Tampereen yliopisto

Niina Partanen

# MODULAARISET JA DISTRIBUTIIVISET HILAT

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Manu Harsu
Toukokuu 2025

# TIIVISTELMÄ

Niina Partanen: Modulaariset ja distributiiviset hilat
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Toukokuu 2025

---

Tämän työn aiheena ovat modulaariset ja distributiiviset hilat, ja lisäksi työn alussa käsitellään hilateorian perusteita. Tässä työssä hila määritellään osittain järjestettynä joukkona, joten se määritellään työn alussa. Lisäksi hilan määrittelemistä varten esitellään käsitteet meet ja join. Hilaa havainnollistetaan esimerkein ja esitetään muutamia työn kannalta hyödyllisiä hilojen ominaisuuksia.

Työssä esitellään hilatyypeistä tarkemmin modulaariset ja distributiiviset hilat ja käsitellään näiden välistä yhteyttä. Modulaaristen hilojen osalta työn päätuloksena osoitetaan, milloin hila on modulaarinen. Havaitaan myös, että distributiivinen hila on aina modulaarinen. Distributiivisten hilojen osalta työn päätuloksena todistetaan, milloin modulaarinen hila on distributiivinen.

Avainsanat: osittain järjestetty joukko, hila, modulaarisuus, distributiivisuus

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# TEKOÄLYN KÄYTTÖ OPINNÄYTTEESSÄ

Opinnäytteessäni ei ole käytetty tekoälysovelluksia.

Olen tietoinen siitä, että olen täysin vastuussa koko opinnäytteeni sisällöstä, mukaan lukien tekoälyllä tuotetut osat, ja hyväksyn vastuun mahdollisista eettisten ohjeiden rikkomuksista.

# ALKUSANAT

Kiitos kandiohjaajalleni Manu Harsulle mielenkiintoisesta kandiaiheesta sekä neuvoista ja tuesta kirjoitusprosessin aikana. Suuri kiitos myös poikaystävälleni Miikalle ja ystävilleni kannustuksesta ja positiivisen ilmapiirin ylläpitämisestä.

Tampereella, 19. toukokuuta 2025

Niina Partanen

# SISÄLLYSLUETTELO

1. Johdanto . . . . . 1
2. Valmistelevia määrittelyjä . . . . . 2
2.1 Osittain järjestetyt joukot . . . . . 2
2.2 Meet ja join . . . . . 3
3. Hilat . . . . . 5
3.1 Alihila . . . . . 9
3.2 Hilaisomorfismi . . . . . 10
4. Modulaariset hilat . . . . . 12
5. Distributiiviset hilat . . . . . 16
6. Yhteenveto . . . . . 22
Lähteet . . . . . 23

# LYHENTEET JA MERKINNÄT

| | |
|---|---|
| $\leq$ | osittainjärjestys |
| $\mathbb{N}$ | luonnolliset luvut, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ |
| $\mathbb{Z}_+$ | positiiviset kokonaisluvut, $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ |
| $\mid$ | jakorelaatio |
| $\mathcal{P}$ | potenssijoukko |
| $\subseteq$ | osajoukkorelaatio |
| $\cap$ | leikkaus |
| $\cup$ | yhdiste |
| 0 | osittain järjestetyn joukon pienin alkio |
| 1 | osittain järjestetyn joukon suurin alkio |
| inf | infimum eli joukon suurin alaraja |
| sup | supremum eli joukon pienin yläraja |
| $\wedge$ | meet |
| $\vee$ | join |
| $\mathbf{N}_5$ | viisikulmio |
| $\mathbf{M}_6$ | timantti |

# 1. JOHDANTO

1800-luvun lopulla sekä Richard Dedekind että Charles S. Pierce ja Ernst Schöder kehittivät hilan käsitteen samanaikaisesti eri tarpeisiin. Pierce ja Schöder kehittivät hilateoriaa tutkiessaan George Boolen kehittämää Boolen algebraa. Hilateorian voidaankin katsoa saaneen alkunsa Boolen distributiivisista hiloista. Dedekind puolestaan esitteli modulaariset hilat, jotka ovat distributiivisista hiloista laajempi hilaluokka. Näiden kehitysaskelten jälkeen hilateoria ei vielä tehnyt läpimurtoa matemaattisessa yhteisössä, mutta 1930-luvulla se alkoi yleisesti kehittyä Garret Birkhoffin työn ansiosta. [1, s. xix]

Hilat voidaan jakaa eri hilatyyppeihin, joista tämän työn aiheeksi valikoituivat modulaariset ja distributiiviset hilat. Työn alussa esitellään osittain järjestetty joukko sekä käsitteet meet ja join, joita tarvitaan hilan määrittelemiseen Luvussa 3. Lisäksi tässä luvussa esitellään työssä myöhemmin tärkeässä asemassa olevat hilat $\mathbf{N}_5$ eli viisikulmio ja $\mathbf{M}_6$ eli timantti ja muutamia työn kannalta oleellisia hilojen ominaisuuksia. Osittain järjestettyjen joukkojen sijaan hila voidaan määritellä myös algebrallisena rakenteena, joten tässä luvussa esitellään myös hilojen hyödyllisiä algebrallisia ominaisuuksia. Alaluvuissa 3.1 ja 3.2 määritellään myös alihila ja hilaisomorfismi, jotka ovat hyödyllisiä käsitteitä modulaaristen ja distributiivisten hilojen syvällisemmässä ymmärtämisessä.

Luvussa 4 päästään työn toiseen pääaiheeseen: modulaarisiin hiloihin. Määritellään modulaarinen hila ja todistetaan määritelmän avulla, että aiemmin esitetty hila $\mathbf{N}_5$ ei ole modulaarinen. Päätuloksena todistetaan, että hila on modulaarinen, jos ja vain jos sillä ei ole alihilaa, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{N}_5$ kanssa.

Luvussa 5 tarkastellaan distributiivisia hiloja. Distributiivisen hilan määritelmän nojalla osoitetaan, että hilat $\mathbf{N}_5$ ja $\mathbf{M}_6$ eivät ole distributiivisia. Seuraavaksi todistetaan, että distributiivinen hila on aina modulaarinen. Päätuloksena todistetaan, että modulaarinen hila on distributiivinen, jos ja vain jos sillä ei ole alihilaa, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{M}_6$ kanssa.

Työn tavoitteena on tutustuttaa lukija hilateorian perusteisiin ja hilatyypeistä tarkemmin modulaarisiin ja distributiivisiin hiloihin sekä näiden väliseen yhteyteen. Joukko-opin ja algebran käsitteiden tunteminen auttavat lukijaa työn seuraamisessa, mutta näiden syvällinen ymmärrys ei ole tarpeen sillä työssä lähdetään liikkeelle perusteista. Tämän työn päälähteenä on käytetty B. S. Vatsan ja S. Vatsan kirjaa *Discrete mathematics* [3]. Lisäksi luvuissa 3, 4 ja 5 on hyödynnetty otteita G. A. Grätzerin kirjasta *Lattice theory: foundation* [1] sekä S. Romanin kirjasta *Lattices and Ordered Sets* [2].

# 2. VALMISTELEVIA MÄÄRITTELYJÄ

Hila voidaan määritellä joko osittain järjestettynä joukkona tai algebrallisena rakenteena. Tässä työssä hila määritellään osittain järjestettynä joukkona, joten aloitetaan määrittelemällä se Alaluvussa 2.1. Hilan määritelmää varten esitellään myös käsitteet meet ja join Alaluvussa 2.2.

## 2.1 Osittain järjestetyt joukot

Tämän Alaluvun Määritelmä 2.1 ja Esimerkit 2.2–2.4 pohjautuvat lähteeseen [3, Luku 4.1].

**Määritelmä 2.1.** Olkoon $S$ epätyhjä joukko, ja olkoon $R$ joukon $S \times S$ epätyhjä osajoukko. Relaatiota $R$ sanotaan *osittainjärjestykseksi* joukossa $S$ ja paria $(S, R)$ *osittain järjestetyksi joukoksi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa relaatiolle $R$:

(i) *Refleksiivisyys*: $(a, a) \in R$ kaikilla $a \in S$.

(ii) *Antisymmetrisyys*: Jos $(a, b) \in R$ ja $(b, a) \in R$, niin $a = b$ kaikilla $a, b \in S$.

(iii) *Transitiivisuus*: Jos $(a, b) \in R$ ja $(b, c) \in R$, niin $(a, c) \in R$ kaikilla $a, b, c \in S$.

Osittain järjestettyä joukkoa voidaan kutsua *posetiksi* (engl. *p*artially *o*rdered *set*). Eniten käytetty symboli osittainjärjestykselle on $\leq$ ("pienempi tai yhtäsuuri kuin"), jolloin osittain järjestettyä joukkoa merkitään $(S, \leq)$. Havainnollistetaan seuraavaksi osittain järjestettyä joukkoa esimerkein.

**Esimerkki 2.2.** Luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ joukossa relaatiolle $\leq$ ovat voimassa seuraavat ehdot:

(i) $a \leq a$ kaikilla $a \in \mathbb{N}$, joten $\leq$ on refleksiivinen.

(ii) Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$ kaikilla $a, b \in \mathbb{N}$. Siispä $\leq$ on antisymmetrinen.

(iii) Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$ kaikilla $a, b, c \in \mathbb{N}$. Siispä $\leq$ on transitiivinen.

Koska kaikki kolme ehtoa ovat voimassa, relaatio $\leq$ on osittainjärjestys ja pari $(\mathbb{N}, \leq)$ on osittain järjestetty joukko.

**Esimerkki 2.3.** Olkoon $S$ kokoelma joukkoja. Kokoelmassa $S$ osajoukkorelaatiolle $\subseteq$ ovat voimassa seuraavat ehdot:

(i) $A \subseteq A$ kaikilla $A \in S$, joten $\subseteq$ on refleksiivinen.

(ii) Jos $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$, niin $A = B$ kaikilla $A, B \in S$. Siispä $\subseteq$ on antisymmetrinen.

(iii) Jos $A \subseteq B$ ja $B \subseteq C$, niin $A \subseteq C$ kaikilla $A, B, C \in S$. Siispä $\subseteq$ on transitiivinen.

Koska kaikki kolme ehtoa ovat voimassa, osajoukkorelaatio $\subseteq$ on osittainjärjestys.

**Esimerkki 2.4.** Positiivisten kokonaislukujen $\mathbb{Z}_+$ joukossa jakorelaatio $\mid$ määritellään kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}_+$ seuraavasti:

$$n \mid m \iff m = kn \text{ jollakin } k \in \mathbb{Z}_+.$$

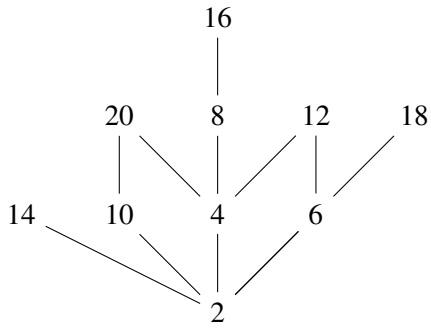
Jakorelaatiolle $\mid$ ovat voimassa seuraavat ehdot:

(i) $a \mid a$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}_+$, joten $\mid$ on refleksiivinen.

(ii) Jos $a \mid b$ ja $b \mid a$, niin $a = b$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}_+$. Siispä $\mid$ on antisymmetrinen.

(iii) Jos $a \mid b$ ja $b \mid c$, niin $a \mid c$ kaikilla $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$. Siispä $\mid$ on transitiivinen.

Koska kaikki kolme ehtoa ovat voimassa, jakorelaatio $\mid$ on osittainjärjestys ja pari $(\mathbb{Z}_+, \mid)$ on osittain järjestetty joukko. Joukon $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ tapauksessa osittain järjestetty joukko $(A, \mid)$ on esitetty Hasse-kaaviolla Kuvassa 2.1. Osittain järjestetty joukko voidaan esittää Hasse-kaaviolla, jossa alkiot on yhdistetty viivalla välittömiin seuraajiinsa [3, Luku 4.3].




***Kuva 2.1.*** *Joukon* $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ *jakojärjestys esitettynä Hasse-kaaviolla.*

## 2.2 Meet ja join

Aloitetaan määrittelemällä osittain järjestetyn joukon pienin ja suurin alkio. Määritelmät 2.5–2.8 ja Esimerkki 2.9 pohjautuvat lähteeseen [3, Luku 4.4].

**Määritelmä 2.5.** Olkoon $(A, \leq)$ osittain järjestetty joukko. Jos on olemassa sellainen alkio $a \in A$, että $a \leq x$ kaikilla $x \in A$, niin alkio $a$ on osittain järjestetyn joukon $(A, \leq)$ *pienin alkio*.

**Määritelmä 2.6.** Olkoon $(A, \leq)$ osittain järjestetty joukko. Jos on olemassa sellainen alkio $b \in A$, että $x \leq b$ kaikilla $x \in A$, niin alkio $b$ on osittain järjestetyn joukon $(A, \leq)$ *suurin alkio*.

Määritelmistä 2.5 ja 2.6 seuraa, että esiintyessään osittain järjestetyn joukon pienin ja suurin alkio ovat yksikäsitteisiä. Pienintä ja suurinta alkiota ei välttämättä ole olemassa jokaisessa osittain järjestetyssä joukossa [3, Luku 4.4]. Merkitään osittain järjestetyn joukon pienintä alkiota symbolilla 0 ja suurinta alkiota symbolilla 1. Määritellään seuraavaksi osittain järjestetyn joukon ala- ja yläraja sekä tarkennetaan näiden määritelmät suurimpaan alarajaan ja pienimpään ylärajaan.

**Määritelmä 2.7.** Olkoon $(A, \leq)$ osittain järjestetty joukko, ja olkoon $B \subseteq A$. Alkio $a \in A$ on joukon $B$ *alaraja*, jos $a \leq x$ kaikilla $x \in B$. Joukon $B$ *suurin alaraja* eli *infimum* (merkitään $\inf B$) on joukon $B$ alarajojen joukon suurin alkio.

**Määritelmä 2.8.** Olkoon $(A, \leq)$ osittain järjestetty joukko, ja olkoon $B \subseteq A$. Alkio $b \in A$ on joukon $B$ *yläraja*, jos $x \leq b$ kaikilla $x \in B$. Joukon $B$ *pienin yläraja* eli *supremum* (merkitään $\sup B$) on joukon $B$ ylärajojen joukon pienin alkio.

**Esimerkki 2.9.** Olkoon $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ järjestetty Kuvan 2.2 Hasse-kaavion mukaisesti. Olkoon lisäksi $B = \{c, d, e, f, g\}$. Joukon $B$ alarajoja ovat alkiot $a$ ja $b$. Näistä kumpikaan ei ole joukon suurin alaraja eli infimum, koska ne eivät ole verrattavissa. Joukon $B$ ylärajoja ovat alkiot $g$ ja $h$, ja koska $g \leq h$, niin $g$ on joukon $B$ pienin yläraja eli $\sup(B) = g$.

Määritellään vielä meet ja join, joita tarvitaan hilan määrittelemiseen. Määritelmät 2.10 ja 2.11 pohjautuvat lähteeseen [3, Luku 4.6].

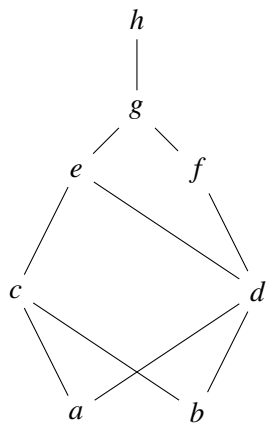
**Määritelmä 2.10.** Olkoon $(A, \leq)$ osittain järjestetty joukko, ja olkoot $a, b \in A$. Alkioparin $\{a, b\} \subseteq A$ suurin alaraja on *meet*, ja sille käytetään merkintää $a \wedge b$ (luetaan "a meet b").

Suoraan Määritelmästä 2.10 seuraa, että $a \wedge b \leq a$ ja $a \wedge b \leq b$ kaikilla $a, b \in A$.

**Määritelmä 2.11.** Olkoon $(A, \leq)$ osittain järjestetty joukko, ja olkoot $a, b \in A$. Alkioparin $\{a, b\} \subseteq A$ pienin yläraja on *join*, ja sille käytetään merkintää $a \vee b$ (luetaan "a join b").

Suoraan Määritelmästä 2.11 seuraa, että $a \leq a \vee b$ ja $b \leq a \vee b$ kaikilla $a, b \in A$.

**Esimerkki 2.12.** Olkoon $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ kuten Esimerkissä 2.9. Otetaan joukosta alkiopari $\{e, f\} \subseteq A$. Hasse-kaaviosta nähdään, että alkioparin meet $e \wedge f = d$ ja join $e \vee f = g$. Vastaavasti voitaisiin ottaa esimerkiksi alkiopari $\{c, d\} \subseteq A$. Tällöin join $c \vee d = e$, mutta alkioparilla ei ole suurinta alarajaa, koska sekä $a$ että $b$ ovat parin alarajoja, mutta ne eivät ole verrattavissa keskenään.




***Kuva 2.2.*** *Osittain järjestetyn joukon $(A, \leq)$ Hasse-kaavio, missä $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.*

# 3. HILAT

Määritellään hila osittain järjestettynä joukkona. Määritelmä 3.1 ja Esimerkit 3.2 ja 3.3 pohjautuvat lähteeseen [3, Luku 4.6].

**Määritelmä 3.1.** Osittain järjestetty joukko $(L, \leq)$ on *hila*, jos jokaisella alkioparilla $\{a, b\} \subseteq L$ on olemassa meet ja join.

Hilalle voidaan käyttää merkintää $(L, \leq)$, $(L, \wedge, \vee)$ tai vain $L$. Havainnollistetaan hilaa seuraavaksi esimerkein.

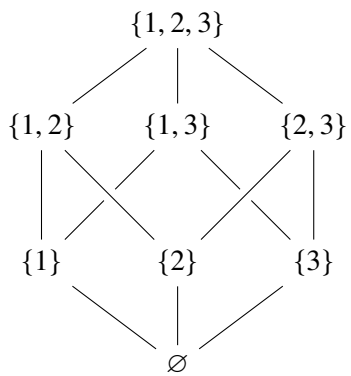
**Esimerkki 3.2.** Olkoon $\mathcal{P}(S)$ joukon $S$ potenssijoukko. Esimerkin 2.3 perusteella tiedetään, että pari $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ on osittain järjestetty joukko. Parin $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ tapauksessa kaikilla $A, B \in S$ join ja meet saadaan seuraavasti:

$$A \vee B = A \cup B,$$
$$A \wedge B = A \cap B.$$

Selvästi $\mathcal{P}(S)$ on suljettu leikkauksen ja yhdisteen suhteen, joten osittain järjestetty joukko $(\mathcal{P}(S)), \subseteq)$ on hila. Joukon $S = \{1, 2, 3\}$ potenssijoukon

$$\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

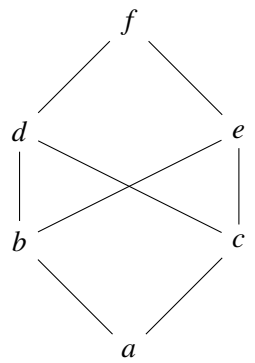
tapauksessa hilan $(\mathcal{P}(S)), \subseteq)$ Hasse-kaavio on esitetty Kuvassa 3.1.




***Kuva 3.1.*** *Osittain järjestetyn joukon $(\mathcal{P}(S)), \subseteq)$ Hasse-kaavio, missä $\mathcal{P}(S)$ on joukon $S = \{1, 2, 3\}$ potenssijoukko.*

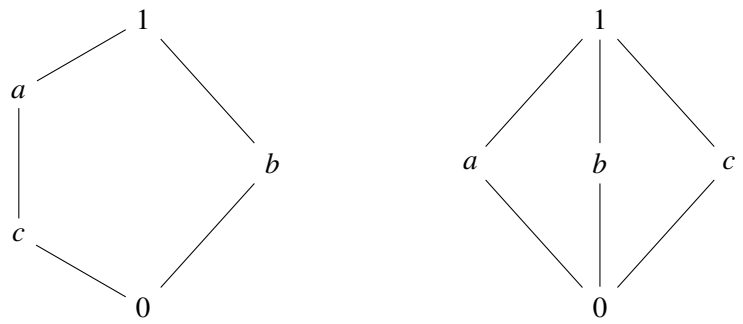
Esimerkin 2.4 osittain järjestetty joukko $(A, |)$ ei ole hila. Tarkastelemalla Kuvan 2.1 Hasse-kaaviota voidaan havaita, että esimerkiksi alkioparilla $\{14, 20\}$ ei ole olemassa pienintä ylärajaa. Koska jokaisella alkioparilla ei ole olemassa pienintä ylärajaa, Määritelmän 3.1 perusteella tämä osittain järjestetty joukko $(A, |)$ ei ole hila.

**Esimerkki 3.3.** Kuvassa 3.2 Hasse-kaaviolla esitetty osittain järjestetty joukko ei ole hila. Alkioparin $\{b, c\}$ ylärajoja ovat alkiot $d$, $e$ ja $f$, mutta joukossa $\{d, e, f\}$ ei ole pienintä alkiota, joten alkioparilla $\{b, c\}$ ei ole pienintä ylärajaa. Alkioparin $\{d, e\}$ alarajoja ovat alkiot $a$, $b$ ja $c$, mutta joukolla $\{a, b, c\}$ ei ole suurinta alkiota, joten alkioparilla $\{d, e\}$ ei ole suurinta alarajaa. Koska tässä osittain järjestetyssä joukossa jokaisella alkioparilla ei ole olemassa pienintä ylärajaa ja suurinta alarajaa, se ei ole hila.




***Kuva 3.2.*** *Osittain järjestetty joukko, joka ei ole hila.*

**Esimerkki 3.4.** Kuvassa 3.3 on esitetty kaksi osittain järjestettyä joukkoa, jotka ovat hiloja. Kuvassa 3.3(a) on esitetty hila $\mathbf{N}_5$ eli *viisikulmio* ja Kuvassa 3.3(b) on esitetty hila $\mathbf{M}_6$ eli *timantti*.




***(a)*** *Hila* $\mathbf{N}_5$ *eli viisikulmio.* ***(b)*** *Hila* $\mathbf{M}_6$ *eli timantti.*

***Kuva 3.3.*** *Kaksi osittain järjestettyä joukkoa, jotka ovat hiloja.*

Seuraavaksi Lauseissa 3.5–3.7 esitellään tämän työn kannalta hyödyllisiä hilojen ominaisuuksia.

**Lause 3.5** ([3, Theorem 4.7.2.])**.** *Hilassa* $(L, \wedge, \vee)$ *ovat voimassa seuraavat ehdot kaikilla* $a, b \in L$*:*

*(i)* $a \leq b \iff a \wedge b = a$,

*(ii)* $a \leq b \iff a \vee b = b$.

*Todistus.* Todistetaan kohta (i). Oletetaan, että $a \leq b$. Tällöin $a$ on joukon $\{a, b\}$ alaraja. Koska alkio $a \wedge b$ on joukon $\{a, b\}$ suurin alaraja, niin $a \leq a \wedge b$. Kuitenkin Määritelmän 2.10 nojalla $a \wedge b \leq a$, joten antisymmetrisyyden nojalla $a \wedge b = a$. Oletetaan seuraavaksi, että $a \wedge b = a$. Tällöin Määritelmän 2.10 nojalla $a = a \wedge b \leq b$. Kohdan (ii) todistus menee vastaavasti. □

Lauseessa 3.6 esitetään hiloille voimassa oleva duaalisuusperiaate, jota hyödynnetään myöhemmin todistuksissa.

**Lause 3.6** ([3, Definition 4.7.1.] Duaalisuusperiaate)**.** *Jos jokin lause on voimassa hilassa* $(L, \wedge, \vee)$*, niin lause on voimassa myös, kun symbolit* $\wedge$ *käännetään symboleiksi* $\vee$ *ja vastaavasti symbolit* $\vee$ *käännetään symboleiksi* $\wedge$ *kaikkialla lauseessa.*

Algebralllisesti hila määritellään kolmikkona $(L, \wedge, \vee)$, joka toteuttaa kaikki Lauseessa 3.7 esitetyt lait.

**Lause 3.7** ([3, Theorem 4.7.1.])**.** *Hilassa* $(L, \wedge, \vee)$ *ovat voimassa seuraavat lait kaikilla* $a, b, c \in L$*:*

*(i) vaihdannaisuuslait:* $a \wedge b = b \wedge a$ *ja* $a \vee b = b \vee a$*,*

*(ii) liitännäisyyslait:* $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ *ja* $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$*,*

*(iii) absorptiolait:* $a \wedge (a \vee b) = a$ *ja* $a \vee (a \wedge b) = a$*,*

*(iv) idempotenttisuuslait:* $a \wedge a = a$ *ja* $a \vee a = a$*.*

*Todistus.* Duaalisuusperiaatteen nojalla riittää todistaa toinen tulos kussakin kohdassa.

(i) Määritelmän 2.10 nojalla $a \wedge b = \inf\{a, b\} = \inf\{b, a\} = b \wedge a$.

(ii) Edelleen Määritelmän 2.10 nojalla

$$(a \wedge b) \wedge c = \inf\{a \wedge b, c\} = \inf\{\inf\{a, b\}, c\}.$$

Määritelmän 2.7 nojalla tiedetään, että

$$\inf\{\inf\{a, b\}, c\} \leq c$$
$$\text{ja}$$
$$\inf\{\inf\{a, b\}, c\} \leq \inf\{a, b\}.$$

Lisäksi tiedetään, että $\inf\{a, b\} \leq a$ ja $\inf\{a, b\} \leq b$. Tällöin saadaan

$$\inf\{\inf\{a, b\}, c\} \leq a, \inf\{\inf\{a, b\}, c\} \leq b \text{ ja } \inf\{\inf\{a, b\}, c\} \leq c,$$

mistä seuraa, että $\inf\{\inf\{a, b\}, c\} \leq \inf\{a, b, c\}$. Toisaalta

$$\inf\{a, b, c\} \leq a \text{ ja } \inf\{a, b, c\} \leq b,$$

joten $\inf\{a, b, c\} \leq \inf\{a, b\}$. Koska lisäksi $\inf\{a, b, c\} \leq c$, niin saadaan $\inf\{a, b, c\} \leq \inf\{\inf\{a, b\}, c\}$. Näin ollen antisymmetrisyyden nojalla $\inf\{\inf\{a, b\}, c\} = \inf\{a, b, c\}$. Samoin voitaisiin osoittaa, että $a \wedge (b \wedge c) = \inf\{a, b, c\}$, joten saadaan $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(iii) Koska $a \leq a \vee b$, niin Lauseen 3.5 nojalla $a \wedge (a \vee b) = a$.

(iv) Määritelmän 2.10 nojalla $a \wedge a = \inf\{a, a\} = \inf\{a\} = a$.

□

**Huomautus 3.8.** Lauseista 3.5 ja 3.7 seuraa, että osittain järjestetyssä joukossa $(A, \leq)$ ovat voimassa seuraavat ehdot:

(i) $a \wedge c \leq b \wedge c$, kun $a \leq b$,

(ii) $a \vee c \leq b \vee c$, kun $a \leq b$

kaikilla $a, b, c \in A$. Tätä ominaisuutta kutsutaan *monotonisuudeksi*.

*Todistus.* Todistetaan kohta (i). Oletetaan, että $a \leq b$. Tällöin Lauseen 3.5 kohdan (i) nojalla $a \wedge b = a$. Tarkoituksena on osoittaa, että nyt $a \wedge c \leq b \wedge c$, joka Lauseen 3.5 kohdan (i) nojalla vastaa yhtälöä $(a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = a \wedge c$. Lauseen 3.7 kohtien (i), (ii) ja (iv) nojalla voidaan kirjoittaa

$$(a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge (c \wedge c) = a \wedge c.$$

Kohdan (ii) todistus menee vastaavasti. □

Lauseissa 3.9 ja 3.10 esitellään vielä kaksi tämän työn kannalta oleellista tulosta hiloille.

**Lause 3.9** ([3, Theorem 4.7.6.])**.** *Jokaisessa hilassa* $(L, \wedge, \vee)$ *on voimassa distributiivisuusepäyhtälö:*

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{3.1}$$

*kaikilla* $a, b, c \in L$.

*Todistus.* Koska $a \geq a \wedge b$ ja $a \geq a \wedge c$, niin $a$ on joukon $\{a \wedge b, a \wedge c\}$ yläraja. Tästä seuraa, että

$$a \geq \sup\{a \wedge b, a \wedge c\} = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Koska $b \vee c \geq b \geq a \wedge b$ ja $b \vee c \geq c \geq a \wedge c$, niin samoin kuin äsken saadaan

$$b \vee c \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Nyt alkio $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ on joukon $\{a, b \vee c\}$ alaraja. Näin ollen

$$a \wedge (b \vee c) = \inf\{a, b \vee c\} \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

□

**Lause 3.10** ([3, Theorem 4.7.7.]). *Jokaisessa hilassa* $(L, \wedge, \vee)$ *on voimassa modulaarisuusepäyhtälö:*

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c \tag{3.2}$$

*kaikilla* $a, b, c \in L$*, kun* $a \geq c$*.*

*Todistus.* Oletetaan, että $a \geq c$, mistä Lauseen 3.5 nojalla seuraa $a \wedge c = c$. Koska kyseessä on hila, distributiivisuus epäyhtälö (3.1) on voimassa ja se sievenee muotoon

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c.$$

□

## 3.1 Alihila

Määritelmä 3.11 ja Esimerkki 3.12 pohjautuvat lähteeseen [3, Luku 4.10].

**Määritelmä 3.11.** Olkoon $(L, \wedge, \vee)$ hila, ja olkoon $M$ joukon $L$ epätyhjä osajoukko. Kolmikko $(M, \wedge, \vee)$ on hilan $(L, \wedge, \vee)$ *alihila*, jos $a \wedge b, a \vee b \in M$ kaikilla $a, b \in M$.

**Esimerkki 3.12.** Olkoon $S = \{1, 2, 3\}$ kuten Esimerkissä 3.2. Osajoukko

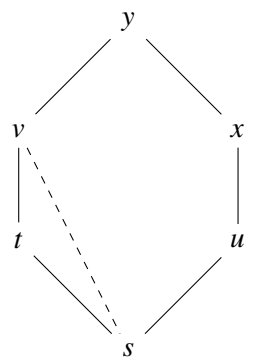
$$M = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\} \subseteq \mathcal{P}(S)$$

on hilan $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ alihila, koska joukko $M$ on suljettu laskutoimistusten $\cap$ ja $\cup$ suhteen. Puolestaan osajoukko

$$N = \{\varnothing, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\} \subseteq \mathcal{P}(S)$$

ei ole hilan $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ alihila, koska $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \notin N$.

**Esimerkki 3.13.** Olkoon $L = \{s, t, u, v, x, y\}$ järjestetty Kuvan 3.4 Hasse-kaavion yhtenäisten viivojen mukaisesti. Olkoon $M = \{s, u, v, x, y\} \subseteq L$. Katkoviiva Hasse-kaaviossa kuvastaa relaatiota $s \leq v$. Hasse-kaaviosta nähdään, että hila $(M, \wedge, \vee)$ on hilan $(L, \wedge, \vee)$ alihila, koska joukko $M$ on suljettu laskutoimitusten $\wedge$ ja $\vee$ suhteen.




***Kuva 3.4.*** *Hila* $(L, \wedge, \vee)$ *ja sen alihila* $(M, \wedge, \vee)$*, missä* $L = \{s, t, u, v, x, y\}$ *ja* $M = \{s, u, v, x, y\}$*.*

## 3.2 Hilaisomorfismi

Hilahomomorfismi ja hilaisomorfismi ovat hyödyllisiä käsitteitä, kun verrataan kahta hilaa keskenään. Määritelmä 3.14 pohjautuu lähteeseen [3, Luku 4.12].

**Määritelmä 3.14.** Olkoot $(L, \wedge, \vee)$ ja $(S, \wedge', \vee')$ hiloja. Kuvaus $f : L \to S$ on *hilahomomorfismi*, jos

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$$
$$\text{ja}$$
$$f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$$

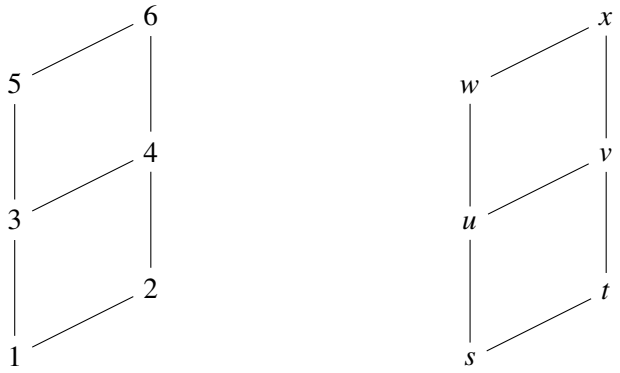
kaikilla $a, b \in L$. Jos kuvaus $f : L \to S$ on lisäksi bijektio, kyseessä on *hilaisomorfismi*.

Jos hilat $(L, \wedge, \vee)$ ja $(S, \wedge', \vee')$ ovat isomorfisia ja kuvaus $f : L \to S$ on hilaisomorfismi, niin

$$a \leq b \iff f(a) \leq' f(b),$$

kaikilla $a, b \in L$, ja missä $\leq$ ja $\leq'$ ovat hilojen osittainjärjestykset vastaavassa järjestyksessä. Tästä seuraa, että keskenään isomorfiset hilat voidaan esittää samalla Hasse-kaaviolla vaihtamalla alkioiden nimet. [3, Luku 4.12]

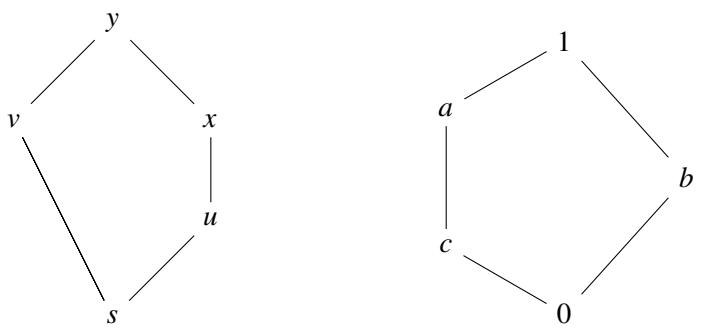
**Esimerkki 3.15.** Kuvassa 3.5 on esitetty kaksi hilaa, jotka ovat keskenään isomorfisia. Nyt $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $S = \{s, t, u, v, w, x\}$. Kuvaus $f : L \to S$ on bijektio, kun $f(1) = s$, $f(2) = t$, $f(3) = u$, $f(4) = v$, $f(5) = w$ ja $f(6) = x$.




***(a)*** *Hila L* ***(b)*** *Hila S*

***Kuva 3.5.*** *Isomorfiset hilat L ja S.*

**Esimerkki 3.16.** Esimerkin 3.13 hila $(M, \wedge, \vee)$ on isomorfinen Esimerkin 3.4 hilan $\mathbf{N}_5$ eli viisikulmion kanssa. Näiden hilojen Hasse-kaaviot on esitetty uudestaan vierekkäin Kuvassa 3.6. Tällöin kuvaus $f : M \to \mathbf{N}_5$ on bijektio, kun $f(s) = 0$, $f(u) = c$, $f(v) = b$, $f(x) = a$ ja $f(y) = 1$.




***(a)*** *Hila* $(M, \wedge, \vee)$ ***(b)*** *Hila* $\mathbf{N}_5$

***Kuva 3.6.*** *Isomorfiset hilat* $(M, \wedge, \vee)$ *ja* $\mathbf{N}_5$.

# 4. MODULAARISET HILAT

Luvussa 3 esiteltiin modulaarisuusepäyhtälö (3.2), joka on voimassa kaikille hiloille. Otetaan nyt käsittelyyn sellaiset hilat, joille on voimassa modulaarisuusepäyhtälön yhtäsuuruus. Määritelmä 4.1 pohjautuu lähteeseen [2, s. 81].

**Määritelmä 4.1.** Hila $L$ on *modulaarinen*, jos siinä on voimassa *modulaarisuuslaki*:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c \tag{4.1}$$

kaikilla $a, b, c \in L$, kun $a \geq c$.

Duaalisuusperiaatteen (Lause 3.6) nojalla modulaariselle hilalle on voimassa myös $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ kaikilla $a, b, c \in L$, kun $a \leq c$.

**Esimerkki 4.2.** Hilassa $(\mathcal{P}(S), \cap, \cup)$ on voimassa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [2, s. 81]. Jos lisäksi $C \subseteq A$, niin $A \cap C = C$ ja tällöin yhtälön oikeapuoli sievenee muotoon $(A \cap B) \cup C$. Näin ollen havaitaan, että hilassa on voimassa seuraava yhtälö:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C,$$

kun $C \subseteq A$, joka vastaa modulaarisuuslakia (4.1). Näin ollen Määritelmän 4.1 nojalla hila $(\mathcal{P}(S), \cap, \cup)$ on modulaarinen.

**Esimerkki 4.3.** Tyypillinen esimerkki ei-modulaarisesta hilasta on Kuvassa 3.3(a) esitetty viisikulmio $\mathbf{N}_5$ [1, s. 109]. Todistetaan Määritelmän 4.1 avulla, että $\mathbf{N}_5$ ei ole modulaarinen hila. Tarkastellaan alkioita $a, b, c \in \mathbf{N}_5$, jolloin $a \geq c$. Tällöin saadaan

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a \neq c = 0 \vee c = (a \wedge b) \vee c.$$

Näin ollen yhtälö (4.1) ei ole voimassa ja viisikulmio ei ole modulaarinen hila.

**Lause 4.4** ([2, s. 82])**.** *Hila $L$ on modulaarinen, jos ja vain jos*

$$a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{4.2}$$

*kaikilla $a, b, c \in L$.*

*Todistus.* Oletetaan, että $L$ on modulaarinen. Koska tiedetään, että $a \geq a \wedge c$, niin modulaarisuuslailla saadaan

$$a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Oletetaan nyt, että hilassa $L$ on voimassa yhtälö (4.2), ja että $a, b, c \in L$ siten, että $a \geq c$. Tällöin $a \wedge c = c$ ja yhtälö (4.2) sievenee muotoon

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c,$$

mikä vastaa modulaarisuuslakia (4.1). Koska modulaarisuuslaki on voimassa, Määritelmän 4.1 nojalla hila $L$ on modulaarinen. □

**Lause 4.5** ([1, Theorem 347. (ii)])**.** *Modulaariselle hilalle L on voimassa*

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge ((b \wedge (a \vee c)) \vee c)$$

*kaikilla* $a, b, c \in L$.

*Todistus.* Aloitetaan yhtälön oikealta puolelta. Tiedetään, että $a \vee c \geq c$, jolloin hyödyntämällä modulaarisuuslakia (4.1) sekä liitännäisyys- ja absorptiolakeja saadaan

$$\begin{aligned} a \wedge ((b \wedge (a \vee c)) \vee c) &= a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \\ &= (a \wedge (a \vee c)) \wedge (b \vee c) \\ &= a \wedge (b \vee c). \end{aligned}$$

□

**Lause 4.6** ([3, Theorem 4.16.4.])**.** *Modulaarisen hilan alihila on modulaarinen.*

*Todistus.* Oletetaan, että $(S, \wedge, \vee)$ on modulaarisen hilan $(L, \wedge, \vee)$ alihila, ja että on olemassa sellaiset alkiot $a, b, c \in S$, että $a \geq c$. Nyt, koska $S \subseteq L$, niin $a, b, c \in L$. Lisäksi, koska hila $L$ on modulaarinen niin $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$. Tiedetään, että joukko $S$ on suljettu operaatioiden $\wedge$ ja $\vee$ suhteen, joten myös hilassa $(S, \wedge, \vee)$ on voimassa $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$. Näin ollen hila $(S, \wedge, \vee)$ on modulaarinen eli modulaarisen hilan alihila on modulaarinen. □

**Lause 4.7** ([2, Theorem 4.7 1)])**.** *Hila L on modulaarinen, jos ja vain jos sillä ei ole alihilaa, joka on isomorfinen hilan* $\mathbf{N}_5$ *kanssa.*

Osittain järjestetyssä joukossa $(A, \leq)$ vertailemattomuusrelaatio $\parallel$ määritellään seuraavasti:

$$x \parallel y \iff x \not\leq y \text{ ja } x \not\geq y,$$

missä $x, y \in A$.

*Todistus.* Esimerkissä 4.3 todistettiin, että hila $\mathbf{N}_5$ ei ole modulaarinen, joten mikään hila, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{N}_5$ kanssa ei ole modulaarinen. Lauseen 4.6 nojalla modulaarisen hilan alihila on aina modulaarinen. Siispä hila, jolla on alihila, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{N}_5$ kanssa, ei voi olla modulaarinen.

Oletetaan nyt, että hila $L$ ei ole modulaarinen. Tällöin on olemassa sellaiset alkiot $a, b, c \in L$, joille on voimassa modulaarisuusepäyhtälö (3.2) ilman yhtäsuuruutta:

$$a \wedge (b \vee c) > (a \wedge b) \vee c,$$

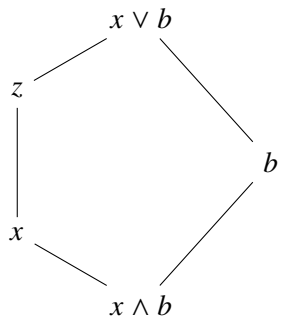
kun $a \geq c$. Merkitään $x = a \wedge (b \vee c)$ ja $z = (a \wedge b) \vee c$. Osoitetaan, että hilalla $L$ on alihila $S = \{x, b, z, x \wedge b, x \vee b\}$, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{N}_5$ kanssa. Jotta näin on, seuraavien ehtojen on oltava voimassa:

(i) $z \vee b = x \vee b$,

(ii) $z \wedge b = x \wedge b$,

(iii) $x \parallel b$ ja $z \parallel b$.

Jos ehdot (i)–(iii) ovat voimassa, alkiot $x, b, z, x \wedge b, x \vee b$ muodostavat Kuvan 4.1 mukaisen hilan.




***Kuva 4.1.*** *Hila S, missä* $S = \{x, b, z, x \wedge b, x \vee b\}$.

Alkioiden $z$ ja $x$ määritelmien ja Lauseen 3.7 nojalla voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
z \vee b &= [(a \wedge b) \vee c] \vee b \\
&= (a \wedge b) \vee (c \vee b) && \text{(Lause 3.7 (ii))} \\
&= (a \wedge b) \vee (b \vee c) && \text{(Lause 3.7 (i))} \\
&= [(a \wedge b) \vee b] \vee c && \text{(Lause 3.7 (ii))} \\
&= b \vee c && \text{(Lause 3.7 (iii))} \\
&\geq a \wedge (b \vee c) = x. && \text{(Määritelmä 2.10)}
\end{aligned}$$

Näin ollen monotonisuuden nojalla saadaan

$$z \vee b = z \vee (b \vee b) = (z \vee b) \vee b \geq x \vee b.$$

Alkioiden $x$ ja $z$ määritelmien sekä liitännäisyys- ja absorptiolakien avulla voidaan kirjoittaa myös

$$x \wedge b = [a \wedge (b \vee c)] \wedge b = a \wedge [(b \vee c) \wedge b] = a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee c = z.$$

Näin ollen monotonisuuden nojalla saadaan

$$x \wedge b = x \wedge (b \wedge b) = (x \wedge b) \wedge b \leq z \wedge b. \tag{4.3}$$

Toisaalta kuitenkin on voimassa $x > z$, jolloin monotonisuuden nojalla $z \vee b \leq x \vee b$ ja $x \wedge b \geq z \wedge b$. Näin ollen antisymmetrisyyden nojalla $z \vee b = x \vee b$ ja $x \wedge b = z \wedge b$. Osoitetaan vielä, että $x \parallel b$ ja $z \parallel b$. Tarkastellaan, mitä seuraa, jos kyseiset alkiot ovat verrattavissa:

- Jos $b \leq x$, niin $b \leq x = a \wedge (b \vee c) \leq a$. Koska lisäksi $c \leq a$, niin $a \geq b \vee c$, jolloin $x = a \wedge (b \vee c) = b \vee c$ ja $z = (a \wedge b) \vee c = b \vee c$. Näin ollen $x = z$, mikä on ristiriita.
- Jos $z \leq b$, niin $c \leq (a \wedge b) \vee c = z \leq b$. Koska lisäksi $c \leq a$, niin $c \leq a \wedge b$, jolloin $x = a \wedge (b \vee c) = a \wedge b$ ja $z = (a \wedge b) \vee c = a \wedge b$. Näin ollen $x = z$, mikä on ristiriita.
- Jos $x < b$, niin $z < x < b$, mikä on epätosi toisen kohdan perusteella.
- Jos $b < z$, niin $b < z < x$, mikä on epätosi ensimmäisen kohdan perusteella.

Koska kaikki ehdot (i)–(iii) ovat voimassa, niin alihila $S$ on isomorfinen hilan $\mathbf{N}_5$ kanssa. □

**Esimerkki 4.8.** Lauseen 4.7 nojalla Esimerkin 3.13 hila $(L, \wedge, \vee)$ ei ole modulaarinen, koska sillä on alihila $(M, \wedge, \vee)$, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{N}_5$ kanssa.

# 5. DISTRIBUTIIVISET HILAT

Luvussa 3 esiteltiin distributiivisuusepäyhtälö (3.1), joka on voimassa kaikille hiloille. Otetaan nyt käsittelyyn sellaiset hilat, joille on voimassa distributiivisuusepäyhtälön yhtäsuuruus. Määritelmä 5.1 pohjautuu lähteeseen [3, Luku 4.15] ja Esimerkki 5.2 lähteeseen [2, s. 81].

**Määritelmä 5.1.** Hila $(L, \wedge, \vee)$ on *distributiivinen*, jos siinä on voimassa *distributiivisuuslaki*:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{5.1}$$

kaikilla $a, b, c \in L$.

Duaalisuusperiaatten (Lause 3.6) nojalla distributiiviselle hilalle $L$ on voimassa myös $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ kaikilla $a, b, c \in L$.

**Esimerkki 5.2.** Kuten Esimerkissä 4.2 havaittiin, kaikilla $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$ leikkaukselle ja yhdisteelle on voimassa seuraava yhtälö:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

joka vastaa distributiivisuuslakia. Näin ollen Määritelmän 5.1 nojalla hila $(\mathcal{P}(S), \cap, \cup)$ on distributiivinen.

**Esimerkki 5.3.** Kaksi tyypillistä ei-distributiivista hilaa ovat viisikulmio $\mathbf{N}_5$ ja timantti $\mathbf{M}_6$ [1, s. 109]. Näiden Hasse-kaaviot on esitetty Kuvissa 3.3(a) ja 3.3(b). Todistetaan Määritelmän 5.1 avulla, että nämä eivät ole distributiivisia hiloja. Tarkastellaan ensin viisikulmiota $\mathbf{N}_5$ ja tarkastellaan alkioita $a, b, c \in \mathbf{N}_5$. Aloitetaan yhtälön (5.1) vasemmasta puolesta:

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a \neq c = 0 \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Näin ollen yhtälö (5.1) ei ole voimassa ja viisikulmio ei siten ole distributiivinen hila. Tarkastellaan seuraavaksi timanttia $\mathbf{M}_6$ ja alkioita $a, b, c \in \mathbf{M}_6$. Tällöin saadaan:

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a \neq 0 = 0 \vee 0 = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Näin ollen yhtälö (5.1) ei ole voimassa ja timantti ei siten ole distributiivinen hila.

Lause 5.4 perustuu lähteeseen [3, s. 106].

**Lause 5.4.** *Distributiivisen hilan alihila on distributiivinen.*

*Todistus.* Oletetaan, että $(S, \wedge, \vee)$ on distributiivisen hilan $(L, \wedge, \vee)$ alihila, ja että $a, b, c \in S$. Koska $S \subseteq L$, niin $a, b, c \in L$. Lisäksi, koska hila $L$ on distributiivinen, niin $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Tiedetään, että joukko $S$ on suljettu operaatioiden $\wedge$ ja $\vee$ suhteen, joten myös hilassa $(S, \wedge, \vee)$ on voimassa $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Näin ollen hila $S$ on distributiivinen eli distributiivisen hilan alihila on distributiivinen. □

**Lause 5.5** ([3, Theorem 4.16.1.])**.** *Jokainen distributiivinen hila on modulaarinen.*

*Todistus.* Oletetaan, että $(L, \wedge, \vee)$ on distributiivinen hila, jolloin kaikilla $a, b, c \in L$ on voimassa distributiivisuusyhtälö (5.1). Oletetaan, että $a \geq c$, jolloin $a \wedge c = c$ ja yhtälö (5.1) sievenee muotoon

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c,$$

mikä vastaa modulaarisuusyhtälöä (4.1). Näin ollen jokaiselle distributiiviselle hilalle on voimassa modulaarisuusyhtälö, joten jokainen distributiivinen hila on modulaarinen. □

Lauseen 5.5 mukaan jokainen distributiivinen hila on modulaarinen. Jokainen modulaarinen hila ei kuitenkaan ole distributiivinen. Lauseessa 5.6 esitellään ehto sille, milloin modulaarinen hila on distributiivinen.

**Lause 5.6** ([1, Theorem 102. (ii)])**.** *Modulaarinen hila L on distributiivinen, jos ja vain jos sillä ei ole alihilaa, joka on isomorfinen hilan* $\mathbf{M}_6$ *kanssa.*

*Todistus.* Todistus pohjautuu lähteeseen [2, Theorem 4.7 2)]. Jos modulaarisella hilalla $L$ on alihila, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{M}_6$ kanssa, se ei voi Lauseen 5.4 nojalla olla distributiivinen, koska kyseinen hila ei ole distributiivinen. Oletetaan nyt, että hila $L$ on modulaarinen, mutta ei distributiivinen. Tällöin hilassa $L$ on voimassa modulaarisuusyhtälö (4.1) ja joillakin $a, b, c \in L$ on voimassa distributiivisuusepäyhtälö ilman yhtäsuuruutta:

$$a \wedge (b \vee c) > (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Merkitään $x = a \wedge (b \vee c)$ ja $z = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Käytetään tätä epäyhtälöä poissulkemaan tiettyjä suhteita alkioiden $a, b$ ja $c$ välillä. Eritoten seuraavat suhteet pitää olla voimassa:

(i) Alkioiden $a, b, c$ täytyy olla eri suuria,

(ii) $a \not\leq c$ ja $a \not\leq b$,

(iii) Molemmat $a > c$ ja $a > b$ eivät voi olla voimassa,

(iv) $b \parallel c$,

missä relaatio $\parallel$ on määritelty samoin kuin Lauseen 4.7 todistuksessa. Jos $a = b$, niin absorptiolain nojalla $x = a \wedge (a \vee c) = a$ ja idempotenttisuus- ja absorptiolain nojalla $z = (a \wedge a) \vee (a \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a$, jolloin $x = z$, mikä on epätosi. Samoin voidaan osoittaa, että kaikki alkiot $a, b, c$ ovat eri suuria.

Jos $a \leq c$, niin Lauseen 3.5 ja absorptiolain nojalla $z = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee a = a$. Lisäksi Määritelmän 2.10 nojalla $x = a \wedge (b \vee c) \leq a = z$. Tiedetään kuitenkin, että $x > z$, joten $a \nleq c$. Samoin voidaan osoittaa, että $a \nleq b$.

Jos $a > c$ ja $a > b$, niin Lauseen 3.5 nojalla $z = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c$. Määritelmän 2.10 nojalla tiedetään myös, että $x = a \wedge (b \vee c) \leq b \vee c = z$. Tiedetään kuitenkin, että $x > z$, joten molemmat $a > c$ ja $a > b$ eivät voi olla voimassa.

Jos $b \leq c$, niin Lauseen 3.5 ja Määritelmän 2.11 nojalla $x = a \wedge (b \vee c) = a \wedge c \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = z$. Kuitenkin tiedetään, että $x > z$. Joten $b \nleq c$. Jos $b > c$, niin Lauseen 3.5 ja Määritelmän 2.11 nojalla $x = a \wedge (b \vee c) = a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = z$. Tiedetään kuitenkin, että $x > z$. Näin ollen $b \parallel c$.

Alkioiden $a, b, c$ välisille suhteille on olemassa vielä kaksi mahdollisuutta:

(v) $a > c, a \parallel b, b \parallel c$ (tai symmetrisesti $a \parallel c, a > b, b \parallel c$),

(vi) $a \parallel c, a \parallel b, b \parallel c$.

Kohdan (v) tapauksessa olisi voimassa $a > c$, jolloin hilan $L$ modulaarisuudesta seuraa

$$x = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = z,$$

mikä on epätosi, koska $x > z$. Näin ollen kohta (v) ei ole voimassa, joten kohdan (vi) on oltava voimassa.

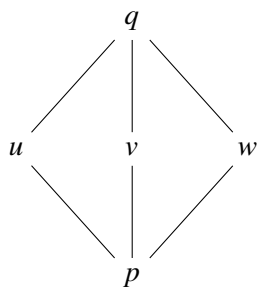
Määritellään seuraavat alkiot:

$$\begin{aligned} p &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \\ q &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c), \\ u &= (a \wedge q) \vee p, \\ v &= (b \wedge q) \vee p, \\ w &= (c \wedge q) \vee p. \end{aligned}$$

Täytyy osoittaa, että nämä alkiot muodostavat hilan $L$ alihilan $S$, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{M}_6$ kanssa. Jotta näin on, seuraavien ehtojen täytyy olla voimassa:

1. kaikki alkiot $p, q, u, v, w$ ovat eri suuria,
2. alkio $p$ on joukon $S$ pienin alkio ja $q$ on joukon $S$ suurin alkio,
3. $p = u \wedge v = u \wedge w = v \wedge w$,
4. $q = u \vee v = u \vee w = v \vee w$,
5. $u \parallel v, u \parallel w, v \parallel w$.

Jos nämä ehdot ovat voimassa, alkiot $p, q, u, v$ ja $w$ muodostavat Kuvan 5.1 mukaisen hilan.




***Kuva 5.1.*** *Hila S, missä* $S = \{p, q, u, v, w\}$.

Todistuksessa hyödynnetään Lauseen 3.7 kohtia (i)–(iv). Alkioiden $p$ ja $q$ määritelmistä nähdään, että $p \leq q$. Osoitetaan seuraavaksi, että $p \neq q$. Alkioiden $q$ ja $x$ määritelmien avulla voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
a \wedge q &= a \wedge [(a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)] \\
&= [a \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c)] \wedge (b \vee c) && \text{(Lause 3.7 (ii))} \\
&= [a \wedge (a \vee c)] \wedge (b \vee c) && \text{(Lause 3.7 (iii))} \\
&= a \wedge (b \vee c) && \text{(Lause 3.7 (iii))} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Toisaalta alkion $p$ määritelmän avulla voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
a \wedge p &= a \wedge [(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\
&= a \wedge [[(b \wedge c) \vee (a \wedge b)] \vee (a \wedge c)] && \text{(Lause 3.7 (i), (ii))} \\
&= [a \wedge [(b \wedge c) \vee (a \wedge b)]] \vee (a \wedge c) && \text{(modulaarisuuslaki, } a \geq a \wedge c\text{)} \\
&= [[a \wedge (b \wedge c)] \vee (a \wedge b)] \vee (a \wedge c) && \text{(modulaarisuuslaki, } a \geq a \wedge b\text{)} \\
&= [a \wedge (b \wedge c)] \vee [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]. && \text{(Lause 3.7 (ii))}
\end{aligned}$$

Koska $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \geq (a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = [(a \wedge b) \wedge a] \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, niin Lauseen 3.5 nojalla

$$a \wedge p = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = z.$$

Koska $x > z$, niin $a \wedge q > a \wedge p$, josta seuraa $p < q$. Osoitetaan nyt, että $u \wedge v = p$. Alkioiden $u$ ja $v$ määritelmistä saadaan

$$u \wedge v = [(a \wedge q) \vee p] \wedge [(b \wedge q) \vee p]. \tag{5.2}$$

Hyödyntämällä modulaarisuuslakia (4.1) saadaan yhtälö (5.2) muotoon

$$\begin{aligned}
u \wedge v &= [[(a \wedge q) \vee p] \wedge (b \wedge q)] \vee p && \text{(modulaarisuuslaki, } (a \wedge q) \vee p \geq p) \\
&= [[q \wedge (a \vee p)] \wedge (b \wedge q)] \vee p && \text{(modulaarisuuslaki, } q > p) \\
&= [[q \wedge (b \wedge q)] \wedge (a \vee p)] \vee p && \text{(Lause 3.7 (ii), (i))} \\
&= [(b \wedge q) \wedge (a \vee p)] \vee p && \text{(Lause 3.7 (i), (ii), (iv), (i))} \\
&= [b \wedge [q \wedge (a \vee p)]] \vee p && \text{(Lause 3.7 (ii))} \\
&= [b \wedge [(q \wedge a) \vee p]] \vee p && \text{(modulaarisuuslaki, } q > p) \\
&= [[p \vee (q \wedge a)] \wedge b] \vee p && \text{(Lause 3.7 (i))} \\
&= [p \vee (q \wedge a)] \wedge (b \vee p) && \text{(modulaarisuuslaki, } p \vee (q \wedge a) \geq p) \\
&= [(b \vee p) \wedge (a \wedge q)] \vee p, && \text{(modulaarisuuslaki, } b \vee p \geq p) \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

missä nyt

$$\begin{aligned}
b \vee p &= b \vee [(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\
&= b \vee [(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c)] && \text{(Lause 3.7 (i))} \\
&= [b \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \vee (a \wedge c) && \text{(Lause 3.7 (ii))} \\
&= [b \vee (b \wedge c)] \vee (a \wedge c) && \text{(Lause 3.7 (iii))} \\
&= b \vee (a \wedge c) && \text{(Lause 3.7 (iii))} \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

ja kuten aiemmin saatiin $a \wedge q = a \wedge (b \vee c)$. Sijoittamalla tämä ja (5.4) yhtälöön (5.3) saadaan

$$\begin{aligned}
u \wedge v &= [[b \vee (a \wedge c)] \wedge [a \wedge (b \vee c)]] \vee p \\
&= [[a \wedge (b \vee c)] \wedge [(a \wedge c) \vee b]] \vee p && \text{(Lause 3.7 (i))} \\
&= [a \wedge [(b \vee c) \wedge [(a \wedge c) \vee b]]] \vee p. && \text{(Lause 3.7 (ii))}
\end{aligned}$$

Koska $a \wedge c \leq c$, niin monotonisuuden nojalla $(a \wedge c) \vee b \leq b \vee c$, jolloin Lauseen 3.5 nojalla $(b \vee c) \wedge [(a \wedge c) \vee b] = (a \wedge c) \vee b$. Tällöin saadaan

$$u \wedge v = [a \wedge [(a \wedge c) \vee b]] \vee p.$$

Hyödyntämällä ensin vaihdannaisuuslakia ja sitten modulaarisuuslakia, kun $a \geq a \wedge c$, ja lopulta alkion $p$ määritelmää, saadaan

$$\begin{aligned}
u \wedge v &= [a \wedge [b \vee (a \wedge c)]] \vee p \\
&= [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \vee p \\
&= [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \vee [(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)].
\end{aligned}$$

Määritelmän 2.11 nojalla $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$, jolloin Lauseen 3.5

nojalla

$$u \wedge v = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = p.$$

Samoin voitaisiin osoittaa, että $u \wedge w = v \wedge w = p$ sekä, että $u \vee v = u \vee w = v \vee w = q$.

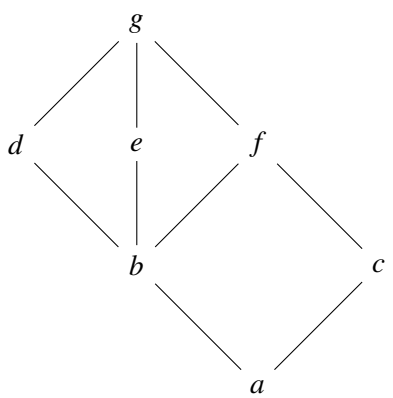
Lisäksi piti osoittaa, että alkiot $p, q, u, v$ ja $w$ ovat eri suuria. Jos $u = v$, niin $p = u \wedge v = u \vee v = q$, mikä on epätosi, koska aiemmin näytettiin, että $p < q$. Samoin voidaan havaita, että $u \neq w$ ja $v \neq w$, joten alkiot $u, v$ ja $w$ ovat eri suuria. Jos $u = q$, niin $u = u \vee v$ ja $u = u \vee w$, joista seuraa, että $v \leq u$ ja $w \leq u$. Näistä puolestaan seuraa, että $v = v \wedge u = w \wedge u = w$, mikä on epätosi. Samoin voidaan näyttää, että $v \neq q$ ja $w \neq q$. Jos taas $u = p$, niin $u = u \wedge v$ ja $u = u \wedge w$, joista seuraa, että $v \geq u$ ja $w \geq u$. Näistä puolestaan seuraa, että $v = v \vee u = w \vee u = w$, mikä on epätosi. Samoin voidaan näyttää, että $v \neq p$ ja $w \neq p$. Näin ollen alkiot $p, q, u, v$ ja $w$ ovat eri suuria. Samalla on näytetty myös, että $u \parallel v$ ja $u \parallel w$. Samalla tavalla voitaisiin osoittaa, että $v \parallel w$.

Näin ollen kaikki alkioita $p, q, u, v$ ja $w$ koskevat ehdot 1.–5. ovat voimassa, joten kyseiset alkiot muodostavat hilan $\mathbf{M}_6$ kanssa isomorfisen hilan $L$ alihilan. □

**Lause 5.7** ([2, Theorem 4.7 2)])**.** *Hila $L$ on distributiivinen, jos ja vain jos sillä ei ole alihilaa, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{N}_5$ tai hilan $\mathbf{M}_6$ kanssa.*

*Todistus.* Jos hilalla $L$ on alihila, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{N}_5$ tai hilan $\mathbf{M}_6$ kanssa, se ei voi olla distributiivinen, koska kyseiset hilat eivät ole distributiivisia. Jos hila $L$ on distributiivinen niin Lauseen 5.5 nojalla se on myös modulaarinen. Tällöin Lauseen 4.7 nojalla hilalla ei ole hilan $\mathbf{N}_5$ kanssa isomorfista alihilaa eikä Lauseen 5.6 nojalla hilan $\mathbf{M}_6$ kanssa isomorfista alihilaa. □

**Esimerkki 5.8.** Olkoon $L$ hila, jonka Hasse-kaavio on esitetty Kuvassa 5.2. Hila $L$ on modulaarinen, koska sillä ei ole alihilaa, joka olisi isomorfinen hilan $\mathbf{N}_5$ kanssa. Hila $L$ ei kuitenkaan ole distributiivinen, koska sillä on alihila $A = \{b, d, e, f, g\}$, joka on isomorfinen hilan $\mathbf{M}_6$ kanssa.




***Kuva 5.2.*** *Modulaarinen hila, joka ei ole distributiivinen.*

# 6. YHTEENVETO

Tämän työn tavoitteena oli tutustuttaa lukija hilateorian perusteisiin ja hilatyypeistä erityisesti modulaarisiin ja distributiivisiin hiloihin. Työn alussa osittain järjestetty joukko määriteltiin joukkona, joka on varustettu relaatiolla, joka on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen. Seuraavaksi määriteltiin, että osittain järjestetyn joukon alkioparin suurin alaraja on meet ja pienin yläraja on join. Tämän jälkeen hila määriteltiin osittain järjestettynä joukkona, jossa jokaisella alkioparilla on olemassa meet ja join. Hilan määrittelemisen jälkeen Luvussa 3 esiteltiin työssä myöhemmin oleelliset hilat $\mathbf{N}_5$ eli viisikulmio sekä $\mathbf{M}_6$ eli timantti. Tämän jälkeen todistettiin, että hilalle ovat voimassa seuraavat algebralliset ominaisuudet: vaihdannaisuus, liitännäisyys, absorptio ja idempotenttisuus. Todistettiin myös, että jokaisessa hilassa ovat voimassa distributiivisuus- ja modulaarisuusepäyhtälöt.

Työssä esiteltiin modulaarisen ja distributiivisen hilan määritelmät ja perehdyttiin näiden väliseen yhteyteen. Modulaarinen hila määriteltiin hilaksi, jonka alkiot toteuttavat modulaarisuuslain. Modulaaristen hilojen osalta työn päätuloksena todistettiin, että hila on modulaarinen, jos ja vain jos sillä ei ole alihilaa, joka on isomorfinen viisikulmion kanssa. Vastaavasti distributiivinen hila määriteltiin hilaksi, jonka alkiot toteuttavat distributiivisuuslain. Todistettiin, että distributiivinen hila on aina modulaarinen. Tämän jälkeen distributiivisten hilojen osalta työn päätuloksena todistettiin, että modulaarinen hila on distributiivinen, jos ja vain jos sillä ei ole alihilaa, joka on isomorfinen timantin kanssa. Päätuloksista päästiin tulokseen, että hila on distributiivinen, jos ja vain jos sillä ei ole alihilaa, joka on isomorfinen viisikulmion tai timantin kanssa.

# LÄHTEET

[1] G. A. Grätzer. *Lattice theory: foundation*. engl. 1st ed. 2011. Basel: Springer Basel, 2011.

[2] S. Roman. *Lattices and Ordered Sets*. engl. 1st ed. 2008. New York, NY: Springer New York, 2008.

[3] B. S. Vatsa ja S. Vatsa. *Discrete mathematics*. engl. 4th rev. ed. New Delhi: New Age International, 2009.