

Juho Kuupakko

# **FUNKTIONAALIANALYYSI ELEMENTTIMENETELMÄSSÄ**

Kandidaatintyö  
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta  
Huhtikuu 2024

# TIIVISTELMÄ

Juho Kuupakko: Funktionaalianalyysi elementtimenetelmässä

Kandidaatintyö

Tampereen yliopisto

Teknisten tieteiden kandidaattiohjelma, konetekniikka

Huhtikuu 2024

---

Tässä tutkielmassa käsitellään elementtimenetelmän (FEM) matemaattista teoriaa ja analysoidaan sen suppenevuuksia funktionaalianalyysin avulla. Sisätuloavaruuksien käsitteitä käyttämällä, voidaan elementtimenetelmän matematiikka esittää funktioavaruuksilla. Sekä elementit että elementtiavaruudet ovat tarkasti määriteltyjä. Tässä tutkimuksessa saadut tulokset antavat vastauksen sille, miten funktionaalianalyysi auttaa analysoimaan elementtimenetelmän virheitä ja approksimoimaan sen suppenevuuksia. Funktionaalianalyysin käytön edellyttämät oletukset voivat vaikuttaa tulosten yleistettävyyteen ja sovellettavuuteen tietyissä käytännön sovelluksissa. Tämän työn syvä ymmärrys elementtimenetelmän suppenevuusominaisuuksista funktionaalianalyysin näkökulmasta voi tarjota arvokasta tietoa numeerisen analyysin ja ratkaisutekniikoiden teoreettiseen kehitykseen. Tiivistettynä elementtimenetelmä on numeerinen menetelmä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

Avainsanat: elementtimenetelmä, finite element method, funktionaalianalyysi, funktionaaliavaruudet, poissonin yhtälö

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin Originality Check -ohjelmalla.

## SISÄLLYSLUETTELO

<b>1. JOHDANTO .....</b>	<b>1</b>
<b>2. ELEMENTTIMENETELMÄN MATEMAATTINEN PERUSTA.....</b>	<b>3</b>
2.1 Galerkin keino .....	3
2.2 Alueen verkottaminen .....	5
<b>3. SUPPENEMISOMINAISUUDET .....</b>	<b>9</b>
3.1 Lineaariset elementtiavaruudet ja solmuinterpolaatiot .....	9
3.2 Epäyhtälöt ja skaalaus .....	10
3.3 Solmujen interpoloinnin virheen arvio .....	12
3.4 Virhearviot .....	13
<b>4. YHTEENVETO.....</b>	<b>16</b>
<b>LÄHTEET .....</b>	<b>17</b>

# 1. JOHDANTO

Elementtimenetelmä eli FEM (eng. Finite Element Method) on numeerinen laskentamenetelmä, jolla voidaan ratkaista insinööritieteiden haastavia ongelmia. FEM:n käyttö alkoi 1950-luvulla Yhdysvalloissa, jolloin sitä käytettiin lentokoneolosuhteissa. Menetelmä levisi nopeasti muillekin tekniikan aloille, kuten rakennus- ja konetekniikkaan, jossa sitä hyödynnettiin dynamiikan ja statiikan käsittelyyn. (Liu, Wing Kam, Shaofan Li, and Harold S. Park, 2022) Menetelmän menestys perustuu sen kykyyn hyödyntää tietokoneita ja mahdollisuuteen laskea suuria ja monimutkaisia laskelmia nopeasti. Tämä oli mahdollista vasta, kun tietokoneiden laskentakapasiteetti oli riittävän korkealla tasolla. Elementtimenetelmän kehityksen alkuvaiheessa käytettiin suurimmaksi osaksi h-menetelmää. H-menetelmässä interpolaatiofunktioiden astelukua  $p$  pyritään minimoimaan samalla kun elementtiverkkoa tihennetään. Tämä on tietokoneen laskentakapasiteetille edullisempaa. P-menetelmässä puolestaan interpolaatiofunktioiden astelukua  $p$  kasvatetaan, jolloin tarkkaan arvoon suppeneminen tapahtuu nopeammin kuin h-menetelmässä. Näiden kahden menetelmän yhdistelmää kutsutaan hp-menetelmäksi. Siinä polynomien astelukua kasvatetaan ja elementtiverkkoa tihennetään.

FEM:n avulla voidaan tutkia rakenteen lujuusominaisuuksia approksimoiden jännityksiä ja venymiä. Tämä menetelmä on hyödyllinen, koska joidenkin kappaleiden ominaisuuksien laskeminen käsin voi olla todella vaikeaa, ellei jopa mahdotonta. Tämän lisäksi menetelmää voidaan soveltaa myös lämmönjakautumiseen ja sähkömagnetismiin. Menetelmässä tutkittavan kappaleen rakenne jaetaan pieniin tietyn kokoisiin ja muotoisiin osiin. Kaksiulotteisissa tapauksissa rakenne voidaan jakaa esimerkiksi kolmioihin tai neliöihin ja kolmiulotteisissa tapauksissa esimerkiksi tetraedreihin. Näitä osia kutsutaan elementeiksi. Yksittäisten elementtien osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisut tarjoavat matemaattisen perustan ohjelmistolle, joka kykenee tekemään tarkkoja analyyseja rakenteen tietyistä ominaisuuksista. Nykyään on kehitetty monia muita numeerisia ratkaisumenetelmiä, mutta FEM on osoittautunut näistä yleensä parhaimmaksi. Yleisiä FEM-laskentaohjelmistoja ovat esimerkiksi Ansys, Abaqus ja Femap. Elementtimenetelmässä kokeellinen ja tieteellinen tutkimus tekevät vahvaa

yhteistyötä eli kokeelliset tulokset voivat auttaa vahvistamaan elementtimenetelmän teoreettisia tuloksia. Toisaalta elementtimenetelmä voi tarjota selityksiä ja syvällisempää ymmärrystä havaituille kokeellisille ilmiöille. (Liu, Wing Kam, Shaofan Li, and Harold S. Park, 2022)

Työn tavoitteena on auttaa ymmärtämään, kuinka funktionaalianaalyyseja voidaan soveltaa elementtimenetelmän suppenemisominaisuuksien arviontiin. Tutkielma on tehty pääasiassa kirjoittajan oman teoreettisen tiedon pohjalta, mutta myös lähteistä on saatu apua etenkin yhtälöiden johtamiseen. Johdannossa käydään läpi elementtimenetelmän historiaa, periaatetta, toimivuutta sekä tämän tutkielman tarkoitusta. Toisessa luvussa käydään läpi yksinkertainen esimerkki elementtimenetelmästä sekä tutustutaan jäykkymatriisiin, kuormavektoriin ja alueen verkottamiseen kolmioelementeillä. Kolmannessa luvussa esitellään funktionaalianaalyyseja ja tutkitaan elementtimenetelmän suppenevuutta ja virhearvioita. Neljäs luku sisältää yhteenvedon tutkielmasta.

## 2. ELEMENTTIMENETELMÄN MATEMAATTINEN PERUSTA

Elementtimenetelmä on matemaattinen lähestymistapa, joka perustuu osittaisdifferentiaaliyhtälöiden variaatiomuotoon. Menetelmässä pyritään laskemaan funktion gradientti, mikä mahdollistaa yhtälöiden ratkaisun. Vaikka systeemissä voi olla edelleen tuntemattomia muuttujia solmuissa, jokaisen elementin palakohtaisista polynomeista koostuva funktio ja siihen liittyvä gradientti voidaan laskea erikseen jokaiselle elementille. Tämä tarkoittaa, että elementtiavaruuksia voidaan luoda monenlaisille geometrisille muodoille, kuten kolmioille. Lisäksi menetelmä kykenee käsittelemään monimutkaisiakin geometrisia kappaleita. (Susanne C. Brenner, 1994)

Reunaehtojen käsittely on luonteva osa elementtimenetelmää ja ne voidaan helposti sisällyttää heikkoon muotoon tai funktioavaruuteen. Tämä lähestymistapa tarjoaa vankan matemaattisen perustan, mikä tekee virheanalyysistä systemaattisempaa ja tarkempaa. Siksi elementtimenetelmät ovat erittäin suosittuja monenlaisten elliptisten yhtälöiden analysoinnissa, erityisesti monimutkaisilla ja epäsäännöllisillä alueilla. (Susanne C. Brenner, 1994)

### 2.1 Galerkin keino

Elementtimenetelmä on otettu käyttöön variaatio-ongelmien likimääräisten ratkaisujen löytämiseksi. Tarkastellaan esimerkkipongelmaa:

Poissonin yhtälö homogeenisilla Dirichlet-reunaehdoilla

$$-\Delta q = f \in U, q = 0 \in \partial U. \quad (1)$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet testifunktiolla  $w$ , integroidaan  $U$  yli ja käytetään osittaisintegrointia, jotta saadaan vastaava variaatioformulaation:

$$\text{Etsi } q \in V = W_0^1(U) := \{w \in L_2(U) \mid \nabla q \in L_2(U)\},$$

jotta

$$a(q, w) = (f, w), \quad \forall w \in V, \quad (2)$$

missä

$$a(q, w) = \int_U \nabla q \nabla w dx, \quad (f, v) = \int_U f v dx, \quad f \in L_2(U). \quad (3)$$

Tässä tapauksessa  $a(\cdot, \cdot)$  on selvästi bilineaarinen ja symmetrinen. Lisäksi, jos  $w = q$ , niin sekä  $a = 0$  että  $q$ :n gradientti on nolla. Tämä tarkoittaa, että  $q$ :n on oltava vakio, ja lisäksi sen täytyy olla nolla. Siksi  $a(\cdot, \cdot)$  määrittelee  $V$ :n sisätulon, ja siten ongelmalla on ainutlaatuinen ratkaisu Rieszin esityslauseella. (Szabo, B. A., Ivo. Babuška, 2011)

Tarkastellaan seuraavaksi menetelmäluokkaa, joka tunnetaan nimellä *Galerkin keinot*. Tätä menetelmää käytetään likimääräisten ratkaisujen löytämiseen. Tarkastellaan nyt äärellisen ulottuvuuden aliavaruutta  $V_h \subset V$ , olkoon  $V_h = \text{span}\{\phi_i\}$ . Jokaiselle funktiolle  $w \in V_h$  on ainutlaatuinen esitys:  $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N w_i \phi_i$ . Voimme siis määritellä isomorfismin  $V_h \cong \mathbb{R}^N$

$$w = \sum_{i=1}^N w_i \phi_i \leftrightarrow \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T \quad (4)$$

ja  $\mathbf{w}$  on  $w$ :n koordinaattivektori suhteessa kantaan  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ . Esitellään nyt lujuuslaskennasta tutut termit jäykkyyso-matriisi (eng. stiffness matrix)

$$\mathbf{A} = (a_{ij})^{N \times N}, \quad a_{ij} = (\phi_j, \phi_i) \quad (5)$$

ja kuormavektori (eng. load vector)

$$\mathbf{f} = \{ \langle f, \phi_k \rangle \}_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N. \quad (6)$$

Kerroinvektori  $\mathbf{q}$  voidaan selvittää ratkaisemalla seuraava lineaarinen algebrallinen yhtälöryhmä

$$\mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (7)$$

Määritelmän mukaan kahdelle funktiolle  $q, w \in V_h$ , ja niiden  $a(\cdot, \cdot)$  -sisätulo realisoituu matriisitulolla

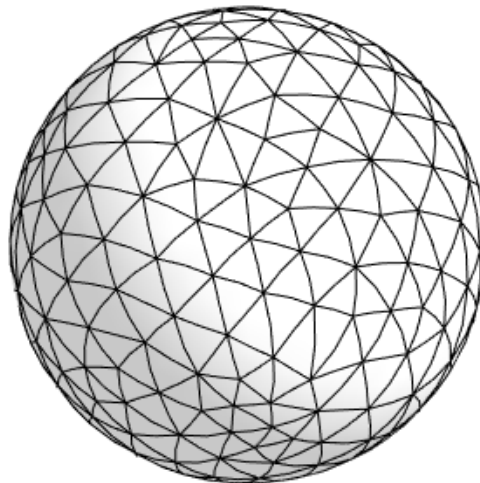
$$a(q, w) = a\left(\sum_i q_i \phi_i, \sum_j w_j \phi_j\right) = \sum_{i,j} a(\phi_i \phi_j) q_i w_j = \mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{q}. \quad (8)$$

Siksi mille tahansa vektorille  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$   $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} = a(q, q) \geq 0$  ja on 0, jos ja vain jos  $q$  on nolla. Tämä johtuu siitä, että  $\mathbf{A}$  on SPD-matriisi (symmetrinen ja positiivisesti definiitti), ja

siten ratkaisu  $\mathbf{q} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$  on olemassa ja ainutlaatuinen. (Szabo, B. A., Ivo. Babuška, 2011) Elementtimenetelmä on yksi suosituimmista esimerkeistä Galerkin keinoista, missä rakennetaan äärellisulotteinen aliavaruus  $V_h$  alueen kolmioilla.

## 2.2 Alueen verkottaminen ja vertailuelementti

Tässä kappaleessa keskitytään alueen verkotukseen kolmioilla, joita käytetään elementtimenetelmässä. Esitellään nyt kaksi osittamiseen liittyvää rakennetta. Ensimmäinen rakenne on verkon topologia, jonka ominaisuudet määrää kärkien kombinatorinen liitettävyyys. Toinen rakenne on geometrinen muoto, joka riippuu kärkien liitettävyydestä ja sijainnista. Vastaavasti on olemassa kaksi perusrakennetta, joita käytetään esittämään kolmiota. (Szabo, B. A., Ivo. Babuška, 2011) Kuvassa 1. on verkotettu yksikköpallo tetraedrisillä elementeillä.



Kuva 1. Yksikköpallo ositettu tetraedrielementteihin

Olkoon  $\mathbf{x}_i = (x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$  pisteitä joukossa  $\mathbb{R}^n$ . Kaikki  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$  eivät sijaitse samalla tasolla, jos vektorit  $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_1\mathbf{x}_{n+1}$  ovat riippumattomia toisistaan. Tämä vastaa matriisia:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Antamalla mikä tahansa piste  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , ja ratkaisemalla lineaarinen yhtälöryhmä

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

saamme ainutlaatuisia reaalilukuja  $\lambda_i(\mathbf{x})$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ ,  $n+1$  verran. Kaikille  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\mathbf{x}) = 1. \quad (11)$$

Kuperalle kuorelle, jossa on  $d+1$  määrä pisteitä  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+1} \in \mathbb{R}^n$

$$K := \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \mathbf{x}_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = [1, d+1], \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\} \quad (12)$$

määritellään geometrisesti  $d$ -elementiksi, jonka muodostavat kärjet  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+1}$ .

Kokonaisluvulle  $0 \leq m \leq d-1$ ,  $K$ :n  $m$ -ulotteinen pinta on mikä tahansa  $m+1$  kärjen muodostama  $m$ -elementti  $K$ :sta. Nollaulotteiset pinnat ovat pisteitä ja yksiulotteiset pinnat ovat  $K$ :n reunoja.  $(d-1)$ -pinta, joka on vastapäätä kärkeä  $\mathbf{x}_i$ , merkitään  $F_i$ :llä.

Lukuja  $\lambda_1(\mathbf{x}), \dots, \lambda_{d+1}(\mathbf{x})$  kutsutaan  $\mathbf{x}$ :n *barysentrisiksi koordinaateiksi* suhteessa pisteisiin  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+1}$  (Jenni Räsänen, 2014). Barysentrisillä koordinaateilla on yksinkertainen geometrinen merkitys. Kun on annettu  $\mathbf{x} \in K$ , olkoon  $K_i(\mathbf{x})$  elementti, jonka kärjet  $\mathbf{x}_i$  on korvattu  $\mathbf{x}$ :llä. Saamme yhtälöstä (10) ratkaistua

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \frac{|K_i(\mathbf{x})|}{|K|}, \quad (13)$$

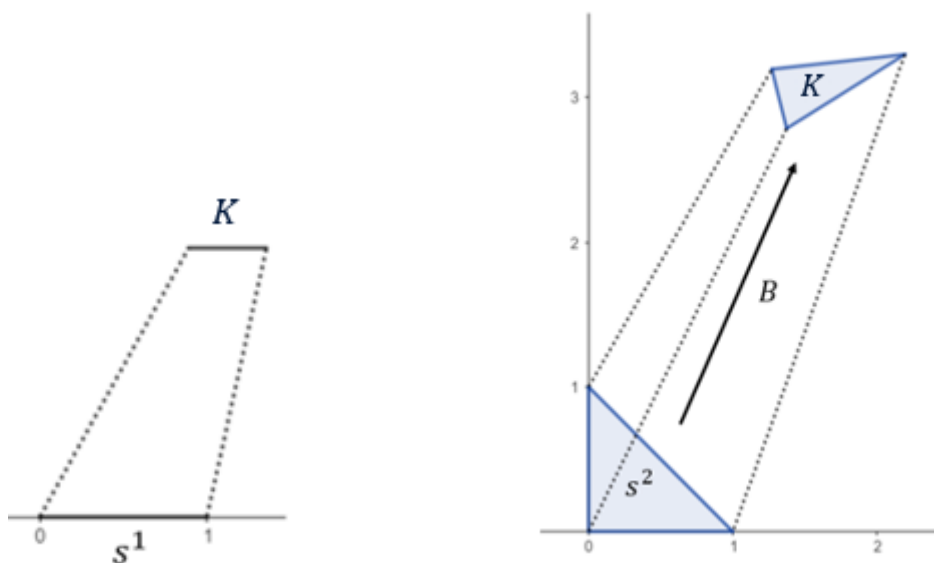
missä  $|\cdot|$  on Lebesguen mitta avaruudessa  $\mathbb{R}^d$ , kun pinta-ala on kaksiulotteinen ja tilavuus kolmiulotteinen. Huomataan, että  $\lambda_i(\mathbf{x})$  on affiinifunktio  $\mathbf{x}$  muuttujana ja häviää pinnalla  $F_i$ .



Kuva 2. Yhden ja kahden ulottuvuuden elementti

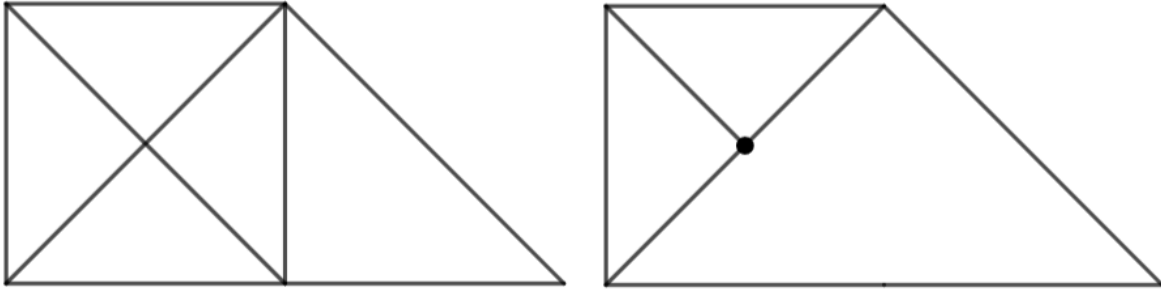
On kätevää käyttää elementtiä  $s^n \subset \mathbb{R}^n$ , jonka virittävät vektorit  $\mathbf{0}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ , missä  $\mathbf{y}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Sitten mikä tahansa elementti  $K$   $n$ -ulotteisessa  $\mathbb{R}$  avaruudessa voidaan ajatella kuvana  $s^n$  affiini kuvauksen  $B: s^n \rightarrow K$  kautta, jossa  $B(\mathbf{y}_i) = \mathbf{x}_i$ . Elementti  $s^n$ :ää kutsutaan usein myös *vertailuelementiksi*.

Jäykkyysmatriisin ja kuormavektorin arvojen laskeminen voi elementtikohtaisesti osoittautua kuitenkin monimutkaiseksi ja hitaaksi prosessiksi. Voimme hyödyntää toisenlaista lähestymistapaa käyttämällä yllä olevaa vertailuelementtiä, joka pysyy vakiona kaikille elementeille. Tämä näkyy kolmioille kahdessa ulottuvuudessa, kuten voimme todeta kuvasta 3. Tämän lähestymistavan keskeinen hyöty on mahdollisuus laskea Gaussin arviointipisteet vertailuelementille etukäteen. Tällä tavoin voimme suorittaa sisätulon laskemisen käyttämällä valmiiksi laskettuja arvoja jokaiselle elementille. Tämä poistaa tarpeen suorittaa laskelmat erikseen jokaiselle elementille, mikä puolestaan tehostaa laskentaa.



Kuva 3. Vertailuelementti yhdessä ulottuvuudessa (vas.) ja kahdessa ulottuvuudessa (oik.)

Tässä tutkielmassa rajoitumme ainoastaan yksinkertaisiin verkotuksiin eli kolmioilla osittamiseen. Voimme jakaa myös alueen muunkinlaisiin elementteihin esimerkiksi neliskulmisiin. Verkolle on asetettu kaksi ehtoa, jotka ovat tärkeitä FEM-laskennassa. Ensimmäinen vaatimus on topologinen ominaisuus. Verkkoa  $T$  kutsutaan mukautuvaksi tai yhteensopivaksi, jos minkä tahansa kahden elementin  $K$  ja  $K'$  leikkauspiste on joko tyhjä tai alemman ulottuvuuden elementti (solmut kahdessa ulottuvuudessa, solmut ja reunat kolmessa ulottuvuudessa).



Kuva 4. Mukautuva (vas.) ja ei-mukautuva (oik.)

Toinen vaatimus riippuu geometrisesta rakenteesta. Verkkojen joukkoa  $\mathcal{T}$  kutsutaan säännölliseksi, jos on olemassa vakio  $m_0$ , jolla

$$\max_{\tau \in \mathcal{T}} \frac{\text{diam}(K)^d}{|K|} \leq m_0, \forall T \in \mathcal{T}, \quad (14)$$

missä  $\text{diam}(K)$  on  $K$ :n läpimitta ja  $|K|$  on  $K$ :n mitta avaruudessa  $\mathbb{R}^d$ . Kahdessa ulottuvuudessa se vastaa kunkin kolmion vähimmäiskulmaa, joka on rajattu tasaisesti säännöllisen muodon luokan alle. Määritetään  $h_K = |K|^{\frac{1}{d}}$  mille tahansa  $K \in T \in \mathcal{T}$ . Ylemmän yhtälön mukaan  $h_K \simeq \text{diam}(K)$  esittää elementin  $K \in T$  kokoa säännöllisen muodon verkolle  $T \in \mathcal{T}$ . FEM-laskennassa tätä verkkoa kutsutaan yleensä  $T_h$ :ksi.

### 3. SUPPENEMISOMINAISUUDET

Elementtimenetelmän matemaattisen puolen kiinnostavimpia tutkimuskohteita ovat FEM-mallin suppenemisominaisuudet sekä kysymys siitä, onko mallilla olemassa ratkaisuja. Tutkimme yleisesti ratkaisujen olemassaoloa, jotta voimme selvittää, kannattaako muodostaa tai käyttää FEM-mallia eri tehtävissä. Jos mallilla ei ole lainkaan ratkaisua, sen käyttöä voidaan välttää. Suppenevuutta tutkitaan taas sen takia, että on kiinnostavaa tietää, miten nopeasti ja tarkasti malli approksimoi oikeaa ratkaisua. (Susanne C. Brenner, 1994) Tässä osiossa esitellään yksinkertaisin lineaarinen elementtiavaruus ja interpolointivirheen arvioimista.

#### 3.1 Lineaariset elementtiavaruudet ja solmuinterpolaatiot

Säännöllisen muodon verkolle  $T_h$  alueessa  $U$ , asetamme

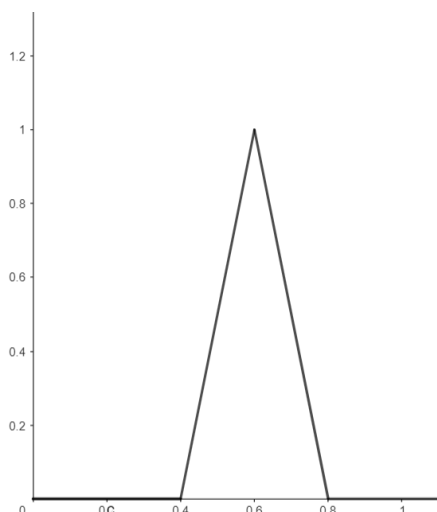
$$V_h := \{w \mid w \in C(\bar{U}), ja w|_K \in P_1, \forall K \in T_h\}, \quad (15)$$

jossa  $P_1(K)$  tarkoittaa 1-asteisten (lineaaristen) polynomien avaruutta  $K \in T_h$ .

Kun otamme huomioon reunaehdot, määrittelemme  $V_{h,0} = V_h \cap W_1^1(U)$ . Huomaamme tässä, että globaali jatkuvuus on välttämätön myös  $V_h$ :n määritelmässä siinä mielessä, että jos  $q \in W_1^1(U)$ , ja  $q$  on paloittain sileä, niin  $q$ :n tulisi olla jatkuva.

Käytämme kirjainta  $N$  merkitsemään äärellisten elementtiavaruuksien ulottuvuutta.  $V_h$ :lle  $N$  on lukumäärä verkon  $T_h$  pisteille ja avaruudelle  $V_{h,0}$ ,  $N$  on sisäpisteiden lukumäärä. Lineariselle alkioavaruudelle, meillä on ns. kantafunktiot solmuille  $\{\varphi_i, i = 1, \dots, N\}$  niin, että  $\varphi_i$  on paloittain lineaarinen ja  $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$  kaikille verkon  $T_h$  pisteille  $x_j$ . Siksi mille tahansa  $w_h \in V_h$  meillä on esitys:

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^N w_h(x_i) \varphi_i(x). \quad (16)$$



Kuva 5. Lineaarinen kantafunktio kahdessa ulottuvuudessa

Solmuinterpolaatiooperaattori  $I_h : C(\bar{U}) \rightarrow V_h$  määritellään seuraavasti

$$(I_h q)(x) = \sum_{i=1}^N q(x_i) \phi_i(x) \quad (17)$$

ja merkitty lyhyellä merkinnällä

$$q_I := I_h q. \quad (18)$$

## 3.2 Epäyhtälöt ja skaalaus

Olkoon  $\tilde{K} = s^n$  on  $n$ -elementti, jota kutsutaan myös vertailuelementiksi. Määritellään affiini kuvaus

$$F : \tilde{K} \rightarrow K \quad (19)$$

ja funktio

$$\tilde{w}_h(\tilde{x}) = w_h(F(\tilde{x})), \forall \tilde{x} \in \tilde{K}. \quad (20)$$

Affiini kuvaus  $F$  koostuu translaatiosta, rotaatiosta ja skaalauksesta. Pohjimmiltaan se on kuin muuttujien  $x = h\hat{x}$  skaalaus. Seuraava tärkeä suhde eli vertailuelementin ja normaalin elementin normien välinen ero, joka voidaan todistaa helposti vaihtamalla muuttujaa. Elementin muodon säännöllisyys tarvitaan sitomaan Jacobin-matriisin toinen normi ja sen determinantti  $h$ :n suhteen. (Szabo, B. A., Ivo. Babuška, 2011)

**Teoreema 3.2.1.** Kun  $K$  on säännöllisen muotoinen, meillä on

$$\|\tilde{D}^\alpha \tilde{w}\|_{0,p,\tilde{K}} \simeq h_K^{\frac{k-n}{p}} \|D^\alpha w\|_{0,p,K}, \quad \forall |\alpha| = k. \quad (21)$$

**Todistus.** Olkoon  $J = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}$  kuvauksen  $F$  Jacobin matriisi. Tällöin  $\tilde{V}\tilde{w} = J\nabla w$  ja näin ollen  $|\tilde{D}^\alpha \tilde{w}| \simeq h^k |D^\alpha v|$ . Vaihdetaan muuttuja  $dx = |J|d\tilde{x} \simeq h^n d\tilde{x}$ , saamme

$$\int_{\tilde{K}} |\tilde{D}^\alpha \tilde{w}|^p d\tilde{x} \simeq \int_K h^{kp} |D^\alpha w| h^{-n} dx, \quad (22)$$

josta seuraa lemma.

Kahdelle Banach avaruudelle  $B_0, B_1$ , jatkuvalla  $B_1 \rightarrow B_0$  seuraa, että kaikilla  $q \in B_1$  pätee

$$\|q\|_{B_0} \lesssim \|q\|_{B_1}. \quad (23)$$

Toiseen suuntaan  $\|q\|_{B_1} \lesssim \|q\|_{B_0}$  epäyhtälö ei välttämättä ole totta. Nyt tarkastellaan kahdella normilla varustettua elementtiavaruutta  $V_h \subset B_i, i = 0, 1$ . Kun  $h$  on kiinnitetty,  $V_h$ :n ulottuvuudet ovat äärellisiä. KUN Kaikki äärellisen avaruuden normit vastaavat toisiaan, on olemassa vakio  $C_h$  jolle pätee kaikilla  $q_h \in V_h$  epäyhtälö

$$\|q_h\|_{B_1} \leq C_h \|q_h\|_{B_0}. \quad (24)$$

Vakio  $C_h$  riippuu alueen koosta ja muodosta. Jos rajoitumme tarkastelemaan yhtä elementtiä  $K$  ja muuttamalla se vertailuelementiksi  $\tilde{K}$ , vakio normien vastaavuudelle ei riipu enää  $h$ :sta,

$$\|\tilde{q}_h\|_{B_{1,\tilde{K}}} \lesssim \|\tilde{w}_h\|_{B_{0,\tilde{K}}}. \quad (25)$$

Käyttämällä kuvausta  $F$ , voimme määrittää vakion verkotuksen koolla  $h$ . Tätä kutsutaan skaalausmuuttuja. (Szabo, B. A., Ivo. Babuška, 2011)

Esimerkiksi saamme seuraavia käänteisiä epäyhtälöitä

$$|q_h|_{1,K} \lesssim h^{-1} \|q_h\|_K, \quad (26)$$

$$\|q_h\|_{0,p,K} \lesssim h^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{t})} \|q_h\|_{0,t,K}, \quad 1 \leq t \leq p \leq \infty. \quad (27)$$

Tästä seuraa tarkentava teoreema

$$\|w\|_{0,p,U} \lesssim C(n,U)p^{1-\frac{1}{n}}\|w\|_{1,n,U}, 1 \leq p \leq \infty. \quad (28)$$

Käyttämällä käänteisiä epäyhtälöitä ja ylempää tulosta kaikille  $q_h \in V_h$ , saamme

$$\|w\|_\infty \lesssim h^{-\frac{n}{p}}\|w_h\|_{0,p} \lesssim h^{-\frac{n}{p}}p^{1-\frac{1}{n}}\|w_h\|_{1,n}. \quad (29)$$

Valitaan  $p = |\log h|$  ja huomaamalla, että  $h^{-\frac{n}{|\log h|}} \leq C$ , saadaan seuraavan diskreetin tuloksen: Kaikille  $w_h \in V_h$  pätee

$$\|w\|_\infty \lesssim |\log h|^{1-\frac{1}{n}}\|w_h\|_{1,n}. \quad (30)$$

Erityisesti, kun  $n=2$ , voimme ohjata suurinta elementtifunktion normia sen  $W_1$  normilla. Kuitenkin termi  $|\log h|$  kasvaa rajattomasti, kun  $h \rightarrow \infty$ . Tämä termi kasvaa todella hitaasti ja näyttää vakioilta järkevällä  $h$ :lla. (Hughes, Thomas J. R., 2000)

### 3.3 Solmujen interpoloinnin virheen arvio

Käytämme skaalausmuuttujaa interpoloinnin virheen  $|q - q_I|_{1,U} = |e_I|_{1,U}$  arvioimiseen.

**Teoreema 3.3.1.** Kaikille  $q \in W^2$ , jossa muuttujana on  $\mathbb{R}^n$  aliavaruus  $U$  ja äärelliselle lineaariselle avaruudelle  $V_h$ , jolla on verkko  $T_h$ , saamme

$$|e|_{1,U} \lesssim h|q|_{2,U}. \quad (31)$$

**Todistus.** Ensimmäiseksi Sobolevin teoreeman mukaan kaikille  $n \leq 3$  pätee  $W^2 \rightarrow C(\bar{U})$ . Näin ollen solmuinterpolointi  $q_I$  on hyvin määritelty.

Koska

$$|\tilde{q}|_{1,\tilde{K}} \leq \|\tilde{q}\|_{2,\tilde{K}}, \quad (32)$$

josta saadaan

$$|\tilde{q}_I|_{1,\tilde{K}} \lesssim \|\tilde{q}_I\|_{0,\infty,\tilde{K}} \leq \|\tilde{q}\|_{0,\infty,\tilde{K}} \lesssim \|\tilde{q}\|_{2,\tilde{K}},$$

ja saamme arvion vertailuelementissä kaikille  $\tilde{q} \in W^2(\tilde{K})$

$$|\tilde{e}_I|_{1,\tilde{K}} \leq |\tilde{q}|_{1,\tilde{K}} + |\tilde{q}_I|_{1,\tilde{K}} \lesssim \|\tilde{q}\|_{2,\tilde{K}}. \quad (33)$$

Solmuinterpolointi esitetään lineaarisilla polynomeilla esimerkiksi  $\tilde{p}_I = \tilde{p}$ ,  $\tilde{p} \in P_1(\tilde{K})$ , silloin

$$|\tilde{e}_I|_{1,\tilde{K}} = |(\tilde{q} + \tilde{p}) - (\tilde{q} + \tilde{p})_I|_{1,\tilde{K}} \lesssim \|\tilde{q} + \tilde{p}\|_{2,\tilde{K}}, \forall \tilde{p} \in P_1(\tilde{K}) \quad (34)$$

ja Bramble-Hilbertin lemman mukaan

$$|\tilde{e}_I|_{1,\tilde{K}} \lesssim \inf_{\tilde{p} \in P_1(\tilde{K})} \|\tilde{q} + \tilde{p}\|_{2,\tilde{K}} \lesssim |\tilde{q}|_{2,\tilde{K}}. \quad (35)$$

Nyt käyttämällä skaalausmuuttujaa saadaan vaihdettua epäyhtälö takaisin elementtiin  $K$ . Ensin

$$|\tilde{q}|_{2,\tilde{K}} \lesssim h_K^{2-\frac{n}{2}} |q|_{2,K}. \quad (36)$$

Vasemman puolen skaalaukseen tarvitsemme interpolointioperaattorin ominaisuutta

$$\widetilde{q - q_I} = \tilde{e}_I. \quad (37)$$

Sitten skaalausmuuttuja

$$h_K^{1-\frac{n}{2}} |q - q_I|_{1,K} \lesssim |\widetilde{q - q_I}|_{1,\tilde{K}} \lesssim |\tilde{e}_I|_{1,\tilde{K}}. \quad (38)$$

Yhdistämällä yllä olevat yhtälöt, joudumme tutkimaan interpoloinnin virheen arviota verkolle. Kaikille  $q \in W^2(U)$ ,

$$\begin{aligned} |e_I|_{1,K}^2 &= \sum_{K \in T_h} |e_I|_{1,K}^2 \\ &\lesssim \sum_{K \in T_h} h_K^2 |q|_{2,K}^2 \simeq h^2 |q|_{2,U}^2. \end{aligned} \quad (39)$$

### 3.4 Virhearviot

Nyt tarkastelemme toisen kappaleen esimerkkitehtävää, missä tehtävän tarkoituksena oli ratkaista Poissonin yhtälö elementtimenetelmällä. Esimerkkitehtävässä halutaan käyttää erityisesti Galerkin keinoa valitsemalla verkkoon  $T_h$  perustuva aliavaruus  $V_h \subset V$ . Eli elementtimenetelmän arvionti tulee olemaan:

Etsi  $q_h \in V_h$ ,

jotta

$$a(q_h, w_h) = \langle f, w_h \rangle, \forall w_h \in V_h. \quad (40)$$

Olemassaolo ja ainutlaatuisuus seuraa Rieszin esittämästä teoreemasta, koska  $f \in V' \subset V_h'$  on myös jatkuva ja lineaarinen avaruudessa  $V_h$ . Tämän ja Poincarén epäyhtälön takia,  $a(\cdot, \cdot)$  määrittää sisätulon  $W_0^1(U)$ . (Hans-Olav Tylli, Kari Astala Petteri Piiroinen, 2010)

$W^1$ :  $n$  virhearvio saadaan derivoimalla tärkeä ortogonaalisuustulos projektiolle. Olkoon  $q$  ja  $q_h$  ratkaisuja jatkuville ja diskreeteille yhtälöille

$$a(q, w) = \langle f, w \rangle, \forall w \in W_0^1(U) \quad (41)$$

$$a(q_h, w) = \langle f, q \rangle, \forall w \in V_h. \quad (42)$$

Valitsemalla  $w \in V_h$  kummassakin yhtälössä ja vähentämällä ne toisistaan, saamme tärkeän ortogonaalisuuden

$$a(q - q_h, w_h) = 0, \forall w_h \in V_h, \quad (43)$$

mistä seuraa approksimaatio

$$\|\nabla(e_h)\| = \inf_{w_h \in V_h} \|\nabla(q - w_h)\|. \quad (44)$$

**Teoreema 3.4.1.** Olkoon  $q$  ja  $q_h$  ratkaisuja jatkuville ja diskreeteille yhtälöille. Kun  $q \in W^2(U) \cap W_0^1(U)$ , saamme seuraavan arvion

$$\|\nabla(e_h)\| \lesssim h\|q\|_2. \quad (44)$$

Lisäksi kun  $W^2$  säännöllisyystulos pitää paikkansa, saamme

$$\|\nabla(e_h)\| \lesssim h\|f\|. \quad (45)$$

**Todistus.** Kun  $q \in W^2(U) \cap W_0^1(U)$ , solmujen interpolaatio-operaattori on hyvin määritelty. Yhtälön

$$\|\nabla(e_h)\| = \inf_{w_h \in V_h} \|\nabla(q - w_h)\| \quad (46)$$

mukaan saamme

$$\begin{aligned} & \|\nabla(e_h)\| \\ & \leq \|\nabla(e_I)\| \\ & \lesssim h\|q\|_2 \\ & \lesssim h\|f\|, \end{aligned}$$

jossa toisen  $\lesssim$  kohdalla käytimme interpolaatio-operaattoria ja kolmannen kohdalla säännöllisyystulosta.

Nyt tarkastelemme  $\|e_h\| = \|q - q_h\|$  arviota.

**Teoreema 3.4.2.** Olkoon  $q$  ja  $q_h$  ratkaisuja jatkuville ja diskreeteille yhtälöille. Oletetaan, että  $W^2$  säännöllisyystulos pitää paikkansa. Tällöin saamme seuraavan approksimaation  $W^2$  normissa

$$\|e_h\| \lesssim h^2\|q\|_2. \quad (47)$$

**Todistus.** Säännöllisyystuloksen takia, on olemassa  $v \in W^2(U) \cap W_0^1(U)$ , jolle pätee

$$a(v, w) = (e_h, w), \forall w \in W_0^1(U) \quad (48)$$

ja  $\|v\|_2 \leq C\|e_h\|$ . Valitsemalla  $w = q - q_h$  yllä olevassa yhtälössä, saamme

$$\begin{aligned} \|e_h\|^2 &= a(v, q - q_h) \\ &= a(v - v_I, q - q_h) \\ &\leq \|\nabla(v - v_I)\| \|\nabla(e_h)\| \\ &\lesssim h\|v\|_2 \|\nabla(e_h)\| \\ &\lesssim h\|e_h\| \|\nabla(e_h)\|. \end{aligned} \quad (49)$$

Jakamalla kummatkin puolet termillä  $\|e_h\|$ , saamme

$$\|e_h\| \leq Ch\|\nabla(e_h)\| \lesssim h\|q\|_2. \quad (50)$$

Arviolle  $W^1$  normissa, kun  $u$  on riittävän sileä, saamme optimaalisen ensimmäisen kertaluvun arvion.  $L^2$  normille tämä vaatii  $W^2$ :n elliptistä säännöllisyyttä. (Susanne C. Brenner, 1994) Saadut tulokset osoittavat, että elementtimenetelmä konvergoituu tiettyyn ratkaisuun riittävällä tarkkuudella tietyissä tapauksissa. Tästä johtuen pystymme approksimoimaan menetelmästä syntyviä virheitä tarkasti.

## 4. YHTEENVETO

Tässä työssä tutkimme elementtimenetelmän suppenevuutta funktionaalialyysin avulla. Tarkastelimme aihetta yksinkertaisen esimerkin avulla, jonka ratkaisun arviointiin pääsimme lopussa. Tämän aiheen tutkiminen on tärkeää, koska yleisesti ottaen meidän ei kannata alkaa ratkaisemaan vaikeaa osittaisdifferentiaaliyhtälöä, jos tiedämme, että ratkaisu ei suppene koskaan. Tutkielmassa todistimme tarvittavat teoreemat ja saimme halutut lopputulokset. Tuloksien pohjalta voimme sanoa, että FEM:n antamat ratkaisut suppenevat kohti oikeaa ratkaisua.

Jatkotutkimusideoina on epälineaaristen ongelmien ratkaisu, eli voisimme tutkia, miten funktionaalialyysi voi auttaa käsittelemään epälineaarisia ongelmia elementtimenetelmässä. Esimerkiksi voisimme kehittää epälineaarisia iteraatiomenetelmiä, jotka perustuvat funktionaalialyysiin. Kiinnostava tutkimuskohde voisi myös olla se, että tutkittaisiin, kuinka herkästi tietyt parametrit ja reunaehdot vaikuttavat ratkaisun suppenemiseen. Nämä jatkotutkimusideat voisivat auttaa edistämään ymmärrystä funktionaalialyysin roolista ja käytöstä elementtimenetelmässä, sekä avaamaan uusia mahdollisuuksia menetelmän parantamiseen.

# LÄHTEET

[1] Liu, Wing Kam, Shaofan Li, and Harold S. Park. “Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future.” *Archives of computational methods in engineering* 29.6 (2022): 4431–4453.

[2] Szabo, B. A. (Barna Aladar), and Ivo. Babuška. *Introduction to Finite Element Analysis Formulation, Verification and Validation*. Chichester, West Sussex: Wiley, 2011.

[3] Susanne C. Brenner. *The mathematical theory of finite element methods*. Toim. L. Ridgeway Scott. *Texts in applied mathematics*. New York: Springer, 1994.

[4] Hughes, Thomas J. R. *Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New York: Dover Publications, 2000.

[5] Hans-Olav Tylli, Kari Astala Petteri Piiroinen. *Funktionaalianalyysin peruskurssi*. *Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin Yliopisto*, 2010.

[6] Jenni Räsänen, *Barysentriinen koordinaattisysteemi sekä pisteen konjugaatio kolmion suhteen*, Pro gradu -tutkielma, Helsingin Yliopisto, 2014.