Tampereen yliopisto

Pilvi Santahuhta

FRAÏSSÉN KONSTRUKTIO

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Syyskuu 2025

TIIVISTELMÄ

Pilvi Santahuhta: Fraïssén konstruktio
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Syyskuu 2025

Tässä tutkielmassa tarkastellaan Roland Fraïssén kehittämää tapaa konstruoida malleja niiden äärellisesti viritetyistä alimalleista. Tutkielman aluksi esitetään esitietoja ja kiinnitetään tutkielmassa käytettäviä merkintätapoja.

Luvussa neljä keskitytään tarkemmin niihin malliteorian aiheisiin, joita tarvitaan Fraïssén konstruktion määrittelemiseen sekä sen olemassaolon ja yksikäsitteisyyden todistamiseen. Luvussa esitellään konstruktion lopputulokseen liittyviä ominaisuuksia ja tarkastellaan niihin liittyviä lauseita. Tämän luvun tarkoituksena on ennen kaikkea esittää kaikki konstruktioon tarvittavat määritelmät ja lauseet, jotta konstruktion tuottaman mallin olemassaolon ja yksikäsitteisyyden todistukset ovat ymmärrettäviä. Luvun tarkoituksena on myös avata lukijalle tarkemmin aiheeseen liittyviä käsitteitä ja niiden tarkoitusta.

Viidennessä luvussa esitetään tutkielman päätulos, Fraïssén konstruktio. Fraïssén konstruktio voidaan tehdä sellaiselle mallien luokalle, joka on epätyhjä, numeroituva, perinnöllinen, yhteisesti upottava, amalgamoiva ja jonka mallien aakkosto on äärellinen. Konstruktiolla saatavaa mallia kutsutaan Fraïssén rajaksi ja se on numeroituva, ultrahomogeeninen, isomorfiaan asti yksikäsitteinen ja sen ikä on mallien luokka, jonka avulla se konstruoidaan. Luku koostuu Fraïssén lauseesta ja sen todistuksesta, sekä lauseesta, joka osoittaa, että luokalta vaaditut ominaisuudet ovat välttämättömiä konstruktion kannalta.

Viimeisessä luvussa esitellään kolme Fraïssén konstruktiota. Ensimmäisenä esitetään äärellisten graafien luokalle muodostuva Fraïssén raja, Rado-graafi ja sen jälkeen näytetään Fraïssén alkuperäinen approksimaatio, eli rationaalilukujen järjestys äärellisten lineaarijärjestysten avulla konstruoituna. Viimeisenä esitetään Hallin universaali ryhmä äärellisten ryhmien Fraïssén rajana.

Lukijalta edellytetään malliteorian ja algebran perusasioiden hallintaa. Päälähteenä työssä on käytetty Wilfrid Hodgesin kirjaa *A shorter model theory.* [6]

Avainsanat: Fraïssén konstruktio, mallin ikä, homogeenisuus, amalgamaatio, malliteoria, numeroituvat mallit

TEKOÄLYN KÄYTTÖ TÄSSÄ TYÖSSÄ

Opinnäytteessäni on käytetty tekoälysovelluksia:

- ☒ Ei
- ☐ Kyllä

Riskien tiedostaminen

Olen tietoinen siitä, että olen täysin vastuussa koko opinnäytteeni sisällöstä, mukaan lukien tekoälyllä tuotetut osat, ja hyväksyn vastuun mahdollisista eettisten ohjeiden rikkomuksista.

Sisällys

1 Johdanto

1900-luvun alkupuoliskolla alettiin kiinnittää huomiota logiikan osa-alueeseen, jossa tarkastellaan malleja eli struktuureja, jotka koostuvat perusjoukosta, vakioista, relaatioista ja funktioista. Tälle silloin uudelle matematiikan osa-alueelle Alfred Tarski ehdotti nimeksi "Theory of models" vuonna 1954 ja nykyäänkin aihealue tunnetaan nimellä malliteoria. Tarski oli puolalainen loogikko, joka tunnetaan erityisesti työstään malliteorian parissa. Tarskia kutsutaankin usein malliteorian isäksi, sillä hänen vuonna 1933 julkaisemansa totuuden määritelmä muodosti pohjan uudenlaiselle kielien ja niiden struktuurien tutkimukselle.

Stanford Encyclopedia of Philosophy -verkkosivulla [7] Wilfrid Hodges kertoo malliteorian alkaneen formaalien kielien ja niiden tulkintojen tutkimuksena, mutta että laajemmin malliteoriaa voi pitää minkä tahansa kielen tulkinnan tutkimuksena joukko-opillisia struktuureja apuna käyttäen. Erityistä huomiota malliteorian alkuvaiheessa kiinnitettiin metakielen, eli tavanomaisen puhutun, ja kirjoitetun kielen eroihin struktuurien kielen kanssa.

Osuvasti tämän tutkielman aihetta ajatellen Hodges toteaa kirjassaan *A shorter model theory* [6] suuren osan malliteoriasta keskittyvän suoraan mallien konstruointiin. Tässä tutkielmassa tarkastellaan yhtä tapaa konstruoida numeroituvia malleja.

Roland Fraïssé oli ranskalainen loogikko, joka tunnetaan erityisesti Ehrenfeuchtin ja Fraïssén pelistä sekä Fraïssén konstruktiosta. Peliin Fraïssé sai nimensä, sillä hän kehitti edestakaisen menetelmän (back-and-forth method), jonka avulla voidaan tarkastella mallien elementaarista ekvivalenssia. Myöhemmin Andrzej Ehrenfeucht muodosti pelin, joka vastaa Fraïssén kehittämää menetelmää, ja joka tunnetaan nykyään nimellä Ehrenfeuchtin ja Fraïssén peli.

Hodgesin [6] mukaan Fraïssé loi 1950-luvulla tavan rakentaa rationaalilukujen järjestyksen äärellisten lineaarijärjestysten luokan avulla. Konstruktio on nimetty kehittäjänsä mukaan Fraïssén konstruktioksi ja se yleistyy monenlaisiin malleihin rationaalilukujen konstruktion lisäksi.

Fraïssén konstruktio muodostetaan epätyhjästä, numeroituvasta, äärellisesti viritettyjen mallien luokasta, joka toteuttaa tietyt kriteerit (mallien aakkosto on numeroituva, luokka on perinnöllinen, yhteisesti upottava ja amalgamoiva). Konstruoitua mallia kutsutaan luokan Fraïssén rajaksi ja se on isomorfiaan asti yksikäsitteinen, ultrahomogeeninen ja numeroituva. Lisäksi Fraïssén rajaan uppoavat kaikki luokan mallit. Fraïssén konstruktiolla voidaan approksimoida numeroituvasti äärettömiä malleja niiden äärellisesti viritettyjen alimallien avulla.

Tämän tutkielman toisessa luvussa esitetään malliteorian perusteita kertauksenomaisesti ja luvussa kolme keskitytään ryhmäteoreettisiin esitietoihin ja kiinnitetään tutkielmassa käytettävät merkintätavat. Neljännessä luvussa keskitytään etenkin konstruktion ymmärtämiseen ja sen olemassaolon ja yksikäsitteisyyden todistamiseen vaadittaviin ominaisuuksiin ja tuloksiin. Erityisesti kiinnitetään huomiota termiin mallin ikä, joka on keskeisessä osassa konstruktiota. Tässä tutkielmassa mallin iällä tarkoitetaan joukkoa, joka sisältää edustajan jokaisesta alimallien isomorfialuokasta. Täten jokainen mallin M ikään kuuluva alkio uppoaa malliin M ja jokainen äärellisesti viritetty malli, joka uppoaa malliin M on isomorfinen jonkin mallin M iän alkion kanssa. Mallin ikään keskeisesti liittyvät ominaisuudet perinnöllisyys, yhteinen upottavuus ja amalgamaatio ovat myös tärkeässä roolissa tässä luvussa. Neljäs luku sisältää lisäksi malliteorian määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan suoraan Fraïssén konstruktion määrittelyssä ja tämän takia ne on eroteltu omaksi kokonaisuudekseen kahdesta ensimmäisestä luvusta, jotka sisältävät lähinnä kertausta.

Luvussa viisi esitetään Fraïssén lause ja todistetaan Fraïssén rajan olemassaolo, yksikäsitteisyys sekä olemassaololle vaadittujen ehtojen tarpeellisuus. Viimeisessä luvussa esitetään kolme sovellusta. Yksi esitetyistä sovelluksista on rationaalilukujen lineaarijärjestys, joka oli Fraïssén alkuperäinen konstruktio. Tämän lisäksi esitetään myös äärellisten graafien Fraïssén raja, Rado-graafi ja äärellisten ryhmien raja, Hallin universaali ryhmä.

Tutkielman päälähteenä on käytetty jo mainittua Wilfrid Hodgesin kirjaa *A shorter model theory* [6]. Lukijalta edellytetään logiikan ja algebran perusasioiden tuntemista.

2 Malliteoriaa

Tässä luvussa määritellään malliteorian peruskäsitteitä. Luku alkaa numeroituvuuden määritelmästä ja siihen liittyvästä esimerkistä, jonka jälkeen määritellään mallien, homomorfismien ja alimallien käsitteet.

Luvun tarkoituksena on palauttaa mieleen tämän tutkielman ymmärtämisen kannalta tärkeitä malliteorian perusasioita, ja kiinnittää tutkielmassa käytettävät merkintätavat.

2.1 Numeroituvuus

Numeroituvuuden määritelmä perustuu Hinmanin kirjan [5] vastaavaan määritelmään sivulla 485. Tässä tutkielmassa oletetaan, että $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

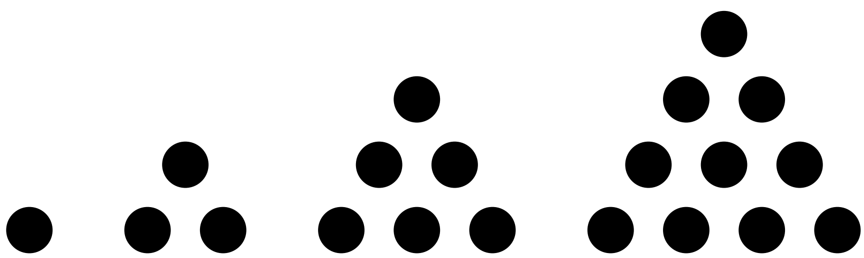
Määritelmä 2.1. Joukkoa S kutsutaan *numeroituvaksi,* jos se on äärellinen tai on olemassa bijektio $f : S \to \mathbb{N}$. Toisin sanoen S on numeroituva, jos on olemassa injektio $g : S \to \mathbb{N}$.

Seuraavaksi näytetään, että joukko $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituva, osoittamalla Cantorin parinkoodausfunktio bijektioksi. Tämän tuloksen perusteella kahden numeroituvan joukon karteesinen tulo on numeroituva. Määritellään ensin kolmioluvun käsite, joka on keskeisessä osassa bijektiivisyyden todistusta. Määritelmä perustuu Boyerin kirjan [2] sivun 93 määritelmään.

Määritelmä 2.2. *Kolmioluku* on positiivinen kokonaisluku, joka saadaan kaavasta

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Kolmioluvun T_n avulla voidaan muodostaa tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on n.



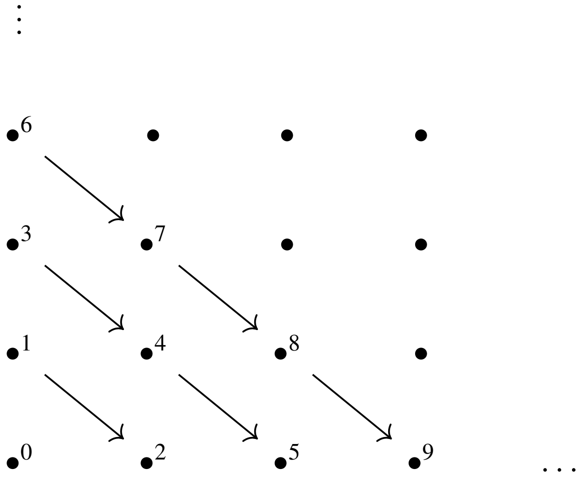
$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

Lähteenä Cantorin parinkoodausfunktioon on käytetty Szuzdikin artikkelia [17] ja bijektiivisyyden todistuksessa on hyödynnetty ProofWiki verkkosivun julkaisua [12].

Esimerkki 2.3. Joukko $\mathbb{N}^2$ on numeroituva. Cantorin parinkoodausfunktio $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on bijektio

$$c(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y).$$

Kuva 2.1: Cantorin parinkoodausfunktio koordinaatistossa



Osoitetaan parinkoodausfunktion bijektiivisyys muodostamalla sille käänteiskuvaus. Olkoot $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $c_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ja $c_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kuvauksia, joille

$$p(z) = k, \text{ missä } k \text{ on se suurin luonnollinen luku, jolla } T_k \leq z,$$

$$c_1(z) = z - T_{p(z)}$$

ja

$$c_2(z) = p(z) - c_1(z).$$

Kuvaus c_1 on hyvin määritelty, sillä kuvauksen p määritelmän mukaan

$$T_{p(z)} \leq z,$$

joten

$$z - T_{p(z)} \geq 0.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että myös kuvaus c_2 on hyvin määritelty. Oletetaan vastoin väitettä, että

$$p(z) - c_1(z) < 0.$$

Ja nyt, koska $p(z) = k$ ja $c_1(z) = z - T_{p(z)}$, saadaan

$$\begin{aligned} & & k &< z - T_k \\ &\Rightarrow & k + T_k &< z \\ &\Rightarrow & 1 + k + T_k = T_{k+1} &\leq z, \end{aligned}$$

joka on ristiriita, sillä luvun k pitäisi kuvauksen p määritelmän perusteella olla maksimaalinen luku, jolle $T_k \leq z$. Täten kuvaus c_2 on hyvin määritelty.

Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaus $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, missä

$$b(z) = (c_1(z), c_2(z)),$$

on Cantorin parinkoodausfunktion c käänteiskuvaus.

Huomataan, että

$$c(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y) = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x.$$

Olkoon $z \in \mathbb{N}$ mielivaltainen.

$$\begin{aligned}
c(b(z)) &= c(c_1(z), c_2(z)) \\
&= \frac{1}{2}(c_1(z) + c_2(z))(c_1(z) + c_2(z) + 1) + c_1(z) \\
&= \frac{1}{2}(p(z))(p(z) + 1) + c_1(z) && \mid T_n = \frac{n(n+1)}{2} \\
&= T_{p(z)} + z - T_{p(z)} \\
&= z.
\end{aligned}$$

Siis $c(b(z)) = z$ kaikilla $z \in \mathbb{N}$. Osoitetaan seuraavaksi, että $b(c(x, y)) = (x, y)$. Olkoot $x, y \in \mathbb{N}$ mielivaltaisia.

Saadaan

$$\begin{aligned}
c(x, y) &= \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x && \mid T_n = \frac{n(n+1)}{2} \\
&= T_{x+y} + x.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$p(c(x, y)) = p(T_{x+y} + x).$$

Tiedetään, että

$$T_{x+y} \leq T_{x+y} + x,$$

joten alkion $p(T_{x+y} + x)$ maksimaalisuuden nojalla

$$p(T_{x+y} + x) \geq x + y.$$

Nyt, koska $x, y \in \mathbb{N}$, niin

$$T_{x+y} + x < T_{x+y} + x + y + 1 = T_{x+y+1},$$

joten

$$p(c(x, y)) < x + y + 1$$

ja siten

$$p(c(x, y)) = x + y.$$

Siis

$$\begin{aligned}
c_1(c(x, y)) &= c(x, y) - T_{p(c(x,y))} \\
&= c(x, y) - T_{x+y} \\
&= T_{x+y} + x - T_{x+y} \\
&= x
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
c_2(c(x, y)) &= p(c(x, y)) - c_1(c(x, y)) \\
&= x + y - x \\
&= y,
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} b(c(x,y)) &= (c_1(c(x,y)), c_2(c(x,y))) \\ &= (x,y). \end{aligned}$$

Siis $b = c^{-1}$ ja koska kuvauksella c on käänteiskuvaus, sen on oltava bijektio.

Seuraavaksi näytetään, että rationaalilukujen joukko on numeroituva. Numeroituvuuden todistus tehty ProofWiki verkkosivun julkaisun [13] todistuksen 4 pohjalta.

Esimerkki 2.4. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva: jokaista rationaalilukua q vastaa yksikäsitteinen luonnollisten lukujen pari (m, n), missä $\mathrm{syt}(m, n) = 1$ ja $q = \frac{m}{n}$, siis on olemassa injektio $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Tällöin $c \circ f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ on injektio, kun c on edellisen esimerkin parinkoodausfunktio.

2.2 Mallit

Tässä alaluvussa määritellään aakkoston, mallin ja graafin käsitteet ja selvitetään miten graafeja voidaan tarkastella malleina. Lopuksi käsitellään vielä erilaisia järjestyksiä ja lineaarijärjestettyjä joukkoja. Lähteinä on käytetty Hodgesin kirjaa [6], Markerin kirjaa [10] sekä Bodirskyn luentomuistiinpanoja [1].

Aakkoston määritelmä perustuu Markerin kirjan [10] sivulla 8 esitettyyn määritelmään.

Määritelmä 2.5. *Aakkosto* L on joukko vakio-, relaatio- ja funktiosymboleita. Relaatio- ja funktiosymboleihin liittyy kullekin symbolille paikkaluku $n \in \mathbb{Z}_+$.

Aakkosto voi olla myös tyhjä. Jos aakkosto sisältää pelkästään relaatiosymboleita, sitä kutsutaan *relationaaliseksi.*

Mallin käsitteen määrittelyssä on käytetty Hodgesin [6] sekä Markerin [10] määritelmiä.

Määritelmä 2.6. Aakkoston L *malli* M on rakenne, joka koostuu neljästä osasta.

1. Mallin M *universumi eli perusjoukko*: Merkitään $\mathrm{Dom}(M)$. Joukon $\mathrm{Dom}(M)$ alkioita kutsutaan mallin M alkioiksi ja mallin M mahtavuudella tarkoitetaan perusjoukon $\mathrm{Dom}(M)$ mahtavuutta. Universumi voi olla myös tyhjä joukko. Mallia M kutsutaan äärelliseksi, jos $\mathrm{Dom}(M)$ on äärellinen.

2. Mallin M *vakiot*: Vakio on mallin alkio, joka on tulkinta jostain aakkoston L vakiosymbolista c. Jokaista aakkoston L vakiosymbolia vastaa jokin mallin M alkio. Merkitään aakkoston vakiosymbolia c vastaavaa mallin M alkiota c^M.

3. Mallin M *relaatiot*: Jokaista aakkoston L relaatiosymbolia R vastaa mallissa M tulkinta $R^M \subseteq \mathrm{Dom}(M)^k$, missä k on relaatiosymbolin R paikkaluku.

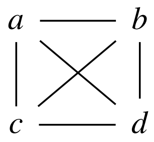
4. Mallin M *funktiot*: Jokaista aakkoston L funktiosymbolia f vastaa mallissa M tulkinta $f^M\colon \mathrm{Dom}(M)^k \to \mathrm{Dom}(M)$, missä k on funktiosymbolin f paikkaluku.

Graafin määritelmä perustuu Hodgesin [6] ja Bodirskyn [1] määritelmiin.

Määritelmä 2.7. *Graafiksi* kutsutaan paria (V, E), missä joukon V alkioita kutsutaan *solmuiksi* ja joukko E koostuu joukon V kaksialkioisista osajoukoista, joita kutsutaan *särmiksi*. Jos graafissa on särmä solmujen a ja b välillä, solmuja kutsutaan toistensa *naapureiksi*.

Graafia (V, E) vastaa L-malli G, missä $L = \{E\}$ ja E on kaksipaikkainen, $\mathrm{Dom}(G) = V$ ja pari $(a, b) \in E^G$, jos graafissa on särmä solmujen a ja b välillä. Tässä tutkielmassa graafia vastaavia malleja kutsutaan yksinkertaisesti graafeiksi.

Esimerkki 2.8. Olkoon $\{E\}$ aakkosto, missä E on kaksipaikkainen relaatiosymboli. Aakkoston $\{E\}$ malli G, missä $\mathrm{Dom}(G) = \{a, b, c, d\}$, $E^G = \mathrm{Dom}(G)^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in \mathrm{Dom}(G)\}$ on graafi.



Järjestyksien määritelmät vastaavat Hinmanin [5] sivun 84 määritelmiä.

Määritelmä 2.9. Aakkoston $\{R\}$ mallin M perusjoukkoa kutsutaan *osittain järjestetyksi* ja relaatiota R sen *osittaiseksi järjestykseksi*, jos relaatio R on kaksipaikkainen ja sen tulkinnalla on seuraavat ominaisuudet:

1. refleksiivisyys: kaikilla $a \in M$ pätee, että $(a, a) \in R^M$,

2. transitiivisuus: kaikilla $a, b, c \in M$ pätee, että jos $(a, b) \in R^M$ ja $(b, c) \in R^M$, niin $(a, c) \in R^M$,

3. antisymmetrisyys: kaikilla $a, b \in M$ pätee, että jos $(a, b) \in R^M$ ja $(b, a) \in R^M$, niin $a = b$.

Osittain järjestetty perusjoukko on *lineaarijärjestetty* ja R sen *lineaarijärjestys*, jos relaation R tulkinnalle pätee myös ominaisuus

4. vertailullisuus: kaikilla $a, b \in M$ pätee, että jos $a \neq b$, niin $(a, b) \in R^M$ tai $(b, a) \in R^M$.

Jos relaatio R on kaksipaikkainen ja sen tulkinta on mallissa M transitiivinen, antisymmetrinen ja *irrefleksiivinen*, eli kaikilla $a \in M$ $(a, a) \notin R^M$, niin relaatiota kutsutaan *tiukaksi osittaiseksi järjestykseksi*. Jos relaatio on lisäksi vertailullinen, kutsutaan sitä *tiukaksi lineaarijärjestykseksi.*

Järjestystä kutsutaan *tiheäksi järjestykseksi*, jos kaikilla $a, b \in M$, joilla $a \neq b$ pätee, jos $(a, b) \in R^M$ niin on olemassa $c \in M$, jolla $(a, c) \in R^M$ ja $(c, b) \in R^M$.

Esimerkki 2.10. Luonnollisten lukujen joukko yhdessä tavanomaisen vertailun kanssa on aakkoston $\{\leq\}$ malli N, missä $\mathrm{Dom}(N) = \mathbb{N}$, $(a, b) \in \leq^N$, jos $a \leq b$ ja $a, b \in \mathbb{N}$. Joukko $\mathbb{N}$ on lineaarijärjestetty.

Rationaaliluvut yhdessä tavanomaisen vertailun kanssa on vastaavasti aakkoston $\{\leq\}$ malli Q. Mallin Q järjestys $\leq^Q$ on tiheä lineaarijärjestys.

2.3 Homomorfismit

Tässä alaluvussa määritellään homomorfismin, upotuksen ja isomorfismin käsitteet sekä esitetään muutamia selventäviä esimerkkejä. Päälähteenä on käytetty Hodgesin kirjaa [6] s. 5-6, mutta myös Bodirskyn luentomuistiinpanoja [1] on hyödynnetty.

Määritelmä 2.11. Olkoon L aakkosto ja A, B L-malleja. Kuvaus $f\colon A \to B$ on *homomorfismi*, jos se säilyttää mallin A vakioiden, relaatioiden ja funktioiden tulkinnat seuraavilla tavoilla:

1. Kaikille aakkoston L vakioille c pätee $f(c^A) = c^B$.

2. Jos R on aakkoston L n-paikkainen relaatiosymboli ja $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in R^A$, niin $(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1})) \in R^B$.

3. Jos F on aakkoston L n-paikkainen funktiosymboli, niin $f(F^A(a_0, \ldots, a_{n-1})) = F^B(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}))$.

Homomorfismia $f\colon A \longrightarrow A$ kutsutaan *endomorfismiksi.*

Homomorfismi $f\colon A \longrightarrow B$ on *upotus*, jos se on injektio ja se toteuttaa seuraavan, ehtoa 2 vahvemman, ehdon.

4. Jos R on aakkoston L n-paikkainen relaatiosymboli niin $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in R^A$, jos ja vain jos $(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1})) \in R^B$.

Jos mallien A ja B välillä on olemassa jokin upotus, merkitään $A \lesssim B$.

Isomorfismi on upotus, joka on surjektiivinen. Jos mallien A ja B välillä on olemassa isomorfismi, sanotaan mallien olevan *isomorfiset* ja merkitään $A \cong B$. Isomorfismia $f\colon A \longrightarrow A$ kutsutaan *automorfismiksi.*

Esimerkki 2.12. Olkoot N ja Q aakkoston $\{\leq\}$ malleja, joille $\mathrm{Dom}(N) = \mathbb{N}$, $\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{Q}$ ja relaatio $\leq$ tulkitaan tavanomaiseksi vertailuksi molemmissa malleissa. Kuvaus $f\colon N \longrightarrow Q$, missä $f(a) = a$ kaikilla $a \in \mathbb{N}$, on upotus.

Esimerkki 2.13. Olkoot A ja B aakkoston $\{R\}$ äärellisiä malleja, joissa $\mathrm{Dom}(A)$ ja $\mathrm{Dom}(B)$ ovat lineaarijärjestettyjä. Jos $|\mathrm{Dom}(A)| = |\mathrm{Dom}(B)|$, mallit ovat isomorfiset.

Nimittäin, merkitään $\mathrm{Dom}(A) = \{a_0, \ldots, a_n\}$ ja $\mathrm{Dom}(B) = \{b_0, \ldots, b_n\}$, missä $n \in \mathbb{N}$. Voidaan olettaa, että $(a_i, a_j) \in R^A$, kun $i \leq j$ ja vastaavasti $(b_i, b_j) \in R^B$, kun $i \leq j$. Tällöin kuvaukselle $f\colon A \longrightarrow B$, missä $f(a_i) = b_i$, pätee määritelmän 2.11 ehdot 1-4, sillä aakkosto koostuu vain yhdestä relaatiosta ja jokaisella parilla (a_i, a_j) pätee $(a_i, a_j) \in R^A$, jos ja vain jos $(f(a_i), f(a_j)) \in R^B$. Homomorfismi f on upotus, sillä jos $f(a_i) = f(a_j)$ eli $b_i = b_j$, niin $i = j$ ja $a_i = a_j$. Edelleen jos $b_m \in \mathrm{Dom}(B)$, niin $m \leq n$ ja on olemassa $a_m \in \mathrm{Dom}(A)$, jolle $f(a_m) = b_m$, jolloin upotus f on isomorfismi.

2.4 Alimallit

Tässä alaluvussa käsitellään alimalleja. Alimalli muodostuu jonkun toisen mallin universumin osajoukosta ja tämän mallin funktioiden ja relaatioiden rajoittumista tähän joukkoon. Ensimmäisenä tarkastellaan alimallikriteereejä, jonka jälkeen määritetään viritetyn alimallin käsite. Alaluvun lopussa esitetään muutama esimerkki ja todistetaan lause, jonka mukaan jokainen numeroituva malli voidaan esittää yhdisteenä ketjusta sen äärellisesti viritettyjä alimalleja.

Alimallin määritelmä vastaa Bodirskyn luentomonisteessa [1] esitettyä määritelmää. Viritetyn joukon määritelmä ja lause 2.15, jossa määritetään alimallin perusjoukon vaatimukset perustuvat Hodgesin kirjan [6] sivuun 7.

Määritelmä 2.14. Olkoon L aakkosto. L-malli A on L-mallin B *alimalli*, jos

1. $\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathrm{Dom}(B)$,

2. jokaisella vakiosymbolilla $c \in L$ pätee $c^A = c^B$,

3. jokaisella relaatiosymbolilla $R \in L$, pätee $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in R^A \iff (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in R^B$, kun $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{Dom}(A)$, missä $n \in \mathbb{N}$ on relaation R paikkaluku

   sekä

4. jokaisella funktiosymbolilla $f \in L$ pätee $f^A(a_0, \dots, a_{n-1}) = f^B(a_0, \dots, a_{n-1})$, kun $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathrm{Dom}(A)$, missä $n \in \mathbb{N}$ on funktiosymbolin f paikkaluku.

Kun B on mallin A alimalli, merkitään $B \leq A$. Voidaan myös sanoa, että malli A on mallin B *laajennus.* Jos malli C on mallin B alimalli, niin se on myös mallin A alimalli. Sillä tällöin

1. $\mathrm{Dom}(C) \subseteq \mathrm{Dom}(B) \subseteq \mathrm{Dom}(A)$,
2. $c^C = c^B = c^A$, missä $c \in L$ on vakiosymboli,
3. kun $R \in L$ on paikkalukua $n \in \mathbb{N}$ oleva relaatiosymboli, niin $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in R^C \iff (a_0, \dots, a_{n-1}) \in R^B \iff (a_0, \dots, a_{n-1}) \in R^A$ ja
4. jokaisella paikkalukua $n \in \mathbb{N}$ olevalla funktiosymbolilla $f \in L$ pätee $f^C(a_0, \dots, a_{n-1}) = f^B(a_0, \dots, a_{n-1}) = f^A(a_0, \dots, a_{n-1})$, kun $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathrm{Dom}(C)$.

Seuraava lause määrittää ehdot, jotka universumin osajoukon täytyy toteuttaa, jotta se voi olla alimallin universumi.

Lause 2.15. *Olkoon B L-malli ja $X \subseteq \mathrm{Dom}(B)$. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

(a) Jollakin $A \leq B$ pätee $\mathrm{Dom}(A) = X$.

(b) Jokaisella vakiosymbolilla $c \in L$ pätee $c^B \in X$, ja jokaisella n-paikkaisella funktiosymbolilla $f \in L$ pätee $f^B(a_0, \dots, a_{n-1}) \in X$, kun $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq X$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Kun a ja b pätevät, malli A on yksikäsitteisesti määritetty.

Todistus. Olkoon B L-malli ja $X \subseteq \mathrm{Dom}(B)$.

Oletetaan, että väite a pätee. Nyt alimallin määritelmän mukaan jokaisella vakiolla $c \in L$ pätee $c^A = c^B$, joten $c^B \in \mathrm{Dom}(A) = X$ kaikilla $c \in L$. Vastaavasti määritelmästä seuraa, että $f^B(a_0, \dots, a_{n-1}) = f^A(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathrm{Dom}(A) = X$, joten $f^B(a_0, \dots, a_{n-1}) \in X$, kun $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \mathrm{Dom}(A) = X$. Siis väitteestä a seuraa väite b.

Oletetaan sitten, että väite b pätee. Määritetään malli A. Olkoon $\mathrm{Dom}(A) = X$, $c^A = c^B$ kaikilla vakioilla $c \in L$, $F^A = F^B \upharpoonright X^n$ jokaisella n-paikkaisella funktiosymbolilla F ja $R^A = R^B \cap X^n$ jokaisella n-paikkaisella relaatiosymbolilla R. Tällöin A on määritelmän mukaan mallin B alimalli, siis väitteestä b seuraa väite a.

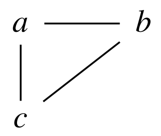
Tämä on ainoa mahdollinen malli A, jolle $A \lesssim B$ ja $\mathrm{Dom}(A) = X$, sillä vakio-, relaatio- ja funktiosymbolien tulkinta alimallissa on yksikäsitteinen, kun perusjoukko X on kiinnitetty. □

Koska joukon $\mathrm{Dom}(B)$ osajoukko X voidaan täydentää sisältämään lauseen 2.15 väitteen b vaatimat alkiot, jokaista osajoukkoa vastaa yksikäsitteisesti pienin mallin B alimalli A, jolle $X \subseteq \mathrm{Dom}(A)$. Tällöin mallia A kutsutaan joukon X virittämäksi.

Määritelmä 2.16. Olkoon B L-malli ja $X \subseteq \mathrm{Dom}(B)$. Mallin B alimallia A kutsutaan joukon X *virittämäksi,* jos malli A on se mallin B pienin alimalli, joka sisältää joukon X. Merkitään tällöin $A = \langle X \rangle_B$. Jos malli B on yhteydestä selvä, merkitään $\langle X \rangle_B = \langle X \rangle$ Mallin B alimallia A sanotaan *äärellisesti viritetyksi,* jos $A = \langle X \rangle$ jollain äärellisellä $X \subseteq \mathrm{Dom}(B)$.

Tarkastellaan seuraavaksi muutamaa esimerkkiä alimalleista. Ensimmäinen on äärellisen joukon virittämä äärellinen alimalli ja jälkimmäinen on äärettömän joukon ääretön alimalli.

Esimerkki 2.17. Olkoon G' malli, jolle $\mathrm{Dom}(G') = \{a, b, c\}$ ja $E^{G'} = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$. Graafi G' on esimerkin 2.8 täydellisen graafin G äärellisesti viritetty alimalli $\langle\{a, b, c\}\rangle$.



Esimerkki 2.18. Olkoot N ja Q aakkoston $\{\leq\}$ malleja, joille $\mathrm{Dom}(N) = \mathbb{N}$, $\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{Q}$ ja relaatio $\leq$ tulkitaan tavanomaiseksi vertailuksi molemmissa malleissa. Tällöin N on mallin Q alimalli, sillä $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ ja jokaisella luonnollisten lukujen parilla (a, b) pätee $(a, b) \in \leq^N \iff (a, b) \in \leq^Q$.

Malli N ei ole mallin Q äärellisesti viritetty alimalli, sillä mallin Q aakkosto ei sisällä funktioita ja siten jokaisen sen äärellisesti viritetyn alimallin perusjoukko on virittävä joukko.

Määritelmä 2.19. $L-$mallien jonoa $(A_i)_{i\in I}$, missä $\forall i \in I, A_i \leq A_{i+1}$, kutsutaan *ketjuksi L-malleja.*

Määritelmä 2.20. Olkoon $(A_i)_{i\in I}$ ketju L-malleja. Tällöin ketjun yhdiste $\bigcup_{i\in I} A_i$ on L-malli, jolla

1. $\mathrm{Dom}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Dom}(A_i)$,
2. jokaisella relaatiosymbolilla $R \in L$ pätee $R^{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} R^{A_i}$ ja
3. jokaisella funktiosymbolilla $f \in L$ pätee $f^{\bigcup_{i\in I} A_i}(a) = f^{A_j}(a)$, kun $j \in I$ ja $a \in A_j$.

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että jokainen numeroituva malli voidaan esittää äärellisten mallien ketjun yhdisteenä. Tämä tulos helpottaa monen myöhemmin esitettävän lauseen todistusta.

Lause 2.21. *Numeroituva malli voidaan esittää yhdisteenä ketjusta sen äärellisesti viritettyjä alimalleja.*

Todistus. Olkoon M numeroituva malli. Merkitään $\mathrm{Dom}(M) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ja $A_i = \langle\{a_0, \ldots, a_i\}\rangle$, kun $i \in \mathbb{N}$. Nyt $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on ketju mallin M äärellisesti viritettyjä alimalleja. Jokaisella $m \in \mathrm{Dom}(M)$ pätee, että $m \in \mathrm{Dom}(A_j)$ jollain $j \in \mathbb{N}$, joten $\mathrm{Dom}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mathrm{Dom}(M)$ ja koska jokainen A_i on mallin M äärellisesti viritetty alimalli, niin $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = M$. □

3 Ryhmäteoriaa

Käydään viimeisinä esitietoina läpi ryhmäteorian perusteita. Aluksi käsitellään laskutoimitusten ja ryhmien määritelmät. Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan symmetrisiä ryhmiä ja todistetaan Cayleyn lause. Käydään sitten läpi sivuluokkien, ositusten ja transversaalien käsitteet. Viimeiseksi tässä luvussa määritellään vielä kunnat ja esitetään niistä muutama esimerkki. Ennen Cayleyn lausetta esitetyissä määritelmissä on lähteenä käytetty Lin ja Zhaon kirjaa *Introduction to abstract algebra* [8], Cayleyn lause ja sen todistus pohjautuvat Rotmanin kirjaan *An introduction to the theory of groups* [16] ja luvun lopussa esitetyt määritelmät perustuvat Romanin kirjaan *Fundamentals of group theory* [15], ellei toisin mainita.

Määritelmä 3.1. Joukon S *laskutoimitus* $*$ on kuvaus $S \times S \to S$. Useimmiten laskutoimituksien tapauksessa merkitään $*(a, b) = a * b$.

Esimerkki 3.2. Kokonaislukujen tavanomaiset yhteen- ja vähennyslasku ovat joukon $\mathbb{Z}$ laskutoimituksia. Tavanomainen jakolasku ei ole kokonaislukujen laskutoimitus, sillä se ei ole suljettu kokonaislukujen joukossa.

Määritelmä 3.3. Paria $(S, *)$, missä S on joukko ja $*$ on joukon S laskutoimitus, kutsutaan *ryhmäksi*, jos seuraavat ehdot touteutuvat.

1. Liitännäisyys: $(a * b) * c = a * (b * c)$ kaikilla $a, b, c \in S$.
2. Neutraalialkio: On olemassa $1_S \in S$, millä $a * 1_S = 1_S * a = a$ kaikilla $a \in S$.
3. Käänteisalkio: Jokaisella $a \in S$ on olemassa sellainen $a^{-1} \in S$, että $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1_S$.

Jos näiden lisäksi pätee myös seuraava ehto, ryhmää sanotaan *Abelin ryhmäksi.*

4. Vaihdannaisuus: $a * b = b * a$ kaikilla $a, b \in S$.

Usein merkitään $a * b = ab$. Ryhmää $(S, *)$ vastaa $\{1, ^{-1}, *\}$-malli G, missä $\mathrm{Dom}(G) = S$, 1 on neutraalialkiota vastaava vakiosymboli, $^{-1}$ on käänteisalkiosuhdetta vastaava yksipaikkainen funktiosymboli ja $*$ on laskutoimitusta vastaava kaksipaikkainen funktiosymboli. Tässä tutkielmassa ryhmällä tarkoitetaan ryhmää vastaavaa mallia.

Ryhmien välisissä kuvauksissa homomorfismin todistamiseksi riittää tarkastella laskutoimitusta vastaavan funktiosymbolin tulkintaa. Osoitetaan, että käänteisalkion ja neutraalialkion ominaisuuksista johtuen niitä ei tarvitse tarkastaa. Olkoon G, H ryhmiä ja $h\colon G \to H$ kuvaus, joka toteuttaa homomorfiaehdon laskutoimituksen funktiosymbolin tulkinnalle, eli

$$h(a * b) = h(a) * h(b).$$

Nyt

$$h(1_G) = h(1_G * 1_G) = h(1_G) * h(1_G) = h(1_G)^2,$$

joten $h(1_G) = 1_H$. Lisäksi

$$h(a) * h(a^{-1}) = h(a * a^{-1}) = h(1_G) = 1_H,$$

joten $h(a^{-1}) = h(a)^{-1}$. Siis ryhmien välinen isomorfismi seuraa laskutoimituksen homomorfiaehdon toteutumisesta.

Määritelmä 3.4. Olkoon joukko A epätyhjä. Tällöin bijektiota $f\colon A \to A$ kutsutaan *permutaatioksi.*

Kaikkien joukon A permutaatioiden joukkoa yhdessä kuvausten yhdistämisen kanssa kutsutaan *symmetriseksi ryhmäksi* ja merkitään $\mathrm{Sym}(A)$. Symmetrisen ryhmän neutraalialkio on joukon A identtinen kuvaus, sillä kun $x \in A$, niin jokaiselle joukon A permutaatiolle g pätee

$$g \circ \mathrm{id}_A(x) = g(\mathrm{id}_A(x)) = g(x) = \mathrm{id}_A(g(x)) = \mathrm{id}_A \circ g(x).$$

Kun M on malli, merkitään $\mathrm{Sym}(\mathrm{Dom}(M)) = \mathrm{Sym}(M)$. Merkitään symmetristä ryhmää $\mathrm{Sym}(\{1, 2, \dots, n\}) = S_n$.

Äärellisen ryhmän symmetrinen ryhmä on aina äärellinen, sillä kun ryhmässä on n alkiota, niin ensimmäiselle alkiolle voidaan valita kuva n tavalla, seuraavalle $n-1$ tavalla ja niin edespäin kunnes viimeiselle alkiolle on enää yksi vaihtoehto. Erilaisia permutaatioita on siis $n!$ kappaletta.

Seuraavaksi esitetään Cayleyn lause, jonka mukaan jokaisen ryhmän voi upottaa perusjoukkonsa symmetriseen ryhmään. Tämä lause ja sen todistus perustuvat Rotmanin kirjan [16] sivuun 34.

Lause 3.5 (**Cayleyn lause**)**.** *Jokainen ryhmä G voidaan upottaa symmetriseen ryhmään* $\mathrm{Sym}(G)$*. Erityisesti, jos $|G| = n$, niin G voidaan upottaa symmetriseen ryhmään S_n.*

Todistus. Määritellään jokaiselle $g \in G$ kuvaus $f_g\colon G \to G$, missä $f_g(x) = g * x$, kun $*$ on ryhmän G laskutoimitus.

Tällöin

$$f_g \circ f_{g^{-1}}(x) = g * g^{-1} * x = x = g^{-1} * g * x = f_{g^{-1}} \circ f_g(x),$$

joten jokaiselle $g \in G$ pätee, että $f_{g^{-1}} = f_g^{-1}$. Koska kuvaukselle f_g on olemassa käänteiskuvaus, on f_g bijektiivinen ja siten $f_g \in \mathrm{Sym}(G)$.

Osoitetaan sitten, että kuvaus $L\colon G \to \mathrm{Sym}(G)$, missä $L(g) = f_g$, on upotus. Olkoot $a, b \in G$ ja $a \neq b$. Nyt $f_a(1) = a \neq b = f_b(1)$, joten $L(a) \neq L(b)$, kun $a \neq b$ ja siten L on injektio. Osoitetaan seuraavaksi, että L toteuttaa homomorfiaehdot.

1. Vakioiden tulkinnat säilyvät. Aakkostoon kuuluu vakio 1. $L(1^G) = f_1$ ja $f_1(x) = 1 * x = x = \mathrm{id}_G(x)$ kaikilla x. Siispä $L(1^G) = \mathrm{id}_G = 1^{\mathrm{Sym}(G)}$.

3. Funktioiden tulkinnat säilyvät. Aakkostoon kuuluu kaksi funktiota, käänsteisalkiokuvaus $^{-1}$, jolle pätee

$$L(g^{-1}) = f_{g^{-1}} = (f_g)^{-1} = L(g)^{-1}$$

sekä laskutoimitus $*$, jolle pätee

$$L(a * b) = f_{a*b}$$

ja

$$f_{a*b}(x) = a * b * x = f_a(b * x) = f_a \circ f_b(x).$$

Siis

$$L(a * b) = f_{a*b} = f_a \circ f_b = L(a) \circ L(b).$$

Siten kuvaus L on injektiivinen homomorfismi ja upottaa ryhmän G symmetriseen ryhmään $\mathrm{Sym}(G)$. ◻

Esitetään seuraavaksi ryhmistä muutamia tavanomaisia esimerkkejä ja vastaesimerkkejä.

Esimerkki 3.6. Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ yhdessä tavanomaisen yhteenlaskun kanssa muodostaa ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$. Kokonaislukujen yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen, laskutoimituksen neutraalialkio on 0 ja jokaisella $a \in \mathbb{Z}$ käänteisalkio $-a$ on kokonaisluku.

Vastaavasti reaalilukujen joukko yhdessä yhteenlaskun kanssa muodostaa ryhmän $(\mathbb{R}, +)$. Reaalilukujen joukkoa, josta on poistettu 0 merkitään $\mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$. Tämä joukko yhdessä tavanomaisen reaalilukujen kertolaskun kanssa muodostaa ryhmän $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Pari $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ ei ole ryhmä, sillä kokonaislukujen joukko ei sisällä käänteisalkioita kertolaskun suhteen kaikille alkioille.

Määritelmä 3.7. Joukko $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ yhdessä yhteenlaskun modulo n kanssa on *syklinen ryhmä* $\mathbb{Z}_n$.

Määritelmä 3.8. Olkoon S epätyhjä. Tällöin joukon S *ositus* on joukko $\{A_i \mid i \in I\}$ joukon S epätyhjiä osajoukkoja, joille pätee $A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$ ja $\bigcup_{i \in I} A_i = S$.

Määritelmä 3.9. Olkoon H ryhmä ja G sen aliryhmä. Kun $h \in H$, joukkoa $hG = \{hg \mid g \in G\}$ kutsutaan aliryhmän G *vasemmaksi sivuluokaksi* ryhmässä H. Vastaavasti joukko $Gh = \{gh \mid g \in G\}$ on aliryhmän G *oikea sivuluokka*. Jos suunta on yhteydestä selvä tai yhdentekevä, kutsutaan joukkoja vain sivuluokiksi.

Aliryhmän G oikeat (ja vasemmat) sivuluokat muodostavat ryhmän H osituksen.

Määritelmä 3.10. Olkoon H ryhmä ja G sen aliryhmä. Joukkoa, joka sisältää täsmälleen yhden alkion kustakin aliryhmän G vasemmasta sivuluokasta kutsutaan *vasemmaksi transversaaliksi* ja vastaavasti oikeiden sivuluokkien edustajien joukkoa kutsutaan *oikeaksi transversaaliksi*.

Jokaisen ryhmän H alkion voi esittää yksikäsitteisellä tavalla aliryhmän G alkion ja oikean transversaalin S alkion tulona. Olkoon $h \in H$. Nyt $h \in Gh$ ja koska transversaali sisältää edustajan kustakin sivuluokasta, täsmälleen yhdellä $s \in S$ pätee $s \in Gh$ eli jollakin $g \in G$ pätee $s = gh$, jolloin $g^{-1}s = h$.

Seuraava määritelmä vastaa Philip Hallin määritelmää artikkelissa *Some constructions for locally finite groups* [4].

Määritelmä 3.11. Ryhmää G kutsutaan *paikallisesti äärelliseksi*, jos jokainen joukon $\mathrm{Dom}(G)$ äärellinen osajoukko virittää äärellisen aliryhmän.

Esimerkki 3.12. Jokainen äärellinen ryhmä on myös paikallisesti äärellinen. Aliryhmä ei voi olla alkuperäistä ryhmää suurempi.

Ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ ei ole paikallisesti äärellinen, sillä joukon $\mathbb{Z}$ osajoukko $\{1\}$ virittää koko ryhmän.

Määritelmä 3.13. Olkoot G ja H ryhmiä ja $a, b \in G$. Alkiot a ja b ovat keskenään *konjugantit,* jos jollain $x \in G$ pätee $b = xax^{-1}$. *Konjugaatiorelaatio* määritellään vastaavasti

$$a \equiv b, \text{ jos } b = xax^{-1} \text{ jollain } x \in G.$$

Konjugaatiorelaatio on ekvivalenssi, sillä

$$1b1^{-1} = b1 = b,$$

$$\text{jos } a = xbx^{-1} \text{ ja } b = ycy^{-1}, \text{ niin } a = xycy^{-1}x^{-1} = xyc(xy)^{-1}$$

ja

$$\text{jos } a = xbx^{-1}, \text{ niin } b = x^{-1}ax = x^{-1}a(x^{-1})^{-1}.$$

Kun $a \in G$, kuvausta $g_a : G \to G$, missä $g(x) = axa^{-1}$, kutsutaan *sisäiseksi automorfismiksi.*

Kunnan määritelmä perustuu Romanin kirjan *Field Theory* [14] määritelmään.

Määritelmä 3.14. Kolmikkoa $(K, +, \cdot)$ kutsutaan *kunnaksi*, jos parit $(K, +)$ ja $(K^*, \cdot)$ ovat Abelin ryhmiä ja kaikilla $a, b, c \in K$ laskutoimituksille pätevät osittelulait

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{ja} \quad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Kunnan *karakteristika* on pienin sellainen positiivinen kokonaisluku n, jolla $n1 = 0$. Jos tällaista kokonaislukua ei ole, on karakteristika 0.

Äärellisen kunnan karakteristika on aina alkuluku, sillä jos karakteristika olisi jokin yhdistetty luku $r = ts$, niin pätisi

$$0 = r1 = (ts)1 = (t1) \cdot (s1),$$

jolloin kunnassa pätisi $t1 = 0$ tai $s1 = 0$, ja silloin n ei olisi pienin positiivinen kokonaisluku, jolla $x1 = 0$ eikä siten voisi olla karakteristika.

Esimerkki 3.15. Rationaaliluvut yhdessä tavanomaisten yhteen- ja kertolaskujensa kanssa muodostavat kunnan $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Myös reaaliluvut ja kompleksiluvut yhdessä yhteen- ja vähennyslaskujensa kanssa ovat kuntia. Kaikkien näiden kolmen kunnan karakteristika on 0. Vastaesimerkkinä $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ei ole kunta, sillä $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ ei ole ryhmä.

Esimerkki 3.16. Kolmikko $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ on kunta, kun p on alkuluku. Tällaisen kunnan karakteristika on p.

4 Mallin ikä

Tässä luvussa käydään läpi Fraïssén konstruktioon tarvittavia määritelmiä ja lauseita todistuksineen. Ensimmäisenä määritellään mallin iän käsite ja siihen liittyvät ominaisuudet perinnöllisyys ja yhteinen upottavuus. Tämän jälkeen tarkastellaan keskeisesti Fraïssén konstruktioon liittyviä ominaisuuksia amalgamoituvuutta, heikkoa homogeenisyyttä ja ultrahomogeenisyyttä. Luku pohjautuu Hodgesin kirjan [6] lukuun 6 "The countable case".

Määritelmä 4.1. Olkoon L aakkosto ja D L-malli. Joukkoa K, joka sisältää edustajan jokaisesta mallin D äärellisesti viritetyn alimallin isomorfialuokasta, kutsutaan *mallin D iäksi*. Mallin ikää vastaavaa isomorfismin suhteen suljettua luokkaa J merkitään $J = \text{age}(D)$.

Luokkaa K kutsutaan *iäksi*, jos se on mallin D ikä tai $\text{age}(D) = K$ jollain mallilla D. Jos luokka on ikä, se on epätyhjä, sillä jokaisella mallilla tyhjän joukon virittämä malli kuuluu sen ikään.

Määritelmä 4.2. Olkoon K joukko samanaakkostoisia malleja ja $A \in K$. Joukon K sanotaan olevan *perinnöllinen*, jos jokaisella mallin A äärellisesti viritetyllä alimallilla B pätee, että on olemassa $C \in K$, jolle $B \cong C$.

Ikä on aina perinnöllinen, sillä mallin D alimallin alimalli on aina myös mallin D alimalli.

Määritelmä 4.3. Olkoon K joukko samanaakkostoisia malleja. Sen sanotaan olevan *yhteisesti upottava*, jos kaikilla $A, B \in K$ on olemassa $C \in K$, johon A ja B uppoavat.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & \\ & C \\ B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Jos joukko on ikä, se on yhteisesti upottava: Olkoon D malli, K sen ikä ja $A, B \in K$. Nyt mallit A ja B ovat isomorfisia joidenkin mallin D äärellisesti viritettyjen alimallien A' ja B' kanssa. Tällöin alimallien A' ja B' äärellisten virittäjien yhdiste on äärellinen joukko mallin D alkioita ja siten virittää alimallin C', joka on isomorfinen jonkin joukon K alkion C kanssa. Nyt mallit A ja B uppoavat joukon K alkioon C, joten joukko K on yhteisesti upottava.

Ikä on aina siis perinnöllinen ja yhteisesti upottava. Seuraava lause osoittaa, että nämä ominaisuudet omaava joukko on aina jonkin mallin ikä.

Lause 4.4. *Olkoon L numeroituva aakkosto ja K epätyhjä, numeroituva joukko äärellisesti viritettyjä L-malleja, joka on perinnöllinen ja yhteisesti upottava. Tällöin K on jonkin numeroituvan mallin ikä.*

Todistus. Olkoon K kuten yllä. Todistetaan lause konstruoimalla malli B, jonka ikä K on. Muodostetaan joukon K alkioista jono $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, jossa jokainen joukon K alkio esiintyy vähintään kerran. Määritetään induktiivisesti ketju $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$, joka koostuu joukon K alkioiden kanssa isomorfisista malleista.

Olkoon $B_0 = A_0$. Oletetaan sitten, että B_n on määritetty. Yhteisen upotettavuuden perusteella on olemassa malli $B' \in K$, johon B_n ja A_{n+1} uppoavat. Tällöin on olemassa malli D, joka on isomorfinen mallin B' kanssa ja jonka alimalli B_n on. Määritetään $B_{n+1} = D$, joka on tällöin mallin B_n laajennus.

$$
\begin{tikzcd}
B_n \arrow[dr, hook] & \\
& B_{n+1} \\
A_{n+1} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

Olkoon $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. Nyt B on numeroituva yhdiste numeroituvista malleista, joten B on numeroituva. Mallin B määritelmän perusteella siihen uppoaa jokainen joukon K alkio. Jos A on äärellisesti viritetty joukon B alimalli, niin sen virittäjät sisältyvät johonkin malliin B_i, joka on isomorfinen jonkin joukon K alkion kanssa, jolloin perinnöllisyyden mukaan joukkoon K sisältyy alkio joka on isomorfinen mallin A kanssa. Tällöin K sisältää täsmälleen äärellisesti viritetyt mallin B alimallit, joten K on numeroituvan mallin B ikä. □

Seuraavaksi todistetaan eräs yksinkertainen iän ominaisuus. Jos malli voidaan esittää mallien ketjun yhdisteenä, ja jokaisen ketjun mallin ikä sisältyy joukkoon K, niin myös yhdisteenä saadun mallin ikä sisältyy joukkoon K.

Lause 4.5. *Olkoon K joukko äärellisesti viritettyjä L−malleja ja $(D_i)_{i<\alpha}$ ketju L−malleja. Jos jokaisella $i < \alpha$ mallin D_i ikä sisältyy joukkoon K, niin mallin $\bigcup_{i<\alpha} D_i$ ikä sisältyy joukkoon K. Edelleen, jos jokaisella $i < \alpha$ mallin D_i ikä on K, niin mallin $\bigcup_{i<\alpha}$ ikä on K.*

Todistus. Oletetaan, että kaikilla $i < \alpha$ mallin D_i ikä sisältyy joukkoon K. Tarkoituksena on osoittaa, että jokainen mallin $\bigcup_{i<\alpha} D_i$ äärellisesti viritetty alimalli on isomorfinen jonkin joukon K alkion kanssa. Olkoon A jokin mallin $\bigcup_{i<\alpha} D_i$ äärellisesti viritetty alimalli. Jollain $j < \alpha$ pätee, että A on mallin D_j äärellisesti viritetty alimalli ja koska mallin D_j ikä sisältyy joukkoon K, niin malli A on isomorfinen jonkin joukon K alkion A' kanssa. Koska alimalli A oli mielivaltainen, niin jokainen mallin $\bigcup_{i<\alpha} D_i$ äärellisesti viritetty alimalli on isomorfinen jonkin joukkon K alkion kanssa, jolloin mallin ikä sisältyy joukkoon K.

Oletetaan sitten, että jokaisella $i < \alpha$ mallin D_i ikä on K. Edellisen kohdan perusteella mallin $\bigcup_{i<\alpha} D_i$ ikä sisältyy joukkoon K. Olkoon B jokin joukon K alkio. Jokaisella mallilla D_i, kun $i < \alpha$, pätee, että jokin mallin D_i alimalli B' on isomorfinen mallin B kanssa. Joten malli B' on mallin $\bigcup_{i<\alpha} D_i$ alimalli. Joukko K ei siis sisällä mallin $\bigcup_{i<\alpha} D_i$ ikään kuulumattomia malleja, jolloin K on mallin $\bigcup_{i<\alpha} D_i$ ikä.

□

Määritelmä 4.6. Olkoon K joukko, $A, B, C \in K$ ja $e \colon A \to B, f \colon A \to C$ upotuksia. Joukon K sanotaan olevan *amalgamoiva*, jos on olemassa $D \in K$ ja upotukset $g \colon B \to D, h \colon C \to D$, joille pätee $g \circ e = h \circ f$.

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, dashed, hook, "g"] & \\
A \arrow[ur, hook, "e"] \arrow[dr, hook, "f"'] & & D \\
& C \arrow[ur, dashed, hook, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Yhteinen upottavuus ja amalgamaatio ovat samankaltaiset ominaisuudet, mutta ne eivät ole toistensa seurauksia. Seuraavat esimerkit osoittavat, että ominaisuudet eroavat toisistaan.

Esimerkki 4.7. Olkoon $K = \{A, B, C\}$ joukko aakkoston R malleja, joille $\mathrm{Dom}(A) = \{0\}$, $\mathrm{Dom}(B) = \{1, 2\}$, $\mathrm{Dom}(C) = \{a, b, c\}$ ja $R^A = \{(0, 0)\}$, $R^B = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$, $R^C = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\}$. Tällöin joukot $\mathrm{Dom}(A), \mathrm{Dom}(B)$ ja $\mathrm{Dom}(C)$ ovat lineaarijärjestettyjä.

Joukko K on yhteisesti upottava, sillä kaikki kolme mallia voidaan upottaa malliin C.

Osoitetaan nyt, että joukko K ei ole amalgamoiva. Kuvaukset $p\colon A \to B$, missä $p(0) = 2$ ja $q\colon A \to C$, missä $q(0) = a$, ovat upotuksia. Koska mallia C ei voi upottaa joukon K alkioista muihin kuin itseensä, ainoa mahdollinen amalgamaatio on malliin C. Mallin C ainoa upotus itseensä on identtinen kuvaus ja tällöin amalgamaation määritelmän perusteella pitäisi olla olemassa upotus $g\colon B \to C$, jolle $g \circ p = q \restriction A$. Mutta koska $q(0) = a$ ja $p(0) = 2$, niin mallin B alkio 2 tulisi kuvata mallin C alkiolle a. Tällöin mallin B alkiota 1 ei voida enää kuvata mallin B järjestysrelaatiota noudattaen, ja siten upotusta g ei voi olla olemassa.

Siis amalgamaatio ei ole yhteisen upottavuuden seuraus.

Seuraavassa esimerkissä todistetaan, että äärellisten kuntien luokka on amalgamoiva, mutta ei yhteisesti upottava. Nyt oletetaan tunnetuiksi kuntateorian perusominaisuuksia, koska kuntia ei muuten käsitellä tässä työssä ja tämä esimerkki on vain havainnollistamassa amalgamaation ja yhteisen upotettavuuden eroavuutta.

Lähteenä esimerkissä on hyödynnetty Steven Romanin kirjaa *Field theory* [14].

Esimerkki 4.8. Osoitetaan, että äärellisten kuntien luokka on amalgamoiva.

Olkoot E, F ja K äärellisiä kuntia, joille kuvaukset $f\colon E \to F$, $g\colon E \to K$ ovat upotuksia.

Tiedetään, että kuntien välinen homomorfismi säilyttää karakteristikan, joten kunnilla E, F ja K on sama karakteristika p. Edelleen tiedetään, että yhtä mahtavat äärelliset kunnat ovat keskenään isomorfisia. Voidaan merkitä $E \cong \mathbb{F}_{p^m}$, $F \cong \mathbb{F}_{p^{am}}$ ja $K \cong \mathbb{F}_{p^{bm}}$, joillain $a, b, m \in \mathbb{N}$.

Osoitetaan nyt, että kunta $\mathbb{F}_{p^{abm}}$ on haluttu amalgamaatio. Tiedetään, että kuntaa $\mathbb{F}_{p^{abm}}$ voidaan pitää $\mathbb{F}_{p^m}$ -vektoriavaruutena. Tiedetään myös, että on olemassa kunnassa $\mathbb{F}_{p^m}[x]$ jaoton polynomi $q \in \mathbb{F}_{p^m}[x]$, jonka aste on a. Tämän polynomin q avulla muodostettavan kuntalaajennuksen aste on a ja siten kuntalaajennuksen koko on $(p^m)^a = p^{am}$. Siis kuntalaajennus on isomorfinen kunnan F kanssa. Vastaavasti voidaan muodostaa astetta b oleva kuntalaajennus, joka on isomorfinen kunnan K kanssa. Tällöin kunnat F ja K uppoavat kuntaan $\mathbb{F}_{p^{abm}}$ säilyttäen kunnan E upotukset f ja g.

Äärellisten kuntien luokka on siis amalgamoiva. Luokka ei kuitenkaan ole yhteisesti upottava, sillä kuntien välinen homomorfismi säilyttää karakteristikan. Siis kuntia A ja B ei voi upottaa mihinkään äärelliseen kuntaan, jos kunnilla ei ole samaa karakteristikaa.

Määritelmä 4.9. Olkoon D L-malli. Jos kaikilla mallin D äärellisesti viritetyillä alimalleilla A ja B, joilla $A \leq B$, jokainen upotus $f\colon A \to D$ laajenee upotukseksi $g\colon B \to D$, mallia D kutsutaan *heikosti homogeeniseksi.*

Määritelmä 4.10. Mallin D sanotaan olevan *ultrahomogeeninen*, jos jokainen sen äärellisesti viritettyjen alimallien välinen isomorfismi laajenee mallin D automorfismiksi.

Toisin sanoen, jos A ja C ovat äärellisesti viritettyjä mallin D alimalleja, joilla on olemassa isomorfismi $h\colon A \to C$, niin on olemassa mallin D automorfismi h', joka on kuvauksen h laajennus.

Tätä ominaisuutta kutsutaan useissa lähteissä *homogeenisuudeksi*, mutta tässä on noudatettu Hodgesin kirjan [6] nimeämistapaa.

Kun D on ultrahomogeeninen ja A sekä C ovat äärellisesti viritettyjä alimalleja, niin $f\colon A \cong C$ laajenee mallin D automorfismiksi h. Kuvausta f vastaa upotus $f'\colon A \to D$, joka saadaan kuvauksesta f laajentamalla sen maalijoukkoa. Kaikilla mallin D äärellisesti viritetyillä alimalleilla B, joille $A \leq B$, pätee $h \restriction B$ on upotus $g\colon B \to D$. Upotus g on upotuksen f' laajennus. Siis ultrahomogeeninen malli on aina myös heikosti homogeeninen.

Määritelmä 4.11. Numeroituvaa mallia D kutsutaan *universaaliksi,* jos jokainen numeroituva malli C, jolle $\operatorname{age}(C) \subseteq \operatorname{age}(D)$, uppoaa malliin D.

Lause 4.12. *Olkoon L numeroituva aakkosto ja D heikosti homogeeninen, numeroituva L−malli. Tällöin malli D on universaali. Itse asiassa, jos C on numeroituva L−malli, jolla* $\operatorname{age}(C) \subseteq \operatorname{age}(D)$*, niin jokainen mallin C äärellisesti viritetyn alimallin upotus malliin D voidaan laajentaa mallin C upotukseksi malliin D.*

Todistus. Olkoot C ja D numeroituvia malleja, D heikosti homogeeninen ja $\operatorname{age}(C) \subseteq \operatorname{age}(D)$. Olkoot sitten A_0 mallin C äärellisesti viritetty alimalli ja $f_0\colon A_0 \to D$ upotus. Laajennetaan upotus f_0 upotukseksi $F\colon C \to D$.

Koska C on numeroituva, lauseen 2.21 mukaan se voidaan esittää muodossa $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, missä $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on ketju mallin C äärellisesti viritettyjä alimalleja ja A_0 on annettu. Määritellään rekursiivisesti ketju upotuksia $f_n\colon A_n \to D$.

Olkoon f_0 kuten yllä. Koska A_{n+1} on äärellisesti viritetty mallin C alimalli ja $\operatorname{age}(C) \subseteq \operatorname{age}(D)$, niin A_{n+1} on isomorfinen jonkin mallin D äärellisesti viritetyn alimallin B kanssa. Olkoon $g\colon A_{n+1} \cong B$. Nyt $g \restriction A_n$ on mallin A_n upotus malliin B, joten

$$f_n \circ g^{-1} \restriction g(A_n)\colon g(A_n) \to D$$

on upotus. Koska malli D on heikosti homogeeninen, A_n uppoaa malliin B ja on olemassa upotus $g(A_n) \to D$, niin on olemassa upotus $h\colon B \to D$, joka laajentaa upotusta $f_n \circ g^{-1}$. Olkoon $f_{n+1} = h \circ g$. Nyt $f_n \subseteq f_{n+1}$. Merkitään $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Siis kuvaus F laajentaa mallin C äärellisesti viritetyn alimallin A_0 upotuksen malliin D mallin C upotukseksi malliin D. Tällöin malli D on universaali ja koska alimalli A_0 oli mielivaltainen, jokaisen mallin C äärellisesti viritetyn alimallin upotus malliin D voidaan laajentaa mallin C upotukseksi malliin D.

$$\begin{tikzcd}
& A_{n+1} \arrow[dr, "g"] & \\
A_n \arrow[ur, "\leq"] \arrow[rr, "g\restriction A_n"] \arrow[dr, "f_n"'] & & B \\
& D &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "f_{n+1}"'] & \\
& B \arrow[dl, "h"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

□

Seuraavaksi osoitetaan tulos, jonka mukaan kaikki heikosti homogeeniset samanikäiset mallit ovat isomorfisia keskenään.

Lause 4.13. *Olkoot C ja D numeroituvia, heikosti homogeenisiä L−malleja, joilla* $\operatorname{age}(C) = \operatorname{age}(D)$*. Tällöin ne ovat isomorfiset. Itse asiassa, jos A on mallin C äärellisesti viritetty alimalli ja $f\colon A \to D$ on upotus, niin f laajenee mallien C ja D väliseksi isomorfismiksi.*

Todistus. Edellisen lauseen mukaan tällöin mallit C ja D uppoavat toisiinsa. Tämä ei kuitenkaan takaa isomorfismia, sillä esimerkiksi rationaaliluvut uppoavat rationaalilukujen väliin $[0, 1]$ ja suljettu väli uppoaa rationaalilukuihin, mutta joukot eivät ole isomorfiset, sillä suljetulla välillä on suurin ja pienin alkio. Osoitetaan siis isomorfismi erikseen.

Olkoon $f_0\colon C_0 \to D_0$ isomorfismi mallin C äärellisesti viritetyn alimallin C_0 ja mallin D äärellisesti viritetyn alimallin D_0 välillä. Koska mallit C ja D ovat numeroituvia, voidaan esittää $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ ja $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, missä $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alkaen mallista C_0 on ketju mallin C äärellisesti viritettyjä alimalleja ja vastaavasti $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alkaen mallista D_0 on ketju mallin D äärellisesti viritettyjä alimalleja.

Määritellään ketju $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mallien C ja D äärellisesti viritettyjen alimallien isomorfismeja, siten, että C_n uppoaa isomorfismin f_{2n} lähtöjoukkoon ja D_{n+1} uppoaa isomorfismin f_{2n+1} kuvajoukkoon.

Isomorfismi f_0 on annettu, määritellään isomorfismi f_{2k+1}. Oletetaan $f_{2k}\colon A_{2k} \cong B_{2k}$ ja merkitään

$$B = \langle \mathrm{Dom}(B_{2k}) \cup \mathrm{Dom}(D_{k+1}) \rangle.$$

Malli B on äärellisesti viritetty, koska B_{2k} ja D_{k+1} ovat ja malli B voitaisiin virittää myös niiden virittäjien yhdisteellä. Tällöin ominaisuuden $\mathrm{age}(C) = \mathrm{age}(D)$ perusteella on olemassa $A' \leq C$, jolle

$$A_{2k} \cong B_{2k} \leq B \cong A',$$

eli $A_{2k} \lesssim A'$. Tällöin on olemassa $A'_{2k} \leq A'$, jolle $j\colon A'_{2k} \cong A_{2k}$. Tälle funktiolle j voidaan tulkita maalijoukoksi malli D, jolloin se on upotus $j\colon A'_{2k} \lesssim C$. Nyt mallin C heikon homogeenisyyden perusteella on olemassa upotuksen j laajennus $j^*\colon A' \lesssim C$. Merkitään $A = j^*(A')$. Tällöin $A_{2k} \leq A \cong B$. Tulkitaan kuvauksen $f_{2k}\colon A_{2k} \to B_{2k}$ maalijoukoksi malli D, jolloin se on upotus $f_{2k}\colon A_{2k} \to D$. Tällöin, mallin C heikon homogeenisuuden perusteella, on olemassa upotuksen f_{2k} laajennus $h\colon A \to D$, joka on upotus ja joka voidaan tulkita isomorfismiksi $h\colon A \cong B$. Valitaan $f_{2k+1} = h, A_{2k+1} = A$ ja $B_{2k+1} = B$. Tällöin $f_{2k+1}\colon A_{2k+1} \cong B_{2k+1}$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $\mathrm{Dom}(D_{k+1}) \subseteq \mathrm{Dom}(B) = \mathrm{im}(f_{2k+1})$.

$$\begin{tikzcd}
B_{2k} \arrow[r, "\leq"] & B \arrow[dr, "\leq"] & \\
 & & D \\
A_{2k} \arrow[uu, "f_{2k}"] \arrow[r, "\leq"] & A \arrow[uu, "h=f_{2k+1}"] \arrow[ur, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Määritellään f_{2k+2} vastaavasti. Oletetaan, että $f_{2k+1}\colon A_{2k+1} \cong B_{2k+1}$ on määritelty. Olkoon $A = \langle \mathrm{Dom}(A_{2k+1}) \cup \mathrm{Dom}(C_{k+1}) \rangle$ ja $B \in \mathrm{age}(D)$ se malli, jolle $B_{2k+1} \leq B$ ja $A \cong B$. Tällöin f_{2k+1} laajenee upotukseksi $g\colon A \to D$, eli isomorfismiksi $g\colon A \to B$. Valitaan $f_{2k+2} = h, A_{2k+2} = A, B_{2k+2} = B$. Tällöin $f_{2k+2}\colon A_{2k+2} \cong B_{2k+2}$ ja $C_{k+1} \subseteq f_{2k+2}$ eli $C_n \subseteq f_{2n}$, kun $n > 0$.

$$\begin{tikzcd}
B_{2k+1} \arrow[r, "\leq"] & B \arrow[dr, "\leq"] & \\
 & & D \\
A_{2k+1} \arrow[uu, "f_{2k+1}"] \arrow[r, "\leq"] & A \arrow[uu, "g=f_{2k}"] \arrow[ur, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Tällöin konstruktion perusteella kuvauksen $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ lähtöjoukkoon uppoaa jokainen malli C_n, kun $n \in \mathbb{N}$ ja kuvauksen F kuvajoukkoon uppoaa jokainen malli D_n, kun $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus F on täten haluttu isomorfismin f_0 laajennus mallien C ja D isomorfismiksi.

□

Seuraava esimerkki osoittaa, että edellisessä lauseessa vaadittu heikko homogeenisuus on välttämätön ehto. Kaksi saman ikäistä mallia eivät välttämättä ole isomorfiset, jos heikkoa homogeenisuutta ei vaadita.

Esimerkki 4.14. Olkoot Q rationaalilukujen joukko yhdistettynä tavalliseen vertailuunsa ja N luonnolliset luvut yhdessä tavanomaisen vertailun kanssa. Malleilla Q ja N on sama ikä, sillä jokainen äärellinen lineaarijärjestys uppoaa molempiin malleihin.

Malli N ei ole heikosti homogeeninen, sillä alimallin $\{2\}$ upotus $f\colon \{2\} \to N,\ f(2) = 0$ ei laajene mallin $\langle\{0, 1, 2\}\rangle$ upotukseksi malliin N.

Mallit N ja Q eivät ole isomorfset, sillä joukko $\mathbb{Q}$ on tiheästi lineaarijärjestetty ja joukko $\mathbb{N}$ ei ole.

Ultrahomogeenisuuden määritelmän 4.10 ohessa on todettu heikon homogeenisuuden seuraavan ultrahomogeenisuudesta. Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että numeroituvien mallien tapauksessa ominaisuudet ovat keskenään ekvivalentit.

Lause 4.15. *Numeroituva malli on ultrahomogeeninen, jos ja vain jos se on heikosti homogeeninen.*

Todistus. Aikaisemmin on jo todistettu, että ultrahomogeenisuudestä seuraa heikko homogeenisuus. Riittää siis osoittaa toinen suunta. Olkoon B numeroituva heikosti homogeeninen malli. Edellisen lauseen 4.13 mukaan kahden saman ikäisen, heikosti homogeenisen mallin C ja D välinen mallin C alimallin upotus malliin D laajenee mallien C ja D väliseksi isomorfismiksi. Tämä upotus voidaan ajatella kahden alimallin väliseksi isomorfismiksi. Tällöin kun otetaan $B = C = D$, niin lauseesta 4.13 seuraa suoraa heikosti homogeenisen mallin B ultrahomogeenisuus. □

Tämän lauseen perusteella riittää numeroituvan mallin ultrahomogeenisuuden osoittamiseksi jatkossa pelkän heikon homogeenisuuden toteaminen.

5 Fraïssén konstruktio

Tässä luvussa esitetään tutkielman päätulos, Fraïssén konstruktio. Fraïssén lauseessa määritellään, millaiselle joukolle konstruktio voidaan tehdä, ja esitetään konstruktion tuottaman mallin määrittävät ominaisuudet.

Fraïssén lause antaa tavan luoda numeroituvia ultrahomogeenisiä malleja. Tietylle luokalle muodostettua Fraïssén konstruktion lopputulosta kutsutaan luokan Fraïssén rajaksi. Kuten jo aiemmin on todettu lauseessa 2.21, numeroituva malli voidaan esittää ketjuna sen äärellisesti viritettyjä alimalleja ja ne ovat muutenkin helpommin käsiteltävissä kuin ylinumeroituvat mallit.

Roland Fraïssé muodosti konstruktionsa alun perin äärellisten lineaarijärjestysten luokalle, ja esitti täten tavan muodostaa näistä äärellisistä malleista approksimaation rationaalilukujen järjestykselle. Tämä konstruktio kuitenkin yleistyy monenlaisiin tilanteisiin, mistä johtuu konstruktion hyöty. Seuraavaksi esitetään konstruktion yleinen muoto ja sen muodostaman Fraïssén rajan määrittelevät ominaisuudet. Koska Fraïssén raja on isomorfiaan asti yksikäsitteinen, jokainen malli, joka toteuttaa rajalle määritetyt ehdot, on isomorfinen tämän luokan Fraïssén rajan kanssa.

Tämä luku perustuu Hodgesin kirjan *A shorter model theory* [6] sivuihin 161-164.

Lause 5.1 (**Fraïssén lause**). *Olkoot L numeroituva aakkosto ja K epätyhjä, numeroituva joukko äärellisesti viritettyjä L-struktuureja, joka on perinnöllinen, yhteisesti upottava sekä amalgamoiva.*

Tällöin on olemassa isomorfiaan asti yksikäsitteinen malli D, jonka ikä on K, joka on ultrahomogeeninen ja numeroituva.

Todistus. Luodaan ketju $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä $D_n \in K$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $P = \{(A, B) \in K \times K \mid A \lesssim B\}$. Listataan nelikot $(f_{i,j,k}, A_j, B_j, C_k)$, missä $(A_j, B_j) \in P, C_k \in K$ ja $f_{i,j,k} \colon A_j \to C_k$ on upotus. Valitaan bijektio $\pi \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolle $\pi(i, j) \geq \max\{i, j\}$. Esimerkissä 2.3 mainittu kuvaus on sopiva. Määritetään ketju rekursiivisesti. Olkoon $D_0 = C_0$. Oletetaan, että malli D_{n-1}, $n \in \mathbb{Z}_+$ tunnetaan. On olemassa luonnollisten lukujen kolmikko i, j, k, jolle pätee $n = \pi(\pi(i, j), k) + 1$.

Luodaan malli D_n mallien A_j, B_j ja D_{n-1} avulla. Nyt $f_{i,j,k} \colon A_j \lesssim C_k$ ja kuvauksen π määritelmän perusteella $n - 1 \geq k$, joten $C_k \lesssim D_{n-1}$, jolloin myös $A_j \lesssim D_{n-1}$. Lisäksi määritelmän perusteella $A_j \lesssim B_j$. Olkoon D'_n malli, joka saadaan amalgamaatiolla, kun $A_j \lesssim B_j$ ja $A_j \lesssim D_{n-1}$ ja olkoon malli D_n malli, joka saadaan yhteisellä upottavuudella malleista D'_n ja C_n.

$$\begin{tikzcd}
 & B_j \arrow[dr, dashed] & & \\
A_j \arrow[ur, "\lesssim"] \arrow[dr, "\lesssim"] \arrow[d, "\lesssim"] & & D'_n \arrow[r, dashed] & D_n \\
C_{n-1} \arrow[r, "\lesssim"] & D_{n-1} \arrow[ur, dashed] & C_n \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Osoitetaan seuraavaksi että malli $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ toteuttaa lauseessa vaaditut ehdot. Malli D on numeroituva yhdiste numeroituvia malleja, joten se on numeroituva.

Koska D_n on joukon K alkio ja K on perinnöllinen, niin mallin D_n ikä jokaisella $n \in \mathbb{N}$ sisältyy joukkoon K. Tällöin lauseen 4.5 mukaan mallin D ikä sisältyy joukkoon K.

Todistetaan seuraavaksi, että mallin D ikä on täsmälleen K. Olkoon $A \in K$. Nyt joukon K yhteisen upotettavuuden perusteella on olemassa $B \in K$, jolle pätee $A \lesssim B$ ja $D_0 \lesssim B$. Tällöin pari (A, B) kuuluu joukkoon P ja kuvauksen π bijektiivisyyden perusteella jollain $m \in \mathbb{N}$ pätee, että D_m on luotu amalgamaatiolla siten, että malli A uppoaa siihen. Siis jokaisella joukon K alkiolla A pätee $A \lesssim D_n$ jollain $n \in \mathbb{N}$ ja siten $A \lesssim D$. Mallin D ikä on täsmälleen K.

Olkoot A ja B mallin D alimalleja, joilla $A \leq B$ ja $g\colon A \to D$ upotus. Koska K on mallin D ikä, on olemassa $A', B' \in K$, joilla $h_1\colon A' \cong A$ ja $h_2\colon B \cong B'$. Olkoon $g'\colon A' \to D$ $g' = g \circ h_1$. Pari (A', B') kuuluu joukkoon P. Tällöin on olemassa jokin $m \in \mathbb{N}$ siten, että D_m on luotu kuvauksen g' ja mallien A', B' avulla. Erityisesti tällöin amalgamaation perusteella on olemassa upotusta g' laajentava upotus $g''\colon B' \to D$. Tällöin $f = g'' \circ h_2 : B \to D$ on upotus, joka laajentaa upotusta g. Siis malli D on heikosti homogeeninen ja numeroituvana mallina tällöin lauseen 4.15 perusteella ultrahomogeeninen.

Malli D on heikosti homogeenisena mallina kaikkien saman ikäisten heikosti homogeenisten mallien kanssa isomorfinen lauseen 4.13 perusteella. Konstruoitu malli D on täten isomorfismiin asti yksikäsitteinen, ultrahomogeeninen, numeroituva ja sen ikä on K.

□

Seuraava lause osoittaa, että kaikki edellisessä lauseessa esitetyt vaatimukset luokalle ovat pakollisia Fraïssén konstruktion kannalta.

Lause 5.2. *Olkoon L numeroituva aakkosto, D numeroituva ultrahomogeeninen L-malli ja $K = \mathrm{age}(D)$. Tällöin luokan K mallien isomorfialuokkia on numeroituva määrä, se on epätyhjä, perinnöllinen, yhteisesti upottava ja amalgamoiva.*

Todistus. Luokka K sisältää mallin D äärellisesti viritettyjen alimallien isomorfialuokat. Koska malli D on numeroituva, jokaiselle luonnolliselle luvulle n on olemassa numeroituva määrä erilaisia mahdollisia n alkion virittämiä alimallien isomorfialuokkia. Numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista on numeroituva ja siten luokka K sisältää numeroituvan määrän isomorfialuokkia.

Aiemmin on jo todettu, että riippumatta mallista D tyhjän joukon virittämä malli kuuluu luokkaan K, joten se on epätyhjä, ja että mallin D alimallin alimalli on mallin D alimalli, siis K on perinnöllinen. Tiedetään myös, että kaksi äärellisesti viritettyä alimallia uppoavat aina malliin, joka on viritetty näiden mallien virittäjien yhdisteestä, joka on äärellinen kahden äärellisen joukon yhdisteenä. Siis K on yhteisesti upottava.

Osoitetaan vielä joukon K amalgamoituvuus. Olkoot $A, B, C \in K$ sekä $e\colon A \to B$ ja $f\colon A \to C$ upotuksia. Osoitetaan, että tällöin on olemassa joukon K alkio E, ja upotukset $g\colon C \to E$, $h\colon B \to E$, joille $g \circ e = h \circ f$.

Koska K on mallin D ikä, on olemassa mallin D äärellisesti viritetyt alimallit A', B', C', jotka ovat isomorfisia mallien A, B, C kanssa. Merkitään $i_A\colon A \cong A'$, $i_B\colon B \cong B'$ ja $i_C\colon C \cong C'$. Tällöin yhdistetty kuvaus $i_A \circ e$ upottaa mallin B alimallin $e(A)$ malliin D. Koska D on ultrahomogeeninen, se on myös heikosti homogeeninen ja tällöin tiedetään, että on olemassa upotuksen $i_A \circ e^{-1}\colon e(A) \to D$ laajennus $j_B\colon B \to D$, joka on myös upotus. Vastaavasti upotus $i_A \circ f$ voidaan laajentaa upotukseksi $j_C\colon C \to D$. Koska $B \in K$, se on äärellisesti viritetty. Tällöin myös malli $j_B(B)$ on äärellisesti viritetty. Vastaava pätee mallille $j_C(C)$. Merkitään symbolilla E sitä mallia, joka viritetään mallien $j_B(B)$ ja $j_C(C)$ virittäjien yhdisteellä. Tällöin malli E kuuluu joukkoon K.

Koska $j_B \restriction A = j_C \restriction A = A'$, niin $j_B \circ e = j_C \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "j_B"] & j_B(B) \arrow[dr, "\leq"] & \\
A \arrow[ur, "e"] \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A' \arrow[ur, "\leq"] \arrow[dr, "\leq"] & & D \\
 & C \arrow[r, "j_C"] & j_C(C) \arrow[ur, "\leq"] &
\end{tikzcd}$$

□

6 Sovelluksia

Tässä viimeisessä luvussa esitellään muutamia Fraïssén konstruktiolla saatavia mielenkiintoisia malleja. Ensimmäisenä käsitellään äärellisten graafien Fraïssén rajaa, Rado-graafia. Toisena sovelluksena esitellään Fraïssén alkuperäinen approksimaatio, rationaalilukujen järjestys äärellisillä lineaarijärjestyksillä. Viimeisenä sovelluksena tarkastellaan äärellisten ryhmien Fraïssén rajaa, Hallin universaalia ryhmää.

6.1 Äärelliset graafit

Tämä alaluku pohjautuu Hodgesin kirjan [6] sivuihin 177-178, sekä Peter Cameronin julkaisuun *The random graph* [3].

Ensimmäisenä todetaan, että äärellisten graafien luokka toteuttaa lauseessa 5.1 esitetyt ehdot, jolloin Fraïssén raja on olemassa. Osoitetaan sitten, että tämä konstruktiolla saatava raja on isomorfinen Rado-graafin kanssa.

Lause 6.1. *Äärellisten graafien luokalle on olemassa Fraïssén raja.*

Todistus. Tarkoituksena on siis osoittaa, että äärellisten graafien luokan aakkosto on numeroituva, luokka sisältää numeroituvan määrän erilaisia isomorfialuokkia, kaikki sen alkiot ovat äärellisesti viritettyjä ja että joukko on perinnöllinen, yhteisesti upottava ja amalgamoiva.

1. Aakkosto on numeroituva, sillä se koostuu vain yhdestä kaksipaikkaisesta relaatiosta.

2. Kullekin luonnolliselle luvulle n pätee, että isomorfismiin asti erilaisia graafeja, missä on n solmua, on äärellinen määrä, sillä äärellisellä joukolla on äärellinen määrä kaksialkioisia osajoukkoja. Yhdiste numeroituvasta määrästä äärellisiä joukkoja on numeroituva ja siten äärellisten graafien luokka sisältää numeroituvan määrän erilaisia isomorfialuokkia.

3. Koska jokainen luokkaan kuuluva malli on äärellinen graafi, niin kunkin voi virittää omalla äärellisellä perusjoukollaan. Kaikki luokan alkiot ovat siis äärellisesti viritettyjä

4. Äärellisen graafin aligraafin perusjoukko on myös äärellinen ja tällöin äärellisten graafien luokka on perinnöllinen.

5. Mitkä tahansa kaksi äärellistä graafia G ja G' voidaan upottaa epäyhtenäiseen graafiin H, jossa on $|\mathrm{Dom}(G)| + |\mathrm{Dom}(G')|$ solmua ja joka sisältää graafit G ja G' erillisinä aligraafeina. Graafi H on tällöin myös äärellinen, joten äärellisten graafien luokka on myös yhteisesti upottava.

6. Luokka on amalgamoituva. Olkoot A, B, C äärellisiä graafeja ja

   $$e\colon A \to B,\ f\colon A \to C$$

   upotuksia. Tällöin on olemassa äärellinen graafi D ja upotukset

   $$g\colon B \to D,\ h\colon C \to D,$$

   missä

   $$g(B) \cap h(C) = A' \cong A,$$

sillä D voidaan valita niin, että se sisältää aligraafeina mallit A', B', C' siten, että

$$\mathrm{Dom}(B') \cap \mathrm{Dom}(C') = \mathrm{Dom}(A'),$$

$$\mathrm{Dom}(D) = \mathrm{Dom}(B') \cup \mathrm{Dom}(C')$$

ja

$$g(B) = B', h(C) = C'.$$

Siis malli D on haluttu amalgaami.

Tällöin on todistettu, että äärellisten graafien luokka toteuttaa Fraïssén lauseen 5.1 ehdot. □

Määritelmä 6.2. Ääretön numeroituva graafi R on *Rado-graafi*, jos kaikille sen solmujen äärellisille osajoukoille X ja Y, jotka ovat erillisiä, on olemassa $x \in \mathrm{Dom}(R) \setminus (X \cup Y)$, jonka naapuri jokainen joukon X alkio on, mutta jonka yksikään naapuri ei kuulu joukkoon Y.

Numeroituvasti ääretön graafi, joka on saatu satunnaisesti siten, että jokaisen mahdollisen särmän todennäköisyys on $\frac{1}{2}$ on melkein varmasti, eli todennäköisyydellä 1, isomorfinen Rado-graafin kanssa. Useissa lähteissä käytetään tätä satunnaisuutta määrittelemään Rado-graafi ja tästä syystä graafia kutsutaan myös *satunnaisgraafiksi*.

Lause 6.3. *Äärellisten graafien luokan Fraïssén raja on isomorfinen Rado-graafin kanssa.*

Todistus. Olkoon A Rado-graafi. Osoitetaan ensin, että graafin A ikä on äärellisten mallien luokka. Osoitetaan induktiolla graafin koon suhteen, että jokainen äärellinen graafi voidaan upottaa Rado-graafiin A.

Perusaskel: Koska yhden solmun graafeissa ei ole rakennetta, ne ovat kaikki isomorfisia keskenään. Siis yhden solmun graafi G_1 on upotettavissa graafiin A.

Induktio-oletus: Oletetaan, että kaikki n solmuiset graafit uppoavat graafiin A.

Induktioaskel: Osoitetaan, että $n + 1$ solmuiset graafit uppoavat Rado-graafiin. Olkoon G mielivaltainen $n + 1$ solmuinen graafi ja $a \in \mathrm{Dom}(G)$. Induktio-oletuksen perusteella joukon $\mathrm{Dom}(G) \setminus \{a\}$ virittämä graafi G' uppoaa graafiin A. Merkitään tätä upotusta $f : G' \to A$. Tarkastellaan graafin A osajoukkoja $X = \{x \in \mathrm{Dom}(G) \mid (x, a) \in E^G\}$ ja $Y = \{y \in \mathrm{Dom}(G) \mid (y, a) \notin E^G\}$. Nyt Rado-graafin määritelmän perusteella on olemassa $b \in \mathrm{Dom}(A)$, jolle pätee, että $(f(x), b) \in E^A$, kun $x \in X$ ja $(f(y), b) \notin E^A$. Tällöin upotuksen $f : G' \to A$ laajennus $f' : G \to A$, missä $f'(a) = b$, upottaa graafin G Rado-graafiin A.

Siis äärellisten graafien luokka sisältyy Rado-graafin ikään. Jos H on graafin A äärellisesti viritetty osajoukko, on graafi H tällöin äärellinen ja kuuluu tällöin äärellisten graafien luokkaan. Siis graafin A ikä on täsmälleen äärellisten mallien luokka.

Osoitetaan seuraavaksi, että Rado-graafi on ultrahomogeeninen. Olkoot G ja H graafin A sellaisia äärellisiä aligraafeja, että $G \subseteq H$ ja $f : G \to A$ on upotus. Osoitetaan heikko homogeenisuus induktiolla niiden solmujen määrän suhteen jotka kuuluvat graafiin H, mutta eivät kuulu graafiin G.

Perusaskel: Oletetaan, että $G = H$. Tällöin upotusta $f : G \to A$ voidaan pitää myös upotuksena $f : H \to A$.

Induktio-oletus: Jos graafissa H on n solmua enemmän kuin graafissa G, voidaan upotus $f : G \to A$ laajentaa upotukseksi $g : H \to A$.

Induktioaskel: Olkoon graafissa H $n + 1$ solmua enemmän kuin graafissa G. Merkitään $\{a_0, \ldots, a_n\} = \mathrm{Dom}(H) \setminus \mathrm{Dom}(G)$. Induktio-oletuksen mukaan voidaan upotus f laajentaa joukon $\mathrm{Dom}(G) \cup \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ virittämän graafin G' upotukseksi $g' : G' \to A$. Tällöin G' on graafin H aligraafi, ja ne eroavat vain yhdellä solmulla $\{a\} = \mathrm{Dom}(H) \setminus \mathrm{Dom}(G')$.

Olkoon $X = \{f(x) \in A \mid x \in G' \text{ ja } (a,x) \in E^H\}$ ja $Y = \{f(y) \in A \mid y \in G \text{ ja } (a,y) \notin E^H\}$. Rado-graafin määritelmän perusteella on olemassa $b \in A$, joka on jokaisen joukon X solmun naapuri, mutta ei yhdenkään joukon Y solmun naapuri. Voidaan laajentaa upotus g' upotukseksi $g\colon H \to A$ määrittelemällä $g(a) = b$.

Perusaskeleen perusteella voidaan laajentaa graafin G' upotus graafiin A graafin H upotukseksi graafiin A. Tällöin graafi A on heikosti homogeeninen. Lauseen 4.15 mukaan graafi A on ultrahomogeeninen ja määritelmän mukaan graafi A on numeroituva. Rado-graafin ikä on siis äärellisten graafien luokka ja Rado-graafi on numeroituva sekä ultrahomogeeninen. Tällöin Fraïssén lauseen 5.1 mukaan Rado-graafi on isomorfinen äärellisten graafien luokan Fraïssén rajan kanssa.

□

6.2 Äärelliset lineaarijärjestykset

Tässä sovelluksessa osoitetaan, että rationaalilukujen järjestyksen voi konstruoida äärellisten lineaarijärjestysten luokasta. Lähteenä tässä alaluvussa on käytetty Dugald MacPhersonin artikkelia *A survey of homogeneous structures* [9].

Ensimmäisenä osoitetaan, että äärellisten lineaarijärjestysten luokka toteuttaa tarvittavat kriteerit.

Lause 6.4. *Äärellisten lineaarijärjestysten luokalle on olemassa Fraïssén raja.*

Todistus. Osoitetaan, että äärellisten lineaarijärjestysten luokan aakkosto on numeroituva, luokka sisältää numeroituvan määrän isomorfialuokkia, se koostuu äärellisesti viritetyistä alkioista ja joukko on perinnöllinen, yhteisesti upottava ja amalgamoiva.

Äärelliset lineaarijärjestykset ovat yhden kaksipaikkaisen relaation sisältävän aakkoston malleja, joten aakkosto on äärellinen. Jokainen äärellinen lineaarijärjestys voidaan virittää omalla perusjoukollaan, joka on äärellinen. Siis luokka koostuu äärellisesti viritetyistä malleista.

Aiemmin esimerkissä 2.13 on todettu, että lineaarijärjestetyistä perusjoukoista koostuvat mallit ovat isomorfisia keskenään, kun ne ovat yhtä mahtavia. Siis äärellisten lineaarijärjestettyjen joukkojen isomorfialuokkia on numeroituva määrä.

Osoitetaan seuraavaksi luokan perinnöllisyys. Olkoon A äärellinen $\{R\}$-malli siten, että $\mathrm{Dom}(A)$ on lineaarijärjestetty ja B mallin A alimalli. Nyt alimallin määritelmän perusteella

$$(b_0, b_1) \in R^B, \text{ jos ja vain jos } (b_0, b_1) \in R^A, \text{ kun } b_0, b_1 \in \mathrm{Dom}(B).$$

Tällöin kaikilla $b \in \mathrm{Dom}(B)$ pätee $(b,b) \in R^B$, joten tulkinta R^B on refleksiivinen. Jos $a,b,c \in \mathrm{Dom}(B)$ ja $(a,b) \in R^B$ sekä $(b,c) \in R^B$, niin pätee $(a,b),(b,c),(a,c) \in R^A$, joten $(a,c) \in R^B$, jolloin tulkinta R^B on transitiivinen. Tulkinta on myös antisymmetrinen, sillä R^B on relaation R^A osajoukko, ja R^A on antisymmetrinen. Kaikilla $a,b \in \mathrm{Dom}(B)$ pätee $a,b \in \mathrm{Dom}(A)$ ja $(a,b) \in R^A$ tai $(b,a) \in R^A$, joten tällöin $(a,b) \in R^B$ tai $(b,a) \in R^B$ jolloin R^B on vertailullinen ja siten malli B on lineaarijärestys.

Mallin B perusjoukko on äärellisen joukon osajoukko, joten se on äärellinen ja malli B kuuluu äärellisten lineaarijärjestettyjen mallien luokkaan. Nyt jokainen äärellisen lineaarijärjestyksen osajoukko on äärellinen lineaarijärjestys, joten luokka on perinnöllinen.

Osoitetaan sitten luokan yhteinen upottavuus. Olkoot A' ja B' äärellisiä malleja, joiden perusjoukot ovat lineaarijärjestettyjä. Tällöin $|A'| = m$ ja $|B'| = n$ joillain $m,n \in \mathbb{N}$. Valitaan isomorfiset kopiot $A \cong A'$ ja $B \cong B'$ siten, että $\mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B) = \varnothing$. Konstruoidaan sitten malli C seuraavasti. Asetetaan $\mathrm{Dom}(C) = \mathrm{Dom}(A) \cup \mathrm{Dom}(B)$ ja $\leq^C = \leq^A \cup \leq^B \cup \{(a,b) \mid a \in$

$A,\ b \in B\}$. Nyt mallit A ja B ovat mallin C alimalleja, joten mallit A' ja B' uppoavat malliin C. Siis äärellisten lineaarijärjestysten luokka on yhteisesti upottava.

$$\xrightarrow{\qquad A \qquad} \ \xrightarrow{\qquad B \qquad}$$

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad C \qquad\qquad\qquad}$$

Osoitetaan lopuksi luokan amalgamoituvuus. Olkoot A, B' ja C' äärellisiä malleja joille joukot $\mathrm{Dom}(A), \mathrm{Dom}(B)$ ja $\mathrm{Dom}(C)$ ovat lineaarijärjestettyjä, $A \lesssim B'$ ja $A \lesssim C'$. Valitaan malleille B' ja C' isomorfiset kopiot $B \cong B'$ ja $C \cong C'$, joille $B \cap C = A$. Konstruoidaan malli D mallien C ja B avulla. Olkoon $\mathrm{Dom}(D) = \mathrm{Dom}(B) \cup \mathrm{Dom}(C)$ ja laaditaan tulkinta $\leq^D$ seuraavasti.

$$\begin{aligned}
\leq^D = {} & \leq^B \cup \leq^C \\
& \cup \{(b, c) \mid \forall a \in A, b \leq^B a \text{ ja } c \leq^C a\} \\
& \cup \{(b, c) \mid \exists a, a' \in A,\ a' \text{ on alkion } a \text{ välitön seuraaja järjestyksessä } \leq^A \\
& \quad \text{ja } a \leq^B b, b \leq^B a', a \leq^C c, c \leq^C a'\} \\
& \cup \{(b, c) \mid \forall a \in A\ a \leq^B b, a \leq^C c\} \\
& \cup \{(b, c) \mid \exists a \in A, b \leq^B a \leq^C c\} \\
& \cup \{(c, b) \mid \exists a \in A, c \leq^C a \leq^B b\}
\end{aligned}$$

Tällöin mallien B ja C malliin A kuulumattomat alkiot sovitetaan mallin A järjestyksen lomaan omia järjestyksiään kunnioittaen siten, että kun mallin B alkio b ja mallin C alkio c ovat samassa suhteessa kaikkiin mallin A alkioihin, niin $b \leq^D c$. Tällöin $\leq^D$ on lineaarijärjestys ja sen universumi on kahden äärellisen joukon yhdisteenä äärellinen. Nyt malli D kuuluu äärellisten lineaarijärjestysten luokkaan ja B', C' uppoavat siihen siten, että alimalli A pysyy paikallaan. Tällöin malli D on haluttu amalgamaatio.

□

Osoitetaan sitten, että äärellisille lineaarijärjestyksille saatava Fraïssén raja on isomorfinen rationaalilukujen kanssa.

Lause 6.5. *Äärellisten lineaarijärjestysten luokan Fraïssén raja on isomorfinen rationaalilukujen ja niiden tavanomaisen järjestyksen kanssa.*

Todistus. Merkitään malliksi Q rationaalilukujen joukkoa yhdessä tavanomaisen järjestyksensä kanssa. Aikaisemmin esimerkissä 2.10 on todettu, että malli Q on lineaarijärjestetty ja esimerkissä 2.4 on osoitettu malli Q numeroituvaksi. Edellisen lauseen todistuksessa on osoitettu lineaarijärjestyksen olevan periytyvä ominaisuus. Siis jokainen mallin Q äärellisesti viritetty alimalli on äärellinen lineaarijärjestys, joten $\mathrm{age}(Q)$ on äärellisten lineaarijärjestysten luokan osajoukko. Jokaisen äärellisen lineaarijärjestyksen voi upottaa luonnollisten lukujen alkupätkään ja siten edelleen rationaaliluvuille, joten $\mathrm{age}(Q)$ on täsmälleen äärellisten lineaarijärjestysten luokka.

Osoitetaan sitten mallin Q ultrahomogeenisuus. Olkoot A ja B sellaisia mallin Q äärellisiä alimalleja, että $A \leq B$ ja on olemassa upotus $f\colon A \lesssim Q$. Osoitetaan induktiolla joukon $|\mathrm{Dom}(B) \setminus \mathrm{Dom}(A)|$ koon suhteen, että kuvaus f voidaan laajentaa upotukseksi $f'\colon B \to Q$.

Perusaskel: Oletetaan, että $A = B$. Tällöin upotusta f voidaan pitää upotuksena f'.

Induktio-oletus: Oletetaan, että kuvaus $f\colon A \to Q$ voidaan laajentaa upotukseksi $f'\colon B \to Q$, kun $|\mathrm{Dom}(B) \setminus \mathrm{Dom}(A)| = n$.

Induktioväite: Osoitetaan, että väite pätee, kun $|\mathrm{Dom}(B) \setminus \mathrm{Dom}(A)| = n+1$. Induktio-oletuksen mukaan kuvaus f voidaan laajentaa upotukseksi $g\colon B\setminus\{b\} \to Q$, kun $b \in \mathrm{Dom}(B) \setminus \mathrm{Dom}(A)$. Laajennetaan sitten kuvaus g upotukseksi $f'\colon B \to Q$ kuvaamalla alkio b siten, että

$$\text{jos } b' \leq^B b, \text{ niin } g(b') \leq^Q f'(b) \; \forall b' \in B\setminus\{b\}$$

ja vastaavasti

$$\text{jos } b \leq^B b', \text{ niin } f'(b) \leq^Q g(b) \; \forall b' \in B\setminus\{b\}.$$

Tällainen $f'(b) \in \mathbb{Q}$ on aina olemassa, sillä rationaalilukujen lineaarijärjestys on tiheä.

Siis Q on numeroituva ja ultrahomogeeninen malli, jonka ikä on äärellisten lineaarijärjestysten luokka, joten se on isomorfinen Fraïssén rajan kanssa. □

6.3 Äärelliset ryhmät

Tarkastellaan lopuksi äärellisten ryhmien sovellusta. Aluksi varmistetaan, että äärellisten ryhmien luokalle on olemassa Fraïssén raja toteamalla luokan perinnöllisyys ja yhteinen upottavuus sekä todistamalla luokan amalgamoivuus. Sitten määritellään Hallin universaali ryhmä, joka on Fraïssén rajan kanssa isomorfinen.

Lause 6.6. *Äärellisten ryhmien luokka on perinnöllinen ja yhteisesti upottava.*

Todistus. Todetaan ensin luokan perinnöllisyys. Olkoon H ryhmä ja G sen alimalli. Nyt $*^G \subseteq *^H$, joten funktion $*$ tulkinta aliryhmässä G on liitännäinen. Jokaisella alkiolla $g \in G$ on käänteisalkio $g^{-1} \in G$ ja vakio 1 kuuluu ryhmään G. Siis joukon G laskutoimitus on liitännäinen, jokaiselle sen alkiolle on olemassa käänteisalkio ja siihen kuuluu vakio 1. Alimalli G on tällöin ryhmä ja äärellisten ryhmien luokka on perinnöllinen.

Kun G ja H ovat äärellisiä ryhmiä, ne uppoavat karteesiseen tuloon $G \times H$, missä $(g,h) * (g',h') = (g *_G g', h *_H h')$ kuvauksilla

$$f\colon G \to G \times H, f(g) = (g, 1_H)$$

ja

$$f'\colon H \to G \times H, f'(h) = (1_G, h).$$

Kahden äärellisen joukon karteesisena tulona $G \times H$ on äärellinen ja täten äärellisten ryhmien luokka on yhteisesti upottava. □

Amalgamoituvuuden todistus pohjautuu Neumannin artikkeliin [11].

Lause 6.7. *Äärellisten ryhmien luokka on amalgamoiva.*

Todistus. Olkoot G', H' ja K' äärellisiä ryhmiä, joilla $G' \lesssim H'$ ja $G' \lesssim K'$. Valitaan ryhmille G', H' ja K' sellaiset isomorfiset kopiot G, H ja K, että $H \cap K = G$. Seuraavaksi valitaan ryhmässä H ryhmän G oikea transversaali $S \subseteq H$ (määritelmä 3.10) ja vastaavasti ryhmässä K ryhmän G oikea transversaali T.

Koska ryhmät G, H ja K ovat äärellisiä, myös transversaalit S ja T ovat. Tällöin äärellisten joukkojen karteesisena tulona joukko $G \times S \times T$ on äärellinen, joten $\mathrm{Sym}(G \times S \times T)$ kuuluu äärellisten ryhmien luokkaan. Osoitetaan, että tämä symmetrinen ryhmä on haluttu amalgaami.

Määritellään jokaiselle $h \in H$ kuvaus $\alpha_h\colon G \times S \times T \to G \times S \times T$ siten, että

$$\alpha_h(g,s,t) = (g',s',t), \text{ missä } g's' = hgs.$$

Vastaavasti määritellään jokaiselle $k \in K$ kuvaus $\beta_k \colon G \times S \times T \to G \times S \times T$ siten, että

$$\beta_k(g, s, t) = (g'', s, t''), \text{ missä } g''t'' = kgt.$$

Kun $g^* \in G$, niin $\alpha_{g^*}(g, s, t) = (g', s', t)$, missä $g's' = g^*gs$ ja koska $g^*, g \in G$, niin $g^*g \in G$. Nyt S on ryhmän H transversaali, joten kullekin ryhmän H alkiolle on olemassa yksikäsitteinen esitys transversaalin ja aliryhmän G alkioiden tulona. Tällöin yhtäsuuruudesta $g's' = g^*gs$ seuraa $g' = g^*g$ ja $s' = s$. Siis $\alpha_{g^*}(g, s, t) = (g^*g, s, t)$.

Vastaavasti $\beta_{g^*}(g, s, t) = (g'', s, t'')$, missä $g''t'' = g^*gt$ ja kuten edellä tällöin transversaalin tuloesityksen yksikäsitteisyydestä seuraa $g'' = g^*g$ ja $t'' = t$. Siis $\beta_{g^*}(g, s, t) = (g^*g, s, t)$, joten $\alpha_{g^*} = \beta_{g^*}$ kaikilla $g^* \in G$.

Osoitetaan, että jokaisella $h \in H$ kuvaus α_h on bijektio ja siten $\alpha_h \in \mathrm{Sym}(G \times S \times T)$. Koska kuvaukset ovat äärelliseltä joukolta itselleen, riittää bijektiivisyyden osoittamiseksi todeta kuvauksen injektiivisyys.

Olkoot $h \in H$ ja $(g, s, t), (a, b, c) \in (G \times S \times T)$ eri jonoja. Nyt

$$\alpha_h(g, s, t) = (g', s', t), \text{ missä } g's' = hgs$$

ja

$$\alpha_h(a, b, c) = (a', b', c), \text{ missä } a'b' = hab.$$

Oletetaan vastoin väitettä, että $(g', s', t) = (a', b', c)$. Tällöin $g' = a'$, $s' = b'$ ja $t = c$, jolloin $hgs = g's' = a'b' = hab$. Tästä seuraa $gs = ab$ ja koska $g, a \in G$ sekä $s, b \in S$, niin tuloesityksen yksikäsitteisyyden perusteella $g = a$ ja $s = b$. Saadaan $(g, s, t) = (a, b, c)$, mikä on ristiriita. Siksi kuvauksen α_h on oltava injektio ja äärellisten joukkojen välisenä kuvauksena bijektio. Jokaisella $h \in H$ pätee, että $\alpha_h \in \mathrm{Sym}(G \times S \times T)$. Kuvauksen β_k osoittaminen bijektioksi tehdään täysin vastaavasti.

Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaukset

$$E \colon H \to \mathrm{Sym}(G \times S \times T), \text{ missä } E(h) = \alpha_h$$

ja

$$F \colon K \to \mathrm{Sym}(G \times S \times T), \text{ missä } F(k) = \beta_k$$

ovat upotuksia.

Osoitetaan ensin kuvaukset homomorfismeiksi.

Olkoot $h, h' \in H$, jolloin $E(hh') = \alpha_{hh'}$. Tällöin

$$\alpha_{hh'}(g, s, t) = (g', s', t), \text{ missä } g's' = hh'gs$$

ja

$$\alpha_h \circ \alpha_{h'}(g, s, t) = \alpha_h(g', s', t) = (g'', s'', t), \text{ missä } g's' = h'gs,\ g''s'' = hg's' = hh'gs.$$

Siis

$$E(hh') = \alpha_{hh'} = \alpha_h \circ \alpha_{h'} = E(h) \circ E(h').$$

Kuvauksen F laskutoimituksen tulkinnan säilyvyys todistetaan täysin vastaavasti.

Osoitetaan vielä homomorfismit E ja F injektioiksi. Todistuksen yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että $1_H \in S$ ja $1_K \in T$. Koska G on ryhmien H ja K aliryhmä, niin $1_H = 1_G = 1_K$. Siis $(1_G, 1_G, 1_G) \in G \times S \times T$. Olkoot $h, h' \in H$, missä $h \neq h'$. Nyt

$$\alpha_h(1_G, 1_G, 1_G) = (g', s', 1_G) \text{ ja } \alpha_{h'}(1_G, 1_G, 1_G) = (g'', s'', 1_G),$$

missä $g's' = h1_G1_G = h$ ja $g''s'' = h'1_G1_G = h'$. Jos $(g', s', 1_G) = (g'', s'', 1_G)$ pätisi, niin $g' = g''$ ja $s' = s''$, jolloin $h = g's' = g''s'' = h'$, joka on vastoin väitettä. Siis kuvaus E on upotus ja kuvaus F voidaan todistaa injektiiviseksi täysin vastaavasti.

On todistettu, että $H, K \lesssim \mathrm{Sym}(G \times S \times T)$ ja todettu, että $E \restriction G = F \restriction G$, joten $\mathrm{Sym}(G \times S \times T)$ on haluttu amalgamaatio.

□

Esitetään seuraavaksi esimerkki edellisen todistuksen kaltaisesta amalgamaatiosta. Merkintöjen selkeyttämiseksi ei käytetä tässä ryhmien isomorfisia kopioita, vaan tehdään kuvauksien α_h ja β_k määritelmiin pienet muutokset.

Esimerkki 6.8. Ryhmä $\mathbb{Z}_3$ uppoaa ryhmiin $\mathbb{Z}_6$ ja $\mathbb{Z}_{12}$. Muodostetaan näiden ryhmien amalgaami.

Olkoot p ja q upotuksia,

$$p\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6, \text{ missä } p(0) = 0, p(1) = 2, p(2) = 4$$

ja

$$q\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_{12}, \text{ missä } q(0) = 0, q(1) = 4, q(2) = 8.$$

Luodaan transversaalit S ja T. Mallin $\mathbb{Z}_6$ oikeat sivuluokat mallin $\mathbb{Z}_3$ upotuksen suhteen ovat $\{0, 2, 4\}$ ja $\{1, 3, 5\}$ ja vastaavasti mallin $\mathbb{Z}_{12}$ sivuluokat ovat $\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2, 6, 10\}$ ja $\{3, 7, 11\}$. Voidaan valita transversaaleiksi $S = \{0, 1\}$ ja $T = \{0, 1, 2, 3\}$.

Joukossa $(\mathbb{Z}_3 \times S \times T)$ on 24 alkiota. Muodostetaan kuvaukset α_h ja β_k seuraavasti.

$$\alpha_h(g, s, t) = (g', s', t), \text{ missä } p(g') + s' = h + p(g) + s$$

ja

$$\beta_k(g, s, t) = (g'', s, t''), \text{ missä } p(g'') + s'' = k + p(g) + t$$

kun $h \in \mathbb{Z}_6$ ja $k \in \mathbb{Z}_{12}$.

Nyt esimerkiksi $\alpha_3(1, 0, 2) = (2, 1, 2)$, sillä $3 + p(1) + 0 = 5 = 4 + 1 = p(2) + 1$. Ryhmä $\mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_3 \times S \times T)$ on haluttu amalgaami.

Hall osoitti artikkelissaan *Some constructions for locally finite groups* [4], että on olemassa numeroituvasti ääretön, paikallisesti äärellinen ryhmä, joka toteuttaa seuraavassa määritelmässä annetut ehdot, ja että tällainen ryhmä on isomorfiaan asti yksikäsitteinen.

Näytetään, että äärellisten ryhmien Fraïssén raja on isomorfinen Hallin universaalin ryhmän kanssa. Seuraava määritelmä perustuu Hallin artikkeliin.

Määritelmä 6.9. Numeroituvasti ääretöntä, paikallisesti äärellistä ryhmää C, joka toteuttaa seuraavat ehdot, kutsutaan *Hallin universaaliksi ryhmäksi.*

1. Jokainen äärellinen ryhmä uppoaa ryhmään C.

2. Keskenään isomorfisten ryhmän C aliryhmien välillä on jokin sisäinen automorfismi, joka kuvaa aliryhmät toisilleen bijektiivisesti.

Hall todistaa artikkelissaan [4] ryhmän C toteuttavan ominaisuutta 2 vahvemman ominaisuuden:

3. Jokainen ryhmän C alimallien välinen isomorfismi laajenee ryhmän C sisäiseksi automorfismiksi.

Tämä ominaisuus on ultrahomogeenisuutta vahvempi, joten Hallin universaali ryhmä on aina myös ultrahomogeeninen.

Ryhmän C ikä on äärellisten ryhmien luokka, sillä jokainen ryhmän C äärellisesti viritetty alimalli on äärellinen ryhmä ja määritelmän mukaan jokainen äärellinen ryhmä uppoaa Hallin universaaliin ryhmään.

Hallin universaali ryhmä on isomorfinen äärellisten ryhmien luokan Fraïssén rajan kanssa, sillä se on ultrahomogeeninen, määritelmänsä mukaan numeroituva ja sen ikä on äärellisten ryhmien luokka.

Lähteet

[1] Manuel Bodirsky. *Model Theory*. Luentomuistiinpanot. 2023. URL: https://wwwpub.zih.tu-dresden.de/~bodirsky/Model-theory.pdf.

[2] Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach ja Kimmo Pietiläinen. *Tieteiden kuningatar: matematiikan historia / Osa I / suomentanut Kimmo Pietiläinen.* fin. [Helsinki]: Art House, 1994. ISBN: 9789518841503.

[3] Peter J. Cameron. "The random graph". *arXiv* abs/1301.7544 (2013). eprint: 1301.7544 (math.CO). URL: https://arxiv.org/abs/1301.7544.

[4] P. Hall. "Some constructions for locally finite groups". *J. London Math. Soc.* 34 (1959), s. 305–319. ISSN: 0024-6107,1469-7750. DOI: 10.1112/jlms/s1-34.3.305. URL: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-34.3.305.

[5] Peter G. Hinman. *Fundamentals of mathematical logic*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005, s. xvi+878. ISBN: 1-56881-262-0.

[6] Wilfrid Hodges. *A shorter model theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, s. x+310. ISBN: 0-521-58713-1.

[7] Wilfrid Hodges. "Model Theory". Teoksessa: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Toim. Edward N. Zalta ja Uri Nodelman. Fall 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.

[8] Libin Li ja Kaiming Zhao. *Introduction to abstract algebra*. Current Natural Sciences. EDP Sciences, Les Ulis; Science Press, Beijing, [2022] ©2022, s. vi+174. ISBN: 978-2-7598-2915-6; 978-2-7598-2916-3; 978-7-03-067958-1. DOI: 10.1051/978-2-7598-2916-3. URL: https://doi.org/10.1051/978-2-7598-2916-3.

[9] Dugald Macpherson. "A survey of homogeneous structures". *Discrete Math.* 311.15 (2011), s. 1599–1634. ISSN: 0012-365X,1872-681X. DOI: 10.1016/j.disc.2011.01.024. URL: https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.01.024.

[10] David Marker. *Model theory*. Vol. 217. Graduate Texts in Mathematics. An introduction. Springer-Verlag, New York, 2002, s. viii+342. ISBN: 0-387-98760-6.

[11] B. H. Neumann. "Permutational products of groups". *J. Austral. Math. Soc.* 1 (1959/60), s. 299–310.

[12] ProofWiki. *Inverse of Cantor Pairing Function*. Verkkosivu. Viitattu 04.07.2025. https://proofwiki.org/wiki/Inverse_of_Cantor_Pairing_Function. Päivitetty 20.08.2023.

[13] ProofWiki. *Rational Numbers are Countably Infinite*. Verkkosivu. Viitattu 06.06.2025. https://proofwiki.org/wiki/Rational_Numbers_are_Countably_Infinite. Päivitetty 26.01.2025.

[14] Steven Roman. *Field theory*. Second. Vol. 158. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2006, s. xii+332. ISBN: 978-0387-27677-9; 0-387-27677-7.

[15] Steven Roman. *Fundamentals of group theory*. An advanced approach. Birkhäuser/Springer, New York, 2012, s. xii+380. ISBN: 978-0-8176-8300-9. DOI: 10.1007/978-0-8176-8301-6. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8301-6.

[16] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*. Fourth. Vol. 148. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995, s. xvi+513. ISBN: 0-387-94285-8. DOI: 10.1007/978-1-4612-4176-8. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4176-8.

[17] Matthew P. Szudzik. "The Rosenberg-Strong Pairing Function". *ArXiv* abs/1706.04129 (2017). URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:28838281.