

Taneli Väänänen

**LÄMMÖNLÄHTEIDEN SIJAIN TIEN OPTI-  
MOINTI JA LÄMPÖTILAJAKAUMAN  
RATKAISU GREENIN FUNKTION  
AVULLA**

Kandidaatintyö  
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta  
Tarkastaja: Pauli Losoi  
Marraskuu 2025

# TIIVISTELMÄ

Taneli Väänänen: Lämmönlähteiden sijaintien optimointi ja lämpötilajakauman ratkaisu Greenin funktion avulla

Optimization of heat source locations and solving of temperature distribution using Green's function

Kandidaatintyö

Tampereen yliopisto

Tekniikan ja luonnontieteiden kandidaattiohjelma, ympäristö- ja energiatekniikan opintosuunta

Marraskuu 2025

---

Tietokonekomponenttien toiminnan lisäksi merkittävä määrä sähköenergiaa kuluu jäähdytykseen, kuten nesteiden tai kaasujen liikuttamiseen. Komponenttien korkea lämpötila voi rajoittaa komponentin laskentatehoa ja lyhentää komponentin käyttöikää. Toisaalta alhainen lämpötila mahdollistaa komponentin ylikellottamisen ja suuremman käyttötehon. Tietokonekomponenteissa lämmönlähteet voivat olla pinta-alaltaan hyvin pieniä verrattuna itse komponentin kokoon. Tästä syystä komponenteissa voi olla suuria lämpötilaeroja ja kuumia pisteitä. Komponenttien lämpötilojen ja lämpötilanhallinnan selvittäminen on keskeinen osa tietokoneiden ja samankaltaisten järjestelmien suunnittelua. Lämpötilaa voidaan tällaisissa tilanteissa kuvata lämpöyhtälöllä, joka voidaan ratkaista Greenin funktion menetelmällä.

Työssä pyrittiin selvittämään, miten Greenin funktiota voidaan hyödyntää lämmönlähteiden sijaintien optimoinnissa sekä tuottamaan Greenin funktion menetelmällä levyn lämpötilajakauma optimoiduista ja optimoimattomista asetelmista. Tutkimuskohde oli neliönmuotoinen kaksiulotteinen levy, johon sijoitettiin neljä erikokoista lämmönlähdettä. Lämmönlähteiden sijainteja optimoitiin Greenin funktion ratkaisun sarjan termejä minimoimalla. Greenin funktion pitkän aikavälin ratkaisu on sarja, jonka termit muodostuvat kahdesta osasta, toinen riippuu ajasta ja toinen sijainnista. Termejä minimoitiin etsimällä lämmönlähteille sijainnit, joissa ratkaisun sijaintiriippuva osa saa arvon nolla. Sarjan ensimmäinen termi on vaikuttavin Greenin funktion tulokseen ja myöhemmät sitä vähämerkityksisempiä, joten optimoinnissa priorisoitiin ensimmäisiä termejä.

Tulosten perusteella Greenin funktio soveltuu hyvin lämmönlähteiden sijaintien optimointiin neljällä lämmönlähteellä ja neliönmuotoisella levyllä. Yleisesti optimoinnissa suurimmat lämmönlähteet siirtyivät lähemmäs levyn keskustaa ja pienemmät taas lähemmäs reunoja. Kolmessa asetelmassa korkein lämpötilaero ympäristön ja levyn välillä laski keskimäärin  $1,7\text{ K}$ , mutta yhdessä asetelmassa korkein lämpötilaero nousi lähes  $60\text{ K}$ . Lämpötilan mediaani ja keskihajonta kasvoivat optimoinnin tuloksena lähes jokaisessa tilanteessa. Ajasta riippumattoman lämpötilajakauman tuottaminen Greenin funktion ajasta riippuvalla muodolla osoittautui laskennallisesti tehokkaaksi. Lämpötilajakaumista lasketuista tunnusluvusta pystyttiin arvioimaan lämmön jakautumista ja optimoinnin vaikutuksia. Optimointi toimi paremmin yksinkertaisemmissa tilanteissa, mutta monimutkaisemmissa tilanteissa ei välttämättä saavutettu tavoiteltua tulosta.

Avainsanat: Lämpötilajakauma, lämmönsiirto, Greenin funktio, optimointi

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin Originality Check –ohjelmalla.

Opinnäytteessäni käytetyt tekoälytyökalut ja niiden käyttötarkoitukset on kuvailtu alla:

**Työkalun nimi (ja versio):** ChatGPT (GPT-4o)

**Käyttötarkoitus ja osio, jossa työkalua käytettiin:** Kielenhuollon tarkastus luvuissa 1-6, MATLAB koodin luominen ja korjaus, luvussa 4.

Olen tietoinen siitä, että olen täysin vastuussa koko opinnäytteeni sisällöstä, mukaan lukien tekoälyllä tuotetut osat, ja hyväksyn vastuun mahdollisista eettisten ohjeiden rikkomuksista.

# SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO .....	1
2. LÄMMÖN TUOTANTO JA JÄÄHDYTYS ELEKTRONIIKKAKOMPONENTEISSA .....	2
2.1 Lämmöntuotanto elektroniikkakomponenteissa .....	2
2.2 Komponenttien lämpötilasta johtuvat ongelmat ja jäähdytys .....	3
3. GREENIN FUNKTIO .....	5
3.1 Lämpötilajakauman ratkaisu .....	5
3.2 Lämmönlähteiden sijainnin optimointi .....	8
3.3 Lämpötilajakauma ajasta riippumattomassa tilanteessa .....	8
4. LASKENNALLISET MENETELMÄT .....	10
4.1 Lämmönlähteiden sijainnin optimointi .....	10
4.2 Greenin funktion tuottama lämpötilajakauma .....	12
5. TULOKSET JA TULOSTEN TULKINTA .....	14
5.1 Lämmönlähteiden sijaintien optimointi .....	14
5.2 Lämpötilajakaumat.....	20
6. JOHTOPÄÄTÖKSET .....	27
LÄHTEET .....	28

# MERKINNÄT

$x, y$	Koordinaatit suorakulmaisessa koordinaatistossa ( $m$ )
$T$	Lämpötila ( $K$ )
$k$	Lämmönjohtavuus ( $\frac{W}{mK}$ )
$\alpha$	Terminen diffuusiokerroin ( $\frac{m^2}{s}$ )
$g$	Lämmöntuonnin teho ( $W$ )
$t$	Aika ( $s$ )
$G$	Greenin funktio ( $K$ )
$\delta$	Diracin delta-funktio ( $\frac{1}{m^2}$ )
$x', y'$	Lämmönlähteen sijainti suorakulmaisessa koordinaatistossa ( $m$ )
$t'$	Lämmöntuontiaika ( $s$ )
$h_i$	Konvektiokerroin ( $\frac{W}{m^2K}$ )
$n_i$	Reunapinnan normaali
$R$	Kappaleen pinta ( $m^2$ )
$S$	Kappaleen reuna ( $m$ )
$f$	Greenin funktion reunaehdon termi
$c$	Lämpökapasiteetti ( $\frac{J}{kgK}$ )
$\rho$	Tiheys ( $\frac{kg}{m^3}$ )
$L$	Reunan pituus ( $m$ )
$G_x, G_y, G_{xy}$	Greenin funktion ratkaisu
$n, m$	Greenin funktion ratkaisun sarjan summan indeksi
$w$	Lämmönlähteen suhteellinen teho
$W$	Greenin funktion ja ripatermin ratkaisu ( $K$ )
$m_r$	Greenin funktion ripatermi
$z$	Paksuus ( $m$ )

# 1. JOHDANTO

Tietokonekomponenttien toimintalämpötila on tärkeä pitää alhaisena komponentin toiminnan ja kestävyuden kannalta. Liian korkeat lämpötilat voivat johtaa komponenttien rikkoutumiseen [1], mutta taas matalampi lämpötila voi olla potentiaalisen laskentatehon tuhlaamista [2]. Komponentit voivat kuluttaa kymmeniä tai satoja watteja sähköä ja samalla tuottaa saman verran lämpöä [3, s. 2]. Tämä lämmöntuonti voi keskittyä muuttamaan pisteeseen saman komponentin sisällä. Lämmöntuotto yhdistettynä komponenttien ytimien pieneen kokoon johtaa suureen lämpövuohon komponentista jäähdyttimeen. Komponentin lämpötilan matalana pysymisen kannalta lämmönsiirtymisen on oltava mahdollisimman tehokasta. Lämmönsiirtoon voidaan vaikuttaa muun muassa muuttamalla komponentin pinnan lämpötilaa tai lämpötilajakaamaa.

Lämpötilajakauman laskeminen joissain tilanteissa numeerisilla menetelmillä voi olla laskennallisesti raskasta [4], ja lämmönlähteiden sijainnin optimointi sitäkin raskaampaa. Greenin funktion menetelmällä voidaan ratkaista lineaarisia differentiaaliyhtälöitä, joihin myös lämmönsiirtymisen liittyvät ongelmat kuuluvat. Greenin funktion menetelmä perustuu geometriasta ja reunaehdoista riippuvaan Greenin funktioon. Greenin funktion menetelmän etuna on, ettei se muutu paljonkaan monimutkaisemmaksi, kun lämmönlähteiden määrää lisätään tai sijainteja muutetaan.

Työn tavoite on selvittää, miten Greenin funktiota voidaan hyödyntää lämmönlähteiden sijoittelun optimoinnissa metallilevyssä. Lisäksi tutkitaan metallilevyn lämpötilajakaamaa Greenin funktiolla ja verrataan sitä muihin tutkimuksiin. Optimoinnista saatuja sijoitteluita verrataan muihin mahdollisiin sijoitteluihin, ja selvitetään kuinka paljon lämpötilajakauma tasaantuisi. Työssä tutkitaan lämpötilajakaamaa kaksiulotteisessa neljän muotoisessa levyssä, usean lämmönlähteen kanssa. Lämmönlähteiden määrä rajoitettiin työssä neljään, jotta saavutettiin sopiva monimutkaisuuden taso sekä todellisuutta kuvaava tilanne.

Luvuissa 2 ja 3 kerrotaan taustaa elektroniikan jäähdytyksestä sekä Greenin funktiosta. Greenin funktiota johdetaan myös työn tavoitteita vastaavaan muotoon. Luvussa 4 esitellään, kuinka tuloksien laskenta toteutettiin. Luvussa 5 esitellään tuloksia ja verrataan niitä muihin tutkimuksiin. Luvussa 6 vastataan tutkimuskysymyksiin, kerrataan työn tulokset ja ehdotetaan mahdollisia jatkotutkimuksia.

## 2. LÄMMÖN TUOTANTO JA JÄÄHDYTYS ELEKTRONIIKKAKOMPONENTEISSA

Elektroniikkakomponenttien käytössä niiden lämpötila on hyvin merkittävä tekijä, joka vaikuttaa komponentin toiminnan nopeuteen sekä sen elinikään. Tietokoneiden komponenteissa kuten näytönohjaimissa tai prosessoreissa on valtava määrä transistoreita. Kuluttajakäyttöönkin tarkoitetuissa komponenteissa voi olla miljardeja transistoreja vain muutaman neliösenttimetrin alueella. Suuri transistorien määrä johtaa suureen energiankulutukseen pienellä alueella ja siten suureen lämmöntuottoon [5]. Tämä lämpö pyritään poistamaan mahdollisimman tehokkaasti, vähentäen korkeiden lämpötilojen tuomia haittoja komponenteille.

### 2.1 Lämmöntuotanto elektroniikkakomponenteissa

Yleisesti kaikki sähkölaitteet kuluttavat sähköenergiaa teholla  $I^2R$  (W), jossa  $I$  (A) on sähkövirta komponentin läpi ja  $R$  ( $\Omega$ ) on komponentin resistanssi. Komponentin läpi kulkeva virta taas riippuu jännitteestä komponentin napojen välillä. Tietokonekomponentissa käytännössä kaikki käytetty teho muuttuu lopulta lämmöksi. [6] Kuluttajaluokan tietokoneiden tehonkulutus ja lämmöntuonti keskittyvät kahteen komponenttiin: Prosessoriin ja näytönohjaimeen. Nämä suorittavat tietokoneen loogisen vertailun. Kumpikin näistä komponenteista voi kuluttaa satoja watteja sähkötehoa. Teollisen tason tietokannoissa ja palvelimissa, jotka voivat olla teholtaan satojakin megawatteja, suuria lämpökuormia aiheuttaa samankaltaiset komponentit, joiden määrä on vain suurempi. Palvelimissa suuria tehoja voi käyttää logiikkakomponenttien lisäksi muistipiirit. [7]

Tietokoneen komponentit koostuvat pohjimmiltaan transistoreista, nanometriluokan komponenteista, jotka voivat saada totuusarvon 1 tai 0. Logiikan vertailu tapahtuu useiden erilaisten transistorien ketjuissa. Transistorien etuja logiikan käsittelyssä on hyvin pienen kokonsa lisäksi mahdollinen nopea päivittäminen. [8, Luku 13] Transistorien päivitysnopeutta prosessorien tai näytönohjainten ytimissä kutsutaan kellotaajuudeksi, ja sitä kuvataan yleensä mega- tai gigahertseinä. Kellotaajuuden kasvaessa tarvitaan komponentin toimimiseen korkeampi jännite, koska transistorien varaaminen tapahtuu nopeammin [8, Luku 13]. Transistoreita voidaan myös hyödyntää tietokoneen muisteissa, mutta se ei ole ainoa käytössä oleva muistitekniikka.

Tietokonekomponentissa sähkövirta muodostuu, kun sähkökenttä saa elektronit tai muut varauksen kantajat liikkumaan. Lämpöä taas muodostuu, kun elektronit vaikuttavat johtimeen tai puolijohtimen materiaaliin [5, s. 1589]. Komponentissa muodostuva lämpömäärä riippuu transistoriteknologiasta, mikä vaikuttaa myös komponentin sisäiseen lämmönjohtavuuteen [8, Luku 8].

## 2.2 Komponenttien lämpötilasta johtuvat ongelmat ja jäähdytys

Komponentin tuottaessa lämpöä sen lämpötila nousee suhteessa ympäristöön. Lämpötilan nousu riippuu lämpötehosta ja lämmönjohtumisvastuksesta. Korkea lämpötila tietokoneen komponentissa lyhentää sen käyttöikää ja aiheuttaa lopulta rikkoutumisen. Toisin kuin tavallisissa johteissa, puolijohteissa lämpötilan noustessa resistanssi laskee, mikä voi johtaa virran loikkaamisen ei-toivotulla tavalla ja puolijohteen rikkoutumisen [1, s. 5]. Tällaisilta tilanteilta komponentteja voidaan suojata sammuttamalla ne tietyn lämpötilan ylittyessä. Kuluttajakäyttöisten prosessorien korkeimmat sallitut lämpötilat riippuvat valmistajasta ja mallista, mutta esimerkiksi Intel on asettanut useisiin valmistamiinsa prosessoreihin rajan 100 celsiusasteeseen [9].

Lisäksi komponentit altistuvat korkeissa lämpötiloissa mekaanisille voimille johtuen materiaalien erilaisista lämpölaajenemiskertoimista. Kahden materiaalin liitoksessa, jossa toinen materiaali laajenee enemmän kuin toinen, voi aiheutua voimia liitokseen heikentäen sitä [1, s. 4]. Korkeiden lämpötilojen ja suurien virtojen vaikutuksesta voi johtimiin muodostua tyhjiöitä. Tyhjiöitä muodostuu, kun johdinmateriaalin atomit irtoavat metallihilasta ja siirtyvät toisiin kohtiin hilaa sähkökentän vaikutuksesta. [10, s. 18] Tyhjiöt lisäävät johtimien resistiivisyyttä ja vaikuttavat komponentin toimintaan.

Elektroniikkakomponentin tuottaessa liikaa lämpöä käytetään yleensä jäähdytuselementtiä. Prosessoreissa ja näytönohjaimissa jonkinlainen jäähdytin on käytännössä pakollinen niiden lämmöntuottotehonsa takia. Yksinkertaisimmillaan jäähdytuselementti on komponentin päälle asennettu metallilevy, jonka tarkoituksena on lisätä lämmönsiirtopinta-alaa. Jotta komponentin ja jäähdytuselementin välinen liitos olisi lämmönsiirtovastukseltaan mahdollisimman pieni, voidaan näiden väliin lisätä pintoja yhdistävää tahnaa, jolloin pintojen epätasaisuudet eivät haittaa lämmönsiirtoa.

Jäähdytuselementin lämmönsiirtotehoa voidaan kasvattaa lisäämällä metallilevyyn rivasto, joka kasvattaa lämmönsiirtopinta-alaa. Luonnollisen konvektion lisäksi elektroniikassa käytetään pakotettua virtausta konvektion tehostamiseksi. Väliaineena voi olla joko ilma tai neste, jota liikutetaan tuulettimella tai pumpulla jäähdytuselementtiin ja siten siirtäen lämpöä pois komponentista.

Teollisissa datakeskuksissa jäähdytys toimii yksittäisten komponenttien ympäristössä samoin kuin kuluttajaelektronikassa, mutta komponentissa lämmennyt neste tai kaasu tekee suuressa palvelinrakennuksessa uuden ongelman. Lämpimästä fluidista on päästävää tehokkaasti eroon ilman, että se haittaa muiden komponenttien jäähdytystä. Ilmajäähdytteisissä palvelinrakennuksissa ongelma ratkaistaan palvelinhyllyköiden välisillä käytävillä, joista osa on kylmiä ja osa lämpimiä [11, s. 625]. Kylmiltä käytäviltä komponentteihin imetään ilmaa ja puhalletaan pois lämpimille, joista ilma taas siirretään pois rakennuksesta. Nestejäähdytteisissä palvelimissa saadaan aikaan suurempi lämmönsiirto konvektiolla nesteen ja kiinteän komponentin välille kuin ilmalla [11, s. 627]. Lisäksi nesteiden lämpökapasiteetin ja tiheyden suhde on suurempi kuin ilmalla, minkä ansiosta jäähdytinnesteitä voidaan siirtää putkissa eikä suurilla käytävillä. Myöskään lämmönsiirron lämpötilaero ei pienene niin nopeasti lämmön siirtyessä, jolloin komponentteja voi olla sarjassa samassa nestepiirissä useampia. Toisaalta nestejäähdyttimet ovat suljettuja kiertoja ja neste pitää jäähdyttää ennen syöttämistä uudelleen komponentteihin.

Datakeskuksissa jäähdytys voi kattaa jopa kolmasosan keskuksen sähkönkulutuksesta [12]. Tästä syystä komponenttien paremmalla sijoittelulla lämmönsiirron suhteen voidaan pienentää datakeskusten sähkönkulutusta. Jäähdytinelementeistä voidaan saada aikaan suurempia lämpövirtoja, koska lämpö jakautuu tasaisemmin elementin pinnalle. Jolloin pakotetulla konvektiolla ei tarvitse kompensoida pienempää lämpötilaeroa fluidin ja komponentin välillä, eli pumpuilla tai puhaltimilla ei tarvita niin suurta tehoa.

### 3. GREENIN FUNKTIO

Lämmönsiirtyminen kaksiulotteisessa levyssä tuottaa lineaarisen differentiaaliyhtälön [13, s. 2],

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{k} g(x, y, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Jossa  $x$  ja  $y$  ovat karteesisien koordinaattien arvot ( $m$ ),  $T$  on lämpötila ( $K$ ),  $k$  on väliaineen lämmönjohtavuus ( $\frac{W}{mK}$ ),  $\alpha$  on termien diffuusiokerroin ( $\frac{m^2}{s}$ ),  $g$  on lämmöntuonti materiaalissa ( $W$ ) ja  $t$  on aika ( $s$ ). Differentiaaliyhtälön (1) ratkaiseminen on usein todella monimutkaista, jos tilanne on ajasta riippuva ja lämmönlähteitä on useita. Monissa tapauksissa pitääkin turvautua numeeriseen ratkaisuun, joka voi muodostua laskennallisesti raskaaksi optimointiongelman ratkaisumenetelmänä.

#### 3.1 Lämpötilajakauman ratkaisu

Greenin funktion menetelmä on tapa ratkaista lineaarisia differentiaaliyhtälöitä, jolla saadaan useita hyötyjä suhteessa lämpöyhtälön suoraan ratkaisemiseen. Greenin funktion menetelmän keskiössä on Greenin funktion ratkaisu. Kyseinen ratkaisu riippuu vain tilanteen geometriasta ja reunaehtojen tyypistä. Lisäksi Greenin funktion ratkaisuja tunnetaan lämmönsiirrossa ainakin yksinkertaisimmille geometrioille laajasti. Joten samalla yhtälöllä tai hyvin pienillä muutoksilla voidaan ratkaista ongelmia, jossa muut alkuarvot muuttuvat. Moniulotteinen tapaus ei tee ratkaisusta monimutkaisempaa, sillä usean ulottuvuuden ratkaisu suorakulmaisessa tilanteessa saadaan yksittäisten ulottuvuuksien ratkaisujen tulona. Lämpötilajakauman ratkaisu voidaan esittää integraalien summana, jotka muodostuvat alkutilan lämpötilajakaumasta, reunaehdoista sekä lämmönlähteistä. Integraalimuotoinen ratkaisu on helposti muokattavissa. Esimerkiksi uuden lämmönlähteen lisääminen lisää vain yhden summattavan integraali, eikä vaikuta muihin termeihin. [14]

Lämpötilajakauma ongelman ratkaisemiseen tarvitaan kolme apuyhtälöä, joista ensimmäinen hyvin samankaltainen, kuin lämpöyhtälö (1). Kuitenkin ensimmäisessä apuyhtälössä lämpötila  $T$  on korvattu Greenin funktiolla  $G$  ( $K$ ) ja lämmöntuontitermi  $g$  Diracin delta-funktiolla  $\delta$  ( $\frac{1}{m^2}$ ) [15].

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{1}{k} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(t - t') = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t'} \quad (2)$$

Yhtälössä  $x'$  ja  $y'$  ovat lämmönlähteen sijainnit suorakulmaisessa koordinaatistossa (m) ja  $t'$  on lämmöntuontiaika (s). Diracin delta-funktion ominaisuuksia on saada arvoksi ääretön syötteen ollessa nolla ja muuten saaden arvon nolla, sekä integraalin impulssin yli antaen arvon yksi [14, s. 11].

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 1, & (x = x') \\ 0, & (x \neq x') \end{cases} \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx' = 1 \quad (4)$$

Diracin delta-funktio kuvaa impulssimaista nopeaa lämmöntuontia pistemäiseen kohtaan. Toinen apuyhtälö kuvaa alkuperäisestä tilanteesta ennen lämmöntuonti-impulssia [14, s. 70].

$$G(x', y', t' | x, y, t) = 0, (t < t') \quad (5)$$

Kolmas apuyhtälö määrittyy reunaehdoista [15].

$$k_i \frac{\partial G}{\partial n_i} + h_i G = 0 \quad (6)$$

Jossa  $h_i$  ( $\frac{W}{m^2K}$ ) on pinnan konvektiokerroin ja  $n_i$  on reunapinnan normaali. Kertomalla yhtälö (1) Greenin funktiolla ja kertomalla yhtälö (2) lämpötilalla sekä vähentämällä yhtälö (2) yhtälöstä (1) saadaan

$$(G\nabla^2 T - T\nabla^2 G) + \frac{1}{k} g(x', y', t') G - \frac{1}{\alpha} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(t - t') T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial GT}{\partial t'}. \quad (7)$$

Yhtälö (7) kerrotaan termisellä diffuusiokerroimella ja integroidaan pinnan yli lämmönlähteiden suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{R_y} \int_{R_x} \alpha (G\nabla^2 T - T\nabla^2 G) dx' dy' dt' + \int_0^t \int_{R_y} \int_{R_x} \frac{\alpha}{k} G g(x', y', t') dx' dy' dt' - T(x, y, t) \\ = \int_{R_y} \int_{R_x} GT dy' dx'. \end{aligned} \quad (8)$$

Jossa  $R$  on kappaleen pinta. Yhtälössä (8)  $T$  muodostuu integroinnista Diracin delta-funktioiden ja lämpötilan integroinnista. Kuten yhtälöstä (4) huomataan, Diracin delta tuottaa integroinnista arvon yksi, joka poimii lämmöntuontihetken lämpötilan  $T$  [14].

$$T(x, y, t) = \int_0^t \int_{R_x} \int_{R_y} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(t - t') T dy' dx' dt' \quad (9)$$

Yhtälöstä (8) saadaan ratkaisuksi [14, s. 66]

$$\begin{aligned}
T(x, y, t) &= \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} G(x, y, t|x', y', 0) F(x', y') dx' dy' \\
&+ \frac{\alpha}{k} \int_0^t dt' \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g(x', y', t') G(x, y, t|x', y', t') dx' dy' \\
&+ \alpha \int_0^t \sum_{i=1}^4 \int_{S_i} \frac{f_i(x', y', t')}{k} G(x, y, t|x', y', t') ds' dt'
\end{aligned} \tag{10}$$

Jossa  $S$  on reuna, joita on kaksi  $x$ -suuntaan ja kaksi  $y$ -suuntaan.  $f$  on reunaehdoista riippuva arvo, mutta tilanteessa, jossa lämmönsiirtoa ei tapahdu reunoilta, saa  $f$  arvoksi nolla. Yhtälön (10) ensimmäinen termi tulee levyn alkuperäisestä lämpötilasta, toinen termi tulee lämmöntuonnista ja kolmas termi reunaehdoista. Reunatermi häviää, kun lämpövirtaa ei ole reunojen yli, ja alkuperäisen lämpötilan termi katoaa, kun asetetaan alkulämpötila nolllaksi. Tällöin saadaan yhtälö (10) muotoon, joka kuvaa lämpötilaeron ympäristön ja kappaleen välille.

$$T(x, y, t) = \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g(x', y', t') G(x, y, t|x', y', t') dx' dy' dt' \tag{11}$$

Terminen diffuusiokerroin voidaan esittää myös muodossa [15]

$$\alpha = \frac{k}{c\rho}, \tag{12}$$

jossa  $c$  on aineen lämpökapasiteetti ja  $\rho$  on aineen tiheys. Greenin funktion kaksiulotteinen ratkaisu saadaan  $x$ - ja  $y$ -suunnan ratkaisujen tulona [14]

$$G(x, y, t|x', y', t') = G_x(x, t|x', t') G_y(y, t|y', t'). \tag{13}$$

Greenin funktion ajasta riippuva pitkän aikavälin ratkaisu on muotoa:

$$G_x(x, t|x', t') = \sum_{m=1}^{\infty} f(x') e^{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{L_x^2}}, \tag{14}$$

jossa  $f(x')$  ( $\frac{1}{m}$ ) on koordinaateista riippuva funktio,  $L_x$  on kappaleen pituus  $x$ -suuntaan ( $m$ ) ja  $t$  on aika (s). Ratkaisussa summataan äärettömän monta termiä, joista ensimmäinen on vaikuttavin ratkaisussa, kun  $m$  saa arvon 1. Summan indeksin  $m$  vastike  $y$ -koordinaatille on  $n$ . Huomataan sijainnin ja ajan sijaitsevan erillään kahdessa funktiossa, joista Greenin funktio muodostuu kertomalla.

### 3.2 Lämmönlähteiden sijainnin optimointi

Tilanteessa, jossa lämmönlähteitä on useampi, lisätään lämpötilan lausekkeeseen jokaiselle lämpölähteelle oma lämpölähteen lauseke [14, s. 74].  $N$  pistemäisen lämmönlähteen tapauksessa lämpötilan lausekkeessa on  $N$  kappaletta termejä, jotka vastaavat yhtälöä (11). Greenin funktion ratkaisusta vain osa  $f(x')$  riippuu lämmönlähteiden sijainneista. Kun sijoitetaan Greenin funktio yhtälöön (13) saadaan lämmönlähteen sijainnista riippuvasta osasta

$$A = f(x')f(y'). \quad (15)$$

Yhtälön (14) summien ensimmäiset arvot tuottavat suurimmat arvot lämpötilajakaumaan, johtuen eksponentista, jossa on negatiivinen  $m$ . Jotta lämpölähteen lämmöntuonti-impulssi aiheuttaisi mahdollisimman pienen muutoksen lämpötilajakaumaan, kannattaa ensimmäiset summatermit nollata tai minimoida. Summatermit saavat arvon nolla eli eivät vaikuta lämpötilajakaumaan, kun  $A$  on nolla. Kun lämpölähteitä on useampia, voidaan luoda matriisin ja vektorin tulo, josta pitäisi saada nollavektori vastaukseksi. Vektorissa on lämpölähteiden suhteelliset lämmöntuonnin tehot  $w$ .

$$[A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_M] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

Yhtälössä (16) esitellään vain Greenin funktion sarjan ensimmäiset indeksit, mutta näitäkin suurempia indeksejä on mahdollista saada nollattua. Jokaisen lähteen  $x$ - ja  $y$ -koordinaatti on oma muuttujansa, joten muuttujia on kaksi kertaa lähteiden määrä.

### 3.3 Lämpötilajakauma ajasta riippumattomassa tilanteessa

Ajasta riippumaton lämpötilajakauma tarkoittaa tilannetta, jossa lämmönlähteiden teho pysyy vakiona ajan suhteen ja lämpötila on saavuttanut stabiilin tilan viimeisimmän tehonmuutoksen jälkeen. Lämpötilajakauma pyritään saamaan komponentissa mahdollisimman tasaiseksi, jotta kuumia pisteitä ei muodostuisi ja lämmönlähteet hyödyntäisivät sijainneillaan lämmönsiirtopinta-alan mahdollisimman tehokkaasti.

Tutkitaan tässä alaluvussa lämpötilajakauman muodostamista aiemmin esitetyllä Greenin funktiolla. Greenin funktiosta on olemassa myös ajasta riippumaton muoto, kuitenkin se on omalla tavallaan monimutkaisempi kuin ajasta riippuva funktio. Ajasta riippuvan ja ajasta riippumattoman tilanteen yhteytenä on, että ajasta riippumaton tilanne tasaantuu ajasta riippumattomaan tilanteeseen, kun tarkasteltava aika lähestyy ääretöntä [14, s.

71]. Muutetaan lämmöntuotanto ajasta riippumattomaksi, jotta lämpötila ei tasaannu vain ympäristön lämpötilaan. Ajasta riippumattomasta lämmöntuontitermistä poistetaan Dirac'n delta -termi, joka on ajasta riippuva funktio. Lisäksi käytetään lämmön poistamiseen levystä ripatermiä, mikä lisää Greenin funktioon uuden osan [14, s. 78]

$$W = e^{-m_r^2 \alpha t} G \quad (17)$$

jossa  $m_r$  on rivastosta riippuva arvo. Yhtälöllä (17) voidaan mallintaa lämpötilaa tasaantuneessa tilanteessa hyvin samankaltaisella funktiolla, kuin ajasta riippuvassa tilanteessa. Nyt saadaan lämpötilalle yhtälöksi

$$T(x, y, t) = \frac{1}{c\rho} \int_0^t \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g(x', y') W(x, y, t | x', y', t') dx' dy' dt' . \quad (18)$$

Huomattavaa on, että lämmöntuonti riippuu nyt vain sijainnista. Integroidessa yhtälöä (18) ajan suhteen nolasta äärettömään saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{1}{L^2} (e^{-m_r^2 \alpha t} + A_{xm} e^{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{L_x^2}} + A_{yn} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha t}{L_y^2}} + A_{xm} A_{yn} e^{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{L_x^2} - \frac{n^2 \pi^2 \alpha t}{L_y^2}}) dt \\ = \frac{1}{L^2} \left( \frac{1}{m_r^2 \alpha} + A_{xm} \frac{L_x^2}{m^2 \pi^2 \alpha} + A_{yn} \frac{L_y^2}{n^2 \pi^2 \alpha} + A_{xm} A_{yn} \frac{L_x^2 L_y^2}{\pi^2 \alpha (m^2 + n^2 + m_r^2)} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

Jossa  $A_{xm}$  ja  $A_{yn}$  ovat Greenin funktion ratkaisusta muodostuvia arvoja, jotka ovat vakioita ajan suhteen. Kertoimien  $n$  ja  $m$  ovat sarjan termien indeksejä Greenin funktion ratkaisusta (14). Summataan yhtälön (18) lämmönlähteiden yli avaruudellisesti ja sijoitetaan yhtälön (19) ratkaisu yhtälöön (18).

$$\begin{aligned} T = \sum_{x=0}^{L_x} \sum_{y=0}^{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{L^2} \frac{1}{c\rho} \sum_{i=1} g_i \left( \frac{1}{m_r^2} + A_{xm} \frac{L_x^2}{m^2 \pi^2 \alpha m_r^2} + \right. \\ \left. A_{yn} \frac{L_y^2}{n^2 \pi^2 \alpha m_r^2} + A_{xm} A_{yn} \frac{L_x^2 L_y^2}{\pi^2 \alpha (m^2 + n^2 + m_r^2)} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Yhtälöllä (20) voidaan laskea lämpötilajakauma levyssä usealla pistemäisellä lämpölähteellä.

## 4. LASKENNALLISET MENETELMÄT

Tutkittavaksi lämmönlevittimeksi valittiin alumiininen neliö, jonka sivu on 1 senttimetri pitkä ja yhden millimetrin paksu. Toisaalta sijainnit levyllä ovat tällöin suhteita pituudesta. Käytetään alumiinille arvoja: Tiheys ( $\rho$ )  $2697 \frac{kg}{m^3}$  [16, s. 2114], lämpökapasiteetti ( $c$ )  $897 \frac{J}{kgK}$  [16, s. 812] ja lämmönjohtavuus ( $k$ )  $237 \frac{W}{mK}$  [16, s. 2299]

Laskennassa oletetaan, että komponentin lämmönlähteiden ja metallilevyn välillä ei ole lämmönsiirtovastusta, mutta lämmönsiirtymisellä levyssä on alumiinille ominainen lämmönsiirtovastus. Lämmönlähteiden oletetaan olevan pistemäisiä, eikä niillä ole pinta-alaa. Pistemäisyys on perusteltua, koska lämmönlähteiden koko todellisuudessaakin on pieni verrattuna metallilevyyn. Oletetaan myös, että metallilevy on ohut eli lämpötilajakauma voidaan arvioida kahdessa dimensiossa. Laskenta suoritettiin MATLAB R2024b teknisellä laskentaohjelmalla.

### 4.1 Lämmönlähteiden sijainnin optimointi

Oletetaan ettei ohuen levyn reunoilta siirry lämpöä ympäristöön, jolloin levyn reunaehto on tyyppiä kaksi. Greenin funktion ratkaisu  $x$ -suuntaan suorakulmaisessa koordinaatistossa ja tyyppin kaksi reunaehdoilla on [14, s. 597]

$$G_x(x, t|x', t') = \frac{1}{L_x} \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(m\pi \frac{x}{L_x}\right) \cos\left(m\pi \frac{x'}{L_x}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2\alpha(t-t')}{L_x^2}} \right) \quad (21)$$

$y$ -suuntaan Greenin funktion ratkaisu on samanlainen, mutta  $x$ -koordinaatti ja  $x$ -suuntaan pituus  $L_x$  vaihdetaan  $y$ -suunnan arvoihin. Jolloin yhtälön (15) mukaan saadaan kahden dimension Greenin funktion lähteiden sijainneista riippuvasta osasta

$$A = 2 \cos\left(m\pi \frac{x'}{L_x}\right) + 2 \cos\left(n\pi \frac{y'}{L_y}\right) + 4 \cos\left(m\pi \frac{x'}{L_x}\right) \cos\left(n\pi \frac{y'}{L_y}\right). \quad (22)$$

Kun yhtälön (22) termit eritellään erikseen, saadaan matriisin (16) termeiksi

$$A_{x1} = 2 \cos\left(1\pi \frac{x'}{L_x}\right) \quad (23)$$

$$A_{y1} = 2 \cos\left(1\pi \frac{y'}{L_y}\right) \quad (24)$$

$$A_{x1y1} = 4 \cos\left(1\pi \frac{x'}{L_x}\right) \cos\left(1\pi \frac{y'}{L_y}\right) \quad (25)$$

Optimointi suoritettiin yhtälön (16) mukaisesti minimoimalla yhtälöiden (23), (24) ja (25) mukaisia osia. Sijainnin optimointi tehtiin MATLABin fmincon-optimointifunktiolla, joka etsii määritellylle funktiolle lokaaleja tai globaaleja minimejä. Fmincon funktion algoritmina käytettiin interior-point tyyppiä. Neljällä lämmönlähteellä Greenin funktion summa valittiin  $n$ - ja  $m$ -termien kolme ensimmäistä sarjan termiä, pois lukien kolmannen sarjan yhtälön (25) kaltainen  $x$ - ja  $y$ -koordinaattien yhdistelmä. Tällöin minimoitavaksi vektoriksi saatiin

$$f(x) = \begin{bmatrix} A_{x11} & A_{x12} & A_{x13} & A_{x14} \\ A_{y11} & A_{y12} & A_{y13} & A_{y14} \\ A_{x11}A_{y11} & A_{x12}A_{y12} & A_{x13}A_{y13} & A_{x14}A_{y14} \\ \frac{1}{10}A_{x21} & \frac{1}{10}A_{x22} & \frac{1}{10}A_{x23} & \frac{1}{10}A_{x24} \\ \frac{1}{10}A_{y21} & \frac{1}{10}A_{y22} & \frac{1}{10}A_{y23} & \frac{1}{10}A_{y24} \\ \frac{1}{10}A_{x21}A_{y21} & \frac{1}{10}A_{x22}A_{y22} & \frac{1}{10}A_{x23}A_{y23} & \frac{1}{10}A_{x24}A_{y24} \\ \frac{1}{100}A_{x31} & \frac{1}{100}A_{x32} & \frac{1}{100}A_{x33} & \frac{1}{100}A_{x34} \\ \frac{1}{100}A_{y31} & \frac{1}{100}A_{y32} & \frac{1}{100}A_{y33} & \frac{1}{100}A_{y34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

jossa siis matriisissa riveissä kullekin Greenin funktion summan indekseille  $n$  ja  $m$  on kolme riviä, jonka jälkeen siirrytään seuraavaan summan termiin. Kertoimet  $\frac{1}{10}$  ja  $\frac{1}{100}$  ottavat huomioon, että mitä suurempia Greenin funktion summan indeksit  $n$  ja  $m$  ovat, sitä pienempi on niiden vaikutus tulokseen. Sarakkeissa on taas kullekin lämmönlähteelle tarkoitetut termit. Vektorissa on lämmönlähteiden suhteelliset tehot. Yhtälöä (26) minimoimalla saatiin lämmönlähteiden optimaaliset sijainnit.

Optimointifunktiolle on annettava alkuarvot lähteiden sijainneille, josta optimointi aloitetaan. Optimoinnin tulos voi vaihdella paljonkin alkuarvojen välillä, joten useita alkuarvoja kokeiltiin ja niistä valittiin lähimpänä nollavektoria saatava ratkaisu. Tuloksia vertailtiin yhtälön (26) lopputuloksien normien suhteen. Alkuarvoina käytetyt koordinaatit esitellään Taulukossa 1.

Taulukko 1: Lämmönlähteiden sijainnin optimoinnin alkuarvauksen koordinaatit. Neljänsiä alkuarvoja ei käytetty.

	Lähde 1	Lähde 2	Lähde 3	Lähde 4
Alkuarvot 1 ( $x, y$ )	(0,25, 0,75)	(0,75, 0,75)	(0,75, 0,25)	(0,25, 0,25)
Alkuarvot 2 ( $x, y$ )	(0,1, 0,9)	(0,9, 0,9)	(0,9, 0,1)	(0,1, 0,1)
Alkuarvot 3 ( $x, y$ )	(0,1, 0,9)	(0,75, 0,75)	(0,9, 0,1)	(0,25, 0,25)
Alkuarvot 4 ( $x, y$ )	(0,5, 0,5)	(0,5, 0,5)	(0,5, 0,5)	(0,5, 0,5)

Alkuarvoissa otettiin huomioon, että neljällä erikokoisella lämmönlähteellä, lähteet voidaan asettaa neljään erilaiseen järjestykseen, jotka eivät ole toistensa peilauksia tai kieroja. Alkuarvoista 4 kuitenkin luovuttiin sen johtaessa joissakin tilanteissa kaikkien lämmönlähteiden ryppäaseen levyn keskikohtaan. Taulukossa 2 esitetään lämmönlähteiden suhteelliset tehokkuudet asetelmissa, joita optimoitiin.

Taulukko 2: Lämmönlähteiden optimoinnin asetelmien suhteelliset lämmöntuonti tehot

	Lähde 1 (-)	Lähde 2 (-)	Lähde 3 (-)	Lähde 4 (-)
Asetelma 1	1	1	2	2
Asetelma 2	3	3	3	4
Asetelma 3	1	1	1	2
Asetelma 4	1	2	10	20

## 4.2 Greenin funktion tuottama lämpötilajakauma

Lämpötilajakauma laskettiin yhtälöllä (20), jossa metallilevy jaettiin  $x$ - ja  $y$ -suuntaan 100 osaan, jotka laskettiin numeerisesti lämmönlähteiden yli koordinaattien suhteen. Lähteiden sijainnit pyöristettiin kahden desimaalin tarkkuuteen, jotta lähteet osuvat laskettaviin pisteisiin. Yhtälön (21) sarjojen termeistä käytettiin 20 ensimmäistä, eli  $n$  ja  $m$  saavat arvoja yhdestä kahteenkymmeneen. Oletetaan siis sarjan termeistä vain 20 ensimmäistä on merkittäviä ja sen jälkeen niiden vaikutus on merkityksettömän pieni.

Yhtälön (20) ripavakio  $m_r$  arvioitiin kaavalla

$$m_r = \sqrt{\frac{h}{kz}}, \quad (24)$$

jossa  $h$  on konvektion lämmönsiirtokerroin,  $k$  on levyn lämmönjohtavuus ja  $z$  on levyn paksuus. Konvektion lämmönsiirtokertoimena käytettiin arvoa  $10 \frac{W}{m^2K}$ . Vaikka levyllä on paksuus, lämmön oletetaan siirtyvän vain  $x$ - ja  $y$ -suunnissa.

Lämpötilajakaumasta laskettiin tunnusluvuiksi jakauman korkein lämpötila, lämpötilan mediaani, lämpötilan keskihajonta sekä keskihajonnan ja mediaanin suhde. Lämpötilajakauma laskettiin ensin taulukon 1 sijaintien alkuarvoilla ja taulukon 2 lämmönlähteiden tehoilla, sekä optimoiduilla lämmönlähteiden sijainneilla.

## 5. TULOKSET JA TULOSTEN TULKINTA

Tässä luvussa esitellään laskennallisten menetelmien tulokset ja analysoidaan tuloksia. Ensin käsitellään optimoinnista saadut tulokset ja esitetään laskennalliset lämpötilajakaumat sekä alkuperäisillä että optimoiduilla lämmönlähteiden sijainneilla. Lisäksi arvioidaan lämpötilajakauman tunnuslukujen perusteella, ovatko optimoidut sijainnit lämmönlähteille lämmönsiirron kannalta paremmat kuin alkuperäiset.

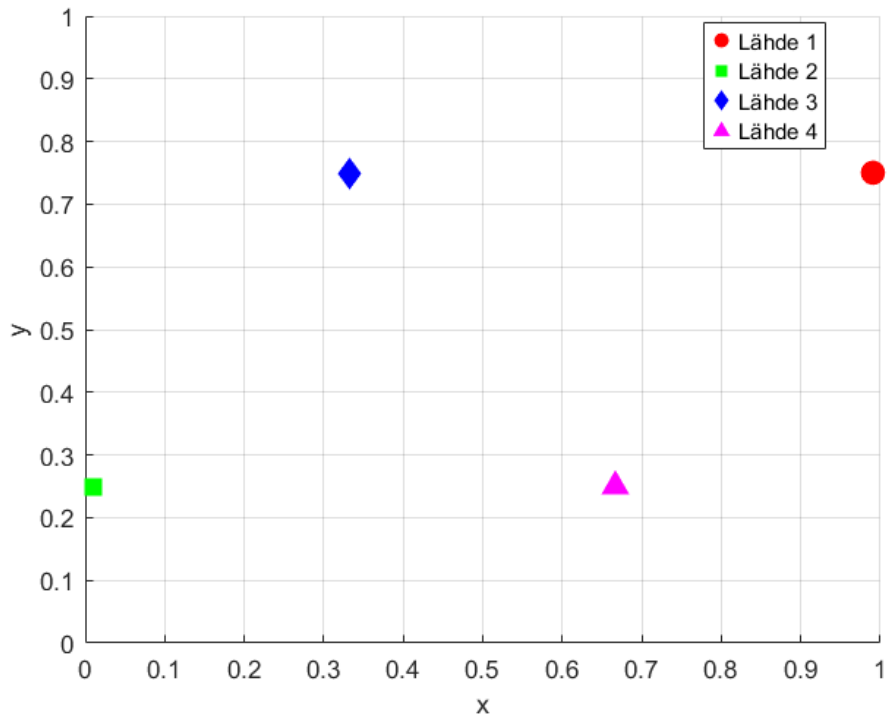
### 5.1 Lämmönlähteiden sijaintien optimointi

Taulukossa 3 on esitetty optimoinnista saadut lämmönlähteiden sijainnit pyöristettynä lähimpään laskentaverkon pisteeseen. Lisäksi Taulukossa 3 esitetään optimoinnin tulos tilanteelle, jossa kaikki lähteet ovat samankokoisia.

*Taulukko 3: Lämmönlähteiden optimoidut sijainnit pyöristettynä kahden desimaalin tarkkuuteen*

		Lähde 1	Lähde 2	Lähde 3	Lähde 4
Asetelma (x, y)	0	0,25 , 0,75	0,75 , 0,75	0,75 , 0,25	0,25 , 0,25
Asetelma (x, y)	1	0,99 , 0,75	0,01 , 0,25	0,33 , 0,75	0,67 , 0,25
Asetelma (x, y)	2	0,87 , 0,83	0,17 , 0,70	0,29 , 0,39	0,64 , 0,18
Asetelma (x, y)	3	0,80 , 0,42	0,01 , 0,02	0,80 , 0,38	0,40 , 0,80
Asetelma (x, y)	4	0,00 , 0,91	0,00 , 0,91	0,61 , 0,85	0,50 , 0,30

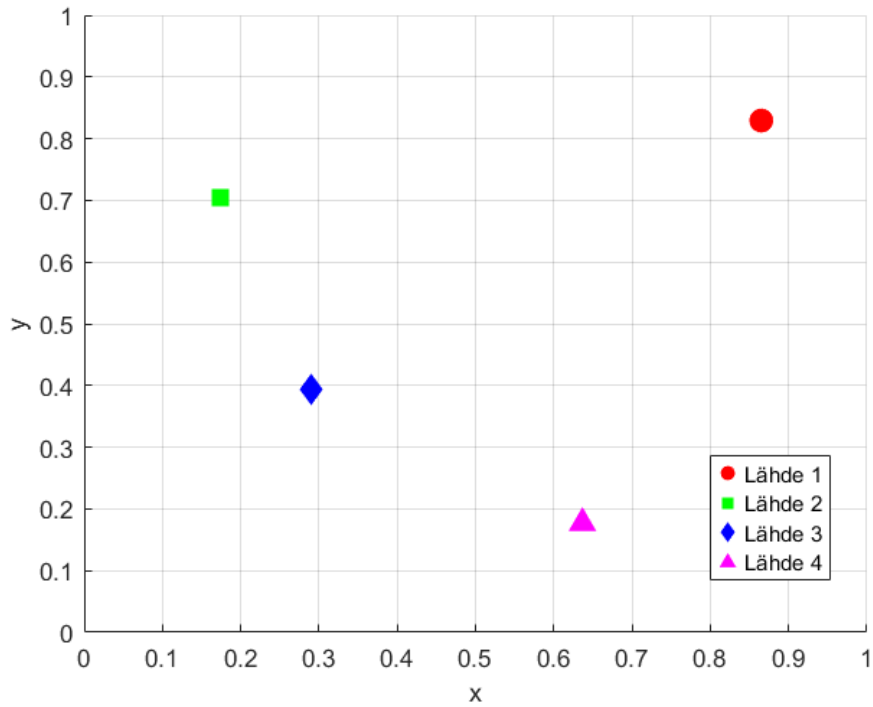
Kaikkien lämmönlähteiden ollessa samankokoisia, löytyy minimoitavan vektorin nollakohta loogisesti symmetrisestä muodosta Taulukon 4 asetelman 0 esittämistä sijainneista. Kuvassa 1 on esitetty asetelman 1 optimoinnin tulokset. Optimoinnissa löytyi vektorin normille nollakohdan, joka saavutettiin alkuarvoilla 1, jossa suuremmat lämmönlähteet sijaitsivat vastakkaisissa kulmissa.



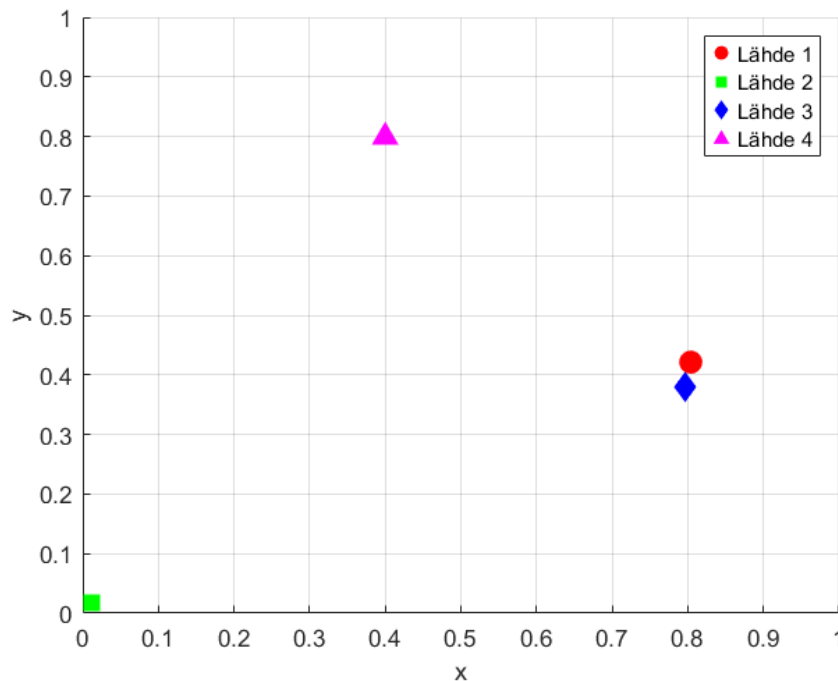
**Kuva 1: Asetelman 1 optimoinnin tulos, jossa lämmönlähteiden suhteelliset tehot ovat järjestyksessään: 1, 1, 2, 2.**

Kuvasta 1 huomataan asetelman 1 optimoiduissa sijainneissa, suuremmat lähteet 3 ja 4 ovat lähempänä keskustaa ja niillä on enemmän tilaa ympärillään. Tämä vaikuttaa loogisesti järkevältä, sillä suurempi vapaa tila lämmönlähteiden ympärillä johtaa nopeampaan lämpöimpulssin tasaantumiseen ja parempaan lämmönsiirtymiseen. Kuitenkin pienemmät lähteet 1 ja 2 sijaitsevat hyvin lähellä levyn reunoja, mikä heikentää niiden lämmönsiirtoa. Toisaalta lähteet 1 ja 2 ovat puolet pienempiä kuin suuremmat lähteet, jolloin niiden impulssien tasaantuminen vie mahdollisesti puolet vähemmän aikaa samalla lämmönsiirtopinta-alalla. Kun pienemmät lähteet sijaitsevat aivan levyn reunassa, niiden käytettävissä oleva lämmönsiirtopinta-ala ikään kuin puolittuu.

Verrattaessa asetelmia 2 ja 3 ovat ne samankaltaisia: Asetelmassa 2 yksi lähde on kolmasosan muita suurempi, kun taas asetelmassa 3 yksi lähde on kaksinkertainen muihin nähden. Kuvissa 2 ja 3 on esitetty asetelmien 2 ja 3 lämmönlähteiden sijaintien optimoinnin tulokset. Molemmille asetelmien 2 ja 3 vektorien normeille löytyi nollakohta, jotka saavutettiin asetelman 2 tapauksessa alkuarvoista 3 ja asetelman 3 tapauksessa alkuarvoista 1.



**Kuva 2: Asetelman 2 optimoinnin tulos, jossa lämmönlähteiden suhteelliset tehot ovat järjestyksessään: 3, 3, 3, 4.**



**Kuva 3: Asetelman 3 optimoinnin tulos, jossa lämmönlähteiden suhteelliset tehot ovat järjestyksessään: 1, 1, 1, 2.**

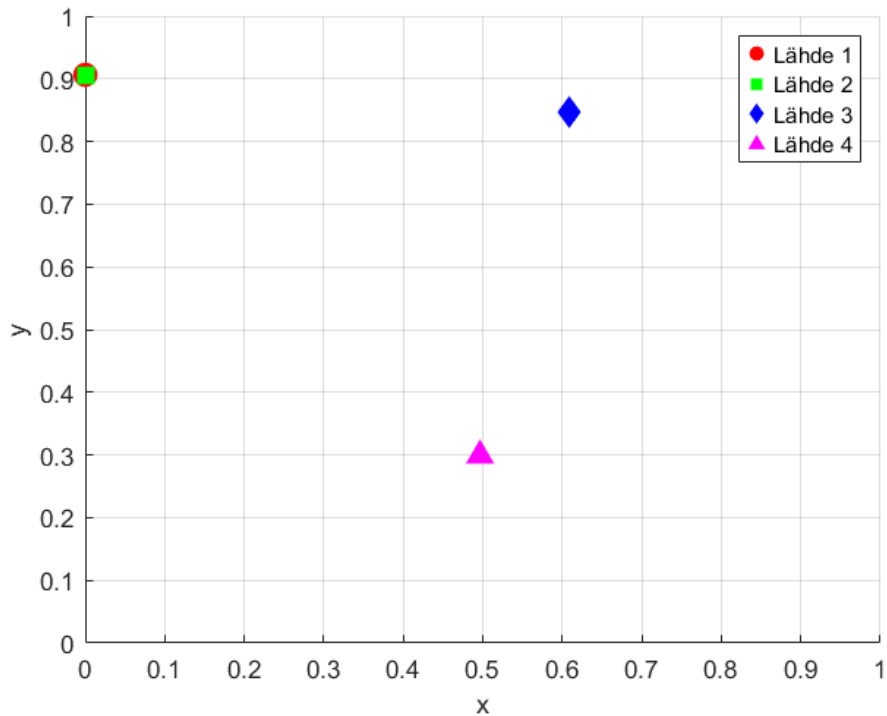
Tulos asetelmalle 2 vaikuttaa lähes peilisymmetriseltä, jos lähteiden tehoja ei huomioida. Kun lähteiden tehot otetaan huomioon, symmetria katoaa, toisin kuin asetelmassa 1.

Mahdollisimman tasaisen lämpötilajakauman saavuttamiseksi sijaintien pitäisi todennäköisesti olla jonkin suunnan suhteen peilisyymmetrinen. Muuten levyn toiselle puolelle muodostuu korkeampi lämpötila ja toiselle taas matalampi. Tietenkään kaikilla lähteiden tehojakaumilla peilisyymmetria ei ole mahdollinen. Peilisyymmetrisen tuloksen olisi voinut löytää esimerkiksi jokin toinen optimointi logaritmi, joka ei seuraisi pienimmän derivaatan suuntaan.

Vaikka asetelmien 2 ja 3 lämmönlähteiden tehojakaumat ovat samankaltaiset, tulokset poikkeavat selkeästi toisistaan. Asetelman 2 optimoinnin tuloksessa lähde 4 on kauempana lähteestä 3 kuin lähde 2. Kuitenkin lähde 1 erottuu selkeästi muista lähteistä sijaitsemalla kauempana muista, vaikka se on teholtaan pienempi kuin lähde 4. Asetelman 2 tulos ei todennäköisesti ole optimaalinen, vaikka optimoinnissa löytyikin nollakohta. Lisäämällä Greenin funktion termejä voitaisiin löytää mahdollisesti vielä parempia sijain- teja lämmönlähteille.

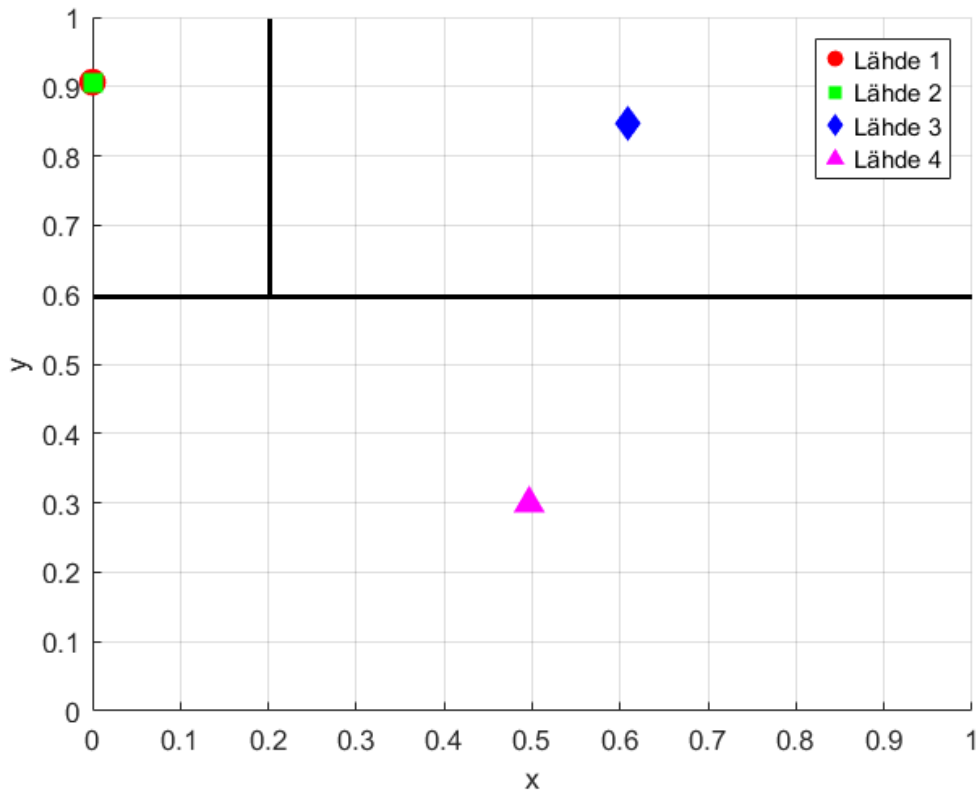
Asetelman 3 tuloksessa lähteet 1 ja 3 ovat hyvin lähellä toisiaan, mikä vastaa tilannetta, jossa ne voidaan tulkita yhtenä lämmönlähteenä, jonka suhteellinen teho on 2. Täten asetelman 3 tulos olisi peilisyymmetrinen vasemman alakulman ja oikean yläkulman läpi kulkevan diagonaalin suhteen. Lisäksi lähde 2 sijaitsee aivan levyn kulmassa. Asetel- massa 1 lähteen sijainti reunassa vaikuttaa perustellulta, koska puolet pienemmät läh- teet käyttävät puolet vähemmän lämmönsiirtopinta-alaa. Tässä tilanteessa kulmassa lämmönsiirtopinta-alaa on vain neljäsosa, mutta teho on vain puolet pienempi suurem- paan lähteeseen verrattuna.

Vertaamalla kahta hyvin samankaltaista tilannetta voidaan tulosten perusteella arvioida, että optimointi menetelmä toimii mahdollisesti paremmin yksinkertaisimmissa tapauk- sissa. Yksinkertaisemmalla tarkoitetaan, että lähteiden tehojakauman erot ovat pienem- piä asetelmassa 2 kuin asetelmassa 3. Kuvassa 4 on esitetty asetelman 4 optimoinnin tulokset.



**Kuva 4: Asetelman 4 optimoinnin tulos, jossa lämmönlähteiden suhteelliset tehot ovat järjestyksessään: 1, 2, 10, 20.**

Asetelman 4 tulokseksi ei löytynyt vektorin nollakohtaa, mutta pienin arvo löydettiin alkuarvoista 4, jossa lähteet 3 ja 4 sijaitsivat ristikkäisissä kulmissa. Asetelman monimutkaistuminen on voinut vaikeuttaa normin nollakohdan löytämistä tai tehdä siitä mahdotoman. Myös asetelman 4 tuloksessa huomataan pienien lähteiden 1 ja 2 sijoittuminen aivan levyn reunaan päällekkäin, mutta näiden lähteiden suhteellinen teho yhdessäkin jää pieneksi. Suuremmat lähteet saavat taas enemmän tilaa keskeltä. Aiemmin mainittua lämmönsiirtopinta-alan suhdetta lämmönlähteiden kokoon havainnollistetaan asetelman 4 osalta Kuvassa 5.



**Kuva 5: Asetelman 4 lämmönlähteiden omat lämmönsiirtopinta-alat**

Kuvassa 5 on luotu ikään kuin jokaiselle lähteelle oma laatikko, jonka keskellä ne sijaitsevat sekä vaikuttavat levyn lämpötilaan. Tietenkin todellisuudessa jokainen lähde vaikuttaa koko levyllä, mutta yksinkertaistetaan tilannetta tämän asetelman tilanteessa. Huomataan, että lähteen tehon suhde kaikkien lähteiden yhteenlaskettuun tehoon on hyvin lähellä kyseisen lähteen oman laatikon pinta-alan suhdetta koko levyn pinta-alaan. Mikä on lähellä asetelmaan 1 tilannetta, jossa puolet pienemmät lähteet sijaitsivat aivan levyn reunassa puolittaen niiden lämmönsiirtopinta-alan.

Neljästä optimoinnin tilanteesta huomataan samankaltaisuuksia. Suurimmat lämmönlähteet saavat enemmän vapaata lämmönsiirtopinta-alaa ympärilleen, mikä parantaa impulssien tasaantumista näistä lähteistä. Toisaalta kolmessa neljästä tapauksesta lähteitä sijoittui optimoinnin jälkeen aivan levyn reunaan. Mikä vaikuttaa lämmönsiirron kannalta erikoiselta, mutta Greenin funktion impulssien suhteen järkevältä. Esimerkiksi asetelmassa 1, jossa pienemmät lähteet sijoittuivat aivan levyn reunaan, voitaisiin ajatella, että pienimmillä lähteillä on puolet vähemmän suuntaa impulssin tasaantumiselle. Mutta myös pienempien lähteiden tehot ovat puolet suuremmista lähteistä. Kahdessa monimutkaisemmassa asetelmassa kaksi pienempää lähdeä asetui aivan päällekkäin, mikä ikään kuin kasvatti pienimpien lähteiden tehoa lähemmäksi suurempia.

## 5.2 Lämpötilajakaumat

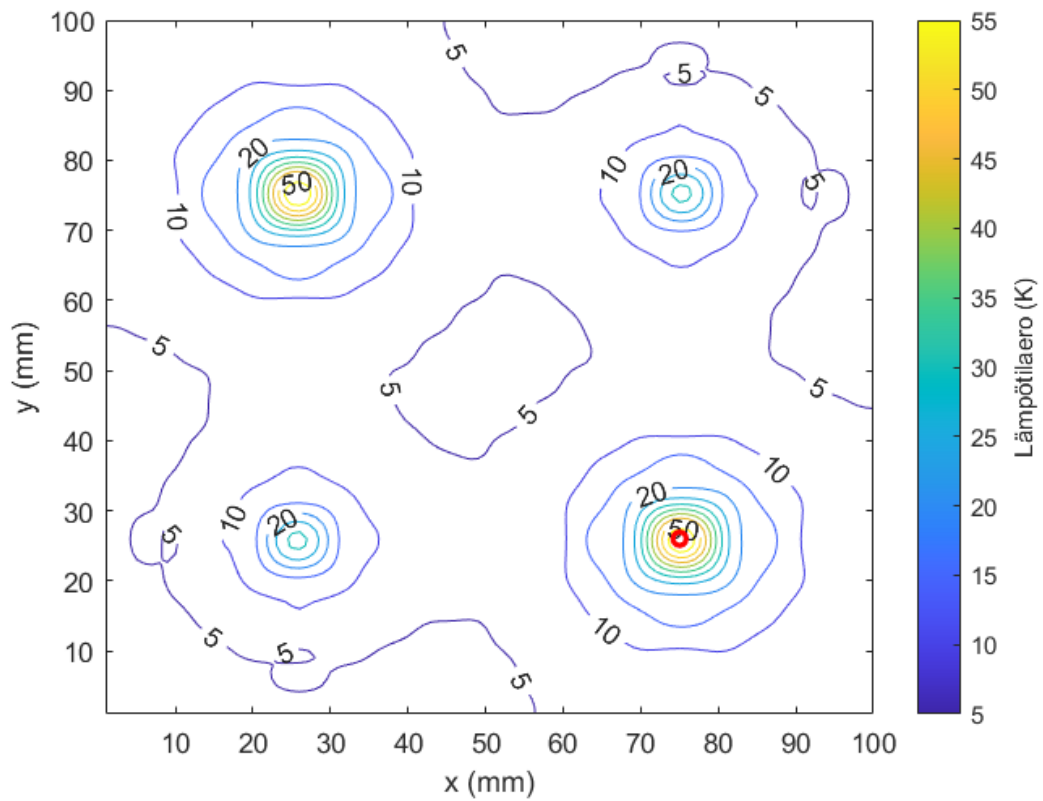
Taulukossa 5 on esitetty tunnusluvut sekä optimoiduista ja optimoimattomista lämpötilajakaumista. Kuvissa 6 ja 7 on esitetty asetelman 1 lämpötilajakauma ajasta riippumattomassa tilanteessa, ennen lämmönlähteiden sijaintien optimointia sekä jälkeen optimoinnin. Lämpötilat ovat esitettynä erona ympäristön lämpötilaan.

*Taulukko 5: Lämpötilajakaumien tunnusluvut pyöristettynä kolmen desimaalin tarkkuuteen*

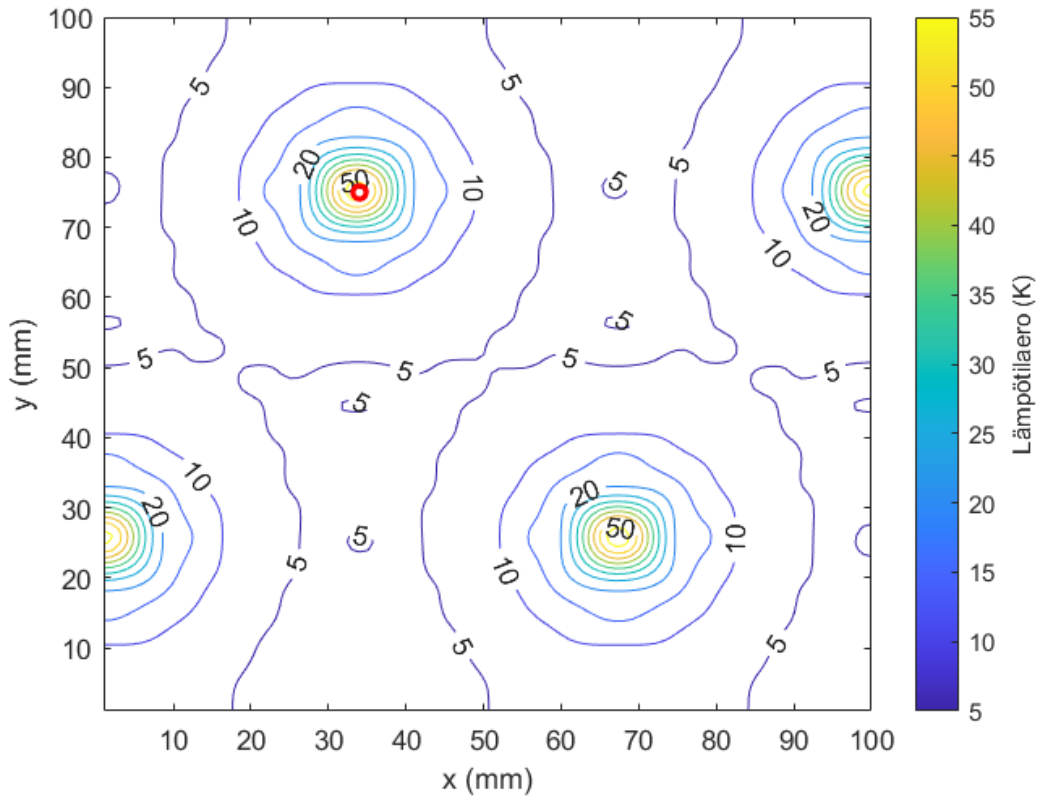
		<b>Suurin lämpötilaero (K)</b>	<b>Mediaani (K)</b>	<b>Keskihajonta (K)</b>	<b>Keskihajonnan ja mediaanin suhde (-)</b>
Asetelma optimoimaton	1	59,946	8,570	6,527	0,762
Asetelma optimoitu	1	57,989	8,638	7,428	0,860
Asetelma optimoimaton	2	55,789	8,570	5,946	0,694
Asetelma optimoitu	2	54,596	8,595	6,888	0,801
Asetelma optimoimaton	3	71,875	8,570	6,647	0,776
Asetelma optimoitu	3	130,856	8,666	10,254	1,183
Asetelma optimoimaton	4	107,303	8,570	10,168	1,186
Asetelma optimoitu	4	105,282	8,583	10,110	1,178

Lähteiden sijaintien kanssa tulee olla tarkka, sijaitseeko lähde laskettavassa pisteessä vai niiden välissä. Jos lähde ei sijaitse laskettavassa pisteessä, laskee lähteen kohdalla sijaitsevan kuumen pisteen lämpötila merkittävästi. Tästä syystä lähteiden sijainnit pyöristettiin kahden desimaalin tarkkuuteen.

Taulukon 5 tunnuslukujen mukaan optimoinnissa suurin lämpötilaero laski kaikissa paitsi asetelmassa 3. Mediaani nousi kaikissa asetelmissa, mikä on negatiivinen kehitys. Keskihajonta nousi kaikissa paitsi asetelmassa 4, nouseminen on negatiivinen kehitys. Keskihajonnan ja mediaanin suhde myös kasvoi kaikissa paitsi asetelmassa 4. Suurimman lämpötilaeron lasku johtuu todennäköisesti siitä, että optimoinnissa pyritään löytämään sijainteja, joissa kaikkien lähteiden lämpöimpulssit tasaantuvat yhtä nopeasti. Koska tällöin suurin lämmönlähde saa lisää lämmönsiirtopinta-alaa, pienenee suurin lämpötila, joka on todennäköisesti suurimman lähteen kohdalla.

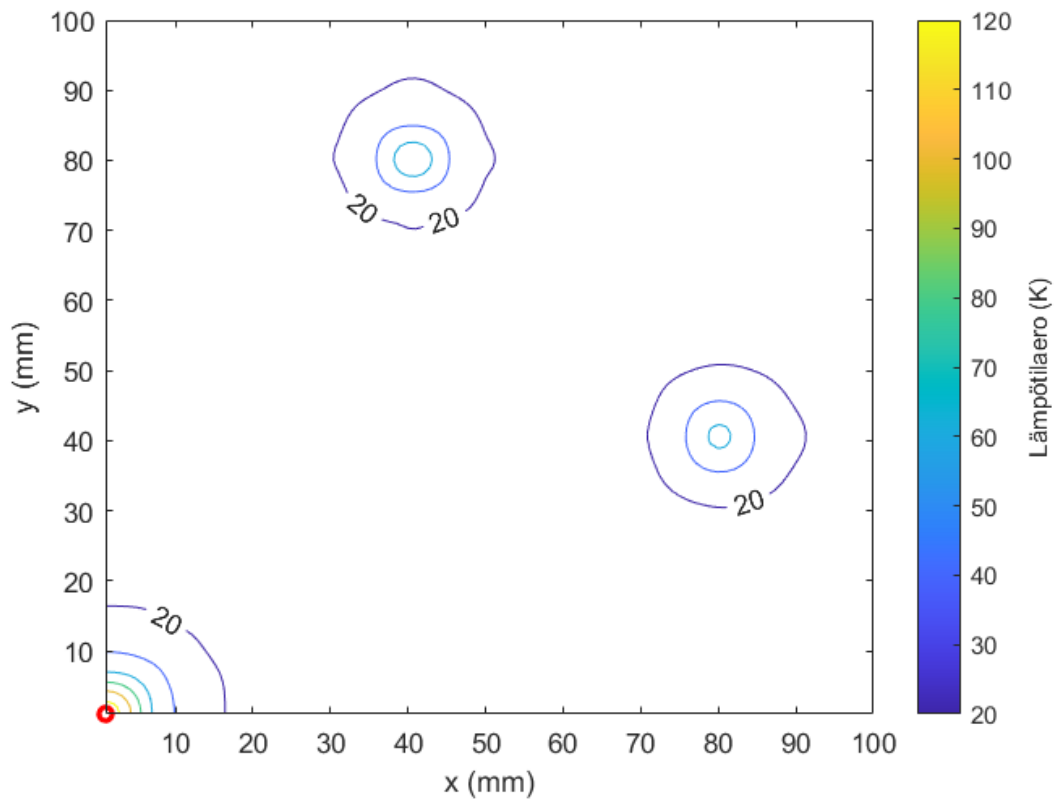


**Kuva 6: Asetelman 1 lämpötilajakauma optimoimattomilla lämmönlähteiden sijainneilla. Isotermien väli on 5 kelviniä. Korkeimman lämpötilaeron sijainti merkattu punaisella ympyrällä.**



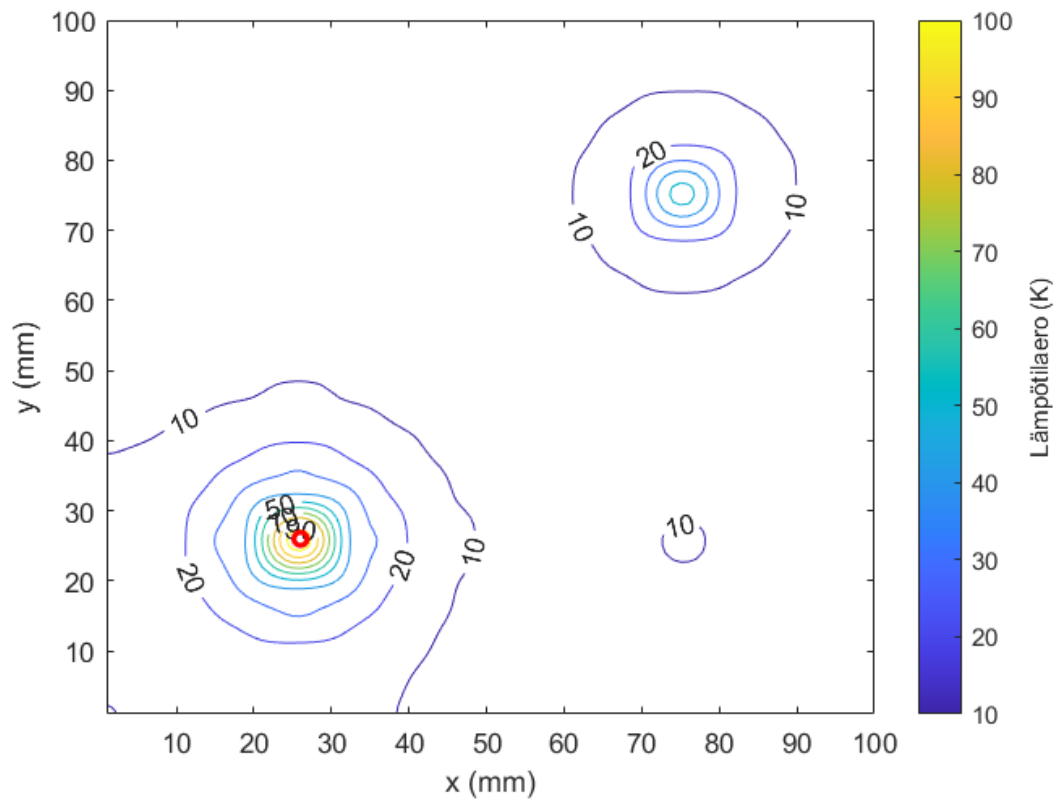
**Kuva 7: Asetelman 1 lämpötilajakauma optimoiduilla lämmönlähteiden sijainneilla. Isotermien väli on 5 kelviniä. Korkeimman lämpötilaeron sijainti merkattu punaisella ympyrällä.**

Greenin funktion avulla luodut lämpötilajakaumat vaikuttavat suurpiirteisesti todellista tilannetta kuvaavilta, sillä korkeimmat lämpötilat löytyvät suurimpien lämmönlähteiden kohdilta, pois lukien kosinilauseista johtuvaa isotermien pienen aaltoilun. Kuitenkin viimeimmillään lämpötilajakaumassa lämpötila ero ympäristöön on alle 5 kelvin astetta, mikä vaikuttaa pieneltä verrattuna lämmönlähteiden tehoon ja levyn pinta-alaan. Kuvasta 7 huomaamme, että reunoilla sijaitsevat puolet pienemmät lämmönlähteet sijaitsevat samoissa lämpötiloissa, kuin keskellä sijaitsevat suuremmat lähteet. Näin ollen aiemmin optimoinnista mainittu väite, että pienemmät lähteet tarvitsevat puolet vähemmän lämmönsiirtopinta-alaa, pitäisi paikkaansa. Tunnuslukuista huomataan, että optimointi on laskenut jakauman korkeinta lämpötilaeroa hiukan, mutta mediaani ja keskihajonta ovat toisaalta nousseet. Kuvassa 8 on esitetty asetelman 3 optimoidun tilanteen lämpötilajakauma.

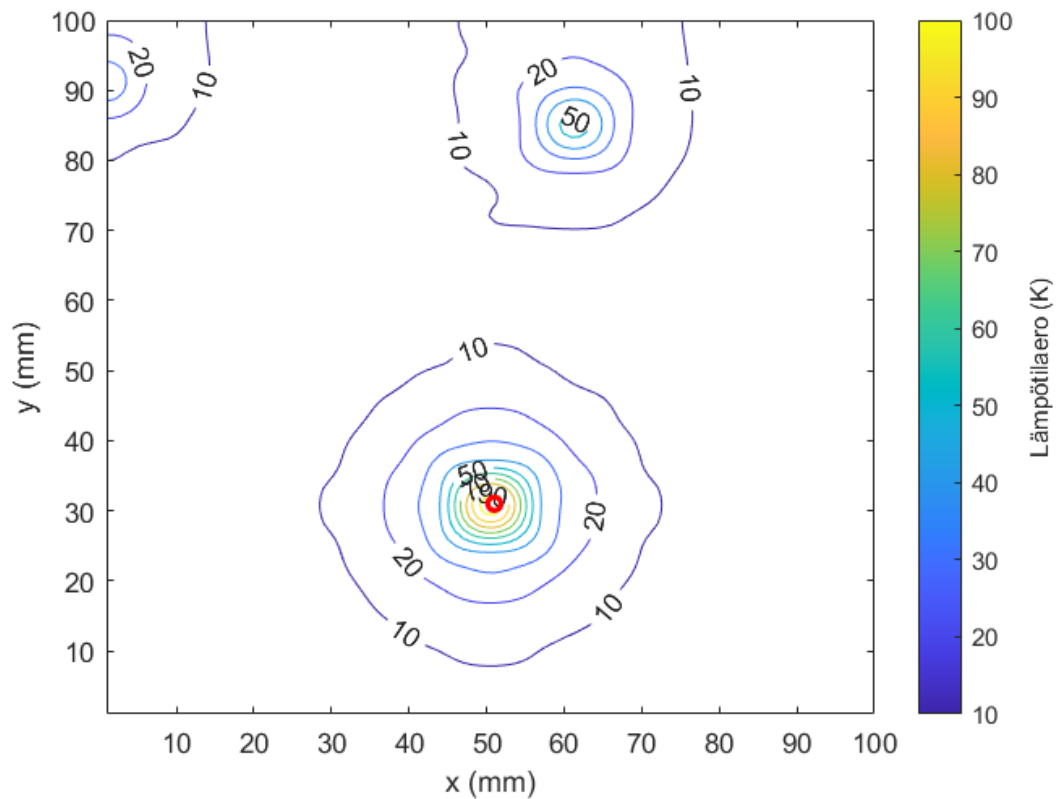


**Kuva 8: Asetelman 3 lämpötilajakauma optimoiduilla lämmönlähteiden sijainneilla. Isotermien väli on 10 kelviniä. Korkeimman lämpötilaeron sijainti merkattu punaisella ympyrällä.**

Asetelman 3 optimoidussa tilanteessa lämpötilaero kasvoi paljon verrattuna alkuperäiseen tilanteen lämpötilajakaumaan. Tämä johtui lähteen 2 sijoittumisesta levyn kulmaan. Huomataan lisäksi lähteiden 1 ja 3 ollessa päällekkäin ne käyttäytyvät täysin samalla tavalla, kuin lähde 4. Kuvissa 9 ja 10 on esitetty asetelman 4 lämpötilajakaumat.



**Kuva 9: Asetelman 4 lämpötilajakauma optimoimattomilla lämmönlähteiden sijainneilla. Isotermien väli on 10 kelviniä. Korkeimman lämpötilaeron sijainti merkattu punaisella ympyrällä.**

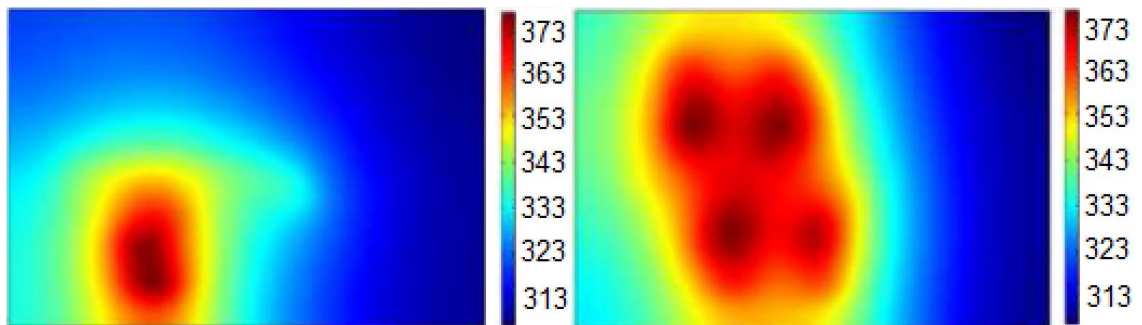


**Kuva 10: Asetelman 4 lämpötilajakauma optimoiduilla lämmönlähteiden sijainneilla. Isotermien väli on 10 kelviniä. Korkeimman lämpötilaeron sijainti merkattu punaisella ympyrällä.**

Asetelman 4 lämpötilajakaumasta huomataan samoja elementtejä, kuin asetelman 1 lämpötilajakaumasta. Suuri lämpötilaero keskittyy vain lähelle lämmönlähteitä ja kauempana lämmönlähteitä levyn lämpötila on alle 10 K korkeampi kuin ympäristön lämpötila. Lämpötila ei myöskään muutu lineaarisesti lähestyttäessä kohtisuorasti lämmönlähdettä, vaan lämpötilan muutos on nopeampaa lähempänä lähdettä. Kuten voisi olettaa, sillä lämmön siirtyminen kasvaa lämpötilan noustessa ja pienempien lämpötilojen alueella lämpö siirtyy pidemmälle levyssä ennen poistumista ympäristöön.

Asetelmissa 3 ja 4 optimoinnin jälkeen esiintyvät päällekkäiset lämmönlähteet vaikuttavat negatiivisesti mediaaniin ja keskihajontaan. Päällekkäiset lähteet nostavat lämpötilaa tietyssä pisteessä yhä korkeammalle, mikä johtaa taas lämpötilan laskemiseen muualla levyssä verrattuna tilanteeseen, jossa lähteet olisivat erillään. Lisäksi näyttää siltä, että lähteiden siirtäminen alkuperäisistä sijainneista lähemmäs reunoja vaikuttaa negatiivisesti mediaaniin ja keskihajontaan. Reunojen läheisyydessä lähteen päällä huippulämpötila nousee korkeammalle lämmönsiirtopinta-alan laskiessa. Optimointi ei kuitenkaan kohdistu minkään tietyn tunnusluvun pienentämiseen, mutta tunnusluvuista korkeimman lämpötilaeron kehitys osoittautui parhaaksi.

Kuvassa 11 on esitetty toisen tutkimuksen laskennallinen lämpötilajakauma prosessorista, jonka päällä on jäähdytin. Tilanteessa ympäristön lämpötila oli 297 K, mutta todellinen konvektio jäähdyttimestä arvioitiin siirtyvän 306 K ympäristöön.



**Kuva 11: Prosessorin Intel i7-8650U laskennalliset lämpötilajakaumat yhden ja neljän ytimen rasituksessa. Asteikko Kelvin asteina. Kuva muokattu lähteestä [17].**

Riippumatta Greenin funktiolla tuotettujen lämpötilajakaumien lähteiden eri sijainneista, huomataan Kuvan 11 jakaumiin verrattuna, että käytännössä aivan kuumimmat kohdat ovat laajempia eivätkä pistemäisiä. Tämä ei kuitenkaan vaikuttaisi muuttavan Greenin funktion jakaumien muotoa merkittävästi, sillä kuumimpia pisteitä ympäröivien alueiden lämpötilat laskevat samankaltaisesti molemmissa jakaumissa. Kuvan 11 vasemmanpuoleisessa yhden ytimen kuormituksen jakaumassa huomataan, että vihreän noin 343 K alueen ulottuvat prosessorin keskipistettä kohti. Ilmiö voi johtua esimerkiksi prosessorin sisäisen virransyötön tuottamasta lämmöstä tai korkeammasta lämmönjohtavuudesta prosessorin sisällä. Näitä seikkoja Greenin funktiolla tuotetut jakaumat eivät ottaneet huomioon. Kuvan 11 jakaumissa alimmat lämpötilat prosessorissa ovat 313 K luokkaa, mikä olisi noin 7 K ympäröivää lämpötilaa korkeampia. Tämä vastaa suuruusluokaltaan Greenin funktiolla tuotettuja jakaumia, joissa lämpötilaero oli pienimmillään alle 5 K ympäristöä korkeampi. Prosessoreissa voi siis olla suuriakin lämpötilaeroja ja viileimmät kohdat voivat olla hyvin lähellä ympäröivää lämpötilaa.

## 6. JOHTOPÄÄTÖKSET

Työn tavoitteena oli selvittää, miten Greenin funktiota voitaisiin hyödyntää pistemäisten lämmönlähteiden sijaintien optimoinnissa. Laskennallisessa osassa tutkittiin optimointia Greenin funktion ratkaisun vaikuttavimpia kosinilauseita nollaamalla, minkä lopputulokset olivat suurimmaksi osaksi positiivisia. Tulokset osoittivat, että menetelmä kykenee useimmissa tilanteissa laskemaan korkeimpia lämpötilaeroja levyn ja ympäristön välillä. Sen sijaan mediaani ja keskihajonta nousivat lähes kaikissa optimoiduissa asetelmissa. Optimoinnin seurauksena suurimmat lähteet liikkuivat lähemmäs levyn keskustaa, kun taas pienemmät lähteet siirtyivät kauemmaksi suuremmista lähteistä ja lähemmäksi reunoja. Pienten lähteiden havaittiin myös asettuvan päällekkäin monimutkaisemmissa asetelmissa. Erilaisella optimointialgoritmilla tai alkuarvoilla olisi voitu saada eri tuloksia, sillä työssä käytetyn algoritmin lopputulokset riippuvat merkittävästi alkuarvoista.

Tulosten perusteella Greenin funktiolla optimoidessa lähteet pyritään sijoittelemaan siten, että lähteiden impulssit tasaantuvat yhtä nopeasti riippumatta niiden tehosta. Esimerkiksi asetelmassa 1 siirtämällä lähteitä levyn reunaan, mikä vähentää lähteeltä lämmönsiirtopinta-alaa. Pienempien lähteiden siirtyminen reunoille antaa taas lisää tilaa suuremmille lähteille.

Greenin funktiolla tuotetun ajasta riippumattoman tilanteen lämpötilajakauman muodostaminen onnistui hyvin eikä niiden luominen ollut laskennallisesti raskasta. Lämpötilajakaumissa lämpötilojen huiput sijaitsivat lähteiden kohdilla, ja lämpötila laski etäisyyden kasvaessa lähteestä poispäin. Minkä perusteella ripatermin avulla voidaan mallintaa lämmönsiirtymistä pois levystä tarkasti. Kosinilauseista johtuva aaltoilu isotermeissä lisää hieman epätarkkuutta. Summan termejä lisäämällä voitaisiin saada tarkempia tuloksia, mikä kuitenkin lisää laskennan kuormittavuutta.

Tietokonekomponenttien lämmönlähteiden sijainnin optimointi lämmönsiirron mukaan ei ole ensisijainen tavoite prosessoreiden kohdalla. Lähteiden sijaintiin vaikuttaa enemmän itse prosessorin pinta-ala ja valmistuksen yksinkertaisuus. Kuitenkin yksinkertaisimmissa komponenteissa kuten muisteissa, optimointi lämmönsiirron mukaan ei välttämättä nostaisi valmistuskustannuksia merkittäväksi ja voisi siksi olla toteutettavissa.

## LÄHTEET

- [1] V. Lakshminarayanan ja N. Sriraam, "The effect of temperature on the reliability of electronic components", teoksessa *2014 IEEE International Conference on Electronics, Computing and Communication Technologies (CONECCT)*, tammi 2014, s. 1–6. doi: 10.1109/CONECCT.2014.6740182.
- [2] A. Shinde ja V. D. Agrawal, "Managing performance and efficiency of a processor", teoksessa *45th Southeastern Symposium on System Theory*, maaliskuu 2013, s. 59–62. doi: 10.1109/SSST.2013.6524953.
- [3] C. Yu ym., "Numerical and Experimental Study on the Heat Dissipation Performance of a Novel System", *Energies*, vol. 13, nro 1, s. 106, 2020, doi: 10.3390/en13010106.
- [4] J. Wang, Y. Wang, ja J. Shi, "On efficiency and effectiveness of finite volume method for thermal analysis of selective laser melting", *Eng. Comput.*, vol. 37, nro 6, s. 2155–2175, 2020, doi: 10.1108/EC-03-2019-0106.
- [5] E. Pop, S. Sinha, ja K. E. Goodson, "Heat Generation and Transport in Nanometer-Scale Transistors", *Proc. IEEE*, vol. 94, nro 8, s. 1587–1601, elokuu 2006, doi: 10.1109/JPROC.2006.879794.
- [6] A. T.a, K. M.s.k, G. H.s.a, K. S.k, ja N. P.o, "Heat Dissipation in a Computer", *J. Energy Technol. Policy*, vol. 3, nro 6, s. 43, 2013.
- [7] J. v. Kistowski, H. Block, J. Beckett, K.-D. Lange, J. A. Arnold, ja S. Kounev, "Analysis of the Influences on Server Power Consumption and Energy Efficiency for CPU-Intensive Workloads", teoksessa *Proceedings of the 6th ACM/SPEC International Conference on Performance Engineering*, teoksessa ICPE '15. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, tammi 2015, s. 223–234. doi: 10.1145/2668930.2688057.
- [8] A. S ja J. Mike, *Principles of Transistor Circuits, 9th Edition*. Viitattu: 23. helmikuuta 2025. [Verkossa]. Saatavissa: <https://learning.oreilly.com/library/view/principles-of-transistor/9780750644273/>
- [9] "Intel® Core™ i5 processors (14th gen) Product Specifications". Viitattu: 21. elokuuta 2025. [Verkossa]. Saatavissa: <https://www.intel.com/content/www/us/en/products/sku/series/236175/intel-core-i5-processors-14th-gen.html>
- [10] D. Panasonic, "3 Failure Mechanism of Semiconductor Devices", vol. 2009.
- [11] A. C. Kheirabadi ja D. Groulx, "Cooling of server electronics: A design review of existing technology", *Appl. Therm. Eng.*, vol. 105, s. 622–638, heinäkuu 2016, doi: 10.1016/j.applthermaleng.2016.03.056.
- [12] "Thermal Management Challenges in Telecommunication Systems and Data Centers". Viitattu: 25. helmikuuta 2025. [Verkossa]. Saatavissa: <https://xplore.staging.ieee.org/document/6159062?denied=>
- [13] Z. Zhu, H. Fan, J. Hua, ja C. Zhang, "A Green's function solution to the transient heat transfer through the building wall", *Adv. Mech. Eng.*, vol. 8, nro 3, s. 1–12, maaliskuu 2016, doi: 10.1177/1687814016636572.
- [14] K. D. Cole, A. Haji-Sheikh, J. V. Beck, ja B. Litkouhi, *Heat Conduction Using Green's Functions*, vol. 2011.
- [15] J. R. F. Oliveira ym., "Analytical solution of a 2D transient heat conduction problem using Green's functions", *Rev. Eng. Térmica*, vol. 19, nro 1, Art. nro 1, syyskuu 2020, doi: 10.5380/reterm.v19i1.76434.
- [16] D. R. Lide, G. Baysinger, S. Chemistry, L. I. Berger, R. N. Goldberg, ja H. V. Kehian, "CRC Handbook of Chemistry and Physics".
- [17] J. Zhang, S. Sadiqbatcha, M. O'Dea, H. Amrouch, ja S. X.-D. Tan, "Full-Chip Power Density and Thermal Map Characterization for Commercial Microprocessors Under

Heat Sink Cooling”, *IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 41, nro 5, s. 1453–1466, touko 2022, doi: 10.1109/TCAD.2021.3088081.