

Max Kanerva

JÄNNITYSVÄSYMISEN KONTINUUMIMALLI KAHDESSA ULOTTUVUUDESSA

Diplomityö
Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Tarkastajat: Prof. Sampsa Pursiainen
Dos. Heikki Orelma
Elokuu 2024

TIIVISTELMÄ

Max Kanerva: Jännitysväsymisen kontinuumimalli kahdessa ulottuvuudessa

Diplomityö

Tampereen yliopisto

Tutkinto-ohjelma

Elokuu 2024

Fysiikassa jännityksen kuvaamiseen käytetään tensoreita. Tensorilla voidaan määrittää jännityksen suunta, suuruus ja taso, jota kohti jännitys vaikuttaa. On mahdollista muodostaa jännitystensori, jos tunnetaan kolmen eri tason kautta vaikuttava jännitys tietyssä pisteessä. Jännitystensori yhdistää pisteeseen mielivaltaisen tason kautta vaikuttavan yksikkösuuntavektorin jännitysvektoriin. Tensoreilla on invariantteja, mitkä eivät muutu koordinaatiston vaihtuessa, kuten vektoreilla on suuruus. Jännitystensorin invariantteja voidaan käyttää esimerkiksi määrittämään, tapahtuuko tietyllä tensorilla vauriota materiaaliin riippumatta koordinaatistosta.

Materiaaleissa aiheutuu vaurioitumista, kun kuormitus vaikuttaa niihin. Vaurioitumisen mallintamiseen käytetään eri malleja. On esimerkiksi mahdollista mallintaa, minkä suuruisella vetojännityksellä materiaali vaurioituu siten, että se ei palaa takaisin alkuperäiseen muotoonsa. Lisäksi on malleja, jotka kuvailevat materiaalin väsymistä, jossa materiaalia kuormitetaan toistuvasti. Väsymisessä toistuva kuormitus aiheuttaa jännityksen kautta vauriota, joka kertyy lopulta aiheuttamaan esimerkiksi pysyvän muodonmuutoksen. Tällöin vaurio ajatellaan ajassa kasvavana prosessina.

Jännitysväsymisen kontinuumimalli kuvaa materiaalin väsymistä jatkuvalla jännityksellä. Tässä mallissa käytetään matemaattisena pintana kestävyyspintaa, jonka ulkopuolella vaurio kasvaa. Tämän funktion arvo riippuu eri parametreista. Kestävyyspinnan keskipiste on merkittävin ratkaistava parametri, ja se pystytään laskemaan differentiaaliyhtälöistä. Yksiulotteisella jännityksellä tämä keskipiste on mahdollista olettaa liikkuvan kahden eri pisteen välillä, jos jännitys on väsymisrajan yläpuolella.

On myös mahdollista etsiä kestävyyspinnan keskipisteen differentiaaliyhtälölle ratkaisu algoritmilla, mutta tämä on huomattavasti hitaampaa kuin yhtälöparin ratkaisu. Tätä menetelmää käytetään, jotta on mahdollista etsiä ratkaisu kestävyyspinnan keskipisteelle 2-ulotteisella jännityksellä, koska 1-ulotteisen jännityksen kestävyyspinnan keskipisteen ratkaisuun käytetyn yhtälöparin muodostamisessa käytetyt oletukset eivät toimi.

Yhtälöpareilla voi löytyä kaksi ratkaisua kestävyyspinnan keskipisteille. Ratkaisusta ei ole ilmeistä, ovatko molemmat ratkaisut käypiä. Sijoittamalla ratkaisut kestävyyspinnan funktioon on mahdollista huomata, että toinen näistä ratkaisuista ei toteuta alkuehtoja millään ajanhetkellä. Differentiaaliyhtälöt sen sijaan päätyvät aina ratkaisuun, joka toteuttaa alkuehdot. Yhtälöparien ratkaisua käyttävät lähteet eivät käsitelleet ratkaisun monikäsitteisyyttä, vaikka se vaikuttaisi optimoinnin tulokseen.

Jännitysväsymisen kontinuumimalli toimii kaksiulotteisella jännityksellä. Parametrit muuttavat kestoletua suunnilleen oletetun mukaisesti, mutta poikkeuksena on tietyt jännityskomponenttien väliset vaihekulmat, joilla kestoletu kasvaa, kun esimerkiksi vääntöjännityksen amplitudi kasvaa. Tulokset ovat samassa suuruusluokassa kuin artikkelissa [12], josta mittausdata löytyy.

Avainsanat: tensori, jännitys, pinta, kestävyyspinta

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Max Kanerva: A Descriptive Title
Master of Science Thesis
Tampere University
Degree Programme
August 2024

Tensors are used to describe stress in physics. The direction, magnitude and plane which stress acts on can be defined with a stress tensor. It is possible to form a stress tensor if the stress acting on three different planes in a specific point is known. The stress tensor relates a unit vector acting on an arbitrary plane to a stress vector. Tensors have invariants which don't change when the coordinates change, similar to how vectors have a magnitude. The invariants of a stress tensor can be used to determine for example if the stress tensor can cause damage in a material regardless of the coordinates.

A material being loaded causes damage on the material. The damage caused can be modelled with different models. It is for example possible to model how large a magnitude of stress a material can withstand while being pulled without being damaged so that the material deforms permanently. There are also models that describe fatigue in a material, in which the material is repeatedly loaded. In fatigue, the repeated loading causes damage on the material via stress, which eventually results in a permanent deformation for example. Therefore damage is modelled as a process where damage increases over time.

The continuum stress fatigue model describes how a material fatigues with repeated stress. This model uses the endurance surface as a mathematical surface, outside of which damage occurs. The value of this function depends on different parameters. The centre of endurance surface is the most relevant parameter, which can be calculated from differential equations. For 1-dimensional stress it is possible to assume that this centre moves between two different points when the stress is above the fatigue limit.

It is also possible to find the solution for the centre of the endurance surface with an algorithm, but this is significantly slower than solving a system of equations. This method is used so that it is possible to find a solution for the centre of the endurance surface when the stress is 2-dimensional because the assumptions made when forming the system of equations do not work for 2-dimensional stress.

The system of equations can find two different solutions for the centre of the endurance surface. It is not obvious from the solutions if they are both feasible. By assigning the value of the solutions to the function of the endurance surface it can be noticed that one of these solutions does not satisfy the initial conditions on any time frame. On the other hand, the differential equations will always end up in a solution that satisfies the initial conditions. The referenced articles did not address the ambiguity of the solution even though it has an impact on the optimization.

The continuum stress fatigue model works for 2-dimensional stress. The parameters change fatigue life as expected, but there are exceptions, such as certain phase angles between stress components for which the fatigue life increases as the amplitude of the shear stress increases. The results are in a similar magnitude as in the article [12] where the measurement data can be found.

Keywords: tensor, stress, surface, endurance surface

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

Tässä diplomityössä käsitellään mallia, jolla voidaan yleistää 1-ulotteisen jännityksen väsymisen malli 2-ulotteiselle jännitykselle. Malli on Heikki Orelman ehdottama.

Jossakin vaiheessa huomasimme, että löytyvä mittausdata, jonka perusteella mallin toimivuutta voidaan arvioida, on puutteellista. Tämän takia mallin tuloksien vertailut ovat melko teoreettisia. Tästä syystä malli ei ole luotettava kunnes sitä testataan sopivilla mittauksilla.

Tampereella, 15. elokuuta 2024

Max Kanerva

SISÄLLYSLUETTELO

1	Johdanto	1
2	Tensorit ja jännitys	3
2.1	Tensorit	3
2.2	Jännitystensori	7
3	Jännitysväsymisen kontinuumimalli	13
3.1	Vaurioitumisen mallit	13
3.2	Vaurioyhtälö	15
3.3	Parametrien C, K, L ja k määrittäminen	17
3.3.1	Puhdas veto	17
3.3.2	Puhdas vääntö	18
3.3.3	Parametrien määrittäminen tunnetusta evoluutiöyhtälöstä	20
3.4	Moniakselinen jännitys	24
4	Mallin testaaminen mittauksilla	28
4.1	Optimiparametrien määrittämiseen käytettävä algoritmi	28
4.2	Algoritmin käyttäminen yhden komponentin jännityshistoriaan	29
4.3	Tulkintoja algoritmin antamista tuloksista yhden komponentin jännityshistorialla	32
4.4	Algoritmin käyttäminen useamman komponentin jännityshistoriaan	41
4.4.1	Kestävyyspinnan keskipisteen alkuarvauksen valinta	44
4.5	Optimiparametrien määrittäminen materiaalille Matlabilla	45
5	Jännityshistorian vaikutus kestolukuun	51
5.1	Vääntökomponentin lisääminen puhtaaseen vetojännitykseen	51
5.2	Jännityshistorian parametrien $\tau_a, \tau_m, \sigma_a, \sigma_m$ vaikutus kestolukuun N	53
5.3	Kulman δ vaikutus kestolukuun N	54
5.4	Mallin käyttäminen veto- ja vääntöjännityksen yhdistelmään	55
6	Yhteenveto	59
	Lähteet	61
	Liite A Dataluettelo	62

LYHENTEET JA MERKINNÄT

α	kestävyyspinnan keskipiste
S^T	tensorin S transpoosi
σ	jännitystensori
$\ddot{\theta}$	muuttujan θ toinen derivaatta muuttujan t suhteen
$\dot{\theta}$	muuttujan θ derivaatta muuttujan t suhteen
\otimes	tensoritulo
σ_{-1}	materiaalille ominainen väsymisraja, kun suhde jännityksen pienimmän ja suurimman arvon välillä on -1
σ_a	vetojännitysheilahduksen amplitudi
σ_b	materiaalille ominainen murtoraja
σ_m	vetojännityksen keskijännitys
τ_a	vääntöjännitysheilahduksen amplitudi
τ_m	vääntöjännityksen keskijännitys
$d\theta$	muuttujan θ inkrementti muuttujan t suhteen
\mathbb{R}	reaalilukujen joukko

1 JOHDANTO

Materiaalien väsyminen on pitkällä aikavälillä tapahtuva ilmiö, joka on aiheuttanut onnettomuuksia. Materiaalien väsymistä on vaikea havaita ennen kuin on liian myöhäistä, koska ilmiö tapahtuu suurin osin mikroskooppisella tasolla pitkällä aikavälillä. Materiaaleille on paljon helpompi laskea turvallisuuteen liittyviä tunnuslukuja ilmiöihin, jotka tapahtuvat nopeasti, kuten suurella vetojännityksellä aiheutuva muodonmuutos materiaaliin.

Oleellisinta materiaalien väsymiseen varautumisessa on tuntemus jännityshistoriasta. Jos materiaaliin kohdistuneita aiempia jännityksiä ei tunneta, niin on mahdoton arvioida, koska materiaali tulee vaurioitumaan väsymisen seurauksena, koska väsymisen oletetaan aiheutuvan kasaantuneista vaurioista. Väsymisen mallintaminen voi olla hankalaa, vaikka jännityshistoria olisi täysin tunnettu. Yleisesti on tehtävä jonkinlainen yksinkertaistus, esimerkiksi olettaen että jännitys on ollut jollain tavalla säännöllistä koko jännityshistorian ajan.

Matemaattinen käsittely vaaditaan materiaalin väsymisen mallintamiselle, koska väsymisen mallintaminen on mahdotonta tunnetuilla materiaalin fysikaalisilla parametreilla. Materiaalin väsymisestä saadaan tietoa esimerkiksi mittaamalla, kuinka pitkään materiaali kestää tietynlaista kuormitusta, ja tätä tietoa interpoloidaan. Tällaista tapaa esittää testaustuloksia ovat esimerkiksi SN-käyrät. Kaikki tulokset, joita materiaalien väsymisen malleilla saadaan, perustuvat mittauksiin, eikä materiaalilla siis oleteta olevan minkäänlaista parametria, joka auttaisi väsymisen mallintamisessa, kuten materiaalin kimmokertoimen avulla voitaisiin kuvata kappaleen muodonmuutosta.

Eräs malli, jota voidaan käyttää materiaalien väsymisen mallintamiseen, on Ottosenin et al. esittämä kontinuumimalli, katso [9]. Tähän malliin keskitytään tässä diplomityössä. Kontinuumimalli perustuu differentiaaliyhtälöihin. Lisäksi fysiikan teoriaa varten on käytettävä tensoreita.

Diplomityön tavoitteena on arvioida, toimiiko yksiulotteisen jännitysmittauksen kautta saatu malli myös kaksiulotteisella jännityksellä, kun käytetään yksinkertaistettuja oletuksia samankaltaistamaan nämä jännitykset. Tätä asiaa ei pystytä määrittämään täydellisesti, koska aiheesta saatavilla olevat mittaukset, katso esimerkiksi [12], ovat puutteellisia, mutta mittaukset ovat riittävän tarkkoja antamaan mahdollisuuden tehdä joitakin havaintoja.

Samankaltaisilla materiaaleilla voi olla huomattavasti eroavat parametrit käytettyyn mal-

liin. Esimerkiksi eri teräslajeja on tuhansia. Tämä hankaloittaa tulosten vertailua realistisesti, koska täsmälleen samalle teräslajille ei löydy mittauksia sekä yksiulotteiselle että kaksiulotteiselle jännityksellä, koska usein mittaukset tehdään tiettyä käyttötarkoitusta varten. Malli kuitenkin tarvitsee sekä yksiulotteisen että kaksiulotteisen jännityksen mittauksen tietyltä materiaaalilta tarkkuuden arvioimiseen, mikä ei ole mahdollista.

Ensiksi luvussa 2 esitellään teorian taustaksi tensorit ja jännitys. Näihin ei syvennytä enempää kuin on tarve. Seuraavassa luvussa 3 esitellään matemaattinen malleja, joilla jännitystä voidaan kuvata. Näistä malleista ainoastaan yhtä, ja sen laajennusta, tullaan käsittelemään myöhemmissä luvuissa. Luvussa 4 esitetään, kuinka malliin tarvittavat parametrit on mahdollista laskea. Tässä luvussa myös etsitään kyseisest parametrit muutamalle materiaalille. Luvussa 5 tarkastellaan edellisessä luvussa käytetyn mallin laajennusta, jossa jännitys on monimutkaisempi. Lopuksi luvussa 6 esitellään tärkeimmät havainnot diplomityön sisällöstä.

2 TENSORIT JA JÄNNITYS

Tässä luvussa määritellään tensorit, jotta fysiikan jännitystä on mahdollista käsitellä. Tensorit voivat kuvata mitä tahansa fysikaalista ominaisuutta, kuten lämpötilaa. Eli skalaarit ovat tietynlaisia tensoreita. Myös vektorit ovat tensoreita. Tensoreille yleisesti on määritetty hyödyllisiä ominaisuuksia, esimerkiksi koordinaatistojen muutokseen liittyen. Esimerkiksi lämpötila tietyssä pisteessä on oltava mahdollista määrittää yhtäpitävästi kaikissa eri koordinaatistoissa, joissa lämpötila on paikan ja ajan funktio. Samalla tavalla vektoreille ja muille vielä monimutkaisemmille tensoreille on mahdollista muuttaa fysiikan käsitteitä kuvaavia funktioita tietyllä tavalla, kun koordinaatisto muuttuu, katso [11].

Fysiikan jännitystä käsittelevä tensori nimetään jännitystensoriksi. Jännitystensori voidaan esittää matriisina, mutta tensorit yleisesti voivat olla monimutkaisempia kuin mitä matriisilla voi näyttää. Jännitystensorin tarkoituksena on muuttaa suuntavektori jännitysvektoriksi tietyssä pisteessä.

Oletetaan, että käytettävät vektoriavaruudet tästä eteenpäin ovat 3-ulotteisia. Kolmiulotteista vektoriavaruutta käytetään tensorien määrittelemisessä.

2.1 Tensorit

Toisen kertaluvun tensorilla (esimerkiksi jännitystensorilla) on monia samankaltaisia ominaisuuksia matriisien kanssa. Merkitään tensorin S matriisiesitystä $[S]$. Jos matriisiesitystä on käytetty tensorille ilman tätä merkintää, niin sillä tarkoitetaan tensoria, jonka kontekstista on selvillä, että minkälaista tensoria matriisi esittää. 3-ulotteisessa vektoriavaruudessa tensori on 2. kertalukua. Ainoastaan 2. kertaluvun tensoreille on järkevää käyttää matriisiesitystä. Esimerkiksi 1. kertaluvun tensori on parempi esittää vektorina. Tästä eteenpäin käsitellään ainoastaan 2. kertaluvun tensoreita.

Matriisit eivät ole tensoreita, koska niistä puuttuu tieto kovarianteista ja kontravarianteista komponenteista. Nämä komponentit liittyvät siihen, että kuinka tensori muuttuu koordinaatiston muuttuessa, ja niihin palataan myöhemmin. Tämän luvun määritelmät ovat voimassa riippumatta siitä, että minkälaisia komponentteja tensoreilla on. Määritelmät ovat suunnilleen samankaltaisia kuin esimerkiksi kirjassa [3].

Määritelmä 2.1. Olkoon \mathbb{R}^3 vektoriavaruus. *Tensori* S on lineaarikuvaus vektoriavaruus-

desta \mathbb{R}^3 vektoriavaruuteen \mathbb{R}^3 . Jokaiselle vektorille $x \in \mathbb{R}^3$ löytyy jokin vektori $y = Sx$, joka toteuttaa lineaarisuuden

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha Sx + \beta Sy.$$

Tensoreilla on identiteettitensori, jota voidaan käyttää esimerkiksi ominaisarvojen laske-
misessa.

Määritelmä 2.2. Olkoon \mathbb{R}^3 vektoriavaruus ja $x \in \mathbb{R}^3$. *Identiteettitensori* I määritellään asettamalla $Ix = x$ jokaiselle vektorille $x \in \mathbb{R}^3$.

Nollatensori määritellään samaan tapaan kuin matriiseilla.

Määritelmä 2.3. Olkoon \mathbb{R}^3 vektoriavaruus ja $x \in \mathbb{R}^3$. *Nollatensori* 0 määritellään asettamalla $0x = 0$.

Tensorin transpoosia käytetään tensorien välisen sisätulon määrittelemiseen myöhemmin.

Määritelmä 2.4. Olkoon \mathbb{R}^3 vektoriavaruus ja S tensori. Tensorin S *transpoosia* merkitään S^T . Tensorin transpoosi toteuttaa ehdon

$$Su \cdot v = u \cdot S^T v$$

kaikilla vektoreilla $u, v \in \mathbb{R}^3$. Tensori S on *symmetrinen*, jos ja vain jos $S = S^T$.

Tensoreille voidaan määritellä *tensoritulo*, ja tensoritulolla muodostettuja tensoreita käytetään kantana tensoreille.

Määritelmä 2.5. Olkoon \mathbb{R}^3 vektoriavaruus ja $a, b \in \mathbb{R}^3$. *Tensorituloa* vektorien a ja b välillä merkitään

$$a \otimes b.$$

Tensoritulo määritellään asettamalla

$$(a \otimes b)v = (b \cdot v)a,$$

kun $v \in \mathbb{R}^3$. Lisäksi tensoritulo $a \otimes b$ on tensori.

Määritelmä 2.6. Olkoot e_i ja e_j yksikkövektoreita ja S tensori. Tensorin S komponentit määritellään seuraavasti:

$$S_{ij} = e_i \cdot S e_j.$$

Lause 2.7. Tensorin komponenteille voidaan käyttää kantaa $\{e_i \otimes e_j\}$, missä $i, j \in$

1, 2, 3.

Todistus. Lineaarinen riippumattomuus kannassa osoitetaan aloittamalla yhtälöstä

$$\sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{0}.$$

Evaluoidaan edellinen yhtälö puolittain vektorilla \mathbf{v}

$$\sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Määritelmän mukaan $\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ on nollatensori. Tällöin yhtälö on voimassa kaikilla vektoreilla \mathbf{v} . Valitaan ensin vektoriksi $\mathbf{v} = \mathbf{e}_3$.

Tällöin

$$\sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij}(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{i3}(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

koska $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ ja $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Siis

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{i3}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Tästä yhtälöstä seuraa suoraan, että $\alpha_{i3} = 0$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3\}$. Vastaava päättely voidaan tehdä vektoreille $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2$. Tällöin $\alpha_{ij} = 0$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, 3\}$, eli tensorin komponentit ovat lineaarisesti riippumattomat. \square

Nyt on mahdollista kirjoittaa tensori \mathbf{S} edellisen lauseen kannan avulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= S_{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + S_{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + S_{13}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + S_{21}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + S_{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + S_{23}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + S_{31}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + S_{32}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + S_{33}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

mikä voidaan myös kirjoittaa lyhesti

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Määritelmä 2.8. Tensorin \mathbf{S} jälki on lineaarinen operaatio, jolla asetetaan tensorille \mathbf{S}

skalaariarvo $\text{tr}(\mathbf{S})$. Tensorin jälki toteuttaa ehdon

$$\text{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

kaikilla vektoreilla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Lisäksi lineaarisuuden ja edellisen määritelmän avulla saadaan

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = \text{tr}\left(\sum_{i,j=1}^3 S_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} \text{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^3 S_{ii}.$$

Tensorin jälki on tensorin matriisiesityksen päädiagonaalin alkioiden summa. Siis tensorin jälki on määritelty samaan tapaan kuin matriiseilla.

Määritelmä 2.9. Olkoon \mathbf{S} tensori. Tensorin \mathbf{S} determinantti on sen matriisiesityksen $[\mathbf{S}]$ determinantti, eli

$$\det \mathbf{S} = \det[\mathbf{S}]$$

Määritelmä 2.10. Olkoon \mathbb{R}^3 vektoriavaruus ja \mathbf{S}, \mathbf{T} tensoreita. Tensoreiden \mathbf{S} ja \mathbf{T} välinen sisätulo on

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{T}).$$

Sisätulo indusoi normin

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \|\mathbf{S}\|^2.$$

Jos \mathbf{S} on tensori, niin merkinnällä \mathbf{S}^2 tarkoitetaan $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}\mathbf{S}$.

Määritellään 2. kertaluvun tensorien invariantit, koska niitä tarvitaan myöhemmin jännitys-tensorille. Invariantit pysyvät koordinaatiston vaihtuessa samana. Esimerkiksi ensimmäisen kertaluvun tensorin, eli vektorin, tapauksessa vektorin pituus on selvästi invariantti, koska se pysyy samana vaikka vektorin komponentit muuttuisivat koordinaatiston vaihdossa. Tämän kaltaiset invariantit voidaan yleistää toisen kertaluvun tensoreille.

Olkoon \mathbb{R}^3 vektoriavaruus ja \mathbf{S} toisen kertaluvun tensori. Tensorin \mathbf{S} ominaisarvot lasketaan karakteristisesta yhtälöstä

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - \lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Tämän karakteristisen yhtälö on muotoa

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}| = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0.$$

Kertoimia I_1, I_2 ja I_3 kutsutaan toisen kertaluvun tensorin invarianteiksi.

Lause 2.11. *Olkoon \mathbb{R}^3 vektoriavaruus ja S toisen kertaluvun tensori. Tensorin S ensimmäinen invariantti I_1 on tensorin S jälki, eli $I_1(S) = \text{tr}(S)$. Toinen invariantti on $I_2(S) = \frac{1}{2}(\text{tr}(S^2) - (\text{tr}(S))^2)$. Kolmas invariantti I_3 on tensorin S determinantti, eli $I_3 = \det S$.*

Invariantti I_2 voidaan myös esittää muodossa $I_2(S) = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11} - S_{12}^2 - S_{23}^2 - S_{31}^2$.

Määritelmä 2.12. *Olkoon \mathbb{R}^3 vektoriavaruus ja S tensori. Tensori S on deviatorinen, jos $\text{tr}(S) = 0$.*

Tunnetaan, että myöhemmin käsiteltävällä jännitystensorilla on kontravariantit komponentit. Komponenttien kontravarianttius ja kovarianttius määrittävät, kuinka tensorin komponentit muuttuvat koordinaatiston vaihtuessa. Mutta koska tässä diplomityössä ei missään vaiheessa tulla kääntämään tai muulla tavalla muuttamaan koordinaatistoja jännitystensoriin liittyen, niin kontravariantteihin ja kovariantteihin komponentteihin ei perehdytä tarkasti. Lisää tietoa kontravarianteista ja kovarianteista komponenteista löytyy esimerkiksi kirjasta [5].

Näistä komponenteista kuitenkin johtuu se, että matriisi ei voi kuvata toisen kertaluvun tensoria täysin, jos komponenttien kontravarianttiutta tai kovarianttiutta ei tunneta. Tensoreilla on ominaisuus, että ne muuttuvat tietyllä tavalla koordinaatiston muuttuessa, eikä tämä olisi mahdollista jos ei tunneta miten matriisin lukuja tulisi muuttaa. Vektorit, eli ensimmäisen kertaluvun tensorit, ovat yksinkertaisempia muuttaa kannan vaihdon tapahtuessa. Karteesisen koordinaatiston kannassa olevat vektorit muuttuvat kontravariantisti, eli jos kantavektoreita kutistaa sadalla, niin vektorin komponentit kasvavat sadalla jotta vektorin komponentit säilyvät samansuuruisina uudessa kannassa esimerkiksi vektorin pituuden suhteen.

2.2 Jännitystensori

Piteseen vaikuttava jännitys muodostuu jännitysvektoreista. Jännitysvektorit kuvaavat, millainen jännitys pisteeseen vaikuttaa tietyistä suunnasta, ja millaista pintaa vastaan. Pisteellä ei ole matemaattista pintaa, koska pisteen tilavuus ja pinta-ala on 0. Kuitenkin jännitystä varten pisteen pintoja voidaan kuvata esimerkiksi tetraedrin avulla, joka kutistetaan infitesimaalisen pieneksi. Tällöin jännitys voi vaikuttaa pintaan kohtisuorasti, mikä on veto- tai puristusjännitystä, tai pinnan mukaisesti, mikä on vääntöjännitystä. Jännitys voi vaikuttaa myös osittain sekä veto- että vääntöjännityksenä.

Vaikka tunnetaan, että jännitys muodostuu jännitysvektoreista, niin ongelmana on että näitä jännitysvektoreita on äärettömän paljon, koska yksittäiseen pisteeseen kappaleen

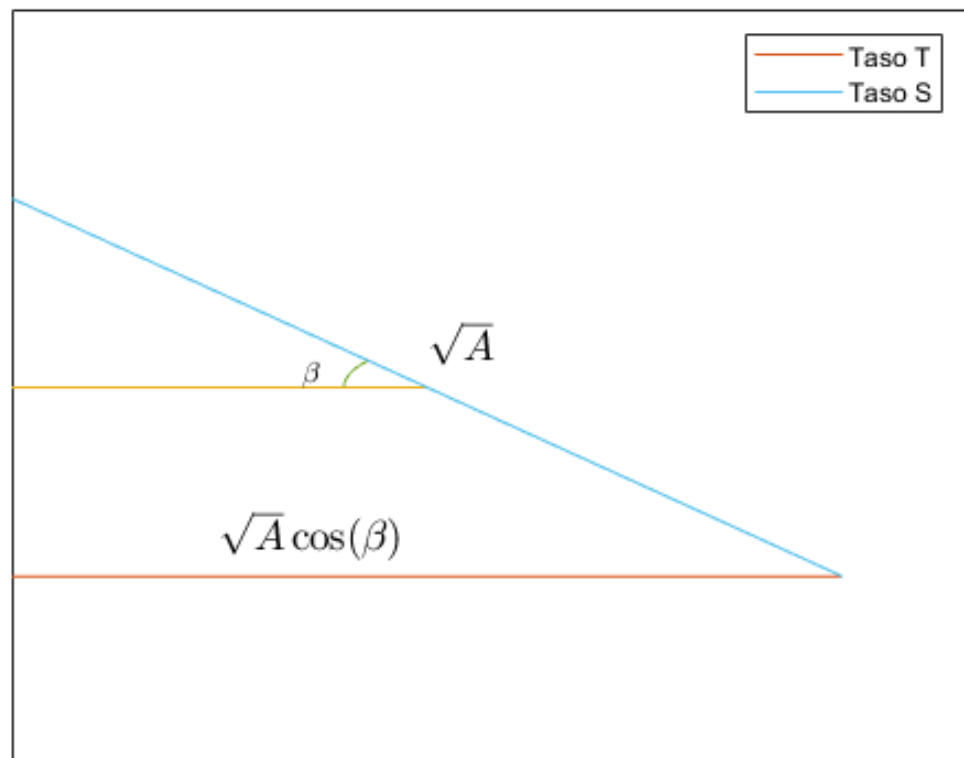
sisällä voi vaikuttaa jännitys jokaisesta suunnasta. Tämä voisi olla hankala ongelma teorian kannalta, mutta tämä ongelma voidaan ratkaista Cauchyn jännityslauseen avulla. Cauchyn jännityslauseen mukaan on mahdollista löytää jännitystensori ainoastaan kolmen eri tason kautta vaikuttavan jännitysvektorin avulla. Tällöin siis voidaan muuttaa mikä tahansa suunnan kautta vaikuttava yksikkösuuntavektori äärellisen jännitystensorin avulla jännitysvektoriksi.

Esitetään apulause Cauchyn jännityslauseen todistusta varten, ja sen jälkeen voidaan todistaa Cauchyn jännityslause luentomonisteen [8] mukaisesti.

Apulause 2.13. *Olkoot tasot S ja T koordinaattiavaruudessa \mathbb{R}^3 . Pinta-ala, joka on osa tasoa S , voidaan projisoida tasolle T yhtälöllä*

$$A_p = \int_A \cos(\beta) dA, \quad (2.1)$$

missä A_p on projisoitu pinta-ala tasolla T , β on kulma tasojen S ja T välillä ja A on pinta-ala tasolla S .



Kuva 2.1. *Kuvassa näkyy poikkileikkaus tasoista T ja S . Tasolle S on merkitty nelion sivun pituus \sqrt{A} ja tasolle T on merkitty suorakulmion sivun pituus $\sqrt{A} \cos(\beta)$*

Todistus. Tarkastellaan tasolla S neliön muotoista pinta-alaa A . Tämä voidaan projisoi-

da tasolle T , jolloin muodostuu suorakulmio. Neliön sivun pituus \sqrt{A} on sama kuin yksi projisoidun suorakulmion sivun pituuksista. Suorakulmion toisen sivun pituus saadaan kuvasta 2.1. Tämä suorakulmion sivun pituus on $\cos(\beta)\sqrt{A}$. Siis suorakulmion pinta-ala on $\cos(\beta)A$. Mille tahansa pinnalle voidaan muodostaa neliön muotoinen pinta-alkio dA , joka voidaan projisoida tasolle T , jolloin projisoitu pinta-alkio on $\cos(\beta)dA$. Integroimalla ykköistä pinnan yli saadaan projisoitu pinta-ala

$$A_p = \int_A \cos(\beta)dA.$$

□

Tasojen välinen kulma voidaan laskea tasojen normaalien avulla, koska kulma β löytyy myös pistetulosta. Jos tasojen normaalit ovat yksikkövektoreita, niin kulman β kosini tasojen S ja T välillä voidaan laskea yksinkertaisesti yhtälöllä

$$\cos(\beta) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad (2.2)$$

missä \mathbf{x} on tason S yksikkönormaali ja \mathbf{y} on tason T yksikkönormaali.

Apulause 2.13 pätee myös pinnan projektiolle tasolle (kuten pallon projektiio ympyräksi), mutta tätä tietoa ei tulla tarvitsemaan Cauchyn jännityslauseessa. Voidaan siis olettaa, että kulma β on vakio, koska projisointi tapahtuu kahden tason välillä. Siis yhtälö (2.13) saadaan pistetulon avulla muotoon

$$A_p = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})A, \quad (2.3)$$

missä \mathbf{x} on tason S yksikkönormaali ja \mathbf{y} on tason T yksikkönormaali.

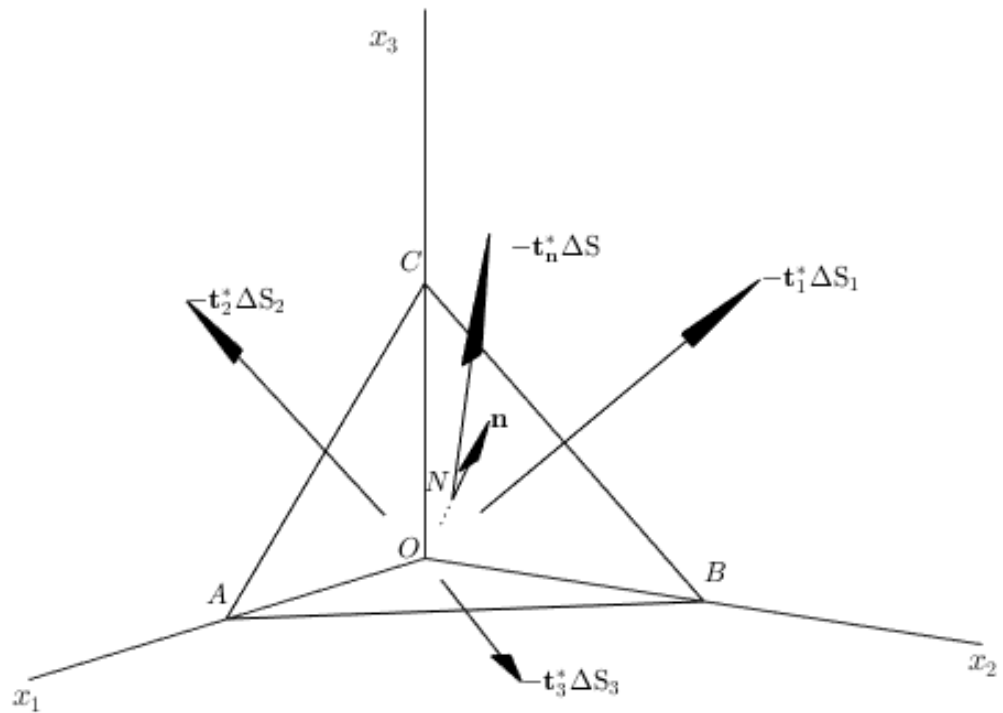
Lisäksi jos vektori \mathbf{y} on myös koordinaatistoavaruuden kantavektori, niin huomataan, että

$$A_p = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i)A = x_i A. \quad (2.4)$$

Lause 2.14 (Cauchyn jännityslause). *Jokaisessa pisteessä jatkuvana aineena oletettua kappaletta jännitys on mahdollista määrittää äärellisen jännitystensorin avulla, joka tunnetaan Cauchyn jännitystensorina σ . Jännitystensorin muodostamiseen riittää tuntea kolme eri tasoa kautta vaikuttavat jännitysvektorit. Jännitystensori σ toteuttaa*

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n}^T \sigma$$

missä \mathbf{n} on mielivaltaisen tason yksikkönormaali, \mathbf{t}_n on tämän tason kautta vaikuttava jännitysvektori ja σ on jännitystensori.



Kuva 2.2. Kuvassa näkyy jännitysvektorit, jotka vaikuttavat mielivaltaisen normaalin n määrittämän tason koordinaatistosta leikkaamiin tahkoihin.

Todistus. Olkoon piste 3-ulotteisessa avaruudessa, johon kohdistuu jännitys kolmen eri tason kautta. Kuvan 2.2 tetraedrin tahkot kuvaavat pisteeseen vaikuttavien jännitysvektoreiden tasoja, jotka ovat kohtisuorassa karteesisen koordinaatiston koordinaattiakseleihin. Tetraedri muodostetaan karteesiseen koordinaatistoon leikkaamalla infinitesimaali ainesosa tason kautta, jonka yksikkönormaali on n .

t_1^* , t_2^* ja t_3^* ovat jännitysvektoreita, jotka vaikuttavat tiettyyn tetraedrin tahkoon. Esimerkiksi vektori t_1^* vaikuttaa tahkoon OBC . Merkitään tahkon pinta-alaa kuvan 2.2 mukaisilla merkinnöillä. Siis ΔS_1 vastaa tahkoa OBC , ΔS_2 vastaa tahkoa OAB , ΔS_2 vastaa tahkoa OAC ja ΔS vastaa tahkoa ABC .

Tetraedriin kohdistuvien voimien summa on massa kerrottuna kiihtyvyydellä, mikä on $\frac{1}{3}\rho^*h\Delta S\mathbf{b}^*$. Tällöin saadaan yhtälö voimien tasapainosta

$$\mathbf{t}_n^*\Delta S + \frac{1}{3}\rho^*\mathbf{b}^*h\Delta S - \mathbf{t}_1^*\Delta S_1 - \mathbf{t}_2^*\Delta S_2 - \mathbf{t}_3^*\Delta S_3 = 0.$$

$$\Delta S(\mathbf{t}_n^* + \frac{1}{3}\rho^*\mathbf{b}^*h - n_1\mathbf{t}_1^* - n_2\mathbf{t}_2^* - n_3\mathbf{t}_3^*) = 0.$$

Rajatapauksessa tetraedri kutistuu pisteeksi. Kun $h \rightarrow 0$, niin $\mathbf{t}_i^* \rightarrow \mathbf{t}_i$ ja tällöin yhtälö saadaan muotoon

$$\mathbf{t}_n = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}_i = n_1(\sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3) + n_2(\sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3) + n_3(\sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3),$$

eli matriisimuodossa

$$\mathbf{t}_n = \begin{bmatrix} n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31} \\ n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32} \\ n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}$$

□

Jännitystensorin komponentteja voidaan merkitä matriisiesityksen avulla

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_z \end{bmatrix},$$

missä σ_{ij} ovat kolmea eri tasoa kautta vaikuttavien jännitysvektorien komponentteja indekseillä $i, j \in \{1, 2, 3\}$. $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots, \tau_z$ ovat yleisesti fysiikassa käytettyjä merkintöjä näille komponenteille, koska ne vastaavat tietynlaista tunnettua kuormitusta (esimerkiksi σ_x voi kuvata vetoa tai puristusta).

Lisäksi tunnetaan, että tämä jännitystensori on symmetrinen, katso esimerkiksi [10], joten $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Tämän asian todistus ohitetaan, koska todistuksen teoria vaatii lisää aputuloksia tensoreista ja fysiikasta. Symmetrisyyden avulla jännitystensori voidaan esittää 6 komponentin avulla. Lisäksi on mahdollista määritellä jännitystensorille *pääjännitykset*, jotka kuvaavat jännitystensorin diagonalisoitumista. Tämä on erityisesti hyödyllinen tensorin kuvaamisessa, koska kolmiulotteinen avaruus on helpompi lukea kuvasta kuin kuusiulotteinen.

Pääjännitykset ovat jännitystensorin determinantin avulla lasketut ominaisarvot. Nämä ominaisarvot kuvaavat jännitysvektoreita, jotka ovat pisteessä olevan jännityksen normaalien suuntaisia. Pääjännityksissä on sekä suurin että pienin normaalin suuntainen

jännitys kaikista niistä tasoista, jotka kulkevat tietyn pisteen kautta, katso esimerkiksi [4].

Koska tensorin pääjännitykset ovat invariantteja, niin niitä voidaan käyttää määrittämään, tapahtuuko jännityksellä materiaalin vaurioitumista. Tensorin komponentteja on hankalampi käyttää tähän tarkoitukseen, koska tensorin komponenttien arvot riippuvat koordinaatistosta. Vaurio ei voi olla riippuvainen koordinaatistosta. Pääjännityksiä voidaan käyttää esimerkiksi vaurioitumispintojen muodostamista varten, mihin palataan ensi luvussa.

Seuraavien lukujen laskuissa tarkastellut jännitykset ovat enintään 2-ulotteisia, ja komponentti $\sigma_y = 0$. Tällöin

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{bmatrix}.$$

Jännitystensorin $\boldsymbol{\sigma}$ komponentti σ_x kuvaa vetojännitystä ja komponentti τ_{xy} kuvaa vääntöjännitystä. Näiden termien fysikaalista merkitystä ei käsitellä, mutta ne ovat mahdollisia löytää erilaisten materiaalille tehtyjen mittausten perusteella. Jännitystensorin komponenttien yksikkönä käytetään pascalia. Seuraavien lukujen laskuissa käytetyt jännityksen suuruudet ovat megapascalin suuruusluokassa, ja megapascalia merkitään MPa.

3 JÄNNITYSVÄSYMISEN KONTINUUMIMALLI

Tässä luvussa on Ottosen et al. [9] esittämä jännitysväsymisen mallin teoria. Malli kuvaa, kuinka jännityksellä aiheutetun väsymisen aiheuttaa vauriota materiaaliin.

3.1 Vaurioitumisen mallit

Kappaleen vaurioitumista voi käsitellä erilaisilla malleilla tilanteesta riippuen. Yksinkertaisimmat mallit käyttävät ainoastaan materiaalin murtorajaa ja myötörajaa. Materiaalin murtorajalla voidaan määrittää, kuinka suurella jännityksen arvolla kappale murtuu, eli aiheutuu muodonmuutoksia, jotka eivät palaudu takaisin. Vaurioituminen alkaa yleensä ennen murtumista. Materiaalin myötörajan perusteella voidaan määrittää, missä vaiheessa jännitys aiheuttaa kappaleeseen pysyvän muodonmuutoksen. Kappale ei palaa alkuperäiseen tilaan jännityksen jälkeen, kun jännitys on myötörajan yläpuolella.

Yleensä materiaali vaurioituu siten, että mikroskooppiset vauriot lopulta aiheuttavat makroskooppisen virheen, kuten pysyvä muutos materiaalin muotoon. Tällaista mikroskooppista vaurioitumista kutsutaan *väsymiseksi*. Materiaalin myötöraja ja murtoraja eivät koske mikroskooppisia muutoksia millään tavalla, toisin kuin materiaalin väsyminen. Väsyminen tapahtuu toistuvassa jännityksessä, jota kuvataan syklien avulla. Murtoraja ja myötöraja sen sijaan koskevat ainoastaan yhtä mittausta, jossa kappaletta taivutetaan mahdollisimman paljon, kunnes havaitaan muutos.

Pysyvä muodonmuutos ei yleensä ole haluttu kappaleen toiminnallisuuden kannalta, vaikka kappale ei murtuisi täysin. Kappale voi murtua vaikka jännitys ei olisi murtorajan yläpuolella aiempien vaurioiden perusteella. Aiempia vaurioita käsitellään malleissa *jännityshistoriana*.

Vaikka jännitys olisi saman akselin suuntainen, niin materiaalilla voi olla kaksi eri myötörajaa. Yleensä kappaleen puristaminen aiheuttaa murtumisen eri jännityksen arvolla kuin kappaleen vetäminen, jos nämä tapahtuvat saman akselin suuntaisesti. Koska tämän asian huomioonottaminen hankaloittaa laskuja, niin se voidaan jättää huomiotta. Syy käyttää vaurioitumiskriteeriä on, että ne voivat ottaa huomioon monen eri suunnan jännityksiä samaan aikaan arvioimaan tapahtuuko muodonmuutosta tietyllä jännityksellä. Tässä diplomityössä kappaleen puristaminen ja vetäminen kuitenkin otetaan huomioon

sillä tavalla, että oletetaan jännityksen keskiarvon kuvaavan, onko kyseessä puristuksesta vai vedosta. Positiivinen jännityksen arvo kuvaa vetoa, ja negatiivinen jännitys kuvaa puristusta.

Jännityshistoria voi myös olla monimutkaisempi kuin pelkkä veto, puristus ja vääntö. Monimutkaisempi jännityshistoria voi yhdistellä näitä komponentteja keskenään, jolloin jännitystensorin käyttämisestä on apua. Nykyiset mallit eivät kykene ennakoimaan monimutkaisen jännityshistorian vaikutusta materiaalin vaurioitumiseen erityisen tarkasti. Mutta kuten aiemmin mainittiin, vaurioitumiskriteerejä voidaan käyttää tätä varten.

Voidaan määritellä pinta, joka kuvaa jännitystensorin pääjännitysten avulla, minkälaisella jännitystensorilla kappale tulee vaurioitumaan. Jos pääjännityksillä määritelty piste on tämän pinnan sisäpuolella, niin vaurioitumista ei tapahdu. Tällaista pintaa kutsutaan *vaurioitumispinnaksi*. Materiaalista riippuen voidaan arvioida vaurioitumispinnan muoto. Esimerkiksi Drucker-Prager vaurioitumiskriteerillä vaurioitumispinta on avoimen kartion muotoinen, mikä näkyy kuvassa 3.1. Vaurioitumispinnan yhtälö on tällä kriteerillä

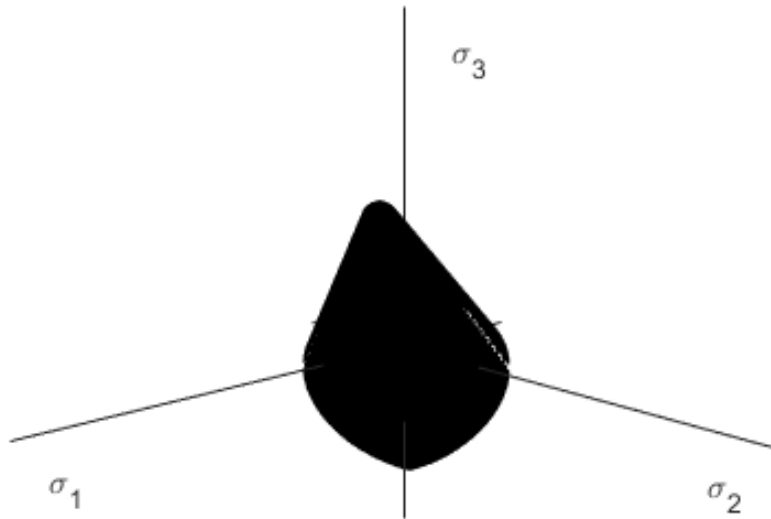
$$-DI_1 + \sqrt{J_2} = C$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = C + D(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

missä I_1 on jännitystensorin ensimmäinen invariantti, J_2 on jännitystensorin deviatorisen osan toinen invariantti, σ_1, σ_2 ja σ_3 ovat jännitystensorin pääjännitykset, C ja D ovat materiaalille ominaisia parametreja, katso [2]. Lisää tietoa vaurioitumispinnoista on esimerkiksi luentomonisteessa [1]

Samaan tapaan kuin materiaalin muodonmuutosta voidaan kuvata vaurioitumispinnan avulla, niin on mahdollista muodostaa käyrä, jonka alapuolella oletetaan, että materiaali ei väsy. Yleinen hypoteesi on, että kaikki metallit väsyvät lopulta jonkin äärellisen syklin päästä, mutta väsymisraja mitataan olettaen, että käytännön tilanteiden kannalta esimerkiksi syklien määrä 10^7 on riittävän paljon. Materiaalin väsymistä voidaan kuvata väsymisrajan ja myötörajan tai murtörajan välille piirretyllä käyrällä. Tällaista käyrää kutsutaan Haigh-diagrammiksi, ja sellainen on muodostettu kuvaan 3.2. Jos jännitys on kuvassa olevan käyrän f alapuolella, niin väsymistä ei tapahdu. Käyrä ei ole todellisuuden mukainen, kun jännityksen keskiarvo poikkeaa nolasta tarpeeksi paljon, erityisesti negatiivisille σ_m , koska suora on ainoastaan approksimaatio todellisesta käyrästä. Mittaukset tehdään yleensä jännityksen keskiarvolle $\sigma_m = 0$ ja muutamalle positiiviselle arvolle σ_m , jotta suora voidaan muodostaa, ja näiden arvojen lähellä approksimaatio on melko tarkka.

Monimutkaisempi vaihtoehto väsymisen kuvaamiselle on *kestävyyspinta*. Kestävyyspintaa voi käyttää erityisesti tilanteessa, jossa halutaan tietää, kuinka nopeasti materiaali väsyi, jos jännitys on kestävyyspinnan yläpuolella. Oletetaan, että jos piste on kestävyyspinnan sisäpuolella, niin pisteessä ei tapahdu väsymistä. Tässä diplomityössä käytetään



Kuva 3.1. Kuvassa on vaurioitumispinta Drucker-Prager vaurioitumiskriteerin mukaisesti. Vaurioitumispinta muodostaa avoimen kartion.

erityisesti kestävyyspintoja, ja ne esitellään tarkemmin seuraavassa aliluvussa.

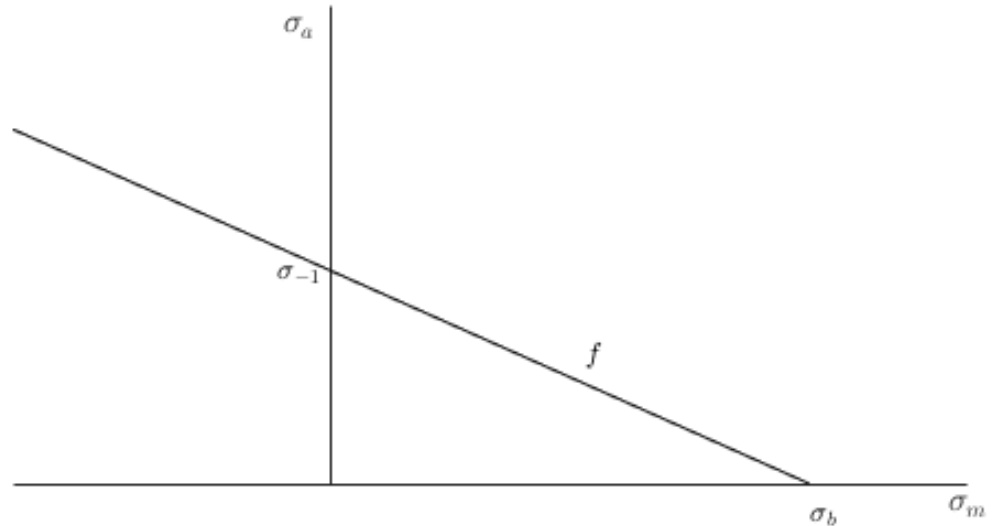
3.2 Vaurioyhtälö

Kestävyyspinnan avulla voidaan tarkastella, aiheuttaako jännitystensori materiaaliin vaurioita riippuen kestävyyspinnan keskipisteen sijainnista jännitysvaruudessa.

Vetojännitys kuvaa edellisessä luvussa määritellyn jännitystensorin σ komponenttia σ_{11} . Tätä komponenttia kuvataan jännityksen amplitudin ja jännityksen keskiarvon avulla. Oletetaan, että jännitys on vetojännityksessä jaksollista, jotta amplitudia on mahdollista käyttää. Voidaan tuntea esimerkiksi, että seosteräs SAE-4340 murtuu 10^7 syklin aikana jännityksen amplitudilla $\sigma_a = 490$ MPa, kun keskiarvo $\sigma_m = 0$, ja toisaalta, kun $\sigma_a = \sigma_m = 400$ MPa. Tällöin vetojännityksen väsymisrajana pidetään tapausta $\sigma_m = 0$, eli väsymisraja on $\sigma_{-1} = 490$ MPa.

Määritellään ensiksi funktio χ kestävyyspintaa varten.

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{-1}}(\bar{\sigma} + AI_1 - \sigma_{-1}), \quad (3.1)$$



Kuva 3.2. Kuvassa on Haigh-diagrammi. Parametri σ_{-1} merkitsee materiaalin väsymisrajaa keskijännityksen arvolla 0, σ_b merkitsee murtorajaa. Akselit mittaavat jännityksen amplitudia σ_a ja jännityksen keskiarvoa σ_m . Käyrä f merkitsee kappaleen väsymisrajaa vaihtelevilla jännityksen keskiarvon arvoilla.

missä σ_{-1} on materiaalille ominainen positiivinen parametri, A on kuvan 3.2 käyrän f kulmakertoimen itseisarvo ja I_1 on jännitystensorin ensimmäinen invariantti, eli $I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$. Tehollinen jännitys on $\bar{\sigma} = [\frac{3}{2}(s - \boldsymbol{\alpha}) : (s - \boldsymbol{\alpha})]^{1/2}$, missä $s = \boldsymbol{\sigma} - I \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$, missä I on identiteettitensori. Tensori $\boldsymbol{\alpha}$ kuvaa kestävyyspinnan keskikohtaa jännitysvaruudessa.

Kestävyyspinta määritellään yhtälöllä

$$\chi = 0. \quad (3.2)$$

Jos jännitys on kestävyyspinnan sisäpuolella, niin $\chi < 0$ ja jos jännitys on kestävyyspinnan ulkopuolella, niin $\chi > 0$.

Jännityksen aiheuttamia vaurioita kuvaa kasvava parametri D , jolle $D = 0$ alkuhetkellä ja $D = 1$ väsymismurtuman kohdalla. Rakenteen elinikä päättyy väsymismurtuman tapahtuessa. Vaurioiden kehittymisen oletetaan noudattavan differentiaaliyhtälöä

$$dD = d\chi g(\chi, D), \quad \text{missä} \quad g(\chi, D), \chi \geq 0. \quad (3.3)$$

Vaurioita kuvaava D ei voi vähentyä, joten $d\chi \geq 0$. Vaurioituminen on mahdollista ainoastaan, jos jännitys on kestävyyspinnan ulkopuolella, eli $\chi \geq 0$. Jos $\chi \geq 0$ ja $d\chi > 0$, niin vaurioitumista tapahtuu. Muissa tapauksissa $dD = 0$.

Yhtälön (3.3) funktio $g(\chi, D)$ määritellään siten, että sen arvo kasvaa epälineaaraisesti etäisyyden mukaan kestävyyspinnasta. Yleisesti käytössä oleva muoto funktiolle g on [6]

$$g = K \exp(L\chi)$$

Kokonaisuudessaan vaurioyhtälö on siis

$$dD = \begin{cases} K \exp(L\chi) d\chi, & \text{kun } d\chi, \chi \geq 0 \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases} \quad (3.4)$$

missä $K > 0$ ja $L > 0$ ovat materiaaliparametreja. Nämä parametrit, sekä parametri C yhtälöstä (3.5) voidaan määrittää vertailemalla mallia mittausarvoihin.

Kestävyyspinnan keskipiste on yhtälössä (3.1) esiintyvä tensori α . Pinnan liike vaikuttaa kuormitustilanteeseen, ja keskipisteen liikkumista kuvaa yhtälö

$$d\alpha = \begin{cases} d\chi C(\mathbf{s} - \alpha), & \text{kun } d\chi, \chi \geq 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \quad (3.5)$$

missä C on positiivinen materiaaliparametri.

3.3 Parametrien C , K , L ja k määrittäminen

Käsitellään tapausta, jossa yhtälön (3.4) parametrin arvolla $k = 0$, jännityshistoria on puhdas veto ja se on jaksollinen, kuten artikkelissa [9]. Sen jälkeen käsitellään tapaus, jossa jännityshistoria on jaksollinen puhdas vääntö.

3.3.1 Puhdas veto

Tässä tapauksessa jännityshistorian oletetaan olevan muotoa

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_{11}(t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1.$$

Määritellään $\sigma_{11} := \sigma$, $\alpha_{11} := \alpha$ ja $\alpha_{22} = \alpha_{33} = -\alpha/2$. Tehollinen jännitys on $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \mathbf{I} - \alpha\|_F$, missä matriisin \mathbf{A} Frobenius normi on $\|\mathbf{A}\|_F^2 = \text{tr}(\mathbf{A}^2)$.

Siis

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \mathbf{I} - \boldsymbol{\alpha} \right\|_F \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \mathbf{I} - \boldsymbol{\alpha})^2} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sigma_{11} - \alpha\right)^2 + 2\left(-\frac{\sigma_{11}}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}\sigma_{11}^2 - 2\sigma_{11}\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 - 3\sigma_{11}\alpha + \frac{9}{4}\alpha^2)} \\
&= \sqrt{(\sigma_{11} - \frac{3}{2}\alpha)^2} \\
&= \kappa(\sigma - \frac{3}{2}\alpha),
\end{aligned}$$

missä $\kappa = \frac{\sigma - \frac{3}{2}\alpha}{|\sigma - \frac{3}{2}\alpha|}$. Kestävyyspintaa varten määritelty funktio 3.1 on nyt

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{-1}} (\kappa(\sigma - \frac{3}{2}\alpha) + A\sigma - \sigma_{-1}). \quad (3.6)$$

Käyttämällä yhtälöä (3.5) ja derivoimalla yhtälö (3.6) saadaan yhtälö

$$d\alpha = \frac{2C}{3\sigma_{-1}} [\kappa(d\sigma - \frac{3}{2}d\alpha) + Ad\sigma](\sigma - \frac{3}{2}\alpha)$$

Tämä yhtälö voidaan muokata muotoon, jossa $d\alpha$ esiintyy ainoastaan yhdellä puolella yhtälöä, jotta $d\alpha$ voidaan sijoittaa myöhempiin yhtälöihin. Joten edellistä yhtälöä jatkamalla saadaan:

$$d\alpha + \frac{C\kappa}{\sigma_{-1}} d\alpha(\sigma - \frac{3}{2}\alpha) = \frac{2C}{3\sigma_{-1}} (\kappa + A) d\sigma(\sigma - \frac{3}{2}\alpha).$$

Näin ollen saadaan

$$d\alpha = \frac{\frac{2C}{3\sigma_{-1}} (\kappa + A) (\sigma - \frac{3}{2}\alpha)}{1 + \frac{C\kappa}{\sigma_{-1}} (\sigma - \frac{3}{2}\alpha)} d\sigma. \quad (3.7)$$

3.3.2 Puhdas vääntö

Käsitellään tapaus, missä $\boldsymbol{\sigma}(t) = \tau(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$.

Lause 3.1. Jos $\boldsymbol{\sigma}(t) = \tau(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$, niin evoluutioyhtälö on

$$d\alpha = \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}(\tau(t) - \alpha(t))\kappa(d\tau(t) - d\alpha(t)),$$

missä

$$\kappa = \frac{\tau - \alpha}{|\tau - \alpha|}.$$

Todistus. Tässä tapauksessa

$$\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))\mathbf{I}.$$

Tensori α on deviatorinen, joten on oltava

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1).$$

Suoraan laskemalla

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = 2.$$

Tällöin

$$\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|^2 = (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) = 2(\tau(t) - \alpha(t))^2,$$

joten

$$\bar{\sigma}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2(\tau(t) - \alpha(t))^2} = \sqrt{3}|\tau(t) - \alpha(t)|$$

ja

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{-1}}(\sqrt{3}\kappa(\tau(t) - \alpha(t)) - \sigma_{-1}). \quad (3.8)$$

Nyt voidaan laskea yhtälön (3.5) avulla olettamalla $d\chi, \chi \geq 0$ ja merkitsemällä $s = \tau(t)$

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\chi C(s - \alpha(t)) = \frac{1}{\sigma_{-1}}d\bar{\sigma}C(\tau(t) - \alpha(t)) = \frac{1}{\sigma_{-1}}\sqrt{3}(d\tau - d\alpha)\kappa C(\tau(t) - \alpha(t)) \\ \iff d\alpha &= \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}(\tau(t) - \alpha(t))\kappa(d\tau(t) - d\alpha(t)), \end{aligned}$$

missä

$$\kappa = \frac{\tau - \alpha}{|\tau - \alpha|}.$$

□

Samalla tavalla kuin edellisessä aliluvussa, on hyvä muuttaa tämä yhtälö muotoon, jossa α esiintyy vain yhdellä yhtälön puolella.

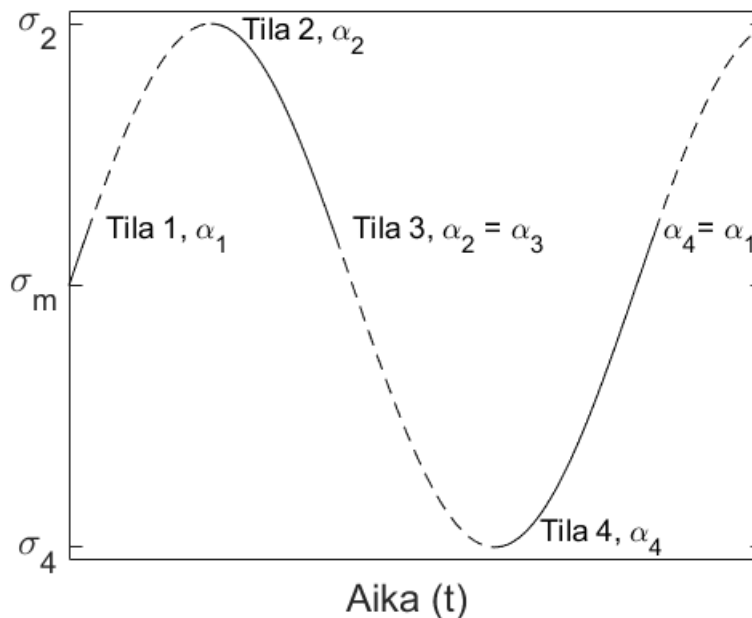
$$d\alpha + \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}} \kappa(\tau(t) - \alpha(t)) d\alpha = \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}} \kappa(\tau(t) - \alpha(t)) d\tau(t),$$

eli

$$d\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}} \kappa(\tau(t) - \alpha(t))}{1 + \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}} \kappa(\tau(t) - \alpha(t))} d\tau(t). \quad (3.9)$$

3.3.3 Parametrien määrittäminen tunnetusta evoluutiöyhtälöstä

Oletetaan, että jännitys vaihtelee jaksollisesti $\sigma_2 = \sigma_m + \sigma_a$ ja $\sigma_4 = \sigma_m - \sigma_a$ välillä, ja jännitys on puhdas veto. Tällöin voidaan määrittellä kuvan 3.3 mukaisesti tilat 1, 2, 3 ja 4, joiden välillä voidaan tehdä laskelmia.



Kuva 3.3. Kuvassa näkyy käyrä $\sigma(t)$ eri ajanhetkinä, kun jännitys on puhdas veto, sekä tilat, joissa α on saanut tietyt arvot.

Tilojen 1 ja 2 välillä $\chi > 0$ ja $d\chi > 0$, tilojen 3 ja 4 välillä $\chi > 0$ ja $d\chi > 0$. Yhtälöön

(3.3) liittyvän selityksen mukaan näille kahdella välillä tapahtuu vaurion kerääntymistä. Samaan tapaan kuin tilojen 1 ja 2 välillä, niin vauriota kertyy myös väleillä, jotka ovat samassa kohtaa esimerkiksi sinifunktion jaksoa, kun aika kasvaa. Yllä olevassa kuvassa on merkitty katkoviivalla kaikki vaurion kertymisalueet tälle aikavälille.

Merkitään

$$w = \sigma - \frac{3}{2}\alpha \quad (3.10)$$

Derivoimalla yhtälö (3.10) muuttujan t suhteen saadaan

$$dw = d\sigma - \frac{3}{2}d\alpha. \quad (3.11)$$

Käyttämällä yhtälöä (3.7) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(d\sigma - dw) &= \frac{2}{3} \frac{\frac{C}{\sigma_{-1}}(\kappa + A)d\sigma w}{1 + \frac{C\kappa}{\sigma_{-1}}w} \\ \Leftrightarrow d\sigma \left(1 - \frac{\frac{C}{\sigma_{-1}}(\kappa + A)w}{1 + \frac{C\kappa}{\sigma_{-1}}w}\right) &= dw \\ \Leftrightarrow d\sigma \left(\frac{1 + \frac{C\kappa}{\sigma_{-1}}w - \frac{C}{\sigma_{-1}}(\kappa + A)w}{1 + \frac{C\kappa}{\sigma_{-1}}w}\right) &= dw \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{C}{\sigma_{-1}}\kappa w}{1 - \frac{C}{\sigma_{-1}}Aw} dw &= d\sigma. \end{aligned}$$

Tämä yhtälö voidaan integroida tilasta a tilaan b.

$$-\frac{\kappa}{A}(w_b - w_a) - \frac{\sigma_{-1}}{CA^2}(A + \kappa) \ln \frac{1 - \frac{CA}{\sigma_{-1}}w_b}{1 - \frac{CA}{\sigma_{-1}}w_a} = \sigma_b - \sigma_a.$$

Sijoittamalla yhtälö (3.10) edelliseen yhtälöön tilojen 1 ja 2 välille saadaan

$$-\frac{\kappa}{A}\left(\sigma_2 - \frac{3}{2}\alpha_2 - \sigma_1 + \frac{3}{2}\alpha_1\right) - \frac{\sigma_{-1}}{CA^2}(A + \kappa) \ln \frac{1 - \frac{CA}{\sigma_{-1}}(\sigma_2 - \frac{3}{2}\alpha_2)}{1 - \frac{CA}{\sigma_{-1}}(\sigma_1 - \frac{3}{2}\alpha_1)} = \sigma_2 - \sigma_1. \quad (3.12)$$

Tilassa 1 $\chi = 0$, joten yhtälöstä (3.6) saadaan

$$\sigma_1 = \frac{\kappa \frac{3}{2}\alpha_1 + \sigma_{-1}}{A + \kappa}. \quad (3.13)$$

Tunnetaan, että tilojen 1 ja 2 välillä $\kappa = 1$. Yhtälöistä (3.12) ja (3.13) käyttämällä tietoa $\alpha_1 = \alpha_4$ päästään muotoon

$$\frac{3}{2}\alpha_2 - (A+1)\sigma_2 + \sigma_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{CA}(A+1)\ln\left(\frac{1 - \frac{CA}{\sigma_{-1}}(\sigma_2 - \frac{3}{2}\alpha_2)}{1 - \frac{CA}{\sigma_{-1}(A+1)}(\sigma_{-1} - \frac{3}{2}A\alpha_4)}\right) = 0. \quad (3.14)$$

Tilassa 3 $\chi = 0$ ja $\kappa = -1$, ja samantapaisella päättelyllä tilojen 3-4 yhtälöistä saadaan

$$-\frac{3}{2}\alpha_4 - (A-1)\sigma_4 + \sigma_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{CA}(A-1)\ln\left(\frac{1 - \frac{CA}{\sigma_{-1}}(\sigma_4 - \frac{3}{2}\alpha_4)}{1 - \frac{CA}{\sigma_{-1}(A-1)}(\sigma_{-1} - \frac{3}{2}A\alpha_2)}\right) = 0. \quad (3.15)$$

Jaksolliselle puhtaalle väännölle voidaan myös johtaa lausekkeet kestävyyspinnan keskipisteille α_2 ja α_4 . Samaan tapaan kuin edellä, oletetaan tällä kertaa että jännitys vaihtelee arvojen $\tau_2 = \tau_m + \tau_a$ ja $\tau_4 = \tau_m - \tau_a$ välillä ja merkitään

$$w = \tau - \alpha.$$

Nyt

$$d\alpha = dw - d\tau.$$

Yhtälön (3.9) avulla saadaan

$$\begin{aligned} d\tau - dw &= \frac{\frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}\kappa w d\tau}{1 + \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}\kappa w} \\ \Leftrightarrow d\tau &= \frac{dw}{1 - \frac{\frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}\kappa w}{1 + \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}\kappa w}} \\ &= \frac{dw(1 + \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}\kappa w)}{1 + \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}\kappa w - \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}\kappa w} \\ &= (1 + \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{-1}}\kappa w)dw. \end{aligned}$$

Tällöin integroimalla tilojen a ja b välillä

$$\tau_b - \tau_a = w_b - w_a + \frac{\sqrt{3}C}{2\sigma_{-1}}\kappa(w_b^2 - w_a^2).$$

Laittamalla edelliseen yhtälöön tilaksi a tilan 1 ja tilaksi b tilan 2 sekä sijoittamalla $w = \tau - \alpha$ saadaan

$$\tau_2 - \tau_1 = \tau_2 - \tau_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \left(\frac{\sqrt{3}C}{2\sigma_{-1}}\kappa\right)((\tau_2 - \alpha_2)^2 - (\tau_1 - \alpha_1)^2). \quad (3.16)$$

Koska kuvan 3.3 mukaisessa tilassa 1 $\chi = 0$, niin yhtälöllä (3.8) saadaan

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{3}\kappa\alpha_1 + \sigma_{-1}}{\sqrt{3}\kappa}.$$

Sijoitetaan edellinen yhtälö yhtälöön (3.16) ja käyttämällä tietoa, että $\kappa = 1$ tilojen 1 ja 2 välillä saadaan

$$0 = \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{\sqrt{3}C}{2\sigma_{-1}}((\tau_2 - \alpha_2)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}\alpha_1 + \sigma_{-1}}{\sqrt{3}} - \alpha_1\right)^2).$$

Koska myös tilassa 3 $\chi = 0$ ja tilojen 3 ja 4 välillä $\kappa = -1$, niin samalla tavalla tilojen 3 ja 4 välillä integroituna saadaan yhtälö

$$0 = \alpha_3 - \alpha_4 - \frac{\sqrt{3}C}{2\sigma_{-1}}((\tau_4 - \alpha_4)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}\alpha_3 + \sigma_{-1}}{\sqrt{3}} - \alpha_3\right)^2).$$

Koska $\alpha_1 = \alpha_4$ ja $\alpha_2 = \alpha_3$, niin nämä yhtälöt saadaan muotoon

$$\begin{cases} \alpha_4 - \alpha_2 + \frac{\sqrt{3}C}{2\sigma_{-1}}((\tau_2 - \alpha_2)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}\alpha_4 + \sigma_{-1}}{\sqrt{3}} - \alpha_4\right)^2) = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_4 - \frac{\sqrt{3}C}{2\sigma_{-1}}((\tau_4 - \alpha_4)^2 - \left(\frac{-\sqrt{3}\alpha_2 + \sigma_{-1}}{\sqrt{3}} + \alpha_2\right)^2) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Riippuen siitä, että onko jännitys puhdas veto vai puhdas vääntö, joko yhtälöiden (3.14) ja (3.15) tai yhtälön (3.17) avulla saadaan laskettua α_2 ja α_4 , joita voidaan käyttää funktion χ arvon laskemisessa yhtälöllä (3.6). Laskettuja χ_2 ja χ_4 arvoja voidaan käyttää vaurioyhtälössä (3.4), jolloin saadaan kertynyt vaurio näiden kahden tilan välillä integroinnin jälkeen. Askeleet esitetään tarkemmin alla olevissa yhtälöissä. Kuten luvun alussa mainittiin, $k = 0$, ja se on otettu huomioon näissä laskuissa vaurioyhtälöön liittyen.

Integroimalla yhtälö (3.4) tilasta 1 tilaan 2 saadaan

$$D_2 - D_1 = \frac{K}{L}(\exp(L\chi_2) - \exp(L\chi_1)).$$

Koska tila 1 määriteltiin siten, että siinä $\chi = 0$, niin $\chi_1 = 0$. Joten

$$D_2 - D_1 = \frac{K}{L}(\exp(L\chi_2) - 1).$$

Samalla tavalla tilojen 3 ja 4 välillä

$$D_4 - D_3 = \frac{K}{L}(\exp(L\chi_4) - 1).$$

Kokonaisvaurio yhden jakson aikana on

$$\Delta D = D_2 - D_1 + D_4 - D_3 = \frac{K}{L}(\exp(L\chi_2) + \exp(L\chi_4) - 2). \quad (3.18)$$

Vaurio on määritelty siten, että materiaalin elinikä päättyy, kun $D = 1$. Tähän päättymiseen merkitään kuuluvan N jaksoa, eli $N\Delta D = 1$. Tällöin yksi sykli aiheuttaa $\frac{1}{N}$ jakson verran vauriota. Kokonaismäärä jaksoja saadaan yhtälöstä

$$\frac{1}{N} = \frac{K}{L}(\exp(L\chi_2) + \exp(L\chi_4) - 2), \quad (3.19)$$

missä χ_2 ja χ_4 voidaan laskea yhtälöstä (3.6), koska keskipisteen α arvot voidaan laskea.

Teoreettista kestopukua yhtälöstä (3.19) voidaan verrata kokeelliseen kestopukuun. Tällöin saadaan selville, millaiset arvot parametreille C , K ja L sopivat parhaiten, koska teoreettinen kestopuku riippuu näistä parametreista. Parametrit löytyvät esimerkiksi sillä tavalla, että kestopukujen logaritmien erotuksen neliöiden summa on mahdollisimman pieni.

$$S(C, K, L) = \sum_{i=1}^n (\ln(N_{\text{exp}}(i)) - \ln(N(i)))^2, \quad (3.20)$$

missä $N_{\text{exp}}(i)$ on kokeellinen kestopuku ja N on teoreettinen kestopuku.

3.4 Moniakselinen jännitys

On mahdollista, että jännitys koostuu akselin suuntaisen jännityksen lisäksi leikkausjännityksestä. Tällöin jännityshistoria on

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma(t)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \tau(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1), \quad (3.21)$$

jonka matriisiesitys on

$$\begin{bmatrix} \sigma(t) & \tau(t) & 0 \\ \tau(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin(\omega t),$$

$$\tau(t) = \tau_m + \tau_a \sin(\omega t - \delta).$$

Deviatorinen jännitystensori on

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}(t) &= \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))\mathbf{I} \\
 &= \sigma(t)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \tau(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) - \sigma(t)\frac{1}{3}\mathbf{I} \\
 &= \sigma\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \tau(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) - \sigma(t) + \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\
 &= \sigma(t)\left(\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\right) + \tau(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1).
 \end{aligned}$$

Tensori $\boldsymbol{\alpha}$ on deviatorinen, eli $\text{tr}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Oletetaan, että

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha(t)\left(\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\right) + \beta(t)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$$

ja

$$\mathbf{s}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t) = (\sigma(t) - \alpha(t))\left(\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\right) + (\tau(t) - \beta(t))(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1).$$

Deviatorisen jännityksen toinen invariantti on

$$\begin{aligned}
 I_2(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{2}(\text{tr}((\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})^2) - (\text{tr}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}))^2) \\
 &= \frac{1}{2}\text{tr}((\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})^2) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}(\sigma(t) - \alpha(t))^2 + (\tau(t) - \beta(t))^2 + \frac{1}{9}(\sigma(t) - \alpha(t))^2 + (\tau(t) - \beta(t))^2\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{1}{9}(\sigma(t) - \alpha(t))^2\right) \\
 &= \frac{1}{3}(\sigma(t) - \alpha(t))^2 + (\tau(t) - \beta(t))^2.
 \end{aligned}$$

Tämän avulla voidaan laskea tehollinen jännitys

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3I_2(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})} \quad (3.22)$$

$$= \sqrt{3\left(\frac{1}{3}(\sigma(t) - \alpha(t))^2 + (\tau(t) - \beta(t))^2\right)} \quad (3.23)$$

$$= \sqrt{(\sigma(t) - \alpha(t))^2 + 3(\tau(t) - \beta(t))^2}. \quad (3.24)$$

Seuraavaksi lasketaan derivaatta funktiolle $\chi(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)) = \frac{1}{\sigma_{-1}}(\bar{\sigma}(t) + A\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) - \sigma_{-1})$.

Mallissa tarvittavat A ja σ_{-1} tulevat 1-ulotteisesta tapauksesta, jossa $\tau = 0$.

$$\dot{\bar{\sigma}}(t) = \frac{(\sigma(t) - \alpha(t))(\dot{\sigma}(t) - \dot{\alpha}(t)) + 3(\tau(t) - \beta(t))(\dot{\tau}(t) - \dot{\beta}(t))}{\sqrt{(\sigma(t) - \alpha(t))^2 + 3(\tau(t) - \beta(t))^2}},$$

joten

$$\dot{\chi}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)) = \frac{1}{\sigma_{-1}} \left(\frac{(\sigma(t) - \alpha(t))(\dot{\sigma}(t) - \dot{\alpha}(t)) + 3(\tau(t) - \beta(t))(\dot{\tau}(t) - \dot{\beta}(t))}{\sqrt{(\sigma(t) - \alpha(t))^2 + 3(\tau(t) - \beta(t))^2}} + A\dot{\sigma}(t) \right).$$

Tämä voidaan sijoittaa keskipisteen evoluutioyhtälöön

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = C(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{\alpha})\dot{\chi}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (3.25)$$

Toisaalta $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ on muotoa

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \dot{\alpha}(t) \left(\frac{2}{3} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{1}{3} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right) + \dot{\beta}(t) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1). \quad (3.26)$$

Tarkastellaan funktioita

$$w(t) = \alpha(t) + i\beta(t) \quad (3.27)$$

ja

$$z(t) = \sigma(t) + i\tau(t), \quad (3.28)$$

missä i on imaginääriyksikkö.

Yhtälöiden (3.25) ja (3.26) avulla saadaan

$$\dot{\alpha}(t) = (\sigma(t) - \alpha(t)) \frac{C}{\sigma_{-1}} \left(\frac{(\sigma(t) - \alpha(t))(\dot{\sigma}(t) - \dot{\alpha}(t)) + 3(\tau(t) - \beta(t))(\dot{\tau}(t) - \dot{\beta}(t))}{\sqrt{(\sigma(t) - \alpha(t))^2 + 3(\tau(t) - \beta(t))^2}} + A\dot{\sigma}(t) \right)$$

ja

$$\dot{\beta}(t) = (\tau(t) - \beta(t)) \frac{C}{\sigma_{-1}} \left(\frac{(\sigma(t) - \alpha(t))(\dot{\sigma}(t) - \dot{\alpha}(t)) + 3(\tau(t) - \beta(t))(\dot{\tau}(t) - \dot{\beta}(t))}{\sqrt{(\sigma(t) - \alpha(t))^2 + 3(\tau(t) - \beta(t))^2}} + A\dot{\sigma}(t) \right).$$

Nyt voidaan merkitä

$$\dot{w}(t) = \dot{\alpha}(t) + i\dot{\beta}(t) = (z - w) \frac{C}{\sigma_{-1}} \left(\frac{\operatorname{Re}(z - w)\operatorname{Re}(\dot{z} - \dot{w}) + 3\operatorname{Im}(z - w)\operatorname{Im}(\dot{z} - \dot{w})}{\sqrt{(\operatorname{Re}(z - w))^2 + 3(\operatorname{Im}(z - w))^2}} + A\operatorname{Re}(z) \right). \quad (3.29)$$

Kestävyyspinnan keskipiste w voidaan ilmaista kahden reaaliluvun avulla muuttujanvaih-
dolla $z - w = re^{i\theta}$. Tällöin yhtälön (3.29) vasen puoli on

$$\dot{w}(t) = -\dot{r}e^{i\theta} - ir\dot{\theta}e^{i\theta} + \dot{z}.$$

Tämän avulla saadaan uusi yhtälö

$$\begin{aligned}
 -\dot{r}e^{i\theta} - ir\dot{\theta}e^{i\theta} + \dot{z} &= \frac{re^{i\theta}C}{\sigma_{-1}} \left(\frac{r \cos(\theta)(\dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta)) + 3r \sin(\theta)(\dot{r} \sin(\theta) + r\dot{\theta} \cos(\theta))}{r\sqrt{1 + \sin^2(\theta)}} \right) \\
 &\quad + ARe(z) \\
 \Leftrightarrow -\dot{r}e^{i\theta} - ir\dot{\theta}e^{i\theta} + \dot{z} &= \frac{re^{i\theta}C}{\sigma_{-1}} \left(\frac{\dot{r}(1 + 2\sin^2(\theta)) + 2r\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sqrt{1 + \sin^2(\theta)}} + ARe(z) \right) \\
 \Leftrightarrow -\dot{r} - ir\dot{\theta} + \dot{z}e^{-i\theta} &= \frac{rC}{\sigma_{-1}} \left(\frac{\dot{r}(1 + 2\sin^2(\theta)) + 2r\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sqrt{1 + \sin^2(\theta)}} + ARe(z) \right).
 \end{aligned}$$

Kun reaaliosa ja imaginääriosia otetaan erikseen, saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases}
 -\dot{r} + Re(\dot{z}) \cos(\theta) + Im(\dot{z}) \sin(\theta) = \frac{rC}{\sigma_{-1}} \left(\frac{\dot{r}(1 + 2\sin^2(\theta)) + 2r\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sqrt{1 + \sin^2(\theta)}} + ARe(z) \right) \\
 -r\dot{\theta} - Re(\dot{z}) \sin(\theta) + Im(\dot{z}) \cos(\theta) = 0.
 \end{cases}$$

Näistä voidaan laskea r :n ja θ :n derivaatat

$$\begin{cases}
 \dot{r} = \frac{\frac{rC}{\sigma_{-1}} \left(\frac{(-Re(\dot{z}) \sin(\theta) + Im(\dot{z}) \cos(\theta))2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sqrt{1 + \sin^2(\theta)}} + ARe(z) \right) - Re(\dot{z}) \cos(\theta) - Im(\dot{z}) \sin(\theta)}{-1 - \frac{rC(1 + 2\sin^2(\theta))}{\sigma_{-1}\sqrt{1 + \sin^2(\theta)}}} \\
 \dot{\theta} = \frac{\dot{r} \cos(\theta) - \dot{z} \sin(\theta)}{r}.
 \end{cases} \quad (3.30)$$

Toisesta yhtälöstä:

$$\dot{r} = -\frac{\ddot{\theta}(\dot{r} \cos(\theta) - \dot{\sigma} \sin(\theta))}{\dot{\theta}^2} + \frac{\ddot{r} \cos(\theta) - \sin(\theta)\dot{r} - \ddot{\sigma} \sin(\theta) - \cos(\theta)\dot{\sigma}}{\dot{\theta}} \quad (3.31)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{(\ddot{r} \cos(\theta) - \sin(\theta)\dot{r} - \ddot{\sigma} \sin(\theta) - \cos(\theta)\dot{\sigma}) - \dot{r}\dot{\theta}}{r}. \quad (3.32)$$

Yhtälöparin (3.30) ja yhtälön (3.32) avulla voidaan laskea funktio

$$\ddot{\theta} = f(t, \theta, \dot{\theta}). \quad (3.33)$$

Tällöin differentiaaliyhtälössä on ainoastaan yksi muuttuja kahden sijaan, vaikka differentiaaliyhtälö on kertaluvun suurempi. Differentiaaliyhtälöä on helpompi käsitellä tällä tavalla, joten tätä muotoa käytetään ratkaisun etsimisessä myöhemmin.

4 MALLIN TESTAAMINEN MITTAUKSILLA

Tässä luvussa esitellään algoritmi, jonka avulla saadaan minimoitua edellisessä luvussa esitetty summa 3.20. Lisäksi luvussa on muutamia tuloksia liittyen parametrien C , K ja L merkitykseen mallin kannalta.

4.1 Optimiparametrien määrittämiseen käytettävä algoritmi

Tällä algoritmilla on mahdollista etsiä parametrien C , K ja L optimaaliset arvot, kun tiedetään väsymispinnan keskiön α liikkuvan lineaarisesti kahden pisteen välillä. Algoritmilla lasketaan teoreettinen arvo kestoluvulle N , jota verrataan kokeelliseen kestolukuun N_{exp} .

Algoritmi 4.1. 1. Valitaan alkuarvot parametreille C , K ja L ja lasketaan parametrit A ja σ_{-1} kuvasta 3.2, missä A on kuvan käyrän f kulmakerroin [9].
2. Muutetaan parametrin C arvoa, jonka jälkeen lasketaan α_2 ja α_4 (ohjeet laskemiselle alla olevassa kappaleessa). Tämän avulla saadaan χ_2 ja χ_4 yhtälöstä (3.6).
3. Muutetaan parametrien K ja L arvoja siten, että summa 3.20 on mahdollisimman pieni.

Askeleet 2 ja 3 toistetaan kaikille kokeellisille kestoluvun arvoille $N(i)$. Kestävyyspinnan keskipisteet α_2 ja α_4 voidaan laskea kahdella eri tavalla. Jos jännityshistoriassa σ on yksi komponentti ja se on jaksollinen, niin on mahdollista käyttää luvussa 3.3 esiteltyjä yhtälöitä (3.14) ja (3.15), joilla on ratkaisuparit α_{21} , α_{41} ja α_{22} , α_{42} . Myöhemmin käsitellään, kumpi näistä ratkaisupareista on valittava, jotta malli toimii. Jos jännityshistoriassa on useampi komponentti, mutta se on jaksollinen, niin vaihtoehtoinen menetelmä on käyttää alla olevaa algoritmia 4.2 laskemaan w_a ja w_b . On myös mahdollista käyttää algoritmia 4.2 vaikka jännitys olisi 1-ulotteinen ja tällöin $w_a = \alpha_2$ ja $w_b = \alpha_4$. Algoritmi pysähtyy, kun summa 3.20 on tarpeeksi pieni.

Apualgoritmi, jolla voidaan laskea tarvittavat w_a ja w_b arvot.

Algoritmi 4.2. 1. Asetetaan kestävyyspinnan keskipisteelle w alkuarvo (esimerkiksi 0).
2. Lasketaan ajanhetki t , jolloin $\chi(z, w) \geq 0$ ja $\dot{\chi}(z, w) \geq 0$.
3. Differentiaaliyhtälölle (3.33) tunnetaan nyt alkuarvot t , θ ja $\dot{\theta}$, koska ne voidaan laskea löydetyllä muuttujan z arvolla yhtälöistä

$$z - w = re^{i\theta}$$

ja

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{r} \cos(\theta) - \dot{\sigma} \sin(\theta)}{r}.$$

4. Lasketaan differentiaaliyhtälöä (3.33) eteenpäin ajanhetkestä t niin kauan, kunnes ratkaisu toteuttaa ehdon

$$\dot{\chi}(z(t_u, w_u)) = 0.$$

5. Etsitään ajanhetki t väliltä $t_u \leq t \leq t_u + 0,5$, jolloin $\chi(z, w_u) = 0$. Jos $t \geq 1$, niin asetetaan $t = t - 1$.

Askeleet 3-5 toistetaan, kunnes keskipiste w_u vaihtelee kahden arvon välillä tarpeeksi tarkasti. Esimerkiksi tarkkuutena voi olla, että keskipisteen w_u arvo ei muutu enempää kuin 0,1 verran kahden askeleen jälkeen, ja samoin keskipisteen w_{u+1} arvolle.

Ratkaisun löydyttyä on arvioitava, onko ratkaisu käypä. Kaikki löydetty ratkaisut eivät toteuta yhtälöitä (3.14) ja (3.15) tarpeeksi hyvin, tai parametrien C , K ja L arvot eivät vaikuta realistisilta.

Erikoistapaukset algoritmille 4.2

- Arvo t , jolle $\chi(z, \alpha) = 0$, ei ole olemassa \rightarrow vaihdetaan alkupiste
- Algoritmi ei päädy ratkaisupariin w_a, w_b , koska iteraatiot loppuvat kesken \rightarrow voidaan kasvattaa iteraatoiden määrää tai valita parempi alkupiste.
- Algoritmi ei päädy ratkaisupariin w_a, w_b , koska algoritmin tulos vaihtelee kolmen, tai useamman pisteen välillä \rightarrow algoritmi ei pysty löytämään ratkaisua tässä tapauksessa, ja tulos hylätään
- Differentiaaliyhtälössä (3.33) $\dot{\theta} = 0 \rightarrow$ oletetaan, että derivaatta on 0, kunnes $\dot{\theta} \geq 0,05$. Kun $\dot{\theta} \leq 0,05$, niin käytetään yhtälöparin (3.30) ylempää yhtälöä vakiolla θ ja vaihtelevalla arvolla r . Tämä aiheuttaa pienen epätarkkuuden, koska θ ei ole välillä tismalleen vakio, mutta menetelmä toimii melko tarkasti.

4.2 Algoritmin käyttäminen yhden komponentin jännityshistoriaan

Käsitellään seuraavaksi huomioon otettavia asioita, kun käytetään edellisessä luvussa esitellyjä algoritmeja yksinkertaiseen jännityshistoriaan. Erityisesti algoritmin 4.2 käyttäminen on hankalaa koska differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen useassa pisteessä vaatii huomattavasti enemmän aikaa kuin yhtälöparin ratkaisun löytäminen. Mutta tämän algoritmin käyttäminen tulee tarpeen myöhemmin.

Parametrin C kasvattaminen nopeuttaa differentiaaliyhtälön ratkaisun löytämistä. Tämän

takia algoritmi 4.2 tarvitsee alarajan parametrille C , koska jos C on liian pieni, niin algoritmilla kestää liian pitkään päästä optimiratkaisuun alkuarvosta, jos alkuarvo ei ole lähellä optima. Tällöin tulos olisi myös epätarkka.

Parametrin C vaikutus optimiarvoihin α on mahdollista laskea ennen algoritmien aloitusta toistamalla askeleita laskematta parametrien K ja L arvoja. Tämä on hyödyllistä erityisesti algoritmilla 4.2, jotta voidaan interpoloida parempi alkuarvo nollan sijaan nopeasti. Esimerkiksi voidaan laskea keskipisteen w optimiarvot kymmenelle eri parametrin C arvolle väliltä $0, 1 \leq C \leq 10$, ja näiden avulla voidaan interpoloida alkuarvo keskipisteelle w , kun $C = 9, 13$. Myös algoritmin aikana laskettuja optimipisteitä on mahdollista käyttää interpoloinnin tarkentamiseen.

Algoritmin 4.1 askeleella 3 ei ole ratkaisua kestävyyspinnan keskipisteen reaalikomponenteille α_2 ja α_4 , jos parametrin C arvo on liian suuri. Muissa tapauksissa ratkaisupareja α_2 ja α_4 on kaksi. Näistä toinen ratkaisupari on mahdollista ratkaista algoritmilla 2. Algoritmille 2 pätee myös, että parametrin C arvon ollessa liian suuri, ratkaisua ei löydy apualgoritmin askeleelle 2.

Algoritmi 4.2 toimii huomattavasti hitaammin, kuin arvojen w_a ja w_b etsiminen yhtälöistä (3.14) ja (3.15), olettaen että $w_a = \alpha_2$ ja $w_b = \alpha_4$. Esimerkiksi etsittäessä materiaalille SAE-7475 w_a ja w_b arvot, kun $C = 1, \sigma_a = 350, \sigma_m = 0$ ja alkuarvo $w = 87, 5$, algoritmilla menee aikaa 68,45 sekuntia päätyä ratkaisupariin $\alpha_2 = 134, 61, \alpha_4 = -7, 30$. Yhtälöpari päättyy 1,39 sekunnissa ratkaisuun $\alpha_2 = 134, 61, \alpha_4 = -7, 31$. Tämä on kuitenkin melko odotettua, koska differentiaaliyhtälöä eteenpäin laskeminen on paljon hitaampaa kuin kahden yhtälön ratkaisun etsiminen.

Tämä on kuitenkin algoritmin ainut haitta verrattuna kestävyyspinnan keskipisteen laskemiseen yhtälöistä (3.14) ja (3.15) tai yhtälöistä (3.17). Jos on tarve laskea kestävyyspinnan keskipiste monimutkaisemmalle jännityshistorialle tai vaikuttaa siltä, että vaurioitumista tapahtuu esimerkiksi ainoastaan tilasta 3 tilaan 4 (kuvan 3.3 mukaisesti), differentiaaliyhtälöitä käyttävä algoritmi on ainoa vaihtoehto etsiä ratkaisu. Lisäksi algoritmi on ainoa mahdollisuus laskea koko keskipisteen w liike, eikä pelkästään sen päätepisteet. Tähän ei kuitenkaan ole tarvetta vaurioitumisen mallintamisen kannalta.

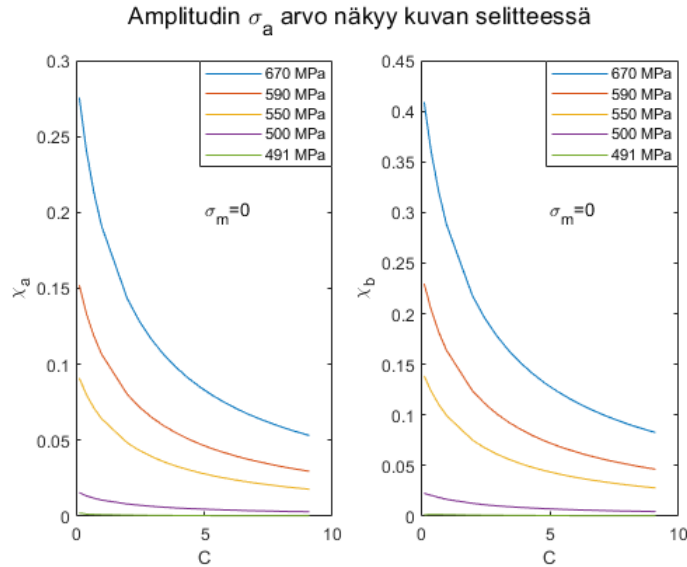
Koska kestävyyspinnan keskipisteitä etsivä algoritmi 4.2 toimii niin hitaasti (5 minuuttia yhtälöitä vastaa suunnilleen 5 tuntia tällä algoritmilla), on mahdollista käyttää epätarkempia menetelmiä laskemaan parametrit C, K ja L algoritmilla 4.1, jotta parametrien laskeminen onnistuu kohtuullisessa ajassa. Ei ole mahdollista laskea, onko esimerkiksi arvojen $C = 1, 002$ ja $C = 1, 005$ välillä huomattavasti eroa käyttämättä paljon aikaa. Ajan säästämiseen on useita vaihtoehtoja, esimerkiksi:

- Alkupisteen w valitseminen paremmin. Jos tarvitaan alkupiste w erittäin monella eri parametrin C arvolla, kuten optimoinnissa, niin voidaan ensiksi laskea w muuta-

malla parametrin C arvolla ja interpoloida keskipisteen w alkuarvo muille parametrin C arvoille. Jos $w = 130$ olisi alkupiste $w = 87,5$ sijaan, niin algoritmi löytäisi ratkaisun 47,89 sekunnissa aiemman esimerkin 68,45 sekunnin sijaan.

- Differentiaaliyhtälön (3.33) laskeminen harvemmassa pisteessä, esimerkiksi $t = 0,01$ välein sen sijaan kuin $t = 0,001$ välein. Koska ratkaisu päättyy ratkaisupisteen tarkkuuteen, niin tämä ei välttämättä ole hyvä vaihtoehto, koska pisteiden harventaminen pienentää ratkaisun tarkkuutta ja sen takia myös algoritmi päättyy pidemmän ajan päästä. Mutta jos alkupiste on kaukana lopullisesta ratkaisupisteestä, niin tästä ei ole paljon haittaa. Ainakin ensimmäisen kahden iteraation aikana differentiaaliyhtälön ratkaisu voi olla epätarkempi, jotta säästyä aikaa.
- Differentiaaliyhtälöön (3.33) eri ratkaisijoiden vertailu. Esimerkiksi Matlab:issa on useita differentiaaliyhtälön ratkaisijoita kuten ode45, ode23, ode23t. On hankalaa tietää tarkasti, mikä on paras vaihtoehto. Ratkaisijoissa voi olla huomattavasti eroa esimerkiksi ajankäytön suhteen. Testailun jälkeen vaikutti siltä, että ode45 on hyvä vaihtoehto ratkaisemaan differentiaaliyhtälöt, joissa $\theta = \dot{\theta} = 0$, ja ode23t on hyvä ratkaisemaan muut tapaukset.
- Epätarkemman loppupisteen hyväksyminen, esimerkiksi algoritmi päättyisi kun edellinen piste eroaa 1% nykyisestä 0,1% sijaan. Tällöin ratkaisussa kestäisi 48,47 sekuntia päätyä pisteisiin $\alpha_2 = 134,60$ ja $\alpha_4 = -7,31$ sen sijaan, että ratkaisu olisi 68,45 sekunnissa $\alpha_2 = 134,61$, $\alpha_4 = -7,30$.
- Parametrin C laskeminen harvemmassa pisteessä, ja interpolointi funktion χ arvoista näiden pisteiden välillä. Seuraava esimerkki havainnollistaa tätä, jossa merkitään χ_a tarkoittavan funktion χ arvoa ratkaisupisteessä w_a . Jos $\chi_a(C_1) = 1$, $\chi_a(C_2) = 2$, $C_1 = 0,5$ ja $C_2 = 1$, voidaan olettaa että kun $C_3 = 0,7$, niin funktion $\chi_a(C_3)$ arvo on jossakin funktion arvojen $\chi_a(C_1)$ ja $\chi_a(C_2)$ välillä, koska seuraavan aliluvun tulosten mukaan tunnetaan että funktion χ arvoilla on ennakoitava yhteys parametrin C arvoihin. Tämä menetelmä kuitenkin pystyy ainoastaan arvioimaan, mikä parametrin C arvo on sopivin tältä väliltä. Esimerkiksi jos interpoloinnin määrittelyssä on käytetty parametrin C arvoja $C = \{1, 4, 9\}$, niin algoritmilla 4.1 summa 3.20 ei päädy globaaliin minimiin, jos globaalissa minimissä $C = 11$. Ensi aliluvussa tutkitaan, onko tämä mahdollista välttää esimerkiksi sillä, että summa kasvaisi tietyn parametrin C arvon jälkeen. Tällöin ei olisi tarvetta välittää suurista parametrin C arvoista.

Näistä vaihtoehdoista huomattavasti nopeuttavin menetelmä on viimeinen, koska se voi säästää algoritmia tuhansilta iteraatioilta, joissa vertaillaan summan arvoja useilla parametrin C arvoilla, jotka eivät poikkea toisistaan lähes lainkaan.



Kuva 4.1. Kuvissa on laskettu funktion arvot χ_a ja χ_b vaihtelevilla parametrin C arvoilla seosteräkselle SAE 4340. Eri käyrät vastaavat eri jännityshistorioita $\sigma = \sigma_a \sin(2\pi t)$, jonka amplitudin arvot näkyvät kuvassa liitteen A mukaisesti.

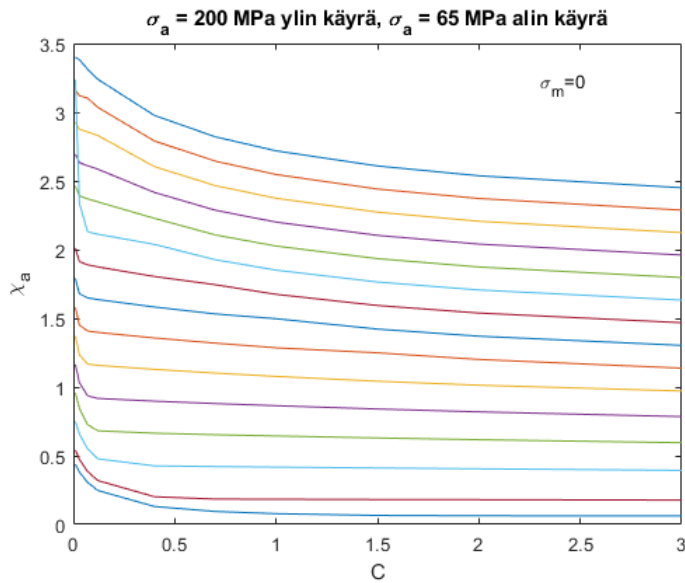
4.3 Tulkintoja algoritmin antamista tuloksista yhden komponentin jännityshistorialla

Tässä aliluvussa esitellään algoritmin toimintaan liittyviä tuloksia. Suuri osa tulkinnoista on melko ilmiselvää kuvista, mutta kuvat esitellään joka tapauksessa tulkintojen perusteeksi.

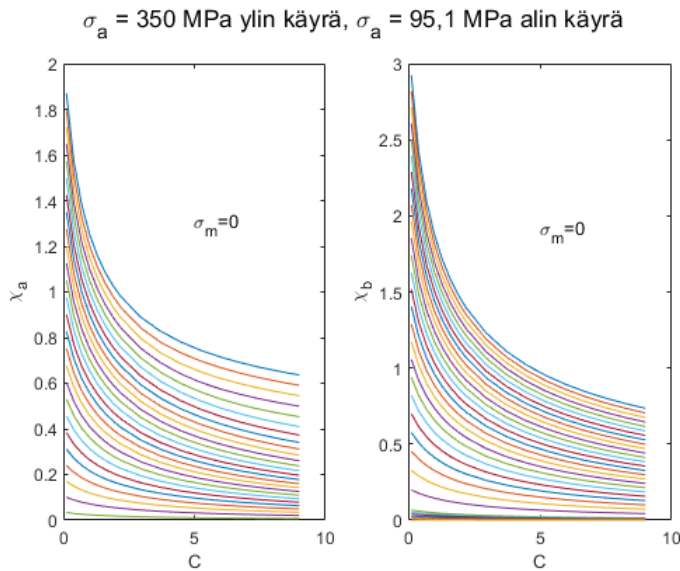
Tarkastellaan ensiksi edellisessä aliluvussa mainittua parametrin C yhteyttä funktioon χ . Tämä on tehty etsimällä kestävyyspinnan keskipisteet α_a ja α_b kolmelle eri materiaalille vaihtelevilla parametrin C arvoilla tietyillä jännityshistorioilla, joista osa on esitetty liitteessä A. Kaikissa näissä jännityshistorioissa $\sigma_m = 0$. Funktion arvot χ_a ja χ_b on mahdollista määrittää kestävyyspinnan keskipisteiden α_a ja α_b avulla yhtälöstä (3.6).

Kuvissa 4.1, 4.2 ja 4.3 on esitetty edellä kuvatut käyrät. Näistä huomataan, että funktion χ arvoilla kestävyyspinnan keskipisteissä on selvästi jonkinlainen yhteys parametriin C . Tätä yhteyttä voidaan käyttää siis käyttäen interpolointiin, kuten edellisessä aliluvussa mainittiin.

Kuvista 4.1, 4.2 ja 4.3 on myös mahdollista havaita, että suurilla parametrin C arvoilla funktion arvot χ_a ja χ_b stabilisoituvat. Tämä tarkoittaa sitä, että ei ole merkitystä ottaa huomioon optioinnissa suuria arvoja parametrille C , koska vauroituminen riippuu funktion arvoista χ_a ja χ_b , eikä suoraan parametrista C . Parametria C käytetään ainoastaan laskemaan nämä funktion arvot χ_a ja χ_b . Tämä takaa sen, että interpolointi voi antaa järkevän optimiratkaisun, koska ratkaisuväli ei ole ääretön.



Kuva 4.2. Kuvissa on laskettu funktion arvot χ_a ja χ_b vaihtelevilla parametrin C arvoilla alumiiniseokselle SAE 6156. Eri käyrät vastaavat eri jännityshistorioita $\sigma = \sigma_a \sin(2\pi t)$, jonka amplitudin arvot löytyvät liitteestä A, ja suurin sekä pienin amplitudin arvo näkyy myös kuvassa.



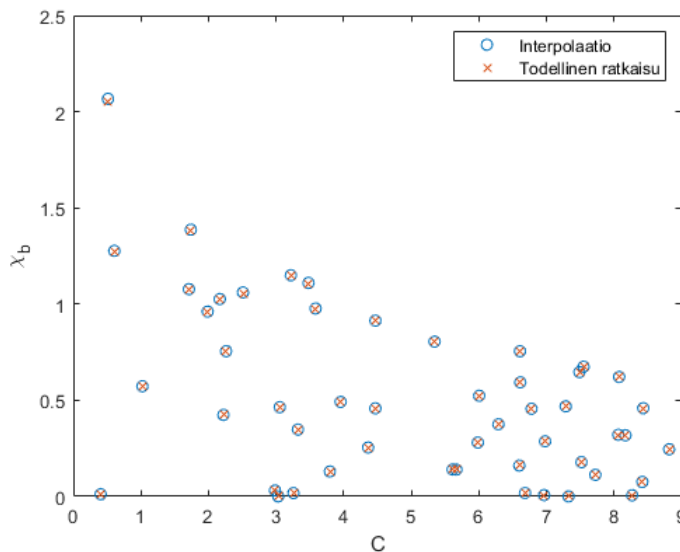
Kuva 4.3. Kuvissa on laskettu funktion arvot χ_a ja χ_b vaihtelevilla parametrin C arvoilla seosteräkselle SAE 7475. Eri käyrät vastaavat eri jännityshistorioita $\sigma = \sigma_a \sin(2\pi t)$, jonka amplitudin arvot löytyvät liitteestä A, ja suurin sekä pienin amplitudin arvo näkyy myös kuvassa.

Tarkastellaan seuraavaksi interpoloinnin tarkkuutta kuvan 4.4 avulla. Tässä kuvassa on laskettu 50 satunnaista interpolaatiopistettä C, χ_b koordinaatistoon, missä C on satunainen arvo väliltä $0, 1 \leq C \leq 9, 0$ ja w_b on satunnaisella SAE 7475 mittausdatan A σ_a arvolla laskettu kestävyyspinnan keskipiste, jonka avulla voidaan laskea todellinen ratkaisu funktion arvolle χ_b . Interpolaatiot ovat laskettu laskemalla todellinen ratkaisu funktion arvoille χ_b samoilla SAE 7475 mittausdatan σ_a arvoilla, mutta parametrin C arvoina on tarkan arvon sijasta käytetty taulukon 4.1 mukaisia arvoja.

C	0,1	0,4	0,7	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2	3,0
	3,7	4,5	5,2	6,0	6,7	7,5	8,2	9,0	

Taulukko 4.1. Interpolointiin käytetyt C arvot kuvassa 4.4.

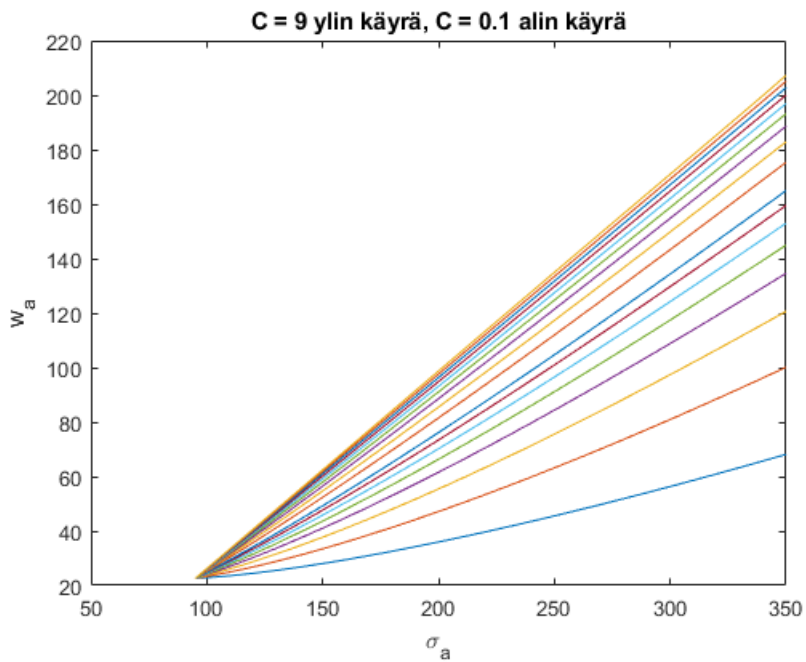
Näiden parametrin C arvojen väliltä on mahdollista interpoloida pisteitä kuvan 4.3 käyrän tapaisesti. Interpolaation pisteet vaikuttavat olevan lähellä todellista ratkaisua kuvassa 4.4, vaikka pisteitä on laskettu melko harvalle välille parametrin C arvoja.



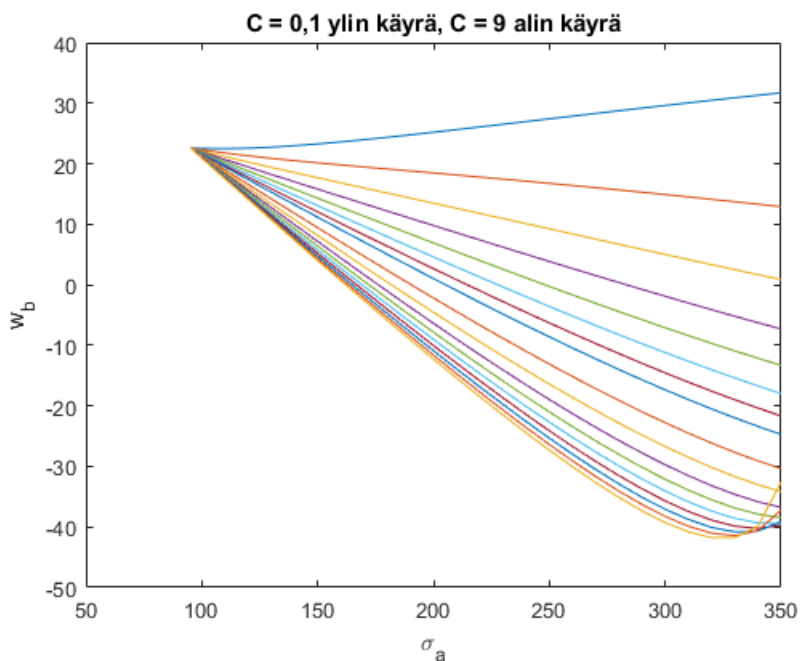
Kuva 4.4. Kuvaan on piirretty interpoloidut arvot sekä todelliset arvot funktion arvolle χ_b 50 satunnaiselle pisteelle koordinaatistoon. Materiaalina on SAE 7475.

Tarkastellaan seuraavaksi algoritmin 4.2 toimintaan liittyvää alkupisteen valintaa, jota voidaan käyttää nopeuttamaan algoritmin toimintaa kun parempi alkuratkaisu tunnetaan. Kuvan 4.5 mukaan toinen optimiratkaisun kestävyyspinnan pisteistä w_a vaikuttaa olevan riippuvainen jännitteen amplitudista σ_a . Suunnilleen sama asia voidaan huomata kuvasta 4.6, vaikka algoritmi tarvitsee ainoastaan yhden aloituspisteen joten w_a riittää hyvin.

Kestävyyspinnan keskipisteen määrittämiseen kuvan 4.5 mukaisesti vaaditaan vähintään 4 parametria:



Kuva 4.5. Kuvassa näkyy kestävyyspinnan keskipisteen w_a yhteys jännityksen amplitudiin σ_a eri parametrin C arvoilla. Mittaukset ovat materiaalille seosteräs SAE 7475. Yksikkönä amplitudille on MPa.



Kuva 4.6. Kuvassa näkyy kestävyyspinnan keskipisteen w_b yhteys jännityksen amplitudiin σ_a eri parametrin C arvoilla. Mittaukset ovat materiaalille seosteräs SAE 7475. Käyrien värit eivät vastaa samoja parametrin C arvoja kuin kuvassa 4.5, mutta eri värit kuvaavat yksittäistä arvoa parametrille C . Yksikkönä amplitudille on MPa.

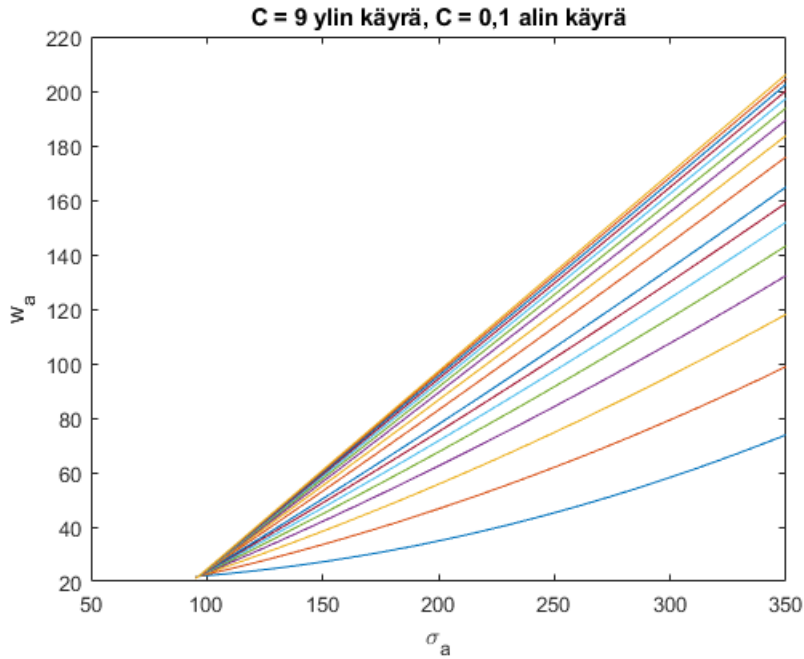
- Yksi parametri määrittää, missä pisteessä käyrät kohtaavat eri parametrin C arvoilla, koska kuvan perusteella vaikuttaa siltä että käyrät kohtaavat, kun $\sigma_a = 95\text{MPa}$. Mahdollisesti tämä johtuu siitä, että materiaalin SAE 7475 väsymisraja $\sigma_{-1} = 95\text{MPa}$.
- Yksi parametri vaaditaan, jotta löytyy edellä mainitun pisteen arvo w_a -akselilla.
- Yksi parametri vaaditaan, jotta käyrällä on jonkinlainen kulmakerroin. Koska käyrä ei ole täysin suora pienillä parametrin C arvoilla, niin pelkkä suoran kulmakerroin ei riitä.
- Vähintään yksi parametri vaaditaan, jotta parametrin C riippuvuus suoraan saadaan yhdistettyä. Asymptoottisesti suorien yhtälöt ovat lähes samoja arvon $C = 9$ jälkeen. Kun $C \rightarrow 0$, niin suoran kulmakerroin lähestyy myös nollaa.

Tässä tapauksessa alkuarvauksena kestävyyspinnan keskipisteelle w_a voitaisiin käyttää esimerkiksi käyrää

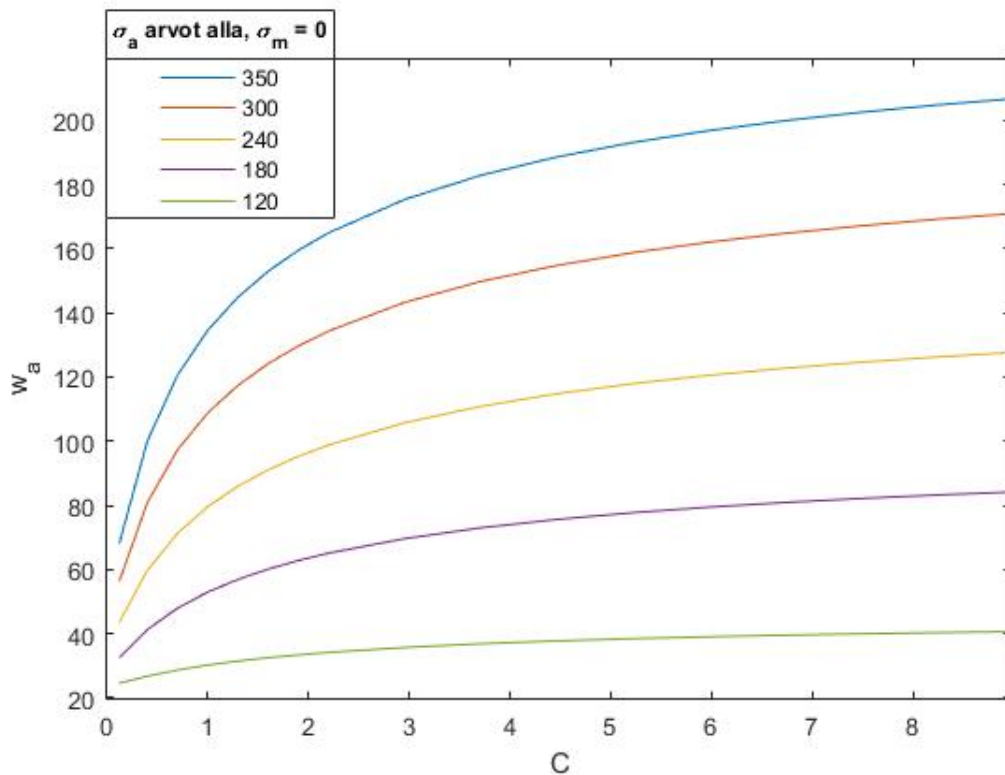
$$w_a = x_1 \frac{C}{C + x_4} (\sigma_a + x_2) + x_5 \frac{\max(C) - C}{C + x_4} (\sigma_a + x_2)^2 + x_3,$$

missä x_1, x_2, x_3, x_4 ja x_5 ovat vakioita, jotka voidaan määrittää kuvan 4.5 käyrien muodostuksessa käytetyistä mittauspisteistä. Parametri x_1 kuvaa suunnilleen asymptoottisen suoran kulmakerrointa, eli kun $C > 9$. Parametri x_2 siirtää käyrien risteämispisteen oikealle. Parametri x_3 siirtää käyrien risteämispisteen ylöspäin koordinaatistossa. Parametri x_4 muuttaa käyrän arvoja silloin, kun käyrä ei ole vielä asymptoottinen. Tässä on oletuksena se, että käyrä on lähes suoran muotoinen, kun C on suuri ja toisen asteen polynomin muotoinen, kun C on pieni. Parametri x_5 on paraabelin kerroin.

Kuvaan 4.7 on muodostettu käyrä edellä mainitun mukaisesti. Tämän käyrän parametrit ovat optimoitu vertaamalla käyrän pisteiden w_a arvoja vastaaviin arvoihin, jotka voidaan laskea algoritmillä 4.2 ja ottamalla näistä erotuksista euklidinen normi. Euklidinen normi on $B = 15,278$ ja parametrit näkyvät kuvatekstissä. Käyrä vaikuttaa olevan melko tarkka approksimaatio, kun σ_a on tarpeeksi pieni, mutta suurilla jännityksen amplitudin σ_a arvoilla tarkkuus heikkenee huomattavasti. Tämä on kuitenkin odotettua, koska käyrät on asetettu alkamaan samasta pisteestä esimerkiksi paraabelin nollakohtana, mikä rajoittaa mahdollisuuksia muodostaa käyriä. Tällä tavalla muodostetut käyrät ovat yleensä epätarkempia, kun etäisyys alkupisteestä kasvaa.

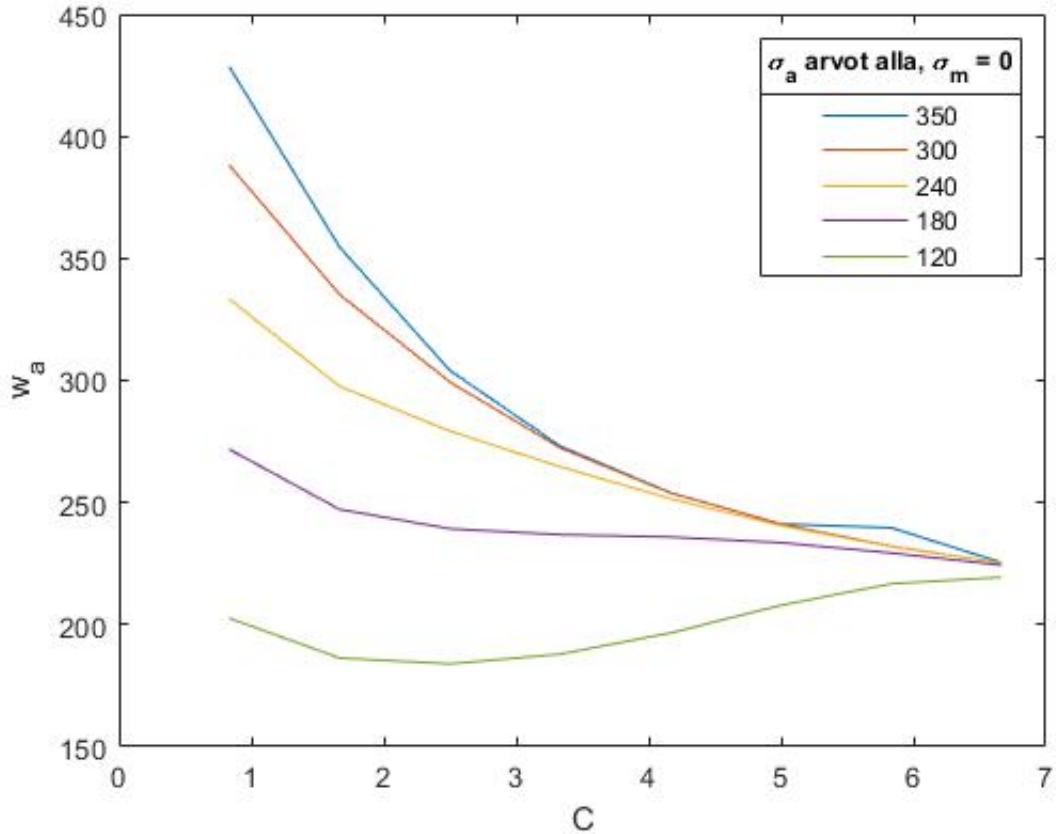


Kuva 4.7. Kuvassa näkyy käyrä, jota voidaan käyttää ennakoimaan kestävyyspinnan keskipisteen w_a arvo eri parametrin C ja jännityksen amplitudin σ_a arvoilla. Käyrä on $f = 0,833 \frac{C}{C+1,311} (\sigma_a - 96,388) + (8,5526E - 05) \frac{9-C}{C+1,311} (\sigma_a - 96,388)^2 + 21,891$. Materiaali on SAE 7475. Yksikkönä amplitudeille on MPa.



Kuva 4.8. Kuvassa on vaihtoehtoinen näkökulma kuvalle 4.5, tällä kertaa optimiratkaisun kestävyyspinnan keskipistettä w_a on verrattu parametriin C . Materiaali on seosteräs SAE-7475. Yksikkönä amplitudeille on MPa.

Kuvassa 4.8 näkyy, että parametrin C arvot vaikuttavat optimiratkaisun pisteeseen w_a enemmän pienillä parametrin C arvoilla. Tämän takia oli tärkeää muuttaa suoran kulma-kerrointa ja paraabelin kerrointa riippuen parametrin C arvosta.



Kuva 4.9. Vaihtoehtoisen ratkaisuparin arvo w_a on verrattuna parametriin C . Parametrin C arvon 7 jälkeen yhtälöparille ei löydy reaalityttöä ratkaisua. Materiaali on seosteräs SAE 7475. Yksikkönä amplitudeille on MPa.

Kaavoja 3.14 ja 3.15 käyttävällä algoritmilla löytyy myös toinen ratkaisupari w_a ja w_b , jonka arvo w_a näkyy kuvassa 4.9. Tätä ratkaisuparia ei löydy toista algoritmia käyttämillä. Molemmat algoritmit löytävät kuvan 4.8 esittämät ratkaisut.

Tarkastellaan tilannetta, jossa $C = 1,667$ ja $\sigma_a = 350$ (yksi mittauspiste kuvasta 4.9). Jos aloittaa toisen algoritmin tämän mittauspisteen arvosta $w_1 = 354,79$, niin tarkin ajanhetki askeleelle " $\chi(z, \alpha) = 0$ " on ajanhetki $t = 0,25$, jolloin $\chi(z(t), w_1) = 2,23$. Tätä ei normaalissa tapauksessa sallita. Jos tämä tapaus sallittaisiin, niin seuraavia pisteitä ovat w_2 on $99,5176$, $w_3 = 177,8897$, $w_4 = -8,8836$ ja muutaman iteraation päästä tämä ratkaisu päättyy kuvan 4.8 tilanteeseen $w_a = 154,58$, $w_b = -18,85$.

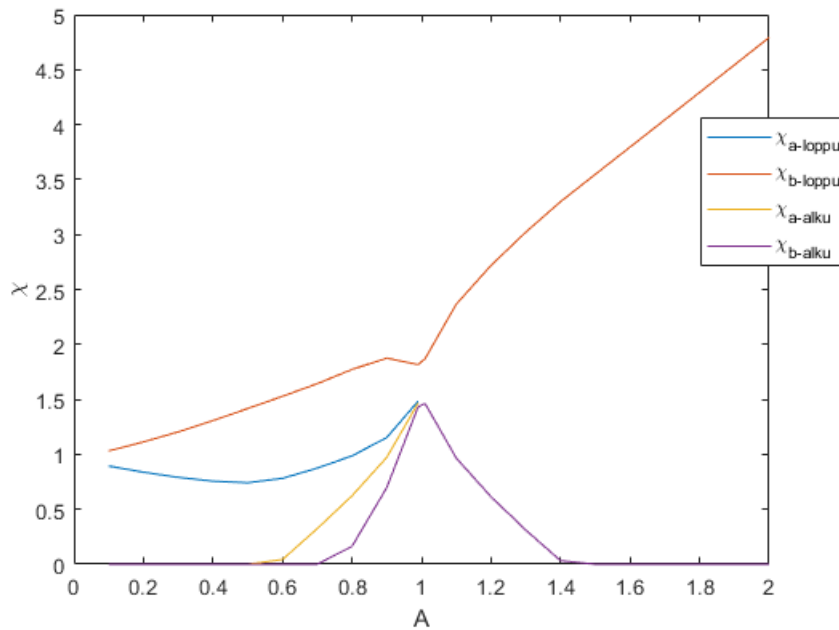
Määritelmä 4.3. Oletetaan, että yhtälöillä (3.14) ja (3.15) on kaksi ratkaisuparia: w_a, w_b ja v_a, v_b . Jos $v_a + v_b \geq w_a + w_b$, niin ratkaisupari v_a, v_b on yläratkaisu.

Nämä ratkaisuparit liittyvät optimiratkaisuun yhtälön (3.6) kautta. Sijoittamalla keskipisteen α tilalle tämän ratkaisuparin arvot, voidaan huomata, että funktiolla χ on eri arvo, kun ratkaisuparin arvo $\alpha = w_a$ tai $\alpha = w_b$ muuttuu. χ vaikuttaa suoraan kestolukuun yhtälön (3.19) kautta. Jos molemmat ratkaisut sallisi, niin tällöin voisi valita tähän yhtälöön kumman tahansa ratkaisuparin riippuen siitä, että mikä on lähempänä kestolukua.

Koska toinen algoritmi ei löydä yläratkaisua, niin oletetaan tämä ratkaisu vääräksi. Tämä on mahdollista esimerkiksi sillä tavalla, että jostakin syystä yhtälöt antavat ratkaisun, joka ei liity tähän malliin millään tavalla, vaikka se toteuttaisikin yhtälöt. Kun yläratkaisun molemmat pisteet sijoittaa yksitellen yhtälöön (3.6), niin voi huomata, että molemmilla pisteillä pätee se, että ainoastaan yhdellä aikavälillä, joko $0 \leq t \leq 0,5$ tai $0,5 \leq t \leq 1$, löytyy ajanhetki t_0 , jossa $\chi(t_0) = 0$. Tämä aikaväli on molemmille ratkaisupisteille sama. Koska sama jännitys toistuu joka aikavälillä, eli $\sigma(t) = \sigma(t+1) = \sigma(t+2)$ kaikilla t , niin tämä tarkoittaa sitä, että vaurioituminen voi alkaa ainoastaan yhdellä aikavälillä, ja siten vaurioituminen ei voi päättyä joko jännityksen arvoon $\sigma = \sigma_a$ tai $\sigma = -\sigma_a$, koska nämä ovat kahdella eri aikavälillä. Eli yhtälöiden johtamisessa käytetty oletus siitä, että vaurioituminen alkaa ja päättyy kahdella eri aikavälillä olisi väärin. Koska tämä oletus oletetaan oikeaksi, niin ratkaisu ei voi olla oikein.

Vaikuttaa siltä, että differentiaaliyhtälöitä käyttävällä mallilla on myös ongelmia löytää ratkaisupari w_a, w_b , kun $A > 1$. Tämä voidaan huomata kuvasta 4.10, missä ratkaisuparin pisteen w_a funktion χ_a arvot alkupisteessä ja loppupisteessä katoavat parametrin A arvon 1 jälkeen, koska algoritmi stabilisoituu yhteen pisteeseen w_b arvon $A = 1$ jälkeen. Lähteessä ei näy mittausdataa, josta parametri A on määritetty, joten on mahdollista että $A > 1$ ei ole realistinen tapaus, vaan on tapahtunut mittausvirhe. On myös mahdollista, että tuntemattomasta syystä algoritmi ei löydä toista näistä ratkaisuparin pisteistä. Oletetaan kuitenkin, että lähteessä annettu arvo $A = 1,2$ on mahdollinen, ja yhden syklin aikana aiheutuva vaurio tapauksessa $A > 1$ on yhtälön (3.18) mukaan

$$\Delta D = D_{b\text{-loppu}} - D_{b\text{-alku}} + 0 - 0 = \frac{K}{L} (\exp(L\chi_{b\text{-loppu}}) - \exp(L\chi_{b\text{-alku}})).$$



Kuva 4.10. Kuvassa näkyy materiaalin SAE-6156 kesto- ja vaihtelevat vaihtelevilla parametrin A arvoilla, kun jännityksenä on $\sigma(t) = 200 \sin(2\pi t)$. Todellinen arvo parametrille A on artikkelin [7] mukaan $A = 1, 2$.

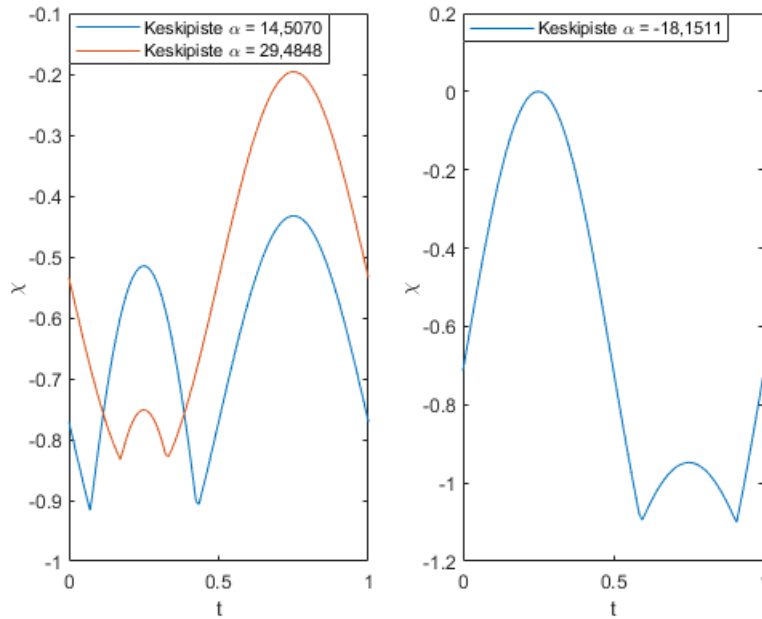
Yhden komponentin jännityshistorialla σ on mahdollista huomata selvästi jännishistorias- ta, että onko sen kesto- ja vaihtelevat vaihtelevilla parametrin A arvoilla, kun jännityksenä on $\sigma(t) = 200 \sin(2\pi t)$. Todellinen arvo parametrille A on artikkelin [7] mukaan $A = 1, 2$.

Tätä varten voidaan tarkistaa, miten algoritmi toimii, kun jännityshistoriassa on vain yksi komponentti, ja jännityksen amplitudi on väsymisrajan alapuolella. Jos kestävyyspinnan keskipisteet eroavat selvästi tapauksista, joissa amplitudi on väsymisrajan yläpuolella, niin voidaan myös useamman komponentin tapauksessa olettaa, että jännitys on väsy- misrajan alapuolella jos sama eroavaisuus toistuu.

Kuvan 4.11 vasemmassa kuvassa näkyy funktion χ arvot kaikilla ajanhetkillä $0 \leq t \leq 1$, kun puhtaan vetojännityksen amplitudi on väsymisrajan alapuolella ja kestävyyspinnan keskipisteet α_2 ja α_4 ovat laskettu yhtälöistä (3.14) ja (3.15). Tämä ratkaisu on kuitenkin mahdoton, koska aliluvussa 3.3.3 oletettiin, että vauriota voi ainoastaan tapahtua, kun $\chi > 0$ ja $d\chi > 0$. Ratkaisu on laskettu numeerisesti, joten ei ole selvää, että onko yhtälöparille toista ratkaisuparia α_2, α_4 , jota vastaava käyrä $\chi > 0$ jollakin ajanhetkellä.

Jos ratkaisu kestävyyspinnan keskipisteille sen sijaan lasketaan algoritmillä, niin ratkaisu stabilisoituu yhteen keskipisteeseen α . Tämä näkyy kuvan 4.11 oikeassa kuvassa. Tällöin

aikavälillä $0 \leq t \leq 1$ tapahtuu vauriota välillä $0,24398 \leq t \leq 1$. Loogisesti yhden syklin aikana kertyvä vaurio on erittäin pieni, koska jännityksen amplitudi on väsymisrajan alapuolella. Tämä ratkaisu on oletusten mukaan mahdollinen. Erona tilanteisiin, joissa amplitudi on väsymisrajan yläpuolella, on se että kestävyyspinnan keskipisteitä on vain yksi. Jos algoritmi päättyy yhteen keskipisteeseen, niin oletetaan että se johtuu siitä, että jännitystä vastaava kestopilvu $N > 10^7$.



Kuva 4.11. Funktion χ arvot puhtaalle vetojännitykselle. Jännityksen parametrit ovat $\sigma_a = 50$, $\sigma_m = 0$. Materiaaliin liittyvät mallin parametrit ovat $A = 0,3571$; $\sigma_{-1} = 95$; $C = 1$.

4.4 Algoritmin käyttäminen useamman komponentin jännityshistoriaan

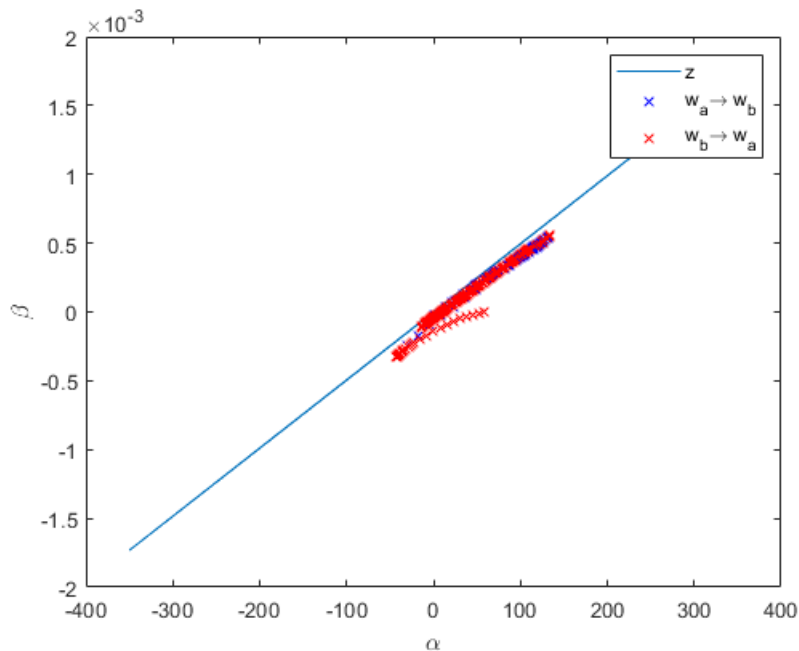
Tarkastellaan ensiksi, kuinka malli vastaa yhden komponentin jännityshistoriaa, kun asetetaan kulmaksi δ pieni luku. Tämä on hyödyllistä, jotta voi testata antaako algoritmi saman ratkaisun kuin numeerisesti ratkaistavissa olevat yhtälöt (3.14), (3.15) ja (3.17). On myös hyvä tarkistaa, minkälaisessa suhteessa kokonaisjännityksen z reaali- ja imaginäärikomponentit vaikuttavat kestävyyspinnan keskipisteeseen.

Kuvista 4.12, 4.13 ja 4.14 huomataan, että kestävyyspinnan keskipisteen reaali- ja imaginäärikomponentit muuttuvat suunnilleen samassa suhteessa kuin jännityksen suuruudella z . On huomioitava se, että kuvan 4.12 β -akselin mittakaava on erittäin pieni verrattuna toiseen akseliin, mutta tässä tapauksessa amplitudia $\tau_a = 0,001$ on käytetty testaamaan, toimiiko algoritmi samaan tapaan kuin tapauksessa $\tau_a = 0$. Mittakaava on vastaavasti pieni α -akselille kuvassa 4.13. Huomataan, että jos akselit olisivat samassa mittakaavas-

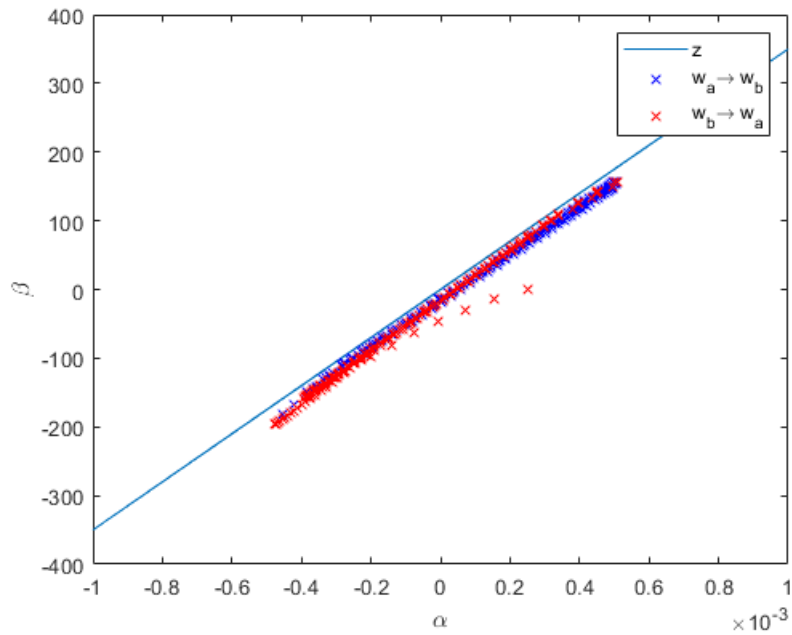
sa, niin kuvan 4.12 käyrä on suunnilleen vaakasuora ja kuvan 4.13 käyrä on suunnilleen pystysuora, joten ääritapaukset toimivat oikein.

Algoritmit antavat lähes täsmälleen saman tuloksen kuin yhtälöt (3.14), (3.15) ja (3.17). Ratkaisussa on vähän eroa, mikä voi johtua siitä, että $\dot{\theta}$, jota käytetään alkuehtona yhtälössä (3.33), on suurella osaa aikavälistä lähellä nollaa, mikä tekee numeerisesta laskennasta epätarkkaa, koska $\dot{\theta}$ on nimittäjänä. Tämän ongelman voi lieventää sillä, että jos $\dot{\theta}$ on liian pieni, esimerkiksi $\dot{\theta} \leq 0,00005$, niin oletetaan θ vakioksi differentioitavalla aikavälillä, ja derivoidaan ainoastaan parametria r (yhtälö (3.30)). Tällöin saadaan jonkinlainen approksimaatio differentiaaliyhtälölle riippumatta siitä, kuinka pieni arvo nimittäjällä $\dot{\theta}$ on.

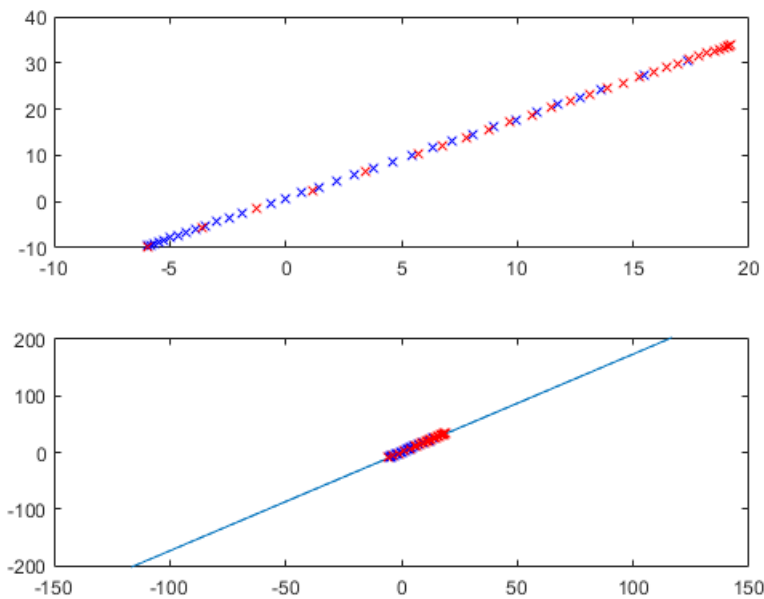
Kestävyysspinnan keskipisteen liike voi olla hankala nähdä kuvista, jos kulma δ on pieni, koska liike menee päällekkäin yhden syklin aikana. Keskipisteen liike näkyy selvemmin esimerkiksi kuvasta 4.15.



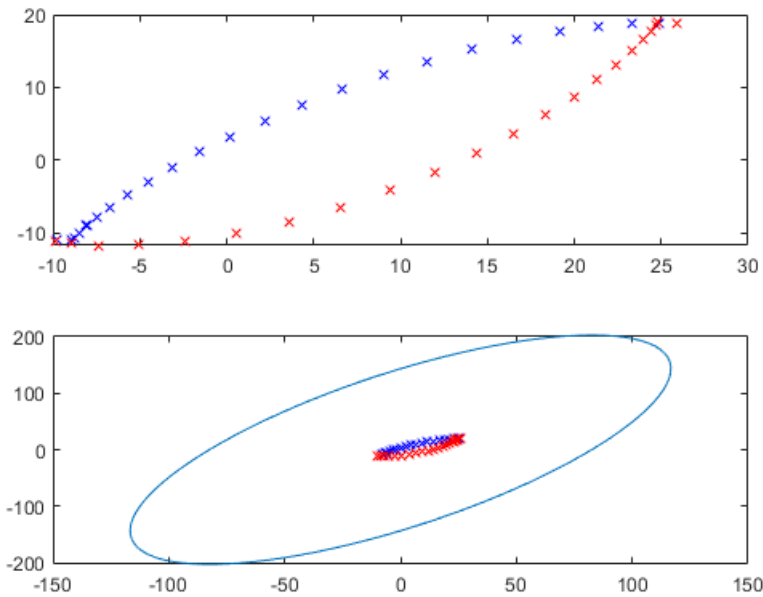
Kuva 4.12. Kuvassa on käyrät z ja w . Tässä tapauksessa $\sigma_a = 350$, $\sigma_m = \tau_m = 0$, $\delta = 0,001$; $\tau_a = 0,001$ ja $C = 1$.



Kuva 4.13. Kuvassa on käyrät z ja w . Tässä tapauksessa $\tau_a = 350$, $\sigma_m = \tau_m = 0$, $\delta = 0,001$; $\sigma_a = 0,001$ ja $C = 1$.



Kuva 4.14. Ylemmässä kuvassa on käyrä w , ja alemmassa kuvassa on käyrä z käyrän w lähellä ympärillä. Tässä tapauksessa $\sigma_a = \tau_a = \frac{350}{3}$, $\sigma_m = \tau_m = 0$, $\delta = 0,001$ ja $C = 1$.



Kuva 4.15. Ylemmässä kuvassa on ellipsi w , ja alemmassa kuvassa on käyrä z ellipsin ympärillä. Tässä tapauksessa $\sigma_a = \tau_a = \frac{350}{3}$, $\sigma_m = \tau_m = 0$, $\delta = \frac{\pi}{4}$ ja $C = 1$.

4.4.1 Kestävyyssinnan keskipisteen alkuarvauksen valinta

Kun jännityshistoriassa on enemmän kuin yksi komponentti, niin keskipiste ei välttämättä stabilisoidu minkään kahden pisteen välille. Myöskään määritelmä 4.3 ei toimi, koska kestävyyssinnan keskipiste w on imaginääriluku 3.27. On tärkeämpää keskittyä löytämään tapaukset, joissa ainakin yksi stabiili ratkaisu löytyy kun alkuarvaus valitaan oikein.

Ensin on löydettävä alkuarvaus w_0 stabiilille kestävyyssinnan keskipisteelle, jossa kahdella aikavälillä vaurioitumista tapahtuu. Jos kestävyyssinnan keskipiste alkaa liikkumaan kahdella aikavälillä stabiilissa ratkaisussa, niin tällöin ratkaisu on väsymisrajan yläpuolella. Jos stabiili ratkaisu päättyy tilanteeseen, jossa toinen näistä alkupisteessä huomatuista aikaväleistä katoaa, niin ratkaisu on väsymisrajan alapuolella, mikä oletettiin edellisen aliluvun lopussa.

Koska stabiili ratkaisu kestävyyssinnan keskipisteelle riippuu alkuarvauksen w_0 valinnasta, niin alkuarvaus voi päättyä joko siihen, että keskipiste vaihtelee kahden pisteen välillä tai siihen, että keskipisteitä on ainoastaan yksi, mutta vaurioitumissyklin jälkeen kestävyyssinnan keskipiste palaa samaan pisteeseen kuin mistä vaurioituminen alkoi. Nämä tapaukset voivat erota huomattavasti aiheutetun vaurion suhteen.

On epäselvää, toimiiko tässä diplomityössä käsitelty vaurioitumismalli oikein tapauksissa, joissa kestävyyssinnan keskipiste stabilisoituu yhteen pisteeseen. Tämä johtuu siitä, että käytetyssä mittausdatassa jännityksen amplitudit ovat väsymisrajan yläpuolella, eli väsymisrajan alapuolella olevia mittauksia ei löydy, joissa malli stabilisoituisi yhteen pis-

teeseen. On etsittävä alkuarvaus w_0 mahdollisimman hyvin, jotta kestävyyspinnan keskipiste stabilisoituu kahden pisteen välille todennäköisesti, koska kahden kestävyyspinnan keskipisteen välillä malli toimii oletetun mukaisesti.

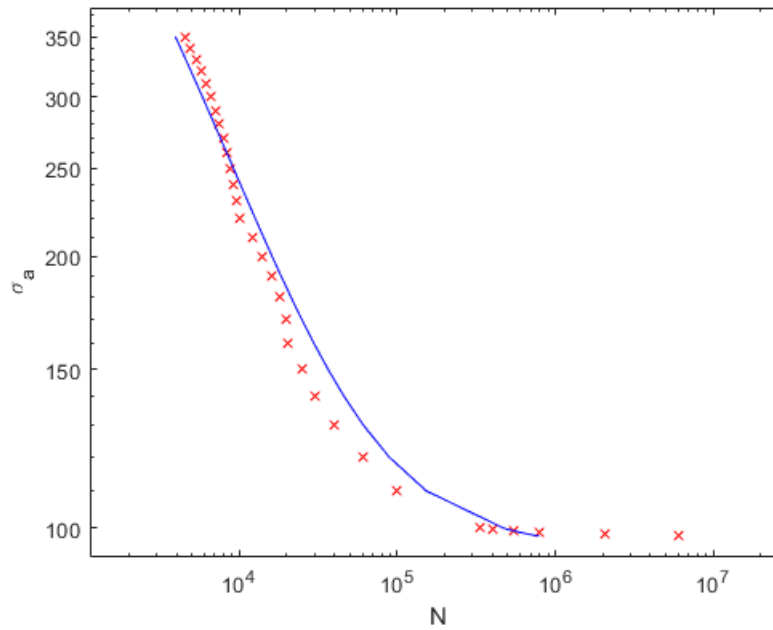
Alkuarvausta voidaan parantaa seuraavalla menetelmällä: ensin on tarkistettava mihin suuntaan alkuarvauksesta w_0 keskipiste liikkuu. Sitten voidaan valita uudet alkuarvaukset tämän suunnan molemmilta puolilta. Esimerkiksi jos kestävyyspinnan keskipiste vaikuttaa menevän kohti pistettä $w_a = -20 + 150i$, niin valitaan uusiksi alkuarvauksiksi pisteet $w_1 = -25 + 145i$ ja $w_2 = -15 + 155i$. Vaihtoehtoisesti voidaan myös kasvattaa vääntökomponenttia samalla kuin vetokomponentti vähennetään, sen sijaan että molempia kasvatetaan tai vähennetään yhtä aikaa. Jos keskipiste liikkuu jokaisesta alkuarvauksesta kohti yhtä stabiilia pistettä, ja ratkaisun aikana toinen vaurioitumisväli katoaa, niin voidaan olettaa että stabiilissa tilassa ei ole kahta vaurioitumisväliä.

Voi olla hankalaa löytää alkuarvaus kestävyyspinnan keskipisteelle siten, että vaurioitumista tapahtuisi kahdella aikavälillä silloin kun ratkaisu ei ole vielä stabiili. Monessa kestävyyspinnan keskipisteen alkuarvauksessa ainoastaan yhdellä aikavälillä tapahtuu vauriota. Parempi alkuarvaus on mahdollista löytää antamalla algoritmin laskea ratkaisua eteenpäin, ja aloittaa algoritmi uusiksi sellaisella alkuarvauksella, mihin kestävyyspinnan keskipisteeseen algoritmi vaikuttaa päätyvän yhden vaurioitumisvälin mallilla.

4.5 Optimiparametrien määrittäminen materiaalille Matlabilla

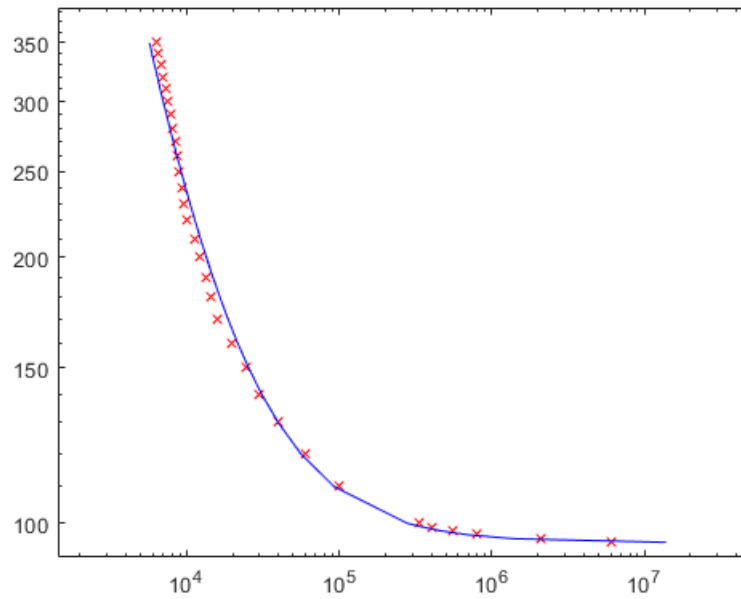
Käyttämällä tämän luvussa alussa olevia algoritmeja on mahdollista löytää optimiparametrit C , K ja L tietylle materiaalille. Näitä käytetään muodostamaan sovituskäyrä, jolla saadaan selville, kuinka pitkä keistoluku materiaalilla on erilaisilla jännityshistorioilla.

Aluksi mittauspisteet on luettava artikkelista [7] löytyvästä kuvasta, jossa mittaukset näkyvät kuvaajan pisteinä. Algoritmilla 4.1 on laskettu optimiparametrit C , K ja L esimerkimateriaalille näiden mittausten perusteella (kuva 4.16).



Kuva 4.16. Kuva mittauksista ja sovitetusta käyrästä yhtälöllä (3.19). Parametrit sovitetuun käyrään ovat $C = 0,874$; $L = 1,05$; $K = 0,0000274$. Mittauspisteet ovat merkitty punaisina rasteina ja sovitettu käyrä on sininen. Materiaali on SAE-7475. Yksikkönä amplitudille on MPa.

Kuvasta 4.16 huomataan, että osa arvioiduista mittauspisteistä on arvioitu epätarkasti, erityisesti viimeisen viiden mittauspisteen amplitudit $\{98+0,4n\}$, missä $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sekä mittauspisteet, joiden kuormituksen amplitudi σ_a on välillä $120 \leq \sigma_a \leq 160$. Vaikuttaa siltä, että viimeisen viiden mittauspisteen amplitudit ovat $\{99, 98, 97, 96, 95\}$, mikä on hankala arvioida alkuperäisestä kuvasta testaamatta mallia ensin koska mittakaava on niin pieni. Muuttamalla mittauspisteitä tarkemmiksi saadaan kuva 4.17, joka kuvaa mittauksia huomattavasti tarkemmin.



Kuva 4.17. Korjatuilla mittauspisteillä muodostettu parannus mallista. Parametrit ovat nyt $C = 0,0999$; $L = 0,0000594$; $K = 0,0000359$. Korjatut mittauspisteet ovat merkitty punaisina rasteina ja sovitettu käyrä on sininen. Materiaali on SAE-7475. Y-akselilla näkyy vetojännityksen amplitudi, ja sen yksikkönä on MPa. X-akselilla näkyy kestoluku.

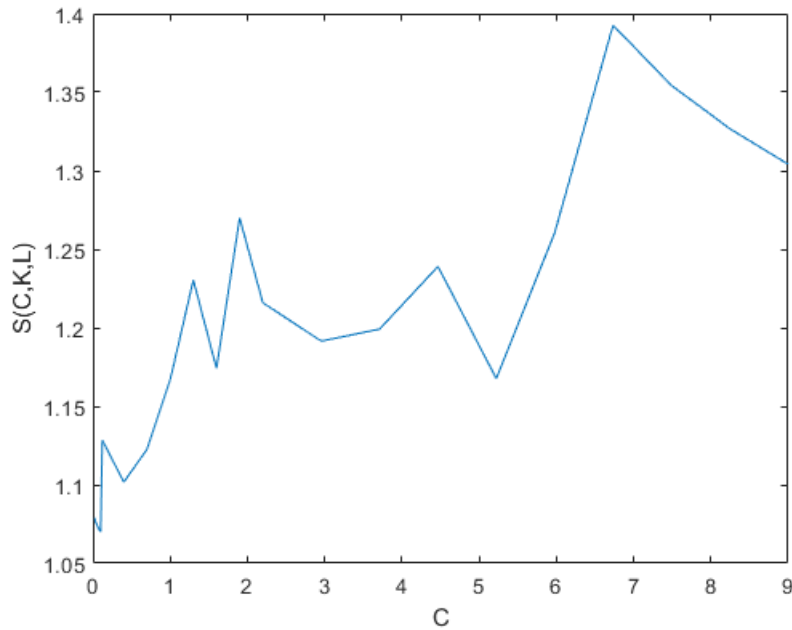
Kun samantapainen tarkastelu mittauspisteistä on suoritettu kolmelle eri materiaalille, voidaan muodostaa taulukko 4.2. Taulukossa on esitetty optimiparametreja kolmelle eri materiaalille samaan tapaan kuin artikkelissa [7]. Artikkelin tulokset eroavat taulukon tuloksista huomattavasti, vaikka suuruusluokka on oikea. Tämän takia seuraavaksi tarkastellaan, kuinka paljon parametrin C valinta vaikuttaa summaan S , kun oletetaan että parametrit K ja L on optimoitu parametrin C valinnan jälkeen.

Materiaali	σ_{-1}	A	C	K	L	S(C,K,L)
SAE-4340	490	0,225	1,0046	3,5754E-05	11,0322	0,1959
SAE-6156	75	1,2	1,9256	1,3030E-06	1,8706	0,2803
SAE-7475	95	0,3571	0,09990	3,5900E-05	5,9400E-05	1,0701

Taulukko 4.2. Optimiparametrit kolmelle eri materiaalille algoritmin 4.1 käytön jälkeen. Mittausdata löytyy liitteestä A.

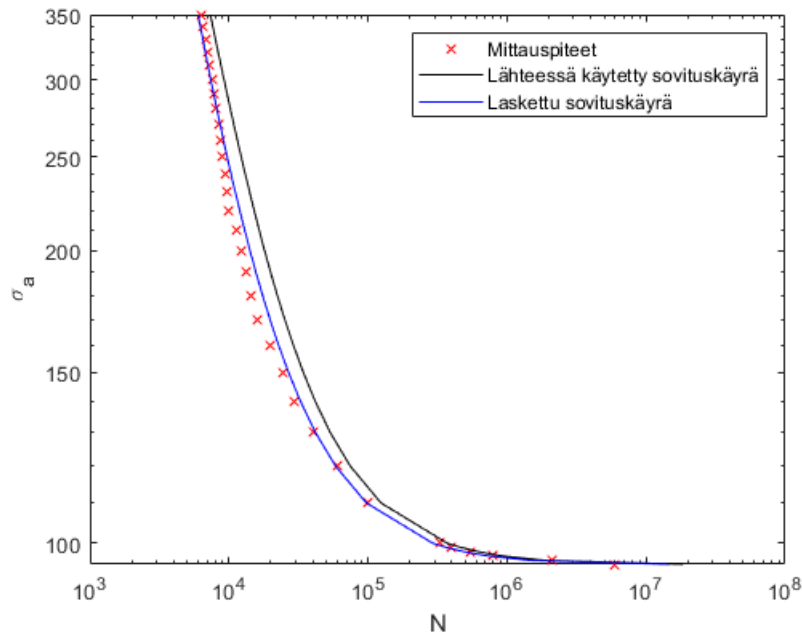
Kuvassa 4.18 näkyy parametrin C vaikutus summaan S . Vaikuttaa siltä, että minimi on välillä $[0, 1]$. Mutta summan S arvot eivät poikkea toisistaan huomattavasti. On siis mahdollista, että parametrit poikkeavat toisistaan huomattavasti, vaikka summan S arvo ei muutu paljoa. Lisäksi summan minimointi voi olla hankalaa, koska siinä käytetään kolmea parametria ja summa voi päätyä lokaaliin minimiin globaalin sijasta. Myös mittauspisteiden tulkinnessa voi olla epätarkkuutta, koska näitä ei ole listattu artikkelissa [7], vaan ne

on luettava lähteessä olevista kuvista. Nämä voivat olla selityksenä sille, että lähteen [7] parametrien arvot poikkeavat taulukon 4.2 arvoista.



Kuva 4.18. Kuvassa näkyy käyrä, joka kuvaa summan 3.20 arvoa vaihtelevilla parametrin C arvoilla. Materiaali on SAE-7475.

Artikkelin [7] ja taulukon 4.2 parametrien avulla muodostettua sovituskäyrää on verrattu kuvassa 4.19. Artikkelin parametrien arvot ovat $C = 1, 1$; $K = 3, 8126E - 05$; $L = 0, 2007$. Vaikuttaa siltä, että näillä mittauspisteillä taulukon 4.2 parametreja käyttävä sovituskäyrä on tarkempi jokaisessa mittauspisteessä. Mutta kuten aiemmin mainittiin, summan arvo ei eroa huomattavasti riippumatta siitä, kuinka parametrit on valittu. Sen takia myös artikkelin [7] käyrä on melko tarkka approksimaatio.



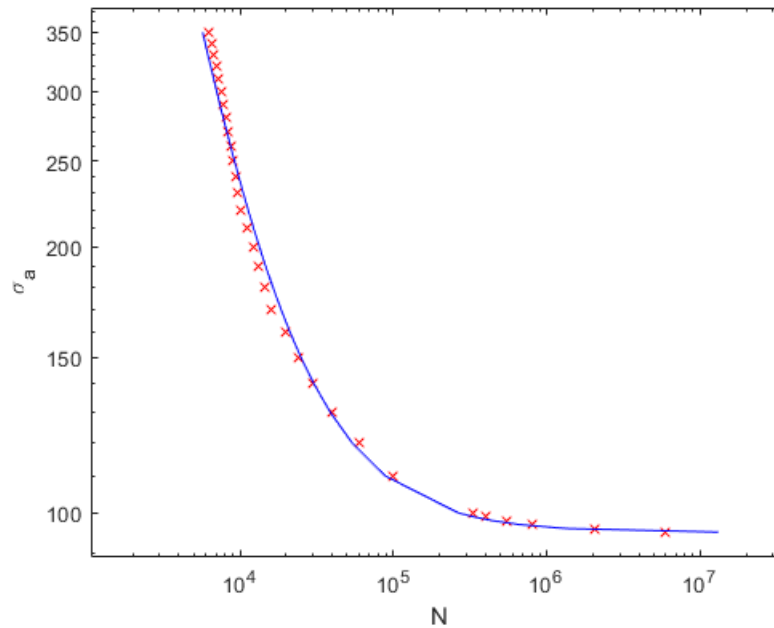
Kuva 4.19. Kuvaan on sovitettu SN-käyrät, joiden parametrit ovat artikkelin [7] sekä taulukon 4.2 mukaiset. Materiaali on SAE-7475. Yksikkönä amplitudille on MPa.

Optimi tälle materiaalille vaikuttaa olevan lähellä arvoa $C = 0,1$, mikä vastaa tulosta kuvasta 4.17. Kuitenkin vaikuttaa siltä, että on useita parametrin C arvoja, joilla saa sovitettua lähes samanmuotoisen käyrän. Esimerkiksi kuvassa 4.20 näkyy tapaus, jossa $C = 1,08$. Summa S vaihtelee niin vähän välillä $0 \leq C \leq 5$, että kaikki sovituskäyrät näyttävät samanmuotoisilta.

Tämä kuitenkin aiheuttaa suuren epätarkkuuden materiaalin optimiparametrien määrittämisessä. On ymmärrettävää, että optimiarvot parametreille K ja L muuttuvat riippuen parametrin C arvosta, jotta yhtälön (3.19) määrittämä kestoluku pysyy lähes samana kaikissa sovituskäyrän pisteissä vaihtelevilla parametrin C arvoilla. Mutta tällöin on hankalaa määrittää, että onko todellisena optimiarvona suhteellisen matala arvo parametrille C ja suhteellisen matala arvo parametrille L (kuva 4.17), vai korkea arvo molemmille (kuva 4.20).

Jos alkuperäisissä mittauksissa on ollut vähän epätarkkuutta, niin optimiparametrit voivat muuttua paljon. Esimerkki, jossa tämä käy ilmi, voisi olla, että ensimmäisissä 22 mittauspisteessä kestoluku on todellisuudessa 15% suurempi, kuin mitä on mitattu. Testauksen jälkeen, tällöin summa S on lähes yhtä suuri kaikilla parametrin C arvoilla välillä $0,5 \leq C \leq 1,5$. Siis tämän mallin kannalta kaikki nämä parametrin C arvot olisivat yhtä hyviä ratkaisuja, joten mittauksista ei voi tarkasti määrittää parametrin C arvoa, koska se voi riippua muista tekijöistä, vaan on tehtävä mielivaltainen valinta. Jos mielivaltainen valinta tehdään, niin apuna valinnassa voidaan käyttää esimerkiksi, mikä sovituskäyrä näyttää sopivimmalta mittauspisteisiin tai millä parametrin C arvolla algoritmin käyttö on

nopeinta.



Kuva 4.20. Kuvassa parametrille C on valittu arvo 1,08. Parametrit ovat nyt $C = 1,08$, $L = 0,101$, $K = 0,0000529$. Mittauspisteet ovat merkitty punaisina rasteina ja sovitettu käyrä on sininen. Materiaali on SAE-7475. Yksikkönä amplitudille on MPa.

5 JÄNNITYSHISTORIAN VAIKUTUS KESTOLUKUUN

Materiaalin optimiparametrien mukaan on mahdollista laskea kesto- N . Tällöin pystyy esimerkiksi ennalta arvioimaan, minkälainen kesto- N tietyllä materiaalilla on, kun jännityshistoriaa σ muutetaan esimerkiksi kasvattamalla kulmaa δ tai leikkausjännityksen amplitudia τ_a . Tässä luvussa esitetään, millä tavalla nämä parametrit muuttavat kesto- N materiaalille seosteräs CoCrNi SAE 7475, jonka optimiparametrit C , K ja L on laskettu edellisessä luvussa.

5.1 Vääntökomponentin lisääminen puhtaaseen vetojännitykseen

Tarkastellaan mitä tapahtuu, kun jännityshistoriaan $\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi t)$ lisätään vääntökomponentti vaihtelevilla kulmilla δ , jolloin jännityshistoria on $\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi t) + i(\tau_m + \tau_a \sin(2\pi t - \delta))$, missä i on imaginääriyksikkö.

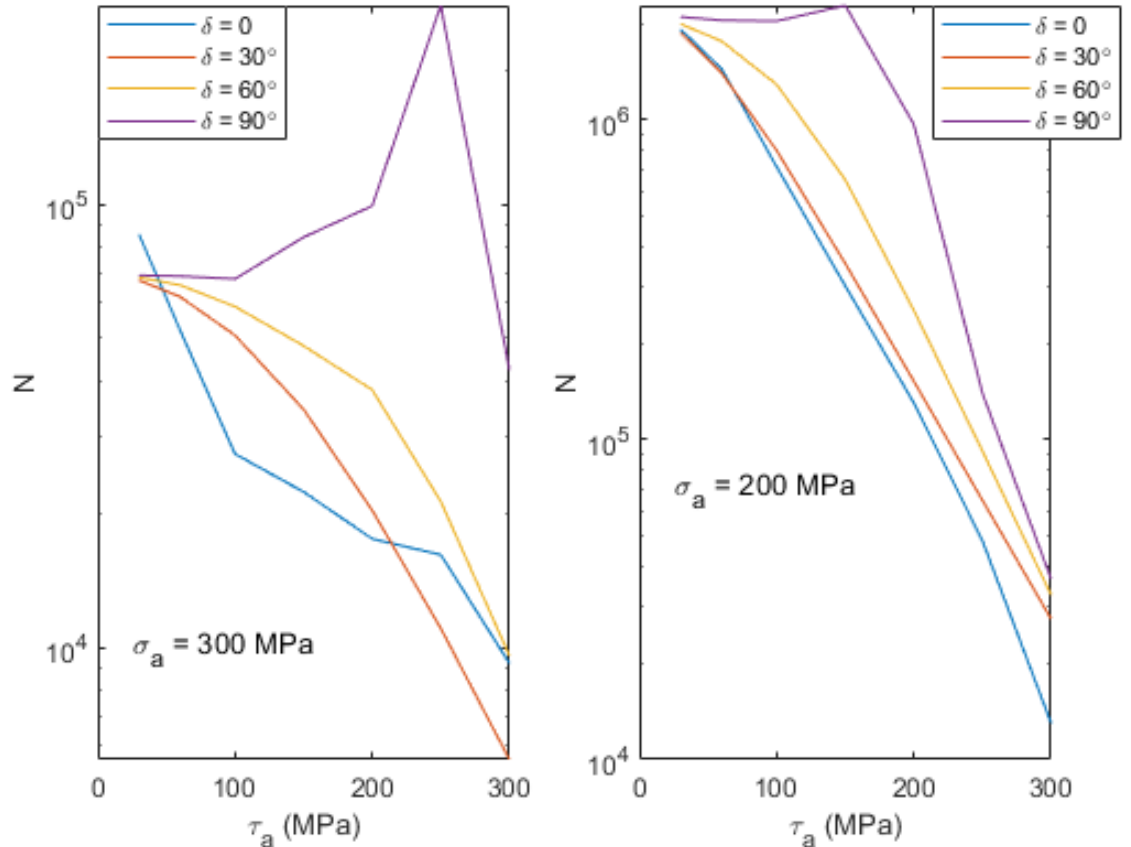
Kuvan 5.1 käyrät ovat lähes samassa pisteessä, kun vääntökomponentti $\tau_a = 40$. Tämä on loogista, koska tässä vaiheessa vetokomponentti, jonka amplitudi on $\sigma_a = 350$, on selvästi suurin osa jännitystä, ja siten kesto- N määrittyy suunnilleen sen mukaan riippumatta komponenttien välillä olevasta kulmasta.

Kuvan 5.1 mukaan vaikuttaa siltä, että jos vaihdekulma ei ole 90° , niin vääntökomponentin lisääminen vähentää kesto- N lukua. Tämä on loogista, koska jännityksen lisääminen yleensä vaurioittaa materiaalia enemmän, ja siten se kestää vähemmän.

Kuitenkin vaihdekulmalla 90° jännityksen lisääminen vaikuttaa kasvattavan kesto- N tiettyyn vääntökomponentin amplitudin arvoon asti. Eli jostakin syystä jännityksen lisääminen vähentää vaurioiden kertymistä syklien aikana. Kuitenkin kun vääntökomponentti on tarpeeksi suuri, niin tämä alkaa vähentämään kesto- N lukua. Tämä on loogista, koska tässä vaiheessa on mahdollista, että vääntökomponentilla on suurempi vaikutus kuin vetokomponentilla, ja yleisesti jännityksen lisääminen vaurioittaa materiaalia enemmän.

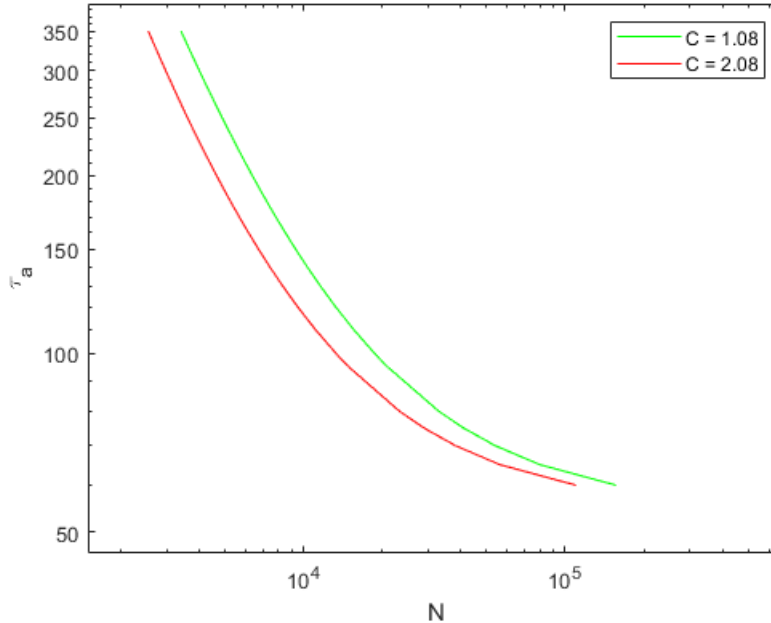
Kuvan 5.1 oikeassa kuvassa vetojännityksen amplitudi on lähellä väsymisrajaa (amplitudi $\sigma_a = 200$, kun väsymisraja $\sigma_{-1} = 181,84$). Tässä tapauksessa huomataan, että vääntöjännityksen lisääminen ei kasvata kesto- N lukua huomattavan paljon, vaikka kuvan 5.1 vasemmassa kuvassa tämä selvästi tapahtui. Jännityksen lisääminen kuitenkin alkaa vähentämään kesto- N lukua aiemmin, eli on mahdollista että edellisen kappaleen selitys on

syynä tälle. Eli tämä kesto-luvun väheneminen saattaa johtua siitä, että vääntökomponentti vaikuttaa tietyn jännityksen jälkeen enemmän kesto-lukuun kuin vetokomponentti, ja siten sen lisääminen vähentää kesto-lukua tämän jännityksen arvon jälkeen, esimerkiksi kuvan 5.1 oikeassa kuvassa tämä vaikuttaa tapahtuvan arvon $\tau_a = 150$ jälkeen.



Kuva 5.1. Kuvien käyrät kuvaavat vääntökomponentin lisäämistä puhtaassa vedossa olevalle materiaalille, jonka $A = 0,5$ ja $\sigma_{-1} = 181,84$. Puhtaan vedon amplitudi näkyy kuvissa ja keskiarvot $\sigma_a = \tau_a = 0$. Ainoa ero käyrien välillä on kulma δ , joka näkyy käyrien selitteessä.

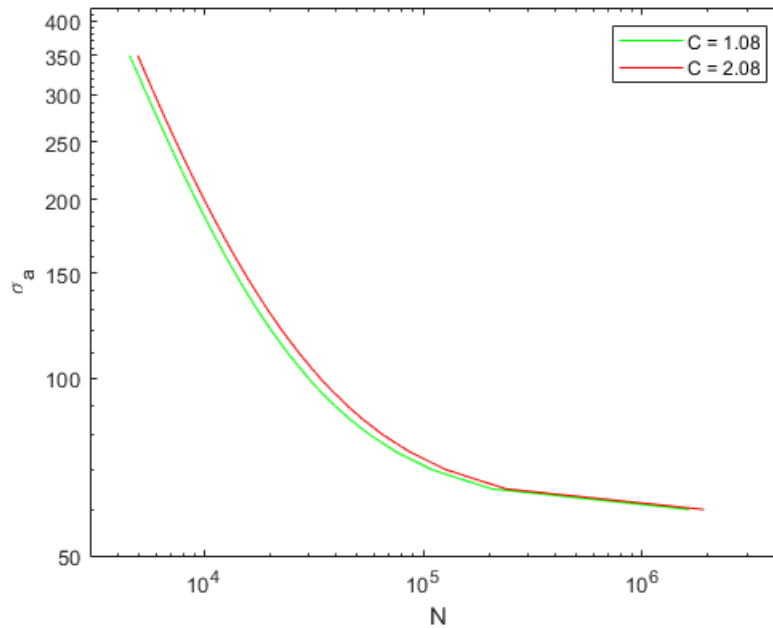
5.2 Jännityshistorian parametrien $\tau_a, \tau_m, \sigma_a, \sigma_m$ vaikutus kestopukuun N



Kuva 5.2. Kuvassa näkyy sovitetut käyrät, jotka ennakoivat kestopukuun arvoja jännityshistorialla, jossa ei ole jännitystä $\sigma(t)$, mutta sen sijaan on jännitys $\tau(t) = \tau_a \sin(2\pi t)$. Sovituskäyrät eroavat parametreissa C , K ja L , mutta ainoastaan arvo parametrille C on merkitty, muut parametrit on optimoitu samaan tapaan algoritmilla 4.1. $\sigma_m = \tau_m = \sigma_a = \delta = 0$. Yksikkönä amplitudille on MPa.

Vaikka mittausdataa ei ole saatavilla käsitellylle materiaalille, niin on mahdollista ennakoita kestopukuun arvoja optimiparametrien perusteella vapaasti valitulla jännityshistorialla, kuten kuvassa 5.2. Kaksi parametrin C arvoa on valittu, koska edellisessä luvussa huomattiin, että parametrin C arvolla ei ollut paljon merkitystä sovituskäyrän kannalta, jos jännityshistoriassa on pelkästään komponentti $\sigma_a \sin(2\pi t)$. Kuvasta huomataan, että myös jännityshistoriassa, jossa $\tau(t) = \tau_a \sin(2\pi t)$ ja $\sigma(t) = 0$, eri optimiparametreilla on lähes sama sovituskäyrä. Eli myöskään ottamalla huomioon komponentti $\tau(t)$ ei voida määrittää parametreja C , K ja L tarkasti.

Kuvista 5.2 ja 4.20 huomataan, että jännityshistorian σ vääntökomponentti aiheuttaa enemmän kuormitusta vastaavalla arvolla kuin vetokomponentti, koska samalla amplitudin arvolla $N(\tau_a) < N(\sigma_a)$. Eli materiaali kestää vähemmän vääntökomponentin kuormitusta.



Kuva 5.3. Kuvassa on sovituskäyrät, joissa sovitetut pisteet ovat jännityshistorian $\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi t)$ pisteitä eri amplitudin σ_a arvoilla. $\sigma_m = 100$ MPa kaikissa sovituspisteissä. Yksikkönä amplitudille on MPa.

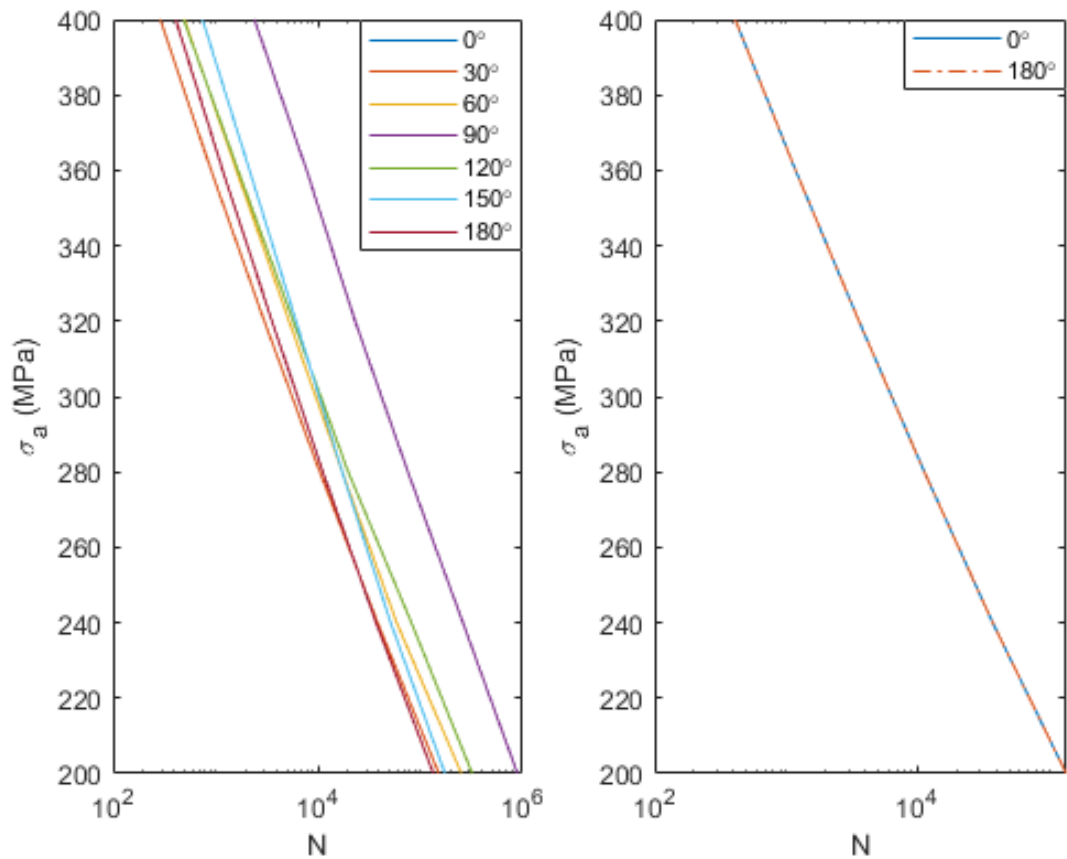
Myös kuvasta 5.3 voidaan huomata, että optimiparametrilla C ei ole suurta vaikutusta sovituskäyrän arvoihin, kun lisätään komponenttiin $\sigma(t)$ termi σ_m . Myös keistoluku N on pienempi tässä tapauksessa samalla amplitudin σ_a arvolla kuin esimerkiksi kuvassa 4.20.

5.3 Kulman δ vaikutus keistolukuun N

Aiemmin esitettyssä kuvassa 5.1 huomattiin, että kulmalla δ on ainakin jonkinlainen yhteys keistolukuun. Tarkastellaan seuraavaksi, kuinka kulman muuttaminen samoilla parametrien sekä jännityksen arvoilla vaikuttaa materiaalin keistolukuun.

Kuvassa 5.4 on esitetty seitsemällä eri kulmalla δ kuudessa eri pisteessä ja sovitettu käyrä näiden pisteiden välille. Pisteiden erona on jännityksen σ arvo. Vaikuttaa siltä, että keistoluvun arvo ei muutu huomattavasti kulmasta. Ainoastaan kulmalla $\delta = 90^\circ$ keistoluku kasvaa huomattavasti jokaisella jännityksen arvolla. Sekä tämän arvon ylä- että alapuolella olevien kulmien δ arvojen keistoluku on pienempi. Jos jännityksen arvo on suuri, niin pienemmällä kulmalla on suurempi keistoluku. Jos jännityksen arvo on suuri, niin

Lisäksi kuvan 5.4 oikeasta kuvasta on mahdollista huomata, että kulmaparilla $\delta = 0^\circ$ ja $\delta = 180^\circ$ on suunnilleen samat keistoluvut. Muilla kulmapareilla ei ole yhtä selvää yhteyttä toisiinsa. Esimerkiksi kulmien $\delta = 60^\circ$ ja $\delta = 120^\circ$ käyrät ovat kuvassa 5.4 osittain päällekkäin, mutta eivät kaikilla jännityksen arvoilla.



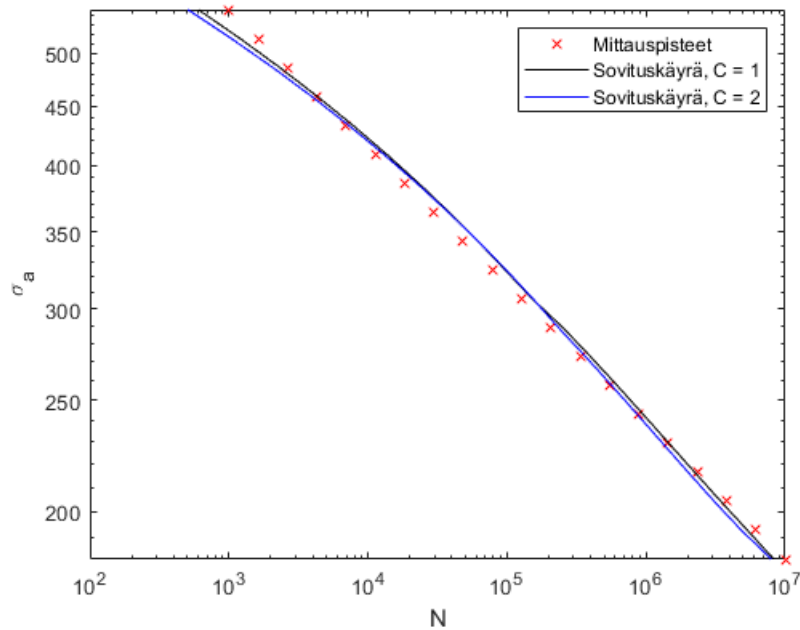
Kuva 5.4. Kuvan materiaalille käytetyt parametrit ovat $A = 0,5$, $\sigma_{-1} = 181,84$, $L = 4,5363$, $K = 2,2111e - 06$ ja $C = 0,5$. Jännityksenä on käytetty $\sigma = \sigma_a \sin(2\pi t) + \tau_a \sin(2\pi t - \delta)$. Vääntökomponentin amplitudiksi on valittu $\tau_a = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3}}$. Vasemmassa kuvassa näkyy kaikki käyrät, oikeassa kuvassa näkyy kulmia 0° ja 180° vastaavat käyrät.

5.4 Mallin käyttäminen veto- ja vääntöjännityksen yhdistelmään

Artikkelista [12] on mahdollista löytää kesto-lukuja eri jännityshistorioilla alumiiniseokselle 7075-T651. Tälle materiaalille löytyy myös SN-käyrän yhtälö samasta artikkelista sekä puhtaalle vetojännitykselle että puhtaalle vääntöjännitykselle. Mallissa tarvitaan parametri A , mikä on mahdoton laskea puuttuvien mittausten takia. Tämän takia käytetään arvoa $A = 0,5$, joka on melko lähellä edellisessä luvussa käytettyjen materiaalien parametria A . Parametrit C , K ja L voidaan laskea joko vetojännityksen tai vaihtojännityksen SN-käyrän avulla algoritmilla 4.1.

Aliluvun 3.4 tulosten ja algoritmin 4.2 avulla saadaan myös laskettua funktion χ arvot kestävyyspinnan keskipisteissä w_2 ja w_4 , joita tarvitaan kesto-luvussa 3.19. Tällöin tunnetaan kaikki tarvittavat muuttujat, jotta mallin tuloksia voidaan verrata artikkelin [12] mittauksiin.

Ensiksi lasketaan parametrit C , K ja L samaan tapaan kuin edellisessä luvussa. Sovitus-käyrä näkyy kuvassa 5.5.

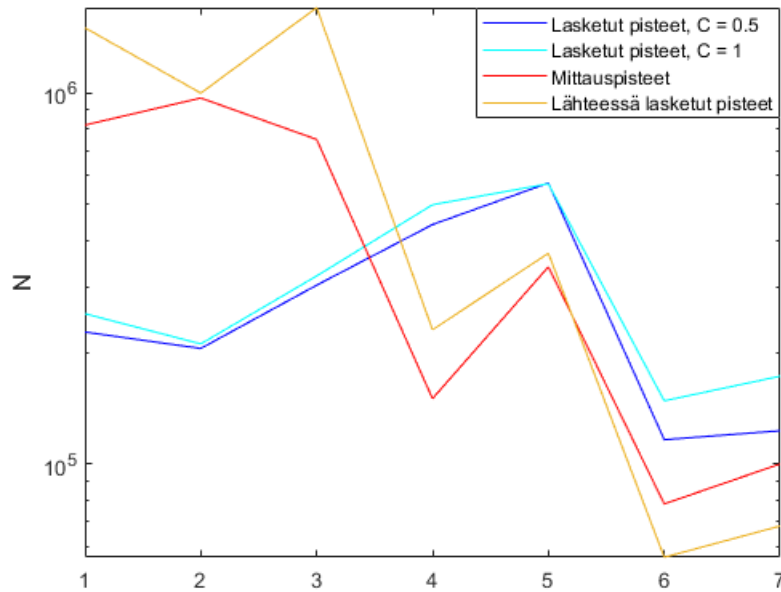


Kuva 5.5. Mittauspisteet ovat käyrän $1245,48(N)^{-0,11938}$ pisteitä. Sovituskäyrä on muodostettu laskemalla sopivat parametrit C , K ja L mustalle ja siniselle käyrälle. Yksikkönä amplitudille on MPa.

Mittauspisteet, joissa kestopukua arvioidaan, löytyvät artikkelista [12]. Taulukossa 5.1 on artikkelissa näkyvien mittauspisteiden ja kestopukun arvioiden lisäksi myös tässä diplomityössä esitellyn mallin arvio kestopukusta. Mittauspisteet on numeroitu kuvaa 5.6 varten, jotta ennakoituja kestopukuja voidaan vertailla.

Numero	σ_a	σ_m	τ_a	τ_m	$\delta(^{\circ})$	Testattu kestopuku	Artikkelin tulos	Laskettu tulos
1	138,9	156,7	69,5	78,3	0	8,2e5	1,5e6	2,5e5
2	137,9	155,5	79,6	89,8	30	9,7e5	1e6	2,1e5
3	129,9	146,5	75	84,6	30	7,5e5	1,7e6	3,2e5
4	152,9	172,4	88,3	99,5	90	1,5e5	2,3e5	5,0e5
5	144,6	163	83,5	94,1	90	3,4e5	3,7e5	5,7e5
6	144,6	163	83,5	94,1	180	7,8e4	5,6e4	1,5e5
7	141,2	159,3	81,5	91,9	180	1e5	6,8e4	1,7e5

Taulukko 5.1. Taulukossa on artikkelissa [12] esitetty mittausdata alumiiniseokselle 7075-T651 sekä artikkelin mallin ennakoima kestopuku mittausdatan pisteissä. Viimeisessä sarakkeessa on tässä diplomityössä käytetyn mallin ennakoima kestopuku. Optimi-parametreiksi on laskettu $L = 4,5363$, $K = 2,2111e - 06$ ja $C = 0,5$. Amplitudien ja meaanien yksikkönä on MPa.



Kuva 5.6. Mittauspisteet ovat käyrän $1245,48(N)^{-0,11938}$ pisteitä. Sovituskäyrä on muodostettu laskemalla sopivat parametrit K ja L materiaalille, ja sen jälkeen laskemalla kestoluvut mittauspisteissä.

Kuvan 5.6 mukaan näyttää siltä, että tässä diplomityössä esitetty malli arvioi kestolukua epätarkemmin kuin artikkelin [12] malli. On vaikeaa arvioida, mistä tämä tarkalleen johtuu. Todennäköisesti sillä on vaikutus, että parametria A ei ollut mahdollista mitata koska parametrin A määrittämiseen vaadittua käyrää, joka näkyy kuvassa 3.2, ei ole mahdollista määrittää puuttuvien mittausten takia. Lisäksi malli olettaa parametrin A samaksi sekä veto- että vääntöjäännitykselle, mikä ei välttämättä ole oikein. Malli olettaa myös väsymisrajan samaksi veto- ja vääntöjäännitykselle, mikä ei artikkelin mittausten mukaan ole oikein. Tämä on korjattu siten, että väsymisrajaa skaalaattu näiden arvojen välille riippuen siitä, että kumpi jännityksen komponentti on suurempi osa jännitystä. Ei ole selvää, että kummalla jännityksen komponentilla on suurempi vaikutus kestolukuun, joten on oletettu että näillä on yhtä suuri vaikutus.

Tässä mallissa ennakoitujen kestoluvut muuttuvat suunnilleen oikeaan suuntaan mittausten perusteella, eli malli kuitenkin käsittelee oikein tapaukset, joissa vaurioitumisen pitäisi vähentyä tai kasvaa, kun jokin parametri muuttuu. Poikkeuksena on pisteet 3 ja 4, minkä välillä kestoluvun pitäisi vähentyä, eikä kasvaa. Ei ole selvää, pitäisikö kestoluvun kasvaa vai vähentyä pisteiden 2 ja 3 välillä, koska kokonaisjännitys on pienempi pisteessä 3 taulukon mukaan, mutta mitattu kestoluku on myös vähentynyt pisteessä 3, mahdollisesti epätarkan mittauksen takia. On erikoista, että malli aliarvioi vaurioitumisen 180 asteen kulmalla ja yliarvioi vaurioitumisen 0 asteen kulmalla, koska mallin mukaan näissä tapauksissa kestoluvun pitäisi olla täsmälleen sama, jos jännitys ei ole muuttunut (tämä huomattiin kuvasta 5.4). On mahdollista, että todellisuudessa näiden kulmien kestoluvut

eivät ole samat, mutta ei löydy mittauspisteitä, joista tämän voisi selvästi havaita, koska taulukon mittauspisteissä jännityksen arvot eroavat kulmien $\delta = 0^\circ$ ja $\delta = 180^\circ$ välillä.

6 YHTEENVETO

Materiaalien vaurioituminen on melko hankala ilmiö mallintaa, koska se perustuu mikroskooppisiin tapahtumiin materiaalissa. Matemaattisesti käytetyin malli jännitykselle on jännitystensori, mikä määriteltiin luvussa 2. Tässä diplomityössä kuitenkin käsiteltiin yksinkertaisempia tapauksia, missä osa jännitystensorin komponenteista on nolliä, jotta voidaan mallintaa veto- ja vääntöjännityksiä sekä näiden yhdistelmää.

Luvussa 3 esiteltiin aluksi yleisesti käytettyjä malleja vaurioitumiselle. Vaurioitumisen malleista ainoastaan materiaalin väsymiseen liittyvä malli käsiteltiin tarkemmin. Myös väsymisen mallintaminen on mahdollista monella tavalla, mutta tässä diplomityössä keskityttiin käsittelemään väsymisen vauriota, joka aiheutuu vaurioyhtälön 3.4 mukaisesti. Vaurioyhtälön käyttöä varten tarvitsee löytää arvot funktiolle χ , jotka on mahdollista löytää käytämällä keskipisteen liikkumisen yhtälöllä 3.5, koska halutussa ratkaisussa keskipisteen liike on stabilisoitunut kahden pisteen välille, joista saadaan tarvittavat arvot funktiolle χ . Lopulta voidaan laskea summa 3.20, jotta parametrit C , K ja L voidaan määrittää, jonka jälkeen keistoluku erilaisilla jännityksillä voidaan ennakoida yhtälöstä 3.19.

Luvussa 4 esiteltiin algoritmi 4.1, jolla on mahdollista löytää edellä mainitut parametrit C , K ja L . Tätä algoritmia käytettiin etsimään parametrit muutamalle materiaalille, joita kuormitettiin vetojännityksellä. Huomattiin, että differentiaaliyhtälöitä käyttävä algoritmi 4.2 on paljon hitaampi laskemaan kestävyyspinnan keskipisteet kuin yhtälöparin (3.17) ratkaisu, mutta differentiaaliyhtälöitä käyttävä algoritmi on kuitenkin hyödyllinen ratkaisemaan poikkeustapaukset, joissa yhtälöparia muodostettaessa huomioitavat oletukset eivät päde. Näitä tapauksia ovat esimerkiksi kun vaurioituminen alkaa ajanhetkestä, jolloin $\chi > 0$, tai kun parametri $A > 1$ tai kun jännitys ei ole puhdas veto- tai vääntöjännitys, vaan näiden yhdistelmä.

Kun huomattiin differentiaaliyhtälöitä käyttävän algoritmin hitaus, niin tätä yritettiin parantaa eri keinoin. Esimerkiksi keskipisteen alkuarvo voidaan ennakoida parametrin C sekä jännityksen mittausparametrien avulla melko tarkasti, ja algoritmilla kestää lyhyempi aika päästä optimiratkaisuun, kun alkupiste on lähempänä sitä. Lisäksi arvioitiin sitä, että onko parametrien C , K ja L valinnalla huomattava merkitys keistolukuja ennakoivaan käyrään. Vaikutti siltä, että ainakin C :n arvoilla $0,01 \leq C \leq 9$ (ja C :n arvolle optimiarvot K :lle ja L :lle) käyrän sovitus parametreihin on melko tarkka riippumatta C :n arvosta (kuva 4.18).

Parametrit C , K ja L ovat myös riippuvaisia siitä, että kuinka tarkasti mittauspisteet ovat mitattu. Siten on mahdollista, että löydetyt parametrit poikkeavat lähteissä mitatuista parametreista.

Lopuksi luvussa 5 käsiteltiin, millä tavalla jännityshistoria vaikuttaa keistolukuun, erityisesti kun jännityshistoriana on veto- ja vääntöjännityksen yhdistelmä. Mallin tulokset erosivat lähteen mittausarvoista veto- ja vääntöjännityksen yhdistelmässä, mutta suuruusluokka on melko samankaltainen. Eroavaisuuksille mallin tuloksiin lähteeseen verrattuna voi olla monia eri syitä, mutta tarkempaa mallia eroavaisuuksien korjaamiseksi ei käsitelty.

LÄHTEET

- [1] Aalto, J. *Rak-54.1200 RAKENTEIDEN LUJUUSOPPI Luentomoniste*. 2024. URL: http://rmseura.tkk.fi/opetusmonisteita/KII_L.pdf (viitattu 28.03.2024).
- [2] Drucker, D. C. ja Prager, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of applied mathematics* 10.2 (1952), 157–165.
- [3] Gurtin, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. eng. Vol. 158. Mathematics in science and engineering. San Diego: Elsevier Science Technology, 1982, 1–16.
- [4] Holzapfel, G. A. *Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering*. eng. Chichester: Wiley, 2000, 120–121.
- [5] Itskov, M. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers: With Applications to Continuum Mechanics*. eng. 3rd ed. 2013. Mathematical Engineering. Netherlands: Springer Nature, 2018, 43–54. DOI: 10.1007/978-3-319-98806-1.
- [6] Kaarakka, T., Frondelius, T., Kaleva, O., Kouhia, R., Orelma, H. ja Vaara, J. Jännitysväsymisen kontinuumimalli. *Rakenteiden Mekaniikka* 52 (joulukuu 2019), 236–243. DOI: 10.23998/rm.76262.
- [7] Kaleva, O., Orelma, H. ja Petukhov, D. Parameter estimation of a high-cycle fatigue model combining the Ottosen-Stenström-Ristinmaa approach and Lemaitre-Chaboche damage rule. *International Journal of Fatigue* 147 (2021), 106153. ISSN: 0142-1123. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2021.106153>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014211232100013X>.
- [8] Kouhia, R. *Lecture notes of the course Introduction to materials modelling*. 2022. URL: https://webpages.tuni.fi/rakmek/jmm/mat_mod_lecture_notes_2022_09_19.pdf (viitattu 28.03.2024).
- [9] Ottosen, N., Stenström, R. ja Ristinmaa, M. Continuum approach to high-cycle fatigue modeling. *International Journal of Fatigue* 30 (kesäkuu 2008), 996–1006. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2007.08.009.
- [10] Paolucci, S. *Continuum mechanics and thermodynamics of matter*. eng. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. DOI: 10.1017/CB09781316106167.
- [11] Tabatabaian, M. *Tensor Analysis for Engineers - Transformations-Mathematics-Applications (2nd Edition)*. eng. 2. painos. Bloomfield: Mercury Learning ja Information, 2021, 1.
- [12] Wang, C., Shang, D.-G. ja Wang, X.-W. A New Multiaxial High-Cycle Fatigue Criterion Based on the Critical Plane for Ductile and Brittle Materials. *Journal of Materials Engineering and Performance* 24 (joulukuu 2014). DOI: 10.1007/s11665-014-1335-7.

A DATALUETTELO

Liitteiden taulukoiden luvut ovat matriisimuodossa, missä esimerkiksi taulukon A.1 luku 340 sarakkeessa 2 vastaa lukua 6537 sarakkeessa 2.

Seosteräs CoCrNi SAE 7475 (31 mittauspistettä)									
σ_a	350	340	330	320	310	300	290	280	270
(MPa)	260	250	240	230	220	210	200	190	180
	170	160	150	140	130	120	110	100	99
	98	97	96	95.1					
N	6310	6537	6773	7017	7270	7532	7804	8085	8377
	8679	8992	9316	9652	10000	11220	12232	13335	14538
	15849	19953	24266	29512	40000	60000	100000	330000	400000
	550000	800000	2080000	6000000					

Taulukko A.1. Seosteräksen CoCrNi SAE 7475 mittausdata artikkelista [7].

Alumiiniseos SAE 6156 (15 mittauspistettä)									
σ_a	200	190	180	170	160	150	140	130	120
(MPa)	110	100	90	80	70	65			
N	13183	17378	22909	30200	39811	52481	95000	130000	17000
	250000	380000	610000	1300000	3800000	10500000			

Taulukko A.2. Alumiiniseoksen SAE 6156 mittausdata artikkelista [7].

Seosteräs SAE 4340 (5 mittauspistettä)					
σ_a (MPa)	670	590	550	500	491
N	9500	50000	100000	900000	10000000

Taulukko A.3. Seosteräksen SAE 4340 mittausdata artikkelista [9].