

Daniel Albayrak

EPÄOLEELLISTEN INTEGRAALIEN JA TASOINTEGRAALIEN SUPPENEMISESTA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Lokakuu 2024

Tiivistelmä

Daniel Albayrak: Epäoleellisten integraalien ja tasointegraalien suppenemisesta

Kandidaattitutkielma

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma

Lokakuu 2024

Tutkielma käsittelee erilaisia suppenemistestejä yhden ja kahden muuttujan epäoleellisille integraaleille, sekä motivoi niiden tarpeellisuutta matematiikan teoriassa ja käytännön sovelluksissa. Tutkielmassa pyritään antamaan havainnollistava esimerkki kunkin testin käytöstä. Luvussa 2 esitellään tarvittavia taustatietoja, kuten osittaisintegrointiin, monotonisuuteen sekä kaksinkertaisen integraalien teoriaan liittyviä lauseita. Luvussa 3 käsitellään yhden muuttujan epäoleellisten integraalien suppenemistestit. Ensimmäiseksi vertailutesti, jossa tutkittavaa epäoleellista integraalia verrataan toiseen, ominaisuuksiltaan tunnettuun epäoleelliseen integraaliin. Tämän jälkeen käsitellään raja-arvojen vertailutesti, jossa lasketaan tutkittavan funktion ja verrokkifunktion osamäärän raja-arvo. Mikäli verrokkifunktion epäoleellisen integraalin suppenemisestä on tietoa, voidaan tehdä johtopäätöksiä saadusta raja-arvosta. Lopuksi esitellään itseisen suppenemisen teoriaa, jonka avulla voidaan todeta epäoleellisen integraalin tavanomainen suppeneminen, sekä Dirichlet'n testi, joka toimii ehdollisesti suppeneville epäoleellisille integraaleille. Testit todistetaan sekä niiden käyttöä havainnollistetaan esimerkein kussakin alaluvussa. Vertailutesti ja Dirichlet'n testi laajennetaan luvussa 4 kaksinkertaisille epäoleellisille integraaleille. Luvun alussa esitellään kahden muuttujan integraalilaskentaan liittyviä lauseita, joita tarvitaan testien todistukseen. Lisäksi annetaan esimerkki suppenevästä kahden muuttujan epäoleellisesta integraalista, jota käytetään apuna luvun esimerkeissä havainnollistamaan testien käyttöä.

Avainsanat: epäoleellinen integraali, tasointegraali, suppenemistesti, integraalin suppeneminen, vertailutesti, raja-arvojen vertailutesti, itseinen suppeneminen, dirichlet'n testi, epäoleellinen tasointegraali, kaksinkertainen integraali

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1	Johdanto	5
2	Esitietoja	7
3	Suppenemistestit yhden muuttujan epäoleellisille integraaleille	10
3.1	Vertailutesti	10
3.2	Raja-arvojen vertailutesti	13
3.3	Itseinen suppeneminen	15
3.4	Dirichlet'n testi	16
4	Suppenemistestit kaksinkertaisille epäoleellisille integraaleille	19
4.1	Tarvittavia lauseita	20
4.2	Vertailutesti kaksinkertaisille epäoleellisille integraaleille	21
4.3	Dirichlet'n testi kaksinkertaisille integraaleille	23
	Lähteet	27

1 Johdanto

Epäoleelliset integraalit ovat keskeisessä asemassa differentiaali- ja integraalilaskennan teoriassa sekä sovelluksissa, sillä tarkasteltavat funktiot voivat usein olla joko rajoittamattomia tai integroimisväli voi olla rajoittamaton. Ymmärrys siitä, suppeneeko vai hajaantuuko tällainen integraali, on tarpeen monilla tieteenaloilla, kuten todennäköisyyslaskennassa, fysiikassa ja tekniikan aloilla, joissa epäoleellisia integraaleja esiintyy usein.

Tutkielman tavoitteena on esitellä erilaisia suppenemistestejä sekä yhden että kahden muuttujan epäoleellisille integraaleille. Funktiot voivat monesti olla hankalia integroida tai kiinnostuksen kohteena ei ole tietää integraalin tarkkaa arvoa, vaan ainoastaan suppeneeko se. Käyttämällä suppenemistestejä voidaan päätellä onko tutkimamme epäoleellinen integraali olemassa äärellisenä vai ei.

Luvussa 2 käydään läpi tarvittavat esitiedot, kuten osittaisintegrointi ja monotonisten funktioiden ominaisuudet, jotka ovat tarpeen suppenemistestien ymmärtämiseksi ja todistamiseksi. Luvussa 3 todistetaan ei-negatiivisten funktioiden epäoleellisille integraaleille vertailutesti apulauseen avulla, sekä raja-arvojen vertailutesti, joka voidaan todistaa taas vertailutestin avulla. Tämän jälkeen käsitellään itseinen suppeneminen sekä todistus sen käytölle suppenemistestinä. Lopuksi käydään läpi Dirichlet'n testi, joka on tarpeen mikäli tutkimamme epäoleellinen integraali suppenee ehdollisesti. Käsittelemämme testit toimivat tilanteissa, joissa funktio voi olla rajoittamaton jossain integrointivälin pisteessä tai integrointiväli on ääretön.

Luvussa 4 laajennetaan tuloksia kaksinkertaisiin epäoleellisiin integraaleihin, joissa laskenta on monimutkaisempaa kahden muuttujan yhteisvaikutuksen vuoksi. Luvussa käytettävät lauseet ja tulokset ovat kuitenkin vastaavanlaisia yhden muuttujan epäoleellisten integraalien suppenemistesteihin nähden. Todistamme aluksi muutaman apulauseen, jonka jälkeen voimme todistaa suppenemistestit kaksinkertaisille epäoleellisille integraaleille. Kummankin testin käytölle annetaan esimerkit havainnollistamaan niiden käyttöä.

Luku 3 ja yhden muuttujan epäoleellisten integraalien taustatiedot pohjautuvat F. Trenchin *Introduction to Real Analysis* kirjaan ja luku 4, kahden muuttujan epäoleellisten integraalien taustatiedot mukaanlukien pohjautuvat *A Course in Multivariable Calculus and Analysis* kirjaan. Lukijalta odotetaan

perustiedot epäoleellisista integraaleista sekä alkeet kahden muuttujan integraalilaskennasta.

2 Esitietoja

Lause 2.1 (Osittaisintegrointi). *Olkoot f' ja g' integroituvia välillä $[a, b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Todistus. (Ks. [1, s. 145]). □

Lause 2.2. *Oletetaan että f on monotoninen avoimella välillä (a, b) ja määritellään*

$$\alpha := \inf_{a < x < b} f(x), \quad \beta := \sup_{a < x < b} f(x).$$

Jos f on monotonisesti kasvava, niin $f(a^+) = \alpha$ ja $f(b^-) = \beta$.

Todistus. (Ks. [1, s. 46]). □

Lause 2.3. *Olkoot f ja g integroituvia välillä $[a, b]$ ja $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $a \leq x \leq b$. Tällöin*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Todistus. (Ks. [1, s. 138]). □

Lause 2.4. *Olkoot f_1, \dots, f_n integroituvia jokaisella välin $[a, b]$ suljetulla osavälillä siten että integraalit*

$$\int_a^b f_1(x) dx, \int_a^b f_2(x) dx, \dots, \int_a^b f_n(x) dx$$

suppenevat. Olkoot $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Tällöin integraali

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n)(x) dx$$

suppenee ja

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n)(x) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

Todistus. (Ks. [1, s. 156]). □

Määritelmä 2.1 (Kaksinkertainen integraali). Olkoon $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, missä määrittelyjoukkona on suorakulmio tasossa \mathbb{R}^2 ja $x \in [a, b], y \in [c, d]$. Tällöin funktion $f(x, y)$ integraalia merkitään

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dA,$$

missä $dA = dx dy$ tai $dA = dy dx$ riippuen integroinnin järjestyksestä. Integraalifunktio F saadaan määrittelemällä

$$F(s, t) = \iint_{[a,s] \times [c,t]} f(x, y) dA.$$

Asettamalla $b = d = \infty$, saamme kaksinkertaisen epäoleellisen integraalin rajoittamattomalla alueella

$$\iint_{[a,\infty) \times [c,\infty)} f(x, y) dA.$$

Määritelmä 2.2 (Bimonotonisuus). Funktion $f(x, y)$ sanotaan olevan bimonotoninen (eng. bimonotonic), jos:

1. Funktio on monotoninen muuttujan x suhteen, kun y on kiinnitetty.
2. Funktio on monotoninen muuttujan y suhteen, kun x on kiinnitetty.

Lause 2.5. *Olkoon $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ja I, J sellaisia reaalilukuvälejä, että $I \times J \subseteq D$. Olkoon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen funktio, jolla on olemassa osittaisderivaatat f_x ja f_{xy} joukossa $I \times J$. Tällöin:*

1. *Funktio f on bimonotonisesti kasvava joukossa $I \times J$, jos ja vain jos $f_{xy} \geq 0$ joukossa $I \times J$.*
2. *Funktio f on bimonotonisesti vähenevä joukossa $I \times J$, jos ja vain jos $f_{xy} \leq 0$ joukossa $I \times J$.*

Todistus. (Ks. [2, s. 126]). □

Lause 2.6. *Olkoon $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, missä $a < b, c < d$, ja joko $b, d \in \mathbb{R}$ tai $b = d = \infty$. Olkoon $f: (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ bimonotonisesti kasvava funktio. Tällöin raja-arvo*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (b^-, d^-)} f(x, y)$$

on olemassa äärellisenä, jos ja vain jos f on ylhäältä rajoitettu. Tällöin

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (b^-, d^-)} f(x, y) = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in (a, b) \times (c, d)\}$$

Jos f ei ole ylhäältä rajoitettu, niin $f(x, y) \rightarrow \infty$, kun $(x, y) \rightarrow (b^-, d^-)$.

Todistus. (Ks. [2, s. 74-75]). □

Lause 2.7. Olkoon $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja $s \in (a, b), t \in (c, d)$. Tällöin f on integroitava suorakulmiossa $[a, b] \times [c, d]$, jos ja vain jos se on integroitava jokaisessa suorakulmiossa $[a, s] \times [c, t], [a, s] \times [t, d], [s, b] \times [c, t]$ ja $[s, b] \times [t, d]$ erikseen. Tällöin

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f = \iint_{[a,s] \times [c,t]} f + \iint_{[a,s] \times [t,d]} f + \iint_{[s,b] \times [c,t]} f + \iint_{[s,b] \times [t,d]} f.$$

Todistus. (Ks. [2, s. 199]). □

Lause 2.8 (Osittaisintegrointi kaksinkertaisille integraaleille). Olkoon $R := [a, b] \times [c, d]$ suorakulmio tasossa \mathbb{R}^2 ja funktiot $f, g: R \rightarrow \mathbb{R}$ sellaisia että f_x, f_y ja f_{xy} ovat olemassa ja jatkuvia määrittelyjoukossaan. Olkoon g myös jatkuva. Määritellään integraalifunktio

$$G(s, t) := \iint_{[a,s] \times [c,t]} g(x, y) dA,$$

missä $(s, t) \in [a, b] \times [c, d]$. Tällöin

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y)g(x, y) dA &= f(b, d)G(b, d) + \iint_R f_{xy}(x, y)G(x, y) dA \\ &\quad - \int_a^b f(x, d)G(x, d) dx - \int_c^d f(b, y)G(b, y) dy. \end{aligned}$$

Todistus. (Ks. [2, s. 433]). □

3 Suppenemistestit yhden muuttujan epäoleellisille integraaleille

Aloitetaan määrittelemällä epäoleellinen integraali, jossa funktiolla on epäoleellisuus piste integrointivälin lopussa.

Määritelmä 3.1. Olkoon f integroitava jokaisella välin $[a, b)$ suljetulla osavälillä. Merkitsemme

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx,$$

jos raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Tulemme käyttämään lauseiden todistuksissa määritelmän 3.1 mukaista epäoleellista integraalia. Vastaavat tulokset pätevät myös välillä $(a, b]$, missä epäoleellisuus piste on integrointivälin alussa. Tulokset ovat lisäksi voimassa, jos $a = -\infty$ tai $b = \infty$.

Mikäli epäoleellisuus piste on integrointivälin molemmissa päätepisteissä (a, b) , integraalin voi jakaa kahteen osaan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^b f(x) dx,$$

missä $a < \alpha < b$. Piste α voi valita vapaasti, kunhan valitulla avoimella välillä ei ole yhtään epäoleellisuus pistettä.

Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Oletetaan tunnetuksi, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty c \frac{1}{x^p} dx$$

suppenee, kun $p > 1$ ja epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 c \frac{1}{x^p} dx$$

suppenee, kun $p \leq 1$. Muutoin integraalit hajaantuvat. (Ks. [1, s. 155]).

3.1 Vertailutesti

Käsitlemme ensiksi vertailutestin, jossa tutkimaamme epäoleellista integraalia verrataan toiseen, ominaisuuksiltaan tunnettuun epäoleelliseen integraaliin.

Sekä tutkimamme funktion että verrokkifunktion tulee olla ei-negatiivisia integrointivälillä. Jos verrokkifunktiomme saa suurempia tai yhtä suuria arvoja ja sen epäoleellinen integraali suppenee, voimme todeta, että myös tutkimamme funktion epäoleellinen integraali suppenee samalla välillä. Aloitetaan todistamalla aputuloksella, jonka avulla voimme todistaa vertailutestin.

Lause 3.1. *Olkoon f ei-negatiivinen ja integroitava funktio jokaisella välin $[a, b)$ suljetulla osavälillä. Tällöin epäoleellinen integraali*

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee, jos integraalifunktio

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

on rajoitettu välillä $[a, b)$. Muutoin epäoleellinen integraali hajaantuu. Lisäksi

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{a \leq t < b} F(t)$$

on voimassa kummassakin tapauksessa.

Todistus. (Vrt. [1, s. 157]). Oletetaan, että funktio $F(t)$ on rajoitettu välillä $[a, b)$. Nyt, koska F on integraalifunktiona monotonisesti kasvava ja rajoitettu välillä $[a, b)$, saa se suurimman arvonsa pisteessä b , ja voimme todeta lauseen 2.2 nojalla, että

$$\sup_{a \leq t < b} \left(\int_a^t f(x) dx \right) = \sup_{a \leq t < b} F(t) < \infty.$$

□

Lause 3.2 (Vertailutesti). *Olkoott funktiot f ja g integroituvia jokaisella välin $[a, b)$ suljetulla osavälillä ja $0 \leq f(x) \leq g(x)$ kaikilla $a \leq x \leq b$. Tällöin*

(a)

$$\int_a^b f(x) dx < \infty, \quad \text{jos} \quad \int_a^b g(x) dx < \infty.$$

(b)

$$\int_a^b g(x) dx = \infty, \quad \text{jos} \quad \int_a^b f(x) dx = \infty.$$

Todistus. (Vrt. [ref1, s. 158]). (a) Oletuksesta $f(x) \leq g(x)$ sekä lauseesta 2.3 seuraa, että

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx, \quad a \leq t < b.$$

Tällöin

$$\sup_{a \leq t < b} \int_a^t f(x) dx \leq \sup_{a \leq t < b} \int_a^t g(x) dx.$$

Mikäli $\int_a^b g(x) dx < \infty$, on epäyhtälön oikea puoli lauseen 3.1 nojalla rajoitettu, jolloin myös pienemmälle epäoleelliselle integraalille pätee $\int_a^b f(x) dx < \infty$.

(b) Todistetaan tulos epäsuorasti tekemällä vasta oletus. Oletetaan, että $\int_a^b f(x) dx = \infty$ ja $\int_a^b g(x) dx < \infty$. Tällöin (a)-kohdan nojalla myös $\int_a^b f(x) dx < \infty$, mikä on ristiriita. \square

Huomautus. Lauseen 3.2 a) kohtaa kutsutaan *majoranttiperiaatteeksi* ja b) kohtaa *minoranttiperiaatteeksi*.

Esimerkki 1. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_2^{\infty} \frac{7 + 3 \cos^2 x}{\sqrt{x}(12 - \sin^6(2x))} dx$$

hajaantuu. Koska termit $3 \cos^2 x$ sekä $\sin^6(2x)$ ovat positiivisia ja $x \geq 2$, saamme muodostettua epäyhtälön

$$\frac{7 + 3 \cos^2 x}{\sqrt{x}(12 - \sin^6(2x))} \geq \frac{7}{\sqrt{x}(12 - \sin^6(2x))} \geq \frac{1}{12\sqrt{x}}.$$

Tiedämme, että epäoleellinen integraali

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{12\sqrt{x}} dx$$

hajaantuu, joten minoranttiperiaatteen nojalla myös tutkimamme epäoleellinen integraali hajaantuu.

Esimerkki 2. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^2 \frac{7 + 3 \cos^2 x}{\sqrt{x}(12 - \sin^6(2x))} dx$$

suppenee. Kyseessä on siis sama funktio, mutta epäoleellisuuspiste on integrointivälin alarajalla. Koska $0 \leq 3 \cos^2 x \leq 3$ ja $0 \leq \sin^6(2x) \leq 1$, voimme muodostaa epäyhtälön

$$\frac{7 + 3 \cos^2 x}{\sqrt{x}(12 - \sin^6(2x))} \leq \frac{7 + 3}{\sqrt{x}(12 - \sin^6(2x))} \leq \frac{10}{\sqrt{x}(12 - 1)} < \frac{10}{\sqrt{x}}.$$

Tiedämme, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^2 \frac{10}{\sqrt{x}} dx$$

suppenee, joten majoranttiperiaatteen nojalla myös tutkimamme epäoleellinen integraali suppenee.

3.2 Raja-arvojen vertailutesti

Raja-arvojen vertailutestissä laskemme tutkimamme funktion sekä valitsemamme verrokkifunktion osamäärän raja-arvon, jonka perusteella voimme tehdä johtopäätöksiä. Raja-arvojen vertailutesti muistuttaa tavallista vertailutestiä ja se todistetaan majorantti- ja minoranttiperiaatteiden avulla. Testin käyttämiseksi meidän tulee siis tietää, suppeneeko vai hajaantuuko valitsemamme verrokkifunktion epäoleellinen integraali.

Lause 3.3 (Raja-arvojen vertailutesti). *Olkoot f ja g integroituvia jokaisella välillä $[a, b]$ suljetulla osavälillä sekä $g(x) > 0$ ja $f(x) \geq 0$ jollain välillä $[a, b]$ osavälillä $[a_1, b]$ sekä*

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = M.$$

Tällöin:

- (a) *Jos $0 < M < \infty$, niin integraalit $\int_a^b f(x) dx$ ja $\int_a^b g(x) dx$ suppenevat tai hajaantuvat samanaikaisesti.*
- (b) *Jos $M = \infty$ ja $\int_a^b g(x) dx$ hajaantuu, niin myös $\int_a^b f(x) dx$ hajaantuu.*
- (c) *Jos $M = 0$ ja $\int_a^b g(x) dx$ suppenee, niin myös $\int_a^b f(x) dx$ suppenee.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 159-160]). (a) Mikäli raja-arvo on äärellinen, on välillä $[a_1, b]$ olemassa sellainen piste a_2 , että

$$0 < \frac{M}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3M}{2}, \quad a_2 \leq x < b.$$

Kertomalla epäyhtälö puolittain termillä $g(x)$ saamme

$$0 < \frac{M}{2}g(x) < f(x) < \frac{3M}{2}g(x), \quad a_2 \leq x < b.$$

Tällöin, koska $\frac{M}{2}g(x) < f(x)$, voimme todeta majoranttiperiaatteen nojalla, että

$$\int_{a_2}^b g(x) dx < \infty, \quad \text{jos} \quad \int_{a_2}^b f(x) dx < \infty.$$

Toisaalta, koska $f(x) < \frac{3M}{2}g(x)$, voimme todeta majoranttiperiaatteen nojalla, että

$$\int_{a_2}^b f(x) dx < \infty, \quad \text{jos} \quad \int_{a_2}^b g(x) dx < \infty.$$

Eli vertailutesti on voimassa molempiin suuntiin. Tällöin integraalien on supettava tai hajaannuttava samanaikaisesti.

(b) Oletetaan, että integraali $\int_a^b g(x) dx$ hajaantuu. Jos $M = \infty$, on välillä $[a_1, b)$ olemassa sellainen piste a_2 , että

$$g(x) \leq f(x), \quad a_2 \leq x < b,$$

sillä osamäärä $\frac{f(x)}{g(x)}$ ei voisi muuten lähestyä ääretöntä. Tällöin minoranttiperiaatteen nojalla myös integraali $\int_a^b f(x) dx$ hajaantuu.

(c) Oletetaan, että integraali $\int_a^b g(x) dx$ suppenee. Jos $M = 0$, on välillä $[a_1, b)$ olemassa sellainen piste a_2 , että

$$f(x) \leq g(x), \quad a_2 \leq x < b,$$

sillä vastaavasti kuin kohdassa (b), osamäärä $\frac{f(x)}{g(x)}$ ei voisi muuten lähestyä nollaa. Tällöin majoranttiperiaatteen nojalla myös $\int_a^b f(x) dx$ suppenee. \square

Raja-arvojen vertailutesti ei siis vaadi, että funktion g täytyisi olla suurempi tai pienempi kuin tutkittava funktio f koko integrointivälillä. Tällöin testi soveltuu hyvin tilanteisiin, kun tutkittavasta funktiosta on hankala tietää, heilahtelee se verrokkifunktion ylä- tai alapuolella jossain kohtaa integrointiväliä.

Esimerkki 3. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_2^{\infty} \frac{5x^2 - 2x - 8}{3x^3 + 4x^{1/3}} dx$$

hajaantuu.

Valitaan vertailufunktioksi funktio $g(x) = \frac{1}{x}$. Tiedämme, että epäoleellinen integraali

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

hajaantuu. Käyttämällä raja-arvojen vertailutestiä saamme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x - 8}{3x^3 + 4x^{1/3}} \cdot \frac{x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 - 8x}{3x^3 + 4x^{1/3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2x^2}{x^3} - \frac{8x}{x^3}}{3 + \frac{4x^{1/3}}{x^3}} = \frac{5}{3},$$

jolloin voimme todeta raja-arvojen vertailutestin nojalla, että myös tutkimamme epäoleellinen integraali hajaantuu.

3.3 Itseinen suppeneminen

Edellä käsitelty vertailutesti sekä raja-arvojen vertailutesti toimivat ainoastaan, jos funktio on ei-negatiivinen jostain pisteestä $a < a_1 < b$ alkaen integrointivälillä $[a, b)$. Mikäli funktio on vuorotteleva, kyseisiä testejä ei voida soveltaa. Tähän saamme avuksi itseisen suppenemisen ja siihen liittyvät lauseet, jossa funktion vuorottelevuus vältetään siirtymällä tarkastelemaan sen itseisarvofunktiota ja pääsemme jälleen soveltamaan suppenemistestejä ei-negatiiviseen funktioon. Aloitetaan esittelemällä itseisen suppenemisen määritelmä. Tämän jälkeen esittelemme lauseen, jonka ansiosta itseisen suppenemisen käsite on mielekäs.

Määritelmä 3.2 (Itseinen suppeneminen). Olkoon f integroitava jokaisella välin $[a, b)$ suljetuilla osaväleillä. Epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee itseisesti, jos

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty.$$

Lause 3.4. Jos funktion f epäoleellinen integraali suppenee itseisesti, suppenee se tavallisessakin mielessä. Toisin sanoen,

$$\int_a^b f(x) dx < \infty, \quad \text{jos} \quad \int_a^b |f(x)| dx < \infty.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 162-163]). Oletetaan, että $\int_a^b |f(x)| dx$ suppenee. Jokaisella välin $[a, b)$ pisteellä x on voimassa epäyhtälö

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|.$$

Tällöin majoranttiperiaatteen nojalla epäoleellinen integraali

$$\int_a^b (|f(x)| - f(x)) dx$$

suppenee. Edelleen, koska

$$\int_a^b |f(x)| - (|f(x)| - f(x)) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

niin lauseen 2.4 nojalla myös funktion f epäoleellinen integraali suppenee. \square

Huomautus. Lause 3.4 ei kuitenkaan päde toiseen suuntaan. Epäoleellinen integraali voi hajaantua itseisesti, mutta supeta tavallisessa mielessä. Tällöin sanomme, että epäoleellinen integraali suppenee *ehdollisesti*.

Esimerkki 4. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{x \sin x}{2 + 2x^3} dx$$

suppenee. Ottamalla itseisarvon funktiosta saamme muodostettua epäyhtälön

$$\left| \frac{x \sin x}{2 + 2x^3} \right| \leq \frac{x}{2 + 2x^3} < \frac{x}{2x^3} = \frac{1}{2x^2}$$

sillä $|\sin x| \leq 1$. Tiedämme, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x^2} dx$$

suppenee, jolloin voimme todeta että tutkimamme epäoleellinen integraali suppenee itseisesti ja lauseen 3.4 nojalla, että se suppenee tavallisessakin mielessä.

3.4 Dirichlet'n testi

Olemme esitelleet suppenemistestejä ei-negatiivisille funktioille ja käsitelleet itseisen suppenemisen käsitteen, jonka avulla vuorotteleva funktio voidaan muuntaa ei-negatiiviseksi.

Mikäli haluamme tutkia funktiota, joka ei supene itseisesti, mutta saattaisi supeta ehdollisesti, tulee meidän käyttää Dirichlet'n testiä.

Lause 3.5 (Dirichlet'n testi). *Olkoot f ja g sellaisia funktioita, että f on jatkuva ja g on derivoituva välillä $[a, b]$. Oletetaan, että:*

1. *Funktion f integraalifunktio*

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

on rajoitettu välillä $[a, b)$.

2. *Funktion g' epäoleellinen integraali suppenee itseisesti välillä $[a, b)$.*

3. *On voimassa*

$$\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0.$$

Tällöin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)g(x) dx$$

suppenee.

Todistus. (Vrt. [1, s. 164]). Koska f ja g ovat jatkuvia (funktion g jatkuvuus seuraa oletuksesta 2.), on niiden tulo fg jatkuva sekä integroitava jokaisella välin $[a, b)$ suljetulla osavälillä. Olkoon $c \in [a, b)$. Osittaisintegroinnin avulla saamme

$$\int_a^c f(x)g(x) dx = F(c)g(c) - \int_a^c F(x)g'(x) dx.$$

Majoranttiperiaatteen nojalla integraali $\int_a^c F(x)g'(x) dx$ suppenee, kun $c \rightarrow b^-$, sillä F on rajoitettu ja funktion g' epäoleellinen integraali suppenee. Tällöin voimme muodostaa epäyhtälön

$$|F(x)g'(x)| \leq M|g'(x)|,$$

missä M on rajoitetun funktion $|F(x)|$ yläraja välillä $[a, b)$. Lisäksi, oletuksen 3 perusteella $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, jolloin $F(c)g(c) \rightarrow 0$, kun $c \rightarrow b^-$. Näin ollen saamme osittaisintegroinnin avulla yhtälön

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0 - \int_a^b F(x)g'(x) dx,$$

missä yhtälön oikea puoli suppenee itseisesti. □

Esimerkki 5. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(7x) \cos(9x)}{x} dx$$

suppenee. Valitaan funktioksi $f(x) = \sin(7x) \cos(9x)$ ja $g(x) = \frac{1}{x}$. Käytetään apuna trigonometrian kaavaa $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$. Nyt, funktion f integraalifunktio on rajoitettu, sillä

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t \sin(7x) \cos(9x) dx = \int_1^t \frac{1}{2}(\sin(16x) + \sin(-2x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^t (\sin(16x) - \sin(2x)) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 16t}{16} + \frac{\cos 2t}{2} - \left(-\frac{\cos 16 \cdot 1}{16} + \frac{\cos 2 \cdot 1}{2} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 16}{16} - \frac{\cos 2}{2}. \end{aligned}$$

Lisäksi $\int_1^\infty g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ suppenee itseisesti ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, jolloin voimme todeta Dirichlet'n testin nojalla, että tutkimamme epäoleellinen integraali suppenee.

4 Suppenemistestit kaksinkertaisille epäoleellisille integraaleille

Integrointi moniulotteisessa avaruudessa on huomattavasti monimutkaisempaa verrattuna yhden muuttujan integraalilaskentaan, jossa lasketaan tyypillisesti funktion kuvaajan rajaamaa pinta-alaa jollain reaalityyppisellä alueella I . Kahden muuttujan funktioiden integroinnin geometrisenä tulkintana on, että määritämme silloin funktion kuvaajan muodostaman pinnan ja jonkin xy -tason osajoukon väliin jäävän kappaleen tilavuutta. Esimerkiksi integrointijärjestyksellä voi olla merkitystä kahden muuttujan tapauksessa ja funktio voi sisältää epäjatkuvuuskohtia yhden tai molempien muuttujien suhteen, jotka tulee tarkastaa huolella. Tulemme rajoittamaan tarkastelun epäoleellisiin integraaleihin yli suorakulmioiden, sillä tarvitsisimme enemmän teoriaa käsittelemään integraaleja kahden muuttujan funktioille, jotka sisältävät epäjatkuvuuskohtia moniulotteisella integrointialueella. Käytämme lauseiden todistuksissa epäoleellista kaksinkertaista integraalia muodossa

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(x,y) dA$$

missä integrointialue on $[a, \infty) \times [c, \infty)$. Vastaavat tulokset pätevät myös muilla rajoittamattomilla suorakulmioilla, kuten $(-\infty, b] \times [c, \infty)$, $(-\infty, b] \times (-\infty, d]$ ja niin edelleen. (Ks. [2, s. 419]).

Esimerkki 6. (Vrt. [2, s. 417]). Olkoot α, β positiivisia reaalityypisiä lukuja. Tutkitaan kaksinkertaista epäoleellista integraalia

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} \alpha^x \beta^y dA.$$

Jokaisella $(s, t) \in [a, \infty) \times [c, \infty)$ pätee,

$$\iint_{[a,s]\times[c,t]} \alpha^x \beta^y dA = \begin{cases} \left(\frac{\alpha^s - \alpha^a}{\ln \alpha} \right) \left(\frac{\beta^t - \beta^c}{\ln \beta} \right), & \text{jos } \alpha \neq 1 \text{ ja } \beta \neq 1, \\ \frac{\alpha^s - \alpha^a}{\ln \alpha} (t - c), & \text{jos } \alpha \neq 1 \text{ ja } \beta = 1, \\ (s - a) \frac{\beta^t - \beta^c}{\ln \beta}, & \text{jos } \alpha = 1 \text{ ja } \beta \neq 1, \\ (s - a)(t - c), & \text{jos } \alpha = 1 = \beta. \end{cases}$$

Täten seuraa, että integraali

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} \alpha^x \beta^y dA$$

suppenee arvoon $\frac{\alpha^a \beta^c}{(\ln \alpha)(\ln \beta)}$, jos $\alpha < 1$ ja $\beta < 1$, ja hajaantuu muulloin kohti ääretöntä.

4.1 Tarvittavia lauseita

Tarvitsemme muutamaa lausetta apuna suppenemistestien todistukseen. Seuraava tulos vastaa lausetta 3.1 yhden muuttujan epäoleellisille integraaleille, jota tarvitaan vertailutestin todistukseen.

Lause 4.1. *Olkoon $f: [a, \infty) \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ei-negatiivinen, integroituva funktio suorakulmiossa $[a, s] \times [c, t]$ jokaisella $(s, t) \geq (a, c)$. Tällöin epäoleellinen kaksinkertainen integraali*

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(x, y) dA$$

suppenee, jos ja vain jos sen integraalifunktio F on rajoitettu. Tällöin pätee

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(x, y) dA = \sup\{F(s, t) : (s, t) \in [a, \infty) \times [c, \infty)\}.$$

Mikäli F ei ole rajoitettu, epäoleellinen integraali hajaantuu.

Todistus. (Vrt. [2, s. 421]). Olkoon $(s_2, t_2) \geq (s_1, t_1) \geq (a, c)$. Lauseen 2.7 nojalla saamme

$$\begin{aligned} F(s_2, t_2) &= \iint_{[a,s_1]\times[c,t_1]} f(x, y) dA + \iint_{[s_1,s_2]\times[t_1,t_2]} f(x, y) dA + \iint_{[a,s_1]\times[t_1,t_2]} f(x, y) dA \\ &+ \iint_{[s_1,s_2]\times[c,t_1]} f(x, y) dA \geq \iint_{[a,s_1]\times[a,t_1]} f(x, y) dA = F(s_1, s_2), \end{aligned}$$

sillä $f(x, y) \geq 0$ kaikilla $(x, y) \geq (a, c)$. Täten funktio F on monotonisesti kasvava, ja lauseen 2.6 nojalla asettamalla $b = d = \infty$ saamme halutun tuloksen. \square

Seuraava lause vastaa lausetta 3.4 yhden muuttujan epäoleellisille integraaleille. Toisin sanoen, itseisen suppenemisen tarkastelu toimii myös kaksinkertaisten epäoleellisten integraalien tapauksessa.

Lause 4.2. Jos kaksinkertainen epäoleellinen integraali suppenee itseisesti, suppenee se tavallisessakin mielessä.

Todistus. (Vrt. [2, s. 427]). Olkoon $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(x,y) dA$ itseisesti suppeneva kaksinkertainen epäoleellinen integraali

Tarkastellaan funktioita f^+ ja $f^- : [a, \infty) \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty seuraavasti:

$$f^+(x,y) := \frac{|f(x,y)| + f(x,y)}{2}, \quad f^-(x,y) := \frac{|f(x,y)| - f(x,y)}{2}.$$

Jokaisella $(s,t) \in [a, \infty) \times [c, \infty)$ pätee, että funktiot f^+ ja f^- ovat integroituvia suorakulmiossa $[a, s] \times [c, t]$. Merkitään funktioiden f , f^+ , f^- , ja $|f|$ kaksinkertaisten epäoleellisten integraalien integraalifunktioita $F(s,t)$, $F^+(s,t)$, $F^-(s,t)$, ja $\bar{F}(s,t)$.

Koska integraali

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} |f(x,y)| dA$$

suppenee, on \bar{F} rajoitettu. Lisäksi epäyhtälöt $0 \leq F^+(s,t) \leq \bar{F}(s,t)$ sekä $0 \leq F^-(s,t) \leq \bar{F}(s,t)$ ovat voimassa $(s,t) \in [a, \infty) \times [c, \infty)$. Täten lauseen 4.1 nojalla integraalit

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f^+(x,y) dA \quad \text{ja} \quad \iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f^-(x,y) dA$$

suppenevat. Koska $f = f^+ - f^-$, seuraa, että myös integraali

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(x,y) dA$$

suppenee. □

4.2 Vertailutesti kaksinkertaisille epäoleellisille integraaleille

Vertailutesti kaksinkertaisille epäoleellisille integraaleille toimii vastaavasti, kuin vertailutesti yhden muuttujan tapauksissa. Myös todistus on rakenteeltaan samanlainen, käyttäen kuitenkin apulauseita bimonotonisuuteen sekä kahden muuttujan integraalien teoriaan liittyen. Testi toimii ainoastaan ei-negatiivisille funktioille.

Lause 4.3. Olkoot $a, c \in \mathbb{R}$ ja $f, g: [a, \infty) \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sellaisia funktioita, että f ja g ovat integroituvia tasossa $[a, s] \times [c, t]$ jokaisella $(s, t) \geq (a, c)$. Oletetaan lisäksi, että $|f| \leq g$. Jos

$$\iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} g(x, y) dA$$

suppenee, niin myös

$$\iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} |f(x, y)| dA$$

suppenee. Lisäksi pätee

$$\left| \iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} f(x, y) dA \right| \leq \iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} g(x, y) dA.$$

Todistus. (Vrt. [2, s. 432]). Merkitään $F(s, t) := \iint_{[a, s] \times [c, t]} f(x, y) dA$, $G(s, t) := \iint_{[a, s] \times [c, t]} g(x, y) dA$ ja $\bar{F}(s, t) := \iint_{[a, s] \times [c, t]} |f(x, y)| dA$, missä $(s, t) \in [a, \infty) \times [c, \infty)$.

Oletetaan, että

$$\iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} g(x, y) dA$$

suppenee, jolloin $G(s, t)$ on rajoitettu. Oletuksen nojalla $|f| \leq g$, jolloin myös integraalifunktiolle pätee $\bar{F} \leq G$, ja funktio \bar{F} on näin ollen rajoitettu. Lisäksi, koska $|f| \geq 0$, seuraa lauseesta 4.1, että

$$\iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} |f(x, y)| dA$$

suppenee, jolloin myös

$$\iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} f(x, y) dA$$

suppenee.

Edelleen, koska $-f \leq |f| \leq g$ ja $f \leq |f| \leq g$, saamme integraalifunktiolle epäyhtälöt $-F(s, t) \leq \bar{F}(s, t) \leq G$ ja $F(s, t) \leq \bar{F}(s, t) \leq G$ kaikilla $(s, t) \geq (a, c)$. Ottamalla raja-arvon $(s, t) \rightarrow (\infty, \infty)$ saamme epäyhtälön

$$\left| \iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} f(x, y) dA \right| \leq \iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} g(x, y) dA.$$

□

Esimerkki 7. Osoitetaan, että kaksinkertainen epäoleellinen integraali

$$\iint_{[1,\infty] \times [1,\infty]} \frac{4^x 8^y + 15x^2 y^2 + 7y}{5^x 9^y + 7x^3 y^3 + 2xy^2 + 7}$$

suppenee. Otetaan vertailufunktioksi $g(x, y) = \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{8}{9}\right)^y$ samalla määrittelyjoukolla. Tiedämme esimerkin 6 nojalla, että

$$\iint_{[1,\infty] \times [1,\infty]} g(x, y) dA$$

suppenee, sillä $0 < \frac{4}{5} < 1$ ja $0 < \frac{8}{9} < 1$. Nyt, koska $7y < 15x^2 y^2 < 4^x 8^y$ ja $7x^3 y^3 + 2xy^2 + 7 > 0$ kaikilla $(x, y) \geq (1, 1)$, voimme muodostaa epäyhtälön

$$|f(x, y)| < \frac{4^x 8^y + 4^x 8^y + 4^x 8^y}{5^x 9^y} = 3 \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{8}{9}\right)^y = 3 \cdot g(x, y)$$

Koska tiedämme, että funktion $g(x, y)$ epäoleellinen integraali suppenee osajoukossa $[1, \infty] \times [1, \infty]$, voimme todeta vertailutestin nojalla, että myös tutkimamme epäoleellinen integraali suppenee.

4.3 Dirichlet'n testi kaksinkertaisille integraaleille

Mikäli tutkimamme kaksinkertainen epäoleellinen integraali on vuorotteleva ja suppenee vain ehdollisesti, tulee meidän käyttää Dirichlet'n testiä. Testi sisältää vastaavia oletuksia, kuin lauseessa 3.5. Testin todistus on myös rakenteeltaan samanlainen, eli osoitamme osittaisintegroinnin kaavan jokaisen tekijän suppenevan.

Lause 4.4. *Olkoot $f, g: [a, \infty) \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sellaisia funktioita, että funktion f osittaisderivaatat f_x, f_y ja f_{xy} ovat olemassa sekä jatkuvia määrittelyjoukossaan. Olkoon g myös jatkuva funktio. Oletetaan, että:*

1. f on bimonotoninen.
2. Jokaiselle kiinnitettylle $y \geq c$, funktio $x \mapsto f(x, y)$ on monotoninen välillä $[a, \infty)$, ja jokaiselle kiinnitettylle $x \geq a$, funktio $y \mapsto f(x, y)$ on monotoninen välillä $[c, \infty)$.
3. Raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, c) \quad \text{ja} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} f(a, y)$$

ovat olemassa ja ovat kaikki nollia.

4. Integraalifunktio epäoleelliselle integraalille $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g(x,y) dA$ on rajoitettu.

Tällöin kaksinkertainen epäoleellinen integraali

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(x,y)g(x,y) dA$$

suppenee ja sen integraalifunktio on rajoitettu.

Todistus. (Vrt. [2, s. 434-435]). Osoitetaan, että jokainen osittaisintegroinnin kaavan (Lause 2.8) termeistä suppenee. Aloitetaan osoittamalla, että f on rajoitettu ja $f(x,y) \rightarrow 0$, kun $(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)$. Valitaan mielivaltainen $\epsilon > 0$. Oletuksen 3 nojalla on olemassa $x_0 \in [a, \infty)$, missä

$$(x,y) \geq (x_0, y_0) \implies |f(x,x)| < \epsilon, \text{ kun } |f(x,c)| < \epsilon \text{ ja } |f(a,y)| < \epsilon.$$

Toisin sanoen, jostain pisteestä (x_0, x_0) alkaen yllä mainittujen funktioiden arvot saadaan mitä tahansa mielivaltaisesti valittua positiivista alarajaa pienemmiksi, sillä oletuksen nojalla niiden raja-arvot lähestyvät nollaa äärettömyydessä. Tarkastellaan tapausta $(x,y) \geq (a,c)$ missä $x \geq x_0$ ja $y \leq x$. Oletuksen 2 nojalla joko $f(x,c) \leq f(x,y) \leq f(x,x)$ tai $f(x,x) \leq f(x,y) \leq f(x,c)$. Koska sekä $f(x,c)$ että $f(x,x)$ kuuluvat välille $(-\epsilon, \epsilon)$, tällöin myös $f(x,y) \in (-\epsilon, \epsilon)$. Vastaavasti tarkastellessa tapausta $(x,y) \geq (a,c)$ missä $y \geq x_0$ ja $x \leq y$, saamme tuloksen $f(x,y) \in (-\epsilon, \epsilon)$. Täten kaikille $(x,y) \geq (a,c)$, missä joko $x \geq x_0$ tai $y \geq x_0$, pätee $|f(x,y)| < \epsilon$. Koska $\epsilon > 0$ voi olla mielivaltaisen pieni, seuraa tästä, että $f(x,y) \rightarrow 0$, kun $(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)$. Edelleen valitsemalla $\epsilon := 1$ ja

$$a := \sup\{|f(x,y)| : a \leq x \leq x_0 \text{ ja } c \leq y \leq x_0\}$$

saamme $|f(x,y)| \leq \max\{1, a\}$, eli f on rajoitettu.

Tutkitaan seuraavaksi osittaisintegroinnin kaavaa kaksinkertaisille integraaleille. Merkitään integraalifunktiota $G(s,t) = \iint_{[a,s]\times[c,t]} g(x,y) dA$. Tällöin oletuksen 4 nojalla G on rajoitettu, eli on olemassa luku $\beta > 0$ siten että $|G(b,d)| \leq \beta$ kaikilla $(b,d) \geq (a,c)$. Koska $f(b,d) \rightarrow 0$, kun $(b,d) \rightarrow (\infty, \infty)$, seuraa, että myös $f(b,d)G(b,d) \rightarrow 0$, kun $(b,d) \rightarrow (\infty, \infty)$.

Lisäksi oletuksen 1 nojalla funktio f on bimonotoninen, jolloin lauseen 2.5 nojalla f_{xy} ei vaihda etumerkkiään suorakulmiossa $[a, \infty) \times [c, \infty)$. Nyt, jokaista pistettä $(b,d) \geq (a,c)$ kohti voidaan kirjoittaa epäyhtälö

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} |f_{xy}(x,y)G(x,y)| dA \leq \beta \left| \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{xy}(x,y)G(x,y) dA \right|$$

$$= \beta \left| \int_a^b (f_x(x, d) - f_x(x, c)) dx \right| = \beta |f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c)|.$$

Koska osoitimme, että f on rajoitettu, seuraa lauseesta 4.1, että integraali

$$\iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} f_{xy}(x, y) G(x, y) dA$$

suppenee itseisesti ja sen integraalifunktio on rajoitettu. Koska epäoleellinen integraali suppenee itseisesti, suppenee se siis tavallisessakin mielessä johonkin arvoon J .

Jokaisella kiinnitetyllä $y \in [c, \infty)$ funktio $x \mapsto f(x, y)$ on monotoninen välillä $[a, \infty)$, mistä seuraa että f_x ei vaihda etumerkkiään ja täten kaikilla $(b, d) \geq (a, c)$ pätee

$$\left| \int_a^b f_x(x, d) G(x, d) dx \right| \leq \beta \left| \int_a^b f_x(x, d) dx \right| = \beta |f(b, d) - f(a, d)|.$$

Koska $f(a, d) \rightarrow 0$, kun $d \rightarrow \infty$ ja $f(b, d) \rightarrow 0$, kun $(b, d) \rightarrow (\infty, \infty)$, seuraa, että $|f(b, d) - f(a, d)| \rightarrow 0$. Tällöin myös integraali $\int_a^b f_x(x, d) G(x, d) dx \rightarrow 0$, kun $(b, d) \rightarrow (\infty, \infty)$. Vastaavasti saamme tuloksen, että $\int_c^d f_y(b, y) G(b, y) dy \rightarrow 0$ kun $(b, d) \rightarrow (\infty, \infty)$. Kaksinkertaisen osittaisintegroinnin kaavalla saamme täten tuloksen

$$\begin{aligned} \iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) g(x, y) dA &= f(b, d) G(b, d) + \iint_{[a, b] \times [c, d]} f_{xy}(x, y) G(x, y) dA \\ &\quad - \int_a^b f(x, d) G(x, d) dx - \int_c^d f(b, y) G(b, y) dy \rightarrow 0 + J + 0 + 0 = J, \end{aligned}$$

kun $(b, d) \rightarrow (\infty, \infty)$. Eli epäoleellinen integraali $\iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} f(x, y) g(x, y) dA$ suppenee. Lisäksi, sen integraalifunktio on rajoitettu, sillä jokainen osittaisintegroinnin kaavan termeistä on rajoitettu.

□

Esimerkki 8. Osoitetaan, että kaksinkertainen epäoleellinen integraali

$$\iint_{[1, \infty) \times [1, \infty)} \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x \left(\frac{2}{7}\right)^y}{xy} dA$$

suppenee. Valitaan funktioksi $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ ja $g(x, y) = \left(\frac{1}{7}\right)^x \left(\frac{2}{7}\right)^y$. Tällöin osittaisderivaatat $f_x = -\frac{1}{x^2 y}$, $f_y = -\frac{1}{x y^2}$ ja $f_{xy} = \frac{1}{x^2 y^2}$ ovat olemassa ja jatkuvia

osajoukossa $[1, \infty] \times [1, \infty]$. Funktio f on bimonotoninen ja jokaiselle kiinnitetyle $y \geq 1$, funktio $x \mapsto f(x, y)$ on monotonisesti vähenevä välillä $[1, \infty]$. Vastaava on voimassa funktiolle $y \mapsto f(x, y)$ kiinnittäessä muuttujan x . Tämä on helppo nähdä, sillä funktio $\frac{1}{xy}$ saa pienempiä arvoja, mitä suurempi osamäärän nimittäjä on.

Raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot 1} \quad \text{ja} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot y}$$

ovat olemassa ja ovat kaikki nollia, sillä osamäärien nimittäjät lähestyvät ääretöntä. Funktio g on jatkuva ja esimerkin 6 nojalla sen epäoleellinen integraali suppenee. Tällöin lauseen 4.1 nojalla funktion g integraalifunktio on rajoitettu.

Koska jokainen lauseen 4.4 vaatimuksista on voimassa, voimme todeta, että tutkimamme kaksinkertainen epäoleellinen integraali suppenee.

Lähteet

- [1] Trench, William F. *Introduction to Real Analysis*. A.T. Still University, 2013.
- [2] Ghorpade, Sudhir R ; Limaye Balmohan V. *A Course in Multivariate Calculus and Analysis*. New York: Springer New York, 2010.