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathscr{f}} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

niin $\mathscr{f}$ on **säiekuvaus**. Jos kuvaukset $\mathscr{f}$ ja $\mathscr{g} : E' \to E$ ovat sellaisia säiekuvauksia, että $\mathscr{f} \circ \mathscr{g} \simeq_{p'} \mathrm{Id}_{E'}$ ja $\mathscr{g} \circ \mathscr{f} \simeq_p \mathrm{Id}_E$, niin fibraatiot p ja p' ovat **säiehomotopiaekvivalentit**. Jos $B = B'$ ja $f = g = \mathrm{Id}$, niin fibraatiot p, p' ovat **vahvasti säiehomotopiaekvivalentit**.

Lause 3.9. *Olkoon $p : E \to B$ fibraatio.*

i) Olkoon $H : X \times I \to B$ kuvausten $f_0, f_1 : X \to B$ välinen homotopia. Tällöin on olemassa säiekuvaus $g_H : E_{f_0} \to E_{f_1}$, jolle pätee $\mathscr{f}_1 \circ g_H \simeq \mathscr{f}_0$.

ii) Olkoon $K : X \times I \to B$ kuvausten f_0, f_1 välinen toinen homotopia, ja

$$M : X \times I \times I \to B$$

homotopioiden H ja K välinen homotopia $\mathrm{rel}\, X \times \partial I$*. Tällöin on olemassa säiehomotopia $g_K \simeq_{p_{f_0}} g_H$.*

Todistus. i) Kuvaukselle $\mathscr{f}_0 : E_{f_0} \to E$ pätee $p \circ \mathscr{f}_0 = f_0 \circ p_{f_0}$ (ja kuvaukselle $\mathscr{f}_1$ vastaavasti). Tälle yhdistetylle kuvaukselle voidaan muodostaa homotopia

$$F : E_{f_0} \times I \overset{p_{f_0} \times \mathrm{Id}}{\to} X \times I \overset{H}{\to} B,$$

jolle on voimassa

$$F((x,e),0) = H(p_{f_0}(x,e),0) = f_0 \circ p_{f_0}(x,e) = p \circ \not{f}_0(x,e),$$
$$F((x,e),1) = H(p_{f_0}(x,e),1) = f_1 \circ p_{f_0}(x,e).$$

Tälle homotopialle saadaan nosto $F' : E_{f_0} \times I \to E$, jolle pätee $F'((x,e),0) = \not{f}_0(x,e)$ kaikilla $(x,e) \in E_{f_0}$. Määritellään seuraavaksi kuvaus

$$g_H : E_{f_0} \to E_{f_1}, \quad (x,e) \mapsto (p_{f_0}(x,e), F'((x,e),1)).$$

Kuvaus on hyvin määritelty, sillä $f_1(p_{f_0}(x,e)) = F((x,e),1) = p \circ F'((x,e),1)$, joten $g_H(E_{f_0}) \subset E_{f_1}$. Tällöin

$$\not{f}_1 \circ g_H(x,e) = F'((x,e),1) \simeq F'((x,e),0) = \not{f}_0(x,e).$$

ii) Kuten edellisessä kohdassa, olkoon $G' : E_{f_0} \times I \to E$ nosto kuvaukselle

$$G : E_{f_0} \times I \overset{p_{f_0}\times \mathrm{Id}}{\to} X \times I \overset{K}{\to} B,$$

ja $G'_0 = \not{f}_0$. Olkoon samalla tavoin $g_K : E_{f_0} \to E_{f_1}$, eli $g_K = (p_{f_0}, G'_1)$. Olkoon $A = \{0\} \times I \cup I \times \partial I$. Määritellään nyt kuvaus

$$M' : E_{f_0} \times A \to E,$$
$$M'(y,t,s) = \begin{cases} F'(y,t), \text{ kun } s = 0, \\ G'(y,t), \text{ kun } s = 1, \\ \not{f}_0(y) \text{ muuten, eli kun } t = 0. \end{cases}$$

Tällöin $p \circ M' = M \circ (p_{f_0} \times \mathrm{Id}) \restriction E_{f_0} \times A$, sillä

$$(y,0,s) \overset{M'}{\mapsto} \not{f}_0(y) \overset{p}{\mapsto} p \circ \not{f}_0(y) = f_0 \circ p_{f_0}(y),$$
$$(y,0,s) \overset{p_{f_0}\times \mathrm{Id}}{\mapsto} (p_{f_0}(y),0,s) \overset{M}{\mapsto} f_0 \circ p_{f_0}(y),$$

kun $s \notin \{0,1\}$. Toisaalta kun $s = 0$, $p \circ M'(y,t,0) = p \circ F'(y,t) = F(y,t)$ ja vastaavasti kun $s = 1$, $p \circ M'(y,t,1) = G(y,t)$. Lemman 3.4 kohdan ii) nojalla kuvaus M' laajenee homotopian $M \circ (p_{f_0} \times \mathrm{Id})$ nostoksi $M'' : E_{f_0} \times I \times I \to E$.

Määritellään $L : E_{f_0} \times I \to E_{f_1}$, $(y,t) \mapsto (p_{f_0}(y), M''(y,1,t))$. Tämäkin kuvaus on hyvin määritelty, sillä

$$p \circ M''(y,1,t) = M(p_{f_0}(y),1,t) = M(p_{f_0}(y),1,0) = H(p_{f_0}(y),1) = f_1 \circ p_{f_0}(y),$$

eli $L(E_{f_0} \times I) \subset E_{f_1}$. Lisäksi

$$\begin{aligned} L(y,0) &= (p_{f_0}(y), M'(y,1,0)) = (p_{f_0}(y), F'(y,1)) = g_H(y), \\ L(y,1) &= (p_{f_0}(y), M'(y,1,1)) = (p_{f_0}(y), G'(y,1)) = g_K(y), \end{aligned}$$

joten L on säiehomotopia $g_H \simeq_{p_{f_0}} g_K$.

$\square$

Lauseesta 3.9 seuraa erityinen konstruktio poluille avaruudessa B. Jokainen polku $w : I \to B$ voidaan nimittäin mieltää homotopiana $W : \{c\} \times I \to B$ kahden vakiokuvauksen $w_0 : \{c\} \to B,\ c \mapsto w(0),\ w_1 : \{c\} \to B,\ c \mapsto w(1)$ välillä. Tästä saadaan lauseen 3.9 kohdan i) nojalla säiekuvaus $g_w : E_{w_0} \to E_{w_1}$.

Korollaari 3.10. *Olkoon $p : E \to B$ fibraatio, $w : \{c\} \times I \to B$ jonkin polun määräämä homotopia ja kuvaus $g_w : E_{w_0} \to E_{w_1}$ säiekuvaus kuten lauseessa 3.9. Tällöin seuraavat ehdot ovat voimassa:*

i) Jos $w \simeq w' \operatorname{rel} \partial I$, niin $g_w \simeq g_{w'}$.

ii) Jos myös $w' : \{c\} \times I \to B$ on sellaisen polun määräämä homotopia, että $w(1) = w'(0)$, niin $g_{w*w'} \simeq g_{w'} \circ g_w$,

iii) Jos w on vakiopolku, niin $g_w \simeq \mathrm{Id}_{E_{w_0}}$.

Lisäksi $F_{w(0)} \cong E_{w_0}$ ja $F_{w(1)} \cong E_{w_1}$.

Todistus. i) Tämä seuraa suoraan edellisen lauseen kohdasta ii).

ii) Kun tarkastellaan kuvauksen g_w konstruktiota, huomataan, että se riippuu ainoastaan homotopian noston valinnasta. Olkoot

$$F'_A : E_{w_0} \times I \to E, \quad F'_B : E_{w'_0} \times I \to E$$

kuvaukset g_w ja $g_{w'}$ määritteleviä homotopian nostoja. Määritellään kuvaus $F'_C : E_{w_0} \times I \to E$,

$$F'_C(c,e,t) = \begin{cases} F'_A(c,e,2t), & \text{kun } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ F'_B(g_w(c,e), 2t-1), & \text{kun } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Kuvaus on hyvin määritelty ja jatkuva: kun $t = \frac{1}{2}$, niin

$$\begin{aligned} F'_B(g_w(c,e), 2t-1) &= F'_B((p_{w_0}(c,e), F'_A(c,e,1)), 0) = w(p_{w_0}(c,e), F'_A(c,e,1)) \\ &= F'_A(c,e,1) = F'_A(c,e,2t). \end{aligned}$$

Toisaalta F'_C on polun $w * w'$ nosto, sillä

$$p \circ F'_C(c,e,t) = \begin{cases} w \circ (p_{w_0} \times \mathrm{Id})(c,e,2t) = w(2t), & \text{kun } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ w' \circ (p_{w'_0} \times \mathrm{Id})(c,e,2t-1) = w'(2t-1), & \text{kun } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tämän perusteella voidaan määritellä

$$g_{w*w'} : E_{w_0} \to E_{w'_1}, \quad (c,e) \mapsto (p_{w_0}(c,e), F'_C(c,e,1)).$$

Koska $p_{w_0}(c,e) = p_{w'_0}(c,e) = c$ kaikilla $(c,e) \in E_{w_0}, E_{w'_0}$, niin tällöin $g_{w*w'} = g'_w \circ g_w$. Edellisen lauseen kohdan ii) perusteella homotopian määrittelytapa ei vaikuta siihen, että säiekuvaukset g_K ja g_H ovat homotooppiset, mistä väite seuraa.

iii) Vakiopolulle sopiva nosto on kuvaus

$$F' : E_{w_0} \times I \to E, \ (c,e,t) \mapsto e,$$

jonka perusteella määritelty $g_w \simeq \mathrm{Id}_{E_{w_0}}$.

Lauseen viimeinen huomio seuraa suoraan indusoidun fibraation ja polun määritelmästä, homeomorfismeina $\mathscr{w}_0 : E_{w_0} \to F_{w(0)}$ ja $\mathscr{w}_1 : E_{w_1} \to F_{w(1)}$ □

Käytetään merkintää $[B, b_1, b_2]$ avaruuden B sellaisten polkujen polkuluokkien joukolle, joiden alkupiste on b_1 ja loppupiste b_2 ja merkintää $[F_{b_1}, F_{b_2}]$ kuvausten $f : F_{b_1} \to F_{b_2}$ homotopialuokkien joukolle. Tällöin korollaarin 3.10 perusteella voidaan määritellä kuvaus

$$\alpha : [B, b_1, b_2] \to [F_{b_1}, F_{b_2}], \quad [w] \mapsto [\mathscr{w}_1 \circ g_w \circ (\mathscr{w}_0)^{-1}],$$

joka on oleellinen luvun 5.1 kannalta. Maaliavaruuden homotopialuokat indusoivat lisäksi kohomologian homotopiainvarianssin vuoksi aina yhden yksikäsitteisen homomorfismin $(\mathscr{w}_1 \circ g_w \circ (\mathscr{w}_0)^{-1})^* : H^*(F_{b_2}; G) \to H^*(F_{b_1}; G)$. Kirjoitetaan jatkossa merkintöjen lyhentämiseksi $\mathscr{g}_w := \mathscr{w}_1 \circ g_w \circ (\mathscr{w}_0)^{-1}$ ja $\alpha([w])^* = \mathscr{g}_w^*$.

Määritelmä 3.11. Olkoot $p : E \to B$ fibraatio, $b_1, b_2 \in B$ ja $\alpha : [B, b_1, b_2] \to [F_{b_1}, F_{b_2}]$, $[\gamma] \mapsto [\mathscr{g}_\gamma]$.

i) Jos kuvaukselle $\phi : F_{b_1} \to F_{b_2}$ on voimassa $[\phi] = \alpha([\gamma])$, niin ϕ on **hyväksyttävä**.

ii) Olkoot $b_1 = b_0 = b_2$, ja G Abelin ryhmä. Määritellään kuvaus

$$\begin{aligned} \theta_{b_0} &: \pi_1(B, b_0) \times H^*(F_{b_0}; G) \to H^*(F_{b_0}; G) \\ &([\gamma], \sigma) \mapsto \alpha([\gamma])^*(\sigma) = \mathscr{g}_\gamma^*(\sigma). \end{aligned}$$

Jos kaikilla $b_0 \in B$, $[w] \in \pi_1(B, b_0)$ ja $\sigma \in H^*(F_{b_0}; G)$ pätee $\theta_{b_0}([w], \sigma) = \sigma$, niin sanotaan, että fibraatio $p : E \to B$ on **suunnistuva**.

Ennakoiden jo tulevaa määritelmästä voidaan lukea periaate, jolla suunnistuvuutta ja hyväksyttävyyttä voidaan käyttää todistusteknisesti yhdessä. Oletetaan, että jatkuvat kuvaukset $f_1, ..., f_k$ on määritelty seuraavasti:

$$f_i : F_i \to F_{i+1}, \quad F_1 = F_{k+1},$$

missä F_i on jokaisella $1 \leq i \leq k$ jokin säie. Oletetaan lisäksi, että nämä kuvaukset ovat myös hyväksyttäviä: olkoot $[f_i] = \alpha([\gamma_i]) = [g_{\gamma_i}]$ kaikilla $1 \leq i \leq k$. Jos fibraatio on suunnistuva, niin

$$f_1^* \circ ... \circ f_k^* = (f_k \circ ... \circ f_1)^* = (g_{\gamma_1 * ... * \gamma_k})^* = \mathrm{Id}^* .$$

Toisaalta kuvaus θ_{b_0} on algebrallisesti säännönmukainen. Korollaarin 3.10 todistusta tarkastelemalla nähdään suoraan, että *ryhmä* $\pi_1(B, b_0)$ *toimii* kohomologiaryhmässä $H^*(F_{b_0}; G)$.

Määritelmä 3.12. Olkoon G ryhmä, jonka laskutoimitus on $\cdot$ ja J jokin joukko, ja olkoon $\theta : G \times J \to J$ sellainen kuvaus, että seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $s \in J$ ja kaikilla $g_1, g_2 \in G$:

i) $\theta(e, s) = s$, missä e on ryhmän G neutraalialkio,

ii) $\theta(g_1 \cdot g_2, s) = \theta(g_1, \theta(g_2, s))$.

Tällöin sanotaan, että kuvaus θ määrittelee ryhmän G toiminnan joukkoon J.

Seuraavasta lauseesta seuraa, että jos B on polkuyhtenäinen, niin fibraation $p : E \to B$ kaikki säikeet ovat keskenään homotopiaekvivalentteja. Tähän ominaisuuteen palataan erityisesti luvussa 5.1.

Lause 3.13. *Olkoon $p : E \to B$ fibraatio ja olkoot $f_0, f_1 : X \to B$ homotooppiset kuvaukset. Tällöin on olemassa vahva säiehomotopiaekvivalenssi $g : E_{f_0} \to E_{f_1}$.*

Todistus. Olkoon $H : X \times I \to B$ homotopia kuvausten f_0 ja f_1 välillä ja $H^{-1} : X \times I \to X$, $(x, t) \mapsto H(x, 1 - t)$ käänteishomotopia. Olkoot vastaavasti H' ja $(H^{-1})'$ nostoja kuvauksille $H \circ (p_{f_0} \times \mathrm{Id})$ ja $H^{-1} \circ (p_{f_1} \times \mathrm{Id})$. Kuten lauseessa 3.9, homotopian nostot määrittelevät nyt kuvaukset $g_H : E_{f_0} \to E_{f_1}$ ja $g_{H^{-1}} : E_{f_1} \to E_{f_0}$. Määritellään homotopian H avulla uusi homotopia $K : X \times I \to B$,

$$K(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{kun } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H(x, 2 - 2t) & \text{kun } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

ja toisaalta $K' : E_{f_0} \times I \to B$,

$$K'(x,e,t) = \begin{cases} H'(x,e,2t), & \text{kun } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (H^{-1})'(g_H(x,e), 2t-1), & \text{kun } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tästä huomataan, että $K'(x,e,1) = g_{H^{-1}} \circ g_H(x,e)$ kaikilla $(x,e) \in E_{f_0}$, joten voidaan määritellä kuvaus $g_K : E_{f_0} \to E_{f_0}$ niin, että $g_K(x,e) = (p_{f_0}(x,e), K'(x,e,1))$ jokaisella $(x,e) \in E_{f_0}$.
Näytetään seuraavaksi, että kuvaukselle g_K pätee $g_K \simeq_{p_{f_0}} \mathrm{Id}_{E_{f_0}}$: tällöin myös $g_{H^{-1}} \circ g_H \simeq_{p_{f_0}} \mathrm{Id}_{E_{f_0}}$, ja symmetrian nojalla tämä pätee myös toisinpäin. Määritellään kuvaus $M : X \times I \times I \to B$,

$$M(x,t,s) = \begin{cases} f_0(x), & \text{kun } 0 \leq t \leq \frac{s}{2}, \\ H(x, 2t-s), & \text{kun } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H(x, 2-2t-s), & \text{kun } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2}, \\ f_0(x), & \text{kun } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Nyt M on homotopia homotopialta K vakiohomotopialle f_0. Koska

$$\not{f}_0{}' : E_{f_0} \times I \to E, \ (x,e,t) \mapsto \not{f}_0(x,e)$$

on sopiva nosto vakiohomotopialle

$$f_0' : X \times I \to B, \ (x,t) \mapsto f_0(x),$$

niin g_{f_0} voidaan määritellä seuraavasti:

$$g_{f_0} : E_{f_0} \to E_{f_0}, \ (x,e) \mapsto (p_{f_0}(x,e), \not{f}_0(x,e)) = (x,e).$$

Tällöin g_{f_0} on identiteettikuvaus, ja lauseen 3.9 kohdan ii) nojalla $g_K \simeq_{p_{f_0}} \mathrm{Id}_{E_{f_0}}$, ja g_H on väitteen vahva säiehomotopiaekvivalenssi. □

4 Spektraalijonot

Algebrallisessa topologiassa eksaktit jonot toimivat usein algebrallisena koneistona, jonka avulla saadaan laskettua vielä tuntemattoman ryhmän tai modulin rakenne jonossa esiintyvien jo tunnettujen objektien perusteella. Spektraalijonojen määrittelyn tavoite on täsmälleen sama, vaikka toteutus on hieman monimutkaisempi.

Monimutkaisuuden vähentämiseksi ja merkintöjen vakiinnuttamiseksi tämän luvun ensimmäinen osa esittelee spektraalijonon rakenteen ensin pelkästään algebrallisena rakenteena, ja se pohjautuu pääasiassa kirjan [9] lukuun 2. Luvun toisessa osassa määritellään ensimmäisen osan mukainen spektraalijono topologisen avaruuden *suodatuksen* avulla. Toisen osan konstruktio on pitkälti sama kuin kirjan [16] luvun 15 alussa, mutta se on muokattu homologiamodulien tapauksesta kohomologiamodulien tapaukseen.

4.1 Spektraalijono algebrallisena työkaluna

Spektraalijonon koneiston rakentamista varten tarvitaan seuraavan määritelmän mukaisia *porrastettuja rakenteita.*

Määritelmä 4.1. [1]([5] määritelmä 3.1., [9] määritelmät 2.1. ja 1.1.) Olkoon R rengas. **Porrastettu (R-)moduli** [2] M_* on suora summa $\oplus_{p\in\mathbb{Z}}M_p$, missä M_p on R-moduli jokaisella $p \in \mathbb{Z}$. Kahden porrastetun modulin $M_* := \oplus_{p\in\mathbb{Z}}M_p$ ja $N_* := \oplus_{p\in\mathbb{Z}}N_p$ välinen **morfismi** $f : M_* \to N_*$ on R-lineaarinen kuvaus, jolle pätee $f(M_p) \subset N_p$ kaikilla $p \in \mathbb{Z}$. R-lineaarinen kuvaus $g : M_* \to N_*$ kahden porrastetun modulin $M_* := \oplus_{p\in\mathbb{Z}}M_p$ ja $N_* := \oplus_{p\in\mathbb{Z}}N_p$ välillä on **astetta** d, jos $g(M_p) \subset N_{p+d}$ kaikilla $p \in \mathbb{Z}$.

Vastaavasti **2-porrastettu (R-)moduli**[3]$M_{*,*}$ on suora summa $\oplus_{p,q\in\mathbb{Z}}M_{p,q}$. Kahden 2-porrastetun modulin $M_{*,*} := \oplus_{p,q\in\mathbb{Z}}M_{p,q}$ ja $N_{*,*} := \oplus_{p,q\in\mathbb{Z}}N_{p,q}$ välinen **morfismi**

[1]Kirjallisuudessa esiintyy useita variaatioita tässä esitellystä määritelmästä. Esimerkiksi suora summa voitaisiin korvata määritelmässä perheellä R-moduleita.

[2]eng. *graded module*

$f : M_{*,*} \to N_{*,*}$ on R-lineaarinen kuvaus, jolle pätee $f(M_{p,q}) \subset N_{p,q}$ kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$. Kahden 2-porrastetun modulin $M_{*,*} := \oplus_{p,q\in\mathbb{Z}} M_{p,q}$ ja $N_{*,*} := \oplus_{p,q\in\mathbb{Z}} N_{p,q}$ välinen R-lineaarinen kuvaus $f : M_{*,*} \to N_{*,*}$ on **astetta** (a, b), jos $f(M_{p,q}) \subset N_{p+a,q+b}$ kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$.

2-porrastetun modulin $M_{*,*}$ **differentiaali** on sellainen astetta (a, b) oleva R-lineaarinen kuvaus $d : M_{*,*} \to M_{*,*}$ joillakin $a, b \in \mathbb{Z}$, että $d \circ d = 0$.

2-porrastettu R-moduli $M_{*,*}$ on **2-porrastettu (R-)algebra**, jos on olemassa R-lineaarinen ja bilineaarinen kuvaus

$$\phi : M_{p,q} \times M_{s,t} \to M_{p+s,q+t}.$$

Kategoriateorian kielellä edellisen määritelmän mukainen tiettyä astetta oleva R-lineaarinen kuvaus unohtaa osan porrastetun modulin rakenteesta. Aste voitaisiin muuttaa triviaaliksi toisella indeksöinnillä, mutta silloin kyseessä ei olisi enää sama objekti, mikä on differentiaalin määritelmän kannalta oleellista. Tässä luvussa käsitellään kuitenkin pääasiassa R-modulien välisiä morfismeja, joihin viitataan homomorfismeina.

Porrastetun modulin avulla voidaan käsitellä myös homologia- ja kohomologiamodulien jonoja $H_*(-; R)$ ja $H^*(-; R)$ sekä näiden tensorituloja määrittelemällä jono suoraksi summaksi.

Määritelmä 4.2. ([9] määritelmä 2.2.) Olkoon $(E^r, d^r)_{r\geq 1}$ sellainen jono, jossa jokainen E^r on 2-porrastettu moduli ja jokainen $d^r : E^r \to E^r$ on astetta $(-r, r-1)$ oleva differentiaali, ja $E^{r+1}_{p,q} \cong \ker(d^r_{p,q}) / \operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1})$, missä $d^r_{p,q} := d^r \restriction E^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r$. Tällöin jonoa $(E^r, d^r)_{r\geq 1}$ sanotaan **homologiseksi spektraalijonoksi**.

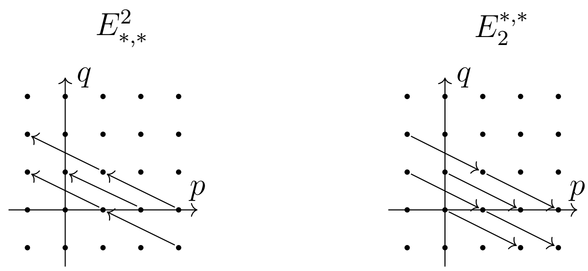
Määritelmässä differentiaalit määrittelevät siis jokaista $q \in \mathbb{Z}$ kohti yksikäsitteisen ketjukompleksin, johon $E^r_{p,q}$ kuuluu. Kirjallisuudessa spektraalijonoja kuvataankin visuaalisesti siten, että jonon r. jäsen kuvataan tasolle $\mathbb{Z}^2$ niin, että jokaista pistettä $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ vastaa moduli $E^r_{p,q}$ ja jokaista differentiaalia vastaa pisteiden välinen nuoli (kuva 4.1). Tästä hahmotustavasta juontuu jonon jäsenen (E^r, d^r) nimitys spektraalijonon *sivuna*. Tällä terminologialla jonon seuraavan sivun modulit ovat edellisen sivun differentiaalien määrittelemiä homologiamoduleja.

Syy siihen, miksi määritelmän 4.3 mukainen jono on nimenomaan homologinen spektraalijono, liittyy differentiaalien suuntaan. Kohomologiselle spektraalijonolle voidaan antaa oma määritelmänsä.

Määritelmä 4.3. ([9] määritelmä 2.2.) Olkoon $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ jono, jossa jokainen E_r on 2-porrastettu moduli, jokainen $d_r : E_r \to E_r$ on astetta $(r, -r+1)$ oleva differentiaali

[3] eng. *bigraded module*

ja $E_{r+1}^{p,q} \cong \ker(d_r^{p,q})/\operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1})$, missä $d_r^{p,q} := d_r \restriction E_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r$. Tällöin jonoa $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ sanotaan **kohomologiseksi spektraalijonoksi**.



Kuva 4.1: Osat spektraalijonojen toisia sivuja ja muutama differentiaali. Vasemmalla homologinen ja oikealla kohomologinen spektraalijono.

Kuten singulaaristen kohomologiaryhmien tapauksessa, ainoa ero homologiseen versioon on indeksöinnin muuttuminen. Homologisesta spektraalijonosta saadaan nimittäin kohomologinen versio valitsemalla $E_r^{p,q} = E^r_{-p,-q}$.
Määritelmästä seuraa suoraan spektraalijonolle oleellisia ominaisuuksia. Merkitään eksaktien jonojen merkintöjen tapaan

$$Z_1 = \ker(d^1) \text{ ja } B_1 = \operatorname{im}(d^1).$$

Tällöin $B_1 \subset Z_1 \subset E^1$ ja määritelmän perusteella $E^2 \cong Z_1/B_1$. Olkoon lisäksi

$$Z_2' := \ker(d^2) \subset E^2 \cong Z_1/B_1.$$

Tällöin on olemassa sellainen modulin Z_1 alimoduli Z_2, että $Z_2' \cong Z_2/B_1 \subset Z_1/B_1$. Vastaavasti moduli

$$B_2' := \operatorname{im}(d^2) \subset E^2 \cong Z_1/B_1$$

voidaan kirjoittaa modulin Z_1 alimodulin B_2 avulla siten, että $B_2' \cong B_2/B_1$. Jatkamalla näin seuraavienkin sivujen osalta saadaan seuraava inkluusioiden ketju:

$$B_1 \subset B_2 \subset ... \subset B_r \subset B_{r+1} \subset ... \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset ... \subset Z_2 \subset Z_1. \tag{4.4}$$

Tämä inkluusioketju johtaa luontevasti *rajasivun* määritelmään.

Määritelmä 4.5. Olkoot $Z^\infty = (\bigcap_{r \geq 1} Z_r)$ ja $B^\infty = (\bigcup_{r \geq 1} B_r)$, missä Z_r, B_r ovat kuten kaavassa (4.4). Spektraalijonon $(E^r, d^r)_{r \geq 1}$ **rajasivu** on $E^\infty := Z^\infty/B^\infty$.

Kääntäen voidaan tarkastella tilannetta, jossa tiedossa on ketjun (4.4) kaltainen inkluusioketju. Seuraava lemma antaa ehdon sille, että myös homologinen spektraalijono on olemassa. Käytetään jatkossa merkintää $\twoheadrightarrow$ korostamaan homomorfismin surjektiivisuutta.

Lemma 4.6. *Olkoot $B^r := B_r$, $Z^r := Z_r$ kuten ketjussa (4.4). Jos on olemassa isomorfismi $h : Z^r_{p,q}/Z^{r+1}_{p,q} \to B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1}$ kaikilla $r \in \mathbb{N}$ ja $p, q \in \mathbb{Z}$, niin on olemassa spektraalijono $(E^r, d^r)_{r\geq 1}$, missä $E^r_{p,q} = Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$.*

Todistus. Määritellään inkluusioiden perusteella homomorfismi

$$d^r_{p,q} : Z^r_{p,q}/B^r_{p,q} \overset{p}{\twoheadrightarrow} Z^r_{p,q}/Z^{r+1}_{p,q} \overset{h}{\to} B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1} \overset{i}{\to} Z^r_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1},$$

missä p on tekijähomomorfismi ja i inkluusio. Tarkistetaan, että homomorfismit $d^r_{p,q}$ määrittelevät differentiaalin. Selvästi p on surjektio ja i injektio. Lisäksi

$$\ker(d^r_{p,q}) = Z^{r+1}_{p,q}/B^r_{p,q} \text{ ja } \operatorname{im}(d^r_{p,q}) = B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1},$$

joten

$$\operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1}) = B^{r+1}_{p,q}/B^r_{p,q} \subset Z^{r+1}_{p,q}/B^r_{p,q} = \ker(d^r_{p,q}).$$

Toisaalta

$$\ker(d^r_{p,q})/\operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1}) = (Z^{r+1}_{p,q}/B^r_{p,q})/(B^{r+1}_{p,q}/B^r_{p,q}) \cong Z^{r+1}_{p,q}/B^{r+1}_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}.$$

□

Spektraalijonon varsinainen hyöty liittyy sen *suppenemiseen*. Suppenemista varten tarvitaan *suodatuksen* määritelmää.

Määritelmä 4.7. ([9] määritelmä 2.3.) Olkoon $\{F_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ kokoelma R-moduleja. Kokoelma $\{F_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ on R-modulin A **suodatus**, jos jokaisella $p \in \mathbb{Z}$ pätee $F_p \subset A$ ja lisäksi toinen seuraavista ehdoista on voimassa:

$$... \subset F^p \subset F^{p+1} \subset ... \subset A \tag{4.8}$$

$$... \subset F^{p+1} \subset F^p \subset .. \subset A. \tag{4.9}$$

Tapauksessa (4.8) sanotaan, että suodatus on *kasvava* ja tapauksessa (4.9) puolestaan, että se on *vähenevä.*

Määritelmä 4.10. ([9] s. 32.) Olkoon porrastettu moduli H, ja olkoon kokoelma $\{F^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ modulin H suodatus. Olkoon lisäksi $F^p_n := F^p \cap H^n$, kun $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n$. Tällöin moduliin H **liittyvä 2-porrastettu moduli** on

$$E^0_{p,q}(H, F) = \begin{cases} F^p_{p+q}/F^{p-1}_{p+q}, \text{ jos suodatus on vähenevä,} \\ F^p_{p+q}/F^{p+1}_{p+q}, \text{ jos suodatus on kasvava.} \end{cases}$$

Määritelmä 4.11. ([5] määritelmä 9.5, [9] määritelmä 2.4.) Olkoon $E = (E^r, d^r)_{r\geq 1}$ spektraalijono ja H porrastettu moduli, jolla on suodatus F kuten ketjussa (4.8) tai (4.9). Oletetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

i) Kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$ on sellainen r_0, että $d^r_{p,q} = 0$ kaikilla $r \geq r_0$.

ii) Kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$,
$$E^\infty_{p,q} \cong E^0_{p,q}(H, F).$$

Tällöin spektraalijono E **suppenee** porrastettuun moduliin H. Jos kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$ $d^r_{p,q} = 0$, kun $r \geq r_0$, ja r_0 on minimaalinen, niin sanotaan, että spektraalijono **romahtaa indeksillä** r_0.

Spektraalijonon suppenemiseen liittyvien modulien välisiä suhteita voidaan kuvata tapauksessa (4.8) lyhyellä eksaktilla jonolla:

$$0 \longrightarrow F^{p-1}_{p+q} \xrightarrow{\ i\ } F^p_{p+q} \xrightarrow{\ p'\ }\!\!\!\!\rightarrow E^\infty_{p,q} \longrightarrow 0,$$

missä i on inkluusiohomomorfismi ja $p' : F^p_{p+q} \twoheadrightarrow F^p_{p+q}/F^{p-1}_{p+q} \xrightarrow{\cong} E^\infty_{p,q}$ tekijähomomorfismin ja suppenemisen määrittelevän isomorfismin yhdistetty kuvaus. Vastaava eksakti jono saadaan myös tapauksessa (4.9).

Tarkastellaan toisaalta spektraalijonon suppenemisen määritelmää aiemman suodatuksen (4.4) näkökulmasta pisteittäin:

$$B^1_{p,q} \subset B^2_{p,q} \subset ... \subset B^r_{p,q} \subset B^{r+1}_{p,q} \subset ... \subset Z^r_{p,q} \subset Z^r_{p,q} \subset ... \subset Z^2_{p,q} \subset Z^1_{p,q}.$$

Jos $d^r_{p,q} = 0$, kun $r \geq r_0$, niin tällöin $Z^r_{p,q} = Z^{r+1}_{p,q}$, ja edelleen $Z^\infty_{p,q} = Z^{r_0}_{p,q}$. Tämän perusteella on olemassa epimorfismi $E^r_{p,q} \twoheadrightarrow E^{r+1}_{p,q}$. Kun tätä sovelletaan jokaiseen hilan $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ pisteeseen, voidaan rajasivu ajatella eräänlaiseksi algebralliseksi alarajaksi spektraalijonolle.

Yleensä spektraalijonoa muodostettaessa ollaan kiinnostuneita juuri määritelmän 4.11 porrastetun modulin H rakenteesta. Tämä konkretisoituu erityisesti seuraavassa luvussa.

*
* *

Suppenevan spektraalijonon tapauksessa rajasivu voidaan määritellä hieman vahvemmin. Tämä helpottaa sekä laskemista että suppenevaa spektraalijonoa koskevia määritelmiä. Uutta määritelmää varten tarvitaan *suoran rajan* määritelmää.

Määritelmä 4.12. ([16] määritelmä 7.45.) **Suunnattu joukko** A on sellainen osittain järjestetty joukko $(A, \leq)$, että kaikilla $\alpha, \beta \in A$ on olemassa $\gamma \in A$, jolle pätee $\alpha \leq \gamma$ ja $\beta \leq \gamma$.
Suora systeemi on R-modulien perhe $\{G_\alpha \mid \alpha \in A\}$, missä R on jokin rengas, A on suunnattu joukko, varustettuna sellaisilla homomorfismeilla $j_\alpha^\beta : G_\alpha \to G_\beta$ $(\alpha \leq \beta)$, että $j_\beta^\gamma \circ j_\alpha^\beta = j_\alpha^\gamma$, missä $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ ja $j_\alpha^\alpha = \mathrm{Id}$ kaikilla $\alpha \in A$.
Suora raja on tekijämoduli $\operatorname{dirlim} G_\alpha := \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha / B$, missä $B \subset \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ on joukon $\{i_\beta \circ j_\alpha^\beta(g) - i_\alpha(g) \mid \alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta, g \in G_\alpha\}$ virittämä alimoduli, missä $i_\alpha : G_\alpha \to \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ on inkluusiohomomorfismi. Tämä indusoi homomorfismin, jota merkitään $\mathfrak{i}_\alpha : G_\alpha \to \operatorname{dirlim} G_\alpha$.

Suoralle summalle $\bigoplus_\alpha A_\alpha$ R-moduleita on yleisesti voimassa, että jos H on R-moduli ja $g_\alpha : A_\alpha \to H$ on homomorfismi jokaisella indeksillä α, niin on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $g' : \bigoplus_\alpha A_\alpha \to H$, jolle pätee $g' \circ i_\alpha = g_\alpha$, missä $i_\alpha : A_\alpha \to \bigoplus_\alpha A_\alpha$ on inkluusio. Hieman vastaava tulos on voimassa myös suoralle rajalle.

$$\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[d, "j_\alpha^\beta"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathfrak{i}_\alpha"'] \arrow[dddr, "f_\alpha"] & \\
A_\beta \arrow[d, "j_\beta^\gamma"'] \arrow[dd, bend right=40, "\mathfrak{i}_\beta"'] \arrow[ddr, "f_\beta"'] & \\
\cdots \arrow[d] & \\
\operatorname{dirlim}(A_\alpha) \arrow[r, dashed, "\{f_\alpha\}"'] & H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "g_\alpha"'] & \bigoplus_{j \in J} A_j \arrow[d, "g'"] \\
& H
\end{tikzcd}$$

Lause 4.13. *([16] lause 7.46.) Olkoon* $(\operatorname{dirlim} G_\alpha, \{\mathfrak{i}_\alpha\})$ *suora raja. Oletetaan, että on olemassa R-moduli H ja indeksöity joukko sellaisia homomorfismeja $f_\alpha : G_\alpha \to H$ kaikilla $\alpha \in A$, että $f_\beta \circ j_\alpha^\beta = f_\alpha$ kaikilla $\alpha \leq \beta$. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen homomorfismi* $\{f_\alpha\} : \operatorname{dirlim} G_\alpha \to H$, *että* $\{f_\alpha\} \circ \mathfrak{i}_\alpha = f_\alpha$.

Todistus. Olkoon edelleen B joukon $\{i_\beta \circ j_\alpha^\beta(g) - i_\alpha(g) \mid \alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta, g \in G_\alpha\}$ virittämä alimoduli. Ensin huomataan, että on olemassa yksikäsitteinen $f' : \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha \to H$, jolle pätee $f' \circ i_\alpha = f_\alpha$. Tällöin

$$f'(i_\beta \circ j_\alpha^\beta(g) - i_\alpha(g)) = f_\beta \circ j_\alpha^\beta(g) - f_\alpha(g) = f_\alpha(g) - f_\alpha(g) = 0,$$

joten $B \subset \ker(f')$. Tällöin R-modulien tekijämodulien universaaliominaisuuden nojalla on olemassa yksikäsitteinen $\{f_\alpha\} : \operatorname{dirlim} G_\alpha \to H$, jolle pätee $f' = \{f_\alpha\} \circ p$, missä $p : \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha \twoheadrightarrow \operatorname{dirlim} G_\alpha$ on tekijähomomorfismi. Tällöin pätee

$$\{f_\alpha\} \circ \underbrace{\mathfrak{i}_\alpha}_{p \circ i_\alpha} = f' \circ i_\alpha = f_\alpha.$$

$\square$

Tarkastellaan taas suppenevan spektraalijonon suodatusta (4.4). Olkoon r_0 sellainen, että $Z^r_{p,q} = Z^{r+1}_{p,q}$ kaikilla $r \geq r_0$. Määritellään suppenemisen perusteella tekijähomomorfismi $j^s_r : Z^{r_0}_{p,q}/B^r_{p,q} \twoheadrightarrow Z^{r_0}_{p,q}/B^s_{p,q}$, missä $r \leq s$. Huomataan, että tällöin perhe $\{Z^{r_0}_{p,q}/B^r_{p,q}\}_{r \geq r_0}$ varustettuna homomorfismeilla $\{j^s_r\}_{s \geq r \geq r_0}$ on suora systeemi. Kun määritellään tekijähomomorfismi $f_r : Z^{r_0}_{p,q}/B^r_{p,q} \twoheadrightarrow Z^{r_0}_{p,q}/B^\infty_{p,q}$, niin lauseen 4.13 perusteella tämä määrittelee homomorfismin

$$\{f_r\} : \operatorname{dirlim} Z^{r_0}_{p,q}/B^r_{p,q} \to Z^{r_0}_{p,q}/B^\infty_{p,q} = E^\infty_{p,q}.$$

Osoitetaan, että $\{f_r\}$ on isomorfismi. Tällöin rajasivu voidaan määritellä suoran rajan perusteella.

Lemma 4.14. *Olkoot $B_1 \subset B_2 \subset ... \subset B_r \subset ... \subset A$ R-moduleita, $B' = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} B_r$, $j^s_r : A/B_r \twoheadrightarrow A/B_s$, $r \leq s$, suoran systeemin määrittelevät tekijähomomorfismit ja $f_r : A/B_r \twoheadrightarrow A/B'$ tekijähomomorfismi kaikilla $r \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\{f_r\} : \operatorname{dirlim} A/B_r \to A/B'$$

on isomorfismi.

Todistus. Olkoon $[x] \in A/B_r$ ja $\{f_r\} \circ \mathfrak{i}_r = f'_r \circ i_r([x]) = f_r([x]) = [x]' = 0$, missä

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}_r &: A/B_r \to \operatorname{dirlim} A/B_r, \\ i_r &: A/B_r \to \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} A/B_r, \\ f'_r &: \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} A/B_r \to A/B', \end{aligned}$$

ovat määritellyt samoin, kuten lauseessa 4.13. Tällöin $x \in B'$, joten on olemassa sellainen indeksi $r' \geq r$, että $x \in B_{r'}$. Nyt kuitenkin $0 = \mathfrak{i}_{r'} \circ j^{r'}_r([x]) = \mathfrak{i}_r([x])$, kun $r \leq r'$, eli $\{f_r\}$ on injektio. Homomorfismi $\{f_r\}$ on myös surjektiivinen, sillä jos $[x]' \in A/B'$, niin $\{f_r\} \circ \mathfrak{i}_r[x] = [x]'$ kaikilla $r \in \mathbb{N}$. $\square$

Spektraalijonoja voidaan tarkastella myös suhteessa toisiinsa erityisesti uuden rajasivun määritelmän kannalta. Kuten aiemmin todettiin, suppeneminen tekee spektraalijonon käyttämisestä järkevää, joten jonojen suppeneminen on tällöin oleellinen oletus. Seuraavaa määritelmää tarvitaan erityisesti luvussa 5.

Määritelmä 4.15. ([16] määritelmä 15.56.) Olkoot $(C^r, d^r)_{r\geq 1}$ ja $(E^r, \partial^r)_{r\geq 1}$ suppenevia spektraalijonoja ja $(F^p_{p+q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$, $(G^p_{p+q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ niiden suppenemisen määritteleviä suodatuksia niin, että molemmat ovat joko kasvavia tai väheneviä suodatuksia. **Spektraalijonokuvaus** on perhe kuvauksia $f^r_{p,q} : C^r_{p,q} \to E^r_{p,q}$ ja $f_{p,p+q} : F^p_{p+q} \to G^p_{p+q}$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$ ja $r \in \mathbb{N}$:

i) $\partial^r \circ f^r_{p,q} = f^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r$.

ii) Merkitään $H(C^r_{p,q}) = \ker(d^r)/\operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1})$ ja vastaavasti $H(E^r_{p,q})$. Kaavio

$$\begin{tikzcd} C^{r+1}_{p,q} \arrow[r, "f^{r+1}_{p,q}"] \arrow[d, "\cong"'] & E^{r+1}_{p,q} \arrow[d, "\cong"] \\ H(C^r_{p,q}) \arrow[r, "(f^r_{p,q})_*"'] & H(E^r_{p,q}) \end{tikzcd}$$

kommutoi.

iii) Kaavio

$$\begin{tikzcd} C^\infty_{p,q} \arrow[r, "f^\infty_{p,q}"] \arrow[d, "\cong"'] & E^\infty_{p,q} \arrow[d, "\cong"] \\ \operatorname{dirlim}_r C^r_{p,q} \arrow[r, "\operatorname{dirlim} f^r_{p,q}"] & \operatorname{dirlim}_r E^r_{p,q} \end{tikzcd}$$

kommutoi.

iv) Kaavio

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F^{p-1}_{p+q} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1,p+q}"] & F^p_{p+q} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_{p,p+q}"] & C^\infty_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "f^\infty_{p,q}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G^{p-1}_{p+q} \arrow[r] & G^p_{p+q} \arrow[r, two heads] & E^\infty_{p,q} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutoi, kun suodatukset ovat kasvavia, ja kaavio

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^{p+1}_{p+q} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p+1,p+q}"] & F^{p}_{p+q} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_{p,p+q}"] & C^{\infty}_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "f^{\infty}_{p,q}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G^{p+1}_{p+q} \arrow[r] & G^{p}_{p+q} \arrow[r, two heads] & E^{\infty}_{p,q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutoi, kun suodatukset ovat väheneviä. Molemmissa kaavioissa vaakasuorat homomorfismit on määritelty kuten sivulla 35.

4.2 Spektraalijonon määrittely avaruuden suodatuksen avulla

Algebrallisessa mielessä spektraalijonojen määrittelemiseen liittyi algebrallisen rakenteen suodattaminen kahdella tavalla. Ei siksi liene yllättävää, että topologisen avaruuden *suodatus* liittyy oleellisesti homologia- ja kohomologiamoduleihin liittyvän spektraalijonon muodostamiseen.

Määritelmä 4.16. Olkoon X topologinen avaruus. Avaruuden X **suodatus** on sellainen jono $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avaruuden X aliavaruuksia, että

i) $X_n = \varnothing$, kun $n < 0$,

ii) $X_n \subset X_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$,

iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$.

Toinen tärkeä elementti spektraalijonon muodostamisessa on kolmikoiden eksakti jono

$$\cdots \to H^n(X,B;G) \overset{(1)}{\to} H^n(X,A;G) \overset{(2)}{\to} H^n(B,A;G) \overset{\Delta}{\to} H^{n+1}(X,B;G) \to \cdots \tag{4.17}$$

missä $A \subset B \subset X$ ovat topologisia avaruuksia, kuvaukset (1) ja (2) ovat inkluusioiden indusoimia: viitataan niihin jatkossa yksinkertaisesti jonon *ensimmäisenä* ja *toisena inkluusiona*. Lisäksi $\Delta = \delta \circ \iota^*$, missä ι^* on inkluusion indusoima homomorfismi $\iota^* : H^n(B,A;G) \to H^n(B;G)$ ja $\delta : H^n(B;G) \to H^{n+1}(X,B;G)$ on parin (X,B) kohomologiajonon yhdistävä homomorfismi.

$$\cdots \to H^n(X,B;G) \overset{(1)}{\to} H^n(X;G) \overset{(2)}{\to} H^n(B;G), \overset{\delta}{\to} H^{n+1}(X,B;G) \to \cdots \tag{4.18}$$

Rakenteesta G oletetaan, että se on Abelin ryhmä. Jos ryhmä G on lisäksi vaihdannainen rengas, kyseiset modulit ovat G-moduleja, muussa tapauksessa $\mathbb{Z}$-moduleja. Kun jatkossakin kirjoitetaan $H^k(-;G)$, tulkitaan kohomologiamodulin rakenne samoin ryhmän G ominaisuuksien mukaisesti.

Oletetaan seuraavaksi, että topologiselle avaruudelle X on olemassa määritelmän 4.16 mukainen suodatus $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ ja aloitetaan spektraalijonon muodostaminen määrittelemällä seuraavat modulit:

$$\begin{aligned}
Z_r^{p,q} &= \ker(\Delta),\ \Delta : H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \to H^{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p; G),\\
B_r^{p,q} &= \ker(j^*),\ j^* : H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \to H^{p+q}(X_p, X_{p-r}; G)\\
Z_\infty^{p,q} &= \ker(\Delta'),\ \Delta' : H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \to H^{p+q+1}(X, X_p; G),\\
B_\infty^{p,q} &= \ker(k^*),\ k^* : H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \to H^{p+q}(X_p; G),\\
F^{p,q} &= \ker(i_*),\ i^* : H^{p+q}(X; G) \to H^{p+q}(X_{p-1}; G),
\end{aligned}$$

missä kuvaus Δ on kolmikon $(X_{p+r-1}, X_p, X_{p-1})$ määräämän eksaktin jonon yhdistävä homomorfismi, ja vastaavasti Δ' yhdistävä homomorfismi kolmikolle (X, X_p, X_{p-1}). Tällöin $\Delta = \delta \circ \iota^*$, missä on inkluusion indusoima homomorfismi $\iota^* : H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \to H^{p+q}(X_p; G)$ ja $\delta : H^{p+q}(X_p; G) \to H^{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p; G)$ on parin (X_{p+r-1}, X_p) kohomologiajonon yhdistävä homomorfismi. Inkluusiokuvausten indusoimat homomorfismit j^*, k^* ja i^* ovat kaikki eksaktien jonojen ensimmäisiä inkluusioita.

Lause 4.19. *Modulit $B_r^{p,q}$, $Z_r^{p,q}$, $B_\infty^{p,q}$ ja $Z_\infty^{p,q}$ ovat kohomologiamodulin $H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G)$ alimoduleja ja ne ovat toistensa alimoduleja seuraavasti:*

$$\begin{aligned}
0 = B_1^{p,q} &\subset B_2^{p,q} \subset \ldots \subset B_r^{p,q} \subset B_{r+1}^{p,q} \subset \ldots \subset B_\infty^{p,q}\\
&\subset Z_\infty^{p,q} \subset \ldots \subset Z_{r+1}^{p,q} \subset Z_r^{p,q} \subset Z_1^{p,q}
\end{aligned}$$

kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Selvästi $B_1^{p,q} = 0$, koska j^* on tällöin isomorfismi, ja

$$Z_1^{p,q} = H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G),$$

sillä tällöin $H^{p+q+1}(X_p, X_p; G) = 0$. Kolmikoiden muodostamien eksaktien jonojen perusteella voidaan myös kirjoittaa jokaisella $r \geq 1$

$$Z_r^{p,q} = \ker(\Delta) = \operatorname{im}(\imath^*),\ \imath^* : H^{p+q}(X_{p+r-1}, X_{p-1}; G) \to H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G),$$

eli $\imath^*$ on jonon toinen inkluusio. Saadaan kaavio

$$\begin{tikzcd}
H^{p+q}(X_{p+r-1}, X_{p-1}; G) \arrow[dr, "\imath_1^*"] & \\
& H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \\
H^{p+q}(X_{p+r}, X_{p-1}; G) \arrow[uu, "l^*"] \arrow[ur, "\imath_2^*"] &
\end{tikzcd}$$

missä kaikki kuvaukset ovat inkluusioiden indusoimia homomorfismeja. Tällöin

$$Z_{r+1}^{p,q} = \mathrm{im}(\imath_2^*) = \mathrm{im}(\imath_1^* \circ l^*) \subset \mathrm{im}(\imath_1^*) = Z_r^{p,q}.$$

Samoin voidaan todistaa, että $Z_\infty^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$.
Inkluusio $B_\infty^{p,q} \subset Z_\infty^{p,q}$ seuraa siitä, että $\Delta' = \delta \circ k^*$, missä δ on parin (X, X_p) pitkän eksaktin jonon yhdistävä homomorfismi. Inkluusio $B_r^{p,q} \subset B_\infty^{p,q}$ on voimassa kaikilla $r \geq 1$, koska seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd}
& H^{p+q}(X_p, X_{p-r}; G) \arrow[dd, "l^*"] \\
H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \arrow[ur, "j^*"] \arrow[dr, "k^*"] & \\
& H^{p+q}(X_p; G)
\end{tikzcd}$$

Myös tässä kaikki kuvaukset ovat inkluusioiden indusoimia homomorfismeja. Se, että $B_{r+1}^{p,q} \subset B_r^{p,q}$ kaikilla $r \geq 1$, todistetaan täysin vastaavasti. $\square$

Osan 4.1 perusteella tällainen suodatus määrittelee spektraalijonon, mikäli lemman 4.6 ehto on voimassa. Osoitetaan lemman ehto voimassaolevaksi tässä tapauksessa.

Lemma 4.20. *Tekijämodulit $Z_r^{p,q}/Z_{r+1}^{p,q}$ ja $B_{r+1}^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1}$ ovat isomorfiset.*

Todistus. Käytetään taas kolmikoiden eksaktien jonojen perusteella seuraavaa määrittelyä:

$$\begin{aligned}
Z_r^{p,q} &= \ker(\Delta) = \mathrm{im}(\imath^*), \ \imath^* : H^{p+q}(X_{p+r-1}, X_{p-1}; G) \to H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G), \\
B_r^{p,q} &= \ker(j^*) = \mathrm{im}(\Delta^\star), \ \Delta^\star : H^{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-r}; G) \to H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G),
\end{aligned}$$

missä $\imath^*$ on eksaktin jonon toinen inkluusio ja $\Delta^\star$ kolmikon yhdistävä homomorfismi.

Tarkastellaan seuraavaa kommutoivaa kaaviota, jossa sekä vaakasuora että pystysuora rivi on osa eksaktia jonoa:

$$\begin{tikzcd}
 & H^{p+q}(X_{p+r}, X_{p-1}; G) \arrow[d, "\beta^*"] \arrow[dr, "i_1^*"] & \\
H^{p+q}(X_{p+r-1}, X_p; G) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[dr, "\Delta_1^\star"'] & H^{p+q}(X_{p+r-1}, X_{p-1}; G) \arrow[r, "i_2^*"] \arrow[d, "\Delta_2^\star"] & H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \\
 & H^{p+q+1}(X_{p+r}, X_{p+r-1}; G) &
\end{tikzcd} \tag{4.21}$$

jossa kuvauksia $\Delta_1^\star$ ja $\Delta_2^\star$ lukuunottamatta kaikki kuvaukset ovat inkluusioiden indusoimia homomorfismeja. Osoitetaan, että väitteen isomorfismi on kuvaus

$$h : Z_r^{p,q}/Z_{r+1}^{p,q} \to B_{r+1}^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1},\ [x] \to [\Delta_2^\star(a)], \quad \text{missä} \quad i_2^*(a) = x \in Z_r^{p,q}.$$

Tällainen a on aina olemassa kuvauksen määrittelyjoukon nojalla. Todetaan lisäksi, että h on hyvin määritelty. Jos $i_2^*(a) = x = i_2^*(b)$, niin $a - b \in \ker(i_2^*) = \mathrm{im}(\alpha^*)$. Tällöin $\Delta_2^\star(a-b) \in \mathrm{im}(\Delta_1^\star) = B_r^{p+r,q-r+1}$, eli $[\Delta_2^\star(a)] = [\Delta_2^\star(b)]$.

Pätee, että $\ker(h) = \{0\}$: olkoon $h([x]) = [\Delta_2^\star(a)]$. Jos $\Delta_2^\star(a) \in \mathrm{im}(\Delta_1^\star)$, eli $\Delta_1^\star(y) = \Delta_2^\star(a)$ jollakin $y \in H^{p+q}(X_{p+r-1}, X_p; G)$, niin $a - \alpha^*(y) \in \ker(\Delta_2^\star) = \mathrm{im}(\beta^*)$. Tällöin jollakin $c \in H^{p+q}(X_{p+r}, X_{p-1}; G)$

$$i_1^*(c) = i_2^* \circ \beta^*(c) = i_2^*(a - \alpha^*(y)) = i_2^*(a) = x.$$

Selvästi kyseinen kuvaus on myös surjektio, joten se on isomorfismi. □

Nyt voidaan määritellä spektraalijonon modulit $E^r_{p,q}$ seuraavasti:

$$E^r_{p,q} = Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}.$$

Lemman 4.20 isomorfismin avulla muodostetaan R-lineaarinen kuvaus $d^r : E^r \to E^r$, kuten lemmassa 4.6. Erityisesti tapauksessa $r = 1$ differentiaali on hyvin yksinkertainen. Tarkasteltaessa kaaviota (4.21) huomataan, että $H^{p+q}(X_{p+1-1}, X_p; G) = 0$, $i_{2*} = \mathrm{Id}^*$ on isomorfismi ja Δ_1^* nollakuvaus. Jos nyt tarkastellaan tämän kuvauksen avulla muodostettua differentiaalia

$$d^1_{p,q} : Z_1^{p,q}/\underbrace{B_1^{p,q}}_{=0} \to Z_1^{p,q}/Z_2^{p,q} \xrightarrow{h} B_2^{p+1,q}/\underbrace{B_1^{p+1,q}}_{=0} \to Z_1^{p+1,q}/\underbrace{B_1^{p+1,q}}_{=0}$$

ja kaaviota (4.21), niin huomataan, että $d_1 = \Delta_2^*$, sillä $Z_2^{p,q} \subset \ker(\Delta_2^*)$.

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan muodostetun spektraalijonon suppenemista. Luvussa 2 tarkasteltiin CW-kompleksien tilanteessa inkluusioiden $i : X^p \hookrightarrow X$ indusoimia homomorfismeja ja ehtoja sille, että ne ovat isomorfismeja. Osoitetut ehdot ovat sellaiset, että niiden perusteella spektraalijono suppenee mielekkäästi.

Lause 4.22. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että on olemassa sellainen indeksi n, että inkluusion $i : X_s \hookrightarrow X$ indusoima homomorfismi $i_* : H^k(X;G) \to H^k(X_s;G)$ on isomorfismi, kun $n \leq s$ ja $k \leq m$. Tällöin on olemassa sellainen indeksi r_0, että $Z^{r'}_{p,q} = Z^{\infty}_{p,q}$, kun $r' \geq r_0$ ja $p, q \in \mathbb{Z}$. Lisäksi kaikilla $r > p$ pätee $B^r_{p,q} = B^{\infty}_{p,q}$.*

Todistus. Olkoot $p, q \in \mathbb{Z}$ ja $m = p + q + 1$. Tällöin on sellainen indeksi n, että homomorfismi $i_* : H^k(X;G) \to H^k(X_s;G)$ on isomorfismi, kun $n \leq s$ ja $k \leq m$. Valitaan sellainen r_0, että $n \leq p + r_0 - 1$, ja oletetaan, että $r' \geq r_0$ Tarkastellaan seuraavaa kommutoivaa kaaviota, jossa rivit ovat parien eksakteja kohomologiajonoja (ja jossa kohomologiaryhmät ovat lyhennetyssä muodossa):

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{p+q}(X) \arrow[r, "j_1^*"] \arrow[d, "i^*", "\cong"'] & H^{p+q}(X_{p-1}) \arrow[r, "j_2^*"] \arrow[d, "\mathrm{Id}", "\cong"'] & H^{p+q+1}(X, X_{p-1}) \arrow[r, "\delta_1'"] \arrow[d, "l^*"] & H^{p+q+1}(X) \arrow[r, "j_1^*"] \arrow[d, "i^*", "\cong"'] & H^{p+q+1}(X_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}", "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{p+q}(X_{p+r'-1}) \arrow[r, "k_1^*"] & H^{p+q}(X_{p-1}) \arrow[r, "k_2^*"] & H^{p+q+1}(X_{p+r'-1}, X_{p-1}) \arrow[r, "\delta_2'"] & H^{p+q+1}(X_{p+r'-1}) \arrow[r, "k_1^*"] & H^{p+q+1}(X_{p-1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Koska $n \leq p + r_0 - 1 \leq p + r' - 1$, niin oletuksen nojalla i^* on isomorfismi. Tällöin viiden lemman nojalla $H^{p+q}(X_{p+r'-1}, X_{p-1}; G) \cong H^{p+q}(X, X_{p-1}; G)$, ja seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd}
H^{p+q}(X_{p+r'-1}, X_{p-1}; G) \arrow[dr, "\imath_1^*"] & \\
& H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) \\
H^{p+q}(X, X_{p-1}; G) \arrow[uu, "l^*", "\cong"'] \arrow[ur, "\imath_2^*"] &
\end{tikzcd}$$

missä i_1 ja i_2 ovat inkluusioiden indusoimia homomorfismeja. Koska nyt

$$\begin{aligned}
Z^{p,q}_r &= \ker(\Delta) = \mathrm{im}(\imath_1^*), \ \imath_1^* : H^{p+q}(X_{p+r-1}, X_{p-1}; G) \to H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G), \\
Z^{p,q}_\infty &= \ker(\Delta') = \mathrm{im}(\imath_2^*), \ \imath_2^* : H^{p+q}(X, X_{p-1}; G) \to H^{p+q}(X_p, X_{p-1}; G),
\end{aligned}$$

niin kaavion perusteella $Z^{p,q}_\infty = Z^{p,q}_{r'}$.
Olkoon toisaalta $r > p$. Tällöin

$$H^{p+q}(X_p, X_{p-r}; G) = H^{p+q}(X_p, \varnothing; G) = H^{p+q}(X_p; G),$$

eli määritelmän nojalla

$$B^r_{p,q} = \ker(j_*) = \ker(k_*) = B^\infty_{p,q}.$$

□

Seuraavan lauseen perusteella modulit $F^{p,q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ täyttävät vähenevän suodatuksen F^p_{p+q}, $p, q \in \mathbb{Z}$ määritelmän (4.9), ja muodostavat rajasivun kanssa isomorfisen 2-porrastetun modulin.

Lause 4.23. *Olkoot modulit $F^{p,q}$ kuten sivulla 40, eli*

$$F^{p,q} = \ker(i_*),\ i^* : H^{p+q}(X; G) \to H^{p+q}(X_{p-1}; G).$$

Seuraavat inkluusiot ovat voimassa kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$... \subset F^{p+1,q-1} \subset F^{p,q} \subset ...F^{1,p+q-1} \subset F^{0,p+q} = H^{p+q}(X).$$

Pätee myös, että $F^{p,q}/F^{p+1,q-1} \cong E^\infty_{p,q}$.

Todistus. Inkluusioketjun viimeinen yhtäsuuruus seuraa suoraan määritelmästä. Inkluusiot seuraavat seuraavasta kaaviosta, kuten edellisissä todistuksissa, jossa kaikki homomorfismit ovat inkluusioiden indusoimia ja $s_1 \leq s_2$:

$$\begin{tikzcd}
H^{p+q}(X;G) \arrow[dd, "\iota"] \arrow[dr, "i_{1*}"] & \\
& H^{p+q}(X_{s_2};G) \arrow[dl, "i_{2*}"] \\
H^{p+q}(X_{s_1};G) &
\end{tikzcd}$$

Väitteen isomorfismia varten tarkastellaan kommutoivaa kaaviota

$$\begin{tikzcd}
& H^{p+q-1}(X_{p-1};G) \arrow[d, "\delta_1"] \arrow[dr, "\delta_2"] & \\
H^{p+q}(X,X_p;G) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"] & H^{p+q}(X,X_{p-1};G) \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "i_*"] & H^{p+q}(X_p,X_{p-1};G) \\
& H^{p+q}(X;G) &
\end{tikzcd}$$

missä δ_1 ja δ_2 ovat parien (X_p, X_{p-1}), (X, X_{p-1}) kohomologiajonojen yhdistäviä homomorfismeja ja muut homomorfismit inkluusioiden indusoimia homomorfismeja, sillä

$$F^{p,q} = \mathrm{im}(i^*), \qquad Z_\infty^{p,q} = \mathrm{im}(k^*),$$
$$F^{p+1,q-1} = \mathrm{im}(\beta^*), \qquad B_\infty^{p,q} = \mathrm{im}(\delta_2).$$

Homomorfismi

$$f : Z_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q} \to F^{p,q}/F^{p+1,q-1},$$
$$[x] \to [i^*(a)], \text{ kun } k^*(a) = x \text{ jollakin } a \in H^{p+q}(X, X_{p-1}; G),$$

indusoi isomorfismin, kuten lemmassa 4.20. □

Suoraan modulin $Z_r^{p,q}$ määritelmästä nähdään kaikissa tapauksissa, että moduli on triviaali, kun $p < 0$ tai $q < -p$, ja sama pätee tätä vastaavalle tekijämodulille $E_r^{p,q}$ spektraalijonossa. Jos suodatettava avaruus on CW-kompleksi ja suodatus valitaan rankojen perusteella, niin tämän lisäksi moduli $Z_r^{p,q}$ on triviaali, kun $q < 0$, sillä $H^{p+q}(X^p, X^{p-1}; G) = 0$, kun $p + q < p$ (korollaari 2.9 ja lause 2.10). Spektraalijonon oleellisimmat modulit sijaitsevat tällöin hilan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ensimmäisessä neljänneksessä, ja siksi tällaista spektraalijonoa kutsutaan kirjallisuudessa usein *ensimmäisen neljänneksen spektraalijonoksi* [4].

Lukija on saattanut huomata, että tämän osan todistuksissa on sovellettu vain Eilenberg-Steenrodin aksioomia ja niiden suoria seurauksia. Siksi sama konstruktio on voimassa yleisemmin kohomologiateorioille tässä tutkielmassa käsitellyn singulaarisen kohomologiateorian lisäksi. Lauseen 4.22 ehdon voimassaolo tulee tällöin kuitenkin tarkistaa erikseen, kuten todetaan Hatcherin kirjan lisäluvun [3] sivun 537 huomautuksessa koskien ääretönulotteisia CW-komplekseja.

[4]eng. *first quadrant spectral sequence*

5 Leray-Hirschin lause

Luvussa 4 spektraalijonon motivointi jäi vielä viitteelliselle tasolle: jono järjestää kohomologiamoduleihin liittyvää informaatiota systemaattisella tavalla, mutta sen käyttötarkoituksia ja todistusteknistä käyttöä voi luvun perusteella vain aavistaa. Sen lisäksi, että Leray-Hirschin lause on tuloksena kiinnostava, lauseen todistus tässä luvussa havainnollistaa tyypillisiä spektraalijonon kanssa esiintyviä argumentteja. Todistuksen perusrakenne seuraa McClearyn kirjan [9] todistusta, mutta on sitä hieman yleisempi.

Luvun alkupuolella johdetaan Serre-jono, jonka ominaisuuksista myös Leray-Hirschin lause seuraa. Todistus seuraa Hatcherin kirjan lisäluvun [3] esitystä, jossa johdetaan homologinen Serre-jono.

5.1 Serre-jono

Tässä tutkielmassa esiteltävässä Serre-jonon todistuksessa sovelletaan *solukohomologiaa*, jonka keskeisimmät ominaisuudet on esitelty lyhyesti seuraavassa lauseessa.

Lause 5.1. *Olkoon X CW-kompleksi.*

i) Olkoon Δ parin (X^k, X^{k-1}) homologiajonon yhdistävä homomorfismi ja Δ' parin (X^{k+1}, X^k) kohomologiajonon yhdistävä homomorfismi. Olkoon i_* parin (X^{k-1}, X^{k-2}) homologiajonon ensimmäinen inkluusio ja vastaavasti i^* parin (X^k, X^{k-1}) kohomologiajonon toinen inkluusio. Tällöin homomorfismit

$$w_k^G : H_k(X^k, X^{k-1}; G) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(X^{k-1}; G) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}; G)$$
$$w_G^k : H^k(X^k, X^{k-1}; G) \xrightarrow{i^*} H^k(X^k; G) \xrightarrow{\Delta'} H^{k+1}(X^{k+1}, X^k; G)$$

määrittelevät ketjukompleksin. Merkitään kompleksin termejä

$$W_k(X; G) = H_k(X^k, X^{k-1}; G)$$

ja

$$W^k(X;G) = H^k(X^k, X^{k-1}; G).$$

ii) Edelliset homomorfismit määrittelevät ***soluhomologian***

$$H_k^C(X;G) := \ker(w_k^G)/\operatorname{im}(w_{k+1}^G)$$

ja vastaavasti ***solukohomologian***

$$H^k_C(X;G) := \ker(w^k_G)/\operatorname{im}(w^{k-1}_G).$$

iii) Pätee $W^k(X;G) = Hom(W_k(X;\mathbb{Z}), G)$ *ja* $w^k_G = Hom(w_k^{\mathbb{Z}}, G)$.

iv) Pätee $W_k(X;G) \cong \bigoplus_\alpha G$, *missä* α *on avaruuden* X k*-solujen joukon mahtavuus.*

v) Homomorfismeilla $w_k^{\mathbb{Z}}$ *on kaava*

$$w_k^{\mathbb{Z}}(a_\alpha^k) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} a_\beta^{k-1},$$

missä a_α^k *ja* a_β^{k-1} *ovat soluja* e_α^k *ja* e_β^{k-1} *vastaavien aliryhmien virittäjiä suorassa summassa* $\bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$ *ja* $\bigoplus_\beta \mathbb{Z}$ *(kuten kohdassa iv),* $e_\alpha^k \cap e_\beta^{k-1} \neq \varnothing$ *jokaisella* β *ja* $d_{\alpha\beta}$ *on kuvauksen* $q \circ \phi_{e_\alpha^k} \restriction S^{k-1} : S^{k-1} \to X^{k-1} \to S^{k-1}$ *aste. Tässä*

$$q : X^{k-1} \to X^{k-1}/(X^{k-1} \setminus e_\beta^{k-1}) \xrightarrow{\cong} S^{k-1}$$

on tekijäkuvaus, joka romauttaa aliavaruuden $X^{k-1} \setminus e_\beta^{k-1}$ *pisteeksi ja kuvaa kuvajoukon homeomorfisesti* $k-1$*-pallolle, ja* $\phi_{e_\alpha^k}$ *solun* e_α^k *karakteristinen kuvaus.*

vi) Pätee $H_k^C(X;G) \cong H_k(X;G)$ *ja* $H^k_C(X;G) \cong H^k(X;G)$.

Todistus. Kohdat *i)-ii)* seuraavat suoraan pitkistä eksakteista jonoista.
Kohta *iv)* seuraa siitä, että aliavaruus X^{k-1} on jonkin avoimen joukon $V \subset X^k$ vahva deformaatioretrakti. Tällöin

$$q_* : H_k(X^k, X^{k-1}; G) \to H_k(X^k/X^{k-1}, X^{k-1}/X^{k-1}; G)$$

on isomorfismi ([2] lause 2.22). Edelleen $(X^k/X^{k-1}, X^{k-1}/X^{k-1}) \cong (\bigvee_\alpha S_\alpha^k, s_0)$, missä merkinnällä $\bigvee$ tarkoitetaan kiilasummaa, joten

$$H_k(X^k, X^{k-1}; G) \cong \bigoplus_\alpha G.$$

Muiden väitteiden todistusten yksityiskohdat löytyvät useimmista algebrallisen topologian oppikirjoista, esimerkiksi [2] (s. 203 (*iii*),(*iv*), (*vi*), s. 140 (*v*), s. 139-140 (*vi*)). □

Lause 5.2. *(Serre.) Olkoon $p : E \to B$ suunnistuva fibraatio säikeenä $F = F_{b_0}$ ja B polkuyhtenäinen. Tällöin on olemassa sellainen kohomologiaryhmää $H^*(E;G)$ kohti suppeneva spektraalijono $(E^r, d^r)_{r\in\mathbb{N}}$, että*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F;G)).$$

Todistus. ([3], muokattu lauseen 5.3 todistuksen pohjalta.) Oletetaan aluksi, että B on CW-kompleksi. Valitaan tässä tapauksessa avaruuden E suodatukseksi

$$E_n = p^{-1}(B^n)$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Koska $\pi_k(B, B^n) = 0$ kaikilla $k \leq n$ korollaarin 2.9 nojalla, niin korollaarin 3.5 nojalla sama pätee myös parille (E, E_n). Tästä seuraa lauseen 2.10 nojalla, että myös $H^k(E, E_n) = 0$, kun $k \leq n$, ja edelleen eksaktien jonojen perusteella inkluusion $E_n \hookrightarrow E$ indusoima homomorfismi $i^* : H^k(E;G) \to H^k(E_n;G)$ on isomorfismi, kun $k \leq n-1$. Tällöin aliluvussa 4.2 määritelty spektraalijono suodatukselle $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ suppenee lauseen 4.22 perusteella, ja vielä kohti kohomologiaryhmää $H^*(E;G)$: lauseen 4.22 merkinnöin kun $m \in \mathbb{N}$, ehdon toteuttava indeksi n on $m+1$. Luvun 4.2 konstruktiossa nähtiin, että kyseessä olevan spektraalijonon ensimmäinen sivu koostuu ryhmistä $H^{p+q}(E_p, E_{p+1}; G)$. Tarvitsee siis todistaa seuraavat väitteet:

I) On olemassa isomorfismi

$$\mathrm{Hom}(H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}), H^q(F;G)) \cong H^{p+q}(E_p, E_{p-1}; G)$$

kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$, sillä

$$H^p(B^p, B^{p-1}; H^q(F;G)) \cong$$

$$\mathrm{Hom}(H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}), H^q(F;G)) \oplus \underbrace{\mathrm{Ext}(\overbrace{H_{p-1}(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z})}^{=0}, H^q(F;G))}_{=0}.$$

II) Kohdan I isomorfismi kuvaa homomorfismin

$$w^p : \mathrm{Hom}(H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}), H^q(F;G)) \to \mathrm{Hom}(H_{p+1}(B^{p+1}, B^p; \mathbb{Z}), H^q(F;G)),$$

kuten lauseen 5.1 kohdassa iii, kuvat differentiaalien

$$d_1^{p,q} : H^{p+q}(E_p, E_{p-1}; G) \to H^{p+q+1}(E_{p+1}, E_p; G)$$

kuville. Tällöin isomorfismi indusoi isomorfismin myös seuraavalla spektraalijonon sivulla. Lisäksi $H_C^p(B; H^q(F;G)) \cong H^p(B; H^q(F;G))$, mistä väitteen muotoilu seuraa.

Väite I. Jos e^p_α on CW-kompleksin B solu, jonka karakteristinen kuvaus on $\phi_{e^p_\alpha} : D^p \to e^p_\alpha \cup B^{p-1}$, niin kuvaus $f_\alpha := i \circ \phi_{e^p_\alpha} : D^p \to B^p$, missä $i : B^{p-q} \cup e^p_\alpha \to B^p$ on inkluusiokuvaus, määrittelee indusoidun fibraation

$$p^\alpha_\phi := p_{f_\alpha} : \mathscr{D}^p_\alpha \to D^p,$$

missä $\mathscr{D}^p_\alpha := E_{f_\alpha}$. Merkitään $\mathscr{S}^{p-1}_\alpha = \{(x,e) \in D^p \times E^p \mid \phi_{e^p}(x) = p(e), x \in S^{p-1}\}$. Muodostetaan seuraava kommutoiva kaavio, ja osoitetaan, että kohtiin $(a), (b)$ ja (c) määriteltävät kuvaukset ovat isomorfismeja: viittaamisen helpottamiseksi kaksi näistä on myös nimetty kaavioon suluissa. Tällöin on olemassa kaavion isomorfismi Ψ.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}), H^q(F;G)) \arrow[r, "\cong", "(b)"'] \arrow[d, dashed, "\Psi"] & \prod_\alpha H^q(F;G) \arrow[d, "(c)"', "(\prod_\alpha \varepsilon^p_\alpha)"] \\
H^{p+q}(E_p, E_{p-1}; G) \arrow[r, "(a)", "(\mathscr{F}^*)"'] & \prod_\alpha H^{p+q}(\mathscr{D}^p_\alpha, \mathscr{S}^{p-1}_\alpha; G)
\end{tikzcd}$$

(a) Merkitään projektiokuvausta $\mathscr{D}^p_\alpha \to E^p$, $(x,e) \mapsto e$ kirjaimella ℓ_α. Tällöin kuvaukset ℓ_α ovat muotoa $(\mathscr{D}^p_\alpha, \mathscr{S}^{p-1}_\alpha) \to (E_p, E_{p-1})$. Nämä kuvaukset indusoivat kuvauksen

$$\mathscr{F} := \{\ell_\alpha\} : \coprod_\alpha (\mathscr{D}^p_\alpha, \mathscr{S}^{p-1}_\alpha) \to (E_p, E_{p-1}),$$

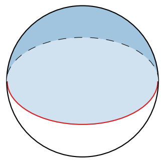
ja edelleen homomorfismin

$$\mathscr{F}^* : H^{p+q}(E_p, E_{p-1}; G) \to \prod_\alpha H^{p+q}(\mathscr{D}^p_\alpha, \mathscr{S}^{p-1}_\alpha; G).$$

CW-kompleksien perusominaisuuksien nojalla tiedetään, että CW-kompleksilla B^{p-1} on sellainen ympäristö $V \subset B^p$, että B^{p-1} on ympäristön V vahva deformaatioretrakti. Homotopian nosto-ominaisuudesta seuraa, että E_{p-1} on ympäristön $p^{-1}(V)$ deformaatioretrakti. Merkitään $\mathscr{V}_\alpha = p^{-1}(V \cap \mathrm{im}(i \circ \phi_{e^p_\alpha}))$, ja tarkastellaan seuraavaa kommutoivaa kaaviota (jossa kohomologiaryhmät ovat taas lyhennetyssä muodossa).

$$\begin{tikzcd}
H^*(\coprod_\alpha \mathscr{D}^p_\alpha, \coprod_\alpha \mathscr{S}^{p-1}_\alpha) & H^*(\coprod_\alpha \mathscr{D}^p_\alpha, \coprod_\alpha \mathscr{V}_\alpha) \arrow[l, "i_1"'] \arrow[r, "i_2"] & H^*(\coprod_\alpha \mathscr{D}^p_\alpha \setminus \coprod_\alpha \mathscr{S}^{p-1}_\alpha, \coprod_\alpha \mathscr{V}_\alpha \setminus \coprod_\alpha \mathscr{S}^{p-1}_\alpha) \\
H^*(E_p, E_{p-1}) \arrow[u, "\mathscr{F}^*"] & H^*(E_p, p^{-1}(V)) \arrow[l, "j_1"] \arrow[r, "j_2"'] \arrow[u, "\mathscr{F}^*"] & H^*(E_p \setminus E_{p-1}, p^{-1}(V) \setminus E_{p-1}) \arrow[u, "\mathscr{F}^*"]
\end{tikzcd}$$

Yllä i_1, i_2, j_1 ja j_2 ovat inkluusioiden indusoimia homomorfismeja ja homomorfismit $\mathscr{F}^*$ aina kyseisen rajoittumakuvauksen määräämiä.



Kuva 5.1: Kuulan D^3 jako. Sinisellä merkitty joukko (D^2_+) on homeomorfinen kuulan D^2 kanssa ja punaisella merkitty joukko (D^1_-) on homeomofinen kuulan D^1 kanssa.

Ensin huomataan, että i_2 ja j_2 ovat typistysaksiooman nojalla isomorfismeja. Kuvauksille $\mathscr{f}_\alpha$ pätee karakteristisen kuvauksen ominaisuuksien nojalla, että rajoittumakuvaukset $\mathscr{f}_\alpha \restriction (\mathscr{D}^p_\alpha \setminus \mathscr{S}^{p-1}_\alpha)$ ovat upotuksia, ja lisäksi $\mathscr{F}$ on surjektio. Tällöin kaaviossa oikeanpuoleinen $\mathscr{F}^*$ on isomorfismi, joten sama pätee kaavion perusteella keskimmäiselle homomorfismille $\mathscr{F}^*$. Homomorfismien i_1 ja j_1 bijektiivisyys perustuu kolmikoiden $(\coprod_\alpha \mathscr{D}^p_\alpha, \coprod_\alpha \mathscr{V}_\alpha, \coprod_\alpha \mathscr{S}^{p-1}_\alpha)$ ja $(E_p, p^{-1}(V), E_{p-1})$ pitkiin eksakteihin jonoihin, sillä

$$H^*(p^{-1}(V), E_{p-1}; G) = 0, \qquad H^*(\coprod_\alpha \mathscr{V}_\alpha, \coprod_\alpha \mathscr{S}^{p-1}_\alpha; G) = 0.$$

Siis myös vasemmanpuoleinen $\mathscr{F}^*$ on isomorfismi.

(b) Tämä seuraa lauseen 5.1 kohdasta *iv)*.

(c) Merkitään n-pallon kahta (suljettua) puoliskoa $D^n_{\alpha,+}$ ja $D^n_{\alpha,-}$, sekä

$$\mathscr{D}^n_{\alpha,+} = \{(x,e) \in D^p \times E^p \mid n \leq p, \phi_{e^p_\alpha}(x) = p(e), x \in D^n_{\alpha,+}\},$$
$$\mathscr{D}^n_{\alpha,-} = \{(x,e) \in D^p \times E^p \mid n \leq p, \phi_{e^p_\alpha}(x) = p(e), x \in D^n_{\alpha,-}\}.$$

Määritelmässä $D^n_{\alpha,+}$ hahmotetaan aina avaruuden D^p aliavaruutena leikkaamalla induktiivisesti ensin avaruutta D^p ja seuraavilla askeleilla osajoukkoja $D^k_{\alpha,+}$ avaruuden $\mathbb{R}^p$ puolitasoilla: tätä on havainnollistettu kuvassa 5.1.

Tarkastellaan yksittäistä fibraatiota $p^\alpha_\phi : \mathscr{D}^p_\alpha \to D^p$ ja oheista kaaviota:

$$\begin{tikzcd}
H^{p+q}(\mathscr{D}^p_\alpha, \mathscr{S}^{p-1}_\alpha) & H^{p+q-1}(\mathscr{D}^{p-1}_{\alpha,+}, \mathscr{S}^{p-2}_\alpha) \arrow[l, dashed, "\epsilon"'] & \cdots \arrow[l, dashed, "\epsilon"'] & H^{q+1}(\mathscr{D}^1_{\alpha,+}, \mathscr{S}^0_\alpha) \arrow[l, dashed, "\epsilon"'] & H^q(\mathscr{D}^0_{\alpha,+}) \arrow[l, dashed, "\epsilon"'] \\
& H^{p+q-1}(\mathscr{S}^{p-1}_\alpha, \mathscr{D}^{p-1}_{\alpha,-}) \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[u, "i^*"] & \cdots \arrow[ul] & H^{q+2}(\mathscr{S}^1_\alpha, \mathscr{D}^1_{\alpha,-}) \arrow[ul] \arrow[u, "i^*"] & H^q(\mathscr{S}^0_\alpha, \mathscr{D}^0_{\alpha,-}) \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[u, "i^*"]
\end{tikzcd} \tag{5.3}$$

missä homomorfismit i^* ovat inkluusioiden indusoimia ja homomorfismit Δ kolmikoiden $(\mathscr{D}^n_\alpha, \mathscr{S}^{n-1}_\alpha, \mathscr{D}^{n-1}_{\alpha,-})$ pitkien eksaktien jonojen yhdistäviä homomorfismeja. Taas huomataan, että homomorfismit i^* ovat isomorfismeja typistysaksiooman nojalla. Toisaalta aina $D^{n-1}_{\alpha,-}$ on kuulan D^n_α deformaatioretrakti, joten homotopian nosto-ominaisuudella sama pätee parille $(\mathscr{D}^n_\alpha, \mathscr{D}^{n-1}_{\alpha,-})$. Tällöin

$H^k(\mathscr{D}^n_\alpha, \mathscr{D}^n_{\alpha,-}) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, ja Δ on isomorfismi. Tällöin saadaan kaavion isomorfismit ϵ, ja lisäksi

$$H^q(\mathscr{D}^0_{\alpha,+}) \overset{\epsilon \circ \cdots \circ \epsilon}{\cong} H^{p+q}(\mathscr{D}^p_\alpha, \mathscr{S}^{p-1}_\alpha).$$

Edelleen huomataan, että $\mathscr{D}^0_{\alpha,+}$ on fibraation p^α_ϕ säie, joka on homeomorfinen fibraation p jonkin säikeen $\ell_\alpha(\mathscr{D}^0_{\alpha,+}) = F_\alpha \subset E$ kanssa, joten

$$H^q(F_\alpha) \overset{(\ell'_\alpha)^*}{\cong} H^q(\mathscr{D}^0_{\alpha,+}),$$

missä ℓ'_α on kuvauksen ℓ_α rajoittuma. Lisäksi lauseen 3.13 mukainen homotopiaekvivalenssi säikeiden F ja F_α välillä on yksikäsitteinen: jos $\gamma_1, \gamma_2 : I \to B$ ovat sellaisia polkuja, että $\gamma_1(0) = b_0 = \gamma_2(1)$ ja $\gamma_1(1) = p(F_\alpha) = \gamma_2(0)$, niin suunnistuvuuden nojalla

$$\theta(\gamma_1 * \gamma_2, \sigma) = (g_{\gamma_2} \circ g_{\gamma_1})^*(\sigma) = (\mathrm{Id})^*(\sigma),$$

missä θ on määritelmän 3.11 kohdan ii kuvaus.

Lisäksi $g_{\gamma_1}, g_{\gamma_2}$ ovat riippumattomia polkujen valinnasta. Tällöin

$$H^q(F) \overset{(\ell'_\alpha)^* \circ (g_{\gamma_2})^*}{\cong} H^q(\mathscr{D}^0_{\alpha,+}).$$

Siis $\varepsilon^p_\alpha := \epsilon \circ \cdots \circ \epsilon \circ (g_{\gamma_2})^* \circ (\ell''_\alpha)^*$ on isomorfismi jokaisella p, α, missä ℓ''_α on kuvauksen ℓ'_α käänteiskuvaus. Niinpä $\coprod_\alpha \varepsilon^p_\alpha : \coprod_\alpha H^q(F;G) \to H^{p+q}(\mathscr{D}^p_\alpha, \mathscr{S}^{p-1}_\alpha; G)$ on isomorfismi.

Väite II. Edellisen väitteen isomorfismien perusteella saadaan seuraava kaavio, josta tavoitteena on todistaa etummaisen tahkon kommutoivuus.

$$\begin{tikzcd}
\prod_\alpha H^q(F) \arrow[rr, dashed, red] \arrow[dd] \arrow[dddr, dashed, blue] & & \prod_\beta H^q(F) \arrow[dd] \arrow[dddr, dashed, blue] & \\
& \mathrm{Hom}(H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}), H^q(F;G)) \arrow[ul] \arrow[dd] \arrow[rr, dashed, "w^p"] & & \mathrm{Hom}(H_{p+1}(B^p, B^{p-1}; G), H^q(F;G)) \arrow[ul] \arrow[dd] \\
\prod_\alpha H^{p+q}(\mathscr{D}^p_\alpha, \mathscr{S}^{p-1}_\alpha) & & \prod_\beta H^{p+q-1}(\mathscr{D}^{p+1}_\beta, \mathscr{S}^p_\beta) & \\
& H^{p+q}(E_p, E_{p-1}; G) \arrow[ul] \arrow[rr, dashed, blue, "d_1^{p,q}"] & & H^{p+q+1}(E_{p+1}, E_p; G) \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Tehdään tämä tarkastamalla, että kuvaan merkitty punainen homomorfismi on yksikäsitteisesti määritelty, muodostettiinpa se yhdistämällä kuution ylätahkon kolme etummaista homomorfismia tai kuution halki merkityt siniset homomorfismit keskenään. Sivutahkojen homomorfismit on kuvassa merkitty samassa suunnassa kuin väitteessä I, mutta koska ne ovat kaikki isomorfismeja, niin kulkusuuntaa voidaan vaihtaa.

Tarkastellaan ensin yksittäisten tulon komponenttien kuvautumista.

Ylätahkon kuvausten tapausta varten muistetaan lauseesta 5.1, että jos h on homomorfismi $h : H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}) \to H^q(F; G)$, niin $h \in W^p(B; H^q(F; G))$ (kohta iii). Lisäksi

$$w^p(h)(e_\beta^{p+1}) = h(\sum_\alpha d_{\beta\alpha} e_\alpha^p) = \sum_\alpha d_{\beta\alpha} h(e_\alpha^p),$$

missä e_β^{p+1} on yksi homologiaryhmän $H_{p+1}(B^{p+1}, B^p; \mathbb{Z})$ virittäjistä suorassa summassa $\bigoplus_\beta \mathbb{Z}$, ja samalla tavalla alkiot e_α^p ovat homologiaryhmän $H_p(B^p, B^{p-1})$ virittäjiä. Siten indeksiä α vastaava $[\mu] \in H^q(F; G)$ tulossa $\prod_\alpha H^q(F)$ kuvautuu seuraavissa vaiheissa:

1) $[\mu] \mapsto M$, missä $M : H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}) \to H^q(F; G)$,

$$\begin{cases} a_\alpha^p \mapsto [\mu], \\ a_{\alpha'}^p \mapsto 0, \quad \text{kun } \alpha' \neq \alpha. \end{cases}$$

2) $M \mapsto M_\partial$, missä $M_\partial : H_{p+1}(B^{p+1}, B^p; \mathbb{Z}) \to H^q(F; G)$,

$$a_\beta^{p+1} \mapsto \sum_\alpha d_{\beta\alpha} M(a_\alpha^p) = \begin{cases} d_{\beta\alpha}[\mu], \quad \text{kun } e_\beta^{p+1} \cap e_\alpha \neq \varnothing \\ 0, \ \text{muuten.} \end{cases}$$

3) $M_\partial \mapsto ([\sigma_\beta])_\beta$, missä

$$[\sigma_\beta] = \begin{cases} d_{\beta\alpha}[\mu], \quad \text{kun } e_\beta^{p+1} \cap e_\alpha \neq \varnothing, \\ 0, \quad \text{muuten.} \end{cases}$$

Tarkastellaan sitten toista vaihtoehtoa. Sivulla 42 todettiin, että ensimmäisen sivun differentiaalit ovat muotoa

$$\Delta_2^* : H^{p+q}(E_p, E_{p-1}; G) \xrightarrow{\iota^*} H^{p+q}(E_p; G) \xrightarrow{\delta} H^{p+q+1}(E_{p+1}, E_p; G),$$

missä ι^* on inkluusion indusoima ja δ parin (E_{p+1}, E_p) määrittelemän eksaktin jonon yhdistävä homomorfismi. Tarkastellaan seuraavaa kaaviota, jossa alimman rivin homomorfismien yhdistetty homomorfismi yhdistettynä oikeanpuoleiseen pystysuoraan homomorfismiin vastaa kaaviossa (5.4) differentiaalin ja alimman oikeanpuoleisen homomorfismin yhdistetyn homomorfismin projektiota.

$$\begin{tikzcd}
H^{p+q}(\mathscr{S}_\beta^p, \mathscr{D}_\beta^p) \arrow[r] & H^{p+q}(\mathscr{S}_\beta^p) \arrow[r, "\delta'"] & H^{p+q+1}(\mathscr{D}_\beta^{p+1}, \mathscr{S}_\beta^p) \\
H^{p+q}(E_p, E_{p-1}) \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[u, dashed, "\mathfrak{f}_\beta^*"] & H^{p+q}(E_p) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathfrak{f}_\beta^*"] & H^{p+q+1}(E_{p+1}, E_p) \arrow[u, "\mathscr{f}_\beta^*"]
\end{tikzcd} \tag{5.5}$$

Yllä δ' on parin $(\mathscr{D}_\beta^{p+1}, \mathscr{S}_\beta^p)$ kohomologiajonon yhdistävä homomorfismi. Seuraavaksi tavoitteena on muokata kuvausta $\mathscr{f}_\beta$ niin, että sen indusoima homomorfismi muuttuu myöhempiä vaiheita varten riittävän vähän. Käytetään muokatusta kuvauksesta merkintää $\mathfrak{f}_\beta$. Kaavion keskimmäisen kuvauksen tapauksessa tämä tarkoittaa vain kuvauksen $\mathscr{f}_\beta$ rajoittamista joukkoon $\mathscr{S}_\beta^p$ ja maalijoukon rajaamista joukkoon E_p.

Kaaviossa (5.5) oikeanpuoleinen neliö kommutoi. Jotta saataisiin vasen neliö kommutoivaksi, voidaan kuvauksen $\mathfrak{f}_\beta$ tilalla käyttää mitä tahansa muuta homotooppista kuvausta, jonka määrittelemä homomorfismi säilyy samana. Toisaalta homotopian nosto-ominaisuuden perusteella $f_\beta : D^p \to B^p$ voidaan suoraan korvata homotooppisella kuvauksella. Oletetaan, että D_β^p on pallon S_β^p puolikas, ja vastaavasti kaaviossa $\mathscr{D}_\beta^p$ ja $\mathscr{S}_\beta^p$ on määritelty näiden joukkojen perusteella. Tällöin kuvaus f_β on homotooppinen sellaisen kuvauksen kanssa, joka kuvaa puolipallon D_β^p avaruuden B $p-1$-rangalle. Nostamalla tämä homotopia saadaan kaavion (5.5) vasemmanpuoleinen kuvaus.

Jatketaan kaaviota (5.5) edelleen vasemmalle. Seuraavan kaavion oikeanpuoleinen $\mathfrak{f}_\beta^*$ vastaa kaavion (5.5) vasemmanpuoleista homomorfismia, ainoastaan lähtö- ja maalijoukkoja on rajoitettu.

$$\begin{tikzcd}
\prod_i H^{p+q}(\mathscr{D}_i^p, \mathscr{S}_i^{p-1}) \arrow[r, "\cong"] & H^{p+q}(\mathscr{D}_\beta^p, \mathscr{D}_\beta^p \setminus (\bigcup_i \mathring{\mathscr{D}}_i^p)) \arrow[r] & H^{p+q}(\mathscr{D}_\beta^p, \mathscr{S}_\beta^{p-1}) \arrow[r] & \cdots \\
H^{p+q}(\mathscr{D}_\alpha^p, \mathscr{S}_\alpha^{p-1}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, dashed] & H^{p+q}(E_p, E_p \setminus \mathscr{e}_\alpha^p) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\mathfrak{f}_\beta^*"] & H^{p+q}(E_p, E_{p-1}) \arrow[r] \arrow[u, "\mathfrak{f}_\beta^*"] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{5.6}$$

Keskimmäistä homomorfismia varten voidaan soveltaa lemmaa 2.7. Väitteen II todistuksen alkupuolen astetarkastelun mielessä voidaan olettaa, että f_β kuvautuu surjektiivisesti jollekin solulle e_α^p, sillä muutoin $d_{\beta\alpha} = 0$ kaikilla α ja toisaalta f_β on homotooppinen sellaisen kuvauksen f'_β kanssa, joka ei kohtaa solua e^p_α. Määritellään indeksijoiukko I siten, että $i \in I$ täsmälleen silloin, kun $f_\beta(D^p) \cap e^p_i \neq \varnothing$. Tällöin kuvaus $f_\beta : D^p \to B^{p-1} \cup (\bigcup_{i\in I} e^p_i)$ täyttää lemman 2.7 ehdot solun e^p_α osalta, joten on olemassa kuvauksen f_β kanssa homotooppinen kuvaus f'_β sekä p-monikulmio K, jonka f'_β kuvaa solulle e^p_α. Kun tarkastellaan niitä monikulmion K p-simpleksejä, jotka sisältyvät lemmassa määritellyn avoimen joukon $U \subset e^p_\beta$ alkukuvaan, on näiden simpleksien joukossa soluun e^p_β uppoavia simpleksejä. Valitaan näistä uppoavista simplekseistä sellaiset, joiden kuvien keskinäiseen leikkaukseen sisältyy jokin avoin kuula V, johon simpleksien reunat eivät kuvaudu: tällöin saadaan upotusten kautta määriteltyä joukkoon D^p erilliset kuulat D^p_i, jotka kuvautuvat homeomorfisesti suljetulle kuulalle $\overline{V}$. Lopuksi jäljelle jäävä kuvajoukko joukossa $e^p_\beta \setminus \overline{V}$ voidaan kutistaa solun reunoille. Näin saadaan homotopian noston kautta haluttu kuvaus, joka määrittelee myös vasemman pystysuoran homomorfismin.

Alkuperäistä tavoitetta ajatellen samastetaan nyt osa kaavioiden (5.5) ja (5.6) ryhmistä. Ensin huomataan, että jatketun kaavion (ks. liite A, kuva A.2) ylärivin neljä oikeanpuoleista ryhmää ja niiden väliset homomorfismit muodostavat kaaviossa (5.4) takana oikealla olevan pystysuoran isomorfismin ensimmäisen homomorfismin ε, ja tätä samastusta voidaan jatkaa edelleen ryhmään $H^q(F)$ saakka (kuva A.1). Vastaavalla tavalla voidaan samastaa vasemmanpuoleiset ryhmät. Näiden samastusten seurauksena jatkettu kaavio halkaisee kaavion (5.4) samalla tavoin kuin siniset homomorfismit.

Seuraavaksi huomataan, että samastusten jälkeen kaavion (5.6) ylimmän rivin yhdistetty homomorfismi on summa $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 + ... + x_n$. Riittää osoittaa, että kaavion (5.6) vasemmanpuoleisen homomorfismin rajoittuma tulon komponenttiin i on Id tai $-\,$Id sen perusteella, onko kuvauksen f'_β aste 1 vai -1, kun rajoitutaan joukkoon D^p_i: tässä voidaan tarkastella kuvausta, joka kuvaa kiekon reunat vielä solulle e^p_α. Tällöin asteiden summa on $d_{\beta\alpha}$ ([2] lause 2.30), kuten aiemmassa tarkastelussa nähtiin.

Tarkastellaan siis kuvausta $f'_\beta : (D^p_i, S^{p-1}_i) \to (D^p_\alpha, S^{p-1}_\alpha)$, jonka nosto määrää nyt tutkittavan homomorfismin rajoittuman. Tarvitsee siis osoittaa, että seuraava kaavio kommutoi, kun aste on 1, ja kun aste on -1, kaavio kommutoi merkkiä vaille:

$$\begin{array}{ccc}
H^{p+q}(\mathscr{D}^p_\alpha, \mathscr{S}^{p-1}_\alpha) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^*_\beta} & H^{p+q}(\mathscr{D}^p_i, \mathscr{S}^{p-1}_i) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\cdots & & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{q+1}(\mathscr{D}^1_{\alpha,+}) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^*_{\beta,1}} & H^{q+1}(\mathscr{D}^1_{i,\pm}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^q(\mathscr{D}^0_{\alpha,+}) & \xrightarrow{\mathfrak{f}^*_{\beta,0}} & H^q(\mathscr{D}^0_{i,\pm}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^q(F_\alpha) & \dashrightarrow & H^q(F_i) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^q(F) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & H^q(F)
\end{array} \tag{5.7}$$

Kaavion (5.7) homomorfismit ovat siis kaavion (5.6) vasemmanpuoleisen homomorfismin määräämiä. Asteesta riippuen kuvaus f'_β voidaan tulkita joko identiteettikuvaukseksi tai peilaukseksi, joka kuvaa kiekon $D^0_{i,\pm}$ kiekolle $D^0_{\alpha,\mp}$ ja lisäksi kuvaa joka toisen kiekon $D^{p-r}_{i,\pm}$ itselleen, sillä kyseessä on homotopiaa vaille sama kuvaus. [1]
Identiteettikuvauksen tapauksessa jokaisella askeleella kaaviossa (5.3) esiintyvien homomorfismien δ ja i^* luonnollisuuden perusteella riittää tarkastella kaavion (5.7) alimman neliön kommutoivuutta. Todetaan, että läpi todistuksen kuvausta f_β on muokattu korvaamalla se aina jollakin homotooppisella kuvauksella, ja on siis olemassa jokin homotopia $H : D^p \times I \to B$ alkuperäisen kuvauksen f_β ja viimeisimmän kuvauksen f'_β välillä. Tälle saadaan nosto $H' : \mathscr{D}^p \times I \to E$. Kun määritellään, että $f_\beta(y) = b_i = p(F_i)$, missä F_i on kuten kaaviossa (5.7), niin $H \restriction \{y\} \times I$ määrittelee polun, jonka nosto on homotopian H' rajoittuma. Tällöin kaaviossa katkoviivalla merkitty homomorfismi vastaa itse asiassa erästä kuvausta $\mathscr{g}^*_\gamma$, eli se on hyväksyttävä, ja ryhmän $\pi_1(B, b_0)$ toiminnan triviaaliuden perusteella alin homomorfismi on identiteettikuvaus.

Jos taas kyseessä on peilaus, niin jälleen homomorfismien δ ja i^* luonnollisuuden perusteella voidaan tarkastella homomorfismin $\mathfrak{f}^*_{\beta,1}$ ja identiteettikuvauksen rajoittaman neliön kommutoivuutta. Mikäli homomorfismin ε^p määritelmässä ryhmän $H^q(\mathscr{D}^0_+)$ korvaaminen ryhmällä $H^q(\mathscr{D}^0_-)$ vaihtaisi homomorfismin merkin, olisi väite todistet-

[1]Jos D^p_i on standardikiekko ja $D^0_{i,\pm} = (1, 0, ..., 0)$, niin voidaan valita kuvaus $(x_1, ..., x_p) \mapsto (-x_1, x_2, -x_3, ..., \pm x_p)$ riippuen dimension p parillisuudesta. Kun peilattavia komponentteja on pariton määrä, myös kuvauksen aste on -1, ja muuten 1. Sama pätee myös kuvauksen rajoittumiin.

tu. Perustellaan tämä tarkastelemalla seuraavaa eksaktin jonon osaa:

$$\underbrace{H^q(\mathscr{D}^1,\mathscr{S}^0)}_{(0)} \overset{j^*}{\to} H^q(\mathscr{D}^1) \overset{i^*}{\to} H^q(\mathscr{S}^0) \overset{\delta}{\to} H^{q+1}(\mathscr{D}^1,\mathscr{S}^0) \overset{j^*}{\to} \underbrace{H^{q+1}(\mathscr{D}^1)}_{(0)}$$

Homomorfismin j^* voidaan todeta olevan triviaali, sillä $j:(\mathscr{D}^1,\varnothing)\to(\mathscr{D}^1,\mathscr{S}^0)$ on homotooppinen sellaisen kuvauksen kanssa, jonka kuvajoukko sisältyy joukkoon $\mathscr{S}^0$. Tällöin j^* on injektio ja δ surjektio, joten jono muuntuu lyhyeksi eksaktiksi jonoksi. Lisäksi kuvaus $i_\pm:\mathscr{D}^0_\pm\to\mathscr{D}^1$ on homotopiaekvivalenssi, joten sen indusoima homomorfismi on isomorfismi, ja tällöin $H^q(\mathscr{S}^0)\cong H^q(\mathscr{D}^1)\oplus H^q(\mathscr{D}^1)$. Tällöin i^* on diagonaalikuvaus $x\mapsto(x,x)$, ja siten kuvaukselle δ on voimassa

$$\delta(x,x)=0 \;\Leftrightarrow\; \delta(x,0)=-\delta(0,x),$$

mikä todistaa väitteen.

Vielä voidaan todeta, että kaavion 5.4 halkaiseva homomorfismi määräytyy komponenttikuvausten perusteella. Tämä seuraa siitä, että jokainen solu e^p_β kohtaa vain äärellisen määrän soluja e^{p-1}_α, joten homomorfismin projektio komponentille β muodostuu indeksejä α vastaavien homomorfismin rajoittumien summasta. Tämä varmistaa, että homomorfismit ovat todella samat.

Jos B ei ole CW-kompleksi, voidaan sille muodostaa CW-approksimaatio $f:B'\to B$. Olkoon $F'_{b_0}=p_f^{-1}(x_0)$, missä $f(x_0)=p(b_0)$. Tarkastelemalla seuraavaa pitkien eksaktien jonojen muodostamaa kommutoivaa kaaviota

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots\to & \pi_{k+1}(B';b'_0) & \to & \pi_k(F'_{b_0};e'_0) & \overset{i_*}{\to} & \pi_k(E_f;e'_0) & \overset{p_{f*}}{\to} & \pi_k(B';b'_0) & \to & \pi_{k-1}(F'_{b_0};e_0) & \to\cdots \\
& \cong\big\downarrow f_* & & \cong\big\downarrow \ell_* & & \big\downarrow \ell_* & & \cong\big\downarrow f_* & & \cong\big\downarrow \ell_* & \\
\cdots\to & \pi_{k+1}(B;b_0) & \to & \pi_k(F;e_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_k(E;e_0) & \xrightarrow{p} & \pi_k(B;b_0) & \to & \pi_{k-1}(F_{b_0};e_0) & \to\cdots
\end{array}$$

todetaan, että $\ell_*:\pi_k(E_f;e'_0)\to\pi_k(E;e_0)$ on isomorfismi kaikilla $n\geq 0$ (ks. sivun 15 huomio). Tällöin vastaava isomorfismi kohomologiamodulien välillä on edelleen isomorfismi. Voidaan määritellä ryhmän $\pi_1(B',b'_0)$ toiminta seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\theta_{b_0}:\pi_1(B',b'_0)\times H^*(F_{b_0};G)\to H^*(F_{b_0};G)\\
&([\gamma],\sigma)\mapsto g^*_{f(\gamma)}(\sigma),
\end{aligned}$$

joka on oletuksen mukaan triviaali. Tämä toiminta voidaan määritellä myös suoraan ryhmään $H^*(F'_{b_0};G)$ säikeiden homeomorfisuuden vuoksi, mikä on riittävä oletus tämän todistuksen aiempia vaiheita ajatellen. Tällöin spektraalijono fibraatiolle $p_f:E_f\to B'$ määrittelee spektraalijonon fibraatiolle $p:E\to B$, mistä väite seuraa.

□

Serre-jonosta tekee vieläkin sovellettavamman kaksi siihen liittyvää lisätulosta. Seuraavan lauseen ominaisuuksiin viitattaessa puhutaan Serre-jonon *luonnollisuudesta*, joka on näistä ominaisuuksista ensimmäinen.

Lause 5.8. *([3], s. 537-538.) Olkoot $p : E \to B$ ja $p' : E' \to B'$ fibraatioita säikeinä F ja F'. Olkoot $i : F \hookrightarrow E$ ja $i' : F' \hookrightarrow E'$ inkluusioita sekä $f : B' \to B$ ja $\bar{f} : E' \to E$ sellaisia jatkuvia kuvauksia, että seuraava kaavio kommutoi:*

$$\begin{array}{ccccc} F' & \overset{i'}{\hookrightarrow} & E' & \xrightarrow{p'} & B' \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{f}\restriction F'} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ F & \overset{i}{\hookrightarrow} & E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Olkoon $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ fibraation p ja $(E'_r, d'_r)_{r\geq 1}$ fibraation p' Serre-jono. Tällöin seuraavat ehdot ovat voimassa:

i) Kuvaus f indusoi homomorfismit $f^r_{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r'^{p,q}$, jotka kommutoivat spektraalijonon differentiaalien kanssa.

ii) Kuvauksen $\bar{f}$ indusoima homomorfismi $\bar{f}^* : H^*(E;G) \to H^*(E';G)$ säilyttää molempien kohomologiaryhmien lauseen 4.23 mukaisen suodatuksen ja indusoi homomorfismit $f^\infty_{p,q} : E_\infty^{p,q} \to E_\infty'^{p,q}$.

iii) Seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} & \xrightarrow{\cong} & H^p(B;H^q(F;G)) \\ \downarrow{\scriptstyle f^2_{p,q}} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ E_2'^{p,q} & \xrightarrow{\cong} & H^p(B';H^q(F';G)) \end{array}$$

missä

$$f' : H^p(B;H^q(F;G)) \to H^p(B';H^q(F';G)),\ c[a] \to \bar{f}^*(c)[f^\#(a)]$$

kaikilla $c \in H^q(F;G)$, $a \in Hom(S_p(B), H^q(F;G))$ ja $p \in \mathbb{N}$. Tässä $S_p(B)$ on avaruuden B p-ketjujen joukko ja $f^\#$ on ketjukuvauksen $f_\#$ määrittelemä koketjukuvaus.

Toisin sanoen lauseen mukaan fibraatioiden väliset kuvaukset määrittelevät luvussa 4 määritellyn spektraalijonokuvauksen. Se todistetaan hyvin samanlaisilla argumenteilla, kuin lause 5.2.

Toinen Serre-jonoon liitettävä ominaisuus on se, että jokaiselle sivulle voidaan määritellä kohomologiarenkaiden kuppituloa vastaava bilineaarinen tulo, eli jokainen Serre-jonon sivu on määritelmän 4.1 mukaisesti R-algebra. Seuraava lause näyttää, että määritelmä on lähes sama kuin tavallisella kuppitulolla[2]. Kuten kohomologiarenkaiden määrittely edellyttää, oletetaan tästä lähtien kerroinryhmällä olevan lisäksi yksiköllisen vaihdannaisen renkaan rakenne.

Lause 5.9. *([3], s. 543-546.) Olkoon R vaihdannainen, yksiköllinen rengas, $p : E \to B$ fibraatio ja $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ fibraation p Serre-jono. Tällöin on olemassa sellainen bilineaarinen tulo $\smile'$: $E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \to E_r^{p+s,q+t}$, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

i) Jokaiselle $(a, b) \in E_r^{p,q} \times E_r^{s,t}$ on voimassa ehto

$$d_r(a \smile' b) = d_r^{p,q}(a) \smile' b + (-1)^{p+q} a \smile' d_r^{s,t}(b),$$

*jota kutsutaan **Leibnizin säännöksi**.*

ii) Tulo $\smile'$: $E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \to E_r^{p+s,q+t}$ indusoi tulon $\smile'$: $E_{r+1}^{p,q} \times E_{r+1}^{s,t} \to E_{r+1}^{p+s,q+t}$.

iii) Olkoon Ψ lauseen 5.2 isomorfismi. Jos parille $(c_1 a, c_2 b) \in E_2^{p,q} \times E_2^{s,t}$ pätee $\Psi(c_1) \in H^q(F; R)$, $\Psi(c_2) \in H^t(F; R)$, $\Psi(a) \in H^p(B; H^q(F; R))$ ja $\Psi(b) \in H^s(B; H^t(F; R))$, niin

$$\Psi(c_1 a \smile' c_2 b) = (-1)^{qs}(\Psi(c_1) \smile \Psi(c_2))(\Psi(a) \smile \Psi(b)),$$

missä $\smile$ on tavallinen kuppitulo.

iv) Kuppitulo $\smile$: $H^p(E; R) \times H^q(E; R) \to H^{p+q}(E; R)$ on suljettu lauseen 4.23 suodatuksen $F^{p,q}$ suhteen, ja kuppitulon indusoima tulo

$$\smile: F^{p,q}/F^{p+1,q-1} \times F^{s,t}/F^{s+1,t-1} \to F^{p+s,q+t}/F^{p+s+1,q+t-1}$$

määrittelee bilineaarisen tulon $\smile'$: $E_\infty^{p,q} \times E_\infty^{s,t} \to E_\infty^{p+s,q+t}$.

Lauseesta 5.9 voidaan heti tehdä tärkeä huomio. Jos $[\phi][\sigma] \in H^p(B; H^q(F; R))$, missä $[\phi] \in H^q(F; R)$ ja $[\sigma] \in H^p(B; H^q(F; R))$, niin se voidaan esittää tulona

$$[e'][\sigma] \smile' [\phi][e] = ([e'] \smile [\phi])([\sigma] \smile [e]) = [\phi][\sigma],$$

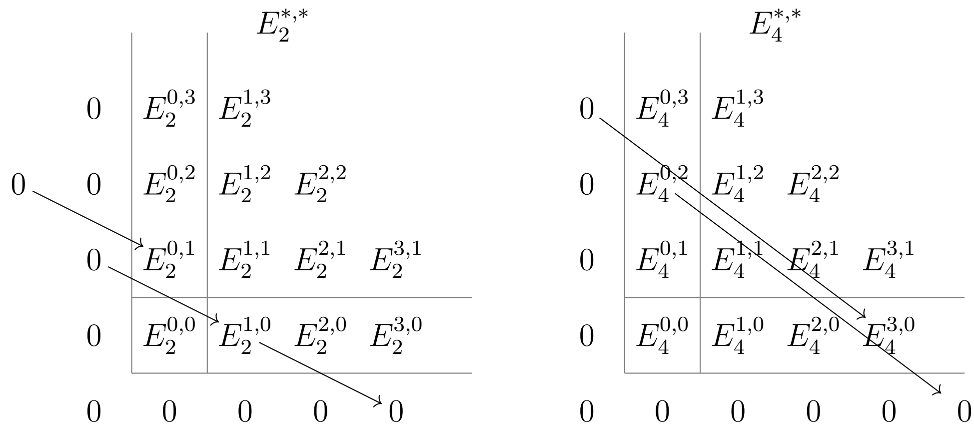
missä $[e'][\sigma] \in H^p(B; H^0(F; R))$, $[\phi][e] \in H^0(B; H^q(F; R))$, sekä $[e]$ ja $[e']$ ovat kuppitulon neutraalialkioita. Osoittautuu, että tämä ominaisuus yhdessä Leibnizin säännön kanssa on ratkaiseva spektraalijonon romahtamista koskevien päättelyiden kannalta.

[2]Tavallinen kuppitulo on määritelty esimerkiksi kirjassa [13] s. 391-393

5.2 Leray-Hirschin lause

Luvun 4.2 lopussa nähtiin, että CW-kompleksin rankojen muodostaman suodatuksen avulla määritelty kohomologinen spektraalijono on epätriviaali jokaisella sivulla vain ensimmäisessä neljänneksessä. Spektraalijonon ensimmäisen neljänneksen *reunamoduleille* tästä seuraa päättelyä helpottavia lisäominaisuuksia.

Kun tarkastellaan akselin $p = 0$ moduleja ensimmäisessä neljänneksessä spektraalijonon sivulla r, kaikki näihin moduleihin kuvautuvat differentiaalit ovat triviaaleja, sillä kaikki toisen neljänneksen modulit ovat myös triviaaleja (kuvassa 5.2 vasemmalla ylin homomorfismi). Tällöin $E_{r+1}^{0,q} \cong \ker(d_r^{0,q}) \subset E_r^{0,q}$. Toisaalta akselilla $q = 0$ differentiaalit ovat samalla tavalla niiden suunnan vuoksi triviaaleja (kuvassa 5.2 vasemmalla alin differentiaali), joten tällöin $E_r^{p,0} \twoheadrightarrow E_r^{p,0}$, kuten sivulla 25 jo todettiin.



Kuva 5.2: Kuvassa vasemmalla osa spektraalijonon toista sivua ja oikealla osa neljättä sivua.

Myös rajasivun akselien moduleille voidaan kirjoittaa hyödylliset identiteetit. Ensinnäkin differentiaalit $d_r^{p-r,r-1} : E_r^{p-r,r-1} \to E_r^{p,q}$ muuttuvat triviaaleiksi, kun $p + 1 \leq r$ (5.2 vasemmalla keskimmäinen ja oikealla ylempi differentiaali), ja differentiaalit $d_r^{0,q} : E_r^{0,q} \to E_r^{r,q-r+1}$ muuttuvat triviaaleiksi, kun $q + 1 < r$ (5.2 oikealla alempi differentiaali). Tällöin $E_\infty^{p,0} = E_{p+1}^{p,0}$ ja $E_\infty^{0,q} = E_{q+1}^{0,q}$. Jos X on lisäksi CW-kompleksi, niin $E_\infty^{p,0} \cong H^p(X; R)$. Tämä huomataan suoraan modulin $H^p(X; R)$ suodatuksen määritelmistä, missä $F^{p,0}$, $F^{p+1,-1}$, i_1 ja i_2 ovat kuten sivulla 40:

$$
\begin{aligned}
F^{p,0} &= \ker(i_1^*) = H^p(X; R), \quad i_1^* : H^p(X; R) \to H^p(X^{p-1}) \\
F^{p+1,-1} &= \ker(i_2^*) = \{0\}, \quad i_2^* : H^p(X; R) \to H^p(X^p; R),
\end{aligned}
$$

sillä CW-kompleksien perusominaisuuksien nojalla $H^p(X^{p-1}; R) = 0$ ja i_2^* on injektio. Jos X ei ole CW-kompleksi, pätee ainoastaan $E_\infty^{p,0} \subset H^p(X; R)$.

Serre-jonon tapauksessa toisen sivun isomorfismit johtavat seuraavan lauseen homomorfismeihin, joihin kirjallisuudessa viitataan *reunahomomorfismeina*[3].

Lemma 5.10. *([9], lause 5.9.) Olkoon $p : E \to B$ suunnistuva fibraatio säikeenä $F = F_{b_0}$, ja olkoot sekä avaruus B että säie F polkuyhtenäisiä. Tällöin on olemassa seuraavaa muotoa olevat yhdistetyt homomorfismit,*

$$H^q(E;R) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} = E_{q+1}^{0,q} \subset E_q^{0,q} \subset \dots \subset E_2^{0,q} \cong H^q(F;R),$$
$$H^p(B;R) \cong E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow E_{p+1}^{p,0} = E_\infty^{p,0} \subset H^p(E;R),$$

jotka ovat homomorfismien

$$i^* : H^q(E;R) \to H^q(F;R), \quad p^* : H^p(B;R) \to H^p(E;R)$$

määrittelemät, missä i^* on inkluusiokuvauksen indusoima homomorfismi.

Todistus. Muistetaan aluksi, että Serre-jono määriteltiin CW-approksimaation määritelmää käyttäen, joten voidaan yksinkertaisuuden vuoksi olettaa, että B on CW-kompleksi. Tarkastellaan oheista kommutoivaa kaaviota, jossa oikeanpuoleisen suorakulmion vaakasuorat kuvaukset ovat fibraatioita, ja vasemmanpuoleiset avaruudet näiden säikeitä:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook, "i"] & \{b_0\} \arrow[d, hook, "j"] \\
F \arrow[r] \arrow[d, "p"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\{b_0\} \arrow[r, hook, "j"] & B \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & B
\end{tikzcd}$$

Kaavion fibraatiot määrittelevät jokainen Serre-jonon, jonka luonnollisuuden perusteella pystysuorat kuvaukset indusoivat lauseen 5.8 mukaiset spektraalijonokuvaukset. Merkitään jonoja $E_*(F,F,\{b_0\})$, $E_*(F,E,B)$ ja $E_*(\{b_0\},B,B)$.

Kun tarkastellaan jonon $E_*(F,F,\{b_0\})$ toisen sivun moduleita, lauseen 5.2 isomorfismin perusteella ne ovat muotoa

$$E_2^{p,q}(F,F,\{b_0\}) \cong H^p(\{b_0\};H^q(F;R)) = \begin{cases} H^q(F;R), \text{ kun } p=0, \\ 0, \text{ muuten.} \end{cases}$$

Vastaavasti jonon $E_*(\{b_0\},B,B)$ toisen sivun moduleille on voimassa

$$E_2^{p,q}(\{b_0\},B,B) \cong H^p(B;H^q(\{b_0\};R)) = \begin{cases} H^p(B;R), \text{ kun } q=0, \\ 0, \text{ muuten.} \end{cases}$$

[3]eng. *edge homomorphism*

Koska spektraalijonoille pätee, että jokainen $E_r^{p,q}$ kuuluu yhteen yksikäsitteiseen ketjukompleksiin, on tällöin molempien edellisten jonojen toisen sivun differentiaalien oltava tässä tapauksessa triviaaleja homomorfismeja: molemmat spektraalijonot siis romahtavat toiselle sivulle.

Tarkastellaan jonoa $E_*(F, F, \{b_0\})$ vielä tarkemmin. Spektraalijonon konstruktiota tarkastellessa huomataan, että kun $p = 0$,

$$F^{p+1,q-1} = 0, \quad F^{p,q} = H^q(F; R) \quad E_\infty^{p,q} = H^q(F; R),$$

missä $F^{*,*}$ ovat kuten sivulla 40. Lisäksi lauseen 4.23 mukainen isomorfismi on identiteettikuvaus. Jatketaan määritelmän 4.15 kohdan iv kaaviota keskeltä alkaen oikealle:

$$\begin{tikzcd}
H^q(E;R) \arrow[d, equal] \\
F^{0,q} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "i^*"] & E_\infty^{0,q}(F,E,B) \arrow[r] \arrow[d, "i_\infty^{0,q}"] & E_q^{0,q}(F,E,B) \arrow[r] \arrow[d, "i_q^{0,q}"] & \cdots \arrow[r] & E_2^{0,q}(F,E,B) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "i_2^{0,q}"] & H^q(F;R) \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
G_q^0 \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & E_\infty^{0,q}(F,F,\{b_0\}) \arrow[r, equal] & E_q^{0,q}(F,F,\{b_0\}) \arrow[r, equal] & \cdots \arrow[r, equal] & E_2^{0,q}(F,F,\{b_0\}) \arrow[r, "\cong"] & H^q(F;R) \\
H^q(F;R)
\end{tikzcd}$$

missä $i_r^{0,q}$, $i_\infty^{0,q}$ ovat osa kuvauksen i indusoimaa spektraalijonokuvausta, ja vaakasuorat homomorfismit ovat algebrallisia inkluusiokuvauksia. Alkuosa kaaviosta kommutoi lauseen 5.8 ehtojen *i)* ja *ii)* nojalla, ja viimeinen neliö ehdon *iii)* nojalla. Kun kierretään kaavio alkaen modulista $H^q(E; R)$ yhdistämällä ylemmän rivin homomorfismit, oikeanpuoleinen pystysuora homomorfismi ja alemman rivin ensimmäinen oikeanpuoleinen vaakasuora isomorfismi, saadaan homomorfismi

$$H^q(E; R) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} = E_{q+1}^{0,q} \subset E_q^{0,q} \subset ... \subset E_2^{0,q} \cong H^q(F; R),$$

joka on kaavion kommutoivuuden nojalla homomorfismi i^*.

Homomorfismin p^* osalta todetaan ensin, että luonnollisuuden nojalla seuraava kaavio kommutoi:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H^p(B;R) & & \\
 & & \| & & \\
H^p(B,B^{p-1}) & \xrightarrow{i_B^*} & \operatorname{im}(i_B^*) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & H^p(B;R) \\
\downarrow p^* & & \downarrow p^* & & \downarrow p^* \\
H^p(E,E_{p-1}) & \xrightarrow{i_E^*} & \operatorname{im}(i_E^*) & \xrightarrow{i} & H^p(E;R) \\
 & & \cap & & \\
 & & H^p(E;R) & &
\end{array}
\tag{5.11}
$$

missä i_B^*, i_E^* ovat inkluusiokuvausten indusoimia homomorfismeja, jotka määrittelevät suodatukset ja i on algebrallinen inkluusiokuvaus. Tällöin seuraavassa kaaviossa kaavion (5.11) keskimmäinen homomorfismi, joka vastaisi kaaviossa (5.12) oikean reunan pystysuoraa homomorfismia p^*, voidaan korvata suoraan kaavion (5.11) oikeanpuoleisella pystysuoralla homomorfismilla p^* modulien $H^p(B;R)$ ja $H^p(E;R)$ välillä.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H^p(B;R) & \overset{\cong}{\leftarrow} & E_2^{p,0}(\{b_0\},B,B) & = \cdots = & E_{p+1}^{p,0}(\{b_0\},B,B) & = & E_\infty^{p,0}(\{b_0\},B,B) & \overset{\cong}{\rightarrow} & H^p(B;R) \\
\downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p^* \\
H^p(B;R) & \overset{\cong}{\longleftarrow} & E_2^{p,0}(F,E,B) & \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow & E_{p+1}^{p,0}(F,E,B) & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & E_\infty^{p,0}(F,E,B) & \longrightarrow & H^p(E;R)
\end{array}
\tag{5.12}
$$

Kaavio (5.12) kommutoi luonnollisuuden perusteella, ja väitteen homomorfismi

$$H^p(B;R) \to H^p(E;R)$$

saadaan kulkemalla oikeasta yläkulmasta yläriviä vasemmalle, vasemmassa reunassa alas, ja takaisin alariviä oikealle. □

Kerrataan seuraavat puhtaasti algebralliset tulokset Leray-Hirschin lauseen todistamista varten. Lauseessa 5.13 vapaalla ketjukompleksilla tarkoitetaan yksinkertaisesti sellaista ketjukompleksia, jossa jokainen kompleksin jäsen on vapaa Abelin ryhmä.

Lause 5.13. *([15], 5.5.10.) Olkoon C vapaa ketjukompleksi ja G äärellisesti viritetty R-moduli. Tällöin on olemassa isomorfismi $H^q(C;R)\otimes_R G \overset{\mu}{\cong} H^q(C;G)$, missä*

$$\mu : H^q(C;R)\otimes_R G \to H^q(C;G),\ \mu([f],g) = [h],\ h(a) = f(a)g$$

kaikilla $a \in C$, $f \in H^q(C;r)$ ja $g \in G$.

Lause 5.14. *([7], XVI.2.2.3.) Olkoot E ja F R-moduleita. Oletetaan lisäksi, että modulilla E on kanta $\{e_i\}_{i\in I}$ jollakin indeksijoukolla I. Tällöin jokaisella R-modulin $F \otimes_R E$ alkiolla on yksikäsitteinen esitys*

$$\sum_{i\in I} y_i \otimes e_i,$$

missä $y_i = 0$ melkein kaikilla $i \in I$.

Lause 5.15. *(Leray-Hirsch.) Olkoon $p : E \to B$ fibraatio säikeenä $F = F_{b_0}$, $i : F \hookrightarrow E$ inkluusio ja avaruudet B ja F polkuyhtenäisiä. Olkoon $H^k(F;R)$ vapaa R-moduli jokaisella k, ja olkoot $e_1, ..., e_r \in H^*(E;R)$ sellaisia, että $i^*(e_1), ..., i^*(e_r)$ muodostavat kannan modulille $H^*(F;R)$. Tällöin*

$$\Phi : H^*(F;R) \otimes_R H^*(B;R) \to H^*(E;R),\ i^*(e_i) \otimes b \mapsto e_i \smile p^*(b),$$

on isomorfismi porrastettujen R-modulien välillä.

Todistus. ([9] lause 5.10, [11] lause 33.5.) Varmistetaan aluksi, että Serre-jono on sovellettavissa tähän tilanteeseen. Oletetaan, että $w : (I, \partial I) \to (B, b_0)$ on jokin mielivaltainen polku. Tarkastellaan seuraavaa kaaviota:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "\mathscr{g}_w"'] & \\ & E \\ F \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \tag{5.16}$$

Kaaviossa $\mathscr{g}_w$ on määritelty kuten sivulla 28. Palautetaan mieleen lauseen 3.9 konstruktiosta, että sivulla 27 määritelty $g_w : E_{w_0} \to E_{w_1}$ riippui polun määrittelemän homotopian $H \circ (p_{w(0)} \times \mathrm{Id}) : E_{w(0)} \times I \to \{c\} \times I \to B$ nostosta: tässä E_{w_1} ja E_{w_0} ovat kuten sivulla 22. Kun tarkastellaan oheista kaaviota,

$$\begin{tikzcd} E_{w_0} \times \{0\} \arrow[r, "\mathscr{w}"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E_{w_0} \times I \arrow[r, "H\circ(p_{w_0}\times \mathrm{Id})"'] \arrow[ur, dashed, "g_w"] & B \end{tikzcd}$$

jossa $\mathscr{w}$ on projektiokuvaus, voidaan todeta, että avaruudet E_{w_0} voidaan homeomorfisuuden vuoksi suoraan korvata säikeillä F, eli saadaan kuvaus $\mathscr{g}_w$. Tällöin kaavion $\mathscr{w}$ muuntuu inkluusiokuvaukseksi, ja saadaan $i \cong i \circ \mathscr{g}_w$. Edelleen kaavio (5.16) kommutoi homotopiaa vaille, ja $\mathscr{g}_w^* \circ i^*(e_i) = i^*(e_i)$. Tällöin $\mathscr{g}_w^* = \mathrm{Id}^*$, ja p on suunnistuva.

Lemman 5.10 nojalla $i^* : H^*(E;R) \to H^*(F;R)$ on homomorfismi, joka kulkee spektraalijonon sivujen läpi modulien $E_r^{0,q}$ kautta. Koska kyseessä on surjektiivinen homomorfismi, täytyy olla $E_\infty^{0,q} = E_{q+1}^{0,q} = ... = E_2^{0,q}$, ja $d_r^{0,q} = 0$, kun $r \geq 2$. Aiemmin huomattiin jo, että $d_r^{p,0} = 0$ kaikilla $r \geq 1$. Koska sivun 58 huomion mukaisesti jokainen $[\phi][\sigma] \in H^p(B; H^q(F;R)) \cong E_2^{p,q}$ on esitettävissä muodossa $[e'][\sigma] \smile' [\phi][e]$, missä $[e'][\sigma] \in H^p(B; H^0(F;R))$ ja $[\phi][e] \in H^0(B; H^q(F;R))$, niin myös jokainen $a \in E_2^{p,q}$ on esitettävissä muodossa $b \smile' c$, missä $b \in E_2^{p,0}$ ja $c \in E_2^{0,q}$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} d_2^{p,q}(a) &= d_2^{p,q}(b \smile' c) \\ &= \underbrace{d_2^{p,0}}_{0}(b) \smile' c + (-1)^{pq} b \smile' \underbrace{d_2^{0,q}}_{0}(c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Differentiaali on siis kaikilla indekseillä $p, q \in \mathbb{Z}$ triviaali sivulla 2. Koska vastaava päättely voidaan tehdä seuraavillakin sivuilla, koko jono romahtaa, ja $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$.

Sen nojalla, että $H^k(F;R)$ on vapaa, äärellisesti viritetty R-moduli, saadaan

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F;R)) \cong H^p(B;R) \otimes_R H^q(F;R).$$

Lisäksi todetaan, että $H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R)$ on aina $H^*(B;R)$-moduli, sillä on olemassa modulin määrittelevä kuvaus:

$$\nu : H^*(B;R) \times (H^*(B;R) \otimes H^q(F;R)) \to H^*(B;R) \otimes H^q(F;R), \quad (a, (b \otimes c)) \mapsto (a \smile b \otimes c).$$

Toisaalta lauseen 5.14 nojalla jokainen modulin $H^*(B;R) \otimes_R H^q(F;R)$ alkio voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa

$$\sum_{0 \leq i \leq k} y_i \otimes e_i = \sum_{0 \leq i \leq k} \nu(y_i, (e \otimes e_i)),$$

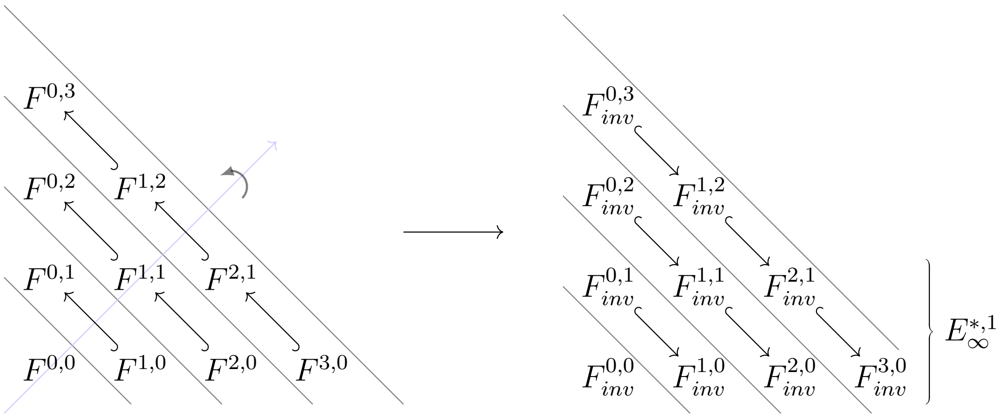
missä k on modulin $H^q(F;R)$ kannan alkioiden lukumäärä, $\{e_i\}_{0 \leq i \leq k}$ on saman modulin kanta ja e on modulin $H^*(B;R)$ neutraalialkio kertolaskun suhteen. Siis myös $H^*(B;R) \otimes H^q(F;R)$ on vapaa. Kun tarkastellaan lauseen 5.9 määrittelemää tuloa $H^*(B;R) \otimes_R H^q(F;R) \to H^*(B; H^q(F;R))$ ja kannan alkioiden kuvautumista, huomataan, että kyseessä on lauseen 5.13 isomorfismi. Vastaavasti todetaan, että bilineaarinen tulo

$$\smile' : E_\infty^{*,0} \otimes E_\infty^{0,q} \to E_\infty^{*,q}$$

on isomorfismi.

Suodatetaan seuraavaksi $H^*(E;R)$ ja $H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R)$, joista ensimmäinen lähes samaan tapaan kuin aiemminkin. Lause 4.23 määrittelee tässä tilanteessa ketjun

$$0 = F^{p+q+1,-1} \subset F^{p+q,0} \subset \cdots \subset F^{0,p+q} = H^{p+q}(E;R).$$



Kuva 5.3: Uusi suodatus saadaan peilauksella diagonaalin suhteen. Rajasivun ensimmäinen rivi $E_\infty^{*,1}$ on tällöin määritelty oikean kaavion kahden ensimmäisen rivin perusteella.

$$
\begin{array}{l}
q \\
H^0(B)\otimes H^3(F) \\
H^0(B)\otimes H^2(F) \quad H^1(B)\otimes H^2(F) \\
\left.\begin{array}{l}
H^0(B)\otimes H^1(F) \quad H^1(B)\otimes H^1(F) \quad H^2(B)\otimes H^1(F) \quad H^3(B)\otimes H^1(F) \\
H^0(B)\otimes H^0(F) \quad H^1(B)\otimes H^0(F) \quad H^2(B)\otimes H^0(F) \quad H^3(B)\otimes H^0(F)
\end{array}\right\} \cong E_\infty^{*,1} \\
\hfill p
\end{array}
$$

Kuva 5.4: Porrastetun modulin $H^*(B;R)\otimes_R H^*(F;R)$ suodatus. Kuten kuvassa 5.3, $E_\infty^{*,1}$ määräytyy kahden ensimmäisen rivin perusteella.

Tämän ketjun indeksöinti voidaan kääntää toisinpäin määrittelemällä

$$F_{inv}^{p,q} := F^{q,p}$$

kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$, ja näin saadaan kasvava suodatus (kuva 5.3). Lisäksi

$$F_{inv}^{q,p}/F_{inv}^{q-1,p+1} = F^{p,q}/F^{p+1,q-1} \cong E_\infty^{p,q},$$

ja $F_{inv}^{q,*}/F_{inv}^{q-1,*} \cong E_\infty^{*,q}$. Määritellään toisaalta

$$C^{q,*} := H^*(B;R) \otimes_R \bigoplus_{i \leq q} H^i(F;R).$$

Tällöin tensoritulon perusominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned} C^{q,*}/C^{q-1,*} &= (H^*(B;R) \otimes_R \bigoplus_{i \leq q} H^i(F;R))/(H^*(B;R) \otimes_R \bigoplus_{i \leq q-1} H^i(F;R)) \\ &= H^*(B;R) \otimes_R H^q(F;R). \end{aligned}$$

Perustellaan sitten, että on olemassa seuraavaa muotoa olevat kommutoivat kaaviot kaikilla $q \in \mathbb{Z}$, joissa rivit ovat eksakteja:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^{q-1,*} \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_{q-1}"] & C^{q,*} \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\gamma_q"] & H^*(B;R) \otimes_R H^q(F;R) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_q"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E}^{q-1,*} \arrow[r, "\alpha_2"] & \mathscr{E}^{q,*} \arrow[r, "\beta_2"] & E_\infty^{*,0} \otimes_R E_\infty^{0,q} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{5.17}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E}^{q-1,*} \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\delta_{q-1}"] & \mathscr{E}^{q,*} \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\delta_q"] & E_\infty^{*,0} \otimes_R E_\infty^{0,q} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_q"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F_{inv}^{q-1,*} \arrow[r, "\alpha_3"] & F_{inv}^{q,*} \arrow[r, "\beta_3"] & E_\infty^{*,q} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{5.18}$$

ja jossa $\mathscr{E}^q := F_{inv}^{0,*} \otimes_R \bigoplus_{i \leq q} H^i(E;R)$. Määritellään, että α_1, α_2 ja α_3 ovat kaavioissa algebrallisia inkluusiokuvauksia.

Määritellään $\gamma_q : C^{q,*} \to \mathscr{E}^{q,*},\ a \otimes i^*(b) \mapsto p^*(a) \otimes b$. Kuvaus on hyvin määritelty maalijoukkonsa suhteen, sillä tarkastelemalla lemman 5.10 todistusta huomataan, että homomorfismin $p^* : H^*(B;R) \to H^*(E;R)$ kuvajoukko sisältyy täsmälleen suodatuksen moduliin $F^{*,0} = F_{inv}^{0,*}$. Määritellään toisaalta $\delta_q : \mathscr{E}^{q,*} \to F_{inv}^{q,*},\ a \otimes b \mapsto a \smile b$.

Tämäkin kuvaus on maalijoukkonsa suhteen hyvin määritelty: Olkoon $p^*(a) \otimes c \in F^{0,t}_{inv} \otimes_R H^i(E;R)$, jollakin $t, i \in \mathbb{Z},\ t \leq q$. Jos $i^* : H^*(E;R) \to H^*(E_{t-1};R)$, niin

$$i^*(p^*(a) \smile c) = \underbrace{i^* \circ p^*(a)}_{=0} \smile i^*(c) = 0,$$

joten $\mathrm{im}(\delta_q) \subset F^{i,*}_{inv}$. Suodatuksen kasvavuuden nojalla $F^{i,*}_{inv} \subset F^{q,*}$, joten myös $\mathrm{im}(\delta_q) \subset F^{q,*}$.

Kun määritellään, että homomorfismi λ_q on kuppitulo $\smile'$ ja β_2 ja β_3 ovat kuten p' sivulla 35, lauseen 5.9 nojalla kaavio (5.18) kommutoi.

Tarkastelemalla lemman 5.10 kaavioita (5.2) ja (5.12) huomataan, että (kaavioiden) homomorfismien i^* ja p^* indusoimat kuvaukset ovat isomorfismeja rajasivujen välillä spektraalijonon romahtamisesta johtuen. Luonnollisuuden perusteella seuraavat neliöt kommutoivat, missä $\imath$ ja $\wp$ ovat kuvausten i^* ja p^* indusoimia homomorfismeja sekä

$$\begin{tikzcd}
H^i(F;R) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & E^{0,q}_\infty(F,F,b_0) \\
H^i(E;R) \arrow[u, "i^*"] \arrow[r, two heads, "\beta_2'"] & E^{0,q}_\infty \arrow[u, "\imath"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^*(B;R) \arrow[d, equal] & H^*(B;R) \arrow[d, equal] \\
F^{*,0}(\{b_0\},B,B) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "p^*"] & E^{*,0}_\infty(\{b_0\},B,B) \arrow[d, "\wp"] \\
F^{0,*}_{inv} \arrow[r, "\beta_2''"] & E^{*,0}_\infty
\end{tikzcd}$$

β_2' ja β_2'' kuten sivulla 35. Tällöin myös kaavion (5.17) oikea neliö kommutoi, kun valitaan

$$\varepsilon_q = \wp \otimes (\bigoplus_{i \leq q} \imath^{-1}) \ \text{ ja } \ \beta_2 = \beta_2'' \otimes (\bigoplus_{i \leq q} \beta_2')$$

ja kun β_1 määritellään tekijähomomorfismiksi.

Lopuksi voidaan todeta, että sekä δ_q että γ_q ovat isomorfismeja jokaisella $q \in \mathbb{Z}$. Koska määritellyt suodatukset ovat negatiivisilla indekseillä triviaaleja sekä λ_q ja ε_q ovat isomorfismeja kaikilla $q \in \mathbb{Z}$, viiden lemman nojalla γ_0 ja δ_0 ovat isomorfismeja. Tästä seuraa viiden lemman nojalla sama myös muille $q \in \mathbb{Z}$, joten valitaan $\Phi = \delta_* \circ \gamma_*$. $\square$

Lopuksi

Yksinkertaiset esimerkit sellaisista avaruuksista, jotka täyttävät Leray-Hirschin lauseen oletuksen säikeen kohomologiamodulien vapaudesta, johdattavat myös lauseen sovelluskohteisiin. Sellaisille säiekimpuille, joiden säikeet ovat palloja, voidaan johtaa kohomologiarenkaiden laskemista helpottava *Gysinin jono* ([2], s. 437, [16], 15.52.). Tämä seuraa puolestaan *Thomin isomorfismilauseesta* ([2], lause 4D.9, [16], 15.51.), joka on Leray-Hirschin lauseen relatiivisen version välitön seuraus. Leray-Hirschin lause on myös tärkeä aputulos *Stiefel-Whitneyn* ja *Chernin luokkien* perusominaisuuksien todistamisessa vektorikimpuille ([4], lause 3.1. ja lause 3.2.).

Serre-jonosta seuraava sovelluskirjo osoittautuu tätäkin laajemmaksi. Sekä mainittu Gysinin jono että myös *Wangin* ja *Serren eksaktit jonot* voidaan johtaa suoraan Serre-jono rakenteesta ([9], s. 143-146.). Tyypillisten epätriviaalien fibraatioiden, kuten polkuavaruuksista muodostettujen fibraatioiden säikeiden kohomologiarenkaita voidaan laskea Serre-jonon avulla ([3], esimerkki 5.17). Serre-jonon vaikutus ulottuu merkittävällä tavalla myös homotopiateoriaan (esimerkiksi [3] lause 5.22), mikä huomattiin pian Serren väitöskirjan julkaisemisen jälkeen.

Leray-Hirschin lauseen yleistyksissä spektraalijonoihin perustuvat argumentit ovat edelleen käyttökelpoisia ([16], lause 15.47., [10], lause 1.1).

Viitteet

[1] H. Zieschang G. Burde. “Development of the Concept of a Complex”. Teoksessa: *History of Topology*. Elsevier, 1999.

[2] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf. Luettu: 2025-4-28. 2001.

[3] A. Hatcher. *Spectral Sequences*. https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATch5.pdf. Luettu: 2025-4-28.

[4] A. Hatcher. *Vector Bundles and K-theory*. https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VB.pdf. Luettu: 9.9.2025. 2017.

[5] P. Kirk J.F. Davis. *Lecture Notes in Algebraic Topology*. American Mathematical Society, 2001.

[6] J.-M. Kantor. “Jean Leray”. *Gaz. Mathématiciens, numéro spécial* (2000).

[7] S. Lang. *Algebra*. New York: Springer, 2002.

[8] J. McCleary. “A History of Spectral Sequences: Origins to 1953”. Teoksessa: *History of Topology*. Elsevier, 1999.

[9] J. McCleary. *User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[10] L. Meng. “Hypercohomologies of truncated twisted holomorphic de Rham complexes”. *Annals of Global Analysis and Geometry* (2020).

[11] H. Miller. *Lectures on Algebraic Topology II*. https://ocw.mit.edu/courses/18-906-algebraic-topology-ii-spring-2020/pages/lecture-notes/. Luettu: 2025-8-8. 2020.

[12] J.R. Munkres. *Topology*. Second. Prentice Hall, 2000.

[13] J.J. Rotman. *Introduction to Algebraic Topology*. New York: Springer, 1988.

[14] J.-P. Serre. “Homologie Singuliere Des Espaces Fibres”. *The Annals of Mathematics* 54.3 (1951), s. 425–505.

[15] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[16] R. Switzer. *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*. Berlin: Springer, 1975.

[17] J.H.C. Whitehead. "Combinatorial Homotopy I". *Bulletin of the American Mathematical Society* 55 (1949), s. 213–245.

A Serre-jonon todistuksen kaavioita

$$
\begin{tikzcd}
\prod_\alpha H^q(F;G) \arrow[rrr, dashed] \arrow[dddd] \arrow[ddr] & & & \prod_\beta H^q(F;G) \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
 & & \mathfrak{S}^0 \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathfrak{D}^0 \arrow[d, dashed] & \\
 & \mathfrak{Hom}(B_p) \arrow[ddd] & & \vdots \arrow[d] & \mathfrak{Hom}(B_{p+1}) \arrow[ddd] \\
 & & & \mathfrak{D}^p \arrow[d] & \\
\prod_\alpha H^{p+q}(\mathscr{D}^p_\alpha, \mathcal{S}^{p-1}_\alpha; G) & & \mathfrak{S}_p \arrow[ur] \arrow[r] & \prod_\beta H^{p+q+1}(\mathscr{D}^{p+1}_\beta, \mathcal{S}^p_\beta) & \\
 & H^{p+q}(E_p, E_{p-1}) \arrow[ul] \arrow[rrr] & & & H^{p+q+1}(E_{p+1}, E_p; G) \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Kuva A.1: Merkintöjen lyhentämiseksi kaaviossa käytetään merkintöjä $\mathfrak{S}_p = \prod_\beta H^{p+q}(\mathcal{S}^p_\beta, \mathscr{D}^p_\beta; G)$, $\mathfrak{D}^p = \prod_\beta H^{p+q}(\mathscr{D}^p_\beta, \mathcal{S}^{p-1}_\beta; G)$ *ja* $\mathfrak{hom}(B_p) = Hom(H_p(B^p, B^{p-1}; \mathbb{Z}), H^q(F;G))$. *Korostusvärit vastaavat seuraavan kaavion nuolten värejä.*

$$
\begin{tikzcd}
\prod_i H^q(F) \arrow[rr] & & \prod_\beta H^q(F) \arrow[d] & & & \\
\prod_i H^{p+q}(\mathscr{D}_i^p, \mathscr{S}_i^{p-1}) \arrow[u] \arrow[r] & H^{p+q}(\mathscr{D}_\beta^p, \mathscr{D}_\beta^p \setminus (\bigcup_i \mathring{\mathscr{D}}_i^p)) \arrow[r] & H^{p+q}(\mathscr{D}_\beta^p, \mathscr{S}_\beta^{p-1}) \arrow[r] & H^{p+q}(\mathscr{S}_\beta^p, \mathscr{D}_\beta^p) \arrow[r] & H^{p+q}(\mathscr{S}_\beta^p) \arrow[r] & H^{p+q+1}(\mathscr{D}_\beta^{p+1}, \mathscr{S}_\beta^p) \\
H^{p+q}(\mathscr{D}_\alpha^p, \mathscr{S}_\alpha^{p-1}) \arrow[u] \arrow[r] & H^{p+q}(E_p, E_p \setminus \mathscr{e}_\beta^p) \arrow[u] \arrow[r] & H^{p+q}(E_p, E_{p-1}) \arrow[u] \arrow[r] & H^{p+q}(E_p, E_{p-1}) \arrow[u] \arrow[r] & H^{p+q}(E_p) \arrow[u] \arrow[r] & H^{p+q+1}(E_{p+1}, E_p) \arrow[u] \\
\prod_\alpha H^q(F) \arrow[u, "\varepsilon_\alpha^p"] & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Kuva A.2: Kaavioiden (5.5) *ja* (5.6) *yhdistetty kaavio samastuksineen.*