Tampereen yliopisto

Inkeri Hanhela

LOKALISAATIOSTA KOKONAISALUEISSA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Tammikuu 2025

Tiivistelmä

Inkeri Hanhela: Lokalisaatiosta kokonaisalueissa
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Tammikuu 2025

Tässä tutkielmassa määritellään lokalisaatio kokonaisalueille ja osoitetaan, että kokonaisalueiden lokalisaatiot ovat kokonaisalueita. Tämän jälkeen tarkastellaan jakokuntia ja todistetaan, että kokonaisalueen jakokunta on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen. Lisäksi todetaan, että kokonaisalueen muut lokalisaatiot ovat sen jakokunnan alirenkaita. Lopuksi tutkitaan ideaaleja ja osoitetaan, että lokalisaatio käyttäytyy hyvin ideaalien yhteen- ja kertolaskun suhteen.

Avainsanat: lokalisaatio, kokonaisalue, jakokunta, multiplikatiivinen systeemi, ideaali

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan kommutatiivisen algebran työkalua, lokalisaatiota, rajoitettuna kokonaisalueisiin. Aluksi määritellään lokalisaatio ja multiplikatiiviset systeemit, joiden suhteen lokalisaatio tehdään. Lokalisaation avulla syntyy algebrallinen rakenne, jossa on enemmän kääntyviä alkioita kuin alkuperäisessä. Osa näistä alkioista on kuitenkin samoja keskenään, joten näiden samastamiseksi määritellään ekvivalenssirelaatio. Tämän jälkeen osoitetaan, että kokonaisalueen lokalisaation tuloksena syntyvä algebrallinen rakenne on itsekin kokonaisalue.

Seuraavaksi tarkastellaan lokalisaation erityistapauksia, jakokuntia, ja todistetaan, että kokonaisalueen jakokunta on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen. Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan kokonaisalueiden muita lokalisaatioita, ja todetaan, että ne ovat kyseisen kokonaisalueen jakokunnan alirenkaita. Lisäksi multiplikatiivisten systeemien sulkeumia tutkimalla havaitaan, että eri multiplikatiivisten systeemien suhteen tehdyt lokalisaatiot voivat olla samat.

Lopuksi tarkastellaan ideaaleja ja lokalisaatiota ideaalien suhteen. Ideaaleille määritellään summa ja tulo ja todistetaan, että ideaalien summa ja tulo ovat itsekin ideaaleja. Tämän jälkeen todetaan, että lokalisaatio käyttäytyy hyvin ideaalien yhteen- ja kertolaskun suhteen.

Lukijan odotetaan tuntevan algebran perusteet. Erityisesti kokonaisalueiden, kuntien, rengashomomorfismien ja ideaalien käsitteiden tuntemus on tarpeen. Pääasiallisina lähteinä ovat toimineet Judsonin teos *Abstract Algebra: Theory and Applications* [4], Blandin teos *The Basics of Abstract Algebra* [2], Aitkenin artikkeli *Localization in Integral Domains* [1] ja Gathmannin luentomateriaali *Commutative Algebra* [3].

2 Lokalisaatio

Tämän luvun lähteinä ovat toimineet Andreas Gathmannin luentomateriaali *Commutative Algebra* [3] sekä Judsonin teos *Abstract Algebra: Theory and Applications* [4].

Lokalisaatio on tärkeä työkalu kommutatiivisessa algebrassa. Sen avulla on mahdollista muuttaa rengasta koskeva ongelma joukoksi helpommin ratkaistavia ongelmia. Käsiteltäessä rengasta, joka ei ole kunta, vaikeuksia saattaa aiheuttaa se, etteivät kaikki alkiot ole kääntyviä. Lokalisaation avulla voidaan tehdä useammista alkioista kääntyviä luomalla niistä murtolukuja. Juuri tällä tavalla kokonaislukujen renkaasta saadaan muodostettua rationaalilukujen kunta.

Lokalisaatio voidaan määritellä yleisesti renkaille, mutta tällöin murtolukujen nimittäjään päätyvät nollantekijät aiheuttavat hankaluuksia. Tässä työssä keskitytään yksinkertaisempaan tilanteeseen, jossa lokalisoidaan kokonaisalueita.

Jatkossa merkitään käsiteltävää kokonaisaluetta merkinnällä R ja sen osajoukkoa, jonka alkioista halutaan tehdä kääntyviä, merkinnällä S. Lokalisaatio muodostetaan yksinkertaisesti joukkona $S^{-1}R$, joka sisältää kaikki murtoluvut, joissa jokin kokonaisalueen R alkio on osoittajassa ja jokin joukon S alkio nimittäjässä.

Jotta lokalisaatio $S^{-1}R$ olisi yhteen- ja kertolaskun suhteen suljettu, kun nämä myöhemmin määritellään lokalisaatioille, täytyy joukon S olla kertolaskun suhteen suljettu. Lisäksi halutaan, että $0 \notin S$, jotta nollalla jakoa ei pääse tapahtumaan.

Määritelmä 2.1. [1, s. 2] Kokonaisalueen R osajoukkoa S kutsutaan *multiplikatiiviseksi systeemiksi*, jos $1 \in S$, $0 \notin S$ ja S on suljettu kertolaskun suhteen.

Renkaan R osajoukko $S = R \setminus \{0\}$ on multiplikatiivinen systeemi, sillä se on renkaan määritelmän nojalla kertolaskun suhteen suljettu, $0 \notin S$ ja $1 \in S$. Muita multiplikatiivisia systeemejä käsitellään myöhemmin tässä tutkielmassa.

Lokalisaatiossa muodostuu usein alkioita, jotka halutaan samastaa keskenään. Esimerkiksi rationaalilukuja muodostettaessa halutaan lukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{4}$ olevan samoja. Samastamista varten tarvitaan seuraava relaatio.

Määritelmä 2.2. [4, s. 225] Olkoon R kokonaisalue ja S sen multiplikatiivinen systeemi. Olkoot $r, r' \in R$ ja $s, s' \in S$. Tällöin

$$(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' = sr'.$$

Huomautus. Koska kokonaisalueissa kertolasku on liitännäinen, voidaan kokonaisalueen R alkioiden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tulo $a_1 a_2 \ldots a_n$ kirjoittaa ilman sulkuja.

Lause 2.1. [4, s. 225] *Määritelmän 2.2 mukainen relaatio on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Vrt. [4, s. 226]. Olkoon $r \in R$ ja $s \in S$. Kokonaisalueen R kertolaskun vaihdannaisuuden perusteella $rs = sr$, joten $(r, s) \sim (r, s)$. Täten relaatio on refleksiivinen.

Olkoot $r_1, r_2 \in R$ ja $s_1, s_2 \in S$. Oletetaan, että $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$, jolloin $r_1 s_2 = s_1 r_2$. Kokonaisalueen R kertolaskun vaihdannaisuuden perusteella $r_2 s_1 = s_2 r_1$, joten $(r_2, s_2) \sim (r_1, s_1)$. Täten relaatio on symmetrinen.

Olkoot $r_1, r_2, r_3 \in R$ ja $s_1, s_2, s_3 \in S$. Oletetaan, että $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ ja $(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$, jolloin $r_1 s_2 = s_1 r_2$ ja $r_2 s_3 = s_2 r_3$. Kertomalla näistä ensimmäinen puolittain alkiolla s_3 saadaan $s_1 r_2 s_3 = r_1 s_2 s_3$. Sijoittamalla tähän $r_2 s_3 = s_2 r_3$ saadaan $s_1 s_2 r_3 = r_1 s_2 s_3$, mistä supistussäännön nojalla seuraa $r_1 s_3 = s_1 r_3$. Tällöin $(r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$. Täten relaatio on transitiivinen.

Koska relaatio on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, se on ekvivalenssirelaatio. □

Määritelmä 2.3. Merkitään alkion (r, s) määritelmän 2.2 mukaisen ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokkaa r/s ja näiden muodostamaa joukkoa

$$S^{-1}R = \{r/s \mid r \in R, s \in S\}.$$

Joukkoa $S^{-1}R$ kutsutaan renkaan R *lokalisaatioksi* multiplikatiivisen systeemin S suhteen.

Varustetaan nyt joukko $S^{-1}R$ yhteen- ja kertolaskulla. Määritelmä on tuttu jo peruskoulun matematiikan tunneilta.

Määritelmä 2.4. [4, s. 226] Olkoon R kokonaisalue ja S sen multiplikatiivinen systeemi. Kun $r_1/s_1, r_2/s_2 \in S^{-1}R$, niin

$$r_1/s_1 + r_2/s_2 = (r_1 s_2 + s_1 r_2)/s_1 s_2$$

ja

$$(r_1/s_1) \cdot (r_2/s_2) = r_1 r_2 / s_1 s_2.$$

Lause 2.2. [4, s. 226] *Määritelmän 2.4 mukaiset yhteen- ja kertolasku ovat hyvin määritellyt.*

Todistus. Vrt. [4, s. 226]. Olkoon $r/s = r'/s' \in S^{-1}R$ ja $t/u = t'/u' \in S^{-1}R$, jolloin $rs' = sr'$ ja $tu' = ut'$. Kertomalla näistä ensimmäinen puolittain alkiolla uu' saadaan $rs'uu' = sr'uu'$ ja toinen puolittain alkiolla ss' saadaan $tu'ss' = ut'ss'$. Kun nämä lasketaan puolittain yhteen, on tuloksena $rs'uu' + tu'ss' = ut'ss' + sr'uu'$, mistä yhteen- ja kertolaskun vaihdannaisuuden nojalla seuraa $rus'u' + sts'u' = r'u'su + s't'su$. Osittelulakeja käyttäen saadaan $(ru + st)s'u' = (r'u' + s't')su$. Soveltamalla tähän määritelmää 2.2 saadaan $(ru + st)/su = (r'u' + s't')/s'u'$, mistä määritelmän 2.4 mukaan seuraa $r/s + t/u = r'/s' + t'/u'$. Yhteenlasku on siis hyvin määritelty.

Kertomalla $rs' = sr'$ puolittain alkiolla tu' saadaan $rs'tu' = sr'tu'$. Kun tähän sijoitetaan oikealle puolelle $tu' = ut'$, on tuloksena $rs'tu' = sr'ut'$. Tällöin kokonaisalueen R kertolaskun vaihdannaisuuden perusteella $rts'u' = sur't'$, mistä määritelmän 2.2 nojalla seuraa $rt/su = r't'/s'u'$. Määritelmän 2.4 mukaan $(r/s) \cdot (t/u) = (r'/s') \cdot (t'/u')$, joten myös kertolasku on hyvin määritelty. □

Todistetaan seuraavaksi, että kokonaisalueen lokalisaatio on itsekin kokonaisalue.

Lause 2.3. [4, s. 226] *Olkoon R kokonaisalue ja S sen multiplikatiivinen systeemi. Tällöin $(S^{-1}R, +, \cdot)$ on kokonaisalue.*

Todistus. Vrt. [4, s. 227]. Olkoot $r_1/s_1, r_2/s_2, r_3/s_3 \in S^{-1}R$. Määritelmän 2.4 nojalla $r_1/s_1 + r_2/s_2 = (r_1s_2 + r_2s_1)/s_1s_2$. Renkaan R yhteen- ja kertolaskun vaihdannaisuuden perusteella saadaan $(r_2s_1 + r_1s_2)/s_2s_1$ ja tästä jälleen määritelmän 2.4 nojalla $r_2/s_2 + r_1/s_1$. Täten $(S^{-1}R, +)$ on vaihdannainen.

Koska kokonaisalueen R kertolaskun liitännäisyyden ja osittelulakien perusteella

$$\begin{aligned} r_1/s_1 + (r_2/s_2 + r_3/s_3) &= r_1/s_1 + (r_2s_3 + s_2r_3)/s_2s_3 \\ &= (r_1(s_2s_3) + s_1(r_2s_3 + s_2r_3))/s_1(s_2s_3) \\ &= (r_1s_2s_3 + s_1r_2s_3 + s_1s_2r_3)/s_1s_2s_3 \\ &= ((r_1s_2 + s_1r_2)s_3 + (s_1s_2)r_3)/(s_1s_2)s_3 \\ &= (r_1s_2 + s_1r_2)/s_1s_2 + r_3/s_3 \\ &= (r_1/s_1 + r_2/s_2) + r_3/s_3, \end{aligned}$$

niin $(S^{-1}R, +)$ on liitännäinen.

Määritelmän 2.4 nojalla $0/1 + r/s = (0 \cdot s + 1 \cdot r)/1 \cdot s = r/s$. Koska yhteenlaskun vaihdannaisuus on jo todistettu, niin $r/s + 0/1 = r/s$. Täten $0/1$ on yhteenlaskun neutraalialkio. Lisäksi määritelmän 2.4 nojalla $r/s + (-r)/s = (rs + s(-r))/ss$, ja koska kokonaisalueessa R alkion rs vasta-alkio on $-rs = s(-r)$, saadaan $0/ss$. Koska

$0 \cdot 1 = 0 = ss \cdot 0$, niin määritelmän 2.2 mukaan $0/1 \sim 0/ss$. Täten $r/s + (-r)/s = 0/1$. Yhteenlaskun vaihdannaisuuden vuoksi $(-r)/s + r/s = 0/1$. Täten alkion r/s vasta-alkio on $(-r)/s$.

Määritelmän 2.4 nojalla $(r_1/s_1) \cdot (r_2/s_2) = r_1r_2/s_1s_2$. Kokonaisalueen R kertolaskun vaihdannaisuuden perusteella saadaan r_2r_1/s_2s_1 ja tästä jälleen määritelmän 2.4 nojalla $(r_2/s_2) \cdot (r_1/s_1)$. Täten $(S^{-1}R, \cdot)$ on vaihdannainen.

Koska määritelmän 2.4 ja kokonaisalueen R kertolaskun liitännäisyyden perusteella

$$\begin{aligned}
((r_1/s_1) \cdot (r_2/s_2)) \cdot (r_3/s_3) &= (r_1r_2/s_1s_2) \cdot (r_3/s_3) \\
&= (r_1r_2)r_3/(s_1s_2)s_3 \\
&= r_1(r_2r_3)/s_1(s_2s_3) \\
&= (r_1/s_1) \cdot (r_2r_3/s_2s_3) \\
&= (r_1/s_1) \cdot ((r_2/s_2) \cdot (r_3/s_3)),
\end{aligned}$$

niin $(S^{-1}R, \cdot)$ on liitännäinen.

Koska $(r/s) \cdot (1/1) = (r \cdot 1)/(s \cdot 1) = r/s$ ja vaihdannaisuuden perusteella $(1/1) \cdot (r/s) = r/s$, niin $1/1$ on kertolaskun neutraalialkio.

Määritelmän 2.4 ja kokonaisalueen R osittelulakien perusteella

$$\begin{aligned}
(r_1/s_1) \cdot (r_2/s_2 + r_3/s_3) &= (r_1/s_1) \cdot (r_2s_3 + s_2r_3/s_2s_3) \\
&= (r_1(r_2s_3 + s_2r_3))/s_1s_2s_3 \\
&= (r_1r_2s_3 + r_1s_2r_3)/s_1s_2s_3 \\
&= ((r_1r_2s_3 + r_1s_2r_3) \cdot 1)/((s_1s_2s_3) \cdot 1) \\
&= ((r_1r_2s_3 + r_1s_2r_3)/s_1s_2s_3) \cdot (1/1).
\end{aligned}$$

Koska $1 \cdot s_1 = s_1 \cdot 1$, niin määritelmän 2.2 nojalla $1/1 \sim s_1/s_1$, joten

$$((r_1r_2s_3 + r_1s_2r_3)/s_1s_2s_3) \cdot (1/1) = ((r_1r_2s_3 + r_1s_2r_3)/s_1s_2s_3) \cdot (s_1/s_1).$$

Määritelmän 2.4 ja kokonaisalueen R osittelulakien ja kertolaskun vaihdannaisuuden perusteella

$$\begin{aligned}
((r_1r_2s_3 + r_1s_2r_3)/s_1s_2s_3) \cdot (s_1/s_1) &= (r_1r_2s_1s_3 + s_1s_2r_1r_3)/s_1s_2s_1s_3 \\
&= r_1r_2/s_1s_2 + r_1r_3/s_1s_3 \\
&= (r_1/s_1) \cdot (r_2/s_2) + (r_1/s_1) \cdot (r_3/s_3).
\end{aligned}$$

Täten vasemmanpuoleinen osittelulaki pätee. Koska vaihdannaisuus on jo todistettu, myös oikeanpuoleinen osittelulaki pätee.

Olkoon $(r_1/s_1) \cdot (r_2/s_2) = 0$, jolloin määritelmän 2.4 nojalla $(r_1r_2)/(s_1s_2) = 0$. Tämä toteutuu vain, kun $r_1r_2 = 0$. Koska $r_1, r_2 \in R$ ja R on kokonaisalue, tulon nollasääntö pätee, joten $r_1 = 0$ tai $r_2 = 0$. Nollantekijöitä ei siis ole.

Yllä olevan perusteella $(S^{-1}R, +, \cdot)$ on kokonaisalue. □

Koska $1 \in S$ kaikilla multiplikatiivisilla systeemeillä S, niin jokaista $r \in R$ kohden on lokalisaatiossa $S^{-1}R$ alkio $r/1$. Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaus, joka kuvaa alkion r alkiolle $r/1$, on injektiivinen homomorfismi eli upotus.

Lause 2.4. [3, s. 53] *Olkoon R kokonaisalue ja $S^{-1}R$ sen lokalisaatio. Tällöin kuvaus*

$$\phi : R \to S^{-1}R, \quad \phi(r) = r/1$$

on upotus.

Todistus. Vrt. [4, s. 227]. Osoitetaan ensin, että ϕ on hyvin määritelty. Olkoot $r, r' \in R$ ja olkoon $r = r'$. Tällöin $\phi(r) = r/1 = r'/1 = \phi(r')$, joten ϕ on hyvin määritelty.

Osoitetaan sitten, että ϕ on rengashomomorfismi. Olkoot $r, s \in R$. Ensinnäkin $\phi(1) = 1/1 = 1$. Lisäksi

$$\phi(r + s) = (r + s)/1 = r/1 + s/1 = \phi(r) + \phi(s)$$

ja

$$\phi(rs) = rs/1 = (r/1) \cdot (s/1) = \phi(r) \cdot \phi(s).$$

Täten ϕ on rengashomomorfismi.

Osoitetaan vielä, että ϕ on injektio. Olkoon $\phi(r) = \phi(s)$. Tällöin $r/1 = s/1$, joten $r = s$. Täten ϕ on injektio.

Koska ϕ on rengashomomorfismi ja injektio, se on upotus. □

Koska kokonaisalue uppoaa lokalisaatioonsa, lokalisaatio sisältää siitä isomorfisen kopion.

Seuraus 2.1. [5, s. 202] *Lokalisaatio $S^{-1}R$ sisältää isomorfisen kopion kokonaisalueesta R.*

Todistus. Vrt. [5, s. 202]. Olkoon $S'^{-1}R = \{r/1 \in S^{-1}R\}$, ja olkoon $\phi : R \to S'^{-1}R, \phi(r) = r/1$. Lauseen 2.4 todistuksessa on jo osoitettu, että ϕ on injektiivinen homomorfismi. Kun sen maalijoukkona on $S'^{-1}R$, se on myös surjektio, joten se on isomorfismi. Täten $R \cong S'^{-1}R$. Koska $S'^{-1}R \subseteq S^{-1}R$, niin $S^{-1}R$ sisältää isomorfisen kopion kokonaisalueesta R. □

2.1 Jakokunnat

Innoituksena jakokuntiin perehtymiselle ovat toimineet Ari Virtasen tehtävänannot kurssilla Johdatus matemaattiseen päättelyyn ja lukuteoriaan. Tämän aliluvun lähteenä on käytetty Blandin teosta *The Basics of Abstract Algebra* [2].

Kun kokonaisalue R lokalisoidaan sen osajoukon $R \setminus \{0\}$ suhteen, saadaan tulokseksi kyseisen kokonaisalueen jakokunta. Jakokunta on siis lokalisaatio, joka sisältää kaikki murtoluvut muotoa r/s, missä $r, s \in R$ ja $s \neq 0$. Tästä seuraa, että kaikki jakokunnan alkiot ovat kääntyviä, joten se on nimensä mukaisesti kunta.

Tutuin esimerkki jakokunnasta ovat rationaaliluvut, jotka ovat kokonaislukujen jakokunta. Selvästi jokainen kokonaisluku a voidaan esittää rationaalilukuna muodossa $a/1$. Samaan tapaan voidaan minkä tahansa kokonaisalueen alkiot yhdistää niitä vastaaviin murtolukuihin kyseisen kokonaisalueen jakokunnassa. Kuten lauseessa 2.4 osoitettiin, tällainen vastaavuus on injektiivinen, joten voidaan puhua kokonaisalueen upottamisesta kuntaan.

Määritelmä 2.5. [2, s. 178] Olkoon R kokonaisalue. Tällöin kunta K on kokonaisalueen R *jakokunta*, jos on olemassa upotus (eli injektiivinen homomorfismi) $\phi : R \to K$ ja jokainen kunnan K alkio voidaan kirjoittaa muodossa $\phi(r)/\phi(s)$ joillakin $r \in R$ ja $s \in R \setminus \{0\}$.

Yllä olevassa määritelmässä riittää edellyttää, että $s \neq 0$, koska tällöin $\phi(s) \neq 0$. Tämä johtuu siitä, että injektiivisenä homomorfismina ϕ kuvaa nolla-alkiolle vain nolla-alkion.

Seuraavaksi todetaan, että kokonaisalueen jakokunta on isomorfismia vaille yksikäsitteinen. Tämän takia voidaan minkä tahansa kokonaisalueen kohdalla puhua yksittäisestä jakokunnasta.

Lause 2.5. [2, s. 178] *Kaikki saman kokonaisalueen jakokunnat ovat keskenään isomorfisia.*

Todistus. Vrt. [2, s. 178-179]. Olkoot K ja K' kokonaisalueen R jakokuntia. Määritelmän 2.5 mukaan on olemassa upotus $\phi : R \to K'$ ja jokainen jakokunnan K' alkio voidaan kirjoittaa muodossa $\phi(r)/\phi(s)$ joillakin $r \in R$ ja $s \in R \setminus \{0\}$. Samoin on olemassa upotus $\omega : R \to K$ ja jokainen jakokunnan K alkio voidaan kirjoittaa muodossa $\omega(r)/\omega(s)$ joillakin $r \in R$ ja $s \in R \setminus \{0\}$.

Olkoon $\psi : K \to K', \psi(\omega(r)/\omega(s)) = \phi(r)/\phi(s)$. Osoitetaan ensin, että ψ on hyvin määritelty. Olkoot $\omega(r)/\omega(s), \omega(r')/\omega(s') \in K$ ja olkoon $\omega(r)/\omega(s) =$

$\omega(r')/\omega(s')$. Tällöin määritelmän 2.2 mukaan $\omega(r)\omega(s') = \omega(s)\omega(r')$. Koska ω on homomorfismi, niin $\omega(rs') = \omega(sr')$, ja koska ω on injektio, niin $rs' = sr'$. Koska ϕ on hyvin määritelty, niin $\phi(rs') = \phi(sr')$, ja koska ϕ on homomorfismi, niin $\phi(r)\phi(s') = \phi(s)\phi(r')$. Tästä seuraa $\psi(\omega(r)/\omega(s)) = \phi(r)/\phi(s) = \phi(r')/\phi(s') = \psi(\omega(r')/\omega(s'))$, joten ψ on hyvin määritelty.

Osoitetaan sitten, että ψ on rengashomomorfismi. Koska ω ja ϕ ovat homomorfismeja, niin $\phi(1) = 1$ ja $\omega(1) = 1$, joten $\psi(1_K) = \psi(\omega(1)/\omega(1)) = \phi(1)/\phi(1) = 1/1 = 1$. Homomorfismin ominaisuuksien ja määritelmän 2.4 nojalla

$$\begin{aligned}
\psi(\omega(r)/\omega(s) + \omega(t)/\omega(u)) &= \psi(\omega(r/s + t/u)) \\
&= \psi(\omega(ru + st)/\omega(su)) \\
&= \phi(ru + st)/\phi(su) \\
&= (\phi(r)\phi(u) + \phi(s)\phi(t))/(\phi(s)\phi(u)) \\
&= \phi(r)/\phi(s) + \phi(t)/\phi(u) \\
&= \psi(\omega(r)/\omega(s)) + \psi(\omega(t)/\omega(u))
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\psi((\omega(r)/\omega(s)) \cdot (\omega(t)/\omega(u))) &= \psi(\omega((r/s) \cdot (t/u))) \\
&= \psi(\omega(rt)/\omega(su)) \\
&= \phi(rt)/\phi(su) \\
&= (\phi(r)\phi(t))/(\phi(s)\phi(u)) \\
&= (\phi(r)/\phi(s)) \cdot (\phi(t)/\phi(u)) \\
&= \psi(\omega(r)/\omega(s)) \cdot \psi(\omega(t)/\omega(u)).
\end{aligned}$$

Täten ψ on rengashomomorfismi.

Osoitetaan vielä, että ψ on bijektio. Olkoot $\omega(r)/\omega(s), \omega(t)/\omega(u) \in K$ ja olkoon $\psi(\omega(r)/\omega(s)) = \psi(\omega(t)/\omega(u))$. Tällöin $\phi(r)/\phi(s) = \phi(t)/\phi(u)$, mistä määritelmän 2.2 nojalla seuraa $\phi(r)\phi(u) = \phi(s)\phi(t)$. Tästä seuraa edelleen $\phi(ru) = \phi(st)$, sillä ϕ on homomorfismi. Tällöin $ru = st$, koska ϕ on injektio. Koska ω on hyvin määritelty, niin $\omega(ru) = \omega(st)$, ja koska ω on homomorfismi, niin $\omega(r)\omega(u) = \omega(s)\omega(t)$. Näin ollen määritelmän 2.2 nojalla $\omega(r)/\omega(s) = \omega(t)/\omega(u)$. Täten ψ on injektio. Olkoon sitten $\phi(r)/\phi(s) \in K'$. Tällöin $\psi(\omega(r)/\omega(s)) = \phi(r)/\phi(s)$, joten ψ on surjektio.

Koska ψ on rengashomomorfismi ja bijektio, se on rengasisomorfismi. Näin ollen $K \cong K'$, joten kaikki kokonaisalueen R jakokunnat ovat keskenään isomorfisia. □

Esimerkki 2.1. Vrt. [4, s. 236, tehtävä 11]. Olkoon $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Määritetään sen jakokunta.

Ensin on osoitettava, että $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on kokonaisalue. Tämä voidaan tehdä toteamalla, että $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on reaalilukujen kunnan $\mathbb{R}$ alirengas. Olkoot $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Koska $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, niin $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$. Koska

$$a + b\sqrt{2} - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

ja

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) &= ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + bd\sqrt{2}^2 \\ &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\end{aligned}$$

niin $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on suljettu yhteenlaskun, vasta-alkioiden ja kertolaskun suhteen. Lisäksi $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Täten $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on reaalilukujen kunnan $\mathbb{R}$ alirengas. Koska $\mathbb{R}$ on kokonaisalue, myös sen alirenkaat ovat kokonaisalueita, joten $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on kokonaisalue.

Määritetään nyt kokonaisalueen $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ jakokunta K. Jakokunnan K alkiot ovat muotoa $(a + b\sqrt{2})/(c + d\sqrt{2})$. Täten

$$\begin{aligned}&((a + b\sqrt{2})/(c + d\sqrt{2})) \cdot (1/1) \\ =\ &((a + b\sqrt{2})/(c + d\sqrt{2})) \cdot ((c - d\sqrt{2})/(c - d\sqrt{2})) \\ =\ &(ac - 2bd + (ad + bc)\sqrt{2})/(c^2 + 2d^2) \\ =\ &(ac - 2bd)/(c^2 + 2d^2) + ((ad + bc)/(c^2 + 2d^2))\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Koska $(ac - 2bd)/(c^2 + 2d^2) \in \mathbb{Q}$ ja $(ad + bc)/(c^2 + 2d^2) \in \mathbb{Q}$, niin $(a + b\sqrt{2})/(c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Näin ollen $K \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

Olkoon $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Tällöin se voidaan kirjoittaa muodossa $p/q+(r/s)\sqrt{2} = (ps+rq\sqrt{2})/qs$ joillakin $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Koska $ps+rq\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ja $qs = qs+0\cdot\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, niin jokainen muotoa $a + b\sqrt{2}$ oleva alkio voidaan kirjoittaa kokonaisalueen $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ kahden alkion osamääränä. Täten $a + b\sqrt{2} \in K$, ja tästä seuraa, että $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subseteq K$.

Yllä olevan perusteella $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

2.2 Multiplikatiiviset systeemit

Tämän aliluvun lähteenä on käytetty Wayne Aitkenin artikkelia *Localization in Integral Domains* [1].

Jakokuntien tarkastelun jälkeen siirrytään tarkastelemaan sellaisia lokalisaatioita $S^{-1}R$, joissa $S \neq R \setminus \{0\}$. Jo aiemmin määritelmässä 2.2 joukkoa S kuitenkin rajoitettiin niin, että sen on oltava multiplikatiivinen systeemi. Muussa tapauksessa lokalisaatio $S^{-1}R$ ei olisi yhteen- eikä kertolaskun suhteen suljettu eikä siis edes rengas, jolloin se ei olisi rakenteena kovin käyttökelpoinen.

Todistetaan seuraavaksi, että kokonaisalueen kaikki lokalisaatiot ovat sen jakokunnan alirenkaita.

Lause 2.6. [1, s. 2] *Olkoon R kokonaisalue ja K sen jakokunta. Olkoon S kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi. Tällöin $S^{-1}R$ on jakokunnan K alirengas.*

Todistus. Olkoon $r/s, t/u \in S^{-1}R$. Määritelmän 2.4 perusteella

$$r/s - t/u = r/s + (-t/u) = (ru + (-ts))/su.$$

Koska R on rengas, niin $ru + (-ts) \in R$, ja koska S on multiplikatiivinen systeemi, niin $su \in S$. Täten $(ru + (-ts))/su \in S^{-1}R$.

Määritelmän 2.4 nojalla $(r/s)(t/u) = rt/su$, ja koska $rt \in R$ ja $su \in S$, niin $rt/su \in S^{-1}R$. Määritelmän 2.1 mukaan $1_R \in S$, ja koska myös $1_R \in R$, niin $1_K = 1_R/1_R \in S^{-1}R$. Täten $S^{-1}R$ on jakokunnan K alirengas. □

Esimerkki 2.2. [1, s. 3] Tarkastellaan kokonaisalueen R osajoukkoa $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, missä $a \in R$ on nollasta poikkeava. Koska $a^0 = 1$, niin $1 \in S$. Koska R on kokonaisalue, niin $a^n \neq 0$, kun $a \neq 0$. Tästä seuraa, että $0 \notin S$. Olkoot sitten $a^n, a^k \in S$. Koska R on liitännäinen, niin $(a^n)(a^k) = a^{n+k} \in S$, eli S on kertolaskun suhteen suljettu. Täten S on multiplikatiivinen systeemi.

Tässä tapauksessa lokalisaatio $S^{-1}R$ sisältää kaikki murtoluvut, joissa osoittajassa on jokin kokonaisalueen R alkio ja nimittäjässä jokin alkion a potenssi. Voidaankin puhua kokonaisalueen R lokalisaatiosta alkion a suhteen.

Esimerkki 2.3. [3, s. 53] Tarkastellaan kokonaislukujen renkaan $\mathbb{Z}$ lokalisaatiota alkion 5 suhteen. Olkoon siis $S = \{5^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tällöin $S^{-1}\mathbb{Z} = \{r/5^n \mid r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Tämä lokalisaatio sisältää kaikki kokonaisluvut, koska $5^0 = 1$, ja lisäksi luvut $1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 6/5$ sekä $1/25, 2/25$ ja niin edelleen.

Lisäksi havaitaan, että tosiaan nyt vain joukon S alkioilla (ja näiden käänteisalkioilla) on käänteisalkiot. Esimerkiksi $5 \cdot (1/5) = 1$ ja $25 \cdot (1/25) = 1$, mutta $5/2 \notin S^{-1}\mathbb{Z}$, joten alkiolla $2/5$ ei ole käänteisalkiota, kuten ei myöskään alkiolla 2, sillä $1/2 \notin S^{-1}\mathbb{Z}$.

Tarkastellaan seuraavaksi, voidaanko lokalisoimalla sama kokonaisalue kahden eri multiplikatiivisen systeemin suhteen saada molemmissa tapauksissa tulokseksi sama lokalisaatio. Tätä tarkastelua varten määritellään multiplikatiivisen systeemin S sulkeuma, joka on joukko, joka koostuu systeemin S alkioiden tekijöistä.

Määritelmä 2.6. [1, s. 4] Olkoon S kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi. Tällöin sen *sulkeuma* on

$$\bar{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{d \in R \mid de \in S \text{ jollakin } e \in R\}.$$

Todistetaan seuraavaksi joitakin sulkeumien perusominaisuuksia, joita tarvitaan myöhempien lauseiden todistuksissa.

Lause 2.7. [1, s. 4] *Olkoon S kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi. Tällöin*

1) $S \subseteq \bar{S}$,

2) *sulkeuma $\bar{S}$ on myös kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi,*

3) $\bar{S} = \bar{\bar{S}}$,

4) $S^{-1}R = \bar{S}^{-1}R$ *ja*

5) *kun S_1 ja S_2 ovat multiplikatiivisia systeemejä ja $S_1 \subseteq S_2$, niin $\bar{S}_1 \subseteq \bar{S}_2$.*

Todistus.

1) Olkoon $s \in S$. Koska määritelmän 2.1 nojalla $1_R \in S$, niin $1_R \cdot s \in S$. Täten määritelmän 2.6 perusteella $s \in \bar{S}$, mistä seuraa, että $S \subseteq \bar{S}$.

2) Koska $S \subseteq \bar{S}$ ja $1_R \in S$, niin $1_R \in \bar{S}$. Määritelmän 2.1 nojalla $0 \notin S$. Tällöin $0 \cdot e = 0 \notin S$ kaikilla $e \in R$, joten $0 \notin \bar{S}$. Olkoot sitten $s_1, s_2 \in \bar{S}$. Tällöin määritelmän 2.6 nojalla on olemassa sellaiset $e_1, e_2 \in R$, että $s_1e_1, s_2e_2 \in S$. Koska S on suljettu kertolaskun suhteen ja koska kokonaisalueen R kertolasku on liitännäinen ja vaihdannainen, niin $(s_1e_1)(s_2e_2) = (s_1s_2)(e_1e_2) \in S$. Koska $e_1e_2 \in R$, niin $s_1s_2 \in \bar{S}$, ja $\bar{S}$ on täten kertolaskun suhteen suljettu.

   Yllä olevan perusteella $\bar{S}$ on kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi.

3) Olkoon ensin $d \in \bar{S}$. Kohdan 1 perusteella $d \in \bar{\bar{S}}$, mistä seuraa, että $\bar{S} \subseteq \bar{\bar{S}}$.

   Olkoon sitten $d \in \bar{\bar{S}}$. Kohdan 2 perusteella $\bar{S}$ on kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi, joten $d \in R$ ja $de \in \bar{S}$ jollakin $e \in R$. Koska $de \in \bar{S}$, niin

$de \in R$ ja $def \in S$ jollakin $f \in R$. Koska R on rengas, niin $ef \in R$. Merkitään $ef = g$. Koska $dg \in S$ jollakin $g \in R$, niin $d \in \bar{S}$. Täten $\bar{\bar{S}} \subseteq \bar{S}$.

Koska $\bar{S} \subseteq \bar{\bar{S}}$ ja $\bar{\bar{S}} \subseteq \bar{S}$, niin $\bar{S} = \bar{\bar{S}}$.

4) Olkoon ensin $x \in S^{-1}R$, jolloin voidaan kirjoittaa $x = r/s$, missä $r \in R$ ja $s \in S$. Tällöin kohdan 1 perusteella $s \in \bar{S}$, joten $x \in \bar{S}^{-1}R$. Täten $S^{-1}R \subseteq \bar{S}^{-1}R$.

   Olkoon sitten $x \in \bar{S}^{-1}R$, jolloin voidaan kirjoittaa $x = c/d$, missä $c \in R$ ja $d \in \bar{S}$. Määritelmän 2.6 mukaan $de \in S$ jollakin $e \in R$, ja koska R on rengas, niin $ce \in R$, joten $x = c/d = ce/de \in S^{-1}R$. Täten $\bar{S}^{-1}R \subseteq S^{-1}R$.

   Koska $S^{-1}R \subseteq \bar{S}^{-1}R$ ja $\bar{S}^{-1}R \subseteq S^{-1}R$, niin $S^{-1}R = \bar{S}^{-1}R$.

5) Olkoon $d \in \bar{S}_1$. Tällöin määritelmän 2.6 mukaan $de \in S_1$ jollakin $e \in R$. Koska $S_1 \subseteq S_2$, niin $de \in S_2$, jolloin kohdan 1 perusteella $d \in \bar{S}_2$. Täten $\bar{S}_1 \subseteq \bar{S}_2$.

□

Seuraavaksi todistetaan, että saman kokonaisalueen lokalisaatiot kahden eri multiplikatiivisen systeemin suhteen ovat samat, jos ja vain jos näiden systeemien sulkeumat ovat samat. Tätä varten tarvitaan vielä seuraava apulause.

Apulause 2.1. [1, s. 4] Olkoon S kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi. Tällöin $\bar{S} = (S^{-1}R)^\times \cap R$, missä $(S^{-1}R)^\times$ on niiden lokalisaation $S^{-1}R$ alkioiden joukko, joilla on käänteisalkio lokalisaatiossa $S^{-1}R$.

Todistus. Olkoon $d \in \bar{S}$, jolloin $1_R/d \in \bar{S}^{-1}R$. Lauseen 2.7 kohdan 4 mukaan $S^{-1}R = \bar{S}^{-1}R$. Täten $1_R/d \in S^{-1}R$, joten alkiolla d on käänteisalkio lokalisaatiossa $S^{-1}R$. Täten $d \in (S^{-1}R)^\times$. Koska lisäksi $d \in \bar{S} \subseteq R$, niin $d \in (S^{-1}R)^\times \cap R$. Näin ollen $\bar{S} \subseteq (S^{-1}R)^\times \cap R$.

Olkoon sitten $r \in (S^{-1}R)^\times \cap R$. Tällöin $r \in (S^{-1}R)^\times$ ja $r \in R$, joten $1/r \in S^{-1}R = \bar{S}^{-1}R$. Tästä seuraa, että $r \in \bar{S}$, joten $(S^{-1}R)^\times \cap R \subseteq \bar{S}$.

Koska $\bar{S} \subseteq (S^{-1}R)^\times \cap R$ ja $(S^{-1}R)^\times \cap R \subseteq \bar{S}$, niin $\bar{S} = (S^{-1}R)^\times \cap R$. □

Lause 2.8. [1, s. 4] *Olkoot S_1 ja S_2 kokonaisalueen R multiplikatiivisia systeemejä. Tällöin $S_1^{-1}R \subseteq S_2^{-1}R$, jos ja vain jos $\bar{S_1} \subseteq \bar{S_2}$. Täten $S_1^{-1}R = S_2^{-1}R$, jos ja vain jos $\bar{S_1} = \bar{S_2}$.*

Todistus. Oletetaan, että $S_1^{-1}R \subseteq S_2^{-1}R$. Olkoon $x \in \bar{S_1}$. Apulauseen 2.1 nojalla $\bar{S_1} = (S_1^{-1}R)^\times \cap R$, joten alkiolla x on käänteisalkio lokalisaatiossa $S_1^{-1}R$ ja $x \in R$.

Koska $S_1^{-1}R \subseteq S_2^{-1}R$, niin alkiolla x on käänteisalkio myös lokalisaatiossa $S_2^{-1}R$. Täten $x \in (S_2^{-1}R)^\times \cap R = \bar{S_2}$, mistä seuraa, että $\bar{S_1} \subseteq \bar{S_2}$.

Oletetaan sitten, että $\bar{S_1} \subseteq \bar{S_2}$. Olkoon $x \in S_1^{-1}R$, jolloin se voidaan kirjoittaa muodossa r/s, missä $r \in R$ ja $s \in S_1$. Tällöin lauseen 2.7 kohdan 1 perusteella $s \in \bar{S_1}$, joten oletusten nojalla $s \in \bar{S_2}$. Täten $x \in \bar{S_2}^{-1}R$, mistä lauseen 2.7 kohdan 4 nojalla seuraa, että $x \in S_2^{-1}R$. Näin ollen $S_1^{-1}R \subseteq S_2^{-1}R$.

Yllä olevan perusteella $S_1^{-1}R \subseteq S_2^{-1}R$, jos ja vain jos $\bar{S_1} \subseteq \bar{S_2}$. Kääntämällä systeemien S_1 ja S_2 roolit todistuksessa toisin päin todetaan, että $S_2^{-1}R \subseteq S_1^{-1}R$, jos ja vain jos $\bar{S_2} \subseteq \bar{S_1}$. Täten $S_1^{-1}R = S_2^{-1}R$, jos ja vain jos $\bar{S_1} = \bar{S_2}$. □

Esimerkki 2.4. Olkoon $S = \{2^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ja $S' = \{4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Esimerkin 2.2 perusteella S ja S' ovat kokonaisalueen $\mathbb{Z}$ multiplikatiivisia systeemejä. Määritelmän 2.6 nojalla sulkeuma $\bar{S}$ sisältää sellaiset $a \in \mathbb{Z}$, joille pätee $ab = 2^m$ jollakin $b \in \mathbb{Z}$ ja $m \in \mathbb{N}$. Sulkeuma $\bar{S'}$ taas sisältää sellaiset $c \in \mathbb{Z}$, joille pätee $cd = 4^n = (2 \cdot 2)^n = 2^n \cdot 2^n$ jollakin $d \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska aina voidaan valita $d = 2^n \cdot b$ tai $m = 2n$, niin $\bar{S} = \bar{S'}$. Täten lauseen 2.8 mukaan lokalisaatiot $S^{-1}\mathbb{Z}$ ja $S'^{-1}\mathbb{Z}$ ovat samat.

2.3 Ideaalit

Tarkastellaan lopuksi vielä lokalisaatiota ideaalien suhteen. Määritellään ensin alkuideaali ja todetaan esimerkkien avulla, että alkuideaalien avulla on helppo löytää halutulle renkaalle multiplikatiivisia systeemejä.

Määritelmä 2.7. [2, s. 146] Vaihdannaisen renkaan aito ideaali I on alkuideaali, jos kaikilla $ab \in I$ joko $a \in I$ tai $b \in I$.

Esimerkki 2.5. Tarkastellaan kokonaislukujen rengasta $\mathbb{Z}$ sekä sen osajoukkoa $p\mathbb{Z} = \{pa \mid a \in \mathbb{Z}\}$, missä $p \in \mathbb{N}$. Koska $p \cdot 0 = 0 \in p\mathbb{Z}$, niin $p\mathbb{Z} \neq \emptyset$. Olkoot $pa, pb \in p\mathbb{Z}$. Tällöin $pa - pb = p(a-b) \in p\mathbb{Z}$. Olkoon $r \in \mathbb{Z}$. Tällöin $(pa)r = p(ar) \in p\mathbb{Z}$. Täten $p\mathbb{Z}$ on kokonaisalueen $\mathbb{Z}$ ideaali, joten esimerkiksi $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$ ja $4\mathbb{Z}$ ovat kokonaisalueen $\mathbb{Z}$ ideaaleja.

Oletetaan nyt, että p on alkuluku. Olkoon $cd \in p\mathbb{Z}$. Tällöin $cd = pk$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$, joten $p \mid cd$. Koska p on alkuluku, niin tällöin $p \mid c$ tai $p \mid d$, joten $p\mathbb{Z}$ on alkuideaali. Esimerkiksi $2\mathbb{Z}$ ja $3\mathbb{Z}$ ovat kokonaisalueen $\mathbb{Z}$ alkuideaaleja.

Esimerkki 2.6. [1, s. 3] Olkoon $\mathfrak{p}$ kokonaisalueen R alkuideaali. Tarkastellaan joukkoa $S = R \setminus \mathfrak{p}$. Koska alkuideaalit ovat aitoja ideaaleja, niin $1 \notin \mathfrak{p}$, jolloin $1 \in R \setminus \mathfrak{p}$.

Koska 0 kuuluu kaikkiin ideaaleihin, niin $0 \notin R \setminus \mathfrak{p}$. Olkoot sitten $a, b \in R \setminus \mathfrak{p}$. Tällöin $a, b \in R$ ja $a, b \notin \mathfrak{p}$. Koska $\mathfrak{p}$ on alkuideaali, niin $ab \notin \mathfrak{p}$, mutta koska R on rengas, niin $ab \in R$. Tästä seuraa, että $ab \in R \setminus \mathfrak{p}$, jolloin $R \setminus \mathfrak{p}$ on kertolaskun suhteen suljettu. Täten $R \setminus \mathfrak{p}$ on multiplikatiivinen systeemi.

Esimerkin 2.5 perusteella parillisten kokonaislukujen joukko $2\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen joukon alkuideaali. Täten $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ eli parittomien kokonaislukujen joukko on multiplikatiivinen systeemi.

Lokalisaatio alkuideaalin suhteen on lokalisaation tärkeä käyttökohde, koska tällainen lokalisaatio on lokaali rengas. Lokaalit renkaat ovat tämän tutkielman aiherajauksen ulkopuolella.

Koska aidot ideaalit eivät sisällä ykkösalkiota, ne eivät ole renkaita eivätkä siten myöskään kokonaisalueita. Kokonaisalueen R ideaaleja voidaan kuitenkin lokalisoida kokonaisalueen R multiplikatiivisten systeemien suhteen.

Määritelmä 2.8. [1, s. 3] Olkoon S kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi, ja olkoon I kokonaisalueen R ideaali. Tällöin $S^{-1}I$ sisältää ne (ja vain ne) joukon $S^{-1}R$ alkiot, jotka voidaan kirjoittaa muodossa a/s, missä $a \in I$ ja $s \in S$.

Ideaalien lokalisaatiolla on monia hyödyllisiä ominaisuuksia. Kun lokalisoidaan kokonaisalueen R ideaali I kokonaisalueen R multiplikatiivisen systeemin S suhteen, käy ilmi, että lokalisaatio $S^{-1}I$ on lokalisaation $S^{-1}R$ ideaali. Jos I ja S sisältävät saman alkion s, lokalisaatiot $S^{-1}I$ ja $S^{-1}R$ ovat samat, koska tällöin $s/s = 1 \in S^{-1}I$.

Lause 2.9. [1, s. 3] *Olkoon R kokonaisalue. Olkoon S kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi, ja olkoon I kokonaisalueen R ideaali. Tällöin $S^{-1}I$ on kokonaisalueen $S^{-1}R$ ideaali. Ideaali $S^{-1}I$ on aito ideaali, jos ja vain jos I ja S ovat erilliset.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $S^{-1}I$ on kokonaisalueen $S^{-1}R$ ideaali. Koska I on ideaali, niin $I \neq \emptyset$, ja koska S on multiplikatiivinen systeemi, niin $S \neq \emptyset$. Näin ollen $S^{-1}I \neq \emptyset$. Olkoot sitten $r/s, t/u \in S^{-1}I$, missä $r, t \in I$ ja $s, u \in S$. Määritelmän 2.4 nojalla $r/s - t/u = (ru - ts)/su$. Koska I on kokonaisalueen R ideaali ja $S \subseteq R$, niin $ru - ts \in I$. Koska myös $su \in S$, niin $r/s - t/u = (ru - ts)/su \in S^{-1}I$. Olkoon sitten $v/w \in S^{-1}R$. Määritelmän 2.4 nojalla $(r/s) \cdot (v/w) = rv/sw$. Koska I on ideaali, $r \in I$ ja $v \in R$, niin $rv \in I$. Koska S on kertolaskun suhteen suljettu ja $s, w \in S$, niin $sw \in S$. Täten $(r/s) \cdot (v/w) = rv/sw \in S^{-1}I$.

Yllä olevan perusteella $S^{-1}I$ on kokonaisalueen $S^{-1}R$ ideaali.

Osoitetaan sitten, että $S^{-1}I$ on aito ideaali, jos ja vain jos I ja S ovat erilliset. Oletetaan ensin, että $S^{-1}I$ on aito ideaali, jolloin $1 \notin S^{-1}I$. Oletetaan, että $I \cap S \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa sellainen alkio a, että $a \in I$ ja $a \in S$. Tällöin kuitenkin $a/a = 1 \in S^{-1}I$, mikä on ristiriita, joten I ja S ovat erilliset. Oletetaan sitten, että I ja S ovat erilliset. Koska 2.1 mukaan $1 \in S$, tällöin $1 \notin I$. Täten I on aito ideaali. □

Esimerkki 2.7. Esimerkin 2.6 perusteella parittomien lukujen joukko P on kokonaislukujen multiplikatiivinen systeemi, ja esimerkin 2.5 perusteella parillisten lukujen joukko $2\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen joukon ideaali. Lauseen 2.9 perusteella lokalisaatio $P^{-1}(2\mathbb{Z})$ on lokalisaation $P^{-1}\mathbb{Z}$ aito ideaali.

Määritellään seuraavaksi ideaaleille yhteen- ja kertolasku. Laskettaessa saman renkaan ideaalit I_1 ja I_2 yhteen muodostuu joukko, joka sisältää kaikki summat, joissa toinen summattava on ideaalista I_1 ja toinen ideaalista I_2.

Määritelmä 2.9. [1, s. 4] *Ideaalien yhteenlasku.* Olkoot I_1 ja I_2 vaihdannaisen renkaan R ideaaleja. Määritellään

$$I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}.$$

Kerrottaessa saman renkaan ideaalit I_1 ja I_2 keskenään muodostuu joukko, joka sisältää kaikki tulot, joissa toinen tulon tekijä on ideaalista I_1 ja toinen ideaalista I_2. Jotta tästä joukosta saataisiin yhteenlaskun suhteen suljettu, siihen on lisäksi sisällytettävä kaikki näiden tulojen äärelliset summat.

Määritelmä 2.10. [1, s. 4] *Ideaalien kertolasku.* Olkoot I_1 ja I_2 vaihdannaisen renkaan R ideaaleja. Määritellään

$$I_1 I_2 = \{x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k \mid x_i \in I_1, y_i \in I_2\}.$$

Kun saman renkaan ideaaleja lasketaan yhteen tai kerrotaan keskenään, saadaan tulokseksi aina ideaali.

Lause 2.10. [1, s. 4] *Olkoot I_1 ja I_2 vaihdannaisen renkaan R ideaaleja. Tällöin myös $I_1 + I_2$ ja $I_1 I_2$ ovat renkaan R ideaaleja.*

Todistus. Olkoot $a, b \in I_1 + I_2$. Tällöin määritelmän 2.9 perusteella ne voidaan kirjoittaa muodossa $a = a_1 + a_2$ ja $b = b_1 + b_2$, missä $a_1, b_1 \in I_1$ ja $a_2, b_2 \in I_2$. Tällöin $a - b = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)$, ja koska I_1 ja I_2 ovat ideaaleja, niin $a_1 - b_1 \in I_1$ ja $a_2 - b_2 \in I_2$. Täten $a - b \in I_1 + I_2$.

Olkoon sitten $r \in R$. Koska renkaassa R pätevät osittelulait, niin $ra = r(a_1+a_2) = ra_1 + ra_2$. Koska I_1 ja I_2 ovat ideaaleja, niin $ra_1 \in I_1$ ja $ra_2 \in I_2$. Näin ollen $ra \in I_1+I_2$. Koska I_1 ja I_2 ovat ideaaleja, niin $0 \in I_1$ ja $0 \in I_2$. Tällöin $0+0 \in I_1+I_2$, joten $I_1 + I_2 \neq \emptyset$. Täten $I_1 + I_2$ on renkaan R ideaali.

Olkoot $a, b \in I_1I_2$. Tällöin määritelmän 2.10 perusteella ne voidaan kirjoittaa muodossa $a = x_1y_1+\cdots+x_ky_k$ ja $b = x'_1y'_1+\cdots+x'_ly'_l$, missä $x_i, x'_j \in I_1$ ja $y_i, y'_j \in I_2$, kun $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ja $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} a - b &= x_1y_1 + \cdots + x_ky_k - (x'_1y'_1 + \cdots + x'_ly'_l) \\ &= x_1y_1 + \cdots + x_ky_k + (-x'_1)y'_1 + \cdots + (-x'_l)y'_l. \end{aligned}$$

Koska I_1 on ideaali ja $x'_j \in I_1$, niin $-x'_j \in I_1$. Näin ollen $a-b \in I_1I_2$. Koska renkaassa R pätevät osittelulait ja liitännäisyys, niin

$$ra = r(x_1y_1 + \cdots + x_ky_k) = (rx_1)y_1 + \cdots + (rx_k)y_k.$$

Koska I_1 on ideaali, niin $rx_i \in I_1$, joten $ra \in I_1I_2$. Koska I_1 ja I_2 ovat ideaaleja, niin $0 \cdot 0 = 0 \in I_1I_2$, joten $I_1I_2 \neq \emptyset$. Täten I_1I_2 on renkaan R ideaali. □

Lokalisaatio käyttäytyy hyvin ideaalien yhteen- ja kertolaskun suhteen. Ei siis ole merkitystä, lasketaanko ensin ideaalit yhteen ja lokalisoidaan sen jälkeen, vai lokalisoidaanko ensin molemmat ideaalit ja lasketaan sitten yhteen nämä lokalisaatiot. Sama pätee ideaalien kertolaskulle.

Lause 2.11. [1, s. 4] *Olkoot I_1, I_2 kokonaisalueen R ideaaleja. Olkoon S kokonaisalueen R multiplikatiivinen systeemi. Tällöin lokalisaatiossa $S^{-1}R$*

$$S^{-1}(I_1 + I_2) = (S^{-1}I_1) + (S^{-1}I_2)$$

ja

$$S^{-1}(I_1I_2) = (S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2).$$

Todistus. Todistetaan ensin yhteenlasku. Olkoon $a \in S^{-1}(I_1 + I_2)$. Tällöin voidaan kirjoittaa $a = r/s$, missä $r \in I_1 + I_2$ ja $s \in S$. Koska I_1 ja I_2 ovat ideaaleja, voidaan määritelmän 2.9 perusteella kirjoittaa $r = a_1 + a_2$, missä $a_1 \in I_1$ ja $a_2 \in I_2$. Tällöin kokonaisalueen R osittelulakien ja kertolaskun vaihdannaisuuden sekä määritelmän

2.4 nojalla

$$\begin{aligned} a &= (a_1 + a_2)/s \\ &= ((a_1 + a_2)/s) \cdot (1/1) \\ &= ((a_1 + a_2)/s) \cdot (s/s) \\ &= (a_1 s + s a_2)/ss \\ &= (a_1/s) + (a_2/s), \end{aligned}$$

joten $a \in (S^{-1}I_1) + (S^{-1}I_2)$. Näin ollen $S^{-1}(I_1 + I_2) \subseteq (S^{-1}I_1) + (S^{-1}I_2)$.

Olkoon sitten $a \in (S^{-1}I_1) + (S^{-1}I_2)$. Nyt lauseen 2.9 mukaan $S^{-1}I_1$ ja $S^{-1}I_2$ ovat lokalisaation $S^{-1}R$ ideaaleja, joten voidaan kirjoittaa $a = a_1 + a_2$, missä $a_1 \in S^{-1}I_1$ ja $a_2 \in S^{-1}I_2$. Määritelmän 2.9 perusteella taas voidaan kirjoittaa $a_1 = r_1/s_1$ ja $a_2 = r_2/s_2$, missä $r_1 \in I_1$, $r_2 \in I_2$ ja $s_1, s_2 \in S$. Määritelmän 2.4 mukaan $a = (r_1/s_1) + (r_2/s_2) = (r_1 s_2 + r_2 s_1/s_1 s_2)$. Koska I_1 ja I_2 ovat ideaaleja, niin $r_1 s_2 \in I_1$ ja $r_2 s_1 \in I_2$, ja koska S on kertolaskun suhteen suljettu, niin $s_1 s_2 \in S$. Tästä seuraa, että $(r_1 s_2 + r_2 s_1/s_1 s_2) \in S^{-1}(I_1 + I_2)$. Täten $(S^{-1}I_1) + (S^{-1}I_2) \subseteq S^{-1}(I_1 + I_2)$.

Yllä olevan perusteella $S^{-1}(I_1 + I_2) = (S^{-1}I_1) + (S^{-1}I_2)$.

Todistetaan sitten kertolasku. Olkoon $a \in S^{-1}(I_1 I_2)$. Tällöin voidaan kirjoittaa $a = r/s$, missä $r \in I_1 I_2$ ja $s \in S$. Koska I_1 ja I_2 ovat ideaaleja, voidaan määritelmän 2.10 perusteella kirjoittaa $r = r_1 t_1 + r_2 t_2 + \cdots + r_k t_k$, missä $r_i \in I_1$ ja $t_i \in I_2$, kun $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} a &= (r_1 t_1 + r_2 t_2 + \cdots + r_k t_k)/s \\ &= (r_1/s)(t_1/1) + (r_2/s)(t_2/1) + \cdots + (r_k/s)(t_k/1). \end{aligned}$$

Määritelmän 2.9 mukaan $S^{-1}I_1$ ja $S^{-1}I_2$ ovat ideaaleja, ja lauseen 2.10 mukaan kahden ideaalin tulo on ideaali, joten $(S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$ on ideaali. Täten se on yhteenlaskun suhteen suljettu. Koska lisäksi $(r_i/s)(t_1/1) \in (S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$, niin $a \in (S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$. Täten $S^{-1}(I_1 I_2) \subseteq (S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$.

Olkoon sitten $a \in (S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$. Tällöin voidaan kirjoittaa $a = (r_1/s_1)(r_2/s_2)$, missä $r_1 \in I_1$, $r_2 \in I_2$ ja $s_1, s_2 \in S$. Määritelmän 2.4 perusteella $(r_1/s_1)(r_2/s_2) = (r_1 r_2)/(s_1 s_2)$. Määritelmän 2.10 nojalla $r_1 r_2 \in I_1 I_2$, ja koska S on kertolaskun suhteen suljettu, niin $s_1 s_2 \in S$. Tästä seuraa, että $a \in S^{-1}(I_1 I_2)$, joten $(S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2) \subseteq S^{-1}(I_1 I_2)$.

Yllä olevan perusteella $S^{-1}(I_1 I_2) = (S^{-1}I_1)(S^{-1}I_2)$. □

Esimerkki 2.8. Esimerkissä 2.5 todettiin $2\mathbb{Z}$ ja $3\mathbb{Z}$ kokonaisalueen $\mathbb{Z}$ ideaaleiksi. Koska lauseen 2.10 mukaan kahden ideaalin summa on ideaali, voidaan määrittää ideaali $2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}$. Määritelmän 2.9 mukaan $2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z} = \{a+b \mid a \in 2\mathbb{Z}, b \in 3\mathbb{Z}\}$. Sen alkiot ovat siis muotoa $2c+3d$ joillakin $c, d \in \mathbb{Z}$. Koska $\text{syt}(2,3) = 1$, niin Bézout'n lemman nojalla on olemassa sellaiset $k, l \in \mathbb{Z}$, että $2k + 3l = 1$ [6, s. 96]. Täten $1 \in 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$, jolloin $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Koska lauseen 2.5 mukaan myös ideaalien tulo on ideaali, voidaan määrittää ideaali $2\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z}$. Määritelmän 2.10 nojalla sen alkiot ovat muotoa

$$\begin{aligned}&\{a_1b_1 + \cdots + a_kb_k \mid a_i \in 2\mathbb{Z}, b_i \in 3\mathbb{Z}\}\\ &= \{2c_13d_1 + \cdots + 2c_k3d_k \mid c_i, d_i \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{6(c_1d_1 + \cdots + c_kd_k) \mid c_i, d_i \in \mathbb{Z}\},\end{aligned}$$

joten $2\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$. Olkoon sitten $6c \in 6\mathbb{Z}$. Koska $6c = (2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot c) \in 2\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z}$, niin $6\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z}$. Täten $2\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$.

Koska esimerkin 2.6 nojalla parittomien lukujen joukko P on kokonaislukujen multiplikatiivinen systeemi, niin lauseen 2.11 perusteella lokalisaatiot $P^{-1}(2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}) = P^{-1}\mathbb{Z}$ ja $P^{-1}2\mathbb{Z} + P^{-1}3\mathbb{Z}$ ovat samat. Samoin perusteluin myös lokalisaatiot $P^{-1}(2\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z}) = P^{-1}6\mathbb{Z}$ ja $P^{-1}2\mathbb{Z} \cdot P^{-1}3\mathbb{Z}$ ovat samat.

Esimerkki 2.9. Kokonaislukukertoimisten polynomien rengas

$$\mathbb{Z}[x] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

on kokonaisalue, koska $\mathbb{Z}$ on kokonaisalue. Merkitään alkion 2 virittämää ideaalia $\langle 2 \rangle = \{2 \cdot r \mid r \in \mathbb{Z}[x]\}$ ja alkion x virittämää ideaalia $\langle x \rangle = \{x \cdot r \mid r \in \mathbb{Z}[x]\}$. Ideaali $\langle 2 \rangle$ sisältää sellaiset polynomit, joissa kaikki kertoimet ovat parillisia, ja ideaali $\langle x \rangle$ puolestaan vakiotermittömät polynomit.

Määritetään ideaali $\langle 2 \rangle + \langle x \rangle$. Määritelmän 2.9 nojalla sen alkiot ovat muotoa $\{p + q \mid p \in \langle 2 \rangle, q \in \langle x \rangle\}$. Koska ideaalin $\langle 2 \rangle$ alkiot voidaan kirjoittaa muodossa $p = 2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + 2a_mx^m \in \langle 2 \rangle$ ja ideaalin $\langle x \rangle$ alkiot muodossa $q = b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \in \langle x \rangle$, niin

$$\begin{aligned}p + q &= 2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + 2a_mx^m + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\\ &= 2a_0 + (2a_1 + b_1)x + (2a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (2a_k + b_k)x^k,\end{aligned}$$

kun $k = \max\{m, n\}$ ja $a_i = 0$, kun $i > m$, ja $b_j = 0$, kun $j > n$. Täten kaikkien ideaalin $\langle 2 \rangle + \langle x \rangle$ sisältämien polynomien vakiotermi on parillinen.

Merkitään kaikkien sellaisten polynomien, joiden vakiotermi on parillinen, joukkoa merkinnällä P. Olkoon $r = 2c_0 + 2c_1x + \cdots + 2cx^i \in P$. Koska $2c_0 \in \langle 2 \rangle$

ja $2c_1x + \cdots + 2cx^i \in \langle x \rangle$, niin $r \in \langle 2 \rangle + \langle x \rangle$. Täten $P \subseteq \langle 2 \rangle + \langle x \rangle$. Näin ollen $P = \langle 2 \rangle + \langle x \rangle$.

Määritetään sitten ideaali $\langle 2 \rangle \cdot \langle x \rangle$. Määritelmän 2.10 nojalla sen alkiot ovat muotoa

$$\{p_1q_1 + \cdots + p_kq_k \mid p_i \in \langle 2 \rangle, q_i \in \langle x \rangle\}.$$

Koska polynomien p_i kaikki kertoimet ovat parillisia, myös kaikkien polynomien p_iq_i kaikki kertoimet ovat parillisia. Tällöin myös kaikkien tällaisten polynomien äärellisten summien kaikki kertoimet ovat parillisia. Koska mikään polynomi q_i ei sisällä vakiotermiä, ei myöskään mikään tulo p_iq_i sisällä vakiotermiä, kuten ei myöskään mikään näiden äärellinen summa. Ideaalin $\langle 2 \rangle \cdot \langle x \rangle$ polynomit ovat siis vakiotermittömiä ja niiden kaikki kertoimet ovat parillisia.

Lauseen 2.11 perusteella lokalisaatiot $S^{-1}(\langle 2 \rangle + \langle x \rangle)$ ja $S^{-1}\langle 2 \rangle + S^{-1}\langle x \rangle$ ovat samat. Myös lokalisaatiot $S^{-1}(\langle 2 \rangle \cdot \langle x \rangle)$ ja $S^{-1}\langle 2 \rangle \cdot S^{-1}\langle x \rangle$ ovat samat. Näin on riippumatta siitä, mikä multiplikatiivinen systeemi S valitaan.

Lähteet

[1] W. Aitken, Localization in Integral Domains [Verkkodokumentti], 2019 [Viitattu 31.10.2024]. URL https://public.csusm.edu/aitken_html/Essays/CommAlgNT/LocalizationIntDom.pdf.

[2] P.E. Bland, The Basics of Abstract Algebra, 1st Ed, W. H. Freeman and Company, 2001.

[3] A. Gathmann, Commutative Algebra [Verkkodokumentti], TU Kaiserslautern, 2023 [Viitattu 31.10.2024]. URL https://agag-gathmann.math.rptu.de/en/commalg.php.

[4] T. W. Judson, Abstract Algebra: Theory and Applications, Annual Edition 2022, 2022. URL http://abstract.ups.edu/download/aata-20220728.pdf.

[5] C. C. Pinter, A Book of Abstract Algebra, 1st Ed, McGraw-Hill Book Company, 1982.

[6] K. Rosen, Elementary Number Theory, 6th Ed, Pearson, 2013.