Tampereen yliopisto

Christian Honkaniemi

ENSIMMÄISEN VUODEN OPISKELUMENETELMIEN VAIKUTUKSET MYÖHEMPIIN OPINTOIHIN

Matematiikan opiskelijoiden arvosanat ja valmistumisen polku

Pro gradu -tutkielma
Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Marraskuu 2025

TIIVISTELMÄ

Christian Honkaniemi: Ensimmäisen vuoden opiskelumenetelmien vaikutukset myöhempiin opintoihin
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin tutkinto-ohjelma
Marraskuu 2025

Käänteinen opetus on opetusmetodi, jossa oppijat tutustuvat uuteen aiheeseen itse ja opettaja auttaa heitä tiedon soveltamisessa, kun taas käänteinen oppiminen on ideologia, jossa pyritään saamaan oppijat oma-aloitteeseen oppimiseen. Käänteinen opetus on saanut paljon huomiota ja suosiota lähiaikoina. Käänteisestä opetuksesta on kuitenkin ristiriitaista tutkimusta. Joissain tutkimuksissa opiskelijoiden aktiivisuus kasvaa, kun taas joissain ei. Joissain tutkimuksissa opiskelijoiden arvosanat kasvavat, kun taas joissain ei havaita merkittävää muutosta.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on tutkia vaikuttaako käänteinen opetus matematiikan opiskelijoiden valmistumisen ajankohtaan yliopistossa. Lisäksi tutkitaan vaikuttaako käänteinen opetus matematiikan opiskelijoiden arvosanoihin. Tutkimuksen kohteina ovat tekniikan alan matematiikan opiskelijat, jotka aloittaneet opinnot 2019 Tampereen yliopistossa. Tutkimuksessa käytetään aineiston analyysissä MATLAB-ohjelmistoa ja graafiteoriaa. Tutkimuksessa verrataan käänteistä opetusta suorittaneiden ja perinteistä opetusta suorittaneiden arvosanojen keskiarvoa sekä opiskeluun kulunutta aikaa. Lisäksi tarkastellaan opiskelijoiden kurssivalintoja ja polkua valmistumiseen graafien avulla. Tutkimuksessa on kolme eri ryhmää. Ryhmä C koostuu opiskelijoista, jotka suorittivat insinöörimatematiikan opintojaksot käänteisellä opetuksella. Ryhmät A ja B koostuvat opiskelijoista, jotka suorittivat insinöörimatematiikan opintojaksot perinteisellä opetuksella. Yhteensä insinoorimatematiikan opintojaksoja tutkimuksessa on neljä. Nämä opintojaksot olivat insinöörimatematiikka A/B/C 1, insinöörimatematiikka A/B/C 2, insinöörimatematiikka A/B/C 3 ja insinöörimatematiikka A/B/C 5.

Tutkimuksen tulokset osoittavat ryhmän B arvosanojen olevan alhaisimmat. Toteutusten A1, B1 ja C1 välillä ei ole merkittävää eroa. Toteutuksien A2, B2 ja C2 välillä C2 opetuksen toteutus tuotti merkittävästi paremman arvosanojen keskiarvon. Toteutuksien A3 ja C3 keskiarvon välillä ei ollut merkittävää eroa, mutta molempien toteutusten keskiarvo oli huomattavasti korkeampi kuin toteutuksen B3 keskiarvo. Toteutuksien A5, B5 ja C5 keskiarvot erosivat merkittävästi toisistaan siten, että A5 toteutuksessa keskiarvo oli suurin ja B5 toteutuksessa keskiarvo oli pienin. Valmistumiseen kuluneessa ajassa ryhmien B ja C välillä ei ollut eroa. Ryhmän A opiskelijat valmistui keskimäärin nopeammin kandidaatiksi kuin ryhmän B ja C opiskelijat. On kuitenkin huomioitava, että ryhmässä A on yksi opiskelija, joka ei ole vielä valmistunut kandidaatiksi aineiston keruun ajankohtana. Ryhmissä B ja C jokainen opiskelija on valmistunut kandidaatiksi. Diplomi-insinööriksi valmistumiseen kuluneessa ajassa ei ollut eroa ryhmien kesken. Tutkimuksen tuloksista ei voi sanoa käänteisen opetuksen vaikuttavan valmistumisnopeuteen. Eri ryhmien siirtymägraafeista huomataan ryhmän C kulkevan melko yhtenäistä polkua insinöörimatematiikka opintojaksojen jälkeen, kun taas valtaosa ryhmän B oppijoista jakautui kahden eri opintojakson kesken. Ryhmä A jakautui monen eri opintojakson kesken. Tämän selittää eri tutkinto-ohjelmien pakolliset opintojaksot.

Avainsanat: flippaus, käänteinen oppiminen, käänteinen opetus, graafiteoria, maksimivirtaus

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

TEKOÄLYN KÄYTTÖ TÄSSÄ TYÖSSÄ

Opinnäytteessäni on käytetty tekoälysovelluksia:

☐ Ei
☒ Kyllä

Ilmoitukseni mukaan olen käyttänyt opinnäytteessäni tutkielmaprosessin aikana seuraavia tekoälysovelluksia:

Sovellus	**Versio**
Scopus AI	-
ChatGPT	GPT-5

Tekoälyn käyttötarkoitus

Scopus AI tekoälyä on käytetty löytämään tutkimuksia pitkäaikaisista käänteisen opetuksen vaikutuksista. ChatGPT on tekoälyä on käytetty tekstin kääntämiseen lukemista varten. Kaikki tutkimuksessa esiintyvät kohdat ovat itse kirjoitettuja.

Osiot, joissa tekoälyä on käytetty

Scopus AI tekoälyä on käytetty teoreettisessa viitekehyksessa löytämään relevantteja tutkimuksia ja julkaisuja. ChatGPT tekoälyä on käytetty maksimivirtaus -alaluvussa eri termien käännosten löytämiseksi. Käännökset on tarkistettu soveltuvista lähteistä.

Riskien tiedostaminen

Olen tietoinen siitä, että olen täysin vastuussa koko opinnäytteeni sisällöstä, mukaan lukien osat, joiden tuottamisessa on hyödynnetty tekoälyä, ja hyväksyn vastuun mahdollisista tästä seuranneista eettisten ohjeiden rikkomuksista.

ALKUSANAT

Tämä tutkimuksen teko aloitettiin Tampereen yliopistossa vuoden 2024 lopulla. Tutkimus aloitettiin tekemällä tietopyyntöä sekä perehtymällä käänteiseen oppimiseen, käänteiseen opetukseen ja graafiteoriaan. Keväällä 2025 saatiin tutkimukseen tarvittava data, jolloin siirryttiin datan analysointiin.

Suurkiitos ohjaajalleni, Terhi Kaarakalle, ja työn tarkastajalle, Simo Ali-Löytylle. Heidän ohjaus ja ideat edistivät työtä erittäin paljon. Lisäksi tahdon kiittää perhettäni ja ystäviäni, jotka ovat kannustaneet minua Pro gradu -tutkielman tekemisessä.

Tampereella, 5. marraskuuta 2025

Christian Honkaniemi

SISÄLLYSLUETTELO

1. Johdanto . . . 1
2. Teoreettinen viitekehys . . . 2
2.1 Flippauksen määrittelyä . . . 2
2.2 Flippauksen sovellusta . . . 3
2.3 Tutkimuksia flippauksesta . . . 4
3. Graafiteoriaa . . . 6
3.1 Graafiteorian perusteita . . . 6
3.2 Lyhin polku . . . 8
3.3 Maksimivirtaus . . . 8
4. Tutkimusmenetelmät ja Tulokset . . . 14
4.1 Tutkimusmenetelmät . . . 14
4.2 Arvosanat . . . 16
4.3 Valmistuminen . . . 18
5. Yhteenveto ja pohdinta . . . 33
5.1 Tulosten tarkastelu . . . 33
5.2 Tulosten luotettavuus . . . 34
Lähteet . . . 35
Liite A: Insinöörimatematiikka A käyneiden siirtymägraafi . . . 37
Liite B: Insinöörimatematiikka B käyneiden siirtymägraafi . . . 38
Liite C: Insinöörimatematiikka C käyneiden siirtymägraafi . . . 39
Liite D: Kurssikoodit ja nimet . . . 40

1. JOHDANTO

Käänteinen oppiminen on lähivuosina herättänyt kiinnostusta opettajissa ja mediassa. Käänteinen oppiminen on ideologia, jossa pyritään saamaan oppijat oma-aloitteiseen oppimiseen [17]. Tämä voidaan toteuttaa esimerkiksi siten, että opiskelijat tutustuvat uuteen aiheeseen kotona ja koulussa käytetään aika tehtävien tekoon ja kysymysten esittämiseen. Suosittu tapa pyrkiä oppilaiden oma-aloitteiseen oppimiseen on käänteinen opetus. Käänteinen opetus on opetusmetodi, jossa oppijat tutustuvat uuteen aiheeseen itsenäisesti ja opettaja auttaa heitä tiedon soveltamisessa[17]. Käänteisen opetuksen tärkeimpinä kehittäjinä pidetään Jonathan Bergmannia ja Aron Samsia, jotka vuonna 2007 päättivät korvata luentonsa opetusvideoilla [17].

Käänteisestä opetuksesta on paljon tutkimuksia. Usein tutkimustulokset tukevat käänteistä opetusta. On myös kuitenkin paljon tutkimuksia, jotka ovat ristiriidassa toisten tutkimusten kanssa. Joissain tutkimuksissa käänteisen opetuksen tulokset eivät poikkea perinteisestä opetuksesta tai käänteinen opetus saattoi jopa tuottaa heikompia tuloksia kuin perinteinen opetus. Käänteisen opetuksen hyödystä ei siis ole yksimielisyyttä. [18]

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää vaikuttaako käänteinen opetus matematiikan opintojaksojen arvosanojen keskiarvoihin ja onko sillä vaikutusta opiskelijoiden valmistumiseen kuluneessa ajassa. Tutkimuksessa tarkastellaan Tampereen yliopistossa 2019 syksyllä opiskelun aloittaneiden tekniikan kandidaattiopiskelijoiden matematiikan opintojaksoja ja valmistumisaikoja. Lisäksi tarkastellaan opiskelijoiden suorittamien opintojaksojen siirtymägraafeja.

2. TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Tässä luvussa esitetään flippauksen teoriaa ja aiempia tutkimuksia. Ensin käsitellään flippauksen määritelmää ja flippauksen kehittäneitä henkilöitä, jonka jälkeen tutustutaan aiempiin tutkimukseen flippauksesta.

2.1 Flippauksen määrittelyä

Flippauksesta puhuttaessa voidaan itseasiassa tarkoittaa käänteista oppimista (flipped learning) tai käänteistä opetusta (flipped classroom). Käänteinen oppiminen on ideologia, jossa pyritään saamaan oppijat oma-aloitteeseen oppimiseen, kun taas käänteinen opetus on opetusmetodi, jossa oppijat tutustuvat uuteen aiheeseen itse ja opettaja auttaa oppijoita tiedon soveltamisessa. Kotitehtävien siirtäminen kotoa luokkaan auttaa oppijoiden sosiaalisten taitojen kehittymisessä ja lisää kouluviihtyvyyttä. Käänteinen oppiminen mahdollistaa oppijoiden kohtaamisen yksilönä ja tukee heidän motivaatiotaan. Opettajan tulee pyrkiä luomaan oppimisen mahdollisuuksia ja tukemaan oppijoita. Käänteisessä oppimisessa kyse on oppilaskeskeisen oppimiskulttuurin luomista, mikä vaatii opettajan ja oppijan välistä luottamusta. [17]

Käänteisen opetuksen kehittäjinä pidetään Kemian opettajia Jonathan Bergmannia ja Aron Samsia, jotka päättivät videoida omat luentonsa vuonna 2007 ja korvata seuraavien vuosien luennot näillä videoilla. Samsia ja Bergmannia ei kuitenkaan pidetä käänteisen oppimisen esi-isinä, koska jo ennen heitäkin Erik Mazurin työtä 1990-luvulla pidetään tärkeänä osana käänteisen opetuksen kehitystä. Käänteistä opetusta voi toteuttaa hieman eri tavoin, mutta tyypillistä opetukselle on se, että kotona luetaan teoriaosa ja tehtävät tehdään oppilaitoksessa. [17] Tätä tapaa Bergmann ja Sams [5] kutsuvat nimellä *Flipped Class 101*, eli käänteisen opetuksen perusteena. Käänteisen oppimisen käsitteen loi Flipped Learning Network -yhteisö. Yhteisön mukaan käänteinen oppiminen on pedagoginen lähestymistapa, jossa suora opetus siirtyy ryhmäoppimistilasta yksilölliseen oppimistilaan ja tuloksena syntynyt ryhmätila muuttuu dynaamiseksi, interaktiiviseksi oppimisympäristöksi, jossa kouluttaja ohjaa oppijoita heidän soveltaessaan käsitteitä ja osallistuessaan luovasti aiheeseen [13]. Käänteisellä oppimisella ei kuitenkaan ole hyväksyttyä teoreettista viitekehystä [17].

2.2 Flippauksen sovellusta

Bergmann ja Sams korostavat, että käänteinen opetus on vain yksi tapa toteuttaa käänteistä oppimista. Käänteinen oppiminen on oppijakeskeistä opetusta, jota voi toteuttaa eri tavoin, kuten projektioppiminen, ongelmalähtöinen oppiminen ja tutkimuspohjainen oppiminen. Jokainen opettaja voi luoda oman tapansa toteuttaa käänteistä oppimista ja täten hyödyntää hänen omia vahvuuksiaan. [5]

Bergmann ja Sams ovat havainneet keskeisiä osia, jotka ovat läsnä onnistuneessa käänteisen oppimisen toteutuksessa. Näitä ovat yhteistyö, oppijakeskeinen oppiminen, optimoidut oppimistilat, toimeenpanoon riittävä aika, riittävä IT-tuki ohjaajille, tuki hallinnolta sekä ohjaajien itsereflektio. Bergmann ja Sams kehittivät heidän versiotaan käänteisestä oppimisesta yhdessä eivätkä usko pystyneensä siihen yksin. Heidän mukaansa monet opettajat, jotka ovat onnistuneet käänteisessä oppimisessa, ovat tehneet sen osana opettajien yhteisöä. Perinteinen opetus, jossa opettaja pitää esitystä oppijoille, ei ole oppijakeskeistä. Kun opettaja vaihtaa roolinsa esittäjästä fasilitaattoriin, luokkahuoneen painopiste siirtyy oppijoihin. Oppimistilat ovat usein suunniteltu niin, että opettaja on huomion kohteena. Oppimistila on tärkeä saada sellaiseen muotoon, mikä mahdollistaa oppijoiden yhteistyön. Kaikkia asioita ei kuitenkaan pidä tehdä ryhmissä. Luokassa olisi hyvä olla myös tila, jossa oppija voi tehdä työtä yksin ilman häiriöitä. Tätä on vaikea toteuttaa tilassa, joka on tarkoitettu yhteistyöhön. Bergmann ja Sams suosittelevat esimerkiksi melua vaimentavia kuulokkeita, joita oppijat saavat käyttää. Oppimistilan voi saada korostamaan oppijakeskeistä opetusta esimerkiksi poistamalla opettajan pöydän. Näin opettaja pystyy motivoimaan itsensä työskentelemään oppijoiden kanssa. Oppimistilan pitäisi myös korostaa, että tila on tarkoitettu oppimiseen eikä opettamiseen. Käänteisen opetuksen toimeenpano vaatii paljon aikaa. Opettaja joutuu miettimaan, kuinka luokka tulee toimimaan ja ottamaan käyttöön uusia menetelmiä. Hyviä tuloksia on syntynyt, kun opettajat saavat kompensaatiota, esimerkiksi rahaa ylitöistä, heidän ylimääräisestä ajasta käänteisen oppimisen suunnittelussa. Tuki hallinnolta on myös tärkeä osa käänteisen oppimisen onnistumista. Hallinnolla tässä tarkoitetaan niin oppilaitosta kuin myös kuntaa. Kun päättäjät kannustavat käänteiseen opetukseen ja tarjoavat riittävät resurssit niin tulokset ovat merkittäviä. Lisäksi riittävä IT-tuki on tärkeää. Parasta olisi, että kehitetään tapa, jonka avulla opettajien on helppo tehdä ja jakaa videoita ja muita oppimiseen liittyviä asioita. Lopuksi tärkeää on opettajan itsereflektio. Opettajat, jotka ovat onnistuneet käänteisessä oppimisessa etsivät jatkuvasti tapoja parantaa heidän taitojaan ja käytäntöjään oppijoiden tarpeiden mukaan. [5]

Käänteiselle opetukselle on tullut kritiikkiä, mutta Bergmann ja Sams uskovat suurimman osan kritiikistä liittyvän vain *Flipped Class 101* -opetusmuotoon, jossa kotona luetaan teoria ja oppilaitoksessa tehdään tehtävät. Suuri osa julkisuudesta, mitä käänteinen opetus saa, liittyy videoihin. Herää ajatus, että käänteisessä opetuksessa kyse on videoista. Vi-

deot eivät kuitenkaan ole kaikkein tärkein käänteisen oppimisen osa. Olennaisinta on ajan hyödyntäminen. Perinteinen opetus koko ryhmälle veisi jokaisen aikaa. Käänteisessä oppimisessa suoraa opetusta annetaan oppijalle silloin, kun hän on siihen valmis. Suurin väärinkäsitys käänteisestä opetuksesta on, että sitä ei kannata toteuttaa, sillä joillain oppijoilla ei ole tarvittavaa teknologiaa. Kun Bergmann ja Sams aloittivat flippauksen, heidän oppilaista noin 25% eivät voineet käyttää internettiä kotona. Tällöin heille annettiin videot muulla tavoin, esimerkiksi muistitikulla tai DVD:llä. Monet kriitikot uskovat, että käänteinen opetus levittää huonoa pedagogiikkaa. Tämä olisi totta, jos käänteinen opetus olisi vain luentojen korvaamista videoilla. Hyvät opettajat kuitenkin reflektoivat omaa opetustaan ja parantavat omaa opetustaan. Lisäksi kritiikkinä on, että käänteinen opetus aiheuttaisi tarpeettomia kotitehtäviä. Itseasiassa monet oppijat ovat kertoneet, että he käyttävät vähemmän aikaa videoiden katsomiseen kuin perinteisten kotitehtävien tekemiseen. [5]

Koska käänteinen oppiminen antaa mahdollisuuden ylimääräiselle ajalle luokassa, useat opettajat ovat toteuttaneet uteliaisuutta ja luovuutta kehittävän ajankohdan. Opettajat antavat oppijoille 10-20% ajasta toteuttaa oppijoiden omaan intohimoon perustuvia projekteja ja tutkimusta. Oppijat demonstroivat oppimistaan monella eri tavalla. Tärkeää on, että oppijat saavat itse valita mitä he haluavat oppia. Opettajat, jotka välittävät oppijoista jättävät syvimmän vaikutuksen oppijoihin. Kasvokkain tapahtuva vuorovaikutus on monimuotoisempaa kuin videoiden katselu tai tekstin lukeminen. On siis hyvä, jos opettaja kehittää hyvän suhteen oppijoihin ja hyödyntää oppitunnin aikaa oppimisen rikastuttamiseen kasvokkain tapahtuvan vuorovaikutuksen avulla. Opettajien tulisi opettaa sisällön, uteliaisuuden ja suhteen kontekstissa. Bergmannin ja Samsin mukaan perinteinen opetus korostaa liikaa sisällön tärkeyttä, milloin suhde ja utelaisuus jäävät vähäiselle. [5]

2.3 Tutkimuksia flippauksesta

Flippauksesta on paljon tutkimuksia. Monissa näistä tutkitaan oppijoiden motivaatiota, aktiivisuutta ja arvosanoja. Aguilarin [1] tutkimuksessa huomattiin flippauksen nostavan oppilaiden motivaatiota, arvosanoja sekä vähentävän poissaoloja. Toisessa tutkimuksessa flippaus kehitti oppilaiden kommunikaatio taitoja ja itseluottamusta merkittävästi [14]. Romeron [15] tutki oppijoiden motivaatiota matematiikan opiskeluun. Tutkimuksessa oppilaat, jotka kävivät matematiikkaa perinteisellä opetusmetodilla, kokivat motivaation heikentymistä vuoden jälkeen, kun taas oppilaiden, jotka kävivät matematiikkaa käänteisellä opetusmetodilla, kokivat motivaation säilyvän samana. Käänteinen opetus on myös todettu vähentävän kurssien keskeytysten määrää [4]. Tampereen yliopistossa käänteisestä opetuksesta on myös positiivisia tutkimuksia. Frimanin [7] tutkimuksen mukaan käänteinen opetus säilyttää oppilaiden oppimisorientoituvuutta paremmin perinteiseen opetukseen verrattuna. Korhosen [11] tutkimuksessa tutkitiin yhteisöllistä käänteistä oppimista. Tutkimuksessa valtaosa opiskelijoista koki pienryhmätyöskentelyn positiivisena ja he ko-

kivat positiivista muutosta motivaatiossa.

Flippauksesta on myös tutkimuksia, jotka ovat ristiriidassa toisten tutkimusten kanssa. Monissa tutkimuksissa tulokset ovat positiivisia, mutta joissain tutkimuksissa tulokset ovat negatiivisia tai eivät poikkea laisinkaan perinteisestä opetuksesta [18]. Wittmann [18] tutki käänteistä opetusta yliopistossa Saksassa. Hänen mukaan flippauksen vaikutuksista ei ole yksimielisyyttä ja flippauksen onnistumisen ratkaisevana tekijänä olisi oppilaan käsitys opettajasta. Awidin [2] tutkimuksessa vain 22% oppilaista oli sitä mieltä, että opetusvideot motivoivat heitä lukemaan lisää aiheesta. Lisäksi tässä tutkimuksessa 46% oppilaista sanoi, että videot motivoivat heitä mukaan opetusaktiviteetteihin ja 42% nautti keskusteluihin osallistumisesta. Hen [9] tutkimuksessa oppilaiden suhtautuminen flippaukseen oli neutraalia. Tutkimuksessa oli oppilaita, jotka olivat vahvasti flippauksen puolella ja oppilaita, jotka olivat vahvasti flippausta vastaan. Frimanin [7] tutkimus oli positiivinen käänteisen opetuksen suhteen, mutta tutkimuksessa esiintyi myös opiskelijoita joiden tavoiteorientaatio muuttui negatiiviseen suuntaan.

Flippauksen ristiriitaisien tulosten syynä voi olla eri tavat toteuttaa opetusta. Lisäksi valtaosa flippaukseen liittyvistä tutkimuksista on tehty kyselyillä ja oppijoiden itsearvioinnilla [10]. Itseasiassa jokaisessa tutkimuksessa, joista kerrottiin edellä, oli käytetty kyselyä aineston keruussa. Hodgson [10] pyrki tutkimaan oppilaiden aktiivisuutta kyselyn sijaan tarkkailemalla heitä. Tutkimuksessa kahdessa luokassa oppilaiden aktiivisuudella ei ollut eroa flippauksen ja perinteisen opetuksen välillä, mutta yhdessä luokassa flippaus nosti aktiivisuutta. Hodgson [10] totesi, että käänteinen opetus ei ole ainoana tekijänä oppilaiden aktiivisuuteen ja koulumenestykseen, vaan se on myös opettajasta ja itse oppilaasta kiinni. Eräs flippaukseen liittyvien tutkimusten heikkous on lisäksi se, että ne ovat melko lyhytkestoisia. Useassa tutkimuksessa on kyse vain yhden kurssin flippauksesta, joten pitkäkestoisen flippauksen vaikutuksista ei ole paljon näyttöä. Flippausta on siis syytä tutkia.

Espaniassa insinöörikoulutuksessa kokeista läpipäässeiden määrä on ollut laskussa. Lisäksi COVID-19 on vaikuttanut negatiivisesti opiskeluun. Käänteinen opetus sai nostettua kokeesta läpipäässeiden opiskelijoiden määrää ja arvosanoja jo ennen COVID-19 pandemiaa. Pandemian alettua opiskelijoiden tulokset laskivat, mutta käänteinen opetus pystyi minimoimaan COVID-19:n aiheuttamia haasteita. [8]

Tässä tutkimuksessa tutkitaan opintojaksojen arvosanojen keskiarvojen lisäksi eri ryhmien opiskeluun kulunutta aikaa ja polkua. Vastaavian pitkän ajanjakson tutkimuksia on erittäin vähän.

3. GRAAFITEORIAA

Tässä luvussa esitetään graafiteorian määritelmiä ja lauseita, joita käytetään tutkimuksessa. Ensimmäisenä esitetään graafiteorian perusteita. Sitten esitetään graafin lyhintä polkua ja algoritmiä, jolla sen voi ratkaista.

3.1 Graafiteorian perusteita

Määritelmä 3.1. *Graafi* G on järjestetty kolmikko ($V(G)$, $E(G)$, I_G), missä $V(G)$ ja $E(G)$ ovat erilliset joukot, $V(G)$ on epätyhjä joukko ja I_G on relaatio, joka liittää jokaiseen joukon $E(G)$ alkioon järjestämättömän parin joukon $V(G)$ alkioita. Joukon $V(G)$ alkioita kutsutaan *solmuiksi* ja joukon $E(G)$ alkioita kutsutaan *särmiksi*. Jos särmälle e pätee $I_G(e) = \{u, v\}$, niin merkitään $I_G(e) = uv$. [3]

Määritelmä 3.2. Särmää, jonka molemmat päätesolmut ovat samat, kutsutaan *luupiksi*.

Määritelmä 3.3. *Solmun aste* kertoo, kuinka monen särmän päätesolmu kyseinen solmu on. Luupilla on kaksinkertainen päätesolmu.

Lause 3.4. Graafin solmujen asteiden summa on kaksinkertainen särmien lukumäärään nähden

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)\,, \tag{3.1}$$

missä $|E|$ on särmien lukumäärä ja deg(v) on solmun aste. [3]

Esimerkki 3.5. Olkoon G graafi, jossa on viisi solmua. Viidestä solmusta yhden aste on neljä ja muiden solmujen aste on yksi. Tällöin

$$2|E| = 2 \cdot 4 = 8$$
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$$

Määritelmä 3.6. *Polku* graafin G solmusta u solmuun v on jono.

$$p = \langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_m, v_m \rangle,$$

Jossa e_k on solmujen v_{k-1} ja v_k välinen särmä. *Alkusolmu* on $v_0 = u$ ja *loppusolmu* on $v_m = v$.

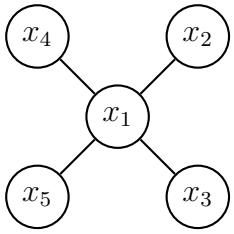
Määritelmä 3.7. Kaksi graafin solmua sanotaan olevan *yhdistetyt*, jos niiden välillä on polku [3].

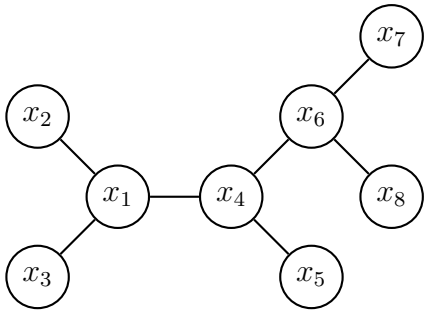
Määritelmä 3.8. Graafi on *yhtenäinen*, jos sen mitkä tahansa kaksi solmua ovat yhdistetyt.

Määritelmä 3.9. Polku on *piiri*, jos siinä on ainakin yksi särmä ja sen alku- ja loppusolmu ovat samat. Piiri on *yksinkertainen*, jos sen jokainen särmä esiintyy vain kerran. *Silmukka* on yksinkertainen piiri, jossa sen jokainen solmu, paitsi päätesolmu, esiintyy vain kerran.

Määritelmä 3.10. *Puu* on yhtenäinen silmukaton graafi [3].

Esimerkki 3.11. Seuraavana kaksi esimerkkiä puista. Graafissa solmuja merkataan luvuilla x_i ja viivat ovat särmiä.





Määritelmä 3.12. Graafi H on graafin G *aligraafi*, jos $V(H) \subseteq V(G)$ ja $E(H) \subseteq E(G)$. Puun yhdistettyä aligraafia sanotaan *alipuuksi*. [3]

Määritelmä 3.13. *Virittävä puu* T on graafin G alipuu, joka sisältää graafin G kaikki solmut.

Lause 3.14. Jokainen yhtenäinen graafi sisältää virittävän puun [3].

Todistus. Olkoon G yhtenäinen graafi. Olkoon H kaikkien graafin G yhtenäisten virittävien aligraafien kokoelma. Koska $G \in H$, niin H on epätyhjä. Olkoon $T \in H$ yhtenäinen graafi, jossa on vähiten särmiä. Nyt T on graafin G virittävä puu. Jos T ei olisi graafin G virittävä puu, siinä olisi graafin G silmukka. Särmän poistaminen silmukasta antaisi graafin, jolla on yksi särmä vähemmän kuin graafilla T. Tämä on ristiriita, sillä graafilla T on vähiten särmiä. Siis T on graafin G virittävä puu. [3] □

Määritelmä 3.15. *Suunnattu graafi* G on pari (V, E), missä V on epätyhjä joukko ja E on joukko järjestettyjä pareja $\{u, v\}$, missä $u, v \in V$.

Määritelmä 3.16. *Painotettu graafi* on graafi, jossa jokaiselle sen särmälle on annettu jokin luku. Tämä luku on särmän *paino*.

3.2 Lyhin polku

Määritelmä 3.17. [6] Polun $p = \langle v_0, e_1, v_1, ..., e_m, v_m \rangle$ *paino* $w(p)$ on sen särmien painon summa

$$w(p) = \sum_{i=1}^{m} w(e_i). \tag{3.2}$$

Määritelmä 3.18. [6] *Lyhimmän polun paino* $\delta(u, v)$ on

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{jos on olemassa polku solmusta } u \text{ solmuun } v \\ \infty & \text{muuten.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Tässä $\xrightarrow{p}$ kuvaa polkuja kahden solmun välillä.

Määritelmä 3.19. [6] *Lyhin polku* solmusta u solmuun v on mikä tahansa polku p, jonka paino $w(p) = \delta(u, v)$.

3.3 Maksimivirtaus

Maksimivirtaus on suurin nopeus, millä materiaalia voi kulkea lähteestä nieluun ilman, että kapasiteettirajoituksia rikotaan [6]. Tässä alaluvussa tarkastellaan maksimivirtauksen teoriaa, jota tarvitaan maksimivirtaus -ongelman ratkaisemiseen.

Määritelmä 3.20. [6] *Kapasiteetti* kertoo, kuinka paljon ja kuinka nopeasti materiaalia voi virrata suunnatun särmän läpi. Kapasiteettia merkitään c (u, v) ≥ 0, missä c on *kapasiteettifunktio*.

Määritelmä 3.21. [6] *Virtausverkko* on suunnattu graafi G, missä jokaisella särmällä on ei-negatiivinen kapasiteetti c (u, v) ≥ 0. Lisäksi jos (u, v) $\in E$, niin (v, u) $\notin E$. Jos (u, v) $\notin E$, niin c (u, v) = 0 ja kielletään luupit. Jokaisessa virtausverkossa on kaksi selvästi erotettavaa solmua: *lähde* s ja *nielu* t. Jokainen solmu sijaitsee jollakin polulla lähteestä nieluun.

Määritelmä 3.22. [6] Olkoon G virtausverkko, jolla on kapasiteettifunktio c. Olkoon s lähde ja t nielu. *Virtaus* graafissa G on funktio $f : V \times V \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat kaksi ominaisuutta:

Kaikille u, $v \in V$ edellytetään, että

$$0 \leq f(u,v) \leq c(u,v). \tag{3.4}$$

Kaikille $u \in V - \{s,t\}$, eli kaikille solmuille paitsi lähteelle s ja nielulle t, edellytetään, että

$$\sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v). \tag{3.5}$$

Kaavalla (3.4) tarkoitetaan, että virtaus yhdestä solmusta toiseen solmuun on oltava ei-negatiivinen eikä se saa ylittää annettua kapasiteettia. Tätä kutsutaan *kapasiteettirajoitukseksi*. Kaavalla (3.5) tarkoitetaan, että solmuun, joka ei ole lähde tai nielu, tulevan virtauksen on oltava yhtä suuri kuin siitä lähtevä virtaus. Tätä kutsutaan *virtauksen säilymiseksi*. Jos $(u,v) \notin E$, niin virtausta ei ole solmujen u ja v välillä ja tällöin $f(u,v) = 0$.

Määritelmä 3.23. [6] Olkoon $f(u,v)$ virtaus solmujen u ja v välillä. Virtauksen f *arvo* $\mid f \mid$ määritellään seuraavalla tavalla

$$\mid f \mid = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s). \tag{3.6}$$

Siis lähteestä virtaavasta virtauksesta vähennetään lähteeseen virtaava virtaus.

Määritelmä 3.24. [6] *Jäännösverkko* G_f koostuu särmistä, joiden kapasiteetit kuvaavat kuinka paljon virtaus voi muuttua virtausverkon G särmissä.

Määritelmä 3.25. [6] *Jäännöskapasiteetti* $c_f(u,v)$ määritellä seuraavalla tavalla

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{jos } (u,v) \in E, \\ f(v,u) & \text{jos } (v,u) \in E, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Virtausverkon särmä voi saada lisävirtaa määrän, joka vastaa särmän kapasiteetin ja särmän virtauksen erotusta. Esimerkiksi jos $c(u,v) = 16$ ja $f(u,v) = 11$, niin $f(u,v)$ voi kasvaa enintään $c_f(u,v) = 5$ yksikköä ennen kuin se ylittää särmän (u,v) kapasiteettirajoituksen. Jos erotuksen arvo on positiivinen, niin särmä siirtyy jäännösverkkoon G_f jäännöskapasiteetilla $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$. Vain virtausverkon G särmät, jotka ovat jäännösverkossa G_f, voivat saada suuremman virtauksen kuin aiemmin. Särmät (u,v), joiden virtaus on yhtä suuri kuin niiden kapasiteetti saavat jäännöskapasiteetiksi $c_f(u,v) = 0$, eivätkä ne kuulu jäännösverkkoon G_f. [6]

Määritelmä 3.26. [6] Olkoon f virtaus virtausverkossa G ja f' virtaus vastaavassa jäännösverkossa G_f. Virtauksen f *augmentointia* virralla f' merkitään $f \uparrow f'$. Augmentointi

voidaan määritellä funktioksi $V \times V \to \mathbb{R}$ seuraavalla tavalla

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{jos } (u,v) \in E, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Määritelmä 3.27. [6] Olkoon $G = (V, E)$ virtausverkko ja f virtaus. *Augmentoitu polku* p on yksinkertainen polku lähteestä s nieluun t jäännösverkossa G_f

Määritelmä 3.28. [6] Suurinta määrää, jolla voidaan kasvattaa virtausta jokaisessa augmentoituvan polun p särmissä kutsutaan *polun* p *jäännöskapasiteetiksi*. Merkitään $c_f(p) =$ min$\{c_f(u,v) : (u,v)$ on polulla $p\}$.

Määritelmä 3.29. [6] Virtausverkon $G = (V, E)$ *leikkaus* (S, T) on joukon V jako osiin S ja $T = V - S$ siten että $s \in S$ ja $t \in T$.

Määritelmä 3.30. [6] Jos f on virtaus, leikkauksen (S, T) läpi kulkeva *nettovirtaus* $f(S, T)$ määritellään seuraavasti

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u). \tag{3.9}$$

Määritelmä 3.31. [6] Leikkauksen (S, T) *kapasiteetti* on

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v). \tag{3.10}$$

Määritelmä 3.32. [6] Verkon *minimileikkaus* on leikkaus, jonka kapasiteetti on pienin verkon kaikista leikkauksista.

Lause 3.33. [6] Olkoon f virtaus virtausverkossa G, jonka lähde on s ja nielu on t. Olkoon (S, T) mikä tahansa virtausverkon G leikkaus. Tällöin leikkauksen (S, T) läpi kulkeva nettovirtaus on $f(S, T) =| f |$.

Todistus. [6] Kirjoitetaan kaikille solmulle $u \in V - \{s, t\}$ virtauksen säilymisehto (3.5) uudelleen muodossa

$$\sum_{v \in V} f(u,v) = \sum_{v \in V} f(v,u) = 0. \tag{3.11}$$

Otetaan $| f |$ määritelmä kaavasta (3.6) ja lisätään siihen yhtälön (3.11) vasen puoli, joka on nolla, summattuna kaikille solmuille joukossa $S - \{s\}$. Saadaan

$$| f |= \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{u \in S-\{s\}} (\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u)).$$

Oikean puolen summien laajentamisella saadaan

$$\begin{aligned} | f | &= \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{u \in S-\{s\}} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S-\{s\}} \sum_{v \in V} f(v,u). \\ &= \sum_{v \in V} (f(s,v) + \sum_{u \in S-\{s\}} f(u,v)) - \sum_{v \in V} (f(v,s) + \sum_{u \in S-\{s\}} f(v,u)) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{v \in V} \sum_{u \in S} f(v,u). \end{aligned}$$

Koska $V = S \cup T$ ja $S \cap T = \emptyset$ saadaan

$$\begin{aligned} | f | &= \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(u,v) + \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(v,u) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u) \\ &= \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u) + (\sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(v,u)). \end{aligned}$$

Suluissa olevat summat ovat samat, koska jokaiselle solmulle x, $y \in S$ termi $f(x,y)$ esiintyy vain kerran kummassakin summassa. Summat siis kumoavat toisensa. Saadaan

$$\begin{aligned} | f | &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u) \\ &= f(S,T). \end{aligned}$$

□

Lause 3.34. [6] Virtausverkon G minkä tahansa virtauksen f arvo on ylhäältä rajoitettu minkä tahansa virtausverkon G leikkauksen kapasiteetilla.

Todistus. Olkoon (S,T) mikä tahansa leikkaus virtausverkossa G ja olkoon f mikä ta-

hansa virtaus. Lauseen 3.33 ja kapasiteettirajoitteen mukaan

$$\begin{aligned} \mid f \mid &= f(S,T) \\ &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u) \\ &\leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \\ &\leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) \\ &= c(S,T). \end{aligned}$$

[6] □

Lause 3.35. [6]. Jos jäännösverkossa G_f ei ole augmentoituvia polkuja, niin virtaus f on maksimivirtaus.

Todistus. [6] Tarkastellaan seuraavia kolmea ehtoa:

1. Jäännösverkossa G_f ei ole augmentoituvia polkuja.
2. Jollekin virtausverkon G leikkaukselle (S,T)nettovirtaus $\mid f \mid$ on sama kuin leikkauksen kapasiteetti $c(S,T)$.
3. f on maksimivirtaus virtausverkossa G.

Todistetaan, että ehdosta (1) saadaan ehto (2) ja ehdosta (2) saadaan ehto (3).

(1) $\rightarrow$ (2): Oletetaan, että jäännösverkossa G_f ei ole augmentoivaa polkua, eli polkua lähteestä s nieluun t. Määritellään
$S = \{v \in V$: Jäännösverkossa on olemassa polku lähteestä nieluun$\}$
ja $T = V - S$. (S,T) on leikkaus. Triviaalisti $s \in S$ ja $t \notin S$, koska jäännösverkossa G_f ei ole polkua lähteestä s nieluun t. Tarkastellaan solmuparia $u \in S$ ja $v \in T$. Jos $(u,v) \in E$, niin täytyy olla $f(u,v) = c(u,v)$, sillä muuten $(u,v) \in E_f$, mikä sijoittaisi solmun v joukkoon S. Jos $(v,u) \in E$, niin täytyy olla $f(v,u) = 0$, koska muuten $c_f(u,v) = f(v,u)$ olisi positiivinen ja $(u,v) \in E_f$, mikä sijoittaisi solmun v taas joukkoon S. Jos taas kumpikaan (u,v) ja (v,u) ei kuulu joukkoon E, niin $f(u,v) = f(v,u) = 0$. Lauseesta 3.33 saadaan

$$\begin{aligned} f(S,T) &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\ &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} 0 \\ &= c(S,T). \end{aligned}$$

Siis $\mid f \mid = f(S,T) = c(S,T)$.

(2) $\rightarrow$ (3): Lauseen 3.34 mukaan kaikille leikkauksille (S,T) virtauksen arvo on pienempi tai yhtäsuuri kuin leikkauksen kapasiteetti, eli $\mid f \mid \leq c(S,T)$. Ehto $\mid f \mid = c(S,T)$ tarkoittaa siis, että f on maksimivirtaus. $\square$

Maksimivirtauksen ratkaisemisessa voidaan käyttää Ford-Fulkerson algoritmia, missä iteroimalla kasvatetaan virtauksen arvoa. Algoritmissä ensin aloitetaan antamalla virtaukselle arvon 0, eli $f(u,v) = 0$ kaikilla $u, v \in V$. Jokainen iterointi lisää virtauksen arvoa graafissa G etsimällä augmentoidun polun jäännösverkosta G_f. Jäännösverkossa G_f augmentoidun polun särmät osoittavat, mihin graafin G särmistä tulee virtausta päivittää virtauksen arvon lisäämiseksi. Graafin G särmissä virtaus voi lisääntyä tai vähentyä. Särmän virtauksen vähentäminen voi nostaa virtausta muissa särmissä, mikä voi johtaa enemmän materiaalia nieluun. Ford-Fulkerson algoritmi augmentoi virtausta jatkuvasti, kunnes jäännösverkossa ei ole enään augmentoituja polkuja jäljellä. [6] Algoritmia voidaan laajentaa, jolloin saadaan seuraavanlainen algoritmi [6]:

1: jokaiselle särmälle $(u,v) \in G$
2: $f(u,v) = 0$
3: **while** jäännösverkossa G_f on olemassa polku p lähteestä s nieluun t **do**
4: $\quad c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v)$ on polussa $p\}$
5: $\quad$ jokaiselle särmälle (u,v) joka on polussa p
6: $\quad$ **if** $(u,v) \in G$ **then**
7: $\quad\quad f(u,v) = f(u,v) + c_f(p)$
8: $\quad$ **else**$f(v,u) = f(v,u) - c_f(p)$
9: $\quad$ **end if**
10: **end while**

Tässä algoritmissa kaksi ensimmäistä riviä antavat virtaukselle arvon 0. While-silmukka etsii jatkuvasti augmentoitua polkua p jäännösverkosta G_f ja augmentoi virtausta f pitkin polkua p jäännöskapasiteetilla $c_f(p)$. Rivit 6-8 päivittävät virtausta lisäämällä virtausta, kun jäännös särmä on alkuperäinen särmä, ja vähentämällä virtausta muussa tapauksessa. Kun augmentoituvia polkuja ei ole, virtaus f on maksimivirtaus. [6]

4. TUTKIMUSMENETELMÄT JA TULOKSET

4.1 Tutkimusmenetelmät

Tässä tutkimuksessa verrataan perinteiseen opetukseen osallistuneiden opiskelijoiden ja opiskelijoiden, jotka ovat osallistuneet toteutuksiin käänteisen opetuksen menetelmällä, arvosanoja sekä heidän opiskeluun käytettyä aikaa ja valmistumiseen käytettyä polkua. Tutkimusaineistona toimii Tampereen yliopistossa 2019 syksyllä opiskelun aloittaneiden tekniikan kandidaattiopiskelijoiden suorittamat kurssit ja heidän opiskeluaikansa. Tarkasteltavat opintojaksot ovat eri toteutukset insinöörimatematiikan opintojaksoista, jotka järjestettiin perinteisenä luento-opetuksena tai käänteisenä opetuksena.

Opintojaksot insinöörimatematiikka C1, C2, C3 ja C5 toteutettiin käänteisen oppimisen menetelmällä, kun taas insinöörimatematiikka A1, A2 , A3, A5, B1 ,B2, B3 ja B5 toteutettiin luento-opetuksena. Insinöörimatematiikka B toteutuksilla oli pääosin biotekniikan, sähkötekniikan ja tietotekniikan tutkinto-opiskelijoita [12]. Insinöörimatematiikka C toteutuksilla oli pääosin automaatiotekniikan, konetekniikan, materiaalitekniikan sekä ympäristö- ja energiatekniikan tutkinto-opiskelijoita [12]. Insinöörimatematiikka A toteutukset olivat pakollisia opintojaksoja rakennustekniikan, tuotantotalouden ja tietojohtamisen opiskelijoille [16].

Opintojaksojen insinöörimatematiikka A/B/C 1 sisältö oli analyysin perusteita. Opintojaksoon kuului aiheita logiikkasta, funktioista, derivaatasta, kompleksiluvuista sekä integraalilaskentaa. Opintojaksojen insinöörimatematiikka A/B/C 2 sisältö oli lineaarialgebran perusteita. Opintojaksojen sisältöön kuului aiheita vektoreista ja matriiseista. Opintojaksoilla insinöörimatematiikka A/B/C 3 opiskeltiin differentiaali- ja integraalilaskentaa. Opintojakson sisältöön kuului integraalifunktio, integroimistekniikat, differentiaaliyhtälöt, lukujonot ja sarjat. Opintojaksoilla insinöörimatematiikka A/B/C 5 opiskeltiin todennäköisyyslaskentaa ja tilastollista päättelyä. Opintojakson sisältöön kuului todennäköisyyden käsite ja laskulakeja, todennäköisyysjakaumat, yhteisjakaumat sekä otosjakaumat ja tilastollinen testaaminen. [16]

Flippaustoteutukset aloitettiin tiedotustilaisuudella, jossa käytiin läpi kurssin järjestelyt. Ennen uuteen aiheviikkoon siirtymistä kehotettiin opiskelijoita tutustumaan tulevan viikon osaamistavoitteisiin. Uutta aihetta pystyi käymään monisteen, kirjan tai opetusvideoi-

den avulla. Tehtävät koostuivat opintojaksojen alussa olevista kertaustehtävistä, viikoittaisista verkkotehtävistä, ja viikoittaisista harjoitustehtävistä. Verkkotehtävät olivat STACK-tehtäviä Moodlessa, joista osassa oli vastauskerrat rajoitettu ja osassa pystyi vastaamaan rajattomasti. Harjoitustehtävistä oli tarkoitus tehdä osa ennen harjoitustilaisuutta, jossa ne käytiin läpi. Tehdyistä harjoitustehtävistä sai pisteitä, jos opiskelija tuli paikalle. Harjoitustehtäviin kuului myös palautettavat tehtävät, jotka palautettiin harjoitustilaisuuden jälkeen. Harjoitusten palautuksen määräajan jälkeen tehtäviin julkaistiin ratkaisut ja pisteytysohjeet. Opiskelijat tekivät itse- ja vertaisarvion palautetuista tehtävistä ja antoivat niistä pisteitä. Flippaustoteutuksissa pääopetustilaisuus oli *prime time* -tilaisuus. Siellä pienryhmät ja opettaja keskustelivat aiheviikosta. Keskusteluun osallistumisesta opiskelijat saivat pisteitä. Yleensä yhdellä opettajalla oli kolme tai neljä pienryhmää kahden tunnin tilaisuudessa. Opiskelijat tekivät ryhmätehtäviä, kun ei ollut heidän keskusteluvuoronsa. Flippaustoteutuksissa oli myös oman osaamisen itsearviointia. Itsearviointi tehtiin ennen prime time -tilaisuutta. Siinä arviointiin, kuinka hyvin kyseisen viikon asiat on opittu. Itsearvioinnista sai viikoittain pisteitä. Perjantaisin järjestettiin tukitilaisuus niille, joiden pohjatiedot olivat heikommat. Tilaisuudessa kerrattiin opettajan avustuksella pohjatiedot, joita tarvitaan tulevan viikon aiheessa. Joissain opintojaksoissa tukitilaisuudessa tehdyistä tehtävistä sai opintojakson suorittamiseen vaikuttavia pisteitä. Flippaustoteutuksissa arvosana määräytyi tentin pisteiden ja opintojakson aikana saatujen pisteiden mukaan. Tentti oli vapaaehtoinen. Ilman tenttiä opiskelijat saattoivat saada parhaimmillaan arvosanan 3. Opintojaksojen aikana oli mahdollista saada 1 000 pistettä, joista 300 oli tenttipisteitä. [12]

Luentototeutuksissa opetusta oli viikon aikana kaksi tai kolme luentoa. Luentototeutuksessa oli myös harjoitustehtävät ja harjoitustilaisuus. Harjoitustilaisuuksia oli yksi tai kaksi viikossa. Opintojaksojen alussa osa harjoitustehtävistä tehtiin kotona ja osa harjoitustilaisuudessa. Myöhemmin harjoitustilaisuuksissa sai apua tehtävien tekoon ja tehtävät palautettiin tilaisuuden jälkeen. Tehtävät myös itse- ja vertaisarvioitiin. Lisäksi toteutuksissa oli mukana STACK-tehtäviä Moodlessa, jotka toimivat kotitehtävinä. Luentototeutuksissa oli käytössä tentti. Tenttiin osallistumiseen tarvittiin tietty pistemäärä harjoituspisteitä. [12]

Opintojaksoilla insinöörimatematiikka A/B/C 1 oli perustaitotesti ja vapaaehtoisia kertaustehtäviä. Perustaitotesti tehtiin EXAM-tiloissa. Testin pisteet vaikuttivat opintojakson suoritukseen, mutta painotus oli harjoituksissa ja tentissä. Opintojaksoilla insinöörimatematiikka A/B/C 2 opiskeltiin myös MATLABin alkeita. Opintojaksoon kuului Moodlessa tehtäväpaketti, joka piti tehdä ennen MATLAB alkeiden testiä. Tehtävät toimivat harjoituksena MATLAB-ohjelmiston käyttöön. MATLAB alkeiden testi oli EXAM-tiloissa tehtävä testi, joka vaikutti opintojakson suorittamiseen. Opintojaksoilla insinöörimatematiikka A/B/C 3 oli lähtötaitotesti. Testissä menestyminen vaikutti opintojakson arvosanaan, mutta tässäkin opintojaksossa lähtötaitotestin painotus arvosanaan oli pieni. Testi suoritettiin EXAM-tiloissa ja koronasulun jälkeen Moodlessa STACK-tehtävinä. Testissä oli lukiotason tehtäviä ja kahden edeltävän insinöörimatematiikan opintojaksojen taitoja mittaavia kysy-

myksiä. Opintojaksoilla insinöörimatematiikka A/B/C 5 oli tarkoitus tehdä EXAM-tentti. Tentti jouduttiin kuitenkin perumaan koronan takia. Vastaavanlainen tentti tehtiin Moodle-tenttinä. [12]

Aineisto on kerätty opiskelijarekisteristä tietopyynnöllä. Koska kyseessä on tieteellinen tutkimus, tietopyyntöön sisältyivät tutkimussuunnitelma, tietosuojaselote sekä riskien ennakkoarviointi. Tutkimuksessa opiskelijoita oli yhteensä 469. Heistä 123 suoritti kaikki insinöörimatematiikka A toteutukset, 106 kaikki insinöörimatematiikka B toteutukset ja 133 kaikki insinöörimatematiikka C toteutukset. Aineiston analyysissä sekä taulukoiden ja graafien teossa on käytetty MATLAB-ohjelmistoa.

4.2 Arvosanat

Tässä alaluvussa esitetään eri insinöörimatematiikka toteutusten arvosanat ja keskiarvot.

Koodi	Suorituksia	Opiskelijoita	1	2	3	4	5	keskiarvo
C1	153	145	8	23	38	47	29	3.4552
C2	147	146	7	24	31	60	24	3.4795
C3	156	147	11	25	29	57	25	3.4082
C5	154	151	14	25	34	57	21	3.3046

Taulukko 4.1. *Insinöörimatematiikka C toteutusten hyväksytyt arvosanat*

Taulukossa 4.1 insinöörimatematiikka C toteutusten opiskelijamäärät ja arvosanat. Suoritusten määrässä on otettu huomioon myös uusinnat, minkä vuoksi suorituksia on enemmän kuin opiskelijoita. Taulukossa esiintyvät arvosanat ovat korkeimmat arvosanat, jotka opiskelijat ovat saaneet. Insinöörimatematiikka C toteutuksissa painotus oli arvosanassa 4.

Koodi	Suorituksia	Opiskelijoita	1	2	3	4	5	keskiarvo
A1	147	143	14	23	21	33	52	3.6014
A2	146	134	30	28	33	30	13	2.7612
A3	148	145	12	29	24	37	43	3.4828
A5	157	153	6	16	34	55	42	3.7255

Taulukko 4.2. *Insinöörimatematiikka A toteutusten hyväksytyt arvosanat*

Taulukossa 4.2 insinöörimatematiikka A toteutusten opiskelijamäärät ja arvosanat. Insinöörimatematiikka A toteutuksissa arvosanojen jakauma on vaihteleva. Ensimmäisessä toteutuksessa painotus oli arvosanassa 5. Toteutuksessa A2 painotus oli arvosanassa 3. Toteutuksissa A3 ja A5 painotukset olivat arvosanoissa 5 ja 4.

Koodi	Suorituksia	Opiskelijoita	1	2	3	4	5	keskiarvo
B1	136	129	6	21	37	44	21	3.4109
B2	139	138	22	30	39	34	13	2.8986
B3	134	131	24	27	37	25	18	2.8931
B5	129	121	15	17	47	35	7	3.0165

Taulukko 4.3. *Insinöörimatematiikka B toteutusten hyväksytyt arvosanat*

Taulukossa 4.3 insinöörimatematiikka B toteutusten opiskelijamäärät ja arvosanat. Insinöörimatematiikka B toteutuksissa arvosanojen jakauma painottui pienempiin arvosanoihin, kuin A- ja C toteutuksissa. Ensimmäisessa insinöörimatematiikka B toteutuksessa painotus oli arvosanassa 4, kun taas muissa toteutuksissa se oli arvosana 3. Toteutusten vertailussa käytettiin Studentin t-testiä. Nollahypoteesi on, että ryhmien keskiarvot eivät eroa merkittävästi. Vastahypoteesi on, että ryhmien keskiarvot eroavat merkittävästi. Siis

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (Ryhmien keskiarvot ovat samat)

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ (Ryhmien keskiarvot eivät ole samat)

Ensimmäisenä lasketaan neliöpoikkeamien summa seuraavalla tavalla:

$$x_1(1-M)^2 + x_2(2-M)^2 + x_3(3-M)^2 + x_4(4-M)^2 + x_5(5-M)^2,$$

missä M on keskiarvo ja x_y on lukua y vastaavien arvosanojen määrä. Vain paras arvosana otetaan huomioon.

Varianssi σ^2 saadaan jakamalla edellisestä kaavasta saatu tulos luvulla $n-1$, missä n on opiskelijoiden määrä. Kun kahden eri ryhmän varianssit on laskettu voidaan laskea yhdistetty varianssi σ_p^2:

$$\sigma_p^2 = \frac{(n_1-1)\sigma_1^2 + (n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2},$$

missä n_1 ja n_2 ovat opiskelijoiden määrät ja σ_1^2 ja σ_2^2 ovat vastaavat varianssit. Yhdistetty keskihajonta σ_p voidaan laskea neliöjuuren avulla. Testisuure t saadaan kaavalla

$$\frac{M_1 - M_2}{\sigma_p\sqrt{\frac{1}{n_1}\frac{1}{n_2}}},$$

missä M_1 ja M_2 ovat ryhmien keskiarvot. Vapausasteet ν saadaan seuraavasta kaavasta:

$$\nu = n_1 + n_2 - 2.$$

Tämän jälkeen vapausasteen avulla voidaan laskea kriittinen t-arvo sekä p-arvo laskinta käyttäen. Tutkimuksessa käytetään TI-nspire CX CAS laskinta. Testit tehtiin 5% merkitsevyystasolla. Toteutusten C1 ja A1 välillä saatiin p-arvoksi 0,327. Tämä on suurempi kuin 0,05, joten arvosanojen keskiarvojen ero ei ole tilastollisesti merkittävä. Toteutusten C1 ja B1 välillä saatiin p-arvo 0,76. Toteutusten A1 ja B1 välillä p-arvoksi saatiin 0,234. Insinöörimatematiikka C1, A1, ja B1 välillä ei siis ole merkittävää eroa.

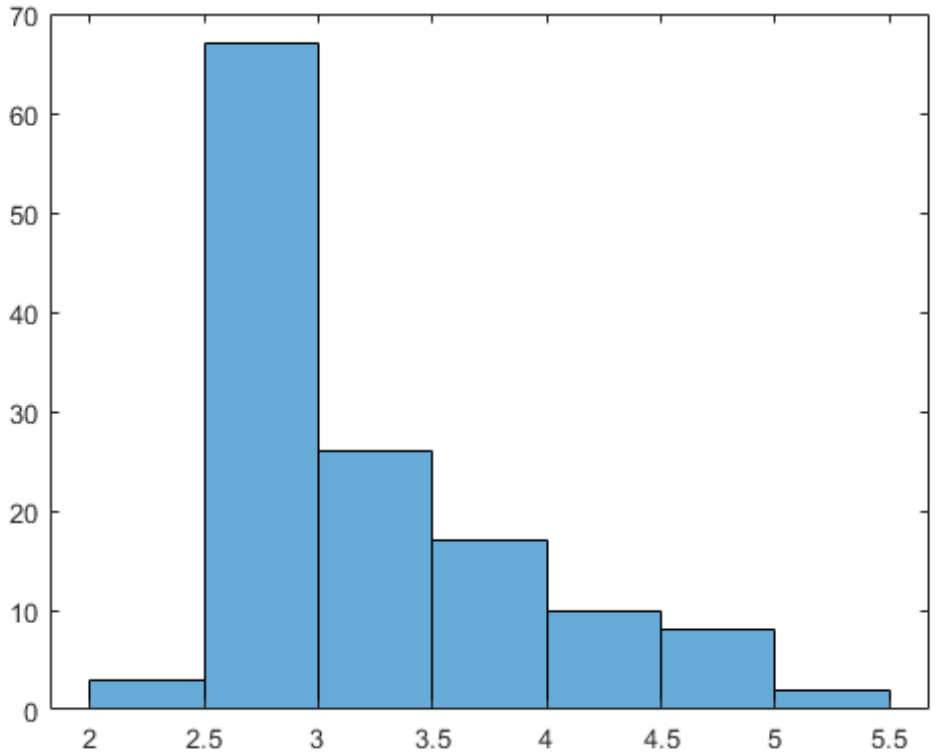
Toteutusten C2 ja A2 välillä p-arvo on erittäin pieni (<0,0001), joten keskiarvojen ero on tilastollisesti erittäin merkittävä. Toteutusten C2 ja B2 välillä p-arvoksi saadaan myös erittäin pieni luku (<0,0001). Toteutusten A2 ja B2 välillä p-arvo on 0,379, joten näiden kahden toteutuksen välillä ei ole merkittävää eroa. Toisessa insinöörimatematiikan toteutuksessa oli erittäin merkittävä ero flippaustoteutuksen ja luentototeutusten välillä. Tässä tapauksessa opiskelijat, jotka kävivät flipatulla toteutuksella, menestyivät huomattavasti paremmin.

Toteutusten C3 ja A3 välillä p-arvo on 0,61, eli toteutusten keskiarvoissa ei ole merkittävää eroa. Toteutusten C3 ja B3 välillä p arvo on erittäin pieni (<0,001), joten toteutusten keskiarvojen välillä on hyvin merkittävä ero. Toteutusten A3 ja B3 välillä p-arvo on myös hyvin pieni (<0,001). Kolmannessa insinöörimatematiikan toteutuksessa B3 toteutuksella oli merkittävä ero C3 ja A3 toteutuksiin. Eroa ei tässä tapauksessa voida sanoa johtuvan flippauksesta, sillä toteutusten A3 ja C3 välillä ei ollut merkittävää eroa.

Toteutusten C5 ja A5 välillä p-arvo on 0,0013, joten keskiarvojen välillä on merkittävä ero. Toteutusten C5 ja B5 välillä p-arvo on 0,042, joten toteutusten välillä on merkittävä ero. Toteutusten A5 ja B5 välillä p-arvo on erittäin pieni (<0,00001), joten keskiarvojen välillä on erittäin merkittävä ero. Viimeisissä insinöörimatematiikan toteutuksissa jokaisen toteutuksen välillä oli merkittävä ero. Tässä kuitenkin menestyivät parhaiten A5 toteutukseen osallistuneet oppiskelijat, eli luentototeutukseen osallistuneet opiskelijat. Mutta on myös huomioitava, että heikoiten menestyi B5 toteutukseen osallistuneet opiskelijat, jotka olivat myös luentototeutuksessa.

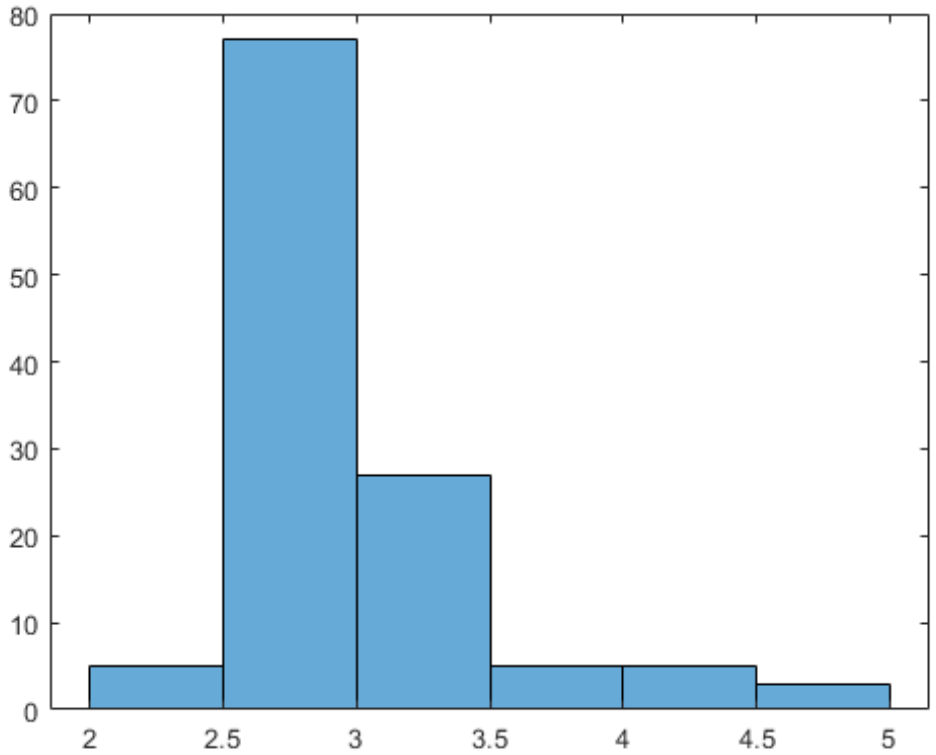
4.3 Valmistuminen

Tässä alaluvussa esitetään insinöörimatematiikkaa opiskelleiden valmistumiseen käytetyn ajan eroja. Ajat ovat laskettu puolen vuoden tarkkuudella. Data on kerätty 28.2.2025, joten sen jälkeen valmistuneet eivät näy histogrammeissa. Kandidaadiksi valmistumisen tavoiteaika on kolme vuotta ja diplomi-insinööriksi valmistumisen tavoiteaika on viisi vuotta.



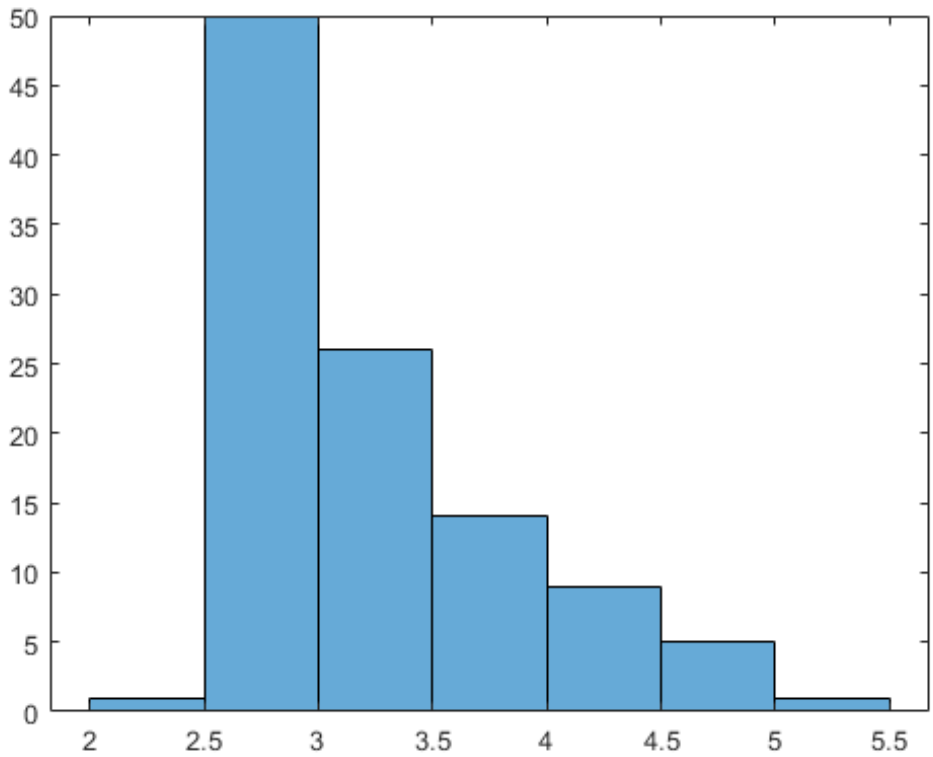
Kuva 4.1. *C toteutukset käyneiden opiskelijoiden kandiksi valmistumisen kulunut aika puolen vuoden tarkkuudella*

Kaikki insinöörimatematiikka C toteutukset on suorittanut 133 opiskelijaa. Heistä jokainen on myös valmistunut kandidaatiksi. Kuvassa 4.1 näkyy heidän kandidaatiksi valmistumiseen kestänyt aika puolen vuoden tarkkuudella. Insinöörimatematiikka C toteutuksilla käyneistä opiskelijoista 70 valmistui kolmessa vuodessa, eli noin 53% opiskelijoista.



Kuva 4.2. *A toteutukset käyneiden opiskelijoiden kandiksi valmistumisen kulunut aika puolen vuoden tarkkuudella*

Kaikki insinöörimatematiikka A toteutukset oli suorittanut 123 opiskelijaa. Heistä 122 on valmistunut kandidaatiksi. Kuvassa 4.2 heidän kandidaatiksi valmistumiseen käytetty aika. Kolmessa vuodessa valmistui 82 opiskelijaa, eli noin 67% A toteutukset käyneistä opiskelijoista.



Kuva 4.3. *B toteutukset käyneiden opiskelijoiden kandiksi valmistumisen kulunut aika puolen vuoden tarkkuudella*

Kaikki insinöörimatematiikka B toteutukset oli suorittanut 106 opiskelijaa. Heistä jokainen on valmistunut kandidaatiksi. Kuvassa 4.3 heidän valmistumiseen kestänyt aika. Insinöörimatematiikka B toteutuksilla käyneistä opiskelijoista 51 valmistui kolmessa vuodessa, eli noin 48% opiskelijoista.

Valmistumisen erojen arviointiin käytetään χ^2-testiä. Testi laskettiin käyttämällä TI-nspire CX CAS laskinta. Nollahypoteesi on, että ryhmien valmistumiseen käytetty aika on sama. Vastahypoteesi on, että ryhmien valmistumiseen käytetyssä ajassa on ero.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (Ryhmien valmistumiseen kulunut aika on sama)

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ (Ryhmien valmistumiseen kulunut aika on eri)

Toteutusten C ja A käyneiden välillä saadaan tuloksiksi:

χ^2	Vapausasteet	p-arvo
14,112	6	0,0284

Siis 5% merkitsevyys tasolla valmistumiseen käytetyssä ajassa on ero. Insinöörimatematiikka A toteutuksissa käyneet valmistuivat nopeammin kuin insinöörimatematiikka C toteutuksissa käyneet.

Toteutusten C ja B käyneiden välillä saadaan tuloksiksi:

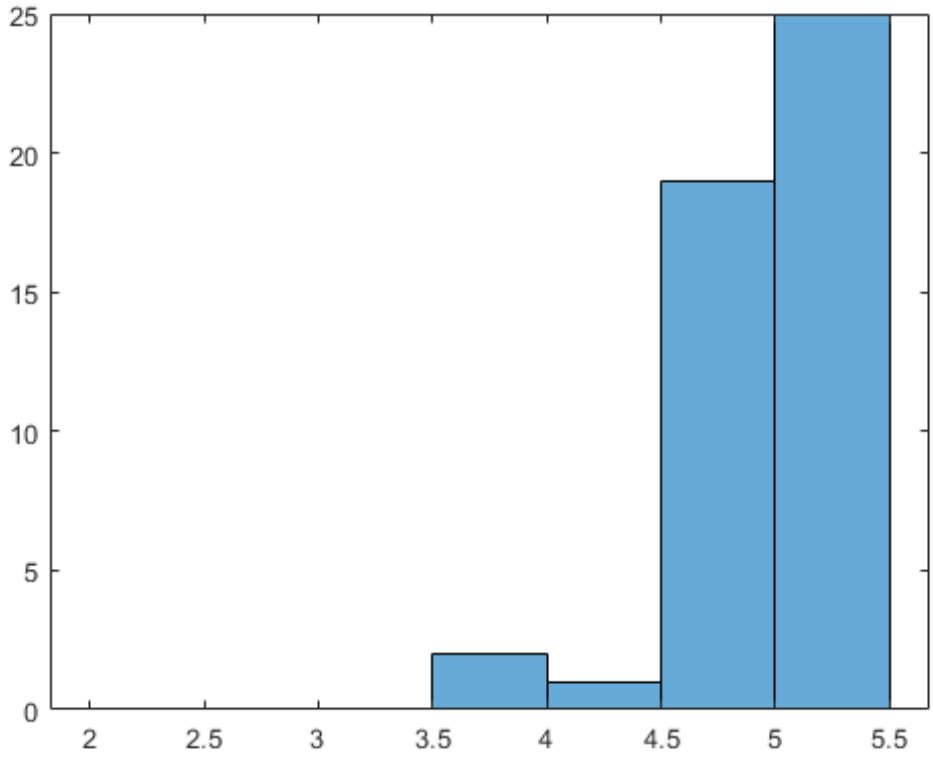
χ^2	Vapausasteet	p-arvo
1,3478	6	0,969

Toteutusten C ja toteutusten B käyneiden opiskelijoiden valmistumiseen käytetyssä ajassa ei ole eroa 5% merkitsevyys tasolla.

Toteutusten A ja B käyneiden välillä saadaan tuloksiksi:

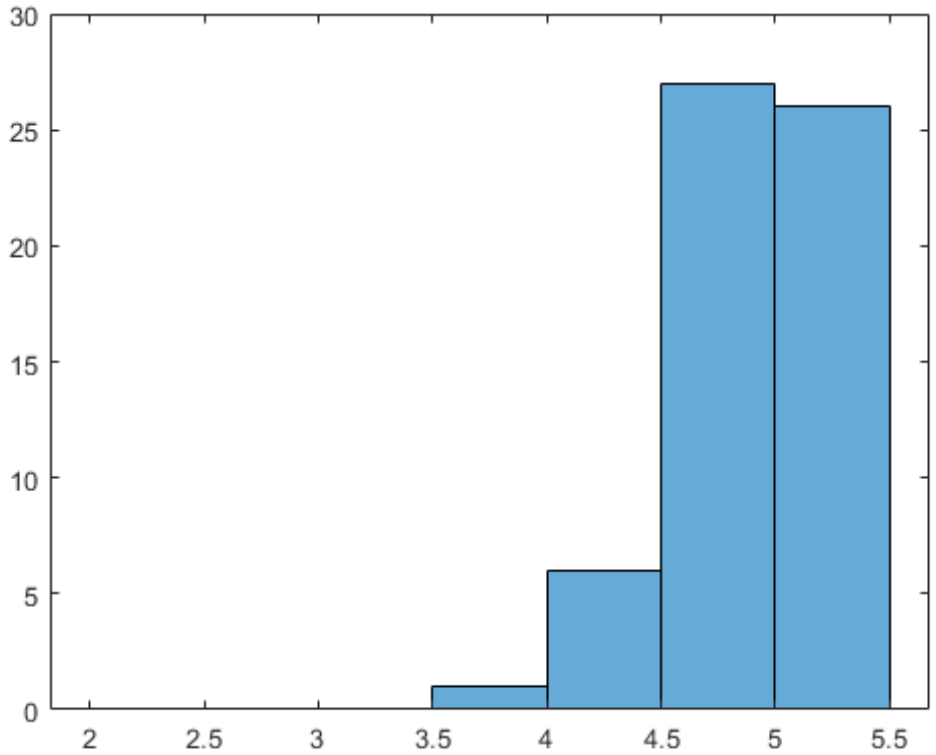
χ^2	Vapausasteet	p-arvo
14,279	6	0,0267

Toteutusten A ja toteutusten B käyneiden opiskelijoiden valmistumiseen käytetyssä ajassa on merkittävä ero 5% merkitsevyys tasolla.



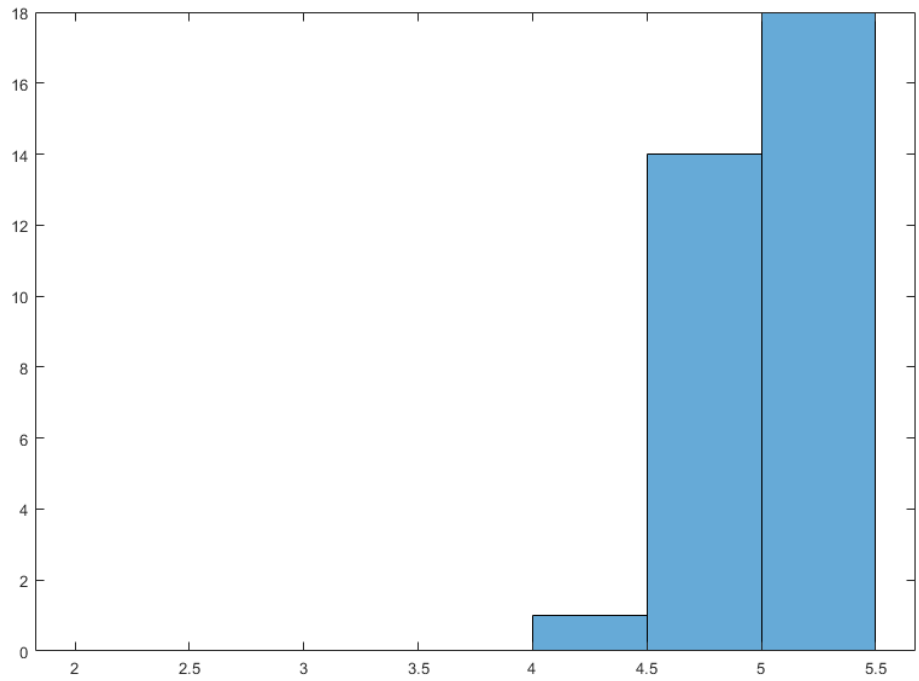
Kuva 4.4. *C toteutukset käyneiden opiskelijoiden diplomi-insinööriksi valmistumisen kulunut aika puolen vuoden tarkkuudella*

Insinöörimatematiikka C toteutuksien suorittaneista 47 on valmistunut diplomi-insinööriksi. Kuvassa 4.4 on heidän valmistumiseen kestänyt aika puolen vuoden tarkkuudella. Näistä opiskelijoista 22 valmistui viiden vuoden aikana, eli noin 47% opiskelijoista. Kaikista 133:sta opiskelijasta diplomi-insinööriksi valmistui tavoite ajassa noin 17%.



Kuva 4.5. *A toteutukset käyneiden opiskelijoiden diplomi-insinööriksi valmistumisen kulunut aika puolen vuoden tarkkuudella*

Insinöörimatematiikka A toteutuksien suorittaneista 60 on valmistunut diplomi-insinööriksi. Kuvassa 4.5 on heidän valmistumiseen kestänyt aika. Heistä 34 valmistui 5 vuoden aikana, eli noin 57% kyseisistä opiskelijoista. Kaikista insinöörimatematiikka A toteutuksissa olleista diplomi-insinööriksi valmistui tavoite ajassa noin 28%.



Kuva 4.6. *B toteutukset käyneiden opiskelijoiden diplomi-insinööriksi valmistumisen kulunut aika puolen vuoden tarkkuudella*

Insinöörimatematiikka B toteutuksien suorittaneista 33 on valmistunut diplomi-insinööriksi. Kuvassa 4.6 on heidän valmistumiseen kestänyt aika. Näistä opiskelijoista 15 valmistui viidessä vuodessa, eli noin 45% opiskelijoista. Kaikista B toteutuksella käyneistä opiskelijoista diplomi-insinööriksi valmistui tavoite ajassa noin 31%.

Diplomi-insinööriksi valmistumiseen kuluneessa ajassa käytetään samaa testiä ja nollahypoteesiä kuin kandidaatiksi valmistumiseen kuluneen ajan tutkimisessa.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (Ryhmien valmistumiseen kulunut aika on sama)

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ (Ryhmien valmistumiseen kulunut aika on eri)

Toteutusten C ja A käyneiden välillä saadaan tuloksiksi:

χ^2	Vapausasteet	p-arvo
3,7922	3	0,2848

Toteutusten C ja B käyneiden välillä saadaan tuloksiksi:

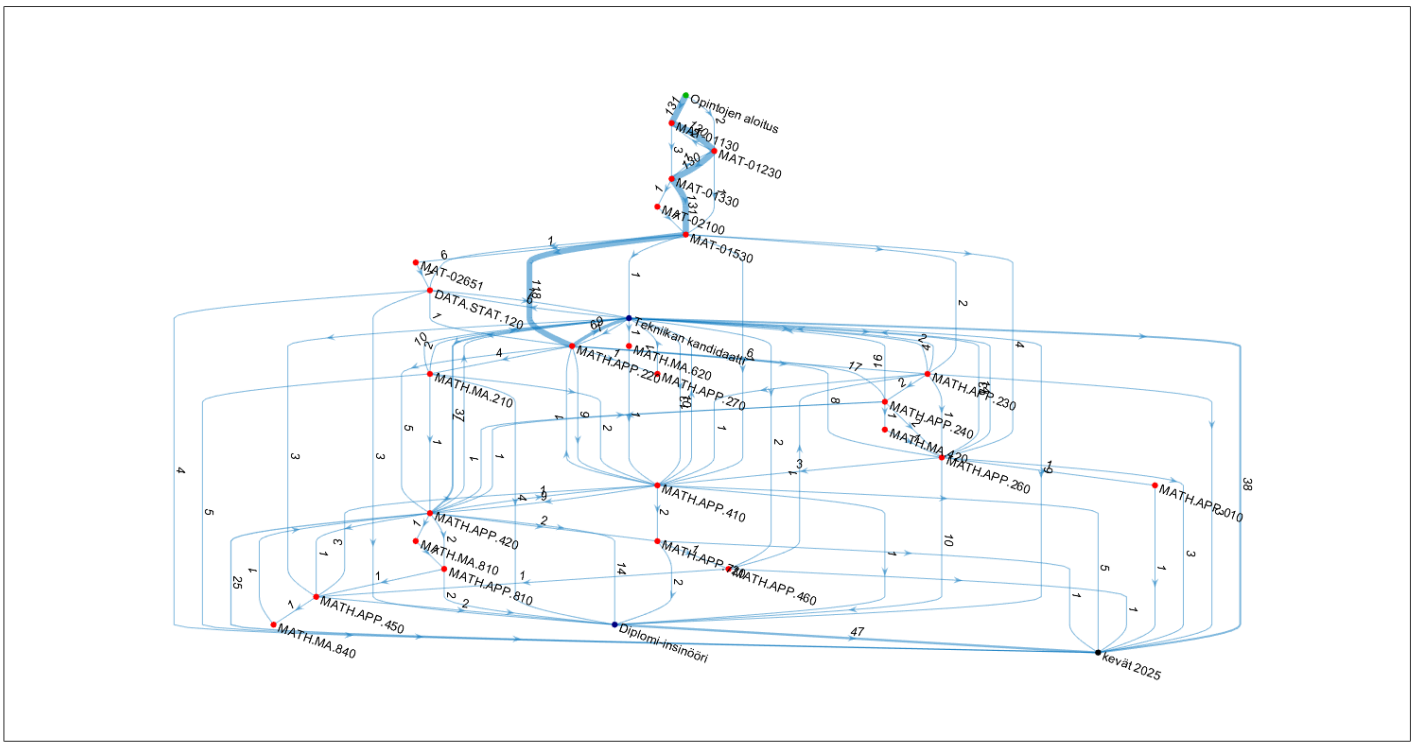
χ^2	Vapausasteet	p-arvo
1,4928	3	0,6839

Toteutusten A ja B käyneiden välillä saadaan tuloksiksi:

χ^2	Vapausasteet	p-arvo
2,5218	3	0,4714

Diplomi-insinööriksi valmistumiseen kuluneessa ajassa ei ollut eroa minkään ryhmän kohdalla.

Seuraavaksi tarkastellaan insinöörimatematiikka opintojaksojen suorittaneiden opiskelijoiden siirtymägraafeja. Yksinkertaisuuden vuoksi siirtymägraafeissa tarkastellaan vain matematiikan opintojaksoja. Liitteissä A, B ja C löytyy siirtymägraafit, joissa on mukana myös johdatus ohjelmointiin opintojakso, teollisuustalouden perusteet opintojakso sekä fysiikan opintojaksoja. Liitteessä D on lista opintojaksojen koodeista ja niitä vastaavista nimistä.



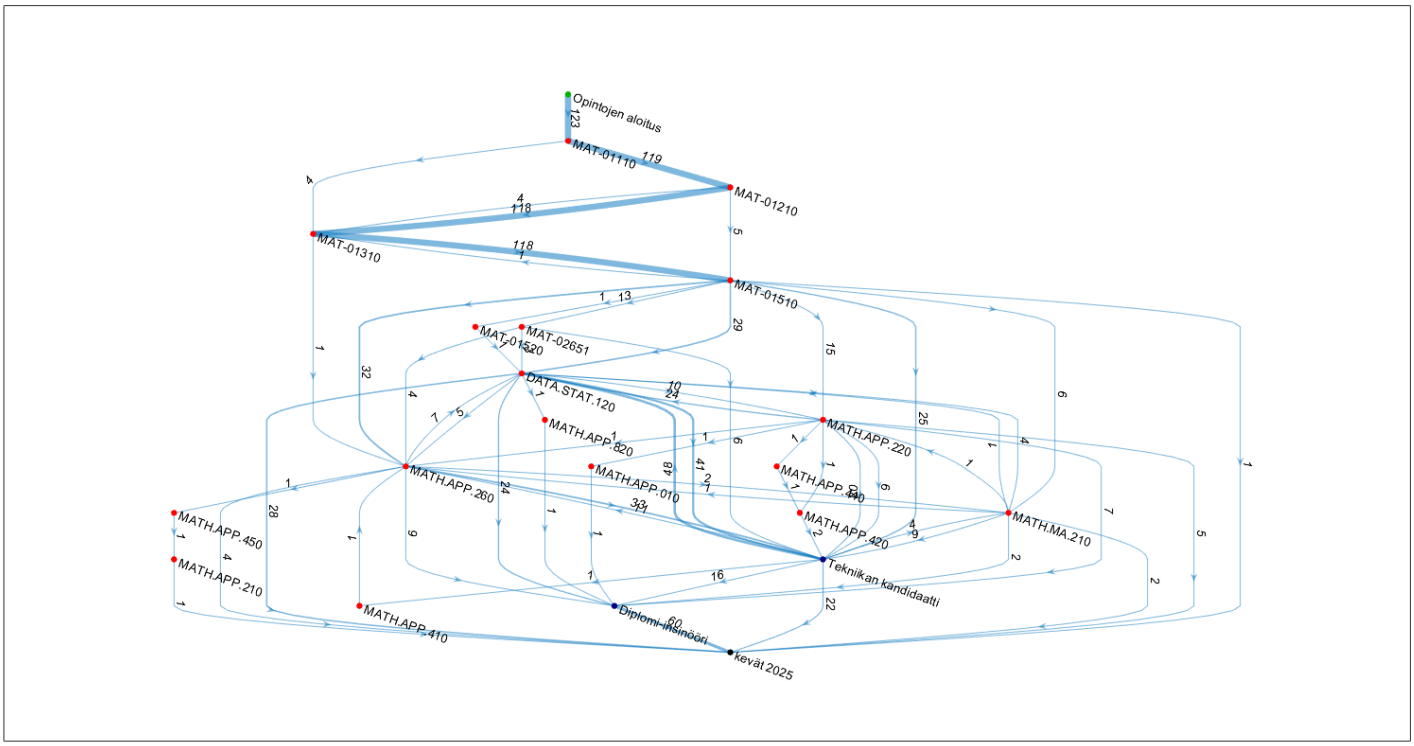
Kuva 4.7. *Insinöörimatematiikka C toteutuksien käyneiden siirtymägraafi*

Kuvassa 4.7 graafi, jossa insinöörimatematiikka C toteutuksien käyneiden polku valmistumiseen. Graafin lähdettä on merkattu vihreällä solmulla ja nimellä *opintojen aloitus*. Opintojen aloitus oli 1.8.2019. Graafin nielua on merkattu mustalla solmulla ja nimellä *kevät 2025*. Tämä solmu merkitsee päivää mihin asti tutkimusaineistoa on kerätty. Kyseinen päivämäärä on 28.2.2025. Graafissa punaiset solmut merkitsevät matematiikan opintojaksoja ja siniset solmut valmistumista kandidaatiksi tai diplomi-insinööriksi. Virtaukset solmu-

jen välillä merkitsevät opiskelijoiden lukumäärää joiden matematiikan opinnot ovat suoritettu tässä järjestyksessä. Graafista huomataan esimerkiksi, että 131 opiskelijaa suorittivat insinöörimatematiikka C1 opintojakson ensimmäisenä matematiikan opintona, mutta kaksi opiskelijaa suorittivat insinöörimatematiikka C2 opintojakson ensin. Lisäksi C1 toteutuksen jälkeen kolme opiskelijaa suorittivat insinöörimatematiikka C3 opintojakson. Graafissa otetaan huomioon opiskelijoiden paras arvosana, joten jos opiskelija on uusinut aiempia opintojaksoja, graafissa se näkyy siten, että opiskelija olisi suorittanut opintojakson myöhemmin.

Usean muuttujan funktiot -opintojakso (MAT-02100 tai MATH.APP.220) on pakollinen kaikille paitsi ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijoille ja kyseisen opintojakso suositellaan suoritettavaksi toisena opiskeluvuonna [16]. Tämä on luultavasti syy, miksi suurin osa opiskelijoista suoritti opintojakson heti insinöörimatematiikka C toteutusten jälkeen. Ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijoille pakollisiin vaihtoehtoisiin opintojaksoihin kuului usean muuttujan funktiot, vektorianalyysi (MATH.APP.230), fourier'n menetelmät (MATH.APP.240), tilastomatematiikan jatkokurssi (MAT-02510) ja operaatiotutkimus (MATH.APP.260) -opintojaksot sekä kolme opintojaksoa, jotka eivät olleet matematiikkaa. Näistä opintojaksoista opiskelijoiden tuli valita vähintään kolme [16].

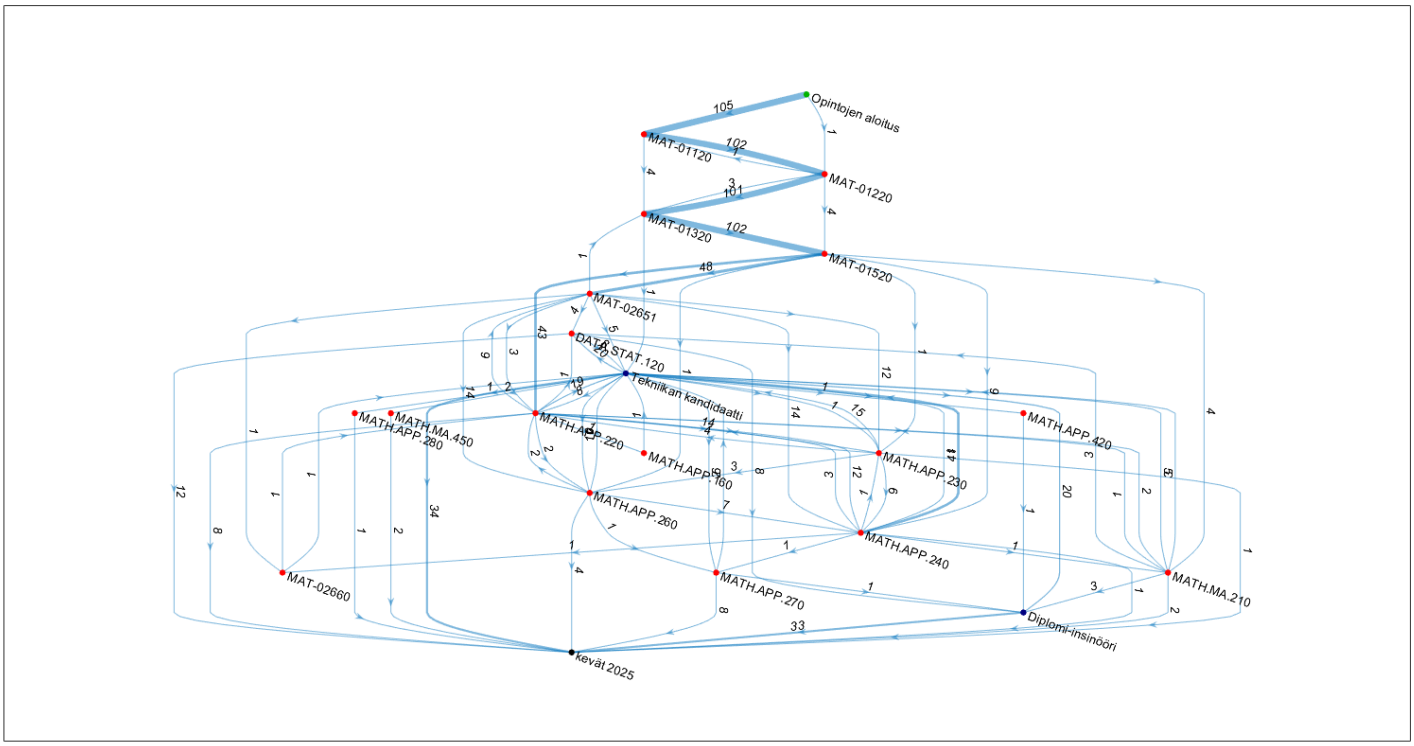
Suurin osa insinöörimatematiikka C opintojaksot käyneistä opiskelijoista suoritti MATH-.APP.220 opintojakson insinöörimatematiikka C5 opintojakson jälkeen. Opintojakso MATH-.APP.220 oli myös viimeinen matematiikan opintojakso 69:lle opiskelijalle ennen kandidaatiksi valmistumista. Insinöörimatematiikka C opintojaksoilla olleista vain yksi valmistui kandidaatiksi heti insinöörimatematiikan opintojaksojen jälkeen.



Kuva 4.8. *Insinöörimatematiikka A toteutuksien käyneiden siirtymägraafi*

Kuvassa 4.8 graafi, jossa insinöörimatematiikka A toteutuksien käyneiden polku valmistumiseen. Graafi on tehty vastaavalla tavalla kuin graafi 4.7. Graafissa on opintojaksoja merkattu samoin värein ja virtaukset merkitsevät opiskelijoiden lukumäärää. Insinöörimatematiikka A5 opintojakson jälkeen vain 15 opiskelijaa suoritti MATH.APP.220 opintojakson seuraavana. Huomataan myös, että he jakautuivat tasaisemmin seuraaville opintojaksoille. Insinöörimatematiikka A opintojaksojen jälkeen opiskelijoista 32 suoritti MATH.APP.260 opintojakson, 29 suoritti DATA.STAT.120 opintojakson ja 25 valmistui kandidaatiksi. Insinöörimatematiikka A opintojaksot käyneistä oppijoista 41:lle opiskelijalle DATA.STAT.120 oli viimeinen opintojakso ennen kandidaatiksi valmistumista. Opintojakso DATA.STAT.120 oli myös suosituin matematiikan opintojakso kandidaatiksi valmistumisen jälkeen sillä 48 opiskelijaa suoritti sen valmistumisen jälkeen.

Tietojohtamisen ja tuotantotalouden opiskelijoille pakollisiin vaihtoehtoisiin opintojaksoihin, joista pitää valita vähintään yksi, kuului tilastomatematiikan jatkokurssi (MAT-02510), algoritmimatematiikka 1 (MAT-02651) ja operaatiotutkimus (MATH.APP.260) [16]. Nämä opintojaksot ovat suositeltu suoritettavaksi toisena vuonna. Graafista näkee, että insinöörimatematiikka A toteutuksien jälkeen 32 opiskelijaa suoritti operaatiotutkimus -opintojakson ja 13 opiskelijaa suoritti algoritmimatematiikka 1 -opintojakson. Operaatiotutkimuksen suoritti yhteensä 55 opiskelijaa, joista 44 suoritti sen ennen kandidaatiksi valmistumista.



Kuva 4.9. *Insinöörimatematiikka B toteutuksien käyneiden siirtymägraafi*

Kuvassa 4.9 vastaava graafi kuin edelliset graafit insinöörimatematiikka B toteutuksien käyneille opiskelijoille. Suosituimmat opintojaksot insinöörimatematiikka opintojaksojen jälkeen olivat MATH.APP.220 ja MAT-02651. Oppijoista 41:lle opiskelijalle MATH.APP.240 oli viimeinen matematiikan opintojakso ennen kandidaatiksi valmistumista.

Usean muuttujan funktiot -opintojakso (MATH.APP.220) oli pakollinen biotekniikan opiskelijoille, kun taas sähkötekniikan ja tietotekniikan opiskelijoille pakollisia vaihtoehtoisia opintojaksoja olivat usean muuttujan funktiot, vektorianalyysi (MATH.APP.230), Fourier'n menetelmät (MATH.APP.240), tilastomatematiikan jatkokurssi (MAT-02510), algoritmimatematiikka 1 (MAT-02651) ja operaatiotutkimus (MATH.APP.260) [16]. Opintojaksot suositeltiin suorittamaan toisena vuonna. Insinöörimatematiikka B toteutusten jälkeen suurin osa opiskelijoista suorittivat joko algoritmimatematiikka 1 -opintojakson tai usean muuttujan funktiot -opintojakson. Monelle opiskelijalle Fourier'n menetelmät oli viimeinen matematiikan opintojakso ennen kandidaatiksi valmistumista.

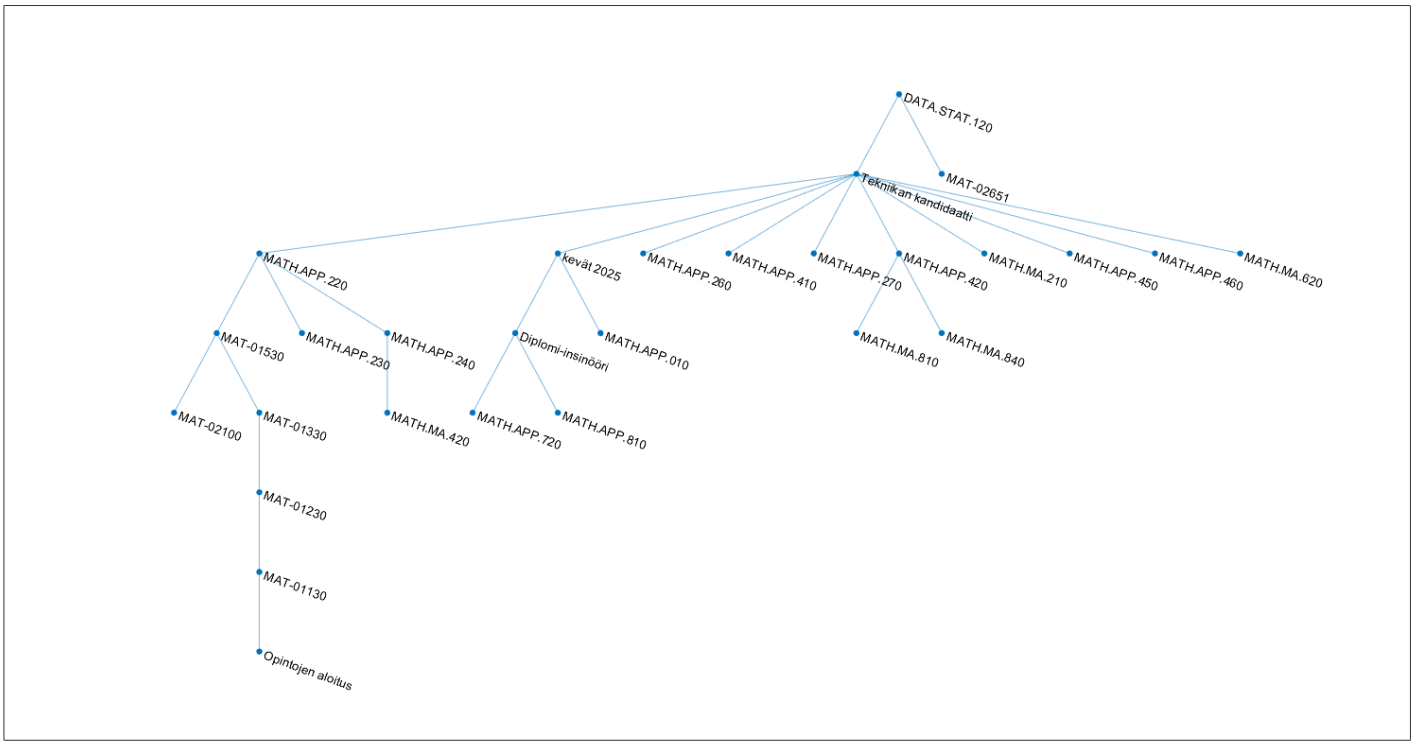
Graafeista huomataan, että insinöörimatematiikka C toteutuksilla käyneet opiskelijat jatkoivat matematiikan opintojaksoja melko samassa järjestyksessä. Insinöörimatematiikka A toteutuksilla olleet opiskelijat hajaantuivat heti insinöörimatematiikan opintojaksojen jälkeen. Insinöörimatematiikka B toteutuksilla olleet opiskelijat hajaantuivat, mutta insinööri-

matematiikan opintojaksojen jälkeen oli kaksi selvää suosikkia.

	n	Kandidaatti	DI
A	123	122	60
B	106	106	33
C	133	133	47

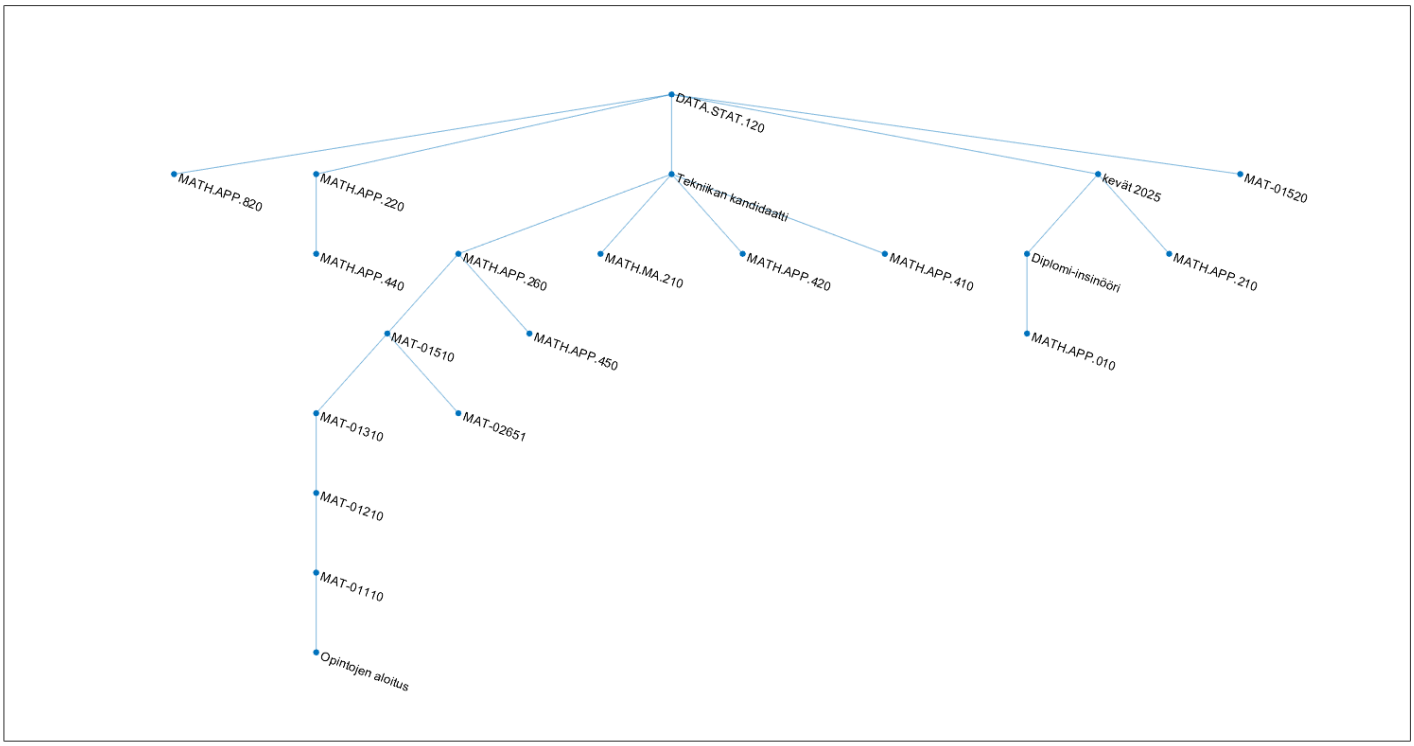
Taulukko 4.4. *kandidaatiksi ja diplomi-insinööriksi valmistuneiden opiskelijoiden määrä*

Taulukossa 4.4 eri toteutuksissa käyneiden valmistuneiden opiskelijoiden määrä. Luvut on laskettu maksimivirtauksesta.



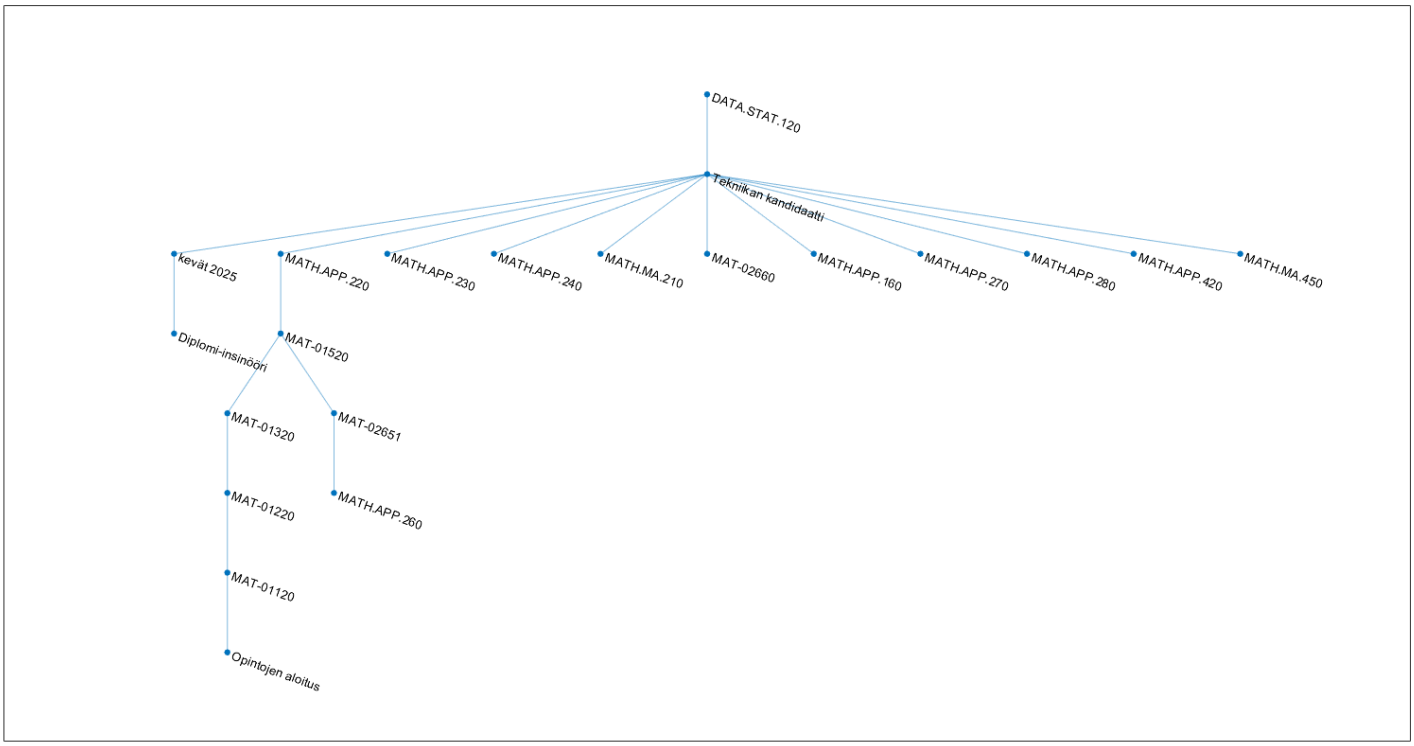
Kuva 4.10. *Insinöörimatematiikka C toteutuksien käyneiden virittävä puu*

Kuvassa 4.10 on virittävä puu graafille 4.7. Puun särmät ovat valittu siten, että ne ovat mahdollisimman tyypillisiä opiskelijoiden opintojaksojen kulkureitteihin.



Kuva 4.11. *Insinöörimatematiikka A toteutuksien käyneiden virittävä puu*

Kuvassa 4.11 on virittävä puu graafille 4.8. Huomataan, että yhteisiä opintojaksoja insinöörimatematiikka C ja insinöörimatematiikka A käyneille opiskelijoille ovat opintojaksot DATA.STAT.120, MAT-02651, MATH.APP.010, MATH.APP.220, MATH.APP.260, MATH.-APP.410, MATH.APP.420, MATH.APP.450 ja MATH.MA.210.



Kuva 4.12. *Insinöörimatematiikka B toteutuksien käyneiden virittävä puu*

Kuvassa 4.12 on virittävä puu graafille 4.9. Jokaisessa ryhmässä on opiskelijoita, jotka suorittivat opintojaksot MAT-02651, MATH.APP.220, MATH.APP.260, MATH.APP.420 ja MATH.MA.210. Insinöörimatematiikka B ja C toteutuksilla olleiden opiskelijoiden yhteisiä opintojaksoja oli edellä mainittujen lisäksi MATH.APP.230, MATH.APP.240 ja MATH.APP-.270. Insinöörimatematiikka A ja B opiskelijoiden yhteisen opintojakso edellä mainittujen lisäksi oli MAT-01520. Opintojaksoja MAT-02100, MATH.APP.460, MATH.APP.720, MATH.APP.810, MATH.MA.420, MATH.MA.620, MATH.MA.810 ja MATH.MA.840 suoritti vain ne opiskelijat, jotka suorittivat insinöörimatematiikka toteutukset käänteisenä opetuksena. Insinöörimatematiikka A toteutukset käyneet opiskelijat olivat ainoita, jotka suorittivat opintojaksot MATH.APP.210, MATH.APP.440, ja MATH.APP.820. Insinöörimatematiikka B toteutukset käyneet opiskelijat olivat ainoita, jotka suorittivat opintojaksot MAT.02660, MATH.APP.160, MATH.APP.280 ja MATH.MA.450.

Insinöörimatematiikka C ja B toteutuksilla käyneet suorittivat MATH.APP.220 opintojakson insinöörimatematiikka opintojaksojen jälkeen, kun taas insinöörimatematiikka A toteutuksilla käyneet valmistuivat todennäköisemmin kandidaatiksi ennen kyseisen opintojakson käymistä. Muita opintojaksoja, joita insinöörimatematiikka C toteutuksilla käyneet opiskelijat suorittivat ennen kandidaatiksi valmistumista olivat MAT-02100, MATH.APP.230, MATH.APP.240 ja MATH.MA.420. Näistä opintojaksoista insinöörimatematiikka B toteu-

tuksilla käyneet opiskelijat suorittivat MATH.APP.230 ja MATH.APP.240 opintojaksot vasta kandidaatiksi valmistumisen jälkeen. Insinöörimatematiikka A toteutuksilla käyneet suorittivat opintojaksot MAT-02651, MATH.APP.260 ja MATH.APP.450 ennen kandidaatiksi valmistumista. Insinöörimatematiikka C toteutuksilla olleet suorittivat kyseiset opintojaksot kandidaatiksi valmistumisen jälkeen. Insinöörimatematiikka B toteutuksella olleet opiskelijat sen sijaan suorittivat opintojaksot MAT-02651 ja MATH.APP.260 ennen kandidaatiksi valmistumista. Insinöörimatematiikka B toteutuksella olleet opiskelijat suorittivat ennen kandidaatiksi valmistumista näiden kahden opintojakson lisäksi opintojakson MATH.APP.220.

5. YHTEENVETO JA POHDINTA

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin Tampereen yliopistossa 2019 syksyllä opiskelun aloittaneiden tekniikan kandidaattiopiskelijoden suorittamia kursseja sekä heidän opiskeluun kulunutta aikaa. Lisäksi tehtiin opiskelijoiden opintojen siirtymägraafi sekä virittävä puu ja verrattiin niitä. Tutkimuksessa esiintyi kolme eri opiskelijoiden ryhmää, joista yksi ryhmä suoritti insinöörimatematiikan opintojaksot käänteisellä opetuksella ja kaksi ryhmää suoritti kyseiset opintojaksot luento-opetuksella. Insinöörimatematiikka A ja B olivat toteutettu luento-opetuksella, kun taas insinöörimatematiikka C oli toteutettu käänteisellä opetuksella.

5.1 Tulosten tarkastelu

Tutkimustulokset arvosanojen keskiarvoista vastaavat edellisiä tutkimuksia, joissa käänteisen opetuksen vaikutus arvosanoihin on ollut ristiriitaista. Ensimmäisissä insinöörimatematiikan toteutuksissa keskiarvolla ei ollut merkittävää eroa. Toisissa insinöörimatematiikan toteutuksissa käänteisesti pidetty toteutus tuotti merkittävästi parempia arvosanoja. Toiseksi viimeisien toteutusten välillä kävi niin, että käänteisellä toteutuksella ei ollut merkittävää eroa A-toteutuksen kanssa, mutta oli merkittävä ero B-toteutuksen kanssa. Viimeisissä toteutuksissa keskiarvoissa oli merkittävä ero jokaisen eri toteutuksen kanssa, mutta parhaiten menestyi A-toteutukseen osallistuneet opiskelijat ja heikoiten menestyi B-toteutukseen osallistuneet opiskelijat.

Valmistumiseen kuluneessa ajassa diplomi-insinööri vaiheessa ei ollut eroa, mutta kandidaatti vaiheessa opiskelijat, jotka kävivät insinöörimatematiikka A toteutukset, valmistuivat nopeammin kuin insinöörimatematiikka C ja B käyneet opiskelijat. Toteutusten C ja B välillä ei ollut eroa valmistumiseen käytetyssä ajassa.

Eri insinöörimatematiikka toteutuksilla käyneiden opiskelijoiden siirtymägraafeista huomattiin yhtäläisyyksiä ja eroja toteutusten välillä. Käänteisessä opetuksessa olleet opiskelijat siirtyivät insinöörimatematiikan opintojaksojen jälkeen seuraaviin opintojaksoihin melko yhtenäisesti, valtaosa B-toteutuksella olleista opiskelijoista jakautuivat kahden eri opintojakson kesken, kun taas A-toteutuksessa olleet opiskelijat hajaantuivat monen eri opintojakson kesken. Eri tutkinto-ohjelmissa on eri pakolliset opintojaksot, mikä selittää opiskelijoiden siirtymägraafien eroja.

5.2 Tulosten luotettavuus

Yksinkertaisuuden vuoksi tutkimuksessa otettiin huomioon vain ne opiskelijat, jotka olivat suorittaneet kaikki insinöörimatematiikan A toteutukset, B toteutukset tai C toteutukset. Tutkimuksesta puuttui opiskelijat, jotka eivät olleet suorittaneet kaikkia opintojaksoja ja myös opiskelijat jotka kävivät eri toteutuksia ristiin. Dataa oli kerätty 469 opiskelijalta, joista 123 suoritti A toteutukset, 106 B toteutukset ja 133 C toteutukset. Yhteensä opiskelijoita jotka eivät suorittaneet kaikkia insinöörimatematiikan opintojaksoja samassa toteutuksessa oli 107. Näiden opiskelijoiden tuloksia tutkimalla voisi saada hyvinkin erilaisia tuloksia.

Arvosanojen eroon voi liittyä paljon muitakin seikkoja kun vain opintojaksojen erilaiset toteutustavat. Esimerkiksi eri tutkinto-ohjelmissa on eroavat sisäänpääsypisteet. On siis mahdollista, että A-toteutukseen osallistuvissa tutkinto-ohjelmissa oli korkeammat sisäänpääsypisteet. Eri tutkinto-ohjelmilla on erilaiset kriteerit sisäänpääsyyn, mikä johtaa siihen, että eri tutkinto-ohjelmien opiskelijoilla on erilaiset lähtötaidot.

Valmistumiseen kuluneessa ajassa ei otettu huomioon opiskelijoita, jotka eivät ole vielä valmistuneet. Kandidaatiksi valmistumattomia oli tutkimuksessa vain yksi A-toteutuksella käynyt opiskelija, kun taas B- ja C-toteutuksilla käyneet opiskelijat olivat kaikki valmistuneet kandidaatiksi. Valtaosa opiskelijoista ei ollut vielä valmistunut diplomi-insinööriksi, joten otosmäärä diplomi-insinööriksi valmistumiseen kuluneessa ajassa on melko pieni.

LÄHTEET

[1] Aguilar, A. ym. ”Flipping the Strategic Management Classroom: Undergraduate Students’ Learning Outcomes”. *Scandinavian Journal of Educational Research* 65.6 (2021), ss. 1081–1096.

[2] Awidi, I. ja Paynter, M. ”The impact of a flipped classroom approach on student learning experience”. *Computers and Education* 128 (2019), ss. 269–283.

[3] Balakrishnan, R. ja Ranganathan, K. *A Textbook of Graph Theory*. Springer New York, 2012.

[4] Bego, C., Ralston, P. ja Barrow, I. ”An intervention in engineering mathematics: Flipping the differential equations classroom”. *American Society for Engineering Education*. 2017.

[5] Bergmann, J. ja Sams, A. *Flipped learning: gateway to student engagement*. International Society for Technology in Education, 2014.

[6] Cormen, T. ym. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2022.

[7] Friman, R. ”Yliopisto-opiskelijoiden tavoiteorientaatioprofiilit matematiikassa”. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto, 2024.

[8] Galindo-Melero, J. ym. ”Analysis of academic results from implementation of a flipped learning methodology in a subject in higher engineering education”. *European Journal of Education* 59.2 (2024).

[9] He, W. ym. ”The effects of flipped instruction on out-of-class study time, exam performance, and student perceptions”. *Learning and Instruction* 45 (2016), ss. 61–71.

[10] Hodgson, T. ym. ”Assessing Behavioral Engagement in Flipped and Non-Flipped Mathematics Classrooms: Teacher Abilities and Other Potential Factors”. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology* 5.4 (2017), ss. 248–261.

[11] Korhonen, N. ”Yhteisöllinen oppiminen ja yliopisto-opiskelijoiden motivaation tukeminen matematiikan opintojaksolla”. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto, 2025.

[12] Metsäranta, M. ”Yliopistomatematiikan opetus muutoksessa: Tarkasteluja vuosien 2019–2023 insinöörimatematiikan opinnoista”. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto, 2024.

[13] Network, Flipped Learning. *What is Flipped Learning?* 28.1.2025. URL: https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/.

[14] Ng, H. ja Lam, P. ”How the number of lessons flipped influence the overall learning effectiveness and the perceptions of flipped learning experiences?” *Interactive Learning Environments* 31.3 (2023), ss. 1242–1251.

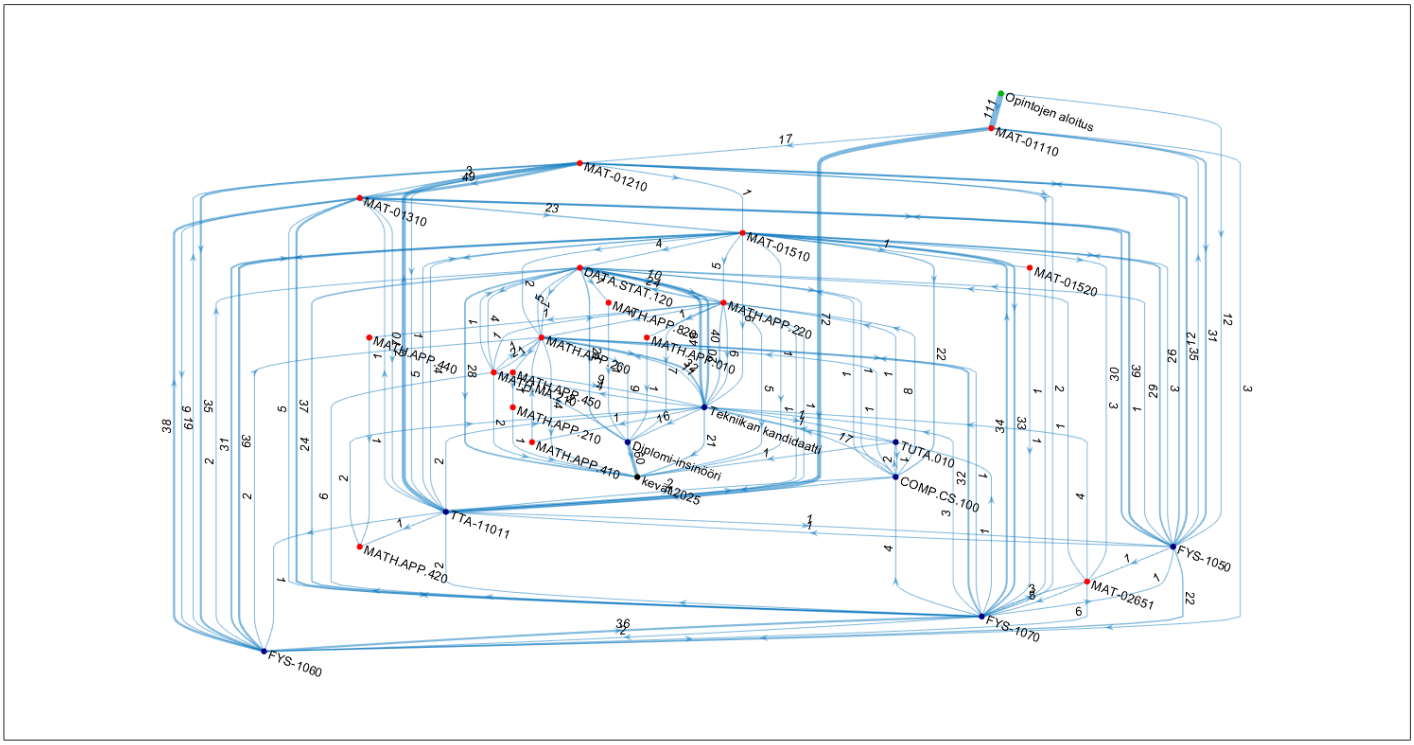
[15] Romero, A. ja Angeles, E. ”Flipped classroom in a digital learning space: Its effect on the students’ attitude toward mathematics”. *International Journal of Learning* 22.1 (2023), ss. 210–227.

[16] *Tekniikan kandidaatin tutkinto-ohjelmat*. URL: https://www.tuni.fi/archive/studyguide_tut/www.tut.fi/opinto-opas/wwwoppaat/opas2019-2020/perus/tutkinnot/index_bachelor.html. (accessed: 30.09.2025).

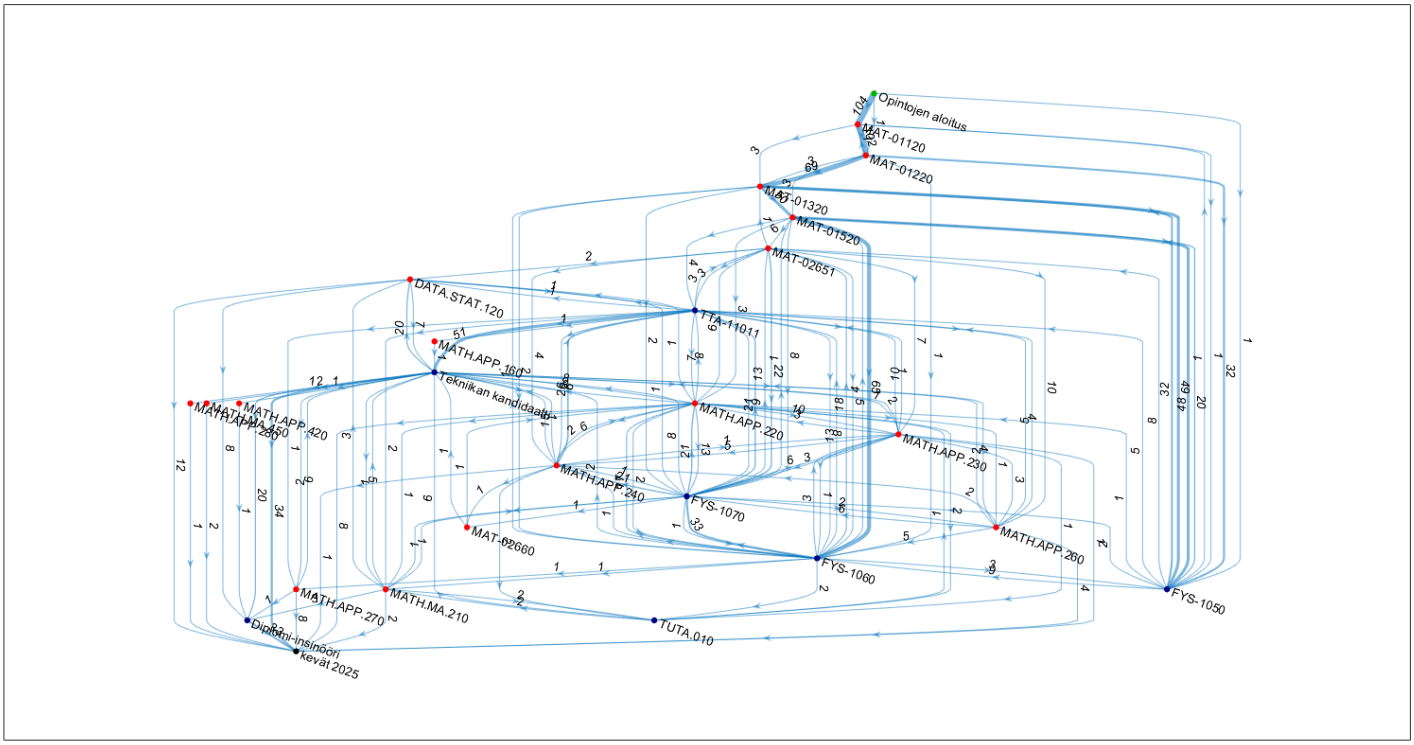
[17] Toivola, M., Peura, P. ja Humaloja, M. *Flipped learning: Käänteinen oppiminen*. Edita Oppiminen Oy, 2017.

[18] Wittmann, S. ja Wulf, T. ”Effects of flipped classes on student learning: The role of positively perceived instructor attitude towards students”. *International Journal of Management Education* 21.1 (2023).

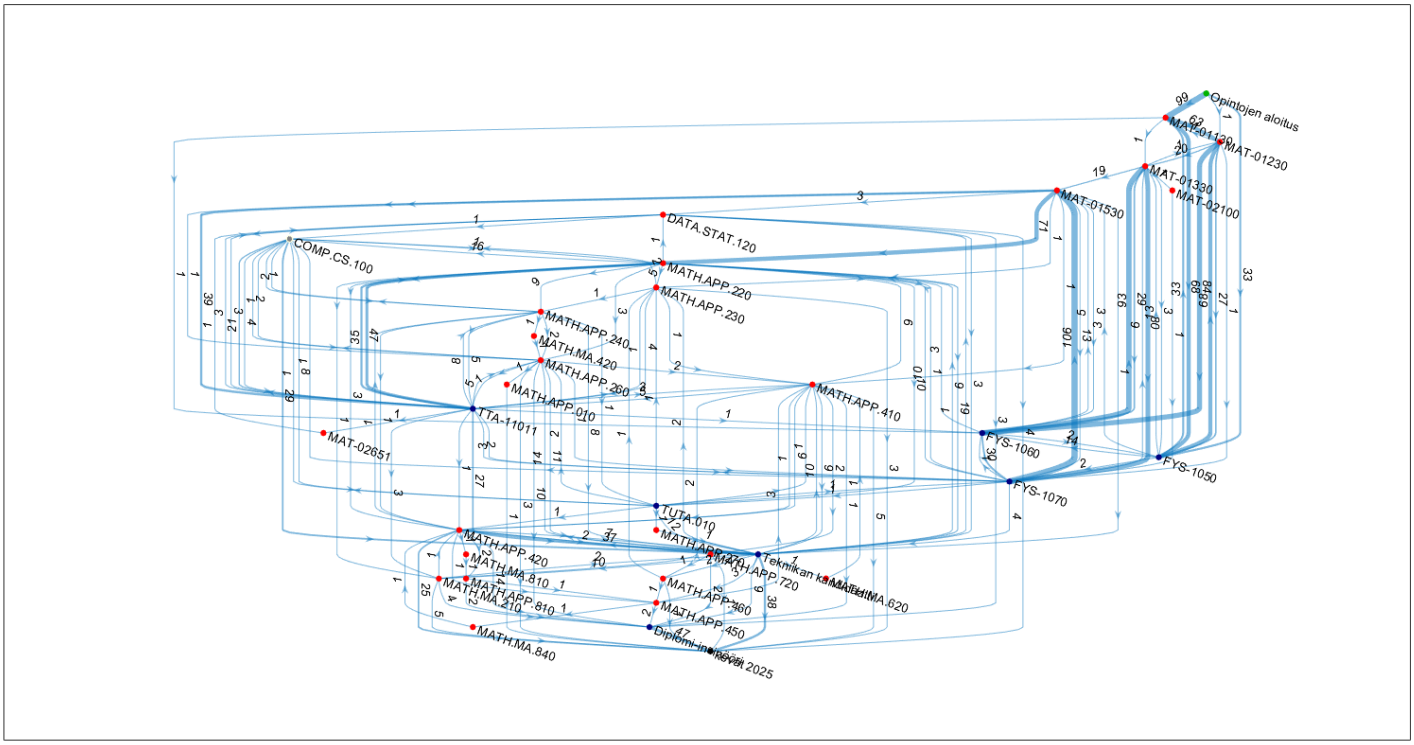
LIITE A: INSINÖÖRIMATEMATIIKKA A KÄYNEIDEN SIIRTYMÄGRAAFI



LIITE B: INSINÖÖRIMATEMATIIKKA B KÄYNEIDEN SIIRTYMÄGRAAFI



LIITE C: INSINÖÖRIMATEMATIIKKA C KÄYNEIDEN SIIRTYMÄGRAAFI



LIITE D: KURSSIKOODIT JA NIMET

koodi	nimi
DATA.STAT.120	Tilastollisten menetelmien perusteet
MAT-01130	Insinöörimatematiikka C1
MAT-01230	Insinöörimatematiikka C2
MAT-01330	Insinöörimatematiikka C3
MAT-01530	Insinöörimatematiikka C5
MAT-01110	Insinöörimatematiikka A1
MAT-01210	Insinöörimatematiikka A2
MAT-01310	Insinöörimatematiikka A3
MAT-01510	Insinöörimatematiikka A5
MAT-01120	Insinöörimatematiikka B1
MAT-01220	Insinöörimatematiikka B2
MAT-01320	Insinöörimatematiikka B3
MAT-01520	Insinöörimatematiikka B5
MAT-02100	Usean muuttujan funktiot
MAT-02651	Algoritmimatematiikka 1
MAT-02660	Algoritmimatematiikka 2
MATH.APP.010	Johdatus yliopistomatematiikkaan
MATH.APP.160	Differentiaali- ja integraalilaskenta
MATH.APP.210	Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn
MATH.APP.220	Usean muuttujan funktiot
MATH.APP.230	Vektorianalyysi
MATH.APP.240	Fourier'n menetelmät
MATH.APP.260	Operaatiotutkimus
MATH.APP.270	Graafialgoritmit
MATH.APP.280	Sovelletun matematiikan menetelmiä
MATH.APP.410	Matriisilaskenta
MATH.APP.420	Differentiaaliyhtälöt
MATH.APP.440	Kompleksimuuttujan funktiot

MATH.APP.450	Matemaattisen mallinnuksen peruskurssi
MATH.APP.460	Numeerinen analyysi
MATH.APP.720	Optimization Methods
MATH.APP.810	Mathematical Control Theory
MATH.APP.820	Advanced Applied Logics
MATH.MA.210	Diskreetti matematiikka
MATH.MA.420	Analyysi A
MATH.MA.450	Algebra
MATH.MA.620	Euklidiset avaruudet
MATH.MA.810	Introduction to Functional Analysis
MATH.MA.840	Measure and Integration
COMP.CS.100	Johdatus ohjelmointiin
FYS-1050	Yliopistofysiikka 1
FYS-1060	Yliopistofysiikka 2
FYS-1070	Yliopistofysiikka 3
TTA-11011	Teollisuustalouden perusteet
TUTA.010	Teollisuustalouden perusteet