

Silja Yli-Salomäki

MATIKKAEVÄITÄ KOULUPOLULLE

Tukimateriaali esiopetuksen matematiikkakasvatukseen

Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Elokuu 2024

TIIVISTELMÄ

Silja Yli-Salomäki: Matikkaeväitä koulupolulle – Tukimateriaali esiopetuksen matematiikkakasvatukseen
Pro Gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta, Luokanopettajakoulutus
Heinäkuu 2024

Suomalaisten lasten matematiikan oppimistulokset sekä motivaatio ja innostus matematiikan oppimiseen ovat vuosi vuodelta laskeneet. Näiden seurauksena myös oppilaan matematiikkakuva saattaa muodostua negatiiviseksi, mikä vaikuttaa oppimiseen ja jopa tulevaisuuden opinto- ja ammatinvalintoihin. Matematiikkakuvan lisäksi jo varhaiset matemaattiset taidot ennustavat tulevaa menestystä matematiikan opinnoissa. Yksi keino matemaattisen ymmärryksen lisäämiseen on matemaattisen ajattelun kielentämisen harjoittelu ja tukeminen neljän kielen mallin mukaisesti. Matematiikkakasvatusta on kuitenkin hyvin vähän myös esiopetuksessa työskentelevien varhaiskasvatuksen opettajien koulutusohjelmissa. Esiopetusvuoden aikana esioppilaiden kielelliset taidot kehittyvätkin matemaattisia taitoja enemmän.

Tämä tutkimus pohjautuu matematiikan oppimistulosten ja motivaation laskun sekä varhaiskasvatuksen opettajien koulutuksen vähäisen matematiikkakasvatuksen myötä syntyneeseen tarpeeseen esiopetuksen matematiikkakasvatuksen lisämateriaalille. Tutkimuksen teoreettisena viitekehyksenä on matematiikkakuva, matemaattisen ajattelun kielentäminen sekä matemaattisten taitojen kehittyminen kouluikään mennessä. Tutkimus on design-tutkimus, jossa luotiin Matikkaeväitä koulupolulle -materiaali esiopetukseen. Materiaalin tavoitteena on tukea positiivisen matematiikkakuvan syntyä sekä matemaattisen ajattelun kielentämisen harjoittelua. Tehtävät tukevat myös lukukäsitteen ymmärtämisen oppimista. Design-tutkimuksen mukaisesti materiaalia kehitettiin tutkimuksen aikana ja tutkimustulosten perusteella.

Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, miten Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin tehtävät tukevat positiivisen matematiikkakuvan syntyä sekä matemaattisen ajattelun kielentämistä. Tutkimusaineisto kerättiin kahdesta esiopetusryhmästä havainnoimalla, videoimalla sekä esioppilaiden tekemillä arvioinneilla. Aineisto analysoitiin teorialähtöisen sisällönanalyysin keinoin.

Tutkimus osoitti, että tehtävät tukevat positiivisen matematiikkakuvan syntyä erityisesti osaamisen kokemuksen myötä. Erityisesti tehtävissä käytetyt esioppilaiden suosikkihakmot ja -aiheet motivoivat tehtävien tekoon. Liian helpot tehtävät sen sijaan aiheuttivat tylsistymistä. Jokainen tehtävä tuki matemaattisen ajattelun kielentämistä neljän kielen malliin peilaten vähintään kahdella eri kielellä.

Avainsanat: matematiikkakuva, matematiikkakasvatus, kielentäminen, esiopetus, design-tutkimus

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Silja Yli-Salomäki: Math Snacks for the School Journey – Material to Support Pre-primary Mathematics Education
Master's Thesis
Tampere University
Faculty of Education and Culture, Teacher Education
July 2024

The mathematical learning outcomes and motivation and enthusiasm for mathematics learning of Finnish children have decreased year by year. As a consequence, the student's view of mathematics may become negative, which affects learning and even future study and career choices. In addition to the view of mathematics, early mathematical skills also predict future success in mathematics studies. One way to increase mathematical understanding is to practice and support the verbalization of mathematical thinking according to the four-language model. However, there is very little mathematics education in the education programs of early childhood education teachers who work in pre-primary education. During the pre-school year, the language skills of pre-schoolers develop more than mathematical skills.

This study is based on the need for additional material for pre-primary mathematics education arising from the decline in mathematical learning outcomes and motivation and the low level of mathematics education in early childhood education teacher training. The theoretical framework of the study is the view of mathematics, the languaging of mathematical thinking and the development of mathematical skills by school age. The study is a design research, in which the Math snacks for the school journey material was created for pre-primary education. The aim of the material is to support the development of a positive view of mathematics and the practice of languaging mathematical thinking. The tasks also support the learning of the understanding of the number concept. In accordance with design research, the material was developed during the study and based on the research results.

The aim of the study was to find out how the tasks of the Math Snacks for the School Journey material support the development of a positive view of mathematics and the verbalization of mathematical thinking. The research data were collected from two pre-primary groups by observing, videotaping and evaluations made by the pre-schoolers. The data were analyzed using theory-driven content analysis.

The study showed that the tasks support the development of a positive view of mathematics, especially through the experience of competence. In particular, the characters and topics favored by the pre-schoolers in the tasks motivated them to do the tasks. Too easy tasks, on the other hand, caused boredom. Each task supported the languaging of mathematical thinking, reflecting on the four-language model, with at least two different languages.

Keywords: view of mathematics, mathematics education, languaging, pre-primary education, design research

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

SISÄLLYS

1	JOHDANTO	6
2	KESKEISET KÄSITTEET	9
2.1	Matematiikkakuva	9
2.1.1	<i>Tunnesuhtautuminen</i>	9
2.1.2	<i>Uskomukset</i>	10
2.1.3	<i>Motivaatio</i>	12
2.2	Matemaattisen ajattelun kielentäminen	13
2.2.1	<i>Multimodaalisuus</i>	13
2.2.2	<i>Neljän kielen malli</i>	14
2.3	Matemaattisten taitojen kehittyminen kouluikään mennessä	16
2.3.1	<i>Matemaattisten taitojen osa-alueet</i>	17
2.3.2	<i>Lukukäsitteen kehittyminen</i>	19
2.3.3	<i>Matematiikka esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa</i>	20
3	DESIGN-TUTKIMUS	22
3.1	Design-tutkimuksen piirteet.....	22
3.2	Oppimateriaalin kehittäminen design-tutkimuksen keinoin.....	23
4	TUTKIMUKSEN TOTEUTUS	25
4.1	Tutkimuksen tehtävä ja tutkimuskysymykset.....	26
4.2	Ensimmäinen sykli	26
4.2.1	<i>Ongelma-analyysi</i>	26
4.2.2	<i>Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin ensimmäinen versio</i>	27
4.2.3	<i>Aineistonkeruu</i>	32
4.2.4	<i>Matematiikkatuokiot</i>	33
4.3	Toinen sykli	38
4.3.1	<i>Aineiston analyysi</i>	38
4.3.2	<i>Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin toinen versio</i>	40
5	TULOKSET	41
5.1	Miten tehtävät tukevat positiivisen matematiikkakuvan syntyä?.....	41
5.2	Miten tehtävät tukevat matemaattisen ajattelun kielentämistä?	49
6	POHDINTA	54
6.1	Johtopäätökset.....	54
6.2	Tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys	56
6.3	Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin toinen versio ja jatkotutkimusmahdollisuudet 59	
LÄHTEET	63	
7	LIITTEET	69
7.1	LIITE 1 Saatekirje koteihin	69
7.2	LIITE 2 Matikkaeväitä koulupolulle -materiaali	70

TAULUKOT

TAULUKKO 1.	MATEMAATTISEN AJATTELUN KIELENTÄMISEN TOTEUTUMINEN ERI TEHTÄVISSÄ	53
TAULUKKO 2.	MATIKKAEVÄITÄ KOULUPOLULLE -MATERIAALIN MUOKKAAMINEN	61

KUVIOT

KUVIO 1.	MATEMAATTISEN AJATTELUN NELJÄN KIELEN MALLI JOUTSENLAHDEN JA RÄTTYÄN (2015) MUKAAN	16
KUVIO 2.	TUTKIMUKSEN ETENEMINEN	25
KUVIO 3.	RIVITALOPOHJA JA NUMEROKORTIT LUKUJONOTAITOJEN HARJOITTELUUN	29
KUVIO 4.	HAJOTELMATEHTÄVÄ KAKSIPUOLEISILLA KUVAKORTEILLA	30
KUVIO 5.	MALLI LASKUTARINASTA	31
KUVIO 6.	KYSELYLOMAKE	40
KUVIO 7.	LUKUJONOTEHTÄVÄN ARVIOINTI. (N=18)	42
KUVIO 8.	LUKUMÄÄRÄN NOPEAN TUNNISTAMISEN ARVIOINTI. (N=29)	43
KUVIO 9.	PIIRTÄMÄLLÄ TEHTYJEN LASKUTARINOIDEN ARVIOINTI. (N=19)	45
KUVIO 10.	VALOKUVAAMALLA TEHTYJEN LASKUTARINOIDEN ARVIOINTI. (N=24)	45
KUVIO 11.	HAJOTELMATEHTÄVÄN ARVIOINTI. (N=21)	46
KUVIO 12.	ENNEN JA JÄLKEEN -POHJAAN TEHTYJEN SANALLISTEN TEHTÄVIEN ARVIOINTI. (N=25)	47
KUVIO 13.	KYMPPIPOHJAAN TEHTYJEN SANALLISET TEHTÄVIEN ARVIOINTI. (N=21)	48
KUVIO 14.	ESIMERKKI PIIRTÄMÄLLÄ TEHDYSTÄ LASKUTARINASTA	50
KUVIO 15.	ESIMERKKI VALOKUVAAMALLA TEHDYSTÄ LASKUTARINASTA	51

1 JOHDANTO

Suomalaisten lasten ja nuorten matematiikan oppimistulokset ovat viime vuosien aikana laskeneet. Julkisessa keskustelussa puhutaan paljon PISA-tuloksista, mutta myös tuorein kotimainen pitkittäisarviointi osoittaa, että alkuopetuksen jälkeen kolmannen luokan alussa oppilaiden matemaattisissa taidoissa on hyvin paljon eroja. Yksi huolestuttavimmista seikoista lienee se, että pitkittäistutkimuksen mukaan kolmannen luokan alussa vähiten matemaattisten taitojen kehittymistä oli tapahtunut niillä oppilailla, jotka pärjäsivät arvioinnissa myös ensimmäisellä luokalla kaikkein huonoimmin (Metsämuuronen & Ukkola, 2023). Syitä oppimistulosten laskuun on varmasti monia, mutta koska matematiikan taitoja opitaan kumulatiivisesti aina aiemman opitun päälle, on syytä keskittyä myös varhaiseen matematiikan oppimiseen ja opettamiseen.

Varhaisten matemaattisten taitojen kehittymistä sekä myöhempien matemaattisten taitojen ennustettavuutta varhaisten taitojen perusteella on tutkittu paljon. Tutkimusten mukaan varhaiset lukujonotaidot ennustavat parhaiten laskutaitoa myöhemmällä iällä (Aunola & Nurmi, 2018). Niiden avulla voidaankin ennustaa jopa 70 % lasten matemaattisesta osaamisesta neljännellä luokalla (Aunola, Lerkkanen, Leskinen & Nurmi, 2004; 2006). Lisäksi tutkimusten mukaan jo koulun alkaessa matemaattisissa taidoissa on oppilaiden välillä suuria eroja (Aunio, Hannula & Räsänen, 2004). Laskutaidon kehityksen suuret erot voivat johtaa myös niin sanottuun Matteus-efektiin, jolla tarkoitetaan yksilöiden välisten erojen kasvamista vuosi vuodelta (Aunola & Nurmi, 2018).

Esiopetuksessa rakennetaan siis pohjaa lapsen matemaattisille taidoille. Taitojen lisäksi myös lapsen mahdollisimman positiivisista käsitystä itsestään matematiikan oppijana sekä matematiikasta oppiaineena on tärkeää tukea. Tällaisia yksilön käsityksiä ja uskomuksia itsestään matematiikan oppijana sekä hänen tunnesuhtautumistaan matematiikkaan oppiaineena kutsutaan matematiikkakuvaksi (Hannula & Holm, 2018). Kiinnostus ja motivaatio vaikuttavat osaltaan myönteisen matematiikkakuvan syntyyn, ja niiden on

havaittu olevan keskeisiä elementtejä matemaattisten taitojen oppimisessa (Kupari & Hiltunen, 2018). Tutkimusten mukaan matematiikkakuva voi vaikuttaa myös jatko-opintoihin sekä ammatinvalintaan asti (Hannula & Holm, 2018). Valitettavasti tutkimukset osoittavat myös, että suomalaisten oppilaiden asenteet matematiikkakohtaan ovat jatkuvasti huonontuneet (Kupari & Hiltunen, 2018). Tämän vuoksi myönteisen matematiikkakuvan synnyn tukeminen jo esiopetuksessa on tärkeää.

Olen aiemmalta koulutukseltani varhaiskasvatuksen opettaja, ja oman kokemukseni mukaan matematiikan oppimista ja opettamista käsitellään varhaiskasvatuksen yliopistokoulutuksessa varsin vähän ja pintapuolisesti. Onkin paljon varhaiskasvatuksen opettajan omasta kiinnostuksesta kiinni, kuinka paljon ja millä tavoin hän omaa matematiikkakasvatuksen osaamistaan työuransa varrella syventää ja kasvattaa. Aiemmassa työssäni varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa olisinkin kaivannut helposti käyttöön otettavaa lisämateriaalia matematiikan opettamiseen. Myös useat kollegani päiväkodeissa ja esiopetuksessa jakoivat saman toiveen. Lisäksi Etelälahti (2014) on tutkimuksessaan todennut kielellisten taitojen kehittyvän esiopetusvuoden aikana eniten, joten kaikenlainen tukimateriaali esiopetuksen matematiikkakasvatukseen on varmasti tarpeen.

Näiden kokemusten sekä matematiikan oppimistulosten laskun synnyttämän huolen vuoksi tein Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin, jonka tarkoituksena on tuoda esiopettajien saataville tietoa positiivisen matematiikkakuvan synnyn tärkeydestä sekä keinoista vaikuttaa siihen. Materiaalin tehtävien tarkoitus on ennen kaikkea herättää esiopetusikäisten lasten innostusta ja kiinnostusta matematiikkaa kohtaan. Tehtävät keskittyvät lukukäsitteen ymmärtämisen tukemiseen sekä matemaattisen ajattelun kielentämisen harjoitteluun neljän kielen mallin (Joutsenlahti & Kulju, 2010; Joutsenlahti & Rättyä, 2015) mukaisesti.

Tutkimukseni tavoitteena on design-tutkimuksen keinoin selvittää, millä tavoin Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin tehtävät tukevat positiivisen matematiikkakuvan syntyä sekä matemaattisen ajattelun kielentämistä. Design-tutkimukselle ominaiseen tapaan tutkimukseni etenee sykleittäin. Tässä tutkimusraportissa avaan ensin tutkimuksen teoreettista viitekehystä (matematiikkakuva, matemaattisen ajattelun kielentäminen sekä matemaattisten

taitojen kehittyminen kouluikään mennessä). Tämän jälkeen raportoin tutkimukseni kulkua sekä tutkimustuloksia. Lopuksi pohdin tutkimuksen eettisyyttä ja luotettavuutta sekä jatkotutkimusaiheita, jotka tässä tutkimuksessa liittyvät materiaalin jatkokehittämiseen. Matikkaeväitä koulupolulle -materiaali löytyy tutkimusraportin liitteistä.

2 KESKEISET KÄSITTEET

2.1 *Matematiikkakuva*

Matematiikkakuvalla tarkoitetaan oppilaan käsitystä itsestään matematiikan osaajana ja oppijana sekä käsitystä matematiikasta oppiaineena ja siitä, miten matematiikkaa opitaan. Matematiikkakuvan on todettu rakentuvan eri osista, jotka kuitenkin eri tutkijoiden mukaan osittain eroavat toisistaan. Pietilän (2002) mukaan matematiikkakuva rakentuu tiedoista, käsityksistä, uskomuksista, asenteista ja tunteista, kun taas Hannula ja Holm (2018) määrittelevät matematiikkakuvan osa-alueiksi tunteet, uskomukset ja motivaation.

Käytän tutkielmassani Hannulan ja Holmin (2018) määritelmää, jonka mukaan tunnesuhtautuminen matematiikkaan ja sen oppimiseen sekä matematiikkaan liittyvät uskomukset ja motivaatio muodostavat jokaisen oppilaan henkilökohtaisen matematiikkakuvan. Tunnesuhtautuminen, uskomukset ja motivaatio voivat olla tiedostettuja tai tiedostamattomia (Hannula & Holm, 2018). Matematiikkakuva alkaa rakentua jo varhaisten matematiikkakokemusten perusteella ja se vaikuttaa merkittävästi oppilaan myöhempään matematiikan oppimiseen sekä opinto- ja uravalintoihin (Hannula & Holm, 2018). Näin ollen on tärkeää, että se tiedostetaan ja siihen kiinnitetään huomiota jo varhaisessa vaiheessa.

2.1.1 Tunnesuhtautuminen

Opiskeluun ja oppimiseen liittyy aina paljon erilaisia tunteita. Tunteilla on moninaisia vaikutuksia oppimiseen ja ne voivat olla sekä hyödyllisiä että haitallisia riippuen siitä, miten niitä käsitellään ja säännellään oppimisympäristössä (Shuman & Scherer, 2014). Erityisen voimakkaita tunnereaktiot ovat usein onnistumisten ja epäonnistumisten hetkillä (Pekrun, 2010), mutta myös esimerkiksi pelkästään matematiikan tehtävien tekeminen nostaa esiin erilaisia tunteita (Pekrun & Stephens, 2010). Säännöllisesti

samanlaisina koetut samanlaisiin tilanteisiin linkittyvät tunteet voivat muuttua pysyviksi tunteiksi, joiden muuttaminen voi olla hankalaa, mutta ei mahdotonta. Jos esimerkiksi päässä laskut ovat oppilaalle haastavia ja ahdistusta herättäviä, pelkkä tieto pian edessä olevista päässä laskutehtävistä voi nostaa pintaan ahdistuksen riippumatta siitä, millaisia tehtävät ovat. Tällöin tunteet heikentävät oppimista sekä tehtävistä suoriutumista ja voivat jopa haitata työmuistin toimintaa sekä vaikeuttaa keskittymistä (Hannula & Holm, 2018; Shuman & Scherer, 2014). Toisaalta taas esimerkiksi innostus, ilo ja kiinnostus edistävät oppimista ja auttavat oppilasta sitoutumaan opiskeluun (Shuman & Scherer, 2014). Vaikka itseluottamusta ja muita positiivisia tunteita on joskus pidetty vain oppimisen sivutuotteina, nykyään ymmärretään, että niillä on merkittävä vaikutus oppimiseen ja ongelmanratkaisuun (Eynde ym. 2002).

Tunteet tulevat ja menevät, eikä niitä voi estää, mutta tunteiden tunnistamista voi harjoitella ja niiden synnyttämään reaktioon voi vaikuttaa. Shuman ja Scherer (2014) painottavatkin kannustavan ja erilaiset tunteet sallivan ilmapiirin tärkeyttä. Toisaalta pelkkä salliva ilmapiiri ei riitä, vaan on tärkeää, että tunteiden säätelyä myös opetetaan systemaattisesti (Shuman & Scherer, 2014). Jokaisen suhde matematiikkaan on hyvin tunnepohjainen, joten onnistumisen kokemukset ja oivaltamisen ilo vaikuttavat paljon positiivisen matematiikkakuvan syntyyn. Kun oppilas suhtautuu matematiikkaan myönteisesti, hän jaksaa myös sinnikkäästi työskennellä matemaattisten tehtävien parissa. Tämä sinnikkyys tuottaa lopulta myös oivaltamisen iloa ja onnistumisen kokemuksia, jotka osaltaan lisäävät positiivista asennoitumista matematiikkaan – ja edelleen taas sinnikkyyttä työskennellä matemaattisten haasteiden parissa. Matematiikan tulisikin siis olla kivaa ja mielekästä (Hannula & Holm, 2018).

2.1.2 Uskomukset

Matematiikkakuvaan liittyvät uskomukset voivat olla muun muassa uskomuksia matematiikasta, matematiikan oppimisesta sekä omista kyvyistä ja mahdollisuuksista oppia matematiikkaa. Erilaiset oppimiskokemukset sekä oppimistilanteissa koetut tunteet muokkaavat oppijan uskomuksia, mutta nämä uskomukset voivat kuitenkin olla myös epätosia (Hannula & Holm, 2018). Jos

esimerkiksi enemmän haastetta kaipaava oppilas kokee matematiikan tunnit tylsiksi, hänelle voi muodostua uskomus matematiikasta pelkästään tylsänä ja ilottomana oppiaineena. Uskomusten syntymiseen vaikuttavat myös lapsen kuulemat puheet, kuten kotona kuultu puhe koko suvun ”huonosta matikkapäästä” (Pietilä, 2002; Hannula & Holm, 2018). Tällaiset puheet ja asenteet ruokkivat myös lasten uskomuksia siitä, että matemaattinen lahjakkuus olisi pysyvä ja muuttumaton ominaisuus, jota joko on tai ei ole (Hannula & Holm, 2018). Dweckin (2006) mukaan tällainen uskomus on erityisen haitallinen siksi, että sen omaavat ihmiset välttelevät usein haasteita, koska epäonnistumiset selittyvät heille omien kykyjen puutteilla ja näin ollen myös murentavat itseluottamusta. Vastakohtaisesti taas he, jotka uskovat lahjakkuuden olevan muuttuva ja kehitettävissä oleva ominaisuus, jaksavat työskennellä pidempään haastavienkin tehtävien parissa, eivätkä epäonnistumiset heikennä heidän itseluottamustaan (Dweck, 2006). Myös uskomus siitä, että matematiikan tehtäviin on olemassa aina jokin nopea ratkaisu, saattaa johtaa tehtävän keskeyttämiseen, jos siihen on kulunut oppilaan mielestä liikaa aikaa (Hannula & Holm, 2018).

Hannulan ja Holmin (2018) mukaan Stevenson ja Stigler (1992) ovat todenneet, että länsimaissa on tyypillistä uskoa synnynnäiseen ja muuttumattomaan lahjakkuuteen, kun taas Aasiassa uskotaan enemmän ahkeruuden tuomaan menestykseen. Lisäksi Dweck (2008) on tutkimuksissaan havainnut, että usein juuri matemaattisia kykyjä pidetään muuttumattomampina kuin muita lahjakkuuden lajeja. Tämän vuoksi olisikin todella tärkeää, että lapset oppisivat jo varhain ahkeruuden ja sinnikkyuden merkityksen oppimisessa. Lapsen lähipiirin aikuisilla niin kotona kuin esiopetuksessa ja koulussa onkin tärkeää tehtävä saada lapsi uskomaan, että vaikeidenkin asioiden oppiminen on sinnikkään työskentelyn avulla mahdollista, ja että virheet eivät kerro lapsen huonoudesta vaan harjoittelun tai oppimisstrategioiden muuttamisen tarpeesta (Hannula & Holm, 2018). Tämä ei koske vain niitä lapsia, joilla on oppimisessa syystä tai toisesta pulmia, vaan aivan samalla tavalla myös nopeasti oppivien lasten tulisi ymmärtää työn merkitys, jotta lapsella olisi mahdollisuus hyödyntää oma potentiaalinsa.

2.1.3 Motivaatio

Motivaatiotutkimuksella on pitkä ja monitahoinen historia. Aluksi motivaatiota on tutkittu näkyvän käyttäytymisen perusteella, mutta viime vuosikymmeninä tutkimus on keskittynyt pääasiassa käyttäytymisen taustalla oleviin ilmiöihin, kuten asenteisiin, arvoihin, uskomuksiin ja tavoitteisiin (esim. Ryan & Deci, 2017). Hannulan ja Holmin (2018) mukaan motivaatio selittää oppilaan käyttäytymistä ja se on matematiikkakuvan tärkein osa vaikuttaessaan oppilaan tekemiin valintoihin sekä siihen, mitä hän pitää tärkeänä. Motivaatio määrittää oppimisen laatua, eikä ole vain oppimista aikaansaava tekijä tai moottori (Eynde ym., 2002). Lisäksi motivoituneen oppilaan on todettu kokevan merkityksellisyyttä ja pystyvyyttä sekä muodostavan tavoitteita, ratkaisevan haasteita ja näkevän uusia mahdollisuuksia (Salmela-Aro, 2018).

Ecclesin oletusarvoteorian mukaan oppiminen pohjautuu oppilaan arvostamiin asioihin sekä oletuksiin siitä, kuinka hän tulee tilanteesta tai tehtävästä selviytymään. Oppilaan työpanos määräytyy siis sen mukaan, kuinka hyvin hän odottaa menestyvänsä ja kuinka paljon hän arvostaa menestymistä tai onnistumista (Eccles & Wigfield, 2002). Oppilaan oma arvio odotetusta menestymisestä pohjautuu hänen minäkäsitykseensä eli esimerkiksi käsitykseen itsestään matematiikan oppijana. Arvostus taas pitää sisällään kiinnostuksen tehtävää kohtaan sekä arvion tehtävän henkilökohtaisesta tärkeydestä, tulevaisuuden hyötyarvosta ja panostuksen hyödyistä ja haitoista suhteutettuna työn määrään (Eccles & Wigfiel, 2002).

Ryan ja Deci (2017) määrittelevät motivaation sisäiseksi ja ulkoiseksi motivaatioksi. Sisäinen motivaatio syntyy kiinnostuksenkohteiden ja oman halun avulla, kun taas ulkoinen motivaatio perustuu esimerkiksi palkkioihin ja rangaistuksiin. Sisäisesti motivoitunutta oppilasta ohjaa esimerkiksi halu oppia ja ymmärtää, mutta todellisuudessa lienee mahdotonta, että oppilaalla olisi sisäinen motivaatio kaikkea koulussa opiskeltavaa kohtaan. Ulkoisen motivaation katsotaan usein johtavan enimmäkseen pinnalliseen oppimiseen, mutta Ryanin ja Decin (2000) mukaan se voi kuitenkin vähitellen muuttua sisäiseksi motivaatioksi. Lasten parissa työskennellessäni olen itsekin kokenut useita tilanteita, joissa jonkin taidon harjoittelun aloittamiseen on tarvittu esimerkiksi tarrapalkinto. Lapsi on selkeästi ensin työskennellyt pelkästään tarrapalkinnon

motivoimana, mutta vähitellen taitojen karttuessa tekemisen ilo ja uusien asioiden oppiminen onkin selkeästi ollut motivaation lähteenä.

2.2 Matemaattisen ajattelun kielentäminen

Matemaattisen ajattelun kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista ja jäsentämistä ääneen, kirjallisesti tai toiminnallisesti (Joutsenlahti, 2005; Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Ajattelun kielentäminen auttaa jäsentämään omaa ajattelua ja lisää ymmärrystä, kehittää matemaattista ajattelua vuorovaikutuksessa vertaisryhmän jäsenen kanssa sekä toimii opettajan suunnittelun ja arvioinnin työkaluna tuomalla esiin oppijoiden osaamista ja ajattelua (Joutsenlahti & Kulju, 2010). Kielentämisen eri tapojen joustava käyttö auttaa oppijaa myös muodostamaan opiskeltavista asioista merkityksellisiä kokonaisuuksia (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018).

2.2.1 Multimodaalisuus

Kielet voidaan jaotella luonnollisiin ja keinotekoisiiin kieliin (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Luonnolliset kielet ovat eri kulttuureissa syntyneitä, ihmisten käyttämiä suullisen ja kirjallisen kommunikaation kieliä, kuten suomi, ruotsi, englanti ja niin edelleen. Keinotekoisia kieliä taas ovat tietoisesti luodut kielet, kuten ohjelmointikieli tai matematiikan formaali kieli. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) kuitenkin ajattelevat matematiikan olevan sekakieli, joka sisältää sekä luonnollista että keinotekoisia kieltä (matemaattinen formalismi). Matematiikalla onkin oma matematiikan ilmaisuja ja kielellisiä rakenteita sisältävä sanastonsa sekä oma symbolijärjestelmä, jonka symbolit eivät sisälly tavalliseen aakkostoon (Tossavainen, 2007). Näiden lisäksi kuviokieli eli matematiikan visualisointi esimerkiksi piirtämällä on yksi keskeinen matematiikan tuottamisen tapa (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018).

Kommunikoidessamme käytämme usein sekä sanallista että sanatonta viestintää. Sanatonta viestintää ovat esimerkiksi kuvat, eleet ja ilmeet. Voimme käyttää eri kommunikointitapoja samaan aikaan tehostaaksemme viestiä tai luodaksemme asialle eri merkityksiä. Tällaista eri viestintätapojen käyttöä

kutsutaan multimodaalisuudeksi (Jewitt ym., 2016). Multimodaalisuus siis viittaa kykyyn käyttää useita erilaisia kommunikaation muotoja sekä rakentaa niiden avulla eri merkityksiä. Merkityksiä luovia kommunikaation eri tapoja taas kutsutaan Jewittin ynnä muiden (2016) mukaan semioottisiksi resursseiksi. Esimerkiksi matematiikan tehtävien ratkaisujen esittämisessä sekä matemaattisen ajattelun näkyväksi tekemisessä voidaan käyttää eri semioottisia resursseja: luonnollista kieltä, kuviokieltä, symbolikieltä sekä taktiillista toiminnan kieltä (Joutsenlahti & Rättyä, 2015; Lehtonen, 2018). Mitä enemmän semioottisia resursseja on käytetty, sitä paremmin ne auttavat luomaan merkityksiä opittavaan asiaan ja helpottavat asian kokonaisvaltaista ymmärtämistä. Tällainen viestintä tukee esimerkiksi lapsen matemaattista ajattelua sekä käsitteiden ymmärtämistä (Joutsenlahti & Kulju, 2010).

2.2.2 Neljän kielen malli

Käytän tutkimuksessani neljän kielen mallia (kts. Kuvio 1), johon kuuluvat matematiikan symbolikieli, kuviokieli (esimerkiksi piirtäminen), luonnollinen kieli eli puhuminen tai kirjoittaminen sekä taktiillinen toiminnan kieli (erilaiset toimintavälineet). Mallin kolmesta kielestä (luonnollinen kieli, kuviokieli ja symbolikieli) kehittivät Joutsenlahti ja Kulju (2010). Joutsenlahti ja Rättyä (2015) lisäsivät tähän neljänneksi kieleksi vielä taktiillisen toiminnan kielen. Näitä eri kieliä käytetään matematiikassa yksittäin, yhdessä tai toistensa kanssa limittäin. Oppilas voi esimerkiksi ensin kertoa luonnollisella kielellä, että hänellä on kolme tarraa, ja kun hän ottaa vielä kaksi tarraa lisää, tarroja on yhteensä viisi. Kun hän sitten vaihtaa symbolikieleen, hän kirjoittaa paperille $3+2=5$. Tällaista kielten vaihtoa kutsutaan koodinvaihdoksi (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018).

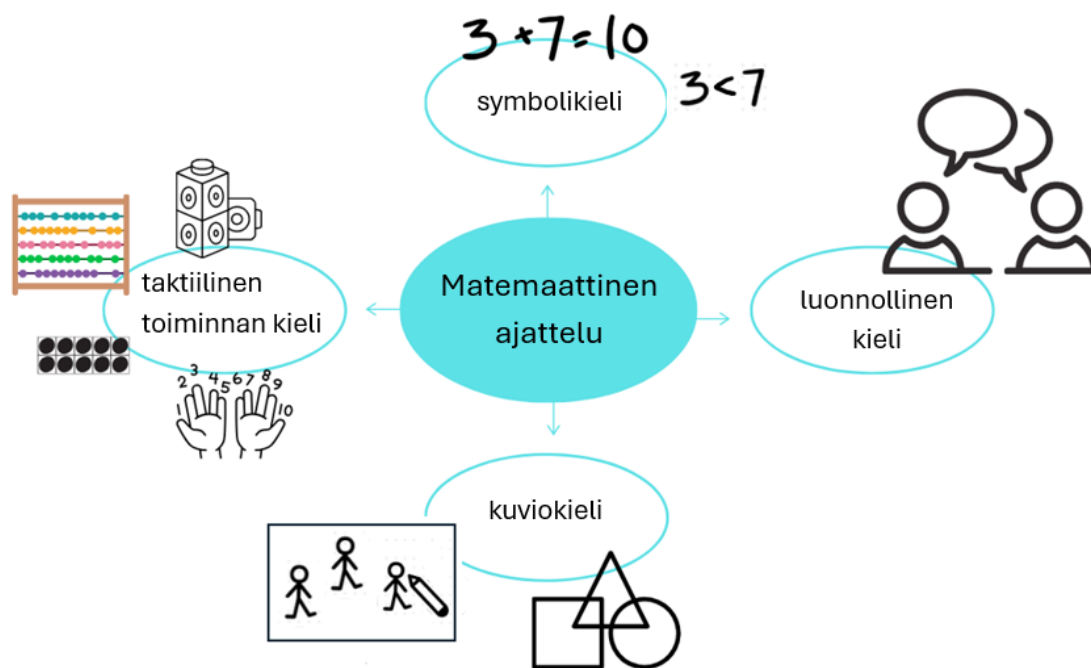
Symbolikielellä tarkoitetaan siis loogista, yleisesti sovittua matematiikan merkitsemistapaa (Joutsenlahti & Rättyä, 2015), kuten vähennyslaskun merkitsemistä luvuin sekä matemaattisin symbolein – (miinus) ja = (yhtä suuri kuin). Symbolikieli ei ole välttämättä lapselle paras tapa tuoda matemaattista ajatteluaan esiin, mutta se on matematiikan oppimateriaaleissa käytetyin tapa (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Symbolikielen käyttö ei kuitenkaan tarkoita pelkästään numeromerkkien ja muiden matematiikan symbolien kirjoittamista,

vaan alle kouluikäisten matematiikassa esimerkiksi numerosymbolit voivat olla valmiita kuvia, joita yhdistetään oikeisiin lukumääriin.

Luonnollisella kielellä tarkoitetaan puhetta tai kirjoitusta, jolla voidaan esimerkiksi selittää auki omaa ajattelua matematiikan tehtävän aikana tai sen jälkeen (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Alle kouluikäisistä lapsista juuri kenenkään kirjoitustaito ei vielä riitä oman ajattelun avaamiseen kirjallisesti, joten heidän kohdallaan luonnollisella kielellä tarkoitetaan erityisesti puhuttua kieltä. Joutsenlahden ja Rättyän (2015) mukaan äänen puhuminen auttaa jäsentämään omaa ajattelua, ja omien kokemusteni mukaan lapset löytävätkin usein ratkaisun ongelmaansa, kun he alkavat äänen selittää, minkä asian ratkaisussa tarvitsevat apua. He siis saattavat yhtäkkiä kesken puheensa oivaltaa, kuinka esimerkiksi jokin tehtävä ratkaistaan. Äänen puhuminen tuo myös opettajalle esiin lapsen osaamista ja ajattelua sekä saattaa kehittää myös vertaisryhmän jäsenen matemaattista ajattelua (Joutsenlahti & Kulju, 2015).

Joutsenlahden ja Tossavaisen mukaan (2018) kuviokieleen taas sisältyy esimerkiksi geometriset kuviot, valmiit kuvat sekä piirtäminen. Oman kokemukseni mukaan piirtäminen on alle kouluikäisten lasten kanssa usein hyvä havainnollistamisen keino tilanteessa kuin tilanteessa. Sitä tulisikin käyttää rohkeammin ja enemmän myös matemaattisissa tehtävissä. Matemaattisia tehtäviä ratkoessa piirtävä aikuinen antaa myös lapselle tärkeän mallin kuviokielen ja erityisesti piirtämisen käytöstä oivana havainnollistamisen välineenä matemaattisten ongelmien ratkaisussa.

Neljänneksi kieleksi Joutsenlahti ja Rättyä (2015) esittävät taktiilisen toiminnan kielen, jolla tarkoitetaan erilaisten toimintavälineiden, kuten palikoiden käyttöä toiminnan havainnollistamisessa. Toimintavälineet ovatkin varsin keskeinen osa esiopetuksen matematiikkakasvatusta (Opetushallitus, 2014). Oman kokemukseni mukaan alle kouluikäisten matematiikkakasvatuksessa käytetään hyvin monenlaisia toimintavälineitä, kuten palikoita, kiekkoja, sauvoja, geometrisia kappaleita ja muita pieniä esineitä tai hahmoja.



KUVIO 1. Matemaattisen ajattelun neljän kielen malli Joutsenlahden ja Rättyän (2015) mukaan

2.3 Matemaattisten taitojen kehittyminen kouluikään mennessä

Matemaattiset taidot alkavat kehittyä jo vauvaiässä keskushermoston kehittymisen myötä (Aunio ym., 2004). Jo noin puolivuotiaat vauvat kykenevät erottamaan lukumääriä riippumatta siitä, mistä ne ovat peräisin (Hannula-Sormunen ym., 2018). Lukumäärien erottelu onnistuu siis esimerkiksi kuultujen äänien tai nähtyjen objektien perusteella. Pienten lukumäärien alueella vauvat pystyvät myös tunnistamaan lukumäärien muutoksia (Mattila, 2006). Välitöntä kykyä havaita pieniä lukumääriä (1–4) ilman laskemista kutsutaan subitisaatioksi. Termin on ottanut käyttöön E.L. Kaufman vuonna 1949 (Hannula-Sormunen ym., 2018). Pienien lukumäärien havaitsemisen (subitisaatio) lisäksi jo vauvaikäiset pystyvät havaitsemaan likimääräisiä eroja lukumäärien välillä. Näistä kahdesta synnynnäisestä taidosta käytetään yhteisesti nimitystä lukumääräisyyden taju (esim. Aunio, 2008).

Lapsilla on myös yleinen taipumus kiinnittää spontaanisti huomiota ympäristössään näkyviin lukumääriin (Spontaneous Focusing on Numerosity eli SFON), mistä käytetään nimitystä SFON-tendenssi (Hannula-Sormunen ym., 2018). Riippuu kuitenkin lapsesta, kuinka usein hän spontaanisti kiinnittää huomion esimerkiksi esinejoukkojen lukumäärään eli kuinka suuri hänen SFON-tendenssinsä on. Suurella SFON-tendenssillä varhaiskasvatus- ja esiopetusiässä on havaittu yhteys matemaattisten taitojen sujuvuuteen myös myöhemmässä kouluiässä (Hannula-Sormunen ym., 2018).

Lukumääräisyyden taju sekä spontaani huomion kiinnittäminen lukumääriin (SFON) luovat siis pohjan lapsen matemaattisten taitojen kehitykselle. Näiden taitojen harjoittelua ei saa kuitenkaan jättää pelkästään lapsen luontaisen kyvyn varaan, vaan aikuisella on tärkeä tehtävä auttaa lasta kiinnittämään huomiota lukumääriin arjen eri tilanteissa. Aikuisen huudahdus: ”Hei katso, onpa tuolla paljon käpyjä! Kuinkahan monta niitä on?” innostaa lasta laskemaan käpyjen lukumäärää ja mahdollisesti kiinnittämään tilanteessa huomiota myös muihin lukumääriin. Tällainen aikuisen ja lapsen välinen jaettu tarkkaavuus on matemaattisten valmiuksien kehittymisen kannalta myös hyvin tärkeää. Lapsen varhaiset matemaattiset taidot kehittyvät siis sosiaalisessa vuorovaikutuksessa (Hannula-Sormunen ym., 2018). Matemaattisten taitojen kehittyminen alkaakin jo aivan varhaisessa lapsuudessa ja jatkuu siitä eteenpäin kumulatiivisesti eli aina aiemman tiedon päälle rakentuen. Matemaattiset taidot voidaan jakaa eri osa-alueisiin, joita avaan seuraavaksi hieman tarkemmin.

2.3.1 Matemaattisten taitojen osa-alueet

Varhaiset matemaattisen kehityksen taidot voidaan jakaa neljään taitoryppäeseen, jotka koostuvat useammista osataidoista. Näitä taitoryppäitä ovat laskemisen taidot, aritmeettiset perustaidot, lukumääräisyyden taju sekä matemaattisten suhteiden ymmärtäminen (Aunio, 2008; LukiMat). LukiMat-sivuston mukaan laskemisen taidot pitävät sisällään lukujonojen luettelemisen taidon, numerosymbolien hallinnan sekä lukumäärän määrittämisen laskemalla. Aritmeettisiin perustaitoihin kuuluu yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut sekä niiden laskustrategiat. Lisäksi allekkain- ja päässä-laskut moninumeroisilla luvuilla

ovat osa aritmeettisiä perustaitoja (LukiMat). Lukumääräisyyden taju tarkoittaa pienten lukumäärien (1–4) näönvaraista havaitsemista sekä lukumäärien erojen likimääräistä havaitsemista. Matemaattisten suhteiden hallintaan kuuluu matemaattisloogiset taidot, matemaattiset symbolit, aritmeettiset periaatteet sekä paikka-arvo ja kymmenjärjestelmä (LukiMat). Ennen kouluikää näistä painottuvat erityisesti laskemisen taidot, lukumääräisyyden taju (subitisaatio ja SFON), aritmeettisten perustaitojen harjoittelun aloittaminen sekä matemaattisten suhteiden hallitsemisesta matemaattisloogiset periaatteet (Aunio & Räsänen, 2016). Nämä osataidot eivät kuitenkaan ole toisistaan erillisiä, vaan ne kaikki vaikuttavat toisiinsa (Aunio & Räsänen, 2016; Mononen ym., 2017).

Laskemisen taitojen osataitoin kuuluu lukujonon luetteleminen, lukumäärän laskeminen sekä numerosymbolien hallinta (Aunio, 2008; Aunio ja Räsänen, 2016). Lukujonotaitoihin kuuluu eteen- ja taaksepäin luettelemisen lisäksi lukujonon luetteleminen hyppäyksittäin sekä lukujonon luetteleminen annetusta luvusta eteen- tai taaksepäin (Fuson 1992; Aunio & Räsänen, 2016). Lukusanojen luettelemista tarvitaan esimerkiksi esineiden laskemisen lisäksi myös yhteen- ja vähennyslaskujen harjoittelemisessa (Aunio ja Räsänen, 2016).

Matemaattis-loogisiin taitoihin kuuluu Aunio ja Räsänen (2016) mukaan sarjoittaminen, taito vertailla, taito luokitella sekä yksi yhteen -suhteen ymmärtäminen. Sarjoittaminen liittyy tiukasti lukujonotaitoihin, vaikka sarjoittamiseen kuuluu myös esimerkiksi esineiden järjestämistä koon mukaan etenevään järjestykseen. Myöhemmin sarjoittamista harjoitellaan esimerkiksi lukujonosarjoilla, jotka alkavat annetusta luvusta, etenevät eteen- tai taaksepäin tai esimerkiksi kahden välein. Vertailun taitoa harjoitellaan esimerkiksi vertailemalla esineitä niiden ominaisuuksien mukaan. Vertailuun kuuluu myös lukumäärien erojen vertailu. Luokittelun (esimerkiksi esineiden järjestäminen ryhmiin ominaisuuksien mukaan) taidot edellyttävät lapselta kykyä nähdä yhteneväisyyksiä ja eroavaisuuksia sekä käyttää esimerkiksi käsitteitä enemmän ja vähemmän. Myöhemmin luokitteluun kuuluu myös lukujen luokittelu esimerkiksi parillisiin ja parittomiin lukuihin (Aunio, 2008; Aunio ja Räsänen, 2016).

Aritmeettisiin periaatteisiin kuuluu neljä eri periaatetta, jotka lapsen tulisi oppia ja ymmärtää. Ensimmäiseksi tulisi ymmärtää, että kokonaisuudet muodostuvat pienemmistä osista. Tätä harjoitellaan esi- ja alkuopetuksessa

usein niin sanottujen hajotelmien avulla. Tavoitteena on siis ymmärtää, että jokainen luku koostuu pienemmistä osista eli esimerkiksi 6 on yhtä suuri kuin 3 ja 3, 4 ja 2, 5 ja 1 tai esimerkiksi 2, 2 ja 2. Toiseksi lapsen tulisi ymmärtää, että yhteenlaskettavat ja kerrottavat voidaan laskea missä järjestyksessä tahansa, ja vastaus on silti aina sama. Tähän liittyy myös kolmas periaate, jonka mukaan kertolasku ja yhteenlasku voidaan hajottaa uudelleen osiin ja laskea eri järjestyksessä. Neljäs aritmeettinen periaate on käänteisyyden periaate, jonka opittuaan lapsi ymmärtää yhteen- ja vähennyslaskun sekä kerto- ja jakolaskun olevan toisilleen käänteisiä (LukiMat). Näitä kaikkia periaatteita alle kouluikäisen lapsen ei toki vielä odoteta osaavan, mutta näidenkin taitojen harjoittelu on hyvä aloittaa jo varhain (Aunio, 2008).

2.3.2 Lukukäsitteen kehittyminen

Lukukäsitteellä tarkoitetaan yksinkertaisimmillaan lukusanan, numeromerkin ja lukumäärän yhteyden ymmärtämistä. Lukukäsitteen kehittyminen alkaa kuitenkin jo varhaislapsuudessa ja pitää sisällään monta eri toistensa päälle rakentuvaa vaihetta. Lukukäsitteen ymmärrettyään lapsi ymmärtää myös sen, että luku koostuu monista eri luvuista. Esimerkiksi siis luku viisi koostuu luvuista yksi ja neljä, kaksi ja kolme, neljä ja kolme tai kolme ja kaksi. Lukukäsitteen syvälinen ymmärtäminen ja oppiminen onkin esi- ja alkuopetuksen matematiikassa hyvin tärkeää, ja sen ymmärtämisen tukemiseen on hyvä kiinnittää huomiota jo esiopetuksessa.

Fusonin (1991) mukaan lapsi oppii luettelemaan lukusanoja omalla äidinkielellään ensin tauottomana rimpuna (yksikaksikolme...) ja sen jälkeen erillisinä lukusanoina (yksi, kaksi, kolme...). Seuraavassa vaiheessa lapsi oppii yhdistämään lukusanan laskemaansa esineeseen, ja tämän jälkeen ymmärtämään laskemansa luvun kardinaalisen merkityksen. Tällä tarkoitetaan sitä, että lapsi ymmärtää viimeisenä sanomansa lukusanan tarkoittavan laskemiensa esineiden koko joukkoa (Fuson, 1991). Onkin tärkeää havainnoida, onko esi- tai alkuopetuksessa oleva lapsi todella ymmärtänyt luvun kardinaalisen merkityksen vai ajatteleeko hän viimeisenä mainitsemansa lukusanan tarkoittavan vain viimeisenä laskemaansa esinettä eikä koko joukkoa.

Myöhemmin lapsi oppii myös laskemaan oikean määrän esineitä annetun kardinaalisen luvun mukaisesti (Fuson, 1991).

Fusonin (1991) mukaan seuraavassa vaiheessa lapsi oppii aloittamaan laskemisen mistä tahansa luvusta, ja tämän jälkeen hän ei enää välttämättä tarvitse laskemiseen esineitä, vaan pystyy laskemaan lukusanojen avulla mielessään tai esimerkiksi sormia apuna käyttäen. Laskemisen aloittaminen mistä tahansa luvusta ilmenee esimerkiksi niin, että lapsi voi laskea pöydällä olevat seitsemän keksiä niin, että subitisaation avulla hän tunnistaa ensin kolmen keksin joukon ja aloittaa keksien laskemisen neljästä eteenpäin. Viimeisellä tasolla lapsi ymmärtää jokaisen lukusanan olevan oma yksikkönsä, jolla on sekä oma paikkansa lukujonossa että ordinaalinen yhteys edelliseen ja seuraavaan numerosanaan. Lapsi myös ymmärtää, että jokainen luku voidaan jakaa erilaisiin osiin (Fuson, 1991).

2.3.3 Matematiikka esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa

Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa ei ole erikseen oppiaineita, vaan toiminnan sisällöt ja tavoitteet on jaoteltu eri oppimiskokonaisuuksien alle. Matematiikan osa-alueet kuuluvat Tutkin ja toimin ympäristössäni - oppimiskokonaisuuteen (Opetushallitus 2014). Esiopetuksen matematiikkakasvatuksen tarkoituksena on vahvistaa matemaattisen ajattelun kehittymistä sekä lasten innostaa lapsia matematiikan pariin:

Esiopetuksessa vahvistetaan pohjaa lasten matemaattisen ajattelun kehittymiselle ja matematiikan oppimiselle. Lapsia ohjataan kiinnittämään huomiota arjessa ja ympäristössä ilmenevään matematiikkaan. Opetus luo mahdollisuuksia luvun, muutoksen ja ajan käsitteiden sekä tason ja avaruuden hahmottamisen ja mittaamistaitojen kehittymiselle. Opetuksen tavoitteena on tarjota oivaltamisen ja oppimisen iloa matemaattisen ajattelun eri vaiheissa oleville lapsille. (Opetushallitus, 2014.)

Vaikka esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa ei mainita kielentämisen käsitettä, painotetaan siinä toiminnallisuutta sekä Joutsenlahden ja Rättyän (2015) neljän kielen malliinkin kuuluvia osa-alueita (luonnollinen kieli, symbolikieli, kuviokieli ja taktiilinen toiminnan kieli):

Lapsia kannustetaan kehittämään matemaattisia taitojaan toiminnallisesti, leikkien ja eri aisteja käyttäen erilaisissa oppimisympäristöissä. Opetuksessa tutustutaan matematiikkaan ja sen osa-alueisiin havainnollisesti ja yhdessä toimien. Lapsia innostetaan pohtimaan ja kuvailemaan matemaattisia havaintojaan erilaisissa arjen tilanteissa opettajan mallintamisen ja kielellistämisen avulla. Havaintoja harjoitellaan esittämään itse ja kuvien sekä erilaisten välineiden avulla. Toiminta suunnitellaan niin että siinä on paljon mahdollisuuksia luokitella, vertailla, asettaa järjestykseen asioita ja esineitä sekä löytää ja tuottaa säännönmukaisuuksia. Opetukseen kuuluu muistia kehittäviä leikkejä ja tehtäviä. Lapsia kannustetaan myös toimintaympäristöön liittyvien ongelmanratkaisutehtävien päättelyyn ja ratkaisujen etsimiseen. — Lukukäsitteen kehittymistä tuetaan monipuolisesti leikkien ja työskennellen. Lapsia innostetaan havainnoimaan lukumääriä ympäristöstä sekä liittämään ne lukusanaan ja numeromerkkeihin taitojensa mukaan. Lukumääriä vertaillaan ja tutkitaan lukumäärän muutosta käytännön esimerkkejä keksien. Erityisesti opetuksessa kiinnitetään huomiota lasten lukujonotaitojen ja nimeämisen kehittämiseen. (Opetushallitus, 2014.)

3 DESIGN-TUTKIMUS

3.1 *Design-tutkimuksen piirteet*

Ensimmäiset artikkelit design-tutkimuksesta kirjoittivat Ann Brown ja Allan Collins vuonna 1992 (Taskinen, 2017). Design-tutkimuksen perinne on siis vielä verrattain uusi, mutta täytyy kuitenkin muistaa, että design-tutkimuksessa käytetään perinteisiä kvalitatiivisia ja kvantitatiivisia metodeja sekä aineistonkeruun ja -analyysin vakiintuneita normeja (McKenney & Reeves, 2013). Design-tutkimus on kuitenkin yleistynyt maailmalla vasta 2000-luvulla (Joseph, 2004).

Design-tutkimusta tehdään arjen ympäristössä ja sen tarkoituksena on kehittää ja muokata todellista interventiota, jota pyritään toistojen myötä parantamaan (Anders & Shattuck, 2012; Joseph, 2004). Design-tutkimus etenee siis sykleissä, joissa suunnittelu, kokeilu ja kriittinen arviointi kulkevat koko ajan tiiviisti läsnä (Joseph, 2004). Design-tutkimusta tehdään tavallisesti yhteistyönä niin, että esimerkiksi tutkija, suunnittelija sekä opettaja toimivat omissa rooleissaan (Anders & Shattuck, 2012; Bereiter, 2002). Joskus yhdellä henkilöllä voi kuitenkin olla useampia rooleja (Heikkinen 2010).

Kasvatustieteen design-tutkimus on syntynyt halusta kehittää opetusta tutkimuspohjaisesti niin, että tutkimus perustuu todellisiin opetuksen kentällä oleviin tarpeisiin sekä luo käytännönläheistä tietoa opettajien työn tueksi (Pernaa, 2003). Kasvatustieteellinen design-tutkimus keskittyy esimerkiksi oppilaiden viihtyvyyteen, oppimisympäristöjen toimivuuteen sekä oppimisen sujumiseen enemmän kuin testattaviin oppimistuloksiin (Taskinen, 2017). Design-tutkimus etenee kehittämistä ja tutkimusta yhdistävissä sykleissä, joissa teoreettiset sekä kokeelliset vaiheet vuorottelevat (Pernaa, 2003). Design-tutkimuksen kokeellisissa vaiheissa aineistoa voidaan kerätä sekä laadullisesti että määrällisesti.

Pernaan (2003) mukaan design-tutkimus alkaa aina ongelma-analyysillä, koska kehittämistarpeen täytyy perustua aitoon ongelmaan. Ongelma-analyysi voi olla teoreettinen, empiirinen tai näiden molempien yhdistelmä. Ongelma-analyysin pohjalta syntyy jokin kehittämistuotos, joka tässä gradussa on materiaalipaketti, jonka tehtävien tarkoituksena on tukea esi- ja alkuopetusikäisten lasten positiivisen matematiikkakuvan syntyä sekä matemaattisen ajattelun kielentämistä. Kehittämistuotosta muokataan ja kehitetään syklisesti tutkimusprosessin edetessä. Laadukkaaseen kehittämistutkimukseen tulee kuulua aidossa ympäristössä testaamista, teorian ja käytännön yhteen kietoutumista niiden yhteisten päämäärien avulla sekä pyrkimys siirrettäviin teorioihin, mikä helpottaa kentällä työskenteleviä ammattilaisia (The Design-Based Research Collective, 2003).

3.2 Oppimateriaalin kehittäminen design-tutkimuksen keinoin

Design-tutkimus yhdistää suunnittelun ja tutkimuksen elementtejä tavoitteenaan luoda innovatiivisia ratkaisuja ja ymmärtämisen syventämistä (Pernaa, 2013). Design-tutkimus soveltuukin erityisen hyvin oppimateriaalin kehittämiseen, koska se mahdollistaa opetuksen ja oppimisen parhaiden käytäntöjen yhdistämisen luovalla ja systemaattisella tavalla.

Design-tutkimuksen avulla voidaan luoda oppimateriaalia, joka vastaa paremmin käyttäjien tarpeita ja oppimistavoitteita, koska läpi tutkimuksen on mahdollista kartoittaa kohdeyleisön tarpeita, toiveita ja haasteita esimerkiksi kyselyjen, haastatteluiden ja havainnoinnin avulla (Edelson, 2002; The Design-Based Research Collective, 2003). Nämä antavat suunnittelijoille arvokasta tietoa siitä, mitä oppimateriaalissa tulisi painottaa ja miten se tulisi esittää, jotta se olisi mahdollisimman hyödyllistä ja houkuttelevaa kohdeyleisölle.

Design-tutkimus auttaa oppimateriaalin kehittäjiä testaamaan ja iteroimaan luomiaan ratkaisuja autenttisissa tilanteissa (Juuti & Lavonen, 2013). Prototyyppien ja kokeilujen avulla voidaan havaita, mikä toimii ja mikä ei, ja tehdä tarvittavia muutoksia ennen lopullisen materiaalin julkaisua (Pernaa, 2013). Tämä vähentää riskiä luoda oppimateriaalia, joka ei vastaa käyttäjien odotuksia

tai tarpeita, ja varmistaa, että lopputulos on mahdollisimman tehokas oppimisen väline (Juuti & Lavonen, 2013).

Design-tutkimuksen avulla oppimateriaalin kehittämisessä voidaan käyttää erilaisia luovia innovaatioita. Suunnitteluvaiheessa on mahdollista kokeilla erilaisia lähestymistapoja ja ideoita, jotka saattavat poiketa perinteisestä opetustyylistä. Tämä voi sisältää esimerkiksi pelillistämistä, interaktiivisia tehtäviä tai multimediaelementtejä, jotka tekevät oppimisesta hauskeempaa ja motivoivampaa opiskelijoille.

Design-tutkimus auttaa varmistamaan oppimateriaalin pitkäaikaisen vaikutuksen ja kestävyuden (Juuti & Lavonen, 2013). Suunnitteluvaiheessa on syytä ottaa huomioon pedagogiset periaatteet ja oppimisteoriat, jotta voidaan varmistaa materiaalin rakenteen ja sisällön johdonmukaisuus ja tehokkuus oppimisen kannalta (Pernaa, 2013). Lisäksi jatkuva arviointi ja iterointi mahdollistavat oppimateriaalin päivittämisen ja parantamisen ajan myötä vastaamaan paremmin muuttuvia oppimistarpeita ja -tavoitteita.

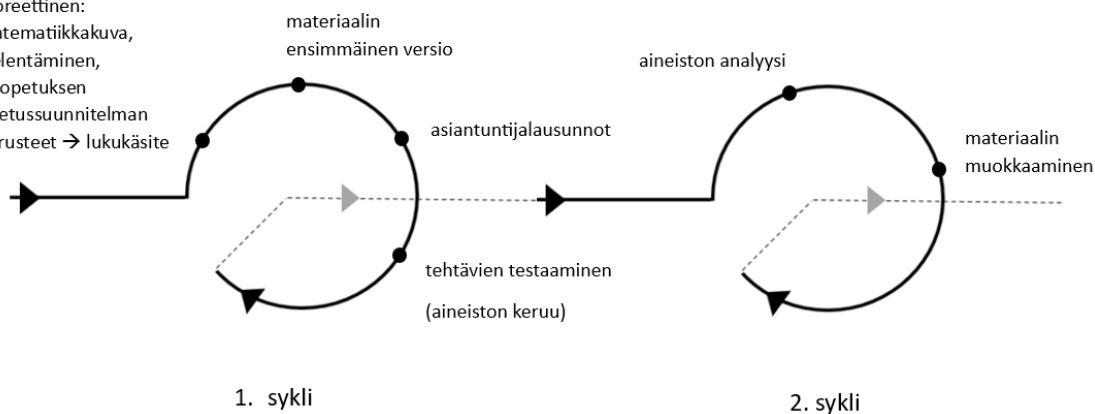
Design-tutkimus tarjoaakin tehokkaan lähestymistavan oppimateriaalin tekemiseen, sillä se mahdollistaa käyttäjälähtöisen suunnittelun, jatkuvan testauksen ja iteroinnin, luovuuden ja innovaation sekä pitkäaikaisen vaikutuksen varmistamisen. Näiden elementtien yhdistelmä auttaa luomaan oppimateriaalia, joka on kohdeyleisölle mahdollisimman houkuttelevaa, tehokasta ja kestävä.

4 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Design-tutkimus alkaa ongelma-analyysillä ja jatkuu siitä sykleittäin tuotosta eli tässä tutkimuksessa Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalia kehittäen. Tutkimuksen kulun raportointi on oleellinen osa design-tutkimuksen luotettavuutta (Edelson, 2002; The Design-Based Research Collective, 2003), joten seuraavaksi esittelen tutkimustehtävän, -kysymykset sekä tutkimuksen kulun mahdollisimman tarkasti. Pro gradu -tasoisissa design-tutkimuksissa tutkimussyklejä on yleensä yksi tai kaksi (Aksela & Pernaa, 2013), joten myös tämä tutkimus koostuu kahdesta syklistä (kts. Kuvio 2).

Ongelma-analyysi:

- kokemukset, tutkimustulokset (PISA, Karvi)
- teoreettinen: matematiikkakuva, kielentäminen, esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet → lukukäsitys



KUVIO 2. Tutkimuksen eteneminen

4.1 Tutkimuksen tehtävä ja tutkimuskysymykset

Tutkimuksen tehtävänä on design-tutkimuksen keinoin luoda ja kehittää esi- ja alkuopetukseen sopiva matematiikkamateriaali, jonka tehtävänä on tukea lapsen positiivisen matematiikkakuvan syntyä sekä ohjata matemaattisen ajattelun kielentämiseen.

Tutkimuskysymykset:

1. Miten tehtävät tukevat positiivisen matematiikkakuvan syntyä?
2. Miten tehtävät tukevat matemaattisen ajattelun kielentämistä?

4.2 Ensimmäinen sykli

Tutkimukseni ensimmäiseen sykliin kuului ongelma-analyysin tekeminen, jonka pohjalta koostin Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin ensimmäisen version. Pyysin tästä versiosta myös asiantuntijalausunnon kolmelta esiopettajalta, mutta näiden pohjalta materiaalin tuli vain yksi pieni tarkennus. Tämän version tehtävien toimivuutta testasin itse esiopetusryhmässä. Osaa tehtävistä kokeiltiin myös toisessa esiopetusryhmässä ryhmän omien esiopettajien toimesta. Näiden kokeilujen aikana keräsin aineiston tutkimustani varten oman tutkimuspäiväkirjan, videomateriaalin, esiopettajien havaintojen sekä esioppilaiden kyselylomakkeiden sekä suullisten ja ns. peukaloarviointien pohjalta. Ensimmäinen sykli päättyi aineistonkeruuseen.

4.2.1 Ongelma-analyysi

Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin luominen pohjautuu omaan kokemukseeni matematiikkakasvatuksen vähäisyydestä varhaiskasvatuksen opettajien koulutuksessa. Olen saanut koulutukseni Tampereen yliopistossa ja myös muiden varhaiskasvatuksen opettajaksi pätevöittävien yliopistokoulutusten opetussuunnitelmia tarkastellessani havaitsin, että tutkintoon kuuluvaa pakollista matematiikkakasvatusta on koulutuksissa enintään viiden opintopisteen verran. Lisäksi varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa työskentelee myös

lastentarhanopettajaopiston tai ammattikorkeakoulussa sosionomikoulutuksen saaneita varhaiskasvatuksen opettajia ja esiopettajia.

Matematiikkakasvatus on varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa tuokioiden lisäksi osa jokapäiväistä arkea, mikä oman kokemukseni mukaan myös huomioidaan päiväkodeissa ja esiopetuksessa pääsääntöisesti hyvin. Arjessa kiinnitetään huomiota esimerkiksi esineiden ja asioiden luokitteluun ja vertailuun, rakennellaan, lasketaan ja harjoitellaan numerosymbolin ja lukumäärään vastaavuutta. Syvempi ymmärrys lukukäsitteen oppimisesta ennen kouluikää oli kuitenkin oman koulutukseni jälkeen vielä varsin vähäistä – matematiikkakuvasta ja sen merkityksestä puhumattakaan. Lisäksi aiemmassa työssäni tekemäni havainnot myös muiden toteuttamasta matematiikkakasvatuksesta sekä keskustelut kollegoideni kanssa tukivat omaa kokemustani siitä, että syvempi ymmärrys alle kouluikäisten matematiikkakasvatuksesta on puutteellista sekä työntekijän oman kiinnostuneisuuden ja lisäkoulutusten varassa. Tarve tiedon syventämiseen tukimateriaalin avulla on siis varmasti todellinen, kuten sen Pernaan (2013) mukaan Design-tutkimuksessa kuuluukin olla.

Ongelma-analyysin pohjana oli siis empiirinen kokemus tarpeesta tukea varhaiskasvatuksen opettajien ja esiopettajien ymmärrystä matematiikkakuvan synnystä ja merkityksestä sekä lukukäsitteen oppimisesta, ja luoda valmis tehtäväpaketti näiden taitojen opettamisen tueksi. Design-tutkimuksen ongelma-analyysi voi olla empiirinen, teoreettinen tai näiden yhdistelmä (Perna, 2013). Tässä tutkimuksessa teoreettisen pohjan materiaalin luomiseen loivat Hannulan ja Holmin (2018) teoria matematiikkakuvan muodostumisesta ja Joutsenlahden ja Kuljun (2010) sekä Joutsenlahden ja Rättyän (2015) luoma matemaattisen kielentämisen neljän kielen malli. Lisäksi käytin Fusonin (1991) teoriaa lukukäsitteen oppimisesta ennen kouluikää. Empirian ja teorian pohjalta loin siis ensimmäisen version Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalista.

4.2.2 Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin ensimmäinen versio

Lapsen matematiikkakuva eli hänen käsityksensä itsestään matematiikan osaajana ja oppijana sekä käsitys matematiikasta oppiaineena ylipäätään

vaikuttaa hänen suoriutumiseensa matemaattisissa tehtävissä. Tutkimusten mukaan matematiikkakuva voi vaikuttaa hyvin pitkäkantoisesti lapsen tulevaisuuden opintoihin ja jopa ammatinvalintaan asti (Hannula & Holm, 2018; Pietilä, 2002). Tämän vuoksi valitsin positiivisen matematiikkakuvan materiaalin kantavaksi teemaksi.

Multimodaalisuus eli luonnollisen kielen, kuviokielen, symbolikielen ja taktiilisen toiminnan kielen limittäinen ja yhtäaikainen käyttö on oleellinen ja hyvin luonteva osa esiopetuksen matematiikkakasvatusta, joten valitsin sen materiaalin toiseksi teemaksi. Kokemukseni mukaan näitä eri kieliä käytetään matematiikkakasvatuksessa usein myös niiden merkitystä ajattelematta ja tiedostamatta, joten myös siksi koin tietoisuuden lisäämisen tärkeäksi. Lisäksi kannustan materiaalissa hyödyntämään tehtävissä lasten mielenkiinnonkohteita, kuten myös Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet (Opetushallitus, 2014) velvoittaa.

Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin tehtävien teemaksi valikoitui lukukäsitteen ymmärtämisen harjoittelu, koska se on tärkeä osa alle kouluikäisten matematiikkakasvatusta. Oman kokemukseni mukaan se on myös alle kouluikäisten matematiikkakasvatuksen osa-alue, johon varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen ammattilaiset tarvitsevat lisää ymmärrystä ja osaamista. Tutkimuksessani en kuitenkaan mittaa lukukäsitteen ymmärtämisen oppimista, vaan aineistoni liittyy tutkimuskysymyksiini mukaisesti matematiikkakuvan muodostumiseen ja neljän kielen mallin toteutumiseen tehtävissä. Varsinaisia tehtäviä materiaalissa on viisi: lukujonotaidot, lukumäärän nopean tunnistamisen harjoitukset, hajotelmat, laskutarinat sekä sanalliset tehtävät.

Lukujonotaidot

Lukujonotaitotehtävää varten tein rivitalopohjan sekä irrallisia numerokortteja (kts. Kuvio 3). Rivitalon ja numerokorttien voidaan harjoitella lukujonotaitoja luvusta 1 eteenpäin (1–10) ja luvusta 10 taaksepäin (10–1); annetusta luvusta eteenpäin, annetusta luvusta taaksepäin, annetusta luvusta annetun verran eteenpäin, annetusta luvusta annetun verran taaksepäin sekä annetusta luvusta eteen- ja taaksepäin annetuilla hyppäyksillä.



KUVIO 3. Rivitalopohja ja numerokortit lukujonotaitojen harjoitteluun

Lukumäärän nopean tunnistamisen harjoituksia

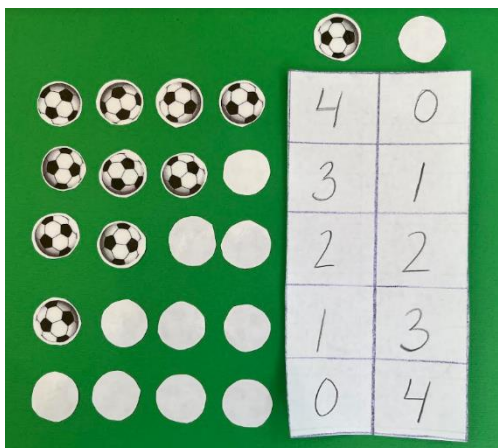
Lukumäärän nopeaa tunnistamista (subitisaatio) harjoitellaan lukumääräkorttien avulla. Olen tehnyt valmiiksi kortteja, joissa on eri lukumääriä ympyröitä. Osassa lukumäärä on helpommin tunnistettavissa (nopan silmäluvut) ja osassa ympyrät ovat satunnaisessa muodostelmassa. Lukumäärien nopea tunnistaminen onnistuu pääsääntöisesti vain pienillä lukumäärillä (1–4), mutta osaan korteista olen laittanut suurempia lukumääriä niin, että niissä on käytetty kahta eri väriä. Esimerkiksi kaksi vihreää ympyrää ja kolme keltaista ympyrää auttavat hahmottamaan korteista lukumäärät kaksi ja kolme. Samalla on mahdollista harjoitella, että luku viisi koostuu esimerkiksi luvuista kaksi ja kolme.

Lukumääräkortteja käytetään niin, että aikuinen näyttää lapsille nopeasti kortin. Lasten tehtävänä on seurata tarkasti korttia ja yrittää nopeasti hahmottaa, mikä lukumäärä kortissa on. Tämän jälkeen lasten tehtävänä on hyppiä tai tehdä jotain muuta sovittua liikettä kortissa olleen lukumäärän verran.

Hajotelmat

Hajotelmatehtävien tarkoituksena on harjoitella lukumäärien rakentamista eri tavoin. Ensimmäisessä tehtävässä tarvitaan kartongista tehtyjä pieniä kuvakortteja, joiden toinen puoli on yksivärinen ja toisella puolella on jokin lapsille mielekäs kuva tai vaihtoehtoisesti esimerkiksi linkkikuutioita kahta eri väriä. Tarkoituksena on yksivärisiä ja kuvallisia kortteja tai eri värisiä linkkikuutioita apuna käyttäen harjoitella, kuinka monella eri tavalla jokin lukumäärä voidaan

rakentaa. Jos käytössä on valmis pohja, johon voidaan kirjoittaa myös numerosymbolit, tehdään niin (kts. Kuvio 4). Jos taas hajotelmia tehdään esimerkiksi pöydän päällä, voidaan käyttää myös valmiita numerosymbolikortteja lukumäärien merkitsemiseen. Tehtäviä tehdään yksin tai pareittain.



KUVIO 4. Hajotelmatehtävä kaksipuoleisilla kuvakorteilla

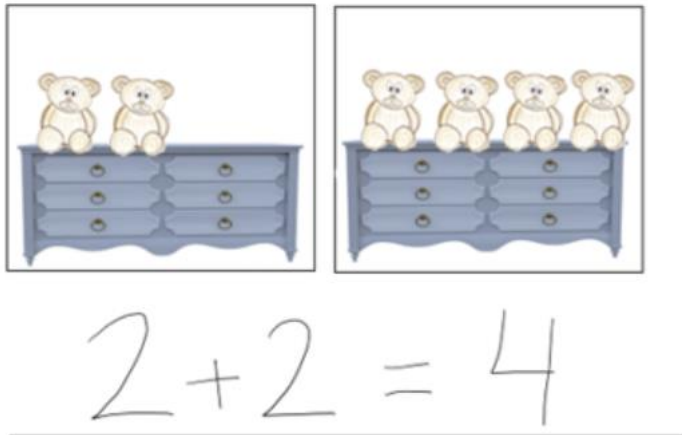
Toinen hajotelmatehtävä on nimeltään timanttirosvo. Timanttirosvoa pelataan pareittain tai kolmen hengen ryhmissä. Ensin pelaajille annetaan sovittu määrä muovitimanteja. Yksi pelaajista peittää osan timanteista pahvimukista askarrellun rosvon alle muiden pelaajien pitäessä silmiä kiinni. Kun osa timanteista on piilotettu, muut pelaajat avaavat silmänsä. Heidän tehtävänä on päätellä/laskea näkyvillä olevien timanttien määrän perusteella, kuinka monta timanttia rosvo on varastanut.

Laskutarinat

On tärkeää, että esiopetusikäiset lapset saavat kokemuksia lukumäärän muutoksista piirtämällä (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Tämän vuoksi valitsin materiaaliini myös laskutarinoiden tekemisen. Lisäksi laskutarinoita tehdessä luonnollinen kieli, symbolikieli sekä kuviokieli limittyvät varsin sujuvalla tavalla.

Tehtävän tarkoituksena on, että lapset saavat harjoitella laskutarinoiden keksimistä ensin valmiista kuvista. Aikuinen voi ensin kertoa esimerkkitarinan. Esimerkiksi: ”Lipaston päällä on kaksi nallea. Lelukauppias purkaa kuormaa ja tuo myyntiin kaksi nallea lisää, joten nyt yhteensä neljä nallea on myynnissä.”

Lopuksi kirjoitetaan lasku vielä symbolikielellä. Harjoituksessa käytetään mallina valmista kuvaa (Kuvio 5).



KUVIO 5. Malli laskutarinasta

Harjoittelun jälkeen lapset keksivät ja piirtävät omia tarinoita tyhjiin pohjiin. Tehtävää on mahdollista varioida myös niin, että annetaan lasku tai jokin laskun luvuista valmiiksi. Tällöin lapset keksivät laskun loppuun sekä kertovat ja piirtävät tarinan. Jos piirtäminen tuntuu lapsesta haastavalta, voi tarinoita tehdä valmiilla esineillä tai kuvilla ja valokuvata, jos ne halutaan saada talteen.

Sanalliset tehtävät

Sanallisissa tehtävissä opettajan tehtävänä on kertoa yksinkertaisia sanallisia tehtäviä, joita lapset ratkaisevat linkkikuutioiden/muiden esineiden avulla tai piirtämällä. Tarkoitus on käyttää tyhjää pohjaa, jossa on ennen- ja jälkeen-ruudut tai tyhjää kymmenruudukkoa. Tehtävän jälkeen myös kirjoitetaan lasku näkyviin matemaattisilla symboleilla. Kun tehtävä on tullut tutuksi, voivat lapset keksiä itse toisilleen erilaisia tehtäviä.

Tehtävien lisäksi materiaalissa on jokaiseen teemaan liittyen lyhyt teoriaosuus sekä aiheeseen liittyvä muistilista. Teoriaosuus on tarkoituksella varsin lyhyt, koska kokemuksesta tiedän, että kiireisen työarjen keskellä pitkien teoriaosuuksien lukemiselle jää harvoin aikaa. Materiaalissa on kuitenkin jokaiseen teemaan liittyen Lue lisää -kohta, johon olen listannut lähdekirjallisuutta.

Ennen materiaalin ensimmäisen version testaamista pyysin asiantuntijapalautteen kolmelta esiopettajalta. Yksi esiopettajista muistutti, että esiopetuksen matematiikkaan kuuluu muutakin kuin lukukäsitteen oppiminen, joten tarkensin materiaaliin tämän olevan vain yksi, mutta varsin tärkeä osa-alue esiopetuksen matematiikassa. Lisäksi kaksi esiopettajaa arveli, että sanallisissa tehtävissä käytettävä valmis pohja ennen- ja jälkeen-ruutuineen saattaa olla esioppilaille vielä liian vaikea, mutta sitä kannattaa kuitenkin kokeilla. Design-tutkimuksen syklisen luonteen vuoksi olikin kannattavaa jättää myös tämä tehtävän osa materiaaliin ja kokeilla sen toimivuutta, sillä se olisi mahdollista poistaa materiaalista, mikäli se osoittautuisi toimimattomaksi tavaksi tehdä tätä tehtävää.

4.2.3 Aineistonkeruu

Keräsin aineiston eräässä esiopetusryhmässä niin, että pidin ryhmän lapsille neljänä päivänä matematiikatuokiota, joissa teetin lapsilla Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin tehtäviä. Esiopetusryhmän 21 lasta oli jaettu kahdeksi ryhmäksi, ja pidin saman päivän aikana samansisältöiset tuokiot molemmille ryhmille erikseen. Tuokioiden aikana pystyin kirjoittamaan omia havaintoja vain hyvin nopeasti ja lyhyesti, minkä takia oli tärkeää, että olin valmistautunut havainnointiin hyvin etukäteen, kuten (Aarnos, 2015) kehottaa tekemään. Huolellinen valmistautuminen auttaa kiinnittämään huomiota tutkimuksen kannalta olennaisiin seikkoihin (Aarnos, 2015; Grönfors, 2015).

Tuokioiden aikana havainnoin siis matematiikkakuvan syntyyn liittyen lasten tunnereaktioita, mahdollisia uskomuksia omasta osaamisesta tai matematiikasta ylipäättään sekä motivoitumista ja keskittymistä tehtävien tekoon. Lisäksi kysyin lapsilta kommentteja tehtävistä. Kirjoitin havainnot mahdollisimman tarkasti ylös tutkimuspäiväkirjaan heti jokaisen tuokion jälkeen, sillä kaikkia havaintoja en ehtinyt kirjoittaa tuokioita pitäessä ylös. Havaintojen kirjoittaminen ylös vasta tutkimustilanteen jälkeen on perusteltua myös siksi, että jatkuva kirjaaminen tutkimustilanteessa saattaisi siirtää lasten huomion pois omista tehtävistään tai toisaalta johtaa siihen, että kirjaamisen aikana jotain olennaista jäisi huomaamatta (Grönfors, 2015). Myös ryhmän omat esiopettajat havainnoivat lapsia ja kirjasivat havaintojaan ylös. Lisäksi yhteen pöytään oli asetettu kamera

tallentamaan kyseisen pöydän ääressä tehtäviä tekevän parin tai kolmikön työskentelyä. Kamera oli asetettu niin, että lasten kasvot eivät näkyneet. Tavoitteena oli saada tallennettua lasten keskinäistä keskustelua tehtävien teon aikana. Lisäksi kuvasin jokaisen halukkaan lapsen matematiikkatarinan niin, että kuvassa näkyi lapsen piirtämä kuva ja hänen kertomansa matematiikkatarina kuului taustalla.

Havaintojen, videomateriaalin ja suullisen palautteen lisäksi keräsin lapsilta kirjallista palautetta lomakkeella. Vastausten tarkoituksena oli selvittää, millaiselta tehtävien tekeminen tuntui, kuinka vastaaja omasta mielestään osasi tehtävän ja oppiko hän jotain uutta. Täytimme lomakkeet matematiikkuokien jälkeen ohjatusti niin, että luin jokaisen kysymyksen erikseen ja lapset vastasivat aina yhteen kysymykseen kerrallaan. Lapset rastittivat lomakkeen viisiportaisen Likert-asteikon mukaisesta hymynaamariviestistä mielipiteensä mukaisen vaihtoehdon. Lomakekyselyt osoittautuivat jossain määrin ongelmallisiksi, mutta käsittelen tätä asiaa tarkemmin Eettisyys ja luotettavuus -kappaleessa. Lomakkeiden ongelmallisuuden vuoksi pyysin lapsilta kahdella viimeisellä matematiikkuokilla palautetta lapsille tutulla peukaloarvioinnilla, jossa lapset vastasivat kysymykseeni näyttämällä peukaloa ylöspäin, sivulle tai alaspäin. Tällä tavoin pystyin myös heti kysymään lapsilta tarkennuksia heidän mielipiteisiinsä. Koin nämä tarkentavat kysymykset tutkimukseni kannalta hedelmällisiksi.

Oman aineistonkeruuni lisäksi muutamia Matikkaeväitä koulupolulle - materiaalin tehtäviä kokeiltiin myös toisessa esiopetusryhmässä ryhmän omien esiopettajien toimesta. He keräsivät myös ryhmänsä lapsilta lomakepalautteet tehtävistä ja kirjasivat ylös omia havaintojaan. Lisäksi kävimme lyhyen palaute- ja koontikeskustelun ryhmän toisen esiopettajan kanssa.

4.2.4 Matematiikkuokiot

Ensimmäinen tuokio

Ensimmäisen matematiikkuokion aluksi kokoonnuimme piiriin ja kerroin lapsille, kuka olen ja miksi olen pitämässä heille matematiikkuokioita. Kerroin myös, että tarvitsen tehtävien kokeiluun heidän apuaan, koska he ovat esiopetuksen

parhaita asiantuntijoita ja painotin, että jokainen mielipide on minulle tärkeä. Tällä tavoin pyrin myös motivoimaan lapsia tuokioille osallistumiseen.

Ensimmäiseksi kokeilimme lukumäärän nopean tunnistamisen tehtävää, jossa pikalukukorttien tarkoituksena on harjoittaa lukumäärien nopeaa tunnistamista sekä huomion kiinnittämistä lukumääriin. Kokeilin pikalukukortteja lasten kanssa aluksi niin, että kehotin heitä ensin olemaan tarkkana ja pitämään katseen tiukasti kortissa, jonka toisella puolella oli jokin lukumäärä. Seuraavaksi käänsin kortin lukumääräpuolen hetkeksi näkyville ja lasten tehtävänä oli hypätä niin monta kertaa kuin kortissa oleva lukumäärä osoitti. Muutaman kierroksen jälkeen lapset saivat itse keksiä lukumäärän mukaan tehtäviä liikkeitä.

Toisena tehtävänä ensimmäisellä matematiikatuokiolla oli lukujonotaitojen harjoittelu. Lapset työskentelivät pareittain sekä parittoman määrän vuoksi yhdessä kolmen ryhmässä. Molemmista ryhmistä yhden parin työskentely tallennettiin videolle. Jaoin jokaiselle parille tekemäni rivitalopohjan sekä numerokortit. Paperisessa rivitalossa oli 10 asuntoa, joista jokaisen kohdalla oli tyhjä paikka numerokorttia varten. Ensimmäisenä lasten tehtävänä oli laittaa numerokortit talopohjaan oikeaan järjestykseen yhdestä kymmeneen ja tämän jälkeen kymmenestä yhteen. Seuraavana tehtävä oli työskennellä pareittain niin, että toinen parista laittoi silmät kiinni ja toinen otti sillä välin yhden numerokortin valmiista lukujonosta (1–10) pois. Tämän jälkeen silmiä kiinni pitänyt lapsi avasi silmänsä ja kertoi, mikä luku numerojonosta puuttuu. Seuraavaksi tehtävää muutettiin niin, että toinen lapsista laittoi lukujonoon paikalleen vain yhden numerokortin ja toisen lapsen tehtävänä oli laittaa ”naapurit” paikoilleen. Tehtävässä harjoiteltiin siis sitä, paljonko on annetusta luvusta yksi enemmän ja yksi vähemmän. Tämän jälkeen toinen parista laittoi taas yhden numerokortin lukujonoon oikealle paikalle, ja toisen tehtävänä oli jatkaa lukujonoa tästä luvusta ensin eteenpäin ja seuraavassa tehtävässä taaksepäin. Viimeisenä lapset laittoivat sormen antamani luvun kohdalle ja siirsivät sitä sitten antamani ohjeen mukaan tietyn verran eteen- tai taaksepäin.

Tehtävien jälkeen jaoin jokaiselle lapselle oman arviointilomakkeen ensin nopean tunnistamisen tehtävään ja sitten lukujonotehtävään liittyen. Lapset täyttivät yhden lomakkeen kerrallaan niin, että minä luin kysymyksen ja lapset vastasivat rastittamalla mielipidettään vastaavan hymiön. Pidit

kokonaisuudessaan samanlaiset tuokiot kaksi kertaa niin, että toisella tuokiolla osallistui 10 ja toiselle 11 lasta.

Toinen tuokio

Aloitimme myös toisen tuokion kokoontumalla piiriin, jossa kerroin lapsille, mitä tulemme sillä kerralla tekemään. Lisäksi kerroin, että aion askarrella seuraavan viikon tehtäviä varten matikkakortteja, joita varten minun pitäisi tietää, mistä eläimistä, hahmoista, peleistä, urheilulajeista, joukkueista tai mistä tahansa muista asioista he erityisesti pitävät. Lapset kertoivat omista suosikeistaan, joista valitsin kortteihin suosituimmat kiinnostuksen kohteet, joita olivat puput, Harry Potter, jalkapallo, Among Us, Ilves ja Tappara.

Piirin jälkeen siirryimme pöytien ääreen ja matematiikkatarinoiden pariin. Näytin ensin dokumenttikameran avulla tekemiäni ennen-jälkeen-kuvia. Ensimmäisessä esimerkissä ennen-kuvaan oli piirretty kaapin päälle istumaan kaksi nallea ja jälkeen-kuvaan neljä nallea. Kerroin, että lelukauppialla on ollut myynnissä kaksi nallea. Sitten lelukauppias on purkanut lelukuorman ja tuonut myyntiin vielä kaksi nallea lisää, joten nyt nalleja on myynnissä yhteensä neljä. Kysyin lapsilta, millaisen laskun kuvasta voisi tehdä ja kirjoitin laskun kuvan alle. Tämän jälkeen kävimme yhdessä läpi vielä kolme kuvaa, joissa yhdestä lukumäärä kasvoi ja kahdessa väheni. Lapset keksivät kuviin tarinat ja kertoivat laskut, jotka minä kirjoitin kuvien alle.

Tämän jälkeen jaoin lapsille tyhjät ennen-jälkeen-pohjat ja ohjeistin heitä tekemään omat matematiikkatarinat. Kannustin lapsia keksimään omia tarinoita juuri niistä aiheista, jotka heitä eniten kiinnostavat. Kiertelin katsomassa tehtävien sujumista ja autoin apua tarvitsevia. Jos piirtäminen tuntui vaikealta, vinkkasin tekemään tarinan jostain helposti piirrettävästä asiasta. Kaikki lapset saivat vähintään yhden tarinan tehtyä, ja muutamat ehtivät tehdä kaksi tai kolme tarinaa.

Kun kaikki olivat saaneet vähintään yhden tarinan tehtyä, kaikki halukkaat lapset saivat tulla esittelemään oman piirustuksensa ja laskunsa dokumenttikameran avulla. Samalla he kertoivat muille oman laskutarinansa. Tallensin tarinat videolle niin, että kamera kuvasi lapsen tehtäväpaperia ja hänen äänensä kuului taustalla. Kahta lukuun ottamatta kaikki halusivat tulla esittelemään oman tarinansa.

Tehtävien teon aikana kiertelin ohjaamassa ja havainnoimassa lapsia ja esittelyiden jälkeen keräsin vielä lapsilta lomakepalautteen samalla tapaa kuin ensimmäiselläkin kerralla. Myös tällä toisella kerralla esiopetusryhmä oli jaettu kahdeksi ryhmäksi, ja pidin samansisältöiset tuokiot molemmille ryhmille. Lopuksi lapset täyttivät ohjatusti kyselylomakkeet, kuten aiemminkin tuokioilla.

Kolmas tuokio

Kolmannen tuokion aluksi kokoontuimme piiriin, kuten aiemminkin tuokioilla. Esittelin lapsille hajotelmien harjoitteluun tarkoitetut kortit, jotka olin tehnyt juuri tämän ryhmän lasten mielenkiinnonkohteiden perusteella. Korteissa oli toisella puolella jokin kuva (Harry Potter, pupu, Ilves, Tappara, jalkapallo tai Among Us - hahmo) ja toinen puoli oli yksivärinen. Lapset kertoivat, että he olivat tehneet hajotelmia aiemmin hajotelmakoneen avulla, joten asia oli heille jo vähän tuttu.

Harjoittelimme tehtävää ensin yhdessä luvuilla kolme ja neljä. Laitoin ensin näkyviin kolme korttia kuvapuoli ylöspäin ja niiden viereen valmiina numerokorttina luvun kolme. Tämän jälkeen laitoin kuvakorttien alapuolelle kaksi korttia kuvapuoli ylöspäin ja yhden kortin yksivärinen puoli ylöspäin. Lisäsin myös kuvakorttien viereen numerokortin kaksi ja yksivärisen kortin viereen numerokortin yksi. Loput hajotelmat sekä luvun neljä hajotelmat teimme vastaavalla tavalla niin, että halukkaat lapset pääsivät vuorotellen tekemään hajotelmia.

Yhteisten esimerkkien jälkeen jaoin lapset pareihin sekä yhteen kolmen hengen ryhmään heidän toiveidensa mukaan niin, että jokainen sai tehdä tehtävää haluamallaan korteilla. Ohjeistin lapsia aloittamaan luvusta viisi ja jatkamaan hajotelmien tekoa siitä järjestyksessä eteenpäin. Kun pari oli saanut yhden luvun hajotelmat tehtyä, he tulivat luokseni, nostivat minulla olleesta liikuntakorttipakasta kaksi tehtäväkorttia ja suorittivat pienen taukojumpan tehtäväkorttien mukaisesti. Tämän jälkeen he siirtyivät seuraavan luvun hajotelmien pariin. Lopuksi kokeilimme vielä timanttiryöstö-peliä, jossa jaoin jokaiselle parille tietyn määrän akryylitimantteja sekä yhden pahvimukista askarrellun timanttirosvon.

Kiertelin tehtävien teon aikana auttamassa ja havainnoimassa työskentelyä. Lisäksi molemmissa ryhmissä yhden parin työskentely tallennettiin

videokameralle niin, etteivät lasten kasvot näkyneet videolla. Tällä kertaa lapset antoivat palautteen kolmeportaisena peukaloarviointina. Kysymykset olivat samoja kuin lomakkeessa, mutta vastausvaihtoehtoina oli peukalo ylös, sivulle tai alas. Kirjasin vastaukset ylös.

Neljäs tuokio

Neljännellä tuokiolla esioppilaat oli jaettu neljään eri ryhmään. Kahdessa ryhmässä oli lapsia, jotka ryhmän esiopettajien näkemyksen mukaan kaipasivat matematiikkakasvatuksessa jo vähän enemmän haastetta. Kahdessa muussa ryhmässä taas lasten matemaattiset taidot olivat suunnilleen ikätasoisia tai sen alle. Suunnittelin ryhmille sanallisia tehtäviä niin, että enemmän haastetta kaipaavilla tehtävien lukumäärät ylittivät jo kymmenen, kun taas muilla lukualueena oli 1–10. Olin huomionnut tehtävissä juuri näiden lasten mielenkiinnon kohteet, joten tehtävissä seikkaili esimerkiksi eläimiä, Harry Potter ja suosikkijoukkueiden pelaajia.

Tuokion aluksi jokainen esioppilas sai tyhjän kymmenruudukon sekä tarvittavan määrän linkkikuutioita. Kerroin oppilaille sanallisen tehtävän, ja heidän tehtävänä oli laittaa oikea määrä linkkikuutioita ruudukkoon. Esimerkiksi yhdessä tehtävässä kerroin, että koira on piilottanut tyynyn alle kolme luuta. Tässä vaiheessa esioppilaiden tehtävänä oli laittaa kymmenruudukkoon kolme linkkikuutiota. Sitten jatkoin: ”Äiti ei tiedä piilosta ja tuo kaupasta vielä kolme luuta lisää. Kuinka monta luuta koiralla nyt on?” Esioppilaiden tehtävänä oli lisätä kymmenruudukkoon kolme linkkikuutiota. Tehtävää kertoessani kirjoitin myös älytaululle luvut 3 ja 3 niin, että jätin väliin tilaa plus- ja miinusmerkeille. Lopuksi kysyin, minkä esioppilaat saivat vastaukseksi ja kirjoitin vastauksen myös älytaululle. Lopuksi mietimme, onko kyseessä yhteen- vai vähennyslasku ja yksi esioppilas sai tulla kirjoittamaan oikeat symbolit tauluun. Enemmän haastetta kaipaavien ryhmissä kymmenruudukoita oli jokaisella esioppilaalla kaksi, ja tehtävien vastaukset ylittivät kymmenen.

Valmiiksi keksimieni tehtävien jälkeen halukkaat esioppilaat saivat itse keksiä sanallisia tehtäviä muille ryhmän jäsenille. Tehtävän keksinyt esioppilas sai myös toimia apuopettajana jakamalla puheenvuoroja sekä seuraamalla, että

tehtävä lasketaan oikein. Lopuksi arviointi suoritettiin peukaloarviointina, kuten edelliselläkin kerralla.

4.3 Toinen sykli

Toinen sykli alkoi esiopetusryhmästä keräämäni aineiston analyysillä. Valmiin analyysin pohjalta muokkasin materiaalin ensimmäistä versiota. Pro gradu -tutkielmissa on yleensä tapana toteuttaa kaksi sykliä (Pernaa, 2013), joten tämäkin tutkimus päättyi tähän toiseen sykliin.

4.3.1 Aineiston analyysi

Sisällönanalyysi on yleisin laadullisen tutkimuksen analyysimenetelmä (Elo ym., 2022). Sen pyrkimyksenä on kuvata dokumenttien sisältöä sanallisesti ja sen perustana toimii looginen päättely ja tulkinta (Sarajärvi & Tuomi, 2018). Käytin aineistoni analyysissa sisällönanalyysia, jota voidaan toteuttaa joko aineistolähtöisesti (induktiivisesti) tai teorialähtöisesti (deduktiivisesti) (Elo ym., 2022). Teorialähtöinen sisällönanalyysi sopii lähestymistavaksi erityisesti silloin, kun analyysi perustuu ennalta määriteltyihin teoreettisiin käsitteisiin ja rakenteisiin, joiden avulla tutkija tulkitsee ja jäsentää aineistoa (Eskola, 2018). Tutkimukseni teoreettisina viitekehyksinä ovat Hannulan ja Holmin (2018) teoria matematiikkakuvan muodostumisesta sekä Joutsenlahden ja Kuljun (2010) ja Joutsenlahden ja Rättyän (2015) neljän kielen malli matemaattisen ajattelun kielentämisestä. Näin ollen teorialähtöinen sisällönanalyysi oli tutkimuksessani selkeä valinta.

Teorialähtöistä sisällönanalyysia käytettäessä valmisteluvaihe alkaa tarvittaessa litteroinnilla sekä analyysirungon tekemisellä (Elo ym., 2022). Tein sisällönanalyysia varten kaksi analyysirunkoa, koska tutkimuskysymyksinä oli kaksi toisistaan erillistä kysymystä. Toisen analyysirungon yläkäsitteeksi tuli matematiikkakuva ja toisen neljän kielen malli. Matematiikkakuva-analyysirungon alakäsitteinä olivat Hannulan ja Holmin (2018) teorian mukaisesti tunteet, uskomukset ja motivaatio. Neljän kielen malli -analyysirungon kategorioiksi

muodostuivat luonnollinen kieli, kuviokieli, symbolikieli ja taktiilinen toiminnan kieli.

Toteutin sisällönanalyysin tutkimuspäiväkirjani teksteihin, esiopettajien kirjallisiin havaintoihin sekä litteroimaani videomateriaalin. Koska käytin teorialähtöistä sisällönanalyysia, ei ollut tarpeen litteroida kaikkea videomateriaalia, vaan keskityin ainoastaan analyysirungon alakäsitteiden mukaisiin asioihin. Analyysirungon avulla pystyin löytämään videomateriaalista tutkimuksen kannalta oleelliset kohdat, jotka kirjoitin auki. Analyysivaiheessa numeroin esioppilaiden kommentit (Eo1, Eo2, Eo3...).

Havaintojen ja videomateriaalien lisäksi keräsin aineistoa kahden ensimmäisen tuokion jälkeen kyselylomakkeilla (Kuvio 6) ja kahden viimeisen tuokion jälkeen peukaloarvioinnilla. Kyselylomakkeessa lapsi vastasi kolmeen kysymykseen: Millaiselta tehtävien tekeminen tuntui? Kuinka osasit omasta mielestäsi? Opitko jotain uutta? Kysymysten tarkoituksena oli tuottaa aineistoa matematiikkakuvaan liittyen, sillä sekä tunnekokemukset että kokemus omasta osaamisesta ja oppimisesta ovat tärkeitä tekijöitä matematiikkakuvan synnyssä. Lisäksi kysymykset pyrittiin muotoilemaan yksinkertaisiksi ja selkeiksi, jotta lasten olisi niihin helppo vastata.

Peukaloarvioinnissa kysyin esioppilaita kyselylomakkeen kysymykset, mutta he antoivat vastaukset kolmiportaisesti näyttämällä peukaloa ylös, sivulle tai alas. Paperikyselyihin vastattiin nimettömänä ja peukalolla näytetyt vastaukset kirjasin ylös pelkästään numeerisesti. Tutkimuksen kannalta ei ollut oleellista selvittää saman vastaajan vastauksia eri tehtäviin. Koostin kyselyiden vastaukset tehtäväkohtaisesti.

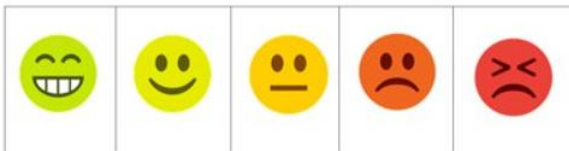
Millaiselta tehtävän tekeminen tuntui?



Kuinka osasit omasta mielestäsi?



Opitko jotain uutta?



KUVIO 6. Kyselylomake

4.3.2 Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin toinen versio

Design-tutkimukseen kuuluu tuotoksen eli tässä tutkimuksessa Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin muokkaaminen tutkimustulosten perusteella paremmin tarkoitustaan vastaavaksi. Toiseen versioon tehdyt muutokset löytyvät viimeisestä luvusta. Olen koonnut toiseen versioon tehdyt muokkaukset Taulukkoon 2.

5 TULOKSET

Esittelen tulokset tutkimuskysymysten mukaisesti niin, että ensin käsittelen sitä, miten tehtävät edistävät positiivisen matematiikkakuvan syntyä. Tämän jälkeen esittelen tulokset liittyen siihen, miten tehtävät tukevat matemaattisen ajattelun kielentämistä. Esittelen tulokset tehtävä kerrallaan.

5.1 Miten tehtävät tukevat positiivisen matematiikkakuvan syntyä?

Lukujonotehtävät

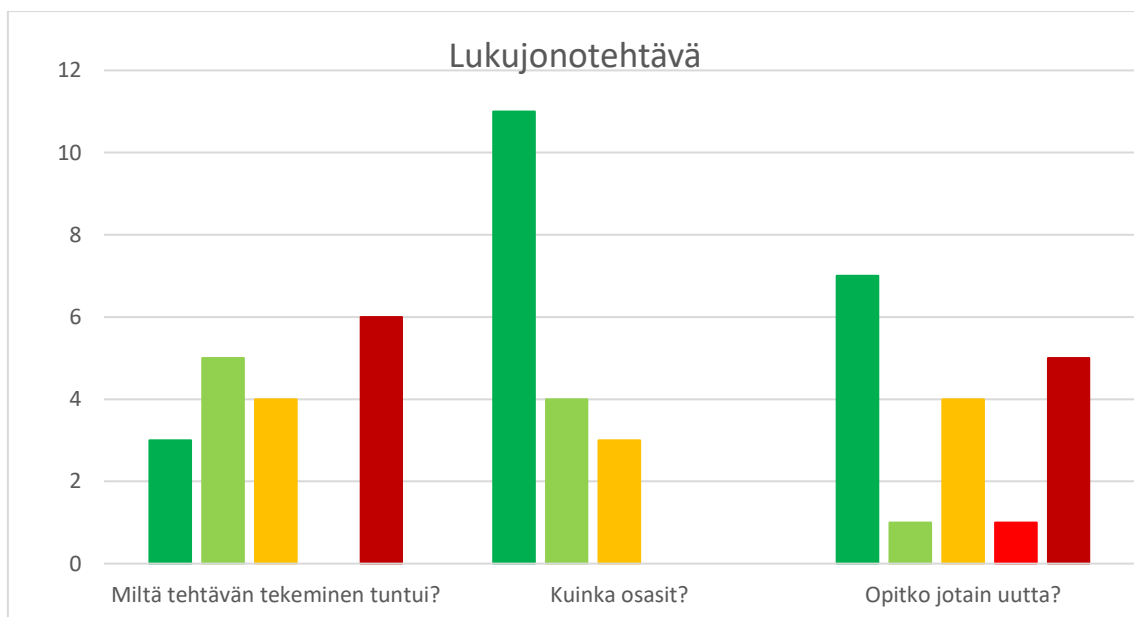
Lukujonotehtävässä käyttämäni rivitalopohja herätti heti lasten mielenkiinnon. Myös ryhmän esiopettajat tekivät saman havainnoin. Tehtävä vaikutti kuitenkin erityisesti alussa helpolta ja muutamat kyselivätkin, koska tehdään jotain vaikeampia tehtäviä. Usealla esioppilaalla keskittyminen herpaantui tehtävää tehdessä, ja muutamat totesivat tehtävän olevan tylsä. Havaintojen sekä videomateriaalin perusteella mielenkiinto kuitenkin kasvoi tehtävien vaikeutuessa. Kerroinkin esioppilaille, että näin eskarin keväänä tällainen tehtävä voi olla jo tosi helppo, mutta eskarin alussa tehtävä voisikin olla vähän haastavampi. Tähän esioppilas¹ kommentoi seuraavasti:

”Jos on päiväkodissa tehnyt ahkerasti hommia, niin sitten tämä on ehkä eskarin alussa aika helppo tehtävä. Mutta jos ei ole päiväkodissa ollut ahkera, niin tämä voi olla eskarin alussa vielä vähän vaikea. Nyt tämä oli tosi helppo!”

Tällainen ymmärrys siitä, että työnteolla voi vaikuttaa omaan oppimiseen, on omiaan tukemaan positiivisen matematiikkakuvan syntyä. Myös ajatus siitä, että on taitava ja oppinut asioita myötävaikuttaa positiivisen matematiikkakuvan syntyyn.

Tämän tehtävän kyselyyn vastasi 18 esioppilasta. Kyselystä (Kuvio 7) käy ilmi, että 33 % vastaajista arvioi tässä tehtävässä tunnekokemuksen tummemmalle punaiselle eli he valitsivat kaikkein negatiivisimman vaihtoehdon. Tummemman vihreän eli kaikkein positiivisimman vaihtoehdon valitsi vain 3

vastaajaa. Tähän voi vaikuttaa tehtävän helppouden tuoma tylsyys sekä se, että osa esioppilaista sopi keskenään, että vastaavat kyselyssä kaikki punaiselle. Toisaalta suurin osa vastaajista arvioi osanneensa tehtävän todella hyvin tai hyvin. Tässä tehtävässä uuden oppimisen arvioi vihreälle 8 vastaajaa, mikä on yllättävän paljon siihen nähden, että useimmat esioppilaat kokivat tehtävän helpoksi. Toisaalta tämä oli tuokioista ja kyselyistä ensimmäinen, joten osa esioppilaista saattoi myös ajatella, että on kohteliasta vastata vihreitä hymynaamoja.

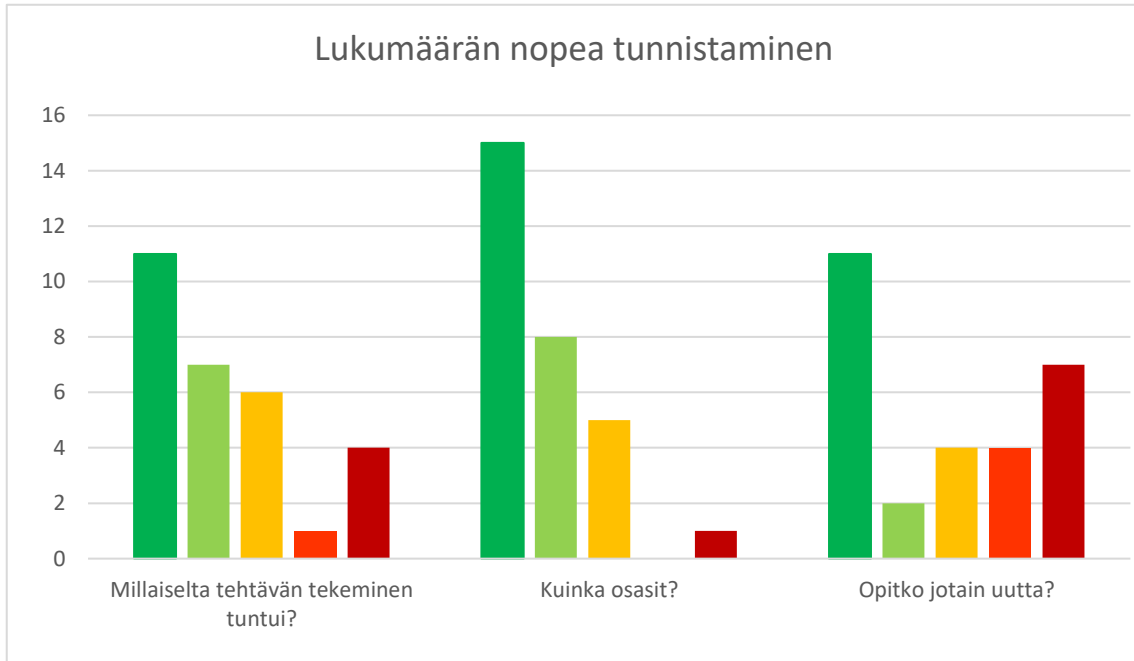


KUVIO 7. Lukujonotehtävän arviointi. (n=18)

Lukumäärän nopea tunnistaminen

Omien sekä ryhmän esiopettajan havaintojen mukaan tehtävä oli esioppilaille sekä ensimmäisellä että toisella kokeilukerralla mieleinen. Lapset suhtautuivat tehtävään pääosin silminnähdessä innostuneesti. Myös kyselyn (Kuvio 8) mukaan 66 % vastaajista (18/29 vastaajaa) oli sitä mieltä, että tehtävän tekeminen oli todella kivaa tai kivaa. Havaitsin tehtävän eduksi myös sen, että se ei selkeästi erottele lapsia taitojen mukaan, vaan kaikki pystyvät osallistumaan liikkeiden tekoon, vaikka eivät olisikaan tunnistanee oikeaa lukumäärää. Tehtävässä on myös mahdollista käyttää vaikeudeltaan eritasoisia kuvia niin, että saman tuokion aikana osa kuvista on helpompia ja osa vaikeampia. Kun tehtävää tehdään

säännöllisesti esimerkiksi matematiikkatuokioilla, piireillä tai odotusleikkinä, aikuinen pystyy havainnoimaan lapsia ja huomaamaan ne, joille lukumäärän nopea tunnistaminen on vielä haastavaa. Kun liikkeitä tehdään kuitenkin yhtä aikaa, pystyvät kaikki lapset osallistumaan tekemiseen.



KUVIO 8. Lukumäärän nopean tunnistamisen arviointi. (n=29)

Tämän esiopetusryhmän lapset olivat yksimielisiä siitä, että noppalukumäärät olivat kaikkein helpoimpia, kun taas valokuvista lukumäärien havaitseminen oli kaikkein haastavinta. Animaatiokuvat lapsille mielekkäistä hahmoista olivat kaikkien mielestä kaikkein kivoimpia kortteja, ja havaitsin itsekin, että lasten tarkkaavuus pysyi parhaiten yllä, kun he tiesivät, että ainakin osassa korteista oli esimerkiksi heidän suosikkiahmojaan. Suurin osa esioppilaista myös koki osanneensa tehtävän todella hyvin tai hyvin. Sen sijaan vain vähän alle puolet vastaajista (13/29 vastaajaa) koki, että oppi tehtävästä todella paljon tai paljon jotain uutta. 11 vastaaja arvioi, ettei tehtävä opettanut mitään tai juuri mitään uutta. Jälleen kuitenkin osa punaisista vastauksista oli muutaman esioppilaan keskenään ennalta sopimia vastauksia.

Havaitsin, että muutamia lapsia liike vei mennessään, eivätkä he aina jaksaneet keskittyä hyppäämään (tai tekemään muuta liikettä) oikeaa määrää, vaikka olisivat sen kuvasta pystyneet havaitsemaankin. Myös ryhmän oma

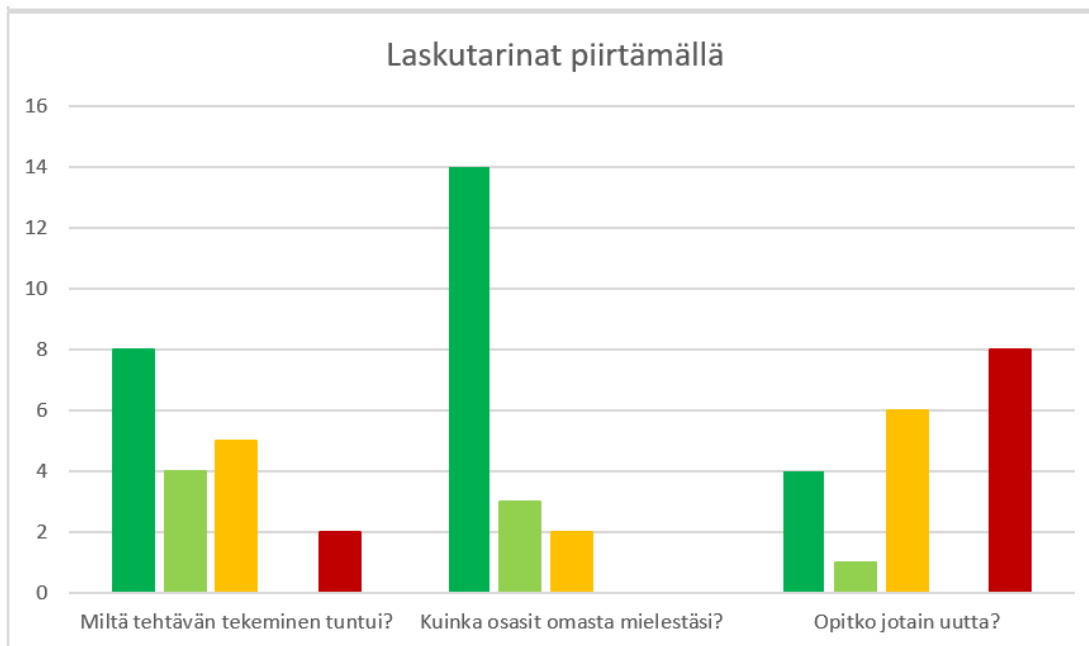
esiopettaja teki saman havainnon. Tässä ryhmässä tehtävä olisi voinut toimia paremmin niin, että ensin tehtävänä olisi ollut pelkästään lukumäärän havaitseminen ja sen kertominen suullisesti, ja vasta tämän jälkeen olisimme yhdessä tehneet liikettä kyseisen lukumäärän verran. Tämä olisi tuonut tehtävään mukaan myös luonnollisen kielen. Kokeilin tehtävää kolmannella tuokiolla näin, mutta noin puolella lapsista oli vaikeuksia muistaa uutta tehtävänantoa, ja he toimivat aiemmin oppimiensa ohjeiden mukaan.

Laskutarinat

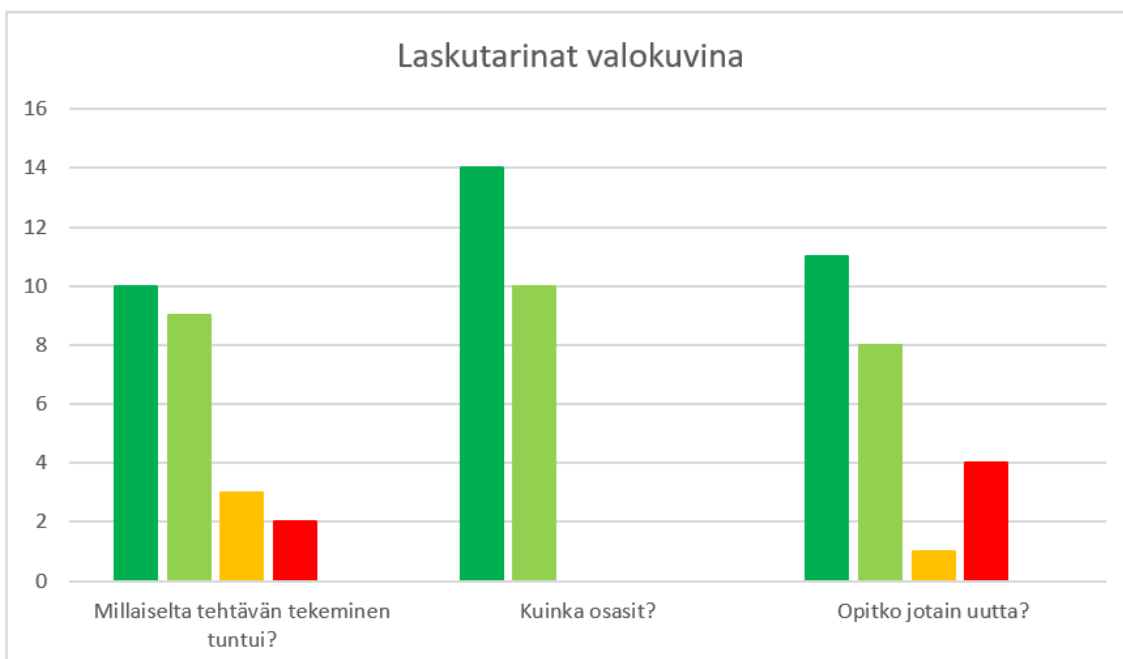
Esioppilaiden piirtäessä laskutarinoita havaitsin, että tehtävän tekemiseen kiinnittyivät parhaiten ne esioppilaat, joille piirtäminen oli mieleistä tekemistä ja joilla oli esimerkiksi jokin suosikkiahmo tai -elokuva, josta he laskutarinan tekivät. Ryhmän oman esiopettajan havaintojen mukaan kiinnittyminen tehtävään näkyi pitkäkestoisena keskittymisenä myös sellaisilla esioppilailla, joilla on tarkkaavuuden ylläpitämisen haasteita. Kahdelle esioppilaalle tehtävän aloittaminen oli hankalaa, koska heidän omien sanojensa mukaan piirtäminen on vaikeaa tai tylsää. Kannustin heitä tekemään tarinan esimerkiksi palloista niiden piirtämisen helppouden vuoksi. Kahta esioppilasta lukuun ottamatta kaikki esioppilaat halusivat mielellään esitellä ja kertoa oman laskutarinansa muulle ryhmälle.

Laskutarinoita kokeiltiin toisessa esiopetusryhmässä ryhmän oman esiopettajan ohjaamana valokuvauksen keinoin. Ryhmän esiopettajan havaintojen mukaan kaikki esioppilaat ryhtyivät mielellään tarinoiden tekoon. Piirtämisen vaikeaksi tai epämiellyttäväksi kokeville lapsille valokuvaaminen onkin positiivisen kokemuksen aikaan saamiseksi piirtämistä parempi vaihtoehto. Valokuvina tehtävän tehneistä esioppilaista noin 79 % (19/24 vastaajaa) koki tehtävän tuntuvan todella kivalta tai kivalta (Kuvio 10). Piirtämällä tehneistä vastaava osuus oli 63 % (12/19 vastaajaa, Kuvio 9). Vastauksia ei voi kuitenkaan suoraan verrata toisiinsa, sillä samat esioppilaat eivät kokeilleet molempien tehtävien tekoa. Molemmissa tehtävissä suurin osa vastaajista oli kokenut osanneensa tehtävän todella hyvin tai hyvin. Piirtämällä tehtävän tehneistä vain 6 esioppilasta (yhteensä 19 vastaajaa) koki oppineensa tehtävästä jotain uutta, kun taas valokuvaamalla tehtäviä tehneistä 19 (yhteensä 24 vastaajaa) koki

oppineensa jotain uutta. Vastaukseen voi vaikuttaa myös se, että esioppilaat kokivat valokuvaamisen uudeksi asiaksi.



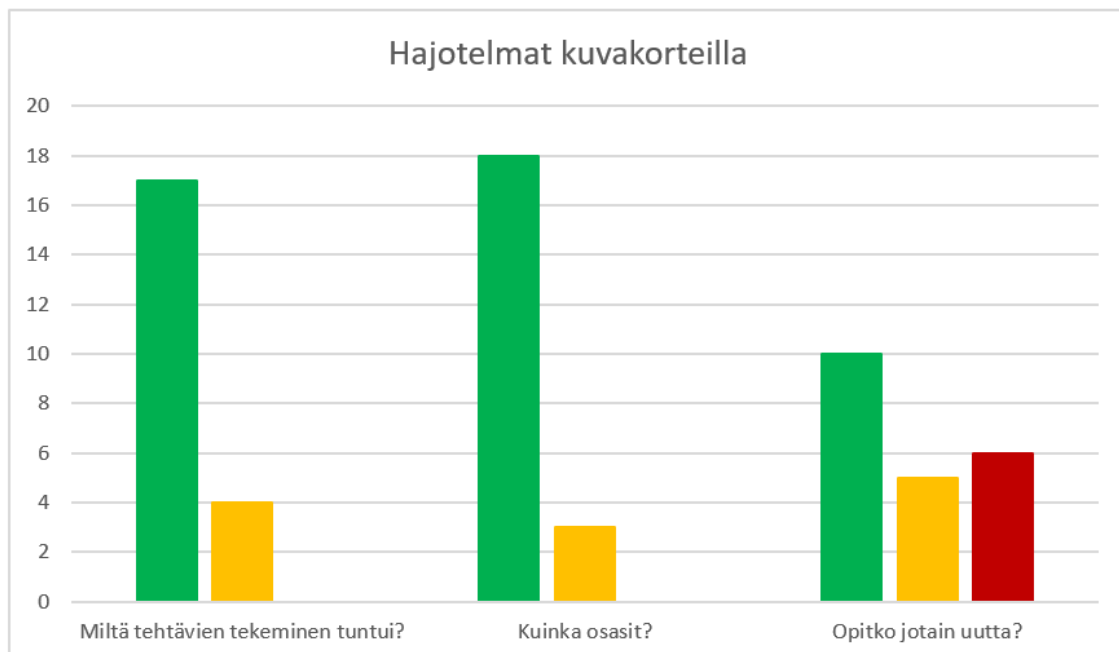
KUVIO 9. Piirtämällä tehtyjen laskutarinoiden arviointi. (n=19)



KUVIO 10. Valokuvaamalla tehtyjen laskutarinoiden arviointi. (n=24)

Hajotelmat

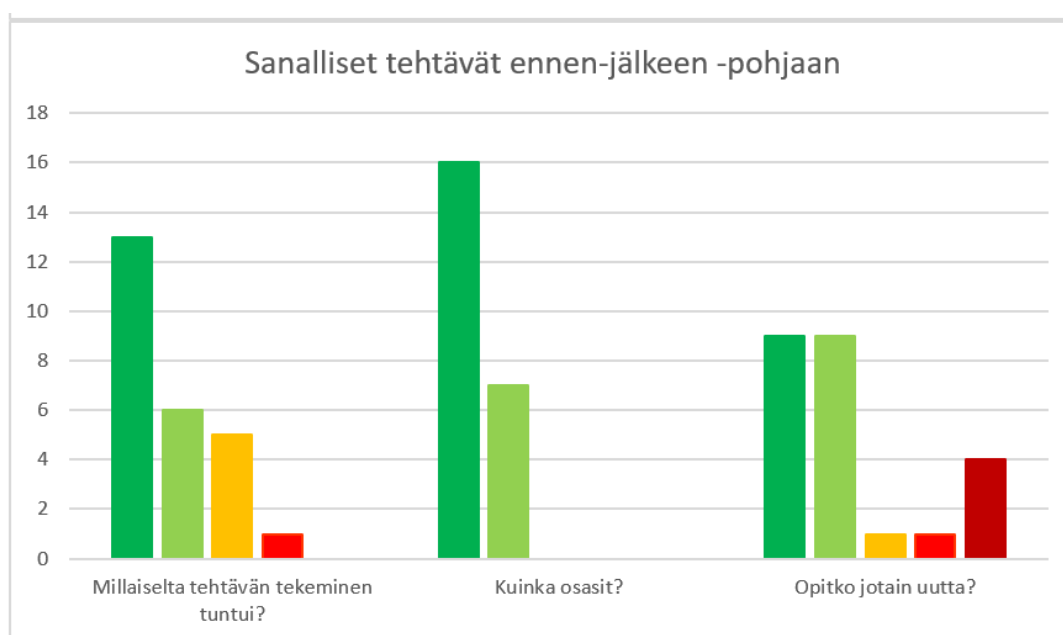
Olin kysellyt aiemmalla tuokiolla esioppilailta, mitkä asiat heitä kiinnostavat ja mitkä ovat esimerkiksi heidän suosikkijoukkueitaan tai -hahmojaan. Tämän perusteella olin tehnyt pieniä kuvakortteja, joiden toisella puolella oli jokin juuri tämän ryhmän esioppilaille mieleinen kuva ja toinen puoli oli yksivärinen. Esioppilaat olivat todella kiinnostuneita ja innostuneita kuvakorteista heti ne nähtyään. Jokaiselle parille löytyi mieleinen kuvakorttipakka tehtävää varten. Omat mielenkiinnonkohteet motivoivat siis selkeästi esioppilaita tehtävien pariin. Seuraavan kerran matematiikkatuokiolla kaksi esioppilasta myös kysyi, voisimmeko taas tehdä niillä kuvakorteilla. Havaintojen sekä videomateriaalin perusteella esioppilaat myös keskittyivät tehtävien tekoon, eivätkä alkaneet leikkiä korteilla. Noin 81 % vastaajista (17/21 vastaajaa) kokikin tehtävän tekemisen kolmiportaisella asteikolla positiiviseksi (Kuvio 11). Jälleen lähes kaikki esioppilaat (18/21 vastaajaa) koki osanneensa tehtävät hyvin, mutta vain noin puolet (10/21 vastaajaa) koki oppineensa jotain uutta.



KUVIO 11. Hajotelmatehtävän arviointi. (n=21)

Sanalliset tehtävät

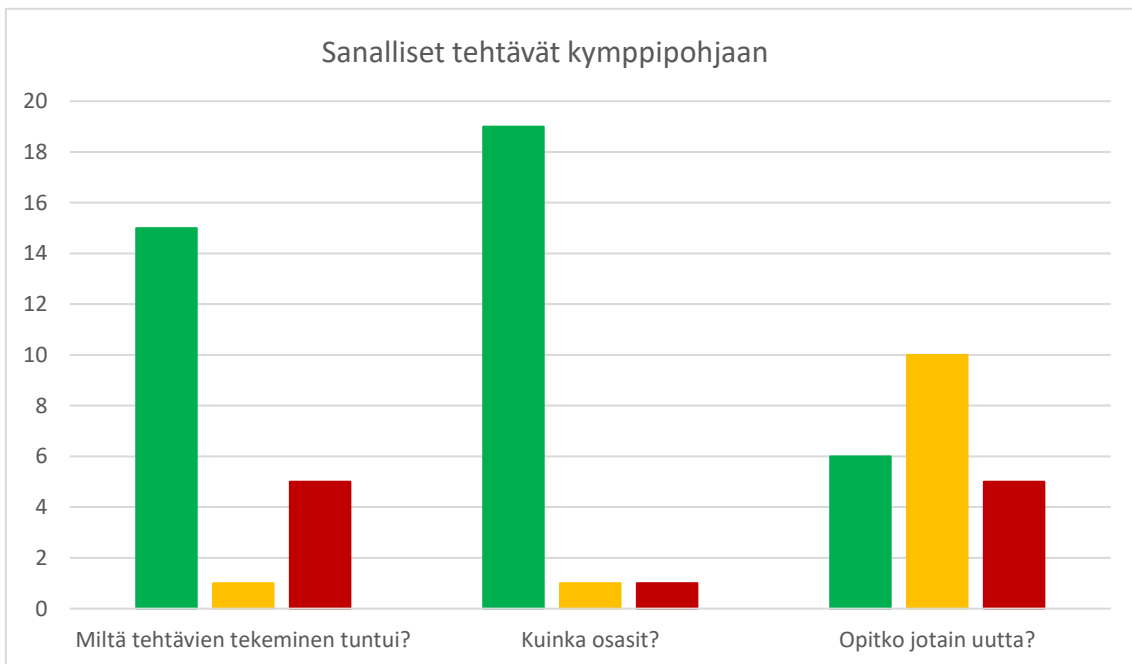
Sanallisia tehtäviä tehdessä esioppilaat innostuivat erityisesti niistä tehtävistä, joissa seikkaili heidän suosikkihahmojaan tai aiheitaan. Kun oli esioppilaiden oma vuoro keksiä sanallisia tehtäviä, käyttivät he myös niissä omia suosikkihahmojaan, kuten Harry Potteria. Sanalliset tehtävät ennen ja jälkeen -pohjaan oli ryhmän esiopettajan havaintojen mukaan erityisesti aluksi haastavaa. Useille esioppilaille oli selvästi vaikeaa hahmottaa, mitä lukumääriä ruutuihin oli tarkoitus linkkikuutioilla merkitä. Esiopettajan havaitsema tehtävän vaikeus ei kuitenkaan näy esioppilaiden omissa vastauksissa (Kuvio 12), sillä 76 % vastaajista (19/25 vastaajaa) koki tehtävän tekemisen tuntuneen todella kivalta tai kivalta. Kaikki esioppilaat kokivat osanneensa tehtävän todella hyvin tai hyvin. Lisäksi 72 % vastaajista (18/25 vastaajaa) koki oppineensa jotain uutta.



KUVIO 12. Ennen ja jälkeen -pohjaan tehtyjen sanallisten tehtävien arviointi. (n=25)

Sanallisten tehtävien tekeminen kymppipohjaan oli sujuvaa. Erityisesti esioppilaat innostuivat laskulausekkeiden tekemisestä älytaululle matemaattisia symboleita käyttäen. Lisäksi useat esioppilaat keksivät innokkaasti omia

sanallisia tehtäviä. Esioppilaat arvioivat tehtäviä kolmeportaisella asteikolla (Kuvio 13). Noin 71 % vastaajista (15/21 vastaajaa) oli sitä mieltä, että tehtävien tekeminen tuntui kivalta tai todella kivalta (Kuvio 13). Kaikki esioppilaat myös kokivat osanneensa tehtävät hyvin tai todella hyvin. Kuitenkin vain noin 29 % vastaajista (6/21 vastaajaa) koki oppineensa tehtävässä jotain uutta.



KUVIO 13. Kymppipohjaan tehtyjen sanallisten tehtävien arviointi. (n=21)

Muita tuloksia matematiikkakuvan syntyyn liittyen

Peukaloarviointia tehtäessä samat kolme esioppilasta vastasi kahden matematiikkatuokion päätteeksi Miltä tehtävien tekeminen tuntui -kysymykseen näyttämällä peukaloa alaspäin. Kysyin, osaisivatko he kertoa, millaiselta tehtävien tekeminen tuntuu ja miksi. Esioppilas 2 vastasi kysymykseeni reippaasti:

”Nää tuntuu tylsältä, kun nää on ihan liian helppoja. Mä lasken kotona mun siskon kanssa jo kertolaskuja.”

Myös kaksi muuta esioppilasta olivat asiasta samaa mieltä, ja esioppilas 3 vielä lisäsi tarkoittaen matematiikan tehtäviä:

”Kaikki tehtävät eskarissa on mun mielestä tosi helppoja ja siksi ne on myös niinku tosi tylsiä.”

Lisäksi videomateriaalissa tuli esiin tilanne, jossa yksi esioppilas ihmetteli parinaan työskennelleen toisen oppilaan osaamattomuutta matematiikan tehtävissä.

5.2 Miten tehtävät tukevat matemaattisen ajattelun kielentämistä?

Lukujonotehtävät

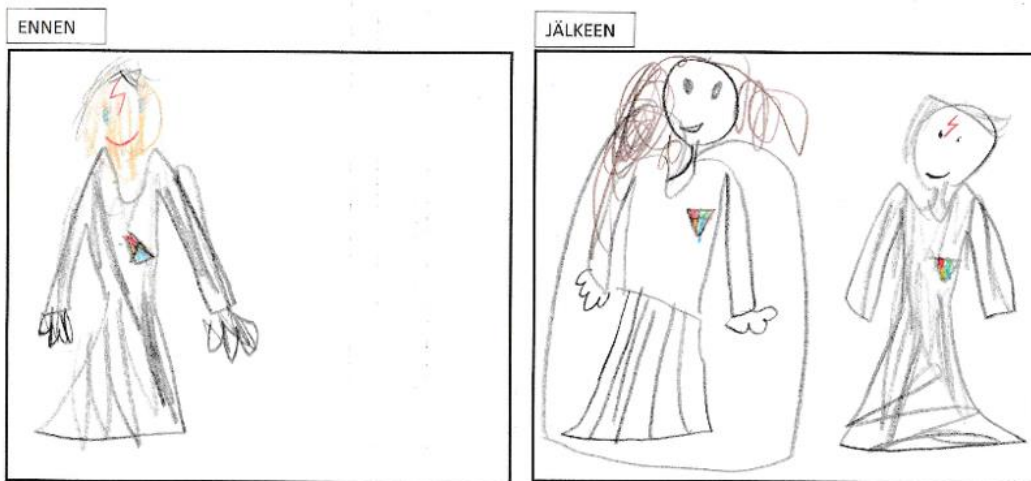
Lukujonotehtävissä neljän kielen mallista oli selkeimmin käytössä symbolikieli. Alusta, johon lukujonotehtäviä tehtiin valmiilla numerosymbolikorteilla, voidaan katsoa osaksi taktiillista toiminnan kieltä, mutta tehtävään voisi lisätä sitä käyttämällä esimerkiksi linkkikuutioita lukumäärän hahmottamisen apuna. Luonnollisen kielen käyttäminen kuului tehtävässä automaattisesti vain opettajan rooliin.

Lukumäärän nopea tunnistaminen

Lukumääräkorteissa oli käytössä kuviokieli, ja esioppilaat kertoivat vastaukset luonnollisella kielellä. Lisäksi kysyin lapsilta välillä, laskivatko he kortissa olevat kuvat vai huomasivatko he lukumäärän laskemattakin. Molemmissa ryhmissä 3–4 lasta vastasi spontaanisti, että he vain huomasivat oikean lukumäärän ja 2–3 lasta vastasi, että ehtivät nopeasti laskea. Noin puolet lapsista eivät vastanneet nopeasti kysymykseen mitään. Heidän saattoi olla vaikea itsekään hahmottaa omaa tapaansa tehtävän suorittamisessa tai he saattoivat arastella vastaamista, koska eivät tieneet, kumpi vastauksista olisi ikään kuin oikea vastaus. Tehtävässä kuviokieli (pikalukukortit) sekä luonnollinen kieli (vastaaminen) tukevat hyvin toisiaan. Kysyttäessä oikean lukumäärän selvittämisen tavasta lapset pääsevät lisäksi pohtimaan omaa strategiaansa sekä kertomaan siitä. Lisään siis myös materiaalin ohjeistukseen valmiita kysymyksiä, joita materiaalin käyttäjän kannattaa lapsilta kysyä.

Laskutarinat

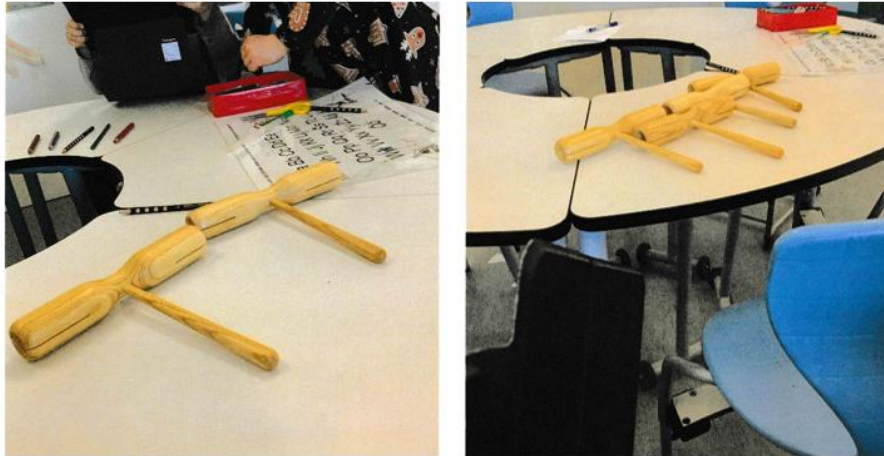
Laskutarinoissa yhdistyi luontevalla tavalla kuviokieli (piirtäminen tai valokuvaaminen), symbolikieli (laskulausekkeen tekeminen) sekä luonnollinen kieli (laskutarinan kertominen), kuten Kuvioista 14 ja 15 voi havaita. Kuvissa luonnollinen kieli näkyy aikuisen kirjoittamana, mutta tehtäviä tehdessä esioppilaat kertoivat nämä tarinat itse. Lähes kaikki esioppilaat myös halusivat esittää oman laskutarinan muulle ryhmälle ääneen. Kertominen eli oman ajattelun kielentäminen vaikutti myös helpolta, kun tukena oli itse piirretty kuva. Tehtävään olisi mahdollista yhdistää taktiilinen toiminnan kieli esimerkiksi palikoiden tai helmitaulun avulla erityisesti niille esioppilaille, joille lukumäärän muutoksen havaitseminen oli vielä haastavaa.



~~1+2=3~~ 1+1=2

"Ensin Harry Potter oli yksin taikajuomatuonilla, mutta sitten tuli Hermione lisää. Yhteensä tuli kaksi. Yksi plus yksi on yhteensä kaksi."

KUVIO 14. Esimerkki piirtämällä tehdystä laskutarinasta



Kaksi putkipenaalia oli aluksi. Pontus sai lahjaksi kaksi lisää. Pontuksella oli sen jälkeen 4 putkipenaalia.

$$2+2=4$$

KUVIO 15. Esimerkki valokuvaamalla tehdystä laskutarinasta

Hajotelmat

Hajotelmatehtävässä yhdistyivät taktiilinen toiminnan kieli sekä symbolikieli. Kuvakortit toimivat tehtävässä konkreettisenä toiminnallisena apuvälineenä erilaisia hajotelmia tehdessä, mutta toisaalta kortit, joissa toinen puoli on kuvallinen ja toinen yksivärinen, voidaan katsoa myös osaksi kuviokieltä. Hajotelmia voisi tehdä samalla tavalla myös esimerkiksi itse piirtämällä. Numerosymbolien käyttäminen tehtävässä yhdisti symbolikielen tähän tehtävään varsin luonnollisesti. Työskentely pareittain ja hajotelmien tekeminen vuorotellen mahdollistaa luonnollisen kielen käytön, mutta matemaattisen ajattelun kielentäminen luonnollisella kielellä, mutta se vaatii aikuisen ohjausta.

Sanalliset tehtävät

Sanallisissa tehtävissä yhdistyivät taktiilinen toiminnan kieli, symbolikieli sekä luonnollinen kieli. Ennen ja jälkeen -pohja sekä kymppipohja toimivat alustoina, joille konkreettiset laskemisen apuna toimineet linkkikuutiot aseteltiin. Symbolikieli yhdistyi tehtävään yhteisesti älytaululla ja luonnollinen kieli laskutarinoiden muodossa. Sanallisen tarinan keksijän tehtävänä oli myös antaa vastausvuoroja ja kertoa, onko vastaus oikein. Kuviokieli olisi mahdollista yhdistää tehtävään niin, että esimerkiksi opettaja piirtäisi tarinasta kuvan kaikille näkyviin tai niin, että vuorotellen yhdellä esioppilaalla olisi piirtäjän rooli.

Matemaattisen ajattelun kielentäminen pari- ja ryhmätyöskentelyssä

Esioppilaat työskentelivät lukujonotehtäviä ja hajotelmia tehdessä pareittain. Myös laskutarinoita, sanallisia tehtäviä sekä nopean tunnistamisen tehtävää tehdessä esioppilaat työskentelivät ison pöydän ääressä lähellä toisiaan, vaikka tekivätkin omia tehtäviään. Pari- ja pienryhmätyöskentelyä pidetään usein matemaattisen ajattelun kielentämisen ja erityisesti luonnollisen kielen käytön kannalta hyvänä, mutta havaintojen sekä videomateriaalin perusteella matemaattisen ajattelun kielentämistä luonnollisella kielellä ei juurikaan automaattisesti tapahtunut.

Yhden parityöskentelyn aikana kahden esioppilaan välisessä lyhyessä keskustelussa on havaittavissa matemaattisen ajattelun kielentämistä luonnollisella kielellä.

”Siis mitä tässä pitää tehdä?” -Esioppilas 4

”No mä voin näyttää. Tässä pitää siis niinku hajottaa toi luku, meillä on tässä tää kuus, niin se pitää hajottaa erilaisiksi. Vaikka että yks pupu ja viis vaaleenpunaista.” -Esioppilas 5

”Ai joo! Siis niinkö vaikka että vois olla myös kaks pupua ja sitten näitä vaaleenpunaisia neljä?” -Esioppilas 4

”Joo just sillai!” -Esioppilas 5

Muuten videokuvattavina olleet parit tai pienryhmät työskentelivät vuorotellen niin, että tehtäviin liittyvää matemaattisen ajattelun kielentämistä luonnollisella kielellä ei syntynyt. Videomateriaalista löytyi lisäksi lyhyt keskustelu, jossa esioppilas kieltäytyi auttamasta pariaan perustellen toimintaansa sillä, ettei

toiselle saa kertoa vastausta. Taulukkoon 1 on koottu matemaattisen ajattelun kielentämisen neljän kielen mallin eri osa-alueiden toteutuminen tehtävissä.

Tehtävä	Symbolikieli	Luonnollinen kieli	Kuviokieli	Taktiillinen toiminnan kieli
Lukujono	x			x
Lukumäärän nopea tunnistaminen		x	x	
Laskutarinat	x	x	x	
Hajotelmat	x			x
Sanalliset tehtävät	x	x		x

TAULUKKO 1. Matemaattisen ajattelun kielentämisen toteutuminen eri tehtävissä

6 POHDINTA

6.1 Johtopäätökset

Tutkimustulosten perusteella on perusteltua todeta, että tehtävät vaikuttavat positiivisen matematiikkakuvan syntyyn erityisesti siltä osin, että esioppilaat kokivat osaavansa tehtävät pääosin todella hyvin tai hyvin. Kokemus omasta osaamisesta saa aikaan positiivisen tunnekokemukseen, herättää uskoa omiin kykyihin ja voi toimia yhtenä motivaation lähteenä (Hannula & Holm, 2018; Pekrun, 2010; Ryan & Deci, 2017). Nämä kaikki osa-alueet vaikuttavat matematiikkakuvan muodostumiseen (Hannula & Holm, 2019). Lisäksi onnistumisen kokemukset ja uskomus omasta osaamisesta lisäävät pystyvyyden tunnetta ja vaikuttavat oppilaan omaan kokemukseen siitä, kuinka hän tulee tehtävistä suoriutumaan. Oppilaan odotus omasta onnistumisesta tehtävässä vaikuttaa myös osaltaan siihen, kuinka paljon töitä oppilas on tehtävän eteen valmis tekemään (Eccles & Wigfield, 2002).

Lukujonotehtävää lukuun ottamatta muissa tehtävissä yli puolet vastaajista koki tehtävän tekemisen tuntuneen todella kivalta tai kivalta. Positiiviset tunnekokemukset vaikuttavatkin positiivisen matematiikkakuvan syntyyn (Hannula & Holm, 2018), ja ilo edistää oppimista (Shuman & Scherer, 2014). Lisäksi positiiviset tunnekokemukset voivat vahvistaa oppilaan yleistä positiivista asennetta matematiikkaa kohtaan ja lisätä oppilaan uskomusta matematiikasta kivana ja mielekkäänä oppiaineena. Tällainen uskomus vaikuttaa myös positiivisen matematiikkakuvan syntyyn (Hannula & Holm, 2018).

Tutkimustulosten mukaan esioppilaat innostuivat erityisesti tehtävistä, joihin liittyi jokin heitä kiinnostava hahmo tai teema joko valmiina kuvina ja tarinoina tai itse piirtämällä. Havaintojen mukaan tutut ja mielekkäät hahmot tai teemat toimivat tehtävissä ulkoisina motivaation lähteinä. Ryanin ja Decin (2017) mukaan ulkoinen motivaatio voi kuitenkin muuttua sisäiseksi motivaatioksi. Esioppilaiden mielenkiinnonkohteiden hyödyntäminen voikin olla hyvä keino

saada alkusysäys erityisesti tämän materiaalin kaltaisten matematiikan tehtävien pariin ja motivoida matematiikan oppimiseen myöhemmin myös muilla tavoilla.

Positiivisen matematiikkakuvan syntyä lisäävien tekijöiden lisäksi on äärimmäisen tärkeää huomioida myös ne tekijät, jotka voivat vaarantaa positiivisen matematiikkakuvan muodostumista. Tässä tutkimuksessa liian helpot tehtävät aiheuttivat negatiivisia tunnekokemuksia, kuten tylsistymistä. Säännöllisesti toistuvat tylsyyden tunteet matematiikkakasvatuksen parissa voivatkin saada jo esioppilaalle aikaan uskomuksen matematiikasta tylsänä ja mielenkiinnottomana oppiaineena (Hannula & Holm, 2018; Shuman & Scherer, 2014). Myös matematiikkakasvatuksessa tehtävien tulisikin olla mahdollisimman paljon sellaisia, joissa lapsi työskentelee Vygotskin (1980) teorian mukaisella lähikehityksen vyöhykkeellä eli oman nykyisen kehitystasonsa ja potentiaalisen kehitystasonsa välillä.

Matemaattisen ajattelun kielentämisen neljän kielen mallin (Joutsenlahti & Kulju, 2010; Joutsenlahti & Rättyä, 2015) eri kielten käyttö toteutuu tehtävissä vaihtelevasti. Jokaisessa tehtävässä on kuitenkin käytössä vähintään kaksi eri kieltä, mikä tukee ymmärrystä sekä luo opiskeltavasta asiasta eri merkityksiä (Joutsenlahti & Kulju, 2010). Laskutarinoissa sekä sanallisissa tehtävissä neljän kielen mallin eri kielet nivoutuivat yhteen kaikkein luontevimmin. Lisäksi lukumäärän nopeaa tunnistamista lukuun ottamatta muihin tehtäviin olisi helppo ottaa taktiilinen toiminnan kieli sen puuttuessa lisäksi vielä esimerkiksi helmitaulun tai palikoiden avulla. Tämä onkin oleellinen lisäys Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin toiseen versioon.

Matemaattisen ajattelun kielentämistä suullisesti luonnollista kieltä käyttäen täytyy harjoitella systemaattisesti (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Myös tämän tutkimuksen tulosten perusteella matemaattisen ajattelun suullista kielentämistä ei tapahtunut juurikaan automaattisesti. Jo esioppilailta voi myös olla ajatus siitä, ettei esimerkiksi kaverille saa kertoa mitään, kun tehdään tehtäviä. Suulliseen kielentämiseen ohjaaminen vaatiikin selkeää ohjeistusta siitä, mitä se tarkoittaa sekä pitkäjänteistä suulliseen kielentämiseen kannustavan toimintatavan harjoittelua esiopetuksessa. Lisäksi parien ja ryhmien muodostaminen vaatii opettajalta oppilaidensa hyvää tuntemusta, jotta työskentely olisi myös suullisen kielentämisen kannalta mahdollisimman tarkoituksenmukaista.

6.2 Tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys

Triangulaation perusajatuksena on kerätä ja analysoida tietoa useista eri näkökulmista ja sen katsotaan lisäävään tutkimuksen luotettavuutta (Aaltio & Puusa, 2020; Tuomi & Sarajärvi, 2018). Se voidaan jaotella karkeasti neljään eri päätyyppiin, joita ovat aineistotriangulaatio, tutkijatriangulaatio, teoriatriangulaatio sekä menetelmättriangulaatio (Aaltio & Puusa, 2020). Tutkimuksessani triangulaatio toteutuu aineisto-, tutkija- sekä menetelmättriangulaation osalta.

Aineistotriangulaatio toteutuu, kun tutkimuksessa käytetään eri aineistoja tai tietoa kerätään eri lähteistä (Aaltio & Puusa 2020). Tässä tutkimuksessa aineisto koostuu sekä esiopettajien kirjallisista havainnoista että omien havaintojeni pohjalta tehdystä tutkimuspäiväkirjasta, videomateriaalista sekä esioppilailla teetetyistä kyselyistä. Tuomen ja Sarajärven (2018) mukaan tutkijatriangulaatiolla tarkoitetaan esimerkiksi sitä, että havainnointiin osallistuu useampia tutkijoita. Tutkimuksessani havaintoja keräämiseen osallistui lisäksi kolme ryhmien omaa esiopettajaa, mikä siis osaltaan lisää tutkimuksen luotettavuutta. Useammat tutkijat tai tutkijatiimit ovatkin usein osa design-tutkimusta, ja ne pyrkivät tuomaan esiin useampia näkökulmia (Anderson & Shattuck, 2012). Lisäksi tässä tutkimuksessa aineisto on kerätty havainnoimalla, videoimalla sekä kyselyillä, joten myös menetelmättriangulaatio toteutuu (Aaltio & Puusa, 2020; Tuomi & Sarajärvi, 2018).

Yksi design-tutkimukselle ominaisista luotettavuuden kriteereistä on tutkimuksen etenemisen tarkka ja systemaattinen raportoiminen kaikkien luettavaksi (Edelson, 2002; The Design-Based Research Collective, 2003). Tämän vuoksi olenkin kirjoittanut tutkimuksen etenemisen sekä Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin toiseen versioon tulleet muutokset tarkasti tähän Pro Gradu -tutkielmaani.

Edelsonin (2002) mukaan design-tutkimuksen tuloksia tulisi voida yleistää myös muihin konteksteihin kuin siihen, missä tutkimusta on tehty. Toisaalta taas Eskolan ja Suorannan mukaan (2014) laadullisilla tutkimusmenetelmillä saatuja tuloksia ei tule suoraan yleistää muihin konteksteihin. Tämän tutkimuksen

aineisto on kerätty esiopetuksessa, joten myös lopputuotoksena oleva Matikkaeväitä koulupolulle -materiaali on tarkoitettu pääasiassa käytettäväksi esiopetuksen kontekstissa. Sen tehtäviä voidaan kuitenkin soveltaa tarpeen mukaan myös alkuopetuksessa tai vaikka kotona matemaattisten taitojen harjoittelussa.

Aaltion ja Puusan (2020) sekä Raatikaisen (2005) mukaan tutkimustulosten luotettavuutta arvioitaessa on myös otettava huomioon olosuhteiden vaikutus tutkimustuloksiin sekä tutkijan subjektiivisuus tutkimuksen teon eri vaiheissa, sillä täydelliseen objektiivisuuteen, jossa tutkija ei millään tavoin vaikuta tutkimuskohteeseen ja tuloksiin, lienee mahdotonta päästä. Tämän tutkimuksen tulosten luotettavuutta arvioitaessa onkin otettava huomioon, että keräsin tutkimusaineiston minulle ennalta vieraassa esiopetusryhmässä. Koska olin esioppilaille vieras aikuinen, osa esioppilaista kokeili, miten minun pitämilläni tuokioilla voi käyttäytyä ja toisaalta taas osa esioppilaista käyttäytyi hyvin ”vieraskoreasti”. Tutkimustuloksiin tämä vaikutti niin, ensimmäisellä tuokiolla muutama esioppilas alkoi ennen kyselyä kuiskia muille, että vastataan kaikkiin punainen. Kerroin, miten tärkeää olisi vastata oman mielen mukaan, mutta en voi silti olla varma, millä perusteella nämä esioppilaat vastasivat. Toisaalta myös ”vieraskoreasti” käyttäytyneet esioppilaat saattoivat ainakin aluksi ajatella, että on kohteliasta merkitä vastauslomakkeeseen vihreitä vastauksia. Tämän vuoksi vaihdoin arvioinnin peukaloarvointiin, jotta pystyin esittämään tarkentavia kysymyksiä ja keskustelemaan vastauksista esioppilaiden kanssa.

Kyselytuloksissa uuden oppimiseen liittyvät vastaukset olivat muihin kyselylomakkeen vastauksiin verrattuna negatiivisimpia. Tämä voi johtua siitä, että esiopetusikäisen lapsen voi olla vielä vaikea arvioida omaa oppimistaan, kun kyseessä ei ole jokin konkreettinen asia. Lisäksi oppimista voi olla vaikea havaita, jos sen eteen ei tarvitse ponnistella, vaan se tapahtuu ikään kuin huomaamatta.

Missä tahansa tutkimuksessa, johon tavalla tai toisella liittyy muita ihmisiä, on noudatettava tarkasti ihmisarvoa kunnioittavia periaatteita. Näitä ovat itsemääräämisoikeiden kunnioittaminen, tutkimukseen liittyvien ihmisten henkisen ja fyysisen vahingoittamisen välttäminen sekä yksityisyyden suojan kunnioittaminen kaikin tavoin (mm. Kallinen & Pirskanen, 2022). Jo vuosia lasten kanssa toimiessani olen pitänyt ohjenuoranani aina ajatusta siitä, että toimisin

samalla tavoin myös silloin, jos lapsen huoltaja olisi tilanteessa mukana. Tämän periaatteen mukaan toimin myös matematiikatuokioita pitäessäni.

Kun tutkimusaineistoa kerätään lapsilta ja lasten parissa, on tutkimuksen eettisyyteen kiinnitettävä vielä erityistä, tähän kontekstiin liittyvää huomiota. Lagströmin ym. (2010) mukaan lapset eivät vielä pysty arvioimaan esimerkiksi omien yksityistietojensa käyttöä tutkimuksessa, minkä vuoksi kaupungeilta pyydettyjen tutkimuslupien lisäksi jokaisen esioppilaan kotiin toimitettiin tiedote tutkimuksesta sekä huoltajien täytettävä ja minulle palautettava lupakysely (Liite 1) tutkimukseen osallistumisesta. En myöskään kerännyt esioppilaiden nimiä mihinkään. Myös videomateriaali kuvattiin tarkoituksella niin, ettei siinä näkynyt esioppilaiden kasvoja. Muutama esioppilas kuitenkin tarkoituksella kurkki kameraan niin, että heidän kasvonsa näkyivät, minkä vuoksi onkin tärkeää, että hävitän videomateriaalin heti Pro Gradu -tutkielmani valmistuttua. Myös kaikki muu tutkimusaineisto hävitetään, kun tutkielma on valmistunut.

On myös tärkeää, että lapset kokevat voivansa itse vaikuttaa tutkimukseen osallistumiseen (Aarnos, 2016; Kallinen & Pirskanen, 2022). Näin ollen kerroin jokaisen tuokion alussa, että tuokiolle osallistuminen sekä kyselyihin vastaaminen on vapaaehtoista, mutta kaikki esioppilaat halusivat osallistua sekä tuokioihin että kyselyihin vastaamiseen. Lisäksi painotin lasten omaa asiantuntijuutta (kts. Kallinen & Pirskanen, 2022) kertomalla esioppilaille ensimmäisen tuokion aluksi, että vain esioppilaat voivat itse tietää, millaista esiopetuksen matematiikka heidän näkökulmastaan on, ja sen takia olen tullut pitämään tuokioita juuri heille. Lasten omaa asiantuntijuutta hyödyntäen kyselin heidän mielenkiinnonkohteistaan myös juuri heiltä, enkä esiopetusryhmän aikuisilta. Lisäksi kerroin esioppilaille tarkasti, millaista aineistoa kerään ja että hävitän aineiston tutkimuksen valmistuttua. Kallinen ja Pirskanen (2022) kehottavat myös kiittämään lapsia tutkimukseen osallistumisesta, joten vielä viimeisen tuokion jälkeen kiitin esioppilaita ja kerroin kuinka tärkeää on, että he osallistuivat tällä tavoin tutkimukseen. Jokainen sai myös valita muutaman tarran tai tuokioilla käytetyn kuvakortin kiitokseksi.

6.3 Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin toinen versio ja jatkotutkimusmahdollisuudet

Design-tutkimukseen kuuluu tuotoksen eli tässä tutkimuksessa Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin muokkaaminen tutkimustulosten perusteella paremmin tarkoitustaan vastaavaksi. Esittelen muutokset seuraavaksi osio kerrallaan. Lisäksi olen koonnut tutkimustulosten perusteella tehdyt muokkaukset Taulukkoon 2.

Lukujonotehtävä

Lukujonotehtävä osoittautui suurimmalle osalle helpoksi tehtäväksi. Helppouden takia monet kokivat tehtävän myös tylsäksi. Liian helpot tehtävät ja tylsyys voivat vaikuttaa negatiivisen matematiikkakuvan syntyyn, mikä ei luonnollisesti ole tehtävien tarkoitus. Lukujonotaidot ovat kuitenkin varsin oleellinen osa varhaisia matemaattisia taitoja. Lisäksi olin jo materiaalin ensimmäiseen versioon kirjoittanut, että lukujonotaidot tulisi olla esiopetusikäisellä lapsella hallussa, mutta asian testaaminen esimerkiksi tämän tehtävän avulla kannattaa. Näin esiopettaja pystyy myös havaitsemaan mahdolliset taitopuutteet ja tukemaan niiden harjoittelua esiopetusvuoden aikana. Tehtävä jää siis materiaaliin sellaisenaan.

Lukumäärän nopea tunnistaminen

Tämä tehtävä osoittautui lapsille mieleiseksi tehtäväksi. Esioppilaat olivat yksimielisiä siitä, että kaikkein mielekkäimpiä kuvakortteja olivat ne, joissa oli kuvia heidän suosikkihahmoistaan. Näin ollen lisään materiaaliin, että erilaisia lukumääräkortteja kannattaa tehdä juuri oman esiopetusryhmän esioppilaiden mielenkiinnonkohteiden mukaan. Korttien tekemiseen on myös helppo osallistaa lapsia, sillä he voivat itse piirtää kortteja tai tehdä niitä valokuvaamalla haluamiaan asioita tai esineitä. Lasten osallisuus onkin keskeinen osa esiopetuksen toimintakulttuuria (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet, Opetushallitus, 2014). Korjaan ohjeistusta myös niin, että lukumäärän näyttämisen jälkeen kannattaa ensin kysyä vastaus ja vasta sitten tehdä lukumäärän verran sovittua liikettä. Näin tehtävään saa myös lisättyä luonnollisen

kielen käyttöä ja esiopettajan on helpompi havaita esioppilaat, joilla on haasteita lukumäärän nopeassa tunnistamisessa.

Hajotelmat

Hajotelmatehtävässä esioppilaat innostuivat ja motivoituivat kuvakorteista, joissa oli heille mieleisiä kuvia. Näin ollen painotan materiaalissa vielä enemmän sitä, että esioppilailta kannattaa kysyä heidän mielenkiinnonkohteistaan ja hyödyntää näitä opetuksessa. Kuvakorttien tekeminen on työlästä, mutta niitä kannattaa tehdä yhdessä esioppilaiden kanssa, mikä lisää myös lasten osallisuutta. Lisään tämän myös materiaaliin.

Timanttiryöstö jäi aikapulan vuoksi tutkimukseni ulkopuolelle, koska vain muutamat esioppilaat ehdivät kokeilla sitä lisätehtävänä. Idealtaan tehtävä on kuitenkin hyvin tyypillinen hajotelmien harjoitteluun, joten jätän sen ideana materiaaliin.

Laskutarinat

Tehtävä toimi sellaisenaan hyvin, joten materiaalin toisessa versiossakaan ei tarvitse poistaa tai oleellisesti muuttaa mitään. Lisään kuitenkin ohjeistukseen, että tehtävään on helppo lisätä myös taktiilinen toiminnan kieli esimerkiksi palikoiden tai helmitaulun avulla. Tämä voisi helpottaa erityisesti niitä esioppilaita, joille lukumäärien muutosten huomaaminen tuntuu vaikealta.

Sanalliset tehtävät

Tehtävä toimi sellaisenaan hyvin, joten materiaalin toisessa versiossakaan ei tarvitse poistaa tai oleellisesti muuttaa mitään. Lisään kuitenkin ohjeistukseen, että kuviokieli olisi mahdollista yhdistää tehtävään niin, että esimerkiksi opettaja piirtäisi tarinasta kuvan kaikille näkyviin tai niin, että vuorotellen yhdellä esioppilaalla olisi piirtäjän rooli.

Tehtävä	Materiaalin 2. versio
Lukujonotehtävä	Ei muutoksia.
Lukumäärän nopea tunnistaminen	Poistettu ohjeistuksesta sovitun liikkeen tekeminen heti kuvakortin näyttämisen jälkeen. Lisäys ohjeistukseen: Kuvakortin näyttämisen jälkeen kannattaa ensin kysyä vastaus ja vasta sitten tehdä oikea määrä sovittua liikettä. Kuvakortteja kannattaa tehdä oman ryhmän esioppilaiden suosikkihahmoista ja lapset kannattaa osallistaa kuvakorttien tekoon.
Laskutarinat	Lisäys ohjeistukseen: Lukumäärän muutoksien havainnollistamiseen voi ottaa mukaan myös taktiilisen toiminnan kielen esimerkiksi helmitaulun avulla. Tämä on erityisen tärkeää, jos lukumäärän muutoksen ymmärtäminen pelkästään piirtämällä on vaikeaa.
Hajotelmat	Lisätty painotusta mielenkiinnonkohteiden hyödyntämisestä sekä lasten osallisuudesta kuvakorttien tekoon.
Sanalliset tehtävät	Lisäys ohjeistukseen: kuviokieli olisi mahdollista yhdistää tehtävään niin, että esimerkiksi opettaja piirtäisi tarinasta kuvan kaikille näkyviin tai niin, että vuorotellen yhdellä esioppilaalla olisi piirtäjän rooli.
Teoriaosuudet	Lisäys matemaattisen ajattelun kielentämisen systemaattisen harjoittelun tärkeydestä. Lisäys riittävän haastavien tehtävien tärkeydestä sekä lähikehityksen vyöhykkeellä toimimisesta.

TAULUKKO 2. Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin muokkaaminen

Tämä design-tutkimus päättyy Pro Gradu -tutkielman rajallisuuden vuoksi toisen syklin päättävään Matikkaeväitä koulupolulle -materiaalin muokkaamiseen tutkimustulosten perusteella. Jos tutkimus kuitenkin vielä jatkuisi, testaisin seuraavaksi materiaalin toimivuutta laajemmin useissa esiopetusryhmissä ryhmien omien esiopettajien toimesta. Lisäksi jäin miettimään muutamien esioppilaiden tylsyyden kokemusta liian helppojen tehtävien takia. Pahimmillaan tällainen jatkuva tunnekokemus voi aiheuttaa lapselle uskomuksen matematiikasta tylsänä oppiaineena, mikä on myöhemmin myös oppimisen kannalta haitallista. Lähtisinkin kehittämään esiopetukseen ylöspäin eriyttäviä tehtäviä ja ensimmäisenä kokeilisin, olisiko tehtävissä tarkoituksenmukaisempaa käyttää isompia lukuja vai ennemminkin lisätä tehtävien monimutkaisuutta ja sen myötä ongelmanratkaisutaitojen harjoittelua pienemmillä luvuilla.

LÄHTEET

- Aaltio, I. & Puusa, A. (2020). Mitä laadullisen tutkimuksen arvioinnissa tulisi ottaa huomioon? Teoksessa A. Puusa, P. Juuti & I. Aaltio (toim.), *Laadullisen tutkimuksen näkökulmat ja menetelmät* (s. 169–180). Gaudeamus.
- Aarnos, E. (2015). Kouluun lapsia tutkimaan: havainnointi, haastattelu ja dokumentointi. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin* 1. 164–179. PS-kustannus.
- Aksela, M. & Pernaa, J. (2013). Kehittämistutkimus pro gradu -tutkielman tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa (toim.), *Kehittämistutkimus opetusallalla*. (1. painos). 181–200. PS-kustannus.
- Anderson, T. & Shattuck, J. (2012). Design-based research: A decade of progress in education research. *Educational Researcher* 41 (1), 16–25.
- Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. *NMI-bulletin*, 18(4), 63–74.
- Aunio, P.; Hannula, M.; & Räsänen, P. (2004). Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Niilo Mäki instituutti. Jyväskylä.
- Aunio, P. & Räsänen, P. (2016). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal*, 24(5), 684–704.
- Aunola, K. & Lerkkanen, M-K. & Leskinen, E. & Nurmi, J-E. 2004. Developmental Dynamics of Math Performance From Preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology* 96 (4). 699–713.
- Aunola, K. & Leskinen, E. & Nurmi, J-E. 2006. Developmental dynamics between mathematical performance, task motivation, and teacher's goals during the transition to primary school. *British Journal of Educational Psychology* (76). 21–40.

- Aunola, K. & Nurmi, J.-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluikässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. 54–69. Niilo Mäki Instituutti.
- Bereiter, C. (2002). Design research for sustained innovation. *Cognitive Studies, Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society*, 9(3), 321–327.
- Dweck, C. S. (2006). *Mindset: The New Psychology of Success*. Random House Digital Inc.
- Dweck, C. S. (2008). Mindsets and math/science achievement.
- Eccles, J., & Wigfield, A. (2002). Motivational Beliefs, Values and Goals. *Annual Review of Psychology*, 53(1), 109–132.
- Elo, S., Karjula O., Kääriäinen M. & Tohmola, A. 2022. Laadullisen sisällönanalyysin vaiheet. *Hoitotiede* 2022, 34 (4). 215–255.
- Eskola, J. (2018). Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat: Laadullisen aineiston analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa Valli, R. (toim.). *Ikkunoita tutkimusmetodeihin. 2, Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin* (5. uudistettu painos.). PS-kustannus.
- Eskola, J. & Suoranta, J. (2014). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen* (10. painos). Vastapaino.
- Etelälahti, A. 2014. Näkökulmia esiopetuksen vaikuttavuuden tutkimiseen- vaikuttavuustutkimus vuoden 2000 esiopetuksen opetussuunnitelman perusteiden pohjalta. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-44-9495-6>
- Eynde, P., De Corte E. & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs. Teoksessa Leder G. C., Pehkonen E. & Törner G. (toim.), *In Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Springer.
- Fuson, K. C. (1991). Relationships between Counting and Cardinality from Age 2 to Age 8. In *Pathways to Number* (1. painos). 127–149. Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9780203772492-8>
- Grönfors, M. (2015). Havaintojen teko aineistonkeräyksen menetelmänä. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin* 1. 146–161. PS-kustannus.

- Hannula, M. S., & Holm, M. E. (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa: J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. 132–154. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Hannula-Sormunen, M., Ruusuvirta, T., Räsänen, P., & Mattinen A. (2018). Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus. Teoksessa: J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. 158–183. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Heikkinen, H. L. T. 2010. Tutkiva ote toimintaa. Toimintatutkimuksen lähtökohdat. Teoksessa H. L. T. Heikkinen, E. Rovio & L. Syrjälä (toim.) *Toiminnasta tietoon. Toimintatutkimuksen menetelmät ja lähestymistavat*. Vantaa: Dark Oy, 15–38.
- Jewitt, C., Bezemer, J., & O'Halloran, K. (2016). *Introducing multimodality*. Routledge.
- Joseph, Diana. (2014) "The Practice of Design-Based Research: Uncovering the Interplay Between Design, Research, and the Real-World Context." *Educational psychologist* 39.4 (2004): 235–242. Web.
- Joutsenlahti, J. (2005). Lukiolaisten tehtävääorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä – 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampere University Press.
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2010). Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.), *Toisensa kohtaavat ainedidaktikat* (s. 66–77). Tampere: Tampereen yliopistopaino.
- Joutsenlahti, J., & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen, & M. Tarnanen (Toimittajat), *Rajaton tulevaisuus : kohti kokonaisvaltaista oppimista : ainedidaktikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014* (Sivut 45-62). (Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja; Nro 8)
- Joutsenlahti, J., & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. teoksessa J. Joutsenlahti,

- H. Silfverberg, & P. Räsänen (Toimittajat), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410–431).
- Juuti, K. & Lavonen, J. (2013). Design-tutkimukseen osallistuvien opettajien rooli tutkimuksen eri vaiheissa. Teoksessa J. Pernaa (toim.), *Kehittämistutkimus opetuslalla*. (1. painos). 45–67. PS-kustannus.
- Kallinen, K., & Pirskanen, H. (2022). *Lasten ja nuorten tutkimushaastattelu*. Gaudeamus.
- Kupari, P. & Hiltunen, J. (2018). Matemaattiset taidot kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.). *Matematiikan opetus ja oppiminen*. 16–53. Niilo Mäki Instituutti.
- Lagström, H. & Pösö, T. & Rutanen, N. & Vehkalahti, K. (2010). Lasten ja nuorten tutkimuksen etiikka. Nuorisotutkimusverkoston julkaisuja 101. Nuorisotutkimusverkosto/Nuorisotutkimusseura.
- Lehtonen, D. (2018). Multimodaalisuus 1. ja 4. luokan suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 6(1), 129–164.
- LukiMat. Taitojen kehitys. Haettu osoitteesta:
<http://www.lukimat.fi/matematiikka/tietopalvelu/taitojen-kehitys>
- Mattinen, A. (2006). Huomio lukumääriin : tutkimus 3-vuotiaiden lasten matemaattisten taitojen tukemisesta päiväkodissa. Turun yliopisto.
- McKenney, S. & Reeves, T. C. 2013. Systematic Review of Design-Based Research Progress: Is A Little Knowledge a Dangerous Thing? *Educational Researcher*, 42 (2), 97–100.
- Metsämuuronen, J., & Ukkola, A. (2023). Matematiikan ja äidinkielen taidot alkuopetuksen aikana. Perusopetuksen oppimistulosten pitkittäisarviointi 2018–2020. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 1:2023
- Mononen, R., Aunio, P., Väisänen, E., Korhonen, J., & Tapola, A. (2017). *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. PS-kustannus.
- Pekrun, R. (2006). The Control-Value Theory of Achievement Emotions: Assumptions, Corollaries, and Implications for Educational Research and Practice. *Educational psychology review* 18.4: 315–341.

- Pekrun, R. & Stephens E. J. (2010). Achievement Emotions: A Control-Value Approach. *Social and personality psychology compass* 4.4: 238–255.
- Pernaa, J. (2013). Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa (toim.), *Kehittämistutkimus opetuslalla*. (1. painos). 9–26. PS-kustannus.
- Pietilä, A. (2002). Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva: matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina, Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. 238. Väitöskirjatutkimus, Helsingin yliopisto. https://www.academia.edu/20426488/Luokanopettajaopiskelijoiden_matematiikkakuva_matematiikkakokemukset_matematiikkakuvan_muodostajina_
- Raatikainen, P. (2005). Ihmistieteet – tiedettä vai tulkintaa? Teoksessa A. Meurman-Solin & I. Pyysiäinen (toim.), *Ihmistieteet tänään*. Gaudeamus.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-Determination Theory and the Facilitation of Intrinsic Motivation, Social Development, and Well-Being. *The American Psychologist*, 55(1), 68–78.
- Ryan, R. M. & Deci E. L. (2017). Self-Determination Theory: Basic Psychological Needs in Motivation, Development, and Wellness. New York: Guilford Publications.
- Salmela-Aro, K. (2018). Motivaatio ja oppiminen kulkevat käsi kädessä. Teoksessa: K. Salmela-Aro, K. Aunola, A.-E. Salo, A. Kajamies & M. Vauras (toim.) *Motivaatio ja oppiminen*. PS-kustannus.
- Shuman, V. & Scherer K. R. (2014). Concepts and Structures of Emotions. Teoksessa R. Pekrun & L. Linnenbrink-Garcia (toim.) *International Handbook of Emotions in Education* (s. 23–45). Routledge.
- Taskinen, S. (2017). ”Ne voi opita toisilta” Kasvatustieteellinen design-tutkimus maahanmuuttajaoppilaiden osallisuutta edistävästä luokkakäytänteistä. [Julkaisematon väitöskirja]. Lapin yliopisto.
- The Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32 (1), 5–8.
- Tossavainen, T. (2007). Matematiikan kieliaspekti ja matematiikkakuva. Teoksessa A. Niikko, I. Pellikka & E. Savolainen (toim.), *Oppimista*,

opetusta, monitieteisyyttä kirjoituksia kuninkaankartanonmäeltä (s. 233–243). Joensuun yliopisto, Savonlinnan opettajankoulutuslaitos: Print.

Tuomi, J. & Sarajarvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Tammi.

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard university press.

7 LIITTEET

7.1 LIITE 1 Saatekirje koteihin

Hei kotiväki!

Opiskelen Tampereen yliopistossa luokanopettajaksi ja olen tulossa keräämään matematiikkakasvatukseen liittyvän graduni aineistoa viikoilla 14 ja 15. Eskarilaiset siis osallistuvat neljälle matematiikkatuokiolle, joissa testaan graduuni liittyvien matematiikan tehtävien toimivuutta. En testaa lasten osaamista tai oppimista, vaan kerään havaintoja ja lasten kommentteja, joiden pohjalta muokkaan tehtäviä toimivammiksi. Kirjaan tuokioiden tapahtumia ylös tutkimuspäiväkirjaan ja mahdollisesti videoin lyhyitä pätkiä parityöskentelyistä. Tallenteiden tarkoituksena on saada selville, millaista keskustelua matematiikkatehtävien parissa työskentely saa lapsissa aikaan. En kerää lapsista tunnistetietoja, eikä valmiista tutkimuksesta voi päätellä lasten henkilöllisyyttä. Kaikki tallenteet tuhoetaan, kun gradu on hyväksytysti palautettu.

Alaikäisen tutkimukseen osallistumiseen tarvitaan aina huoltajan lupa, joten palauttaisitteko alla olevan kyselyn eskariin pe 31.3. mennessä.

Matikkaterveisin Silja Yli-Salomäki

Leikkaa tästä: - - - - -

Nimi: _____

saa osallistua matematiikkatuokioille
 ei saa osallistua matematiikkatuokioille

työskentelyä saa videoida
 työskentelyä ei saa videoida

allekirjoitus

7.2 LIITE 2 Matikkaeväitä koulupolulle -materiaali

MATIKKAEVÄITÄ KOULUPOLULLE

Tukimateriaali matematiikkakasvatukseen
esiopetuksessa

ENNEN

JÄLKEEN

$$5 + 5 = 10$$

Eka oli viisi kukkaa ja sitten yksi maanviljelijä kasvatti sinne vielä viisi kukkaa lisää. Tuli yhteensä kymmenen kukkaa.

Esiopetuksen matematiikkakasvatuksessa havainnoidaan, ihmetellään, oivalletaan, luokitellaan, sarjoitetaan, mitataan, ratkotaan ongelmia, tutustutaan aikaan ja lukuihin ja tehdään paljon, paljon kaikkea muutakin. Ennen kaikkea esiopetuksessa luodaan pohjaa matemaattisen ajattelun kehittymiselle ja herätellään kiinnostusta matematiikka kohtaan! Tämän materiaali sisältääkin vain pienen, mutta tärkeän siivun esiopetuksen matematiikkakasvatuksesta. Materiaalin tarkoituksena on erityisesti tukea esiopetuksen matematiikkakasvattajia matematiikkainnostuksen herättämisessä sekä matemaattisen ajattelun kielentämisen huomioimisessa sekä harjoittelussa. Tehtävien teemana on lukukäsitteen oppimisen tukeminen.

Materiaalissa on ensin lyhyet teoriaosuudet matematiikkakuvasta, matemaattisen ajattelun kielentämisestä sekä lukukäsitteen oppimisesta. Näiden jälkeen tehtäväosiosta löytyy viisi eri harjoitusta, jotka tukevat lukukäsitteen oppimista: lukujonotaidot, nopean lukumäärän tunnistaminen, hajotelmat, laskutarinat sekä sanalliset tehtävät. Tehtävissä on huomioitu matemaattisen ajattelun kielentäminen eri tavoin.

Matematiikkakuvalla tarkoitetaan henkilön suhteellisen pysyvää käsitystä itsestään matematiikan osaajana ja oppijana sekä henkilökohtaista käsitystä matematiikasta oppiaineena ylipäättään. Myös luokassa tai ryhmässä vallitseva matematiikkailmapiiri on osa matematiikkakuvaa. Matematiikkakuva ja matematiikan osaaminen eivät kuitenkaan aina kulje käsi kädessä. Joku saattaa olla matematiikassa taitava, mutta silti suhtautua matematiikkaan negatiivisesti, ja joku toinen taas suhtautuu matematiikkaan innostuneesti ja mielenkiinnolla, vaikka se olisikin haastavaa.

Tunnekokemukset matematiikkakuvan rakentajina

Matematiikkakuva syntyy matematiikasta saatujen kokemusten myötä, ja se on vahvasti sidoksissa matematiikan opiskeluun ja oppimiseen liittyviin tunnekokemuksiin. Nämä tunnekokemukset voivat olla positiivisia (esim. riemu, uteliaisuus, sinnikkyys) tai negatiivisia (esim. tylsyys, turhautuminen ja ahdistus). Onnistumisen kokemukset sekä oivaltamisen ilo vaikuttavat paljon positiivisen matematiikkakuvan syntyyn. Kun oppilas suhtautuu matematiikkaan myönteisesti, hän jaksaa myös sinnikkäästi työskennellä matemaattisten tehtävien parissa. Tämä sinnikkyys tuottaa lopulta myös oivaltamisen iloa ja onnistumisen kokemuksia, jotka osaltaan lisäävät positiivista asennoitumista matematiikkaan ja edelleen taas sinnikkyyttä haastaa itseään matemaattisesti.

Matematiikkakuvan vaikutus lapsen tulevaisuuteen

Matematiikkakuvalla on hyvin keskeinen merkitys matematiikassa menestymiseen myöhemmillä luokilla ja sen seurauksena myös jatkokoulutukseen hakeutumisessa. Jos lapsi ajattelee matematiikan olevan tylsää, vaikeaa tai ahdistavaa, hän saattaa tahtomattaan sulkea itseltään pois myös tulevaisuuden työmahdollisuuksia, jotka liittyvät tai joiden hän luulee liittyvän matematiikkaan. Siksi on tärkeää kiinnittää huomiota mahdollisimman positiivisen matematiikkakuvan syntyyn jo varhaisessa vaiheessa.

Aikuisen vaikutus lapsen matematiikkakuvan syntyyn

Lapsen elämään kuuluvat aikuiset niin kotona kuin sen ulkopuolellakin vaikuttavat lapsen asenteisiin. Näin ollen aikuisten vaikutus myös lapsen matematiikkakuvan syntyyn on merkittävä. Innostunut ja kannustava matematiikkakasvattaja tartuttaa innostustaan myös lapseen ja tärkeää olisikin, että matematiikka olisi kivaa ja iloa tuottavaa. Myös kotijoukoille voi vinkata, ettei huoltajan omasta tai koko suvun huonosta ”matikkapäästä” kannata puhua lapselle, koska tällaiset uskomukset saattavat toimia itseään toteuttavina ennusteina. Lapsi ehkä alkaakin uskoa, ettei hänelläkään ole ”matikkapäättä”, joten hänen ei kannata edes yrittää. Tällöin lapsen matematiikkakuvasta muodostuu hyvin negatiivinen, eikä hän lopulta ehkä pystykään hyödyntämään kaikkea oppimispotentiaaliaan. Tämä pätee matematiikan lisäksi toki kaikkeen muuhunkin oppimiseen.

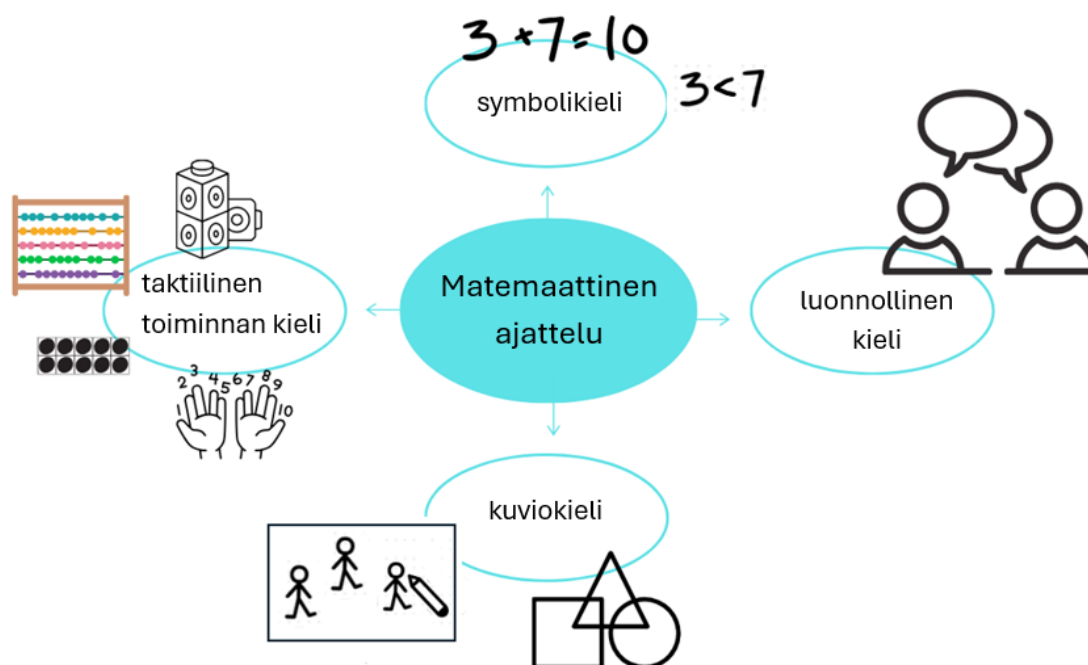
Jos tehtävät ovat liian helppoja, lapsi saattaa tylsistyä. Ja jos matematiikka on koko esiopetusvuoden ajan aivan liian helppoa, voi lapselle muodostua kuva matematiikasta tylsänä ja ilottomana oppiaineena. Jokaiseen tehtävään ei voi tehdä kullekin lapselle sopivaa versiota, mutta kannattaa muistaa lähikehityksen vyöhykkeellä toimiminen myös matematiikkakasvatuksessa ja tarjota mahdollisuuksien mukaan riittävästi haastetta myös kaikkein taitavimmille.

Muistilista matematiikkakasvattajalle:

- ◇ Kehu ja kiitä oikeiden vastausten lisäksi myös sinnikkyydestä, yrittämisestä ja luovuudesta tehtävien parissa. Kiinnitä huomiota innostukseen, oppimisen ja oivaltamisen iloon sekä rohkeuteen!
- ◇ Pyri luomaan ryhmään ilmapiiri, jossa yrittäminen on aivan yhtä arvokasta ja tärkeää kuin oikeat vastaukset.
- ◇ Omat negatiiviset koulumatematiikkakokemukset eivät tee sinusta huonoa matematiikkakasvattajaa. Kokeile ja innostu yhdessä lasten kanssa!
- ◇ **Uskalla tarjota lapsille myös haastavia tehtäviä.** Niitä voidaan tarvittaessa pohtia myös yhdessä.

Kielentäminen ja neljän kielen malli

Kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista ja jäsentämistä ääneen tai kirjallisesti, piirtämällä, kuvien avulla tai toimintavälineitä hyödyntäen. Matemaattista ajattelua voidaan kielentää neljällä kielellä, joita ovat *matematiikan symbolikieli* (numeromerkit ja muut matematiikan symbolit), *kuviokieli* (esimerkiksi piirtäminen), *luonnollinen kieli* (puhuminen tai kirjoittaminen) sekä *taktiilinen toiminnan kieli* (toimintavälineet). Kielentäminen auttaa jäsentämään omaa ajattelua ja lisää ymmärrystä, kehittää matemaattista ajattelua vuorovaikutuksessa vertaisryhmän jäsenen kanssa sekä toimii opettajan suunnittelun ja arvioinnin työkaluna tuomalla esiin oppijoiden osaamista ja ajattelua. Näiden neljän eri kielen joustava käyttö tukee hyvin myös lapsen lukukäsitteen ymmärryksen kehittymistä.



Matemaattisen ajattelun kielentämisen oppiminen vaatii systemaattista harjoittelua. Kasvattajan kannattaakin pyrkiä luomaan lapsiryhmään ilmapiiri, jossa kannustetaan oman ajattelun sanoittamiseen, ihmettelyyn, kysymiseen sekä ongelmanratkaisuun. Harvat esioppilaat osaavat sujuvasti kirjoittaa, mutta piirtämisen käyttämistä matemaattisen ongelmanratkaisun tukena kannattaa yhdessä harjoitella. Pari- tai ryhmätyöskentely ei automaattisesta takaa matemaattisen ajattelun suullista kielentämistä, mutta lapsia kannattaa opastaa ja harjoituttaa siihen. Kasvattajan kannattaa hyödyntää myös oman ryhmänsä tuntemusta matemaattisen kielentämisen näkökulmasta valitessaan pareja sekä pienryhmän jäseniä. Toimintavälineet, kuten palikat tai helmitaulut ovat oivallinen apuväline erilaisissa tehtävissä. Ne kannattaakin pitää helposti saatavilla.

Muistilista matematiikkakasvattajalle:

- ◇ Kannusta lasta ilmaisemaan omaa matemaattista ajatteluaan puhumalla tai piirtämällä.
- ◇ Kysy lapselta, miten hän on päätenyt ratkaisuunsa! Rohkaise kertomaan myös kaverille.
- ◇ Pidä toimintavälineet helposti saatavilla.
- ◇ Panosta ryhmässä sallivaan ilmapiiriin, jossa uskalletaan ihmetellä, kysyä apua, pohtia ääneen ja vastata myös väärin.
- ◇ Keskity kuuntelemaan ja havainnoimaan lasten kielentämistä, niin pääset jäljille heidän osaamisestaan.

Lukukäsitteellä tarkoitetaan yksinkertaisimmillaan lukusanan, numeromerkin ja lukumäärän yhteyden ymmärtämistä. Lukukäsitteen kehittyminen alkaa kuitenkin jo varhaislapsuudessa ja pitää sisällään monta eri toistensa päälle rakentuvaa vaihetta. Lukukäsitteen ymmärrettyään lapsi ymmärtää myös sen, että luku koostuu monista eri luvuista. Esimerkiksi siis luku viisi koostuu luvuista yksi ja neljä, kaksi ja kolme, neljä ja kolme tai kolme ja kaksi. Lukukäsitteen syvälinen ymmärtäminen ja oppiminen onkin esi- ja alkuopetuksen matematiikassa hyvin tärkeää, ja sen ymmärtämisen tukemiseen on hyvä kiinnittää huomiota jo esiopetuksessa.

Ensimmäisessä vaiheessa lapsi oppii luettelemaan lukusanoja omalla äidinkielellään ensin tauottomana rimpuna (yksikaksikolme...) ja sen jälkeen (yksi, kaksi, kolme...) erillisinä lukusanoina. Seuraavassa vaiheessa lapsi oppii yhdistämään lukusanan laskemaansa esineeseen, ja tämän jälkeen ymmärtämään laskemansa luvun kardinaalisen merkityksen. Tällä tarkoitetaan sitä, että lapsi ymmärtää viimeisenä sanomansa lukusanan tarkoittavan laskemiensa esineiden koko joukkoa. **Onkin tärkeää havainnoida, onko esi- tai alkuopetuksessa oleva lapsi todella ymmärtänyt luvun kardinaalisen merkityksen vai ajatteleeko hän viimeisenä mainitsemansa lukusanan tarkoittavan vain viimeisenä laskemaansa esinettä eikä koko joukkoa.** Myöhemmin lapsi oppii myös laskemaan oikean määrän esineitä annetun kardinaalisen luvun mukaisesti.

Seuraavassa vaiheessa lapsi oppii aloittamaan laskemisen mistä tahansa luvusta, ja tämän jälkeen hän ei enää välttämättä tarvitse laskemiseen esineitä, vaan pystyy laskemaan lukusanojen avulla mielessään tai esimerkiksi sormia apuna käyttäen. Viimeisellä tasolla lapsi ymmärtää jokaisen lukusanan olevan oma yksikkönsä, jolla on sekä oma paikkansa lukujonossa että ordinaalinen yhteys edelliseen ja seuraavaan numerosanaan. **Lapsi myös ymmärtää, että jokainen luku voidaan jakaa erilaisiin osiin. Tämän taidon harjoittelu onkin tärkeää aloittaa jo esiopetuksessa erilaisten hajotelmatehtävien avulla.**

Lue lisää:

Hannula & Holm (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa Joutsenlahti, Silfverberg & Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Porvoo: Niilo Mäki Instituutti, 132-154.

Joutsenlahti, J., & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen, & M. Tarnanen (Toimittajat), *Rajaton tulevaisuus : kohti kokonaisvaltaista oppimista : ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014* (Sivut 45-62). (Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja; Nro 8)

Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2008). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (Toimittajat), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (Sivut 410-431).

Kaasila & Laine (2018). Miten tulevien luokanopettajien matematiikkakuvaan voidaan vaikuttaa? Teoksessa Joutsenlahti, Silfverberg & Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Porvoo: Niilo Mäki Instituutti, 306-318.

www.karenfusonmath.com

1. LUKUJONOTAIDOT

Noin 5-vuotiaana lapsi osaa luetella lukusanat oikeassa järjestyksessä ykkösestä alkaen. Hän osaa myös merkata jokaisen laskettavan esineen vain kerran ja ymmärtää, että viimeisenä sanottu lukusana kertoo koko joukon lukumäärän. Lapsi myös tietää, että lukujonossa olevat sanat on järjestetty suuruusjärjestykseen. **Eskarissa kannattaa kuitenkin tarkistaa, että nämä taidot ovat lapsella hallussa. Joskus lapsi saattaa esimerkiksi ajatella, että esineitä laskiessaan viisi tarkoittaa vain sitä viidettä esinettä, jota hän on juuri laskemassa, eikä siihen mennessä laskettujen esineiden koko lukumäärää.**

Lukujonotaitoja harjoitellessa ja niiden osaamista havainnoidessa kannattaa edetä seuraavassa järjestyksessä:

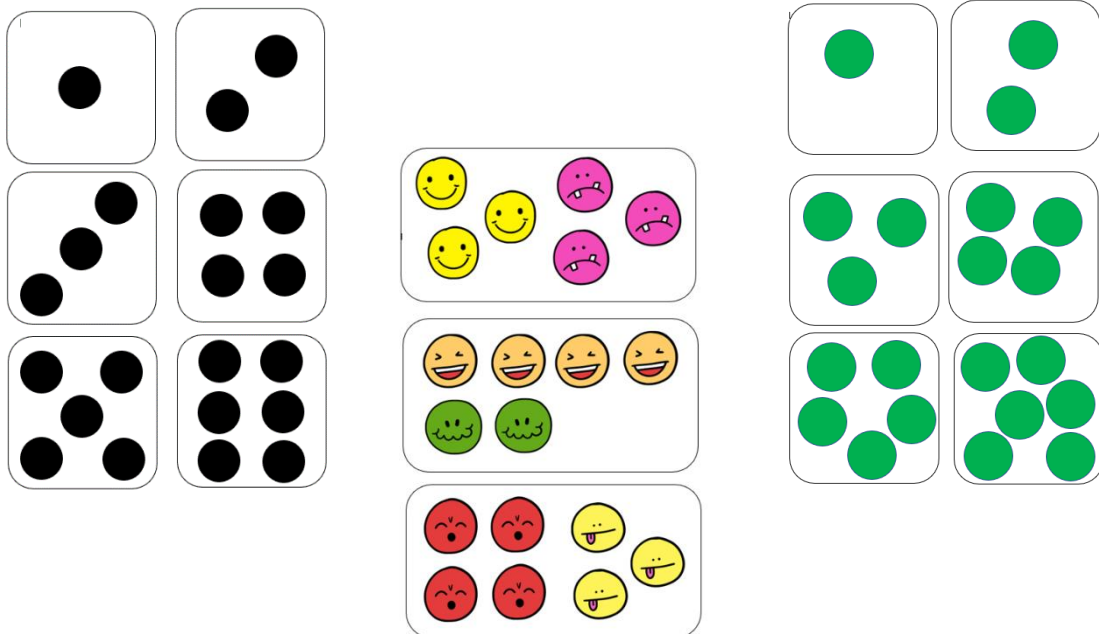
1. luvusta 1 eteenpäin (1–10) ja luvusta 10 taaksepäin (10–1)
2. annetusta luvusta eteenpäin
3. annetusta luvusta taaksepäin
4. annetusta luvusta annetun verran eteenpäin (yhteenlasku)
5. annetusta luvusta annetun verran taaksepäin (vähennyslasku)
6. annetusta luvusta eteen-/taaksepäin annetuin hyppäyksin (kerto-/jakolasku)

Lukujonotaitojen harjoittelun apuna voi käyttää rivitalopohjaa, joka löytyy kahdessa osassa materiaalin lopusta.



2. LUKUMÄÄRÄN NOPEAN TUNNISTAMISEN HARJOITUKSIA

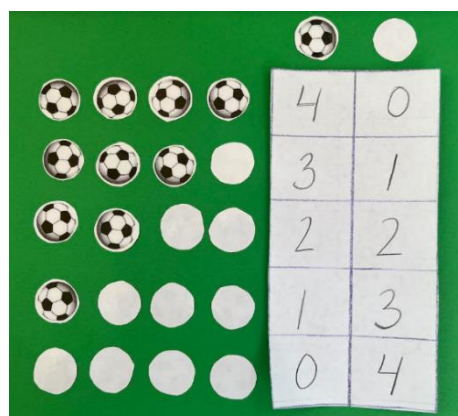
- Opettaja näyttää nopeasti kuvasta lukumäärän ja kysyy, kuinka monta pistettä/kuvaa kortissa näkyi. Vastausvuoron saa viittaamalla. Oikean vastauksen jälkeen kaikki lapset hyppäävät yhtä monta kertaa ilmaan. Keksitään myös muita liikkeitä (kyykky, taputus jne.)
- Aloitetaan pienistä lukumääristä ja siirrytään isompiin. Käytetään ensin helpompia kuvioita (esim. nopan silmäluvut) ja siirrytään vaikeampiin kuvioihin.
- **Korteissa kannattaa käyttää oman ryhmän lapsia kiinnostavia kuvia. Niitä kannattaa tehdä myös yhdessä lasten kanssa piirtämällä tai valokuvaamalla.**
- **Muista:** Kerro lapsille, että heillä on ihmeellinen kyky havaita lukumääriä laskematta, ja että tätä taitoa voi myös harjoitella!



3. HAJOTELMAT

- Hajotelmatehtävä kuvakorteilla: Tarvitaan kartongista tehtyjä kuvakortteja, joiden toinen puoli on yksivärinen ja toisella puolella on jokin lapsille mielekäs kuva tai vaihtoehtoisesti esimerkiksi linkkikuutioita kahta eri väriä. Harjoitellaan, kuinka monella eri tavalla jokin lukumäärä voidaan rakentaa. Tehdään yksin tai pareittain valmiin pohjan päälle. Kirjataan viereen myös numeromerkit.
- **Vinkki:** Pienten kuvakorttien tekeminen on työlästä, mutta esimerkiksi suosikkihahmojen kanssa työskentely on lasten mielestä mielekästä. Lapset voi hyvin ottaa mukaan kuvakorttien tekoon.

7							●	😊
😊	😊	😊	😊	😊	😊	😊	0	7
●	😊	😊	😊	😊	😊	😊	1	6
●	●	😊	😊	😊	😊	😊	2	5
●	●	●	😊	😊	😊	😊	3	4
●	●	●	●	😊	😊	😊	4	3
●	●	●	●	●	😊	😊	5	2
●	●	●	●	●	●	😊	6	1
●	●	●	●	●	●	●	7	0



- Timanttiryöstö: jokaisella parilla on timantteja (tai muita pieniä esineitä/kuvia) sovittu määrä. Toinen parista laittaa silmät kiinni ja sillä välin toinen piilottaa osan timanteista esimerkiksi kipun alle. Pari avaa silmät ja päättelee/laskee jäljellä olevien timanttien perusteella, kuinka monta timanttia on varastettu.



4. LASKUTARINAT

Esi- ja alkuopetuksessa on tärkeää, että oppijat pääsevät itse tutkimaan lukumäärien muutoksia omista lähtökohdistaan käsin esimerkiksi itse tehtyjen muutoskuvien avulla. Piirtäessään alku- ja lopputilanteita oppija käyttää *kuviokieltä* ja kertoessaan muutoskuvien tapahtumista hän jäsentää omaa ajatteluaan ja luo merkityksiä *luonnollisen kielen* avulla. Samasta kuvasta voidaan vielä tehdä laskulausekkeita matematiikan *symbolikieltä* käyttäen. *Taktiilisella toiminnan kielellä* taas tarkoitetaan erilaisten matemaattisten toimintavälineiden käyttöä. Sitä käytetään muiden kielten rinnalla esimerkiksi havainnollistamiseen, ja sillä on erityisen tärkeä rooli esi- ja alkuopetuksen matematiikassa.

TEHTÄVIÄ:

- Lapset saavat keksiä laskutarinoita ensin valmiista ennen ja jälkeen -kuvista. Aikuinen voi ensin kertoa esimerkkitarinan. Esimerkiksi: Lipaston päällä on kaksi nallea. Lelukauppias purkaa kuormaa ja tuo myyntiin kaksi nallea lisää, joten nyt yhteensä neljä nallea on myynnissä. Lopuksi tehdään lasku vielä symbolikielellä. Lisää ennen ja jälkeen -kuvia löytyy materiaalin lopusta.



$$2 + 2 = 4$$

- Lapset keksivät ja piirtävät omia tarinoita tyhjiin pohjiin. Tyhjiä pohjia löytyy materiaalin lopusta.
- Annetaan lasku tai jokin laskun luku valmiiksi. Lapset keksivät laskun loppuun sekä kertovat ja piirtävät tarinan. Esimerkiksi $___ + ___ = 10$ tai $8 - ___ = ___$
- Jos piirtäminen tuntuu lapsesta haastavalta, voi tarinoita tehdä yhtä hyvin valmiilla esineillä tai kuvilla ja valokuvata, jos ne halutaan saada talteen.

5. SANALLISET TEHTÄVÄT

- Opettaja kertoo yksinkertaisia sanallisia tehtäviä. Lapset laskevat tehtäviä linkkikuutioilla/muilla esineillä tai piirtämällä ensin ennen ja jälkeen-pohjaan sekä myöhemmin kymppikehykseen. Lopuksi tehdään laskut myös matematiikan symbolikielellä.
- Harjoitellaan myös kymmenen ylityksiä valmista kymppikehystä apuna käyttäen.
- Lapset saavat itse keksiä tarinoita toisilleen.
- **Vinkkejä:** Laskuja voidaan tehdä joko omalle paperille tai (äly)taululle niin, että jokainen saa vuorollaan tehdä taululle laskulausekkeen. Tehtävään on mahdollista lisätä matemaattisen ajattelun kielentämistä piirtämällä kerrottuja tehtäviä. Piirtää voidaan omalle paperille tai esimerkiksi vuorotellen (äly)taululle.

Esimerkiksi:

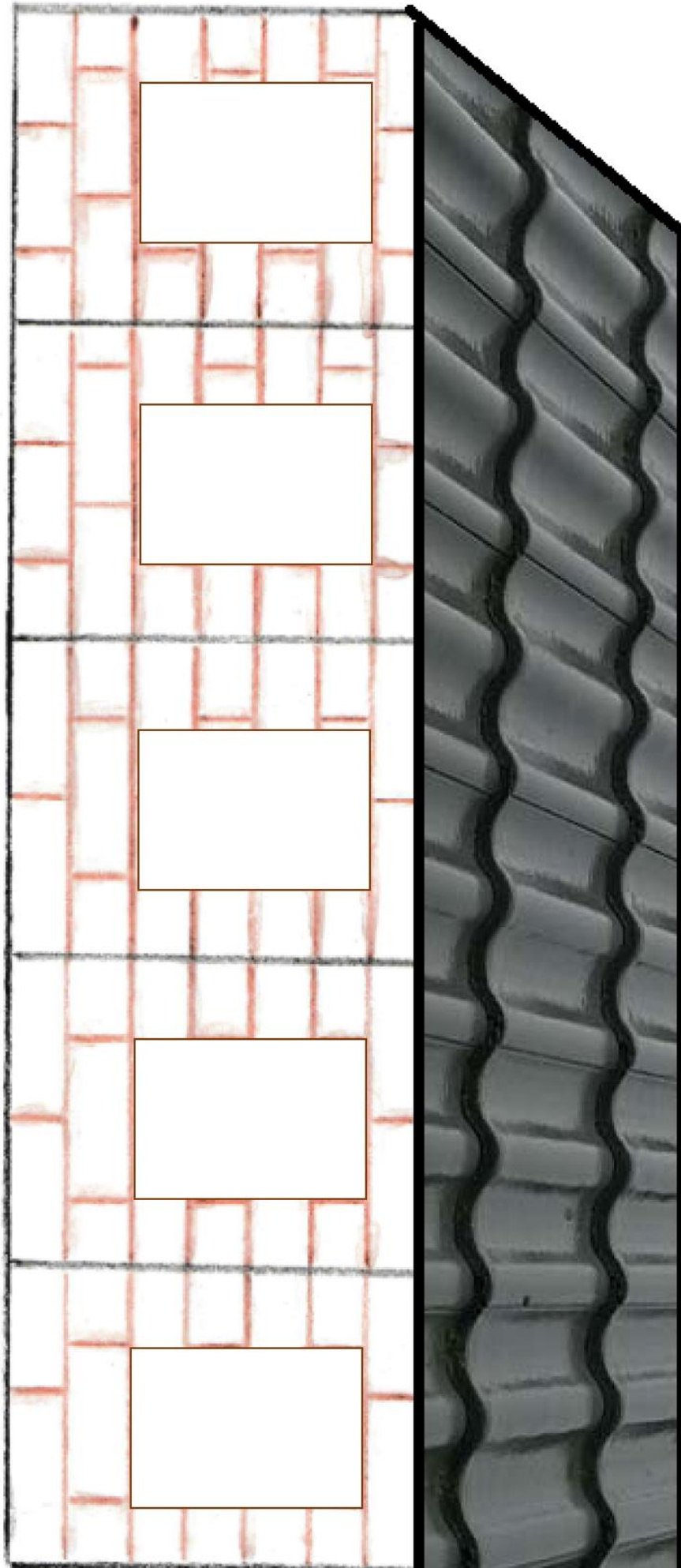
Isä poimii puusta seitsemän omenaa ja unohtaa omenat terassille. (Lapset laittavat ennen-kohtaan seitsemän linkkikuutiota.) Yön aikana peura käy syömässä neljä omenaa. Kuinka monta omenaa on aamulla jäljellä? (Lapset laittavat jälkeen-kohtaan jäljellä olevien omenoiden verran (kolme) linkkikuutiota.) Tehdään lasku $7 - 4 = 3$.

Koira on piilottanut tyynyn alle kolme luuta. (Lapset laittavat ennen-kohtaan kolme linkkikuutiota). Äiti ei tiedä piilosta ja tuo kaupasta vielä kolme luuta lisää. Kuinka monta luuta koiralla nyt on? (Lapset laittavat jälkeen-kohtaan luiden kokonaismäärän (kuusi) verran linkkikuutioita.) Tehdään lasku $3 + 3 = 6$.

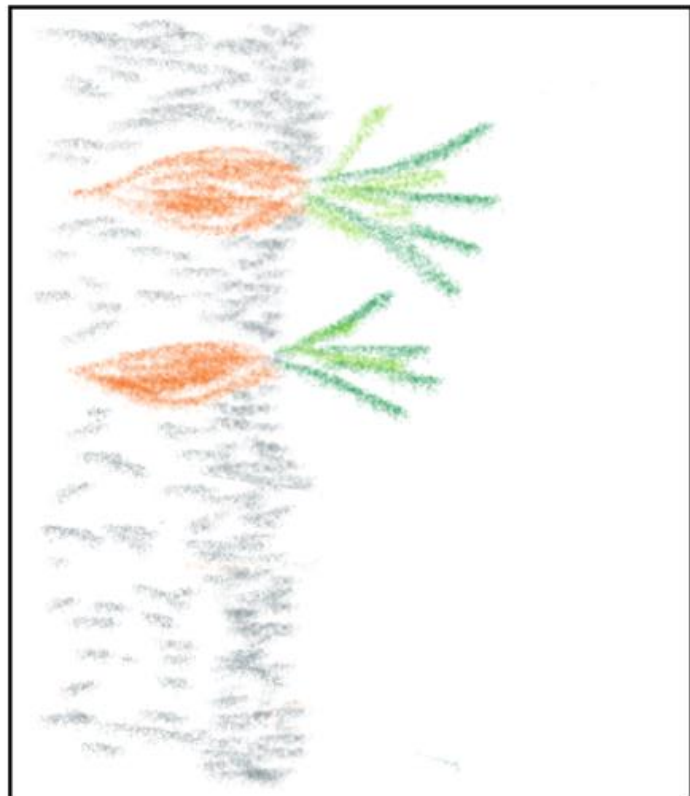
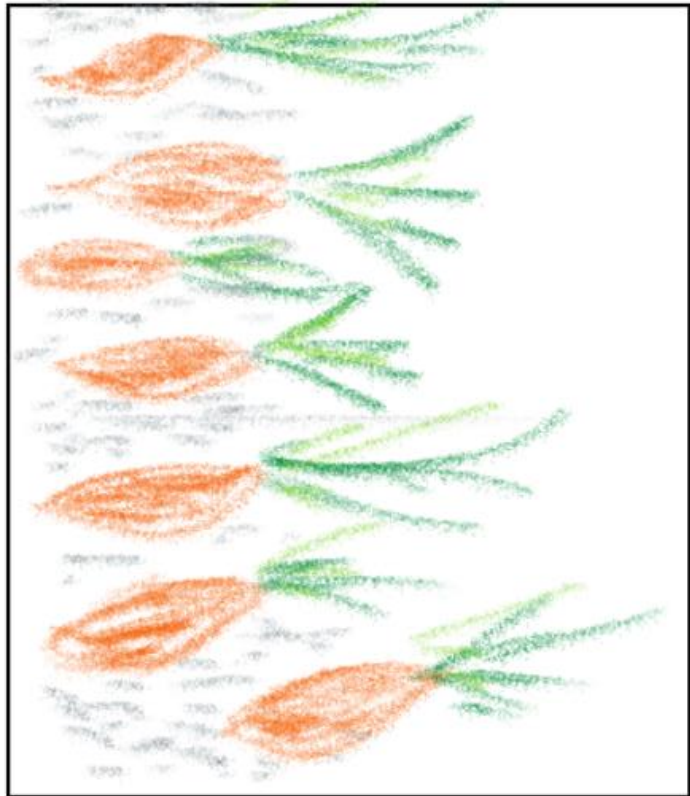
Tai kymppikehystä käyttäen:

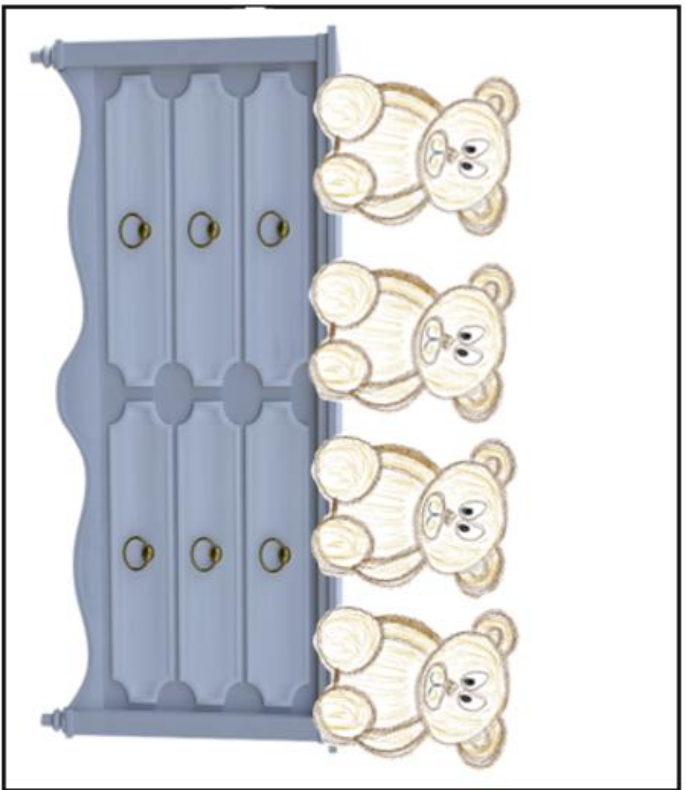
Kaisalla on seitsemän karkkia (täytetään seitsemän linkkikuutiota kymppikehykseen) ja hän saa ystävältään vielä viisi karkkia lisää. Täytetään kymppikehys täyteen ja mietitään

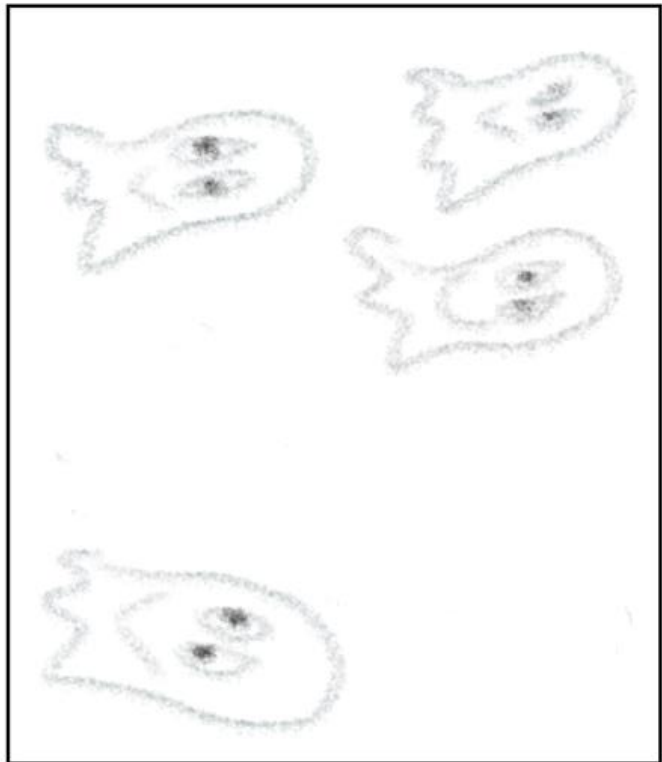
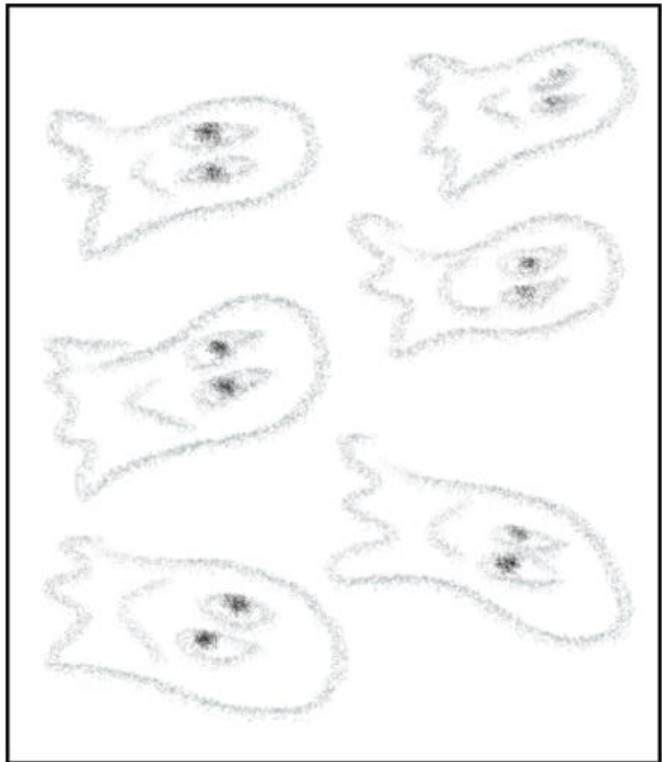
yhdessä, kuinka monta on vielä lisäämättä ja mihin ne laitetaan. Laitetaan loput kaksi linkkikuutiot toiseen kymppikehykseen. Mietitään yhdessä, montako karkkia Kaisalla nyt on, kun yksi kymppikehys on täynnä ja toisessa kehyksessä on kaksi. Tehdään lasku $7 + 5 = 12$.

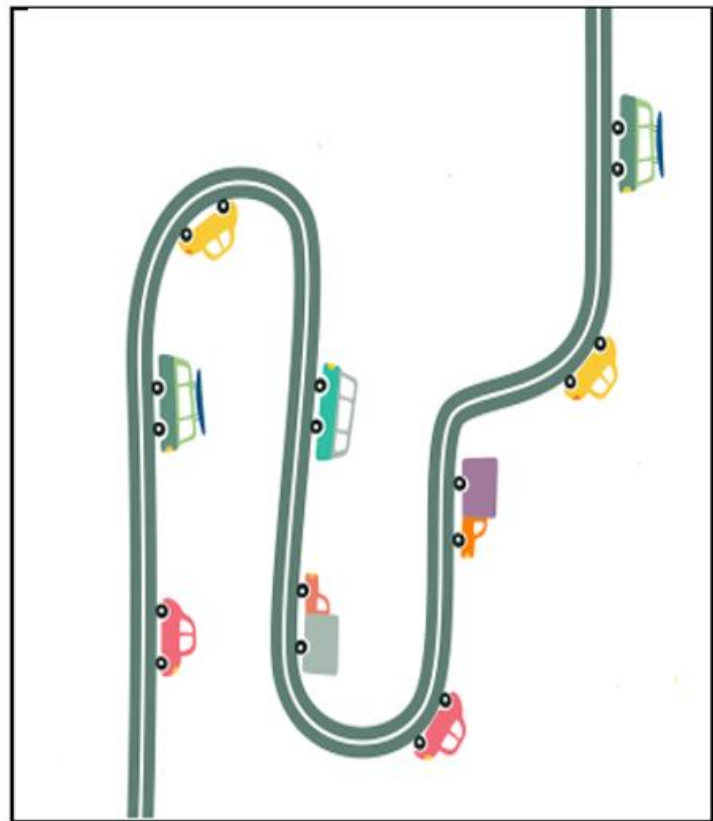
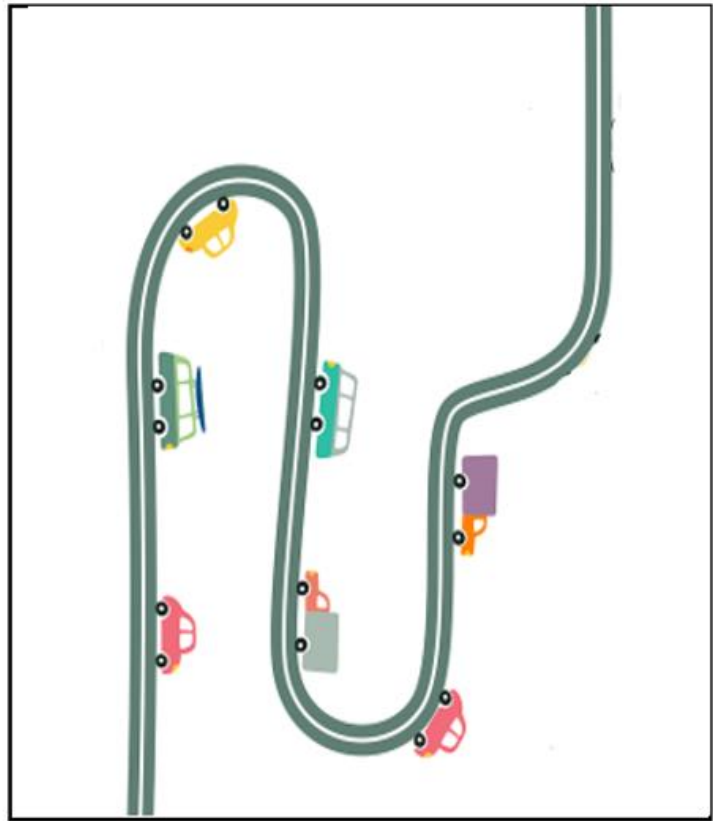




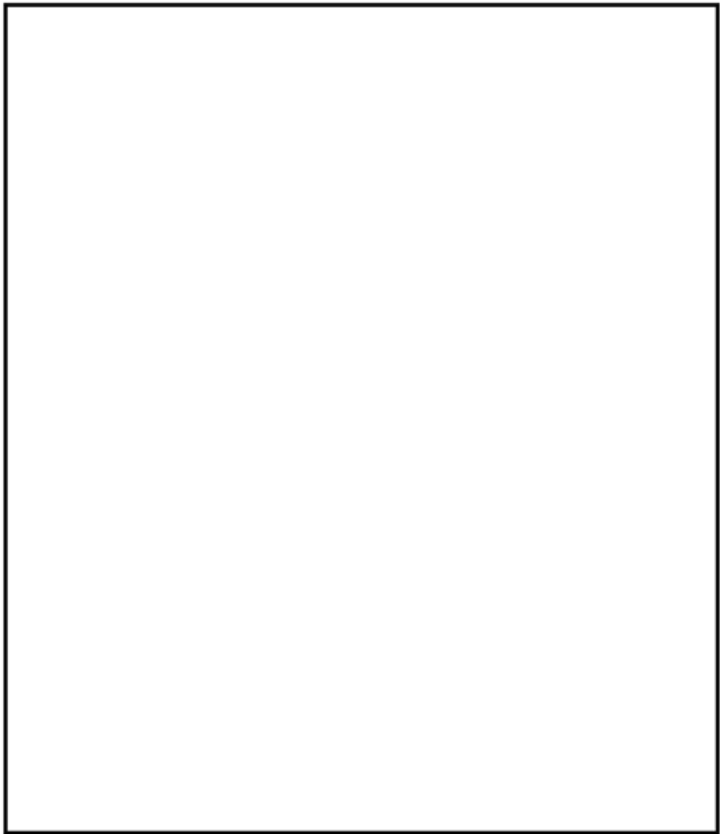








ENNEN



JÄLKEEN

