

Miro Tonteri

POSITIIVISESTI DEFINIITIT MATRIISIT

Tiivistelmä

Miro Tonteri: Positiivisesti definiitit matriisit

Kandidaattitutkielma

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin koulutus

Kesäkuu 2025

Tässä kandidaattitutkielmassa tutkitaan positiivisesti definiittejä reaalisia matriiseja, esittämällä määritelmiä ja lauseita niiden ominaisuuksista. Ensin käydään läpi yleisiä matriisilauseita ja määritelmiä, jonka jälkeen tutkitaan 2×2 -kokoisia matriiseja sekä laajennetaan aihe $n \times n$ -kokoisiin matriiseihin. Lopuksi tutkitaan positiivisesti semidefiniitit matriisit, sekä tarkastellaan eroja positiivisesti definiittisten ja semidefiniittisten matriisien välillä.

Avainsanat: Matriisit, positiivinen definiittisyys, positiivinen semidefiniittisyys

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto	4
2 Esitietoja	5
3 Positiivisesti definiitit matriisit	8
3.1 2×2 -kokoiset matriisit	8
3.2 $n \times n$ -kokoiset matriisit	11
4 Positiivisesti semidefiniitit matriisit	15
Lähteet	19

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa käsittelemme reaalisia symmetrisiä matriiseja, joilla on positiiviset ominaisarvot. Tutkimme, miten tällaiset matriisit voidaan tunnistaa ilman ominaisarvojen laskemista. Luvussa 2 käymme läpi muutamia lauseita sekä määritelmiä, jotka auttavat meitä tutkimaan positiivisesti definiittejä matriiseja.

Tämän jälkeen alamme käsittelemään positiivisesti definiittejä matriiseja luvussa 3. Käymme läpi määritelmän positiivisesti definiiteille matriiseille sekä muutamia lauseita ja esimerkkejä niihin liittyen. Aloitamme käsittelyn symmetrisistä 2×2 -kokoisista matriiseista ja laajennamme teoriaa koskemaan kaikkia symmetrisiä $n \times n$ -kokoisia matriiseja. Määrittelemme myös lopuksi positiivisesti semidefiniitit matriisit ja katsomme eroja niiden ja positiivisesti definiittien matriisien välillä.

Lukijalta odotamme lineaarialgebran ja matriisilaskennan perusasioiden tietämystä. Lähdekirjallisuutena käytämme Hornin *Matrix Analysis* [1] kirjaa, Howardin kirjaa *Elementary Linear Algebra* [2], Poolen kirjaa *Linear Algebra: A Modern Introduction* [3] sekä Strangin teosta *Introduction to Linear Algebra* [4].

2 Esitietoja

Tässä luvussa käymme läpi muutamia lauseita ja määritelmiä liittyen pääaiheeseemme. Määritämme ensin matriisin ominaisarvon ja -vektorin, sekä karakteristisen polynomin ja symmetriset matriisit.

Määritelmä 2.1 ([3, s. 249],[4, s. 241]). Olkoon A $n \times n$ -kokoinen matriisi. Jos skalaaritermi $\lambda \in \mathbb{R}$ toteuttaa yhtälön $\det(A - \lambda I) = 0$, niin termiä λ kutsutaan matriisin A *ominaisarvoksi*. Jos on olemassa jokin vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, jolla pätee $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, tällöin vektoria \mathbf{x} kutsutaan matriisin A ominaisarvoa λ vastaavaksi *ominaisvektoriksi*.

Määritelmä 2.2 ([2, s. 292-293]). Olkoon A $n \times n$ -kokoinen matriisi. Avaamalla matriisin A determinanttiyhtälön $\det(A - \lambda I) = 0$, saamme

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0, \text{ missä, } c \in \mathbb{R}.$$

Matriisin A determinanttiyhtälöstä saamme muodostettua polynomin

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n.$$

Polynomia $p(\lambda)$ kutsutaan matriisin A *karakteristiseksi polynomiksi*.

Määritelmä 2.3 ([4, s. 91]). Neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on symmetrinen, jos ja vain jos $A_{ij} = A_{ji}$ kaikilla $i, j \in 1, 2, \dots, n$. Toisin sanoen matriisi on symmetrinen, jos ja vain jos $A = A^T$. Esimerkiksi jokaisen kokoa 2×2 olevan symmetrisen matriisin on oltava muotoa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Apulause 2.1 (Matriisin jäljen ja ominaisarvojen välinen yhteys). Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ominaisarvojen summa on yhtä suuri kuin matriisin diagonaalialkioiden summa.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Tätä kutsutaan matriisin A jäljeksi.

Todistus. Todistamme edellä mainitun tuloksen 2×2 -kokoisille matriiseille ja si-
vuutamme yleisen tapauksen todistuksen. Olkoon matriisi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ja sen
ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Matriisin determinanttiyhtälö on tällöin $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 -$
 $(a + d)\lambda + ad - bc = 0$, mistä seuraa, että $\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(a + d + \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \right)$
ja $\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \right)$.

Laskemalla ominaisarvot yhteen saamme

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(a + d + \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} + a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \right) \\ &= \frac{1}{2} (2a + 2d) \\ &= a + d. \end{aligned}$$

Olemme osoittaneet, että matriisin diagonaalien summa on yhtä suuri kuin sen omi-
naisarvojen summa. \square

Apulause 2.2. Matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determinanti on yhtä suuri kuin sen ominaisar-
vojen tulo. Toisin sanoen

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Todistus. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

missä $a_{ij} \in \mathbb{R}$, ja sen ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Tällöin matriisin A karakte-
ristinen polynomi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Asettamalla yhtälössä $\lambda = 0$ saamme

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Olemme osoittaneet siis, että matriisin determinanti on yhtä suuri kuin sen ominai-
sarvojen tulo. \square

Seuraavaksi annamme ehtoja 2×2 -kokoisten matriisien ominaisarvoille, sillä
ominaisarvoilla on suuri merkitys liittyen matriisien positiiviseen definiittisyyteen.

Lause 2.1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ mielivaltainen symmetrinen 2×2 -kokoinen matriisi. Matriisin A ominaisarvot ovat positiivisia, jos ja vain jos

$$a > 0 \quad \text{ja} \quad ac - b^2 > 0.$$

Todistus. [4, s. 283] Olkoot matriisin A ominaisarvot λ_1 ja λ_2 . Oletetaan ensin, että $\lambda_1 > 0$ ja $\lambda_2 > 0$. Matriisin A determinantti voidaan ilmaista ominaisarvojen tulona (Apulause 2.2), jolloin $\det(A) = ac - b^2 > 0$. Tästä edelleen seuraa, että tulo ac on myös positiivinen, eli alkiot a ja c ovat samanmerkkiset. Alkioiden etumerkit ovat positiiviset, koska Apulauseen 2.1 nojalla $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$. Olemme siis todistaneet, että ominaisarvojen positiivisuudesta seuraa ominaisuudet $a > 0$ ja $ac - b^2 > 0$.

Oletetaan sitten, että $a > 0$ ja $ac - b^2 > 0$. Tästä seuraa suoraan, että myös $c > 0$. Determinantti on positiivinen, joten ominaisarvojen täytyy olla samanmerkkiset. Alkiot a ja c ovat positiivisia ja $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c > 0$, joten ominaisarvot ovat myös positiivisia. Olemme nyt todistaneet myös, että determinantin ja matriisin ensimmäisen diagonaali-alkion ollessa positiivisia matriisilla on positiiviset ominaisarvot. \square

Lause 2.2. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ mielivaltainen symmetrinen 2×2 -kokoinen matriisi. Matriisin A ominaisarvot ovat positiivisia, jos ja vain jos sen johtavat kertoimet ovat positiivisia:

$$a > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{ac - b^2}{a} > 0.$$

Todistus. Lauseen 2.1 nojalla $ac - b^2$ on positiivinen ja kahden positiivisen luvun osamäärä on myös positiivinen. Tässä lauseessa esitetyt kaksi ehtoa ovat siis yhtäpitäviä lauseessa 2.1 esitettyjen ehtojen kanssa. \square

Määritelmä 2.4 (Schurin tulo). [1, s. 477] Olkoon $A = [a_{ij}] \in M^{m \times n}$ ja $B = [b_{ij}] \in M^{m \times n}$, missä $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Tällöin Schurin tulo alkioista A ja B on $A \circ B = [a_{ij}b_{ij}] \in M^{m \times n}$.

3 Positiivisesti definiitit matriisit

3.1 2×2 -kokoiset matriisit

Käymme ensin läpi positiivisesti definiittien matriisien määritelmän. (vrt. [4, s. 284])

Määritelmä 3.1. Jos 2×2 -kokoiselle matriisille A pätee $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ kaikilla nollasta poikkeavilla vektoreilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, eli

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0,$$

niin tällöin matriisia A kutsutaan *positiivisesti definiitiksi matriisiksi*.

Lause 3.1 ([4, s.286]). Jos 2×2 -kokoisella symmetrisellä matriisilla $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ on yksi seuraavista ominaisuuksista, niin sillä on kaikki muutkin niistä:

1. Matriisin A ominaisarvot ovat positiiviset.
2. Matriisin A 1×1 ja 2×2 pääalideterminantit ovat molemmat positiivisia, eli $a > 0$ ja $ac - b^2 > 0$.
3. Matriisin A johtavat kertoimet ovat positiivisia, eli $a > 0$ ja $\frac{ac-b^2}{a} > 0$.
4. Neliömuoto $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$ on positiivinen, kun $x \neq 0$ tai $y \neq 0$.

Todistus. Oletetaan matriisin A olevan symmetrinen 2×2 -kokoinen matriisi.

Lauseen 2.1 nojalla voimme tehdä ekvivalenssiketjun

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow a > 0, ac - b^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{ac - b^2}{a} > 0.$$

Osoitetaan ominaisuus 4 yhtäpitäväksi muiden ehtojen kanssa. Oletetaan, että ominaisuus 4 pätee. Tehdään vastaoletus, että matriisilla A on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$ missä $\lambda \leq 0$. Olkoon \mathbf{x} matriisin A ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Tällöin $\mathbf{x} \neq 0$ ja $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda(x^2 + y^2) < 0$, mistä saadaan ristiriita, koska $x^2 + y^2 > 0$ ja $\lambda > 0$. Siis ominaisarvojen täytyy olla positiiviset.

Oletetaan sitten, että ominaisuus 2 pätee, eli pääalideterminanteille pätee $a > 0$ ja $ac - b^2 > 0$. Olkoon $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Ominaisuudesta 2 seuraa, että $a > 0$

ja $c > 0$. Osittaisderivaatoiksi saamme $f_x(x, y) = 2ax + 2by$ ja $f_y(x, y) = 2bx + 2cy$, minkä jälkeen funktion f kriittiset pisteet saamme ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} 2ax + 2by = 0 \\ 2bx + 2cy = 0. \end{cases}$$

Kerrotaan alempi yhtälö termillä $-\frac{b}{c}$.

$$\begin{cases} 2ax + 2by = 0 \\ -\frac{2b^2}{c}x - \frac{2bc}{c}y = 0. \end{cases}$$

Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan

$$\begin{aligned} (2ax + 2by) + \left(-\frac{2b^2}{c}x - \frac{2bc}{c}y\right) &= 0 \\ \Rightarrow \left(2ax - \frac{2b^2}{c}x\right) + \left(2by - \frac{2cb}{c}y\right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{2ac}{c}x - \frac{2b^2}{c}x &= 0 \\ \Rightarrow \frac{2(ac - b^2)}{c}x &= 0 \quad (\text{Oletuksen nojalla } \frac{ac - b^2}{c} > 0) \\ \Rightarrow x &= 0. \end{aligned}$$

Sijoittamalla $x = 0$ jälkimmäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} 2bx + 2cy &= 0 \\ \Rightarrow 2b \cdot 0 + 2cy &= 0 \\ \Rightarrow 2cy &= 0 \quad (\text{Oletuksen nojalla } c > 0) \\ \Rightarrow y &= 0. \end{aligned}$$

Kriittinen piste on siis $(0, 0)$. Kriittinen piste (x, y) voidaan osoittaa paikalliseksi minimikohdaksi toteamalla, että

$$f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) > 0, \text{ kun } f_{xx}(x, y) > 0.$$

Toisen asteen osittaisderivaatat ovat

$$f_{xx}(x, y) = 2a, \quad f_{yy}(x, y) = 2c \text{ ja } f_{xy}(x, y) = 2b.$$

Sijoittamalla nämä edellä mainittuun kaavaan saamme $2a \cdot 2c - (2b)^2 = 4ac - 4b^2 = 4(ac - b^2)$, mikä on oletuksemme nojalla positiivinen. Funktiolla on siis paikallinen

minimikohta kohdassa $(0, 0)$. Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraboloidi, jolloin paikallisen minimikohdan onkin itse asiassa oltava globaali minimikohta.

□

Määritelmästä 3.1 ja lauseesta 3.1 seuraa, että positiivisesti definiiteilla matriiseilla täytyy olla positiiviset ominaisarvot sekä positiiviset johtavat kertoimet. Positiivisesti definiitit matriisit voidaan siis tunnistaa tutkimalla johtavia kertoimia tai pääalideterminanteja.

Lause 3.2. *Kahden positiivisesti definiitin 2×2 -kokoisen matriisin A ja B Schurin tulo on myös positiivisesti definiitti.*

Todistus. Olkoon matriisit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$ positiivisesti definiittejä. Määritelmän 2.4 mukaan matriisien Schurin tulo on

$$A \circ B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & bf \\ bf & cg \end{bmatrix}.$$

Koska matriisit ovat positiivisesti definiittejä, niin niiden determinantit ovat positiivisia, eli $\det(A) = ac - b^2 > 0$ ja $\det(B) = eg - f^2 > 0$, mistä seuraa, että $ac > b^2 > 0$ ja $eg > f^2 > 0$. Lauseesta 3.1 seuraa, että $a > 0$ ja $e > 0$. Determinanttien positiivisuudesta myös seuraa, että

$$0 < (ac - b^2)(eg - f^2) = aceg - acf^2 - b^2eg + b^2f^2.$$

Voimme arvioida lauseketta käyttämällä hyväksi tietoja $ac > b^2$ sekä $eg > f^2$

$$\begin{aligned} 0 &< aceg - acf^2 - b^2eg + b^2f^2 \\ &< aceg - b^2f^2 - b^2f^2 + b^2f^2 \\ &= aceg - b^2f^2. \end{aligned}$$

Eli Schurin tulon matriisin determinantti on positiivinen, siispä se on positiivisesti definiitti.

□

Esimerkki 3.1. Ovatko seuraavat matriisit positiivisesti definiittejä?

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Matriisin A alkio a on negatiivinen, mistä seuraa ettei matriisi ole positiivisesti definiitti.

b) Tutkitaan matriisin B positiivista definiittisyyttä laskemalla sen ominaisarvot.

$$\det(B) = \left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 13\lambda + 4$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 4}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 16}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{153}}{2}.$$

Koska $\sqrt{153} < \sqrt{169} = 13$, niin matriisin B ominaisarvot ovat positiivisia, joten matriisi B on positiivisesti definiitti.

Tutkitaan sitten matriisin B positiivista definiittisyyttä sen determinantin kautta.

$$\det(B) = ac - b^2 = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 6 = 40 - 36 = 4 > 0.$$

Siispä matriisi on positiivisesti definiitti.

c) Matriisin C ensimmäinen alkio on positiivinen. Laskemme siis matriisin determinantin. Determinantti ei ole positiivinen, sillä

$$ac - b^2 = 9 \cdot 4 - 6 \cdot 6 = 36 - 36 = 0,$$

joten matriisi ei ole positiivisesti definiitti.

3.2 $n \times n$ -kokoiset matriisit

Voimme laajentaa lausetta 3.1, jotta saamme positiivisten definiittien matriisien ominaisuudet myös $n \times n$ -kokoisille matriiseille.

Lause 3.3 ([4, s. 288]). *Jos $n \times n$ -kokoisella symmetrisellä matriisilla*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

on yksi seuraavista ominaisuuksista, sillä on kaikki muutkin niistä.

1. *Matriisin kaikki ominaisarvot ovat positiivisia.*
2. *Matriisin kaikki 1×1 , 2×2 , \dots , $n \times n$ pääalideterminantit ovat positiivisia.*
3. *Matriisin kaikki johtavat kertoimet ovat positiivisia.*

4. Matriisin neliömuoto $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ on positiivinen, kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Tällöin $n \times n$ -matriisi on positiivisesti definiitti.

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Lause 3.4. Positiivisesti definiitin matriisin A käänteismatriisi A^{-1} on myös positiivisesti definiitti.

Todistus. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

positiivisesti definiitti matriisi. Lauseen 3.2 nojalla matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ovat positiiviset. Matriisin A käänteismatriisin A^{-1} ominaisarvot ovat muotoa

$$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} > 0.$$

Koska matriisin A ominaisarvot ovat positiiviset, niin käänteismatriisin A^{-1} ominaisarvot ovat myös positiiviset. Eli positiivisesti definiitin matriisin käänteismatriisi on myös positiivisesti definiitti. □

Lause 3.5. Positiivisesti definiitin matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kokonaislukupotenssit ovat myös positiivisesti definiittejä.

Todistus. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ positiivisesti definiitti, eli matriisin

ominaisarvot

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ovat positiivisia. Tällöin voimme kirjoittaa

$$A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

Kertomalla yhtälö vasemmalta matriisilla A saamme

$$A^2 \mathbf{x} = A \lambda \mathbf{x} = \lambda (A \mathbf{x}) = \lambda (\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}$$

Kertomalla yhtälö edelleen vasemmalta matriisilla A saamme

$$A^3 \mathbf{x} = A(\lambda^2 \mathbf{x}) = \lambda^2 (A \mathbf{x}) = \lambda^2 (\lambda \mathbf{x}) = \lambda^3 \mathbf{x}$$

Jatkamalla samalla tavalla päädyimme lopulta tilanteeseen

$$A^n \mathbf{x} = \lambda^n \mathbf{x}$$

Koska lauseen 3.2 nojalla ominaisarvot ovat positiivisia, niin sen potenssit ovat myös positiivisia. Eli positiivisesti definiittien matriisien kokonaislukupotenssit ovat myös positiivisesti definiittejä. \square

Lause 3.6. *Kahden positiivisesti definiitin matriisin A ja B summa on myös positiivisesti definiitti.*

Todistus. Olkoot matriisit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiivisesti definiittejä. Koska matriisit A ja B ovat positiivisesti definiittejä, niin lauseen 3.2 nojalla matriisien neliömuodot $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ ja $\mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ ovat positiivisia. Niinpä voimme kirjoittaa

$$A \mathbf{x} + B \mathbf{x}$$

Kerrotaan termit vasemmalta puolelta vektorilla \mathbf{x}^T ,

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T B \mathbf{x} > 0.$$

Eli summamatriisi on myös positiivisesti definiitti. \square

Esimerkki 3.2. Tutkitaan, ovatko seuraavat matriisit positiivisesti definiittejä.

$$1. A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 6 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$3. C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Lasketaan matriisin A pääalideterminantit. Pääalideterminantit ovat

$$|3| = 3, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -31, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 6 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -159.$$

Matriisi A ei siis ole positiivisesti definiitti, koska kaikki pääalideterminantit eivät ole positiivisia.

2. Matriisin B pääalideterminantit ovat

$$|4| = 4, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -24.$$

Matriisi B ei ole positiivisesti definiitti matriisi, sillä kaikki pääalideterminantit eivät ole positiivisia.

3. Matriisin C pääalideterminantit ovat

$$|6| = 6, \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14, \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9, \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 28.$$

Matriisi C on positiivisesti definiitti, koska sen kaikki pääalideterminantit ovat positiivisia.

4 Positiivisesti semidefiniitit matriisit

Tässä luvussa käsittelemme nopeasti positiivisesti semidefiniitit matriisit ja kuinka ne eroavat positiivisesti definiiteistä matriiseista.

Määritelmä 4.1. Jos 2×2 -kokoiselle matriisille A pätee $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$ kaikilla nollasta poikkeavilla vektoreilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, eli

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 \geq 0,$$

niin tällöin matriisia A kutsutaan *positiivisesti semidefiniitiksi matriisiksi*.

Lause 4.1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ mielivaltainen symmetrinen 2×2 -kokoinen matriisi.

Matriisin A ominaisarvot ovat ei-negatiivisia, jos ja vain jos

$$a \geq 0 \quad \text{ja} \quad ac - b^2 \geq 0.$$

Todistus. Vastaavasti, kuin Lause 2.1. □

Lause 4.2. Jos 2×2 -kokoisella symmetrisellä matriisilla $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ on yksi seuraavista ominaisuuksista, sillä on ne kaikki:

1. Matriisin A ominaisarvot ovat ei-negatiiviset.
2. Matriisin A 1×1 ja 2×2 pääalideterminantit ovat molemmat ei-negatiivisia, eli $a \geq 0$ ja $ac - b^2 \geq 0$.
3. Matriisin A johtavat kertoimet ovat ei-negatiivisia, eli $a \geq 0$ ja $\frac{ac-b^2}{a} \geq 0$.
4. Neliömuoto $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$ on ei-negatiivinen, kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Todistus. Vastaavasti, kuin Lause 3.1. □

Lause 4.3. Jos $n \times n$ -kokoisella symmetrisellä matriisilla

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

on yksi seuraavista ominaisuuksista, sillä on kaikki ominaisuudet.

1. Matriisin kaikki ominaisarvot ovat ei-negatiivisia.
2. Matriisin kaikki 1×1 , 2×2 , \dots , $n \times n$ pääalideterminantit ovat ei-negatiivisia.
3. Matriisin kaikki johtavat kertoimet ovat ei-negatiivisia.
4. Neliömuoto $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ on ei-negatiivinen kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Tällöin kyseinen $n \times n$ -matriisi on positiivisesti semidefiniitti.

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Esimerkki 4.1. Tutkitaan ovatko seuraavat matriisit positiivisesti definiittejä, positiivisesti semidefiniittejä vai ei kumpaakaan.

$$1. A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2. B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3. C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4. D = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 8 & -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

1. Huomataan, että

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 15 - 49 = -34 < 0.$$

Matriisi A ei siis ole positiivisesti definiitti tai semidefiniitti, koska determinantti on negatiivinen.

2. Matriisin B tapauksessa saadaan

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 9 \times 4 - 6 \times 6 = 36 - 36 = 0.$$

Matriisi B on sama matriisi kuin esimerkin 3.1 c-kohdassa, eli se ei ole positiivisesti definiitti, mutta se on positiivisesti semidefiniitti, koska sen determinantti on nolla.

3. Voimme tutkia matriisin C positiivisen definiittisyyttä tai semidefiniittisyyttä laskemalla sen pääalideterminantit. Huomataan, että alkio $a = 4$, eli matriisin C ensimmäinen pääalideterminantti on positiivinen.

Seuraava pääalideterminantti saadaan laskemalla

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8 > 0.$$

Matriisin C 3×3 pääalideterminantti saadaan kehittämällä determinantti ensimmäistä saraketta pitkin

$$\det(C) = 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-25) - 2 \cdot 0 + 0 \cdot 10 = -100 < 0.$$

Matriisi C ei ole positiivisesti definiitti eikä positiivisesti semidefiniitti, koska kaikki sen pääalideterminantit eivät ole ei-negatiivisia.

4. Samoin kuin matriisin C tapauksessa, matriisin D positiivista definiittisyyttä tai semidefiniittisyyttä voidaan tutkia laskemalla sen pääalideterminantit.

Matriisin D ensimmäinen pääalideterminantti on $\begin{vmatrix} 4 \\ 4 \end{vmatrix} = 4 > 0$.

Seuraava pääalideterminantti on

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 3 = 0 - 12 = -12 < 0.$$

Kolmas pääalideterminantti saadaan kehittämällä matriisin D determinantti toista riviä pitkin

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(3 \cdot (-3) - 0 \cdot 2) - 0 + 2(4 \cdot 2 - 0 \cdot 3) \\ &= 3 \cdot (-9) + 2 \cdot 8 \\ &= -27 + 16 \\ &= -11 < 0. \end{aligned}$$

Kehitettämällä matriisin D determinantti kolmannelta riviä pitkin neljänneksi pääalideterminantiksi saadaan

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 8 & -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & -4 \\ 8 & -4 & 7 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & -4 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 0 - 2 \times (-32) + (-3) \times (-319) - 71 \\
 &= 0 + 64 + 957 - 71 \\
 &= 950 > 0.
 \end{aligned}$$

Matriisi D ei ole positiivisesti definiitti eikä myöskään positiivisesti semidefiniitti, koska kaikki sen pääalideterminantit eivät ole ei-negatiivisia.

Esimerkistä sekä lauseista 4.1, 4.2 ja 4.3 näemme, että positiivisesti semidefiniittien matriisien pääalideterminantteihin sallitaan olevan myös nolla. Tästä seuraa, että positiivisesti definiitit matriisit voidaan myös laskea positiivisesti semidefiniiteiksi matriiseiksi.

Lähteet

- [1] Horn, R., Johnson, C. *Matrix Analysis*. 2nd ed., Cambridge University Press, 2013
- [2] Howard, A., Rorres, C. *Elementary Linear Algebra*. 11th ed., Wiley, Canada, 2013.
- [3] Poole, D. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. BROOKS/COLE, California, 2003.
- [4] Strang, G. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Massachusetts, 1993.