Tampereen yliopisto

Aaro Vuolteenaho

SUHTEELLINEN VAALITAPA MATEMAATTISENA ILMIÖNÄ

Oppimateriaalin kehittämistutkimus

Diplomityö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Toukokuu 2024

TIIVISTELMÄ

Aaro Vuolteenaho: Suhteellinen vaalitapa matemaattisena ilmiönä
Diplomityö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen DI-ohjelma
Toukokuu 2024

Yhteiskunnallisiin instituutioihin valitaan edustajia demokraattisilla vaaleilla. Vaalituloksien määrittämisessä käytetään jotakin vaalitapaa ja laskentamenetelmää vaalitavan soveltamiseksi. Suomessa yleiset vaalit järjestetään suhteellisen vaalitavan mukaisesti d'Hondtin menetelmää hyödyntäen presidentinvaalia lukuun ottamatta. Vaalituloksien muodostumisen ymmärtämisen ja tulkitsemisen kannalta on olennaista tunnistaa, että kyseessä on matemaattinen ilmiö. Lisäksi on tärkeätä tiedostaa, että eri laskentamenetelmien antamat vaalitulokset eroavat toisistaan ja suosivat erikokoisia puolueita ja ryhmittymiä.

Työn tavoitteena oli luoda oppimateriaali yläkoululaisille ja lukiolaisille, jonka avulla he voivat tutustua suhteelliseen vaalitapaan matemaattisena ilmiönä. Vaalituloksien laskemista käsitellään tyypillisesti yhteiskuntaopin opetuksessa. Tämän myötä oppimateriaalin tavoitteena on näyttää, että vaalit ovat aihe, jossa yhdistyvät sekä matematiikan että yhteiskuntaopin näkökulmat.

Työn pedagogisena viitekehyksenä oli kirjoittaminen oppimista varten -työskentelytapa, josta käytetään englanninkielisessä kirjallisuudessa termiä Writing to Learn. Sen tarkoituksena on edistää oppimista kirjoittamisen avulla ja sitä voidaan soveltaa erilaisten tehtävätyyppien avulla, joita hyödynnetään oppimateriaalissa. Oppimateriaali koostuu kahdesta luvusta, joista toinen käsittelee lukusarjamenetelmiä, joka esimerkiksi d'Hondtin menetelmä on. Toisen luvun aiheena on kvoottimenetelmät. Suomessa kvoottimenetelmistä käytetään Haren menetelmää määritettäessä, kuinka monta kansanedustajaa valitaan kustakin Manner-Suomen vaalipiiristä eduskuntavaaleissa. Laskentamenetelmien synnyttämiä eroja vaalituloksien kannalta kuvataan työn matemaattisessa osuudessa määrittämällä vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos eri lukusarja- ja kvoottimenetelmillä.

Oppimateriaali luotiin kehittämistutkimuksena ja sen ensimmäistä versiota kehitettiin matematiikan ja yhteiskuntaopin aineenopettajien teemahaastatteluista kerätyn haastatteluaineiston avulla. Teemahaastatteluissa pyrittiin lisäksi selvittämään aineenopettajien näkemyksiä oppiainerajat ylittävistä oppimiskokonaisuuksista ja vaalimatematiikan opettamisesta.

Tulosten perusteella oppiainerajat ylittävissä oppimiskokonaisuuksissa voi olla aiheita sekä opetussuunnitelmasta että sen ulkopuolelta. Kokonaisuuden tulisi kuitenkin soveltua kaikille oppijan osaamisesta riippumatta. Aineenopettajat kokivat vaalimatematiikan hyväksi aiheeksi matematiikan soveltamiseksi osana muita oppiaineita. D'Hondtin menetelmään keskittymistä pidettiin mielekkäänä valintana, mutta vaalimatematiikan opetuksessa tulisi tehdä se huomio, että d'Hondtin menetelmän ohella on olemassa muita laskentamenetelmiä. Oppimateriaalia pidettiin haastavana. Oppimateriaalilla on kuitenkin erilaisia käyttömahdollisuuksia, sillä sen koettiin soveltuvan sekä yläkouluun että lukioon. Lukiolaisia pidettiin yläkoululaisia soveltuvampana kohderyhmänä, mutta yläkoulussa oppimateriaalia voisi käyttää esimerkiksi ylöspäin eriyttämiseen.

Avainsanat: suhteellinen vaalitapa, vaalimatematiikka, lukusarjamenetelmät, kvoottimenetelmät, kehittämistutkimus, oppimateriaali

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ABSTRACT

Aaro Vuolteenaho: Proportional Representation as a Mathematical Phenomenon
Master of Science Thesis
Tampere University
Master's Programme in Science and Engineering
May 2024

Democratic elections are used to elect representatives to social institutions. To determine election results, it is necessary to choose the electoral system and the apportionment method. Apart from presidential election, general elections in Finland are proportional and election results are determined by the D'Hondt method. To understand how election results are formed, it is essential to know that elections and voting are mathematical phenomena. It is also important to note that the election results differ when different apportionment methods are used.

The purpose of this thesis was to develop a learning material to teach proportional representation as a mathematical phenomenon. The learning material is aimed at lower secondary schools and general upper secondary education. The goal of the learning material is to demonstrate that viewpoints of mathematics and social studies are needed to understand elections and voting.

A strategy called Writing to Learn was the pedagogical framework of this study. Its idea is to promote learning through writing and it can be utilized in teaching using different task types, which are part of the learning material.

The learning material consists of two parts. The first part concerns divisor methods, which include for instance the D'Hondt method. The second part covers quota methods. The Hare method is an example of quota methods. It is used to determine how many Members of Parliament will be elected from each electoral district in Mainland Finland in the parliamentary elections. The differences between apportionment methods are illustrated by calculating the election result of the Finnish parliamentary elections in 2023 with different divisor and quota methods.

This study was carried out as design-based research. The research included focused interviews whose participants were mathematics and social studies subject teachers. The objective of the interviews was to gather feedback and suggestions for improvement on the first version of the learning material. The interviews also aimed to collect information on subject teachers' opinions about the cross-curricular learning modules and the mathematics of elections and voting as a topic to be taught.

The findings indicate that the cross-curricular learning modules can include themes both within and outside the curriculum. Nonetheless, it is important that the modules are suitable for every learner regardless of their abilities. The subject teachers stated that the mathematics of elections and voting was a good theme to apply mathematics as part of other subjects. Focusing on the D'Hondt method was considered a meaningful choice. Additionally, it would be reasonable to point out that the D'Hondt method is not the only apportionment method that could be applied for determining the election results. The subject teachers argued that the learning material was challenging but it could be used various ways. The learning material may be more suitable for general upper secondary education than for lower secondary schools. At lower secondary schools, one option is to use the learning material for upward differentiation of teaching.

Keywords: proportional representation, mathematics of elections and voting, divisor methods, quota methods, design-based research, learning material

DIPLOMITYÖSSÄ KÄYTETYT TEKOÄLYTYÖKALUT

Diplomityössä käytetyt tekoälytyökalut ja niiden käyttötarkoitukset on kuvailtu alla Taulukossa 1. Vierailla kielillä tarkoitetaan muita kuin suomen kieltä. Tekoälytyökaluja ei ole käytetty suomenkielistä tiivistelmää laadittaessa.

Taulukko 1. *Diplomityössä käytetyt tekoälytyökalut ja niiden käyttötarkoitukset.*

Työkalun nimi	Käyttötarkoitus
Copilot (TUNI-tunnuksella)	Tekstin kielenhuolto. Käytetty englanninkielisen tiivistelmän (Abstract) ja lukujen 1–3 yhteydessä.
DeepL	Terminologian ja käsitteiden sekä lyhyiden ilmaisujen kääntäminen vieraista kielistä suomeksi.
Google Kääntäjä	Vieraskielisten verkkosivujen kääntäminen suomeksi.
Microsoft Word	Tekstin kielenhuolto. Käytetty lukujen 1–7 yhteydessä.
MOT Kielentarkistin®	Tekstin kielenhuolto. Käytetty englanninkielisen tiivistelmän (Abstract) laatimisessa.
MOT Sanakirjat®	Terminologian ja käsitteiden kääntäminen vieraista kielistä suomeksi.

Olen tietoinen siitä, että olen täysin vastuussa koko opinnäytteeni sisällöstä, mukaan lukien tekoälyllä tuotetut osat, ja hyväksyn vastuun mahdollisista julkaisueettisten normien rikkomuksista.

ALKUSANAT

Politiikka ja vaalit ovat aina kiinnostaneet minua. Kesällä 2023 pohtiessani diplomityöni aihetta sain ajatuksen siitä, että diplomityöni aihe voisi liittyä vaalimatematiikkaan. Nyt voin todeta, että aihevalintani onnistui erittäin hyvin. Diplomityöprosessi on ollut hyvin opettavainen ja olen päässyt sen aikana kehittämään osaamistani monipuolisesti. Vaikka työstä tuli lopulta laaja, työn aiheen kiinnostavuus ja innostavuus teki diplomityöprosessista antoisan.

Haluan esittää kiitokseni työni ohjaajille Terhi Kaarakalle ja Jussi Kankaalle asiantuntevasta ohjauksesta. Heidän rakentavat ja kannustavat kommentit veivät työtäni koko ajan eteenpäin. Ohjaajieni ohella kiitän Riikka Kangaslampea syyslukukaudella 2023 järjestetystä syventävien opintojen tutkielmaseminaarista, joka loi hyvän pohjan diplomityön tekemiselle.

Erityisesti haluan kiittää perhettäni kannustuksesta ja tuesta opiskelua kohtaan. Haluan kiittää myös opiskelukavereitani kuluneista opiskeluvuosista.

Tampereella, 6. toukokuuta 2024

Aaro Vuolteenaho

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$DQ1, DQ2, DQ3$	Droopin kvootin variantit
DrQ	Droopin kvootti
$HQ1, HQ2$	Haren kvootin variantit
HaQ	Haren kvootti
$\langle\cdot\rangle$	pyöristys neutraalilla orientaatiolla
$\lceil\cdot\rceil$	kattofunktio
$\lfloor\cdot\rfloor$	lattiafunktio
$\mathbb{N}$	luonnollisten lukujen joukko
$\mathbb{N}^l(h)$	kaikkien paikkavektorien joukko
$\mathbb{Z}_+$	positiivisten kokonaislukujen joukko
$\mathbf{r}$	minimivaatimusten vektori
$\mathbf{v}$	äänivektori
$\mathbf{x}$	paikkavektori
h	vaaleissa jaettavien paikkojen lukumäärä
l	vaaleihin osallistuvien puolueiden lukumäärä
m	kvoottimenetelmien pääjaossa jaettujen paikkojen lukumäärä
v_+	äänivektorin $\mathbf{v}$ komponenttien summa
v_i	puolueen i vaaleissa saamien äänien lukumäärä
x_+	paikkavektorin $\mathbf{x}$ komponenttien summa
x_i	puolueen i vaaleissa saamien paikkojen lukumäärä
OPS	opetussuunnitelma
WTL	kirjoittaminen oppimista varten (engl. Writing to Learn)

1. JOHDANTO

Yleisiä valtakunnallisia vaaleja toimitetaan Suomessa lähes vuosittain ja saman vuoden aikana voi olla useammat kuin yhdet vaalit, kuten vuonna 2024, kun saman vuoden aikana toimitetaan sekä presidentinvaali että europarlamenttivaalit [49]. Demokratian toteutumiseen vaikuttaa olennaisesti se, millä tavalla vaalitulos lasketaan. Vaalitulos muodostuu erilaiseksi sen mukaan, mitä *vaalitapaa* (engl. *electoral system*) ja *laskentamenetelmää* valitun vaalitavan käyttämiseksi sovelletaan. Suomessa käytetään yleisissä vaaleissa presidentinvaalia lukuun ottamatta *suhteellista vaalitapaa* (engl. *proportional representation*) ja d'Hondtin laskentamenetelmää [32, s. 8, 18, 27, 30]. Näitä vaaleja ovat eduskunta-, kunta-, alue- ja europarlamenttivaalit. Kyseisissä vaaleissa puolueiden ja muiden ryhmittymien saamien edustajanpaikkojen suhteen jaettavien edustajanpaikkojen lukumäärään tulisi olla yhtä suuri kuin niiden saamien äänimäärien suhde kaikkiin vaaleissa annettuihin ääniin verrattuna suhteellisen vaalitavan periaatteen mukaisesti [59, s. 29].

Eduskuntavaaleissa ongelmaksi on muodostunut vaalipiirien väliset merkittävät erot siinä, kuinka suuri osuus annetuista äänistä vaaditaan edustajanpaikan saamiseksi, minkä vuoksi eri vaalipiirien äänestäjät ovat eriarvoisessa asemassa [19, s. 7–9][54, s. 45–46]. Yhdeksi vaihtoehdoksi ongelman ratkaisemiseksi on esitetty d'Hondtin laskentamenetelmän vaihtamista johonkin toiseen suhteellisen vaalitavan laskentamenetelmään [19, s. 11–12][54, s. 47]. Jos eduskuntavaalien tuloksen laskentaa uudistetaan tulevaisuudessa, yhtenä huomioitavana näkökulmana on vaalituloksen teknisen laskemisen ohella se, kuinka ymmärrettävää vaalituloksen määräytyminen on äänestäjän kannalta [54, s. 72, 80].

Perusopetuksen [56] ja lukion [47] opetussuunnitelmien perusteissa ei puhuta suoraan vaaleista eikä vaalituloksien laskemisesta vaan niissä puhutaan tähän liittyen enemmänkin vaikuttamisesta ja vallankäytöstä. Tämä jättää oppikirjailijoille ja aineenopettajille suuren vastuun siitä, millä tavalla vaalituloksien laskemisesta käsitellään opetuksessa. Samalla herää kysymys siitä, millä tasolla yläkoululaiset ja lukiolaiset tuntevat Suomen vaalijärjestelmän ja sen, kuinka vaalitulokset määräytyvät. Suhteellista vaalitapaa ja sen eri laskentamenetelmiä voidaan tutkia matemaattisesti, jolloin matematiikka nivoutuu luontevasti yhteiskunnallisen ilmiön eli vaalien kuvaamiseen. Eri tiedonaloja yhdistävä työskentely on esille sekä perusopetuksen [56, s. 31] että lukion [47, s. 19] opetussuunnitelmien perusteissa. Tällöin on mielekästä tarkastella vaaleihin liittyviä aiheita matematiikan ja yhteiskuntaopin opetuksen yhteistyönä.

Työn tavoitteena on luoda oppimateriaali suhteellisen vaalitavan keskeisten laskentamenetelmien opettamiseksi. Oppimateriaaliin valitut laskentamenetelmät ovat lukusarja- ja kvoottimenetelmät. Oppimateriaali keskittyy suhteelliseen vaalitapaan matemaattisena ilmiönä, mutta sen tavoitteena on myös näyttää oppijalle, että matematiikan opetukseen voidaan liittää yhteiskuntaopin aiheita, kuten vaaleja. D'Hondtin menetelmän lisäksi oppimateriaalissa käsitellään muitakin laskentamenetelmiä, jotta oppija tunnistaa vaalituloksen riippuvan käytettävästä laskentamenetelmästä. Oppimateriaali luodaan kehittämistutkimuksen keinoin toteuttamalla yksi kokonainen kehittämissykli. Oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta kerätään palautetta matematiikan ja yhteiskuntaopin aineenopettajien teemahaastattelujen avulla, joiden pohjalta kehitetään oppimateriaalin toinen versio. Teemahaastatteluissa keskitytään lisäksi oppiainerajoja ylittävien oppimiskokonaisuuksien tarkastelemiseen ja vaalimatematiikan soveltumiseen opetettavaksi aiheeksi yläkoulussa ja lukiossa. Tämän myötä työ pyrkii kuvaamaan, mistä lähtökohdista oppiainerajoja ylittäviä oppimiskokonaisuuksia tulisi muodostaa. Vaalimatematiikan opettamisen tarkastelemisella kerätään puolestaan tietoa siitä, miten vaalimatematiikkaa voisi opettaa yläkoulussa ja lukiossa.

Luvussa 2 esitellään työn pedagoginen viitekehys, joka rakentuu erilaisten oppijan kirjoitusprosessia tukevien tehtävätyyppien ympärille. Luku 3 käsittelee suhteellisen vaalitavan matemaattista taustaa ja rajauksia, joita suhteellisen vaalitavan kuvaamiseen liittyen on tässä työssä tehty. Lisäksi luvussa 3 tutkitaan, kuinka vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos muuttuu käytettäessä suhteellisen vaalitavan eri laskentamenetelmiä simuloimalla kyseisten vaalien äänestysdataa. Luvussa 4 esitellään työn tutkimuskysymykset ja luku 5 keskittyy työn tutkimusosuuden esittelemiseen ja siinä hyödynnettävien tutkimusmenetelmien kuvaamiseen. Työssä saadut tutkimustulokset kuvataan luvussa 6. Työn lopuksi luvussa 7 arvioidaan saatuja tutkimustuloksia ja kuvataan, kuinka kehitettävän oppimateriaalin toinen versio muodostettiin aineenopettajien teemahaastattelujen pohjalta. Luvussa 7 pohditaan myös, mitä oppimateriaalin jatkokehittämisessä tulisi huomioida. Luku 7 päätetään työn luotettavuuden ja eettisten näkökulmien tarkastelemiseen.

2. PEDAGOGINEN VIITEKEHYS

Tässä luvussa esitellään työn pedagoginen viitekehys, joka rakentuu sellaisten tehtävätyyppien ympärille, joissa oppijan tarkoituksena on muodostaa jokin kirjallinen tuotos. Esiteltäviä tehtävätyyppejä sovelletaan tässä työssä kehitettävässä oppimateriaalissa. Luvussa puhutaan yleisellä tasolla oppijoista, koska kehitettävä oppimateriaali on suunnattu sekä yläkoulu- että lukiotasolle.

2.1 Writing to Learn (WTL)

Kuvataan aluksi Emigin artikkeliin [20] perustuen, minkälainen prosessi kirjoittaminen on oppimisen kannalta. Emig kuvaa kirjoittamisen eroavan puhumisesta oppimistapana olennaisesti siinä, että kirjoitustaito tulee oppia, kun taas puhuminen on jotakin luontaisempaa käyttäytymistä. Kirjoittamiseen liittyy lisäksi itse prosessin ohella jokin näkyvä tuotos prosessista toisin kuin puhumisen yhteydessä. Tämä tekee Emigin mukaan kirjoittamisesta helpomman tavan oppia pelkkään puhumiseen verrattuna. Tähän liittyen Emig näkee kirjoittamisen tukevan oppimista, koska kirjoittaessa oppija voi työskennellä itselleen sopivassa tahdissa. Oppimista tukee myös se, että kirjoittaminen on aktiivista toimintaa.

Kirjallisuudessa käytetään termiä *kirjoittaminen oppimista varten* (engl. *Writing to Learn, WTL*) viitattaessa työskentelytapaan, jossa oppimista tuetaan kirjoittamisen avulla [68, s. 56–57]. Jatkossa käytetään selvyyden vuoksi lyhennettä WTL tähän työskentelytapaan viitattaessa. Ayadi ja Onodipe [7, s. 198] kuvaavat WTL:n ideaksi auttaa oppijaa erilaisten kirjoittamista vaativien tehtävien avulla käymään huolella läpi opiskeltavia aiheita. Knipperin ja Dugganin [41, s. 462] mukaan WTL:n tarkoituksena on myös auttaa oppijaa tarkastelemaan kriittisesti opiskeltavaa aihetta. Matematiikan opetuksessa WTL:n hyödyntäminen tähtää siihen, että oppijat pystyvät ilmaisemaan ajatteluaan ja näkemään matemaattiset ongelmat laajempina kuin vain numeroita ja symboleja sisältävinä kokonaisuuksina [15, s. 3]. WTL on lisäksi joustava työtapa, koska sitä voi soveltaa niin lähi-, hybridi- kuin etäopetuksessa [7, s. 198].

Konstruktivistinen näkemys oppimisesta, jossa oppiminen nähdään aktiivisena prosessina passiivisen tiedon vastaanottamisen sijasta, on osa WTL:n perustaa [68, s. 57]. Oppijan rooli aktiivisena toimijana on selvästi esillä perusopetuksen [56, s. 17] ja lukion [47, s. 18] opetussuunnitelmien perusteissa, jolloin WTL:n ottaminen osaksi opetusta olisi perusteltua. Huomionarvoista WTL:n hyödyntämisessä on se, että kirjoittamista vaativista tehtävistä hyötyvät sekä passiiviset että aktiiviset oppijat, koska kirjoittaminen aktivoi kaikenlaisia oppijoita [41, s. 468–469]. WTL:ää voidaan toteuttaa osana opetusta useilla eri tavoilla (katso esimerkiksi [7, s. 200–201][41, s. 465–496]). Näistä toteuttamistavoista osaa hyödynnetään tässä työssä kehitettävän oppimateriaalin yhteydessä tehtävätyyppeinä ja niihin tutustutaan tarkemmin seuraavissa alaluvuissa. Olennaista WTL:n soveltamisessa on se, että oppija tiivistää tietoa tai kuvailee jotakin asiaa WTL:ää hyödyntävien tehtävien yhteydessä [15, s. 3].

2.2 Mikroteema

Mikroteeman (engl. *microtheme*) käsite on esitelty ensimmäisen kerran 1980-luvulla ja sillä tarkoitetaan lyhyttä esseemäistä tekstiä, joka mahtuu käsin kirjoitettuna $5'' \times 8''$ -kokoisen kortistokortin yhdelle puolelle [25]. Mikroteeman pituutta ei ole määritelty yksikäsitteisesti, mutta tyypillisesti sen pituutena pidetään noin 200 sanan pituista tekstiä (katso esimerkiksi [10, luku 6][25]). Mikroteema on työtapana monipuolinen. Sitä voidaan käyttää joko oppitunnin aikana tai lukujärjestyksen ulkopuolella suoritettavana tehtävänä [40, s. 177]. Mikroteeman lyhyen pituuden vuoksi sen kirjoittamisessa korostuu olennaisimpien asioiden esille nostaminen [25]. Mikroteeman monipuolisuus näkyy siinä, että sitä voidaan käyttää useiden erityyppisten tehtävien yhteydessä. Garnerin [25] mukaan mikroteema voi käsitellä tiivistelmän kirjoittamista tai tutkittavaan aiheeseen liittyvän väitteen puolesta argumentoimista. Mikroteema ei kuitenkaan ole välttämättä suoraviivainen kirjoitustehtävä, vaan se voi Garnerin mukaan pohjatua myös johonkin laajempaan aineistoon kuten numeeriseen dataan. Kneeshaw [40, s. 177] täydentää edellä mainittuja toteutustapoja mainitsemalla, että mikroteema voi olla tehtävä, jossa kirjoittajan tulee vertailla tutkittavia asioita keskenään tai ottaa kantaa aiheeseen liittyen. Esimerkkejä mikroteemojen tehtävänannoista löytyy muun muassa lähteistä [10, luku 6][25]. Tekstinä mikroteema on tyyliltään muodollinen [10, luku 6].

Mikroteema on mielekäs työtapa, koska sen käyttämisellä on useita erilaisia hyötyjä. Kneeshaw [40, s. 177–178] mainitsee mikroteemojen kirjoittamisen auttavan oppijaa tunnistamaan olennaisimmat asiat kirjoitettavasta aiheesta, minkä lisäksi kirjoitettua tekstiä voi hyödyntää myöhemmin apuna aiheen kertaamisessa. Toisaalta oppijoiden kirjoittamista mikroteemoista näkee selvästi, ovatko he ymmärtäneet mikroteemassa käsitellyn aiheen oikein vai ei [10, luku 6]. Tähän liittyen Bean [10, luku 6] tuo esille, että mikroteemat voivat toimia opettajan työkaluna formatiivisessa arvioinnissa, sillä mikroteemat paljastavat, kuinka oppijan ajattelu rakentuu. Tämä on Beanin mukaan olennaista, koska tällöin opettaja pystyy seuraamaan oppijan oppimista ja kehittämään opetustaan.

2.3 Know-Want-Learn -menetelmä

Know-Want-Learn-menetelmä (engl. *Know-Want-Learn strategy*) esiteltiin ensimmäisen kerran 1980-luvulla ja sen tarkoituksena on ohjata oppijan lukuprosessia [12, s. 1909]. Tässä työssä menetelmään viitataan selkeyden vuoksi lyhenteellä *KWL-menetelmä*. Menetelmässä on kyse siitä, että oppija käy läpi tutkittavan aiheen osalta, mitä hän tietää (Know) siitä, mitä hän haluaa (Want) tietää siihen liittyen ja mitä hän oppi (Learned) aiheesta työskentelyn aikana [13, s. 55]. Näistä kolmesta vaiheesta kaksi ensimmäistä toteutetaan ennen tutkittavaa aihetta käsittelevän tekstin lukemista ja viimeiseen vaiheeseen siirrytään tekstin lukemisen jälkeen [13, s. 55–56].

Käydään seuraavaksi läpi Tokin [70, s. 195] artikkelin ja Brasselin [13, s. 55–56] teoksen pohjalta, kuinka KWL-menetelmää voitaisiin soveltaa opetuksessa. Työskentely alkaa aivoriihellä, jonka tavoitteena on saada oppijat pohtimaan, mitä he tietävät tutkittavasta aiheesta. Opettajan roolina on koota oppijoiden ideat ylös esimerkiksi opetustilan taululle näkyviin ja saada oppijat pohtimaan aihetta mahdollisimman laajasti. Opettaja voi tässä vaiheessa myös kysyä oppijoilta, mihin tietoihin perustuen oppijat ovat tuoneet ideoitaan esille. Sen jälkeen, kun oppijat ovat jakaneet saamiaan ideoita, siirrytään pohtimaan, mitä he haluavat oppia tutkittavasta aiheesta. Myös tässä vaiheessa opettaja pyrkii edistämään oppijoiden ajattelua selvittämällä, mitä asioita he haluavat saada selville. Edellisen vaiheen tapaan opettaja kirjaa ylös oppijoiden esille nostamia asioita eli tässä tapauksessa heidän laatimiaan kysymyksiä. Menetelmän viimeisessä vaiheessa selvitetään, mitä oppijat ovat saaneet selville eli oppineet lukemansa tekstin perusteella. Tässä yhteydessä käydään lisäksi läpi, mitä vastauksia oppijat ovat saaneet aiemmin esittämiinsä kysymyksiin ja nämä vastaukset kirjataan ylös. KWL-menetelmää käytettäessä työskentelyn eri vaiheiden aikana kootut ajatukset, kysymykset ja vastaukset kootaan taulukkoon, jossa on sarake kullekin menetelmän vaiheelle [12, s. 1909][13, s. 55–58]. Kuten edellä on kuvattu, yhtenä vaihtoehtona taulukon täyttämiselle on se, että opettaja koostaa yhteisesti oppijoiden kanssa yhden yhteisen taulukon. Camp [14, s. 403] ja Brassell [13, s. 55–56] kuvaavat, että myös oppijat itse voivat täydentää omat taulukkonsa. Tällöin Brasselin mukaan oppijoiden löytämistä vastauksista keskustellaan yhteisesti opettajan johdolla sen jälkeen, kun oppijat ovat itse niitä etsineet ja koonneet omiin taulukkoihinsa. Vaikka nyt on kuvattu KWL-menetelmän käyttöä opettajajohtoisena opetusmenetelmänä, johon osallistuu koko opetusryhmä, menetelmää voidaan hyödyntää itsenäisen työskentelyn ja pienryhmätyöskentelyn yhteydessä [14, s. 403]. Taulukko 2.1 antaa esimerkin KWL-menetelmän soveltamisen aikana täydennettävästä taulukosta, joka on mukailtu lähteiden [13, s. 58][14, s. 403][70, s. 209] pohjalta.

Käsitellään seuraavaksi KWL-menetelmän hyödyntämistä tukevia argumentteja. Tok [70, s. 207] näkee KWL-menetelmän eduksi sen, että se voisi olla yksi keino auttaa oppijoita ottamaan enemmän itse vastuuta omasta oppimisesta. Tämä näkökulma välittyy myös

Mitä tiedän (Know)	Mitä haluan tietää (Want)	Mitä opin (Learned)

Taulukko 2.1. *Esimerkki KWL-menetelmässä täydennettävästä taulukosta.*

Szabon [66, s. 58] kuvatessa menetelmän tarjoamia hyötyjä. Szabon mukaan oppijoiden mielenkiinto tutkittavaa aihetta kohtaan herää menetelmän soveltamisen alussa aivoriihen yhteydessä, kun he pyrkivät yhdistämään aiempia tietojaan tutkittavaan aiheeseen. Aivoriihen hyödyllisyyttä korostaa lisäksi se, että sen aikana opettaja pystyy osoittamaan oppijoille, mitä yhteyksiä aiemmin opitun ja tutkittavan aiheen välillä on [70, s. 195]. Szabo [66, s. 58] luonnehtii myös menetelmän saavan oppijat pohtimaan heidän itse muodostamien kysymysten kautta, mikä motivoi heitä tutkittavaa aihetta käsittelevän tekstin lukemisessa. KWL-menetelmän monipuolisuus näkyy lisäksi siinä, että se soveltuu käytettäväksi eri koulutusasteilla [14, s. 403].

2.4 Lauseiden täydentäminen

Englanninkielisessä kirjallisuudessa termeillä *paragraph frames* ja *framed paragraphs* viitataan tehtäviin, joissa oppijan tulee täydentää lauseita, jotka ovat osittain valmiiksi kirjoitettuja [41, s. 466–467][44, s. 529–533]. Tässä työssä viitataan tähän tehtävätyyppiin termillä *lauseiden täydentämistehtävä.* Tehtäväpohjaan valmiiksi kirjoitetut sanat muodostavat rakenteen tehtävässä muodostettavalle tekstille [44, s. 529], minkä tarkoituksena on helpottaa oppijoiden kirjoitusprosessia [41, s. 467]. Kirjoitusprosessin helpottamisen ohella Knipper ja Duggan [41, s. 466–467] näkevät lauseiden täydentämistehtävät alaluvussa 2.2 esiteltyjen mikroteemojen tapaan tehtävätyyppinä, joka kokoaa yhteen olennaisimpia teemoja opiskeltavista aiheista. Tehtävätyypin ideana ei ole kuitenkaan se, että oppija vain täydentää yksittäisiä puuttuvia sanoja, vaan lopullisen tekstin tulisi rakentua pääasiassa oppijan oman tuotoksen pohjalta [35, s. 63]. Jonesin ja Thomasin [35, s. 63] mukaan tämä tarkoittaa sitä, että tehtäväpohja auttaa oppijaa kirjoitusprosessin aloittamisessa ja huomaamaan, mihin sisältöihin hänen halutaan keskittyvän.

Lauseiden täydentämistehtävissä tuotettavien tekstien aiheet voivat vaihdella. Teksti voi liittyä yleisellä tasolla siihen, millaisia havaintoja oppija on tehnyt opiskeltavasta aiheesta

Kirjoitustehtävä d'Hondtin menetelmästä.

1.4 Täydennä seuraavat lauseet.

D'Hondtin menetelmää käytettäessä lasketaan vertauslukuja. Jos ehdokas on saanut kaikista oman puolueensa ehdokkaista eniten ääniä, hänen vertauslukunsa on _.

Jos ehdokas on saanut kaikista oman puolueensa ehdokkaista neljänneksi eniten ääniä, hänen vertauslukunsa on _.

Ehdokas voi jäädä valitsematta vaaleissa suuresta henkilökohtaisesta äänimäärästä huolimatta, jos _.

Aluevaalien lisäksi d'Hondtin menetelmää käytetään Suomessa _.

Kuva 2.1. *Esimerkki lauseiden täydentämistehtävästä.*

tai se voi keskittyä tietyn yksittäisen aiheen yksityiskohtaisempaan tarkastelemiseen [35, s. 62–63]. Tehtävä voi käsitellä myös sitä, mitä oppija tiesi opiskeltavasta aiheesta etukäteen ja mitä uutta hän siihen liittyen oppi [44, s. 529–532]. Jones ja Thomas [35, s. 63] vievät tätä näkökulmaa eteenpäin esittämällä lauseiden täydentämistehtäviä yhdeksi tavaksi tehdä yhteenvetoja. Kuvassa 2.1 on esimerkki d'Hondtin menetelmää käsittelevästä lauseiden täydentämistehtävästä. Tehtävä on tässä työstä kehitettävästä oppimateriaalista.

Lauseiden täydentämistehtävät voidaan nähdä keinona tukea sellaisten oppijoiden kirjoittamista, joilla on haasteita sen parissa [35, s. 63]. Kirjoittamisen tukemisen lisäksi nämä tehtävät voivat tarjota näille oppijoille onnistumisen tunteita kirjoittamiseen liittyen, mikä on olennaista heidän motivaationsa kannalta [44, s. 533]. Lauseiden täydentämistehtäviä käytettäessä opettajan tulee toisaalta Knipperin ja Dugganin [41, s. 467] mukaan seurata oppijoiden kehittymistä ja auttaa heitä kirjoittamaan entistä itsenäisemmin heidän taitojensa kehittyessä.

2.5 Ennakkojäsentäjä

Ennakkojäsentäjä (engl. *graphic organizer*) on Zollmanin [76, s. 51] mukaan yksi keino havainnollistaa ja jäsentää opiskeltavaa aihetta visuaalisessa muodossa. Täten visuaalisella hahmottamisella on olennainen rooli ennakkojäsentäjien soveltamisessa [31, s. 41]. Ennakkojäsentäjät auttavat oppijaa tunnistamaan, mikä on olennaista tietoa ja millaisia yhteyksiä käsitteiden välille muodostuu [76, s. 51]. Käsitteiden välisten yhteyksien muodostamisen ohella ennakkojäsentäjien avulla oppija voi saada paremmin haltuunsa matemaattisten käsitteiden merkityksen [31, s. 48]. Ennakkojäsentäjät voivat auttaa myös matemaattisten tehtävien ratkaisustrategioiden harjoittelemisessa, kuten yhtälöryhmän ratkaisussa, mitä Ives ja Hoy kuvaavat artikkelissaan [31, s. 44–48]. Kun ennakkojäsentäjiä sovelletaan osana matematiikan opetusta, Ives ja Hoy [31, s. 41] näkevät ennakkojäsentäjien olennaiseksi piirteeksi sen, että niiden sisältöä kuvataan matemaattisiin merkintöihin tukeutuen.

Käsitekartat (engl. *concept map*) ovat yksi esimerkki ennakkojäsentäjistä [48, s. 415] ja niitä hyödynnetään tässä työssä kehitettävässä oppimateriaalissa. Käsitellään seuraavaksi käsitekarttoja ja niiden hyötyjä oppimisen kannalta Nesbitin ja Adesopen artikkeliin [48, s. 415–420] perustuen. Käsitekartoilla kuvataan käsitteiden välisiä yhteyksiä. Yhteyksiä voidaan kuvata esimerkiksi nuolilla, joiden yhteydessä voi olla liitettynä käsitteiden välistä yhteyttä havainnollistavia sanallisia kuvauksia (katso esimerkiksi [48, s. 416]). Käsitekartat auttavat oppimisessa muun muassa sitä kautta, että niiden avulla voidaan tiivistää tietoa. Koska käsitekarttoja laadittaessa tunnistetaan eri käsitteitä yhdistäviä tekijöitä, oppijan tulee tutustua tutkittaviin teksteihin ja sisältöihin huolellisesti.

3. SUHTEELLISEN VAALITAVAN KUVAAMINEN MATEMAATTISESTI

Tässä luvussa kerrotaan ennen suhteellisen vaalitavan matemaattista tarkastelua, millaisia rajauksia vaalitulosten laskennassa käytettävien laskentamenetelmien tutkimisen suhteen on tässä työssä tehty. Tähän liittyen käsitellään lyhyesti, millaisia vaalitapoja on olemassa. Suhteellista vaalitapaa noudattavista laskentamenetelmistä keskitytään tässä työssä *lukusarjamenetelmiin* (engl. *divisor methods*) ja *kvoottimenetelmiin* (engl. *quota methods*). Aihepiirin suomenkielinen termistö ei ole täysin vakiintunutta, mutta termejä lukusarja- ja kvoottimenetelmä käytetään esimerkiksi oikeusministeriön Suomen vaalijärjestelmää käsittelevässä raportissa [54], minkä vuoksi on perusteltua käyttää kyseisiä termejä. Lukusarja- ja kvoottimenetelmien tutkimista pohjustetaan kuvaamalla yleisellä tasolla vaaleihin liittyviä matemaattisia käsitteitä. Lisäksi käydään läpi, mitä vaalituloksen suhteellisuus matemaattisesti ilmaistuna tarkoittaa. Lopuksi vertaillaan eri lukusarja- ja kvoottimenetelmien antamia vaalituloksia simuloimalla vuoden 2023 eduskuntavaalien äänestysdataa. Simuloinneissa lasketaan tutkittavien menetelmien antamat vaalitulokset R-ohjelmointikielen electoral-paketin avulla.

3.1 Vaalitavoista yleisesti ja aiheen rajauksesta

Kuvataan teokseen [59, s. 5, 27–35] perustuen, mitä vaalitavalla tarkoitetaan ja millaisia vaalitapoja on olemassa. Vaalitavalla viitataan järjestelmään, jonka avulla vaaleissa jaettavat edustajanpaikat saadaan jaettua puolueiden ja ehdokkaiden kesken vaaleissa annettujen äänien perusteella. Vaalitavat voidaan jakaa neljään kategoriaan: *enemmistövaalitapoihin* (engl. *plurality / majority systems*), *suhteellisiin vaalitapoihin* (engl. *proportional representation systems*), *yhdistelmätapoihin* (engl. *mixed systems*) ja sellaisiin vaalitapoihin, jotka eivät suoraan kuulu mihinkään edellä mainituista vaalitavoista. Enemmistövaalitavoissa eniten ääniä saaneet ehdokkaat tai puolueet valikoituvat vaalien voittajaksi. Suhteellisissa vaalitavoissa edustajanpaikat jakaantuvat suhteessa puolueiden keräämiin äänimääriin. Eli jos puolue saa vaaleissa annetuista äänistä noin 10 prosenttia, tulee sen saada noin 10 prosenttia jaossa olevista edustajanpaikoista. Yhdistelmätavoissa on sekä enemmistövaalitavan että suhteellisen vaalitavan piirteitä. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että osa vaalituloksesta lasketaan enemmistövaalitavan mukaisesti ja vastaavasti osa vaalituloksesta määräytyy suhteellisen vaalitavan avulla. Eroja erilaisten vaalien välille syntyy myös siinä, äänestetäänkö niissä ehdokasta vai puoluetta. Merkittävän eron luo toisaalta se, kuinka monta ääntä äänestäjällä on käytettävissä.

Edellä mainittujen vaalitapojen soveltamiseksi on kehitetty suuri määrä erilaisia laskentamenetelmiä (katso esimerkiksi [59, s. 28–29, 35–118]), minkä vuoksi käsiteltävien vaalitapojen ja laskentamenetelmien lukumäärää tulee rajata. Tämän työn tarkoituksena on käsitellä suhteellista vaalitapaa, jolloin muita vaalitapoja ei tässä työssä tarkastella. Perusteena tälle rajaukselle on se, että Suomessa noudatetaan suhteellista vaalitapaa kunta-, eduskunta-, alue-, ja europarlamenttivaaleissa, jolloin se on laajasti käytössä Suomessa yleisissä vaaleissa [32, s. 8–9]. Muista yleisistä vaaleista poiketen presidentinvaali ei ole Suomessa suhteellinen vaali, sillä se on suora henkilövaali [32, s. 9].

Tarkastellaan seuraavaksi teoksen [59, s. 57–90] pohjalta, kuinka suhteellista vaalitapaa noudattavia vaaleja voidaan luokitella sen perusteella, kuinka vaalitulos lasketaan. *Suhteellista vaalitapaa noudattavissa listavaaleissa* (engl. *list proportional representation*) puolueet asettavat vaaleihin ehdokkaansa listalle, jolle äänestäjät antavat äänensä. Edustajanpaikat jaetaan puolueiden kesken suhteessa niiden listojen saamiin äänimääriin. Listavaalit erottavat toisistaan se, voiko äänestäjä äänestää puolueen lisäksi yksittäistä ehdokasta. Suljetussa listavaalissa ääni annetaan pelkästään puolueelle, jolloin ehdokkaat menevät vaaleissa läpi siinä järjestyksessä, kuin mihin puolue on heidät järjestänyt listoillensa. Avoimessa listavaalissa taas äänestäjät voivat vaikuttaa ehdokkaiden keskinäiseen järjestykseen. Suomessa suhteelliset vaalit ovat avoimia listavaaleja, koska ääni annetaan samalla kertaa sekä puolueelle että ehdokkaalle [32, s. 9]. Tämän myötä tässä työssä rajoitutaan tarkastelemaan avoimia suhteellisen vaalitavan listavaaleja. Toinen tunnettu suhteellista vaalitapaa noudattava laskentamenetelmä on *siirtoäänivaalitapa* (engl. *single transferable vote*), jossa äänestäjä järjestää ehdokkaat mieluisuusjärjestykseen. Siirtoäänivaalitapaa käsitellään esimerkiksi lähteissä [59, s, 71–77] ja [69], joiden kautta kiinnostunut lukija voi tutustua siihen tarkemmin.

Suhteellisen vaalitavan ideaa voidaan soveltaa myös muulloinkin, kun jaettaessa edustajanpaikkoja vaaleissa puolueiden keräämien äänimäärien perusteella. Paikkojen jakamista voitaisiin toisaalta tutkia sen kannalta, kuinka ne jaetaan eri alueiden kesken suhteessa niiden asukaslukuihin [57, s. 55]. Suhteellisen edustuksen periaatetta voitaisiin taas soveltaa vaalituloksien laskemisen ohella esimerkiksi silloin, kun valiokuntien paikkoja jaetaan eri poliittisten ryhmien edustajien kesken [57, s. xi]. Yleisesti ottaen kaikenlaiset ongelmat, joissa on tarkoituksena jakaa tietty määrä objekteja suhteessa johonkin numeeriseen dataan, voidaan nähdä suhteellista edustusta käsittelevänä ongelmana [8, s. 96]. Tässä työssä tehtävien tarkastelujen yleisyyttä rajoittamatta jatkossa puhutaan parlamentista ja sen edustajanpaikkojen eli parlamenttipaikkojen jakamisesta. Yhtä hyvin voitaisiin puhua esimerkiksi kunnanvaltuustojen paikkojen jakamisesta mutta selkeyden vuoksi työssä tarkastellaan parlamenttipaikkojen jakamista. Täten kun työssä puhutaan vaaleista, silloin viitataan nimenomaan parlamenttivaaleihin eli Suomen tapauksessa eduskuntavaaleihin. Selkeyden vuoksi edustajanpaikkoihin viitataan jatkossa yksinkertaisesti termillä *paikka*.

Kuvataan vaalilakiin [72] ja lähteeseen [32] pohjautuen, kuinka parlamenttipaikat eli kansanedustajien paikat jaetaan Suomessa. Käytettävänä vaalitapana on suhteellinen vaalitapa ja maa on jaettu 13 vaalipiiriin maakuntajakoon perustuen. Muissa kuin Ahvenanmaan maakunnan vaalipiirissä jaetaan yhteensä 199 paikkaa 200 paikasta. Jäljelle jäävä yksi paikka on varattu Ahvenanmaan maakunnan vaalipiirille. Kansanedustajien paikkojen jakautuminen Manner-Suomen vaalipiirien kesken kuvataan myöhemmin Esimerkissä 3.38. Tässä työssä tehtävät tarkastelut rajoittuvat Suomen kontekstissa siihen, kuinka Manner-Suomen vaalipiireissä jaettavat 199 paikkaa jaetaan eri ryhmittymien kesken.

Taustoitetaan seuraavaksi, millaiset ryhmittymät voivat asettaa ehdokkaita Suomessa toimitettavissa yleisissä vaaleissa lähteeseen [32] nojautuen. Suomessa kunta-, alue-, eduskunta-, ja europarlamenttivaaleissa ehdokkaita voivat asettaa puoluerekisteriin merkityt puolueet ja äänioikeutettujen perustamat valitsijayhdistykset. Valitsijayhdistyksen perustamiseen tarvitaan eri määrä äänioikeutettuja henkilöitä sen mukaan, mistä edellä mainituista vaaleista on kyse. Puolueet voivat muodostaa keskenään vaaliliittoja ja valitsijayhdistykset voivat vastaavasti muodostaa yhteislistoja. Edellä mainituissa vaaleissa vaaliliittoon kuuluvia puolueita käsitellään tuloksenlaskennassa yhtenä ryhmittymänä. Samoin toimitaan yhteislistaan kuuluvien valitsijayhdistyksien kohdalla. Tässä työssä termillä *puolue* tarkoitetaan kaikkia näitä tahoja eli puolueiden muodostamia vaaliliittoja, vaaliliittojen ulkopuolisia puolueita, valitsijayhdistysten muodostamia yhteislistoja ja yhteislistojen ulkopuolisia valitsijayhdistyksiä.

3.2 Pyöristyssäännöistä

Määritellään aluksi myöhemmin tarvittavia lukujen pyöristämisessä käytettäviä funktioita ja sääntöjä Pukelsheimin teoksen [57, luku 3] pohjalta. Tässä työssä luonnollisten lukujen joukolla $\mathbb{N}$ tarkoitetaan joukkoa $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Määritelmä 3.1. *Pyöristysfunktio* f on kasvava funktio, joka kuvaa positiivisen puoliakselin $[0, \infty)$ luonnollisten lukujen joukoksi $\mathbb{N}$.

Määritelmä 3.2. Olkoon t positiivinen reaaliluku. Merkinnällä $\lfloor t \rfloor$ kuvataan kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin reaaliluku t. Lukua $\lfloor t \rfloor$ kutsutaan reaaliluvun t *kokonaisosaksi*. Erotusta $t - \lfloor t \rfloor$, joka kuuluu puoliavoimelle välille $[0, 1)$, kutsutaan reaaliluvun t *desimaaliosaksi*. Funktiota $\lfloor \cdot \rfloor$ kutsutaan *lattiafunktioksi* (engl. *floor function*).

Määritelmä 3.3. Olkoon t positiivinen reaaliluku. Merkinnällä $\lceil t \rceil$ kuvataan kokonaislukua, joka on suurempi tai yhtä suuri kuin reaaliluku t. Funktiota $\lceil \cdot \rceil$ kutsutaan *kattofunktioksi* (engl. *ceiling function*).

Määritelmä 3.4. Olkoon t positiivinen reaaliluku. Merkinnällä $\langle t \rangle$ kuvataan reaaliluvun t *pyöristämistä neutraalilla orientaatiolla* eli

$$\langle t \rangle = \begin{cases} \lceil t \rceil & \text{jos } t - \lfloor t \rfloor \geqslant \frac{1}{2}, \\ \lfloor t \rfloor & \text{jos } t - \lfloor t \rfloor < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Huomautus 3.5. Määritelmän 3.4 mukainen pyöristysfunktio ei pyöristä positiivisia reaalilukuja symmetrisesti, koska desimaaliosan ollessa tasan $\frac{1}{2}$ pyöristäminen tapahtuu ylöspäin. Pukelsheim käyttää teoksessaan kyseisellä pyöristysfunktiolle myös nimeä *kaupallinen pyöristysfunktio* (engl. *commercial rounding function*).

3.3 Jakomenetelmistä

Tämä alaluku pohjautuu vahvasti Balinskin ja Youngin [8, liite A] ja Pukelsheimin [57] teoksiin. Useat Balinskin ja Youngin teoksessa esitetyt esimerkit *jakomenetelmien* (engl. *apportionment method)* soveltamisesta käsittelevät paikkojen jakamista Yhdysvaltain osavaltioiden kesken niiden asukaslukujen perusteella. Pukelsheim taas käsittelee teoksessaan paikkojen jakamista puolueiden keräämiin äänimääriin pohjautuen, mikä on näkökulmana tässä työssä. Yleisesti ottaen jakomenetelmät voi tulkita keinona jakaa ennalta määrätty määrä paikkoja vaaleihin osallistuvien puolueiden kesken suhteessa niiden keräämiin äänimääriin [57, s. 55].

Aloitetaan paikkojen jakamisen matemaattinen kuvaaminen määrittelemällä vektorit puolueiden keräämille äänimäärille ja paikkojen jakamiseen liittyville minimivaatimuksille, kun vaaleihin osallistuu l kappaletta puolueita ja jaettavia paikkoja on h kappaletta. Jaettavien paikkojen lukumäärä h on jokin luonnollinen luku. Myös puolueiden lukumäärä l on luonnollinen luku, mutta sen osalta oletetaan, että vaaleihin osallistuu vähintään 2 puoluetta eli $l \geqslant 2.$ Tämä on järkevää, koska ideana on tutkia, kuinka paikat jaetaan puolueiden kesken. Minimivaatimuksilla tarkoitetaan tässä yhteydessä sitä, kuinka monta paikkaa kunkin puolueen tulee vähintään saada.

Määritelmä 3.6. (vrt. [8, s. 95][57, s. 55]) *Äänivektori* (engl. *vote vector*) on l-dimensioinen vektori $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_l)$, jonka alkio v_i on puolueen i äänimäärä. Äänimäärät v_i ovat luonnollisia lukuja.

Huomautus 3.7. Äänivektorin komponenttien ei välttämättä tarvitse olla puolueiden saamia äänimääriä, vaan ne voisivat olla myös puolueiden äänimäärien suhteellisia osuuksia kaikista annetuista äänistä [57, s. 55]. Ne voivat olla lisäksi maantieteellisten alueiden asukaslukuja, kun paikkoja jaetaan niihin perustuen [8, s. 95–96].

Jatkossa käytetään äänivektorin $\mathbf{v}$ komponenttien summalle merkintää v_+ eli

$$v_+ = \sum_{i=i}^{l} v_i.$$

Tässä työssä äänivektorin komponenttien summassa v_+ ei huomioida hylättyjä eikä tyhjiä ääniä. Se, huomioidaanko summassa v_+ kaikki hyväksytyt äänet vai pelkästään esimerkiksi ennalta asetetun äänikynnyksen ylittäneiden puolueiden äänimäärät, riippuu sovelluksesta ja asianyhteydestä. Äänikynnyksellä tarkoitetaan sitä, että puolueen tulee paikkoja saadakseen kerätä tietty ennalta määrätty osuus kaikista annetuista äänistä esimerkiksi valtakunnallisesti [19, s. 42]. Oletuksena tämän työn osalta on, että summa v_+ on yhtä suuri kuin kaikkien vaaleissa annettujen hyväksyttyjen äänten lukumäärä, ellei toisin mainita. Jatkossa alaindeksillä $+$ tarkoitetaan kulloinkin tutkittavan vektorin alkioiden summaa, mikäli toisin ei mainita.

Määritelmä 3.8. (vrt. [8, s. 95]) *Minimivaatimusten vektori* (engl. *vector of minimum requirements*) on l-dimensioinen vektori $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_l)$, jonka alkio r_i kuvaa puolueen i paikkojen lukumäärään liittyvää minimivaatimusta. Minimivaatimukset r_i ovat luonnollisia lukuja.

Kun tarkastellaan parlamenttivaaleja ja jaetaan paikat vaaleihin osallistuvien puolueiden kesken, on mielekästä asettaa minimivaatimusten vektori $\mathbf{r}$ nollavektoriksi, koska muuten puolueiden saamien paikkojen lukumäärät olisivat ennalta päätettyjä. Jos taas tarkasteltaisiin paikkojen jakamista eri vaalipiirien kesken niiden asukaslukuihin perustuen, voitaisiin minimivaatimusten vektori $\mathbf{r}$ valita joksikin muuksi vektoriksi kuin nollavektoriksi.

Esimerkki 3.9. Manner-Suomen vaalipiireistä valitaan yhteensä 199 kansanedustajaa. Havainnollistetaan edellä esiteltyä minimivaatimusten vektorin käsitettä kuvaamalla, mitä muotoa se on vuoden 2023 eduskuntavaalien tapauksessa jaettaessa kansanedustajien paikat Manner-Suomen vaalipiirien kesken. Tämä jako on esitetty Taulukossa 3.1 ja Esimerkissä 3.38 kuvataan tarkemmin, kuinka se on muodostettu vaalipiirien asukaslukuihin perustuen.

Taulukko 3.1. *Kansanedustajien paikkojen jako Manner-Suomen vaalipiirien kesken vuoden 2023 eduskuntavaaleissa [74].*

Vaalipiiri	**Valittavien kansanedustajien lukumäärä**
Helsinki	23
Uusimaa	37
Varsinais-Suomi	17
Satakunta	8
Häme	14
Pirkanmaa	20
Kaakkois-Suomi	15
Savo-Karjala	15
Vaasa	16
Keski-Suomi	10
Oulu	18
Lappi	6

Kuten Taulukosta 3.1 nähdään, Manner-Suomessa on 12 kappaletta vaalipiirejä. Kun nämä vaalipiirit numeroidaan samassa järjestyksessä, kuin ne on lueteltu Taulukossa 3.1, voidaan minimivaatimusten vektori esittää muodossa

$$\mathbf{r} = (23, 37, 17, 8, 14, 20, 15, 15, 16, 10, 18, 6).$$

Kuvataan seuraavaksi, mitä paikkojen *jaolla* (engl. *apportionment*) puolueiden kesken tarkoitetaan matemaattisesti.

Määritelmä 3.10. (vrt. [8, s. 95][57, s. 55]) Kun vaaleihin osallistuu l kappaletta puolueita ja jaettavia paikkoja on h kappaletta, voidaan paikkojen jakoa kuvata l-dimensioisen *paikkavektorin* (engl. *seat vector*) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_l)$ avulla, jossa alkio x_i on puolueen i saamien paikkojen lukumäärä. Alkion x_i tulee olla vähintään yhtä suuri kuin puolueen i minimivaatimus r_i. Paikkavektorin alkioiden summan $x_+ = \sum_{i=1}^{l} x_i$ tulee olla yhtä suuri kuin jaettavien paikkojen lukumäärä h.

Määritellään seuraavaksi kaikkien paikkavektorien joukko Pukelsheimin teoksen [57, s. 55] pohjalta.

Määritelmä 3.11. Kun jaettavien paikkojen lukumäärä on h ja vaaleihin osallistuvien puolueiden lukumäärä on l, voidaan *kaikkien paikkavektorien joukko* $\mathbb{N}^l(h)$ määritellä joukkona

$$\mathbb{N}^l(h) = \{(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{N}^l \mid x_+ = h\} \subseteq \{0, 1, \ldots, h-1, h\}^l.$$

Nyt tässä työssä käytettävien keskeisten termien ja niiden merkintöjen esittelemisen jälkeen voidaan lähteä määrittelemään, mitä *jakofunktiolla* (engl. *apportionment function*) ja *jakosäännöllä* (engl. *apportionment rule*) matemaattisina kuvauksina paikkojen jakamisen yhteydessä tarkoitetaan. Pukelsheimin [57, s. 56] mukaan jakofunktio voidaan suoraviivaisesti mieltää funktiona, joka kuvaa jaettavien paikkojen lukumäärän h ja äänivektorin $\mathbf{v}$ paikkavektoriksi $\mathbf{x}$. Ideana on, että saatu paikkavektori $\mathbf{x}$ kuuluu Määritelmän 3.11 mukaiseen kaikkien paikkavektorien muodostamaan joukkoon. Tämän kuvauksen mukaan voidaan löytää vain yksi äänivektori, jolloin jakofunktio tällä tavalla määriteltynä ei mahdollista tasatilanteiden syntymistä, mikä on Pukelsheimin [57, s. 56] mukaan ongelmallista. Saman päätelmän tekevät myös Balinski ja Young [8, s. 96–97] seuraavanlaista esimerkkiä käyttämällä. Tarkastellaan tilannetta, jossa vaaleihin osallistuu kaksi puoluetta ja puolueiden saamat äänimäärät ovat yhtä suuret. Oletetaan, että vaaleissa jaetaan pariton määrä paikkoja eli esimerkiksi $2a + 1$, missä a on luonnollinen luku, paikkaa. Tällöin paikkavektori $\mathbf{x}$ voi olla joko muotoa $(a, a + 1)$ tai muotoa $(a + 1, a)$. Vaalituloksen suhteellisuuden kannalta ei voida tämän perusteella todeta, että toinen jako olisi parempi kuin toinen. Täten tasatilanteiden huomioiminen tulee sallia.

Tasatilanteiden huomioimista varten Pukelsheim [57, s. 56] antaa jakofunktiolle seuraavaksi esitettävän kuvauksen. Tasatilanteet pystytään huomioimaan, kun yksiarvoinen jakofunktio mielletään jakosäännöksi, joka saa arvokseen jonkin joukon. Merkitään tätä jakosääntöä jatkossa symbolilla A. Jakosääntö A kuvaa parin $(h, \mathbf{v})$ kaikkien paikkavektorien joukon osajoukoksi, joka ei kuitenkaan voi olla tyhjä joukko. Määritelmän 3.11 mukaan kaikkien paikkavektorien joukko riippuu vaaleihin osallistuvien puolueiden lukumäärästä l. Yleisesti jakosääntö halutaan kuitenkin määritellä puolueiden lukumäärästä l riippumattomaksi. Määritellään seuraavaksi tätä varten joukot V ja W. Olkoon joukko V kaikkien äänivektorien yhdiste $V = \bigcup_{l \geqslant 2} (0, \infty)^l$. Merkinnällä $(0, \infty)^l$ tarkoitetaan nyt l-dimensioista äänivektoria, jonka alkiot ovat puoliavoimelta väliltä $[0, \infty)$ (vrt. [57, s. 55]). Olkoon joukko W vastaavasti yhdiste luonnollisten lukujen joukkojen $\mathbb{N}^l$ potenssijoukoista $W = \bigcup_{l \geqslant 2} 2^{\mathbb{N}^l}$. Kun joukkoon V kuuluvan äänivektorin $\mathbf{v}$ komponenttien lukumäärää merkitään symbolilla $l(\mathbf{v})$, saadaan jakosäännölle täsmällinen määritelmä.

Määritelmä 3.12. (vrt. [57, s. 56]) *Jakosääntö* A kuvaa jaettavien paikkojen lukumäärän h ja joukon V äänivektorit epätyhjiksi kaikkien paikkavektorien joukon $\mathbb{N}^{l(\mathbf{v})}(h)$ osajoukoiksi

$$A : \mathbb{N} \times V \to W.$$

Määritelmän 3.12 antamalle kuvaukselle voidaan käyttää merkintää $\mathbf{x} \in A(h, \mathbf{v})$, minkä mukaan paikkavektori $\mathbf{x}$ on jako, joka on muodostettu, kun jaossa on h kappaletta paikkoja ja puolueiden äänimääriä kuvaa äänivektori $\mathbf{v}$ [57, s. 56]. Jos paikkavektorien joukossa on vain yksi paikkavektori, jaossa ei ole tullut tasatilanteita ja voidaan käyttää merkintää $A(h, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}\}$ [57, s. 56]. Havainnollistetaan tämän merkinnän käyttämistä Esimerkin

3.13 avulla.

Esimerkki 3.13. Kirjoitetaan Vaasan vaalipiirin tulos vuoden 2023 eduskuntavaaleissa [53] jakosäännön merkinnän $A(h, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}\}$ avulla. Taulukossa 3.2 on listattu vaaleihin osallistuneet puolueet ja niiden keräämät äänimäärät samassa järjestyksessä, kuin missä ne on esitetty oikeusministeriön tieto- ja tulospalvelussa [53].

Taulukko 3.2. *Vaasan vaalipiirissä vuoden 2023 eduskuntavaaleihin osallistuneet puolueet ja niiden äänimäärät [53].*

Puolue	Äänimäärä
Suomen Sosialidemokraattinen Puolue	28 983
Perussuomalaiset	52 532
Kansallinen Kokoomus	35 116
Suomen Keskusta	44 270
Vihreä liitto	6 752
Vasemmistoliitto	5 965
Suomen ruotsalainen kansanpuolue	47 596
Suomen Kristillisdemokraatit (KD)	17 120
Liike Nyt	3 715
Liberaalipuolue - Vapaus valita	471
Kansalaisliitto	36
Suomen Kommunistinen Puolue	117
Kristallipuolue	214
Valta kuuluu kansalle	527
Vapauden liitto	3 552

Muodostetaan äänivektori $\mathbf{v}$ listaamalla puolueiden äänimäärät samassa järjestyksessä, kuin missä ne on lueteltu Taulukossa 3.2. Tällöin äänivektori $\mathbf{v}$ on muotoa

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = (&28983, 52532, 35116, 44270, 6752, 5965, 47596,\\ &17120, 3715, 471, 36, 117, 214, 527, 3552).\end{aligned}$$

Vuoden 2023 eduskuntavaaleissa oli Vaasan vaalipiirissä jaossa $h = 16$ kansanedustajan paikkaa [74] ja vaaleihin osallistuneista puolueista kansanedustajia saivat Suomen Sosiaalidemokraattinen Puolue, Perussuomalaiset, Kansallinen Kokoomus, Suomen Keskusta, Suomen ruotsalainen kansanpuolue ja Suomen Kristillisdemokraatit (KD) [53]. Jakosäännön merkinnällä $A(h, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}\}$ kirjoitettuna vaalin tulos on muotoa

$$A(h, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}\} = \{(2, 4, 2, 3, 0, 0, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\},$$

missä $\mathbf{x}$ on paikkavektori.

Pukelsheim [57, s. 56–58] esittelee teoksessaan erilaisia ominaisuuksia, jotka jakosäännön 3.12 tulisi toteuttaa. Myös Balinski ja Young [8, liite A] esittelevät teoksessaan vastaavat ominaisuudet, mutta he nimeävät ominaisuudet eri tavalla kuin Pukelsheim. Nämä alkuperäiset termit esitetään seuraavien määritelmien yhteydessä sulkeissa suomenkielisen vastineen jälkeen siten, että ensin tulee Pukelsheimin ja sen jälkeen Balinskin ja Youngin käyttämä termi. Alkuperäisille termeille on pyritty löytämään mahdollisimman mielekkäät suomenkieliset vastineet.

Määritelmä 3.14. Jakosääntö A on *symmetrinen* (engl. *anonymity*, *symmetry*), kun puolueiden indeksien numeroinnilla ei ole merkitystä. Tällöin puolueen vaaleissa saamien paikkojen lukumäärä ei riipu siitä, monesko alkio puolueen äänimäärä on äänivektorissa.

Määritelmä 3.15. Jakosäännön A sanotaan olevan *tasapainoinen* (engl. *balancedness*, *balance*), kun saman äänimäärän saaneiden puolueiden saamien paikkojen lukumäärät poikkeavat toisistaan korkeintaan yhden paikan verran.

Määritelmä 3.16. Jakosääntö A on *yhtäpitävä* (engl. *concordance*, *weak population monotonicity*), kun äänimäärältään suurempi puolue saa vähintään yhtä monta paikkaa, kuin äänimäärältään pienempi puolue.

Määritelmä 3.17. Jakosääntö A on *homogeeninen* (engl. *decency*, *homogeneity*), kun sen antamat paikkajaot pysyvät samoina kullakin äänivektorilla $\alpha\mathbf{v}$, missä kerroin α on jokin positiivinen nollaa suurempi luku.

Määritelmä 3.18. Kun jakosäännön A argumentteina ovat jaetttavien paikkojen lukumäärä h ja äänivektori $\mathbf{v}$ ja se arvokseen argumenttinaan olleen äänivektorin $\mathbf{v}$, jakosäännön sanotaan olevan *tarkka* (engl. *exactness*, *weak proportionality*).

Jakosääntöön liittyvien ominaisuuksien määrittelemisen jälkeen voidaan antaa jakomenetelmällä määritelmä.

Määritelmä 3.19. (vrt. [57, s. 58]) *Jakomenetelmällä* tarkoitetaan Määritelmän 3.12 mukaista jakosääntöä A, joka on symmetrinen, tasapainoinen, yhtäpitävä, homogeeninen ja tarkka.

Edellä on kuvattu jakomenetelmiin liittyviä olennaisia ominaisuuksia. Näiden ominaisuuksien lisäksi on olemassa muitakin ominaisuuksia ja tuloksia, jotka auttavat määrittämään täsmällisemmin matemaattisesta näkökulmasta, kuinka vaalitulos muodostuu. Työn rajallisuuden vuoksi kyseisiä ominaisuuksia ja tuloksia ei lähdetä käsittelemään tässä yhteydessä. Kiinnostunut lukija voi tutustua laajemmin aiheeseen esimerkiksi Balinskin ja Youngin [8] ja Pukelsheimin [57] teoksien avulla.

3.4 Vaalituloksen suhteellisuudesta

Tässä alaluvussa esitellään lyhyesti, mitä tarkoitetaan sillä, että vaaleihin osallistunut puolue saa paikkoja suhteessa sen keräämään äänimäärään. Alaluvun tarkoituksena on taustoittaa suhteellista vaalitapaa noudattavien laskentamenetelmien ideaa. Ensin määritellään puolueen ideaalinen osuus jaettavissa olevista paikoista.

Määritelmä 3.20. (vrt. [57, s. 42–43]) Olkoon vaaleissa jaossa h kappaletta paikkoja ja olkoon v_p mielivaltaisesti valitun puolueen p vaaleissa saama äänimäärä. Kun vaaleissa on annettu yhteensä v_+ kappaletta ääniä, puolueen p *ideaalinen osuus paikoista* (engl. *ideal share of seats*) x_p on muotoa

$$x_p = \frac{v_p}{v_+}h. \tag{3.1}$$

Puolueen p ideaalinen osuus paikoista (3.1) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{x_p}{h} = \frac{v_p}{v_+}. \tag{3.2}$$

Yhtälöstä (3.2) nähdään suoraan, että kun puolue p saa sille kuuluvan ideaalisen osuuden jaettavissa olevista paikoista, on sen saaman paikkamäärän x_p suhde jaossa oleviin paikkoihin h yhtä suuri kuin sen keräämän äänimäärän v_p suhde kaikkiin vaaleissa annettuihin ääniin v_+.

Koska vaaleissa jaettavien paikkojen lukumäärä h on luonnollinen luku, tulee puolueen ideaalista osuutta jaettavista olevista paikoista usein pyöristää jollakin tavalla, jotta puolueille jaettavat paikkamäärät ovat kokonaislukuja [57, s. 43]. Seuraavaksi määriteltävä paikkojen yliedustuksen käsite antaa yksinkertaisen keinon tutkia, kuinka paljon puolueen saama todellinen paikkamäärä poikkeaa sen ideaalista osuudesta.

Määritelmä 3.21. (vrt. [57, s. 61, 95] Olkoon vaaleissa jaossa h kappaletta paikkoja ja olkoon v_i mielivaltaisesti valitun puolueen i vaaleissa saama äänimäärä. Kun vaaleissa on annettu yhteensä v_+ kappaletta ääniä ja puolue i on saanut x_i kappaletta paikkoja, määritellään sen saama *paikkojen yliedustus* (engl. *seat excess*) erotuksena

$$x_i - \frac{v_i}{v_+}h. \tag{3.3}$$

Esimerkki 3.22. Havainnollistetaan ideaalisen osuuden ja paikkojen yliedustuksen käsitteitä laskemalla ne Uudenmaan vaalipiirin kohdalla tutkittaessa vuoden 2023 eduskuntavaaleja. Esimerkkiä varten käytetyt tiedot Uudenmaan vaalipiirin tuloksesta on haettu oikeusministeriön tieto- ja tulospalvelusta [52] ja puolueiden ideaalit osuudet ja paikkojen yliedustus on esitetty Taulukossa 3.3. Puolueiden järjestys on Taulukossa 3.3 sama kuin

Taulukko 3.3. *Puolueiden ideaalit osuudet ja paikkojen yliedustus neljän desimaalin tarkkuudella Uudenmaan vaalipiirissä vuoden 2023 eduskuntavaaleissa.*

Puolueen nimi	**Todellinen paikkamäärä**	**Ideaalinen osuus**	**Paikkojen yliedustus**
Suomen Sosialidemokraattinen Puolue	8	7,3542	0,6458
Perussuomalaiset	7	6,7211	0,2789
Kansallinen Kokoomus	11	9,6963	1,3037
Suomen Keskusta	2	1,7638	0,2362
Vihreä liitto	3	2,8284	0,1716
Vasemmistoliitto	1	1,6856	-0,6856
Suomen ruotsalainen kansanpuolue	3	3,2044	-0,2044
Suomen Kristillisdemokraatit (KD)	1	1,2905	-0,2905
Liike Nyt	1	1,3817	-0,3817
Liberaalipuolue - Vapaus valita	0	0,2898	-0,2898
Piraattipuolue	0	0,0431	-0,0431
Eläinoikeuspuolue	0	0,0506	-0,0506
Feministinen puolue	0	0,0265	-0,0265
Kansalaisliitto	0	0,0038	-0,0038
Korjausliike	0	0,0162	-0,0162
Suomen Kansa Ensin	0	0,0118	-0,0118
Suomen Kommunistinen Puolue	0	0,0284	-0,0284
Kristallipuolue	0	0,0604	-0,0604
Valta kuuluu kansalle	0	0,1143	-0,1143
Vapauden liitto	0	0,3173	-0,3173
Sinimusta Liike	0	0,0892	-0,0892
Valitsijayhdistys Birgitta Johansson	0	0,0175	-0,0175
Valitsijayhdistys Tomi Mäkinen	0	0,0049	-0,0049

oikeusministeriön tieto- ja tulospalvelussa [52]. Tämän esimerkin ja Taulukon 3.3 idea on Pukelsheimin teoksesta [57, s. 42].

Puolueiden ideaaleista osuuksista voidaan huomata, että ne eivät ole kokonaislukuja, mikä on odotettu tulos. Paikkojen yliedustus vastaavasti kertoo, kuinka monta paikkaa puolue on saanut liikaa tai liian vähän sen ideaaliin osuuteen verrattuna [57, s. 42]. Etumerkiltään positiivisen paikkojen yliedustuksen tulkinta on täten se, että puolue on saanut liikaa paikkoja, jolloin negatiivinen etumerkki viittaa siihen, että puolue on saanut liian vähän paikkoja (vrt. kaava (3.3)).

Kaikista suurin paikkojen yliedustus on Kansallisella Kokoomuksella, sillä se saa 1,3037 paikkaa liian paljon ideaaliseen osuuteen nähden. Lisäksi voidaan havaita, että paikkojen yliedustus on suurimmillaan kolmen eniten paikkoja saaneen puolueen eli Kansallisen Kokoomuksen, Suomen Sosialidemokraattisen Puolueen ja Perussuomalaisten kohdalla. Vaalituloksen voi tällöin tulkita suuria puolueita suosivaksi. Tämä tulee ilmi myös siinä, että paikkoja saaneista puolueista kolme itseisarvoltaan suurinta negatiivista paikkojen yliedustusta ovat yhden paikan saaneilla puolueilla eli Vasemmistoliitolla, Liike Nytillä ja Suomen Kristillisdemokraatit (KD):lla.

Esimerkki 3.22 tuo selvästi esille sen, että jaettaessa paikkoja vaaleissa suhteessa puolueiden saamiin äänimääriin paikkajakoa ei voida tehdä suoraan puolueiden ideaalisten osuuksien avulla, koska ne eivät yleensä ole kokonaislukuja. Seuraavaksi alaluvuissa 3.5 ja 3.6 esiteltävät lukusarja- ja kvoottimenetelmät tarjoavat keinoja paikkojen jakamiseksi suhteellisen vaalitavan periaatteiden mukaisesti.

3.5 Lukusarjamenetelmistä

Kuvataan Jansonin artikkelin [33, s. 122] pohjalta lukusarjamenetelmien ideaa. Lukusarjamenetelmät perustuvat lukujonoihin $d(n)$, missä n on positiivinen kokonaisluku. Positiivisten kokonaislukujen joukolla $\mathbb{Z}_+$ tarkoitetaan tässä työssä joukkoa $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Lukujonojen $d(n)$ alkioille tulee olla voimassa, että $0 \leqslant d(1) < d(2) < d(3) \cdots$. Näille lukujonoille käytetään kirjallisuudessa erilaisia muotoiluja, sillä esimerkiksi Balinski ja Young [8, s. 99] käyttävät merkintää, jossa lukujonon $d(n)$ ensimmäinen alkio on luku $d(0)$.

Lukusarjamenetelmät voidaan kuvata matemaattisesti usealla eri tavalla. Nämä erilaiset kuvaukset antavat kuitenkin samat tulokset paikkojen jaoille eli ne ovat ekvivalentteja keskenään. Tämä tulos todistetaan myöhemmin Lauseen 3.27 yhteydessä. Seuraavaksi annetaan kolme keskenään erilaista kuvausta lukusarjamenetelmille.

Määritelmä 3.23. (vrt. [33, s. 122–123][34, s. 21]) Olkoot $x_1, \ldots, x_l$ puolueiden saamien paikkojen lukumäärät, v_i puolueen i saama äänimäärä ja D reaaliluku. Reaaliluvuksi D valitaan sellainen reaaliluku, joka toteuttaa *lukusarjamenetelmien esitystavan* mukaisen epäyhtälön

$$d(x_i) \leqslant \frac{v_i}{D} \leqslant d(x_i + 1)$$

ja ehdon $\sum_{i=1}^{l} x_i = h.$

Määritelmän 3.23 mukainen lukusarjamenetelmän esitystapa on käytössä esimerkiksi Yhdysvalloissa [33, s. 124][34, s. 20–21]. Määritelmässä 3.23 esiintyvän jakajan D voi tulkita paikan hinnaksi eli äänten lukumääräksi, joka takaa puolueelle i v_i/D kappaletta paikkoja [33, s. 123]. Käytännössä osamäärät v_i/D eivät ole kokonaislukuja, jolloin niitä tulee pyöristää paikkojen jakamiseksi. Toisin sanoen lukusarjamenetelmien ideana on löytää sellainen jakaja D, jonka avulla saadaan kaikki paikat jaettua, kun osamääriä v_i/D pyöristetään sopivasti [33, s. 123–124][57, s. 58].

Seuraavaksi esitettävät Algoritmit 3.24 ja 3.25 on muotoiltu Jansonin artikkelin [33, s. 124] pohjalta ja niiden mukaisia kuvauksia lukusarjamenetelmistä käytetään tyypillisesti Euroopassa. Nämä algoritmit perustuvat *vertauslukujen* (engl. *comparative index*) laskemiseen.

Algoritmi 3.24. Olkoon jaettavia paikkoja h kappaletta ja olkoon puolueita l kappaletta. Nämä h paikkaa jaetaan yksi kerrallaan sille puolueelle i, jonka vertausluku $v_i/d(x_i+1)$ on suurin. Luku x_i kertoo, kuinka monta paikkaa puolue i on laskennan aikana saanut eli sen arvo päivittyy sitä mukaan, kun puolue i saa uusia paikkoja. Tällöin päivittyy myös puolueen i vertausluvun arvo. Laskennan alussa puolueiden paikkamäärille x_i on voimassa $x_i = 0$, missä $i = 1, \ldots, l$.

Algoritmi 3.25. Olkoon jaettavia paikkoja h kappaletta ja olkoon puolueita l kappaletta. Lasketaan puolueille vertausluvut $v_i/d(j)$, missä $i = 1, \ldots, l$, seuraavasti. Jaetaan puolueen i äänimäärä v_i lukujonon $d(n)$ alkioilla $d(1), d(2), \ldots, d(j)$. Tämän jälkeen vertausluvuista poimitaan h suurinta vertauslukua. Jaossa olevat paikat jaetaan niille puolueille, joilla on vertauslukuja edellä valittujen vertauslukujen joukossa. Luvuksi j valitaan sopivasti sellainen luku, että kaikki h paikkaa tulevat jaetuksi.

Edellä todettiin, että lukusarjamenetelmien erilaiset kuvaukset ovat ekvivalentteja keskenään. Ennen kyseisen tuloksen muotoilua Lauseeksi 3.27 annetaan Jansonin monisteessa [34, s. 70] esitetty Apulause 3.26.

Apulause 3.26. Olkoon jaettavia paikkoja h kappaletta. Tällöin viimeisenä jaettavan paikan vertausluku on

$$V(h) = \min_{1 \leqslant i \leqslant l} \frac{v_i}{d(x_i)}, \tag{3.4}$$

missä v_i on puolueen i äänimäärä ja x_i paikkamäärä. Jos paikkoja olisi vielä viimeisen paikan jakamisen jälkeen jaossa, olisi seuraava vertausluku muotoa

$$V(h+1) = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \frac{v_i}{d(x_i+1)}. \tag{3.5}$$

Todistus. Apulause on todistettu Jansonin monisteessa [34, s. 20, 69–70]. Todistuksen ideana on näyttää viimeistä paikkaa seuraavan paikan vertausluvun (3.5) seuraavan suoraan siitä, mitä muotoa vertausluvut ovat paikkoja jaettaessa. Viimeisen paikan vertausluvun (3.4) esitysmuodon osoittamisessa hyödynnetään tietoa siitä, että vertausluvut muodostavat vähenevän lukujonon. □

Muotoillaan seuraavaksi lukusarjamenetelmien kuvauksien välinen ekvivalenssi Lauseeksi 3.27. Lause on muotoiltu ja todistettu Jansonin monisteen [34, s. 70–71] ja artikkelin [33, s. 124–125] pohjalta.

Lause 3.27. Lukusarjamenetelmien kuvaukset ovat keskenään ekvivalentteja. Olkoon vaaleihin osallistuvien puolueiden lukumäärä l. Tällöin jaettaessa paikkoja lukusarjamenetelmän avulla käyttäen vertauslukujen määrittämisessä jakajina lukuja $d(1)$, $d(2)$, $\ldots$, on aina olemassa sellainen aidosti positiivinen reaaliluku D, joka toteuttaa epäyhtälön

$$d(x_i) \leqslant \frac{v_i}{D} \leqslant d(x_i + 1), \tag{3.6}$$

missä v_i on puolueen i äänimäärä ja x_i paikkamäärä. Indeksi i saa arvot $i = 1, \ldots, l.$

Todistus. Oletetaan, että jokainen vaaleihin osallistunut puolue on saanut ääniä eli mielivaltaisesti valitun puolueen i äänimäärälle on voimassa $v_i > 0$. Oletetaan lisäksi, että vaaleissa on jaossa h kappaletta paikkoja.

Näytetään aluksi, että Algoritmien 3.24 ja 3.25 antamat paikkajaot ovat ekvivalentteja keskenään. Käytettäessä Algoritmia 3.25 lasketaan vertauslukuja $v(i)/d(j)$. Nämä vertausluvut voidaan järjestää laskevaan järjestykseen yhdeksi lukujonoksi. Tästä lukujonosta valitaan paikkoja jaettaessa h ensimmäistä eli suurinta vertauslukua. Kun paikkojen jako suoritetaan Algoritmin 3.24 mukaisesti, paikat jaetaan niille puolueille, joilla on suurimmat vertausluvut. Tällöin myös Algoritmia 3.24 käytettäessä valitaan samat h suurinta vertauslukua edellä kuvatusta lukujonosta, jolloin nämä kuvaukset ovat ekvivalentteja keskenään.

Osoitetaan seuraavaksi Määritelmän 3.23 ja Algoritmin 3.25 olevan ekvivalentteja keskenään. Epäyhtälön (3.6) mukaan tulee olla, että $d(x_i) \leqslant \dfrac{v_i}{D}$ eli

$$D \leqslant \frac{v_i}{d(x_i)}.$$

Tämä toteutuu vain silloin, kun

$$D \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant l} \frac{v_i}{d(x_i)},$$

jolloin Apulauseen 3.26 avulla luvulle D saadaan ylärajaksi $D \leqslant V(h)$. Epäyhtälön (3.6) avulla voidaan kirjoittaa myös, että $\dfrac{v_i}{D} \leqslant d(x_i + 1)$ eli

$$D \geqslant \frac{v_i}{d(x_i + 1)}.$$

Tällöin tulee olla, että

$$D \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \frac{v_i}{d(x_i + 1)},$$

jolloin Apulauseen 3.26 mukaan luvun D alaraja on $D \geqslant V(h+1)$. Täten epäyhtälö (3.6) toteutuu, kun

$$V(h + 1) \leqslant D \leqslant V(h). \tag{3.7}$$

Nyt epäyhtälöstä (3.7) nähdään, että viimeistä jaettavaa paikkaa vastaava vertausluku $V(h)$ on vähintään yhtä suuri kuin luku D. Toisin sanoen, kun jaossa on h kappaletta paikkoja, on kutakin paikkaa vastaava vertausluku vähintään yhtä suuri kuin luku D. Nämä vertausluvut ovat epäyhtälön (3.4) mukaisesti muotoa $v_i/d(x_i)$ eli ne ovat vastaavaa muotoa kuin Algoritmin 3.25 mukaiset vertausluvut. Täten lukusarjamenetelmien kuvaukset ovat ekvivalentteja keskenään. □

Luvussa 3.3 kuvataan, millaisia ominaisuuksia Määritelmän 3.19 mukaiseen jakomenetelmään liittyy. Lukusarjamenetelmien tapauksessa nämä ominaisuudet toteutuvat. Tämä tulos on muotoiltu Lauseeksi 3.28 Pukelsheimin teokseen [57, s. 59] perustuen.

Lause 3.28. Lukusarjamenetelmät ovat jakomenetelmän määritelmän mukaisesti symmetrisiä, tasapainoisia, yhtäpitäviä, homogeenisia ja tarkkoja.

Todistus. Todistus on esitetty Pukelsheimin teoksessa [57, s. 60]. Todistuksessa näytetään kohta kohdalta lukusarjamenetelmien täyttävän jakomenetelmän määritelmän ehdot ja siinä hyödynnetään Pukelsheimin [57, luku 3] määrittelemiä *yleisen pyöristyssäännön* (engl. *general rounding rule*) ja *signpost jonon* (engl. *signpost sequence*) käsitteitä. □

Lukusarjamenetelmistä on olemassa useita erilaisia versioita, jotka eroavat toisistaan siinä, mitä muotoa käytettävä lukujono $d(n)$ on. Eräitä tunnetuimpia ja yleisesti käytettyjä lukusarjamenetelmiä ovat d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmät, minkä vuoksi juuri niitä tutkitaan tarkemmin tässä työssä. Esitellään ensin näistä menetelmistä d'Hondtin menetelmä.

Belgialainen juristi Victor D'Hondt esitteli ensimmäisen kerran vuonna 1878 nimeänsä kantavan lukusarjamenetelmän [8, s. 18]. Suomessa käytetään presidentinvaalia lukuun ottamatta d'Hondtin menetelmää yleisten vaalien tuloksenlaskennassa [32][72, § 88–89]. Muualla Euroopassa d'Hondtin menetelmää on hyödynnetty parlamenttivaalien yhteydessä esimerkiksi Espanjassa [45, § 163], Islannissa [43, § 109] ja Belgiassa [75, s. 12].

Huomautus 3.29. Tässä työssä käytetään kirjoitusasua *d'Hondtin menetelmä* oikeusministeriön julkaisujen [32] ja [54] mukaisesti d'Hondtin menetelmälle.

Määritelmä 3.30. (vrt. [33, s. 122–123]) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. *D'Hondtin menetelmässä* lukujono $d(n)$ on muotoa $d(n) = n$ eli vertauslukuja laskettaessa jakajina ovat positiiviset kokonaisluvut $1, 2, 3, 4, \ldots$.

Thomas Jefferson kehitti kuitenkin d'Hondtin menetelmää vastaavan menetelmän Yhdysvalloissa jo vuonna 1792 tutkiessaan, kuinka edustajainhuoneen paikat saadaan jaettua osavaltioiden asukaslukuihin perustuen [8, luku 3]. Tämän vuoksi d'Hondtin menetelmästä puhuttaessa käytetään myös termiä Jeffersonin menetelmä. Tässä työssä käytetään jatkossa termiä d'Hondtin menetelmä.

Huomautus 3.31. Jos d'Hondtin menetelmää sovelletaan Määritelmän 3.23 mukaisesti, osamääriä v_i/D pyöristetään alaspäin (katso esimerkiksi [8, s. 18][34, s. 30][57, s. 58–59, 69–70]).

Esimerkki 3.32. Havainnollistetaan d'Hondtin menetelmän soveltamista vuoden 2023 eduskuntavaaleissa Lapin vaalipiirin tapauksessa. Lapin vaalipiirin tulos on kokonaisuudessaan saatavilla oikeusministeriön tieto- ja tulospalvelusta [51], josta tässä esimerkissä Lapin vaalipiirin tulokseen liittyvät tiedot on haettu. Lapin vaalipiiristä valittiin kyseisissä vaaleissa kuusi kansanedustajaa ja kansanedustajia saivat Suomen Sosialidemokraattinen Puolue, Perussuomalaiset, Kansallisen Kokoomuksen ja Suomen Kristillisdemokraattien (KD) vaaliliitto ja Suomen Keskusta. Kansallista Kokoomusta ja Suomen Kristillisdemokraatteja (KD) käsitellään jatkossa yhtenä puolueena niiden vaaliliiton takia tämän esimerkin yhteydessä.

Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi vain edellä mainittujen puolueiden vertauslukuja käyttämällä d'Hondtin menetelmää lukusarjamenetelmien Algoritmin 3.25 mukaisesti. Kootaan aluksi puolueiden keräämät äänimäärät äänivektoriin $\mathbf{v}$ samassa järjestyksessä, kuin missä ne on edellä mainittu. Puolueiden lukumäärä l on nyt 4 eli indeksi i saa arvot $i = 1, \ldots, 4$. Tällöin äänivektori $\mathbf{v}$ on muotoa

$$\mathbf{v} = (17685, 26199, 13053, 24321).$$

Esitetään seuraavaksi näiden puolueiden vertausluvut Taulukossa 3.4 jossa käytetään edellä mainittujen puolueiden nimilyhenteitä Kielitoimiston ohjepankin puolueiden nimiä ja lyhenteitä koskevan ohjeen [39] mukaisesti. Rivillä j on puolueiden vertausluvut $v_i/d(j)$ eli nyt d'Hondtin menetelmää käytettäessä vertausluvut ovat muotoa $v_i/1, v_i/2$ ja niin edelleen. Jaossa olevat kuusi paikkaa menevät niille puolueilla, joilla on suurimmat vertausluvut ja ne on erotettu Taulukon 3.4 muista alkioista lihavoinnilla. Kuuden suurimman vertausluvun kohdalle on merkitty sulkuihin, monentenako kyseinen paikka on jaettu kuudesta jaossa olleesta paikasta.

Taulukko 3.4. *Vuoden 2023 eduskuntavaaleissa Lapin vaalipiirissä kansanedustajia saaneiden puolueiden vertauslukuja.*

Kaava vertausluvulle	SDP	PS	Kok. + KD	Kesk.
$v_i/1$	**17 685** (3.)	**26 199** (1.)	**13 053** (5.)	**24 321** (2.)
$v_i/2$	8 842,5	**13 099,5** (4.)	6 526,5	**12 160,5** (6.)
$v_i/3$	5 895	8 733	4 351	8 107

Taulukosta 3.4 voidaan nyt nähdä, että Suomen Sosialidemokraattinen Puolue ja Kansallisen Kokoomuksen ja Suomen Kristillisdemokraattien (KD) vaaliliitto saavat molemmat yhden paikan. Vastaavasti sekä Perussuomalaiset että Suomen Keskusta saavat kaksi paikkaa. Paikkavektori $\mathbf{x}$ on täten muotoa $\mathbf{x} = (1, 2, 1, 2)$.

Sainte-Laguën menetelmän on kehittänyt ranskalainen matemaatikko André Sainte-Laguë, joka esitteli menetelmän vuonna 1910 [33, s. 124][34, s. 24]. Menetelmä tunnetaan myös nimellä Websterin menetelmä [8, s. 92][57, s. 70], mutta tässä työssä käytetään termiä

Sainte-Laguën menetelmä. Sainte-Laguën menetelmä on Määritelmän 3.33 mukaisesti käytössä esimerkiksi Latvian parlamenttivaaleissa [65, luku 38].

Määritelmä 3.33. (vrt. [33, s. 123, 125]). Olkoon n positiivinen kokonaisluku. *Sainte-Laguën menetelmässä* käytettävä lukujono on muotoa $d(n) = 2n - 1$ eli vertauslukuja laskettaessa jakajina ovat parittomat positiiviset kokonaisluvut $1, 3, 5, 7, \ldots$.

Huomautus 3.34. Jos Sainte-Laguën menetelmää sovelletaan Määritelmän 3.23 mukaisesti, osamääriä v_i/D pyöristetään lähimpään kokonaislukuun (katso esimerkiksi [8, s. 32][34, s. 16–17][57, s. 58–59, 69–70]).

Määritelmän 3.33 mukaisen kuvauksen lisäksi vaalien tuloksen laskennassa sovelletaan Sainte-Laguën menetelmän muunnettua versiota, jossa lukujonon $d(n)$ ensimmäinen alkio $d(1)$ on jokin lukua 1 suurempi desimaaliluku (katso esimerkiksi [33, s. 125][34, s. 25–26]). Kun ensimmäisenä alkiona on lukua 1 suurempi luku, nousee kynnys ensimmäisen paikan saamiseksi, mikä vaikuttaa etenkin pienten puolueiden mahdollisuuksiin saada paikkoja [34, s. 26].

Määritelmä 3.35. (vrt. [33, s. 125]). Olkoon n positiivinen kokonaisluku. *Muunnetussa Sainte-Laguën menetelmässä* lukujono $d(n)$ on tyypillisesti muotoa

$$d(n) = \begin{cases} 1,4 & \text{kun } n = 1, \\ 2n - 1 & \text{kun } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Sainte-Laguën menetelmän muunnettua versiota käytetään esimerkiksi Ruotsin valtiopäivävaaleissa [73, luku 14]. Kyseisissä vaaleissa lukujonon $d(n)$ ensimmäisenä terminä on luku 1,2. Norjassa suurkäräjävaaleissa käytetään Sainte-Laguën menetelmää määritettäessä, kuinka paikat jakaantuvat vaalipiirien kesken [46, luku 11]. Paikkojen jako puolueiden kesken toteutetaan puolestaan muunnetulla Sainte-Laguën menetelmällä käyttämällä lukujonon $d(n)$ ensimmäisenä terminä lukua 1,4. Suomen osalta Sainte-Laguën menetelmä on noussut esille yhtenä vaihtoehtona nykyisin käytettävälle d'Hondtin menetelmällä, kun on selvitetty erilaisia vaihtoehtoja Suomen vaalijärjestelmän uudistamiseksi (katso esimerkiksi [19][54]).

Edellä kuvatut D'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmät eivät ole ainoita tunnettuja lukusarjamenetelmiä. Muita yleisesti kirjallisuudessa esiintyviä lukusarjamenetelmiä ovat muun muassa Adamsin, Deanin ja Huntingtonin menetelmät (katso esimerkiksi [8][33, s. 122][57, s. 69–70]). Lukusarjamenetelmistä on olemassa myös yksittäisissä maissa käytettyjä muunnelmia. Tanskan parlamenttivaaleissa jaetaan ensin 179 paikasta 135 paikkaa vaalipiirikohtaisesti, minkä lisäksi sekä Färsaaret että Grönlanti saavat suoraan 2 paikkaa [23]. Tämän jälkeen puolueiden kesken jaetaan 40 lisäpaikkaa. Lisäpaikkojen jaon yhteydessä käytetään jakajina lukuja $1, 4, 7, 10, \ldots$ eli lukujonoa $d(n) = 3n - 2$

määritettäessä, kuinka yksittäisen puolueen saamat lisäpaikat jaetaan vaalipiirien kesken [24, § 79]. Viron parlamenttivaaleissa tuloksen laskenta toteutetaan kahdessa vaiheessa [60, § 62]. Ensin paikat jaetaan vaalipiirikohtaisesti, minkä jälkeen mahdollisesti jakamatta jääneet paikat jaetaan valtakunnallisesti käyttämällä d'Hondtin menetelmän muunnelmaa, jossa lukujono $d(n)$ on muotoa $d(n) = n^{0.9}$.

3.6 Kvoottimenetelmistä

Alaluvussa 3.5 käsitellyissä lukusarjamenetelmissä puolueiden vertauslukuja laskettaessa osamäärän $v_i/d(j)$ jakajan $d(j)$ arvoa päivitettiin paikkojen jakamisen edetessä (katso esimerkiksi Algoritmi 3.25). Tässä alaluvussa esiteltävissä kvoottimenetelmissä tutkitaan samankaltaista osamäärää v_i/Q eli nyt puolueen i äänimäärä jaetaan jollakin luvulla Q. Kvoottimenetelmät eroavat lukusarjamenetelmistä olennaisesti siinä, että tämä puolueiden äänimäärät jakava luku Q on ennalta kiinnitetty [57, s. 71]. Lukua Q kutsutaan *kvootiksi* (engl. *quota*.) Kvootin Q voi tulkita paikan hinnaksi eli paikan saamiseen vaadittavien äänten lukumääräksi [33, s. 130].

Kuvataan Pukelsheimin teoksen [57, s. 71] pohjalta, kuinka paikat jaetaan puolueiden kesken kvoottimenetelmillä. Paikkojen jakaminen toteutetaan kahdessa vaiheessa, joista ensimmäistä kutsutaan *pääjaoksi* (engl. *main apportionment*.) Pääjaossa kullekin puolueelle i lasketaan *väliaikainen suhdeluku* (engl. *interim quotient*) v_i/Q. Tämän jälkeen puolueelle i jaetaan sille lasketun väliaikaisen suhdeluvun kokonaisosan $y_i = \lfloor v_i/Q \rfloor$ verran paikkoja. Kun tämä on suoritettu kaikille puolueille, on jaettu yhteensä

$$m = \sum_{i=1}^{l} y_i$$

kappaletta paikkoja. Kvootti Q tulee valita siten, että pääjaossa ei jaeta enempää paikkoja, kuin niitä on todellisuudessa jaossa eli $m \leqslant h$. Lisäksi vaaditaan, että

$$h - m \leqslant l \tag{3.8}$$

eli pääjaossa voi jäädä jakamatta korkeintaan yksi paikka yhtä puoluetta kohden. Tarvittaessa pääjaon jälkeen suoritettavaa vaihetta kutsutaan *jäännössovitukseksi* (engl. *residual fit*) ja siinä jaetaan pääjaossa jakamatta jääneet paikat. Tyypillisin tapa jäännössovituksen laskemiseen on *suurimpien jakojäännösten* (engl. *greatest remainder*) selvittäminen. Tällöin kaikille puolueille i lasketaan aluksi niiden väliaikaisen suhdeluvun desimaaliosa $v_i/Q - \lfloor v_i/Q \rfloor$. Seuraavaksi nämä desimaaliosat järjestetään suuruusjärjestykseen. Jaossa olevat paikat jaetaan yksi kerrallaan $h - m$ suurimman desimaaliosan saaneelle puolueelle, jolloin puolue voi saada tässä vaiheessa korkeintaan yhden paikan. Muita tapoja jäännössovituksen määrittämiseksi esitellään myöhemmin tässä alaluvussa. Kun jäännössovitus määritetään suurimpien jakojäännösten perusteella, voidaan kvoottimenetelmien periaate tiivistää Määritelmän 3.36 muotoon.

Määritelmä 3.36. (vrt. [33, s. 131]) *Kvoottimenetelmien periaate suurimpia jakojäännöksiä* (engl. *method of largest remainder*) käytettäessä on seuraava. Jaetaan puolueiden äänimäärät v_i kvootilla Q, jonka jälkeen kukin puolue saa edellä lasketun osamäärän kokonaisosan $\lfloor v_i/Q \rfloor$ verran paikkoja. Jos tämän jälkeen paikkoja jää jakamatta, jaetaan ne niille puolueille, joiden desimaaliosat $v_i/Q - \lfloor v_i/Q \rfloor$ ovat suurimmat.

Vaalilaissa [72, 6 §] säädetään, kuinka kansanedustajien paikat jaetaan Manner-Suomen vaalipiirien kesken. Jako tapahtuu kvoottimenetelmien periaatteen mukaisesti määrittämällä jäännössovitus desimaaliosien suuruuden perusteella. Käytettävänä kvoottina Q on seuraavaksi esiteltävä Haren kvootti.

Määritelmä 3.37. [57, s. 72] Olkoon v_+ vaaleissa annettujen äänten yhteismäärä ja olkoon h vaaleissa jaettavien paikkojen lukumäärä. *Haren kvootti* (engl. *Hare quota*) on tällöin muotoa

$$HaQ = \frac{v_+}{h}. \tag{3.9}$$

Käytettäessä Haren kvoottia (3.9) pääjaossa määritettävät väliaikaiset suhdeluvut ovat muotoa

$$\frac{v_i}{\frac{v_+}{h}} = \frac{v_i}{v_+}h \tag{3.10}$$

eli ne vastaavat Määritelmän 3.20 mukaisia ideaalisia osuuksia paikoista [57, s. 72]. Euroopassa kutsutaan usein *Haren menetelmäksi* Määritelmän 3.36 mukaista kvoottimenetelmää, jonka kvoottina on Haren kvootti (3.9) [33, s. 131]. Haren menetelmää on sovellettu esimerkiksi Bulgariassa, Kyproksella, Liettuassa ja Slovakiassa [75, s. 12–13]. Haren menetelmä tunnetaan kirjallisuudessa myös nimillä Hamiltonin, Vintonin ja Hare-Niemeyerin menetelmä (katso esimerkiksi [33, s. 131][34, s. 37]), mutta tässä työssä käytetään termiä Haren menetelmä.

Havainnollistetaan Esimerkin 3.38 avulla Haren menetelmän käyttämistä kuvaamalla kansanedustajien paikkojen jako Manner-Suomen vaalipiirien kesken vuoden 2023 eduskuntavaalien tapauksessa. Haren menetelmän periaate on kuvattu sanallisesti vaalilaissa [72, 6 §] määritettäessä, kuinka tämä jako suoritetaan.

Esimerkki 3.38. Kansanedustajien paikkojen jakaminen Manner-Suomen vaalipiirien kesken perustuu kuudennen vaalipäivää edeltävän kalenterikuukauden viimeisen päivän mukaiseen Suomen kansalaisten lukumäärään. Vuoden 2023 eduskuntavaalien kohdalla tämä tarkoittaa lokakuun 2022 väestötietojen tarkastelemista, jotka löytyvät lähteestä [17, Marraskuu 2022]. Manner-Suomen vaalipiireissä on jaossa 199 kansanedustajan paikkaa, jolloin Haren kvootti (3.9) on muotoa

$$\frac{\text{Suomen kansalaisten yhteenlaskettu lukumäärä}}{199}. \tag{3.11}$$

Vaalipiirin i kohdalla tarkastellaan, kuinka monen Suomen kansalaisen kotikunta on kyseisessä vaalipiirissä. Vaalipiirin i väliaikainen suhdeluku (3.10) voidaan kuvata tällöin muodossa

$$\frac{\text{vaalipiirissä } i \text{ asuvien Suomen kansalaisten lukumäärä}}{\text{Suomen kansalaisten yhteenlaskettu lukumäärä}} \cdot 199. \tag{3.12}$$

Taulukossa 3.5 on Haren menetelmällä laskettu paikkajako vuoden 2023 eduskuntavaaleja varten. Taulukon kolmannessa sarakkeessa on vaalipiirin i väliaikainen suhdeluku (3.12). Merkinnällä v_i tarkoitetaan vaalipiirin i asukaslukua ja symbolilla Q viitataan käytettävään Haren kvoottiin (3.11). Neljännessä sarakkeessa on vaalipiirille i pääjaossa jaettujen kansanedustajan paikkojen lukumäärä. Viidenteen sarakkeeseen on merkitty vaalipiirien desimaaliosien suuruusjärjestys jäännösjaon määrittämistä varten. Niiden vaalipiirien järjestysluku on lihavoitu viidennessä sarakkeessa, jotka saavat jäännösjaossa yhden lisäpaikan.

Taulukko 3.5. *Kansanedustajien paikkajako Manner-Suomen vaalipiirien kesken vuoden 2023 eduskuntavaaleja varten (mukailtu lähteestä [17, Marraskuu 2022]).*

Vaalipiiri	Asukasluku	v_i/Q	Pääjako	Jäännösjako	Paikkamäärä
Helsinki	592 061	22,5676	22	**4.**	23
Uusimaa	959 069	36,5568	36	**5.**	37
Varsinais-Suomi	459 176	17,5024	17	8.	17
Satakunta	205 412	7,8297	7	**2.**	8
Häme	360 859	13,7549	13	**3.**	14
Pirkanmaa	512 606	19,5390	19	**6.**	20
Kaakkois-Suomi	401 490	15,3036	15	9.	15
Savo-Karjala	399 902	15,2431	15	10.	15
Vaasa	418 896	15,9671	15	**1.**	16
Keski-Suomi	265 679	10,1269	10	11.	10
Oulu	474 267	18,0776	18	12.	18
Lappi	171 351	6,5314	6	7.	6
Yhteensä	5 220 768		193	6	199

Taulukosta 3.5 nähdään, että pääjaossa jaetaan 199 paikasta 193 paikkaa. Loput kuusi paikkaa menevät niille vaalipiireille, joiden desimaaliosa on vähintään 0,5390.

Edellä on kuvattu kvoottimenetelmien hyödyntämistä Haren menetelmän tapauksessa.

Seuraavaksi esitettävä Lause 3.39 antaa esimerkin Haren menetelmän ominaisuuksista. Lause ja sen todistus on muokattu Pukelsheimin teoksen [57, s. 72] pohjalta.

Lause 3.39. Haren menetelmää käytettäessä jaetaan pääjaon yhteydessä vähintään $h+1-l$ kappaletta paikkoja.

Todistus. Haren menetelmää käytettäessä kvoottina Q on Haren kvootti (3.9), jolloin pääjaossa puolueelle i jaetaan

$$y_i = \left\lfloor \frac{v_i}{v_+} h \right\rfloor$$

kappaletta paikkoja. Tällöin pääjaossa jaettujen paikkojen lukumäärän m ja jaettavien paikkojen lukumäärän h välille voidaan johtaa seuraava yhteys lattiafunktion Määritelmän 3.2 nojalla

$$m = \sum_{i \leqslant l} \left\lfloor \frac{v_i}{v_+} h \right\rfloor \leqslant \sum_{i \leqslant l} \frac{v_i}{v_+} h = h \sum_{i \leqslant l} \frac{v_i}{v_+} = h \frac{v_+}{v_+} = h.$$

Lattiafunktion määritelmän ja pääjaon ehdon (3.8) avulla jäännössovituksessa jaettavien paikkojen lukumäärälle $h-m$ saadaan yläraja

$$h - m = \sum_{i \leqslant l} \frac{v_i}{v_+} h - \sum_{i \leqslant l} \left\lfloor \frac{v_j}{v_+} h \right\rfloor = \sum_{i \leqslant l} \left(\frac{v_i}{v_+} h - \left\lfloor \frac{v_i}{v_+} h \right\rfloor \right) < l \tag{3.13}$$

koska erotus

$$\frac{v_i}{v_+} h - \left\lfloor \frac{v_i}{v_+} h \right\rfloor$$

on jokin lukua 1 aidosti pienempi desimaaliluku. Täten jäännösjakoon jää jaettavaksi vähemmän paikkoja, kuin mitä puolueiden lukumäärä l on. Koska luvut h, m ja l ovat kokonaislukuja, voidaan epäyhtälö (3.13) kirjoittaa muodossa

$$h - m \leqslant l - 1 \tag{3.14}$$

eli jäännösjaossa jaettavia paikkoja on ainakin yksi vähemmän kuin jaossa olevia paikkoja yhteensä on. Nyt epäyhtälöstä (3.14) nähdään, että pääjaossa jaettavien paikkojen m alaraja on $h+1-l$. □

Euroopassa on käytetty vaalitulosten laskennassa Haren kvootin 3.9 lisäksi sen erilaisia variantteja esimerkiksi Italiassa ja Liettuassa [57, s. 77]. Esitellään ne seuraavaksi Pukelsheimin teoksen [57, s. 76] pohjalta.

Määritelmä 3.40. Haren kvoottia (3.9) voidaan pyöristää lattia- ja kattofunktioiden avulla. Haren kvootin pyöristettyjä muotoja kutsutaan *Haren kvootin varianteiksi* ja ne ovat muotoa

$$HQ1 = \left\lfloor \frac{v_+}{h} \right\rfloor \quad \text{ja} \quad HQ2 = \left\lceil \frac{v_+}{h} \right\rceil.$$

Eräs toinen tyypillinen kvootti Haren kvootin ohella on Droopin kvootti, joka määritellään seuraavaksi. Droopin kvoottia käytetään esimerkiksi siirtoäänivaalitavan yhteydessä [59, s. 71, 76] ja sitä on sovellettu Sloveniassa [75, s. 13].

Määritelmä 3.41. [57, s. 76] Olkoon v_+ vaaleissa annettujen äänten yhteismäärä ja olkoon h vaaleissa jaettavien paikkojen lukumäärä. *Droopin kvootti* (engl. *Droop-quota*) on tällöin muotoa

$$DrQ = \left\lfloor \frac{v_+}{h+1} \right\rfloor + 1. \tag{3.15}$$

Huomautus 3.42. Droopin kvootti (3.15) esitetään usein ilman alaspäin pyöristämistä (katso esimerkiksi [34, s. 38][59, s. 76]) muodossa

$$DrQ = \frac{v_+}{h+1} + 1. \tag{3.16}$$

Haren kvootin tavoin myös Droopin kvootille on olemassa erilaisia variantteja, joita käsitellään seuraavaksi Pukelsheimin teoksen [57, s. 76–77] pohjalta. Variantit $DQ1$ ja $DQ2$ ovat olleet käytössä kantonivaaleissa Sveitsin Solothurnissa ja variantti $DQ3$ on taas ollut käytössä Slovakiassa europarlamenttivaaleissa. Droopin kvoottia käytettäessä pääjaossa jaetaan enemmän paikkoja, koska se on pienempi kuin Haren kvootti riippumatta siitä, millä tavalla sitä on pyöristetty.

Määritelmä 3.43. [57, s. 76] Droopin kvoottia (3.15) voidaan pyöristää lattia- ja kattofunktiolla sekä neutraalilla orientaatiolla. Droopin kvootin pyöristettyjä muotoja kutsutan *Droopin kvootin varianteiksi* ja ne ovat muotoa

$$DQ1 = \left\lfloor \frac{v_+}{h+1} \right\rfloor, \quad DQ2 = \left\lceil \frac{v_+}{h+1} \right\rceil \quad \text{ja} \quad DQ3 = \left\langle \frac{v_+}{h+1} \right\rangle.$$

Haren ja Droopin kvootteille sekä niiden varianteilla on olemassa tuloksia siihen liittyen, kuinka käyttökelpoisia ne ovat käytännössä vaalien tuloksen laskennan kannalta. Näitä tuloksia on muotoiltu seuraavaksi esitettäviksi lauseiksi Pukelsheimin teokseen [57, s. 73–74, 78–79] perustuen, minkä pohjalta myös niiden todistukset on kirjoitettu. Todistuksia on täydennetty tarpeellisin osin tätä työtä varten.

Lause 3.44. Kvootteja $HaQ, HQ1, HQ2$ ja DrQ voidaan käyttää pääjaon laskemisessa, kun jäännössovitus tehdään suurimpien jakojäännösten perusteella.

Todistus. Järjestetään aluksi Haren kvootti (3.9) ja Määritelmässä 3.40 esitetyt Haren kvootin variantit suuruusjärjestykseen alaluvussa 3.2 esitettyjen pyöristysfunktioiden määritelmien perusteella

$$HQ2 = \left\lceil \frac{v_+}{h} \right\rceil \geqslant HaQ = \frac{v_+}{h} \geqslant HQ1 = \left\lfloor \frac{v_+}{h} \right\rfloor. \tag{3.17}$$

Järjestetään samalla periaatteella Droopin kvootti (3.15) ja Määritelmän 3.43 mukaiset Droopin kvootin variantit suuruusjärjestykseen

$$DrQ = \left\lfloor \frac{v_+}{h+1} \right\rfloor + 1 \geqslant DQ2 = \left\lceil \frac{v_+}{h+1} \right\rceil \geqslant DQ3 = \left\langle \frac{v_+}{h+1} \right\rangle \geqslant DQ1 = \left\lfloor \frac{v_+}{h+1} \right\rfloor . \tag{3.18}$$

Vaalituloksia laskettaessa annettujen äänten kokonaismäärä v_+ on käytännössä niin suuri, että se toteuttaa epäyhtälön $v_+ \geqslant h(h+1)$. Lisätään tähän epäyhtälöön puolittain termi v_+h, jolloin epäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} & v_+ + v_+h \geqslant h(h+1) + v_+h \\ \Leftrightarrow \quad & v_+(h+1) \geqslant h(h+1) + v_+h \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{v_+(h+1)}{h(h+1)} \geqslant 1 + \frac{v_+h}{h(h+1)} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{v_+}{h} \geqslant \frac{v_+}{h+1} + 1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Lattiafunktio on pyöristysfunktiona Määritelmän 3.1 mukaisesti kasvava funktio, jolloin epäyhtälön (3.19) perusteella huomataan, että $HQ1 \geqslant DrQ$. Täten epäyhtälöketjut (3.17) ja (3.18) voidaan yhdistää eli

$$HQ2 \geqslant HaQ \geqslant HQ1 \geqslant DrQ \geqslant DQ2 \geqslant DQ3 \geqslant DQ1. \tag{3.20}$$

Määritellään ennen epäyhtälöketjun (3.20) tutkimista kvootti $Q(s)$, joka on muotoa

$$Q(s) = \frac{v_+}{h+s}, \tag{3.21}$$

missä parametri s kuuluu puoliavoimelle välille $[-1, 1)$. Lähdetään nyt tutkimaan epäyhtälöä (3.20) tarkastelemalla kvootteja $Q(-1)$ ja $Q(1)$. Ehdon (3.19) avulla saadaan, että

$$Q(-1) = \frac{v_+}{h-1} \geqslant \frac{v_+}{h-1+1} + 1 = \frac{v_+}{h} + 1 > \left\lceil \frac{v_+}{h} \right\rceil = HQ2. \tag{3.22}$$

Lisäksi huomataan, että

$$DrQ = \left\lfloor \frac{v_+}{h+1} \right\rfloor + 1 > \frac{v_+}{h+1} = Q(1). \tag{3.23}$$

Epäyhtälöketjujen (3.22) ja (3.23) avulla voidaan päätellä, että tulee olla olemassa sellainen parametri $s^* < 1$, jolla $DrQ = Q(s^*)$, koska kvootin (3.21) parametri s saa arvoja puoliavoimelta väliltä $[-1, 1)$. Nyt epäyhtälöketju (3.20) voidaan kirjoittaa muodossa

$$Q(-1) > HQ2 \geqslant HaQ \geqslant HQ1 \geqslant DrQ = Q(s^*). \tag{3.24}$$

Tutkitaan seuraavaksi, kuinka paljon paikkoja tulee jaetuksi pääjaon aikana käytettäessä kvoottia (3.21). Tällöin pääjaossa jaetaan puolueelle i paikkoja

$$y_i = \left\lfloor \frac{v_i}{Q(s)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{v_i}{v_+}(h+s) \right\rfloor$$

kappaletta. Pääjaossa jaettujen paikkojen lukumäärän y_+ yläraja on täten

$$y_+ \leqslant \sum_{i \leqslant l} \frac{v_i}{v_+}\big(h+s\big) = h+s < h+1.$$

Yläraja voidaan kirjoittaa muodossa $y_+ \leqslant h$, koska y_+ ja h ovat kokonaislukuja. Tämä yläraja vastaa sitä, kuinka paljon paikkoja jaetaan pääjaossa käytettäessä kvoottia $Q(1)$. Pääjaossa jaettujen paikkojen lukumäärän y_+ alaraja kertoo taas, kuinka paljon paikkoja jaetaan pääjaossa, kun käytetään kvoottia $Q(-1)$. Alarajaksi saadaan

$$y_+ > \sum_{j \leqslant l} \left(\frac{v_j}{v_+}\big(h+s\big) - 1 \right) = h+s-l \geqslant h-l-1.$$

Alarajaa voidaan ylärajan tavoin tiukentaa muotoon $y_+ \geqslant h-l$. Pääjaossa jaettavien paikkojen lukumäärä kuuluu tällöin välille

$$h - l \leqslant y_+ \leqslant h \tag{3.25}$$

käytettäessä kvoottia $Q(s)$. Koska kvootit $HQ2, HaQ, HQ1$ ja DrQ ovat kvoottien $Q(-1)$ ja $Q(1)$ välissä, voidaan epäyhtälöketju (3.24) kirjoittaa pääjaossa jaettujen paikkojen lukumäärän y_+ rajojen (3.25) avulla muodossa

$$h-l \leqslant y_+(HQ2) \leqslant y_+(HaQ) \leqslant y_+(HQ1) \leqslant y_+(DrQ) \leqslant h. \tag{3.26}$$

Epäyhtälössä (3.26) merkintä $y_+(Q)$ tarkoittaa pääjaossa yhteensä jaettujen paikkojen lukumäärää kvootin Q tapauksessa. Nyt nähdään, että käytettäessä kvootteja HaQ, $HQ1$, $HQ2$ ja DrQ pääjaossa jaetaan vähintään $h-l$ ja korkeintaan h kappaletta paikkoja. Täten näitä kvootteja voidaan käyttää pääjaossa, kun jäännössovitus määritetään suurimpiin jakojäännöksiin perustuen. □

Lause 3.45. Droopin kvootin variantit $DQ1$, $DQ2$ ja $DQ3$ ovat niin pieniä, että pääjaossa jaettavien paikkojen lukumäärä voi olla suurempi kuin todellisuudessa jaossa olevien paikkojen lukumäärä h.

Todistus. Pääjaossa jaettavien paikkojen lukumäärän yläraja on yhteensä jaossa olevien paikkojen lukumäärä h. Näytetään, että tämä yläraja voi ylittyä käytettäessä kvootteja $DQ1$, $DQ2$ ja $DQ3$ pääjaossa. Olkoon kaikkien annettujen äänten lukumäärä v_+ muotoa $v_+ = n(h+1)$, missä n on luonnollinen luku. Tutkitaan seuraavaksi, kuinka paljon paikkoja jaetaan tällöin pääjaossa käytettäessä kvoottia $DQ2$. Kvootti $DQ2$ saa nyt muodon

$$DQ2 = \left\lceil \frac{v_+}{h+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n\big(h+1\big)}{h+1} \right\rceil = n.$$

Jos kaikki äänivektorin alkiot ovat luvun n monikertoja, jaetaan pääjaossa

$$y_+(DQ2) = \sum_{i \leqslant l} \left\lfloor \frac{v_i}{n} \right\rfloor = \sum_{i \leqslant l} \frac{v_i}{n} = \frac{v_+}{n} = \frac{n\big(h+1\big)}{n} = h+1$$

paikkaa. Pääjaossa on kuitenkin jaossa korkeintaan h kappaletta paikkoja. Epäyhtälöketjun (3.20) ja edellä saadun tuloksen avulla voidaan todeta, että kvootteja $DQ1$, $DQ2$ ja $DQ3$ käytettäessä saatetaan jakaa pääjaossa enemmän paikkoja, kuin niitä on todellisuudessa jaossa. $\square$

Lukusarjamenetelmien tapaan kvoottimenetelmistä on olemassa erilaisia versioita. Erot syntyvät käytettävien kvoottien ohella siinä, kuinka jäännössovitus määritetään. Eräs tunnettu kvootti tässä työssä esiteltyjen kvoottien ohella on *Imperialin kvootti*, joka on muotoa $Q = v_+/(h+2)$ (katso esimerkiksi [33, s. 131]). Esitellään seuraavaksi Pukelsheimin [57, s. 18–19, 77] kuvaamia vaihtoehtoja jäännössovituksen laskemiseksi. Jäännössovitusta laskettaessa voidaan rajata sitä, mitkä puolueet huomioidaan siinä. Esimerkiksi Liettuassa vuoden 2009 europarlamenttivaalien yhteydessä jäännössovitus laskettiin puolueiden desimaaliosien avulla huomioilla vain ne puolueet, jotka olivat saaneet vähintään yhden paikan pääjaon yhteydessä. Jäännössovituksessa voidaan jakaa kaikki jakamatta olevat paikat vaalien suurimmalle puolueelle, kuten Sveitsissä Solothurnin kantonissa on tehty kantonivaaleissa vuosina 1896–1917.

3.7 Vuoden 2023 eduskuntavaalien äänestysdatan simuloiminen

Tässä alaluvussa esitellään vuoden 2023 eduskuntavaalien äänestysdatan simuloinneista saadut tulokset. Simuloinneilla on tutkittu, mikä olisi vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos, kun vaalitulos on laskettu eri lukusarja- ja kvoottimenetelmillä. Äänestysdata on haettu vaalipiirikohtaisesti oikeusministeriön tieto- ja tulospalvelusta [50] ja simuloinnit on toteutettu vaalipiireittäin, koska eduskuntavaalien tulos muodostuu vaalipiirikohtaisista tuloksista. Ahvenanmaan maakunnan vaalipiiriä ei ole huomioitu simuloinneissa. Ennen simulointien tulosten esittelemistä kuvataan, millä matemaattisilla perusteilla menetelmiä vertaillaan keskenään. Lisäksi arvioidaan, ovatko simuloinneilla saadut tulokset järkeviä, kun niitä verrataan kirjallisuudessa esitettyihin eri menetelmiä koskeviin tuloksiin.

3.7.1 Vaalituloksien keskinäisestä vertailusta matemaattisesti

Eri laskentamenetelmien antamia tuloksia voi vertailla keskenään siitä näkökulmasta, minkä kokoisia puolueita eri menetelmien antamat tulokset suosivat. Tämä on ideana myös alaluvussa 3.7.2 analysoitaessa simulointien tuloksia. Vertailtaessa eri menetelmiä keskenään tutkitaan niiden antamien paikkavektorien välistä majorointia.

Määritelmä 3.46. (vrt. [57, s. 111]) Olkoot $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{z}$ $l-$dimensioisia paikkavektoreita, joiden alkiot $y_1, \ldots, y_l$ ja $z_1, \ldots, z_l$ on järjestetty laskevaan järjestykseen eli $y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_l$ ja $z_1 \geqslant \cdots \geqslant z_l$. Paikkavektorien $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{z}$ alkioiden summille on lisäksi voimassa, että $y_+ = z_+ = h$, missä h on jaettavien paikkojen lukumäärä. Paikkavektori $\mathbf{z}$ *majoroi* (engl. *majorize*) paikkavektoria $\mathbf{y}$, jos epäyhtälö

$$y_1 + \cdots + y_k \leqslant z_1 + \cdots + z_k$$

on voimassa kaikilla indekseillä $k < l$. Tällöin merkitään $\mathbf{y} \preceq \mathbf{z}$.

Määritelmä 3.47. (vrt. [57, s. 112]) Olkoot A ja A' kaksi erillistä jakomenetelmää ja olkoot vaaleissa jaossa h kappaletta paikkoja ja l kappaletta vaaleihin osallistuvia puolueita. Olkoon $\mathbf{v}$ mielivaltainen äänivektori, jonka alkioille $v_1, \ldots, v_l$ on voimassa, että $v_1 > \cdots > v_l$. Olkoon $\mathbf{y}$ jakomenetelmän A antama paikkavektori $\mathbf{y} \in A(h, \mathbf{v})$ ja olkoon $\mathbf{z}$ vastaavasti jakomenetelmän A' antama paikkavektori $\mathbf{z} \in A'(h, \mathbf{v})$. Jakomenetelmä A' *majoroi* jakomenetelmää A jos paikkavektori $\mathbf{z}$ majoroi paikkavektoria $\mathbf{y}$ eli $\mathbf{y} \preceq \mathbf{z}$. Tällöin merkitään $A \prec A'$.

3.7.2 Simulointien tuloksien analysointi

Simuloinneissa on käytetty lukusarjamenetelmistä alaluvussa 3.5 esiteltyjä d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmiä. Kvoottimenetelmistä simuloinneissa on tutkittu alaluvussa 3.6 esiteltyjä Haren ja Droopin menetelmiä. Simuloinnit on toteutettu avoimen listavaalin mukaisesti eli ehdokkaat on järjestetty listojen sisällä äänimäärien mukaiseen järjestykseen. Täten puolueiden muodostamat vaaliliitot on huomioitu simuloinneissa seuraavasti. Mikäli simuloinnin mukaan jokin vaaliliitto saa paikan, kyseinen paikka on jaettu avoimen listavaalin periaatteen mukaisesti sille puolueelle, jonka edustajalle jaettavana oleva paikka kuuluu. Simuloinneissa ei ole huomioitu valtakunnallista eikä vaalipiirikohtaisia äänikynnyksiä.

Simuloinnit on tehty R-ohjelmointikielen electoral-paketilla [3, s. 8–10], jonka avulla voi laskea vaalituloksia eri lukusarja- ja kvoottimenetelmien avulla. R-ohjelmointikieltä on käytetty RStudio-ohjelmiston avulla. Lisäksi electoral-paketilla pystyy tutkimaan erilaisia vaalijärjestelmiin liittyviä tunnuslukuja. D'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmien simuloinnit on toteutettu electoral-paketin `seats_ha`-komennolla ja Haren ja Droopin menetelmien

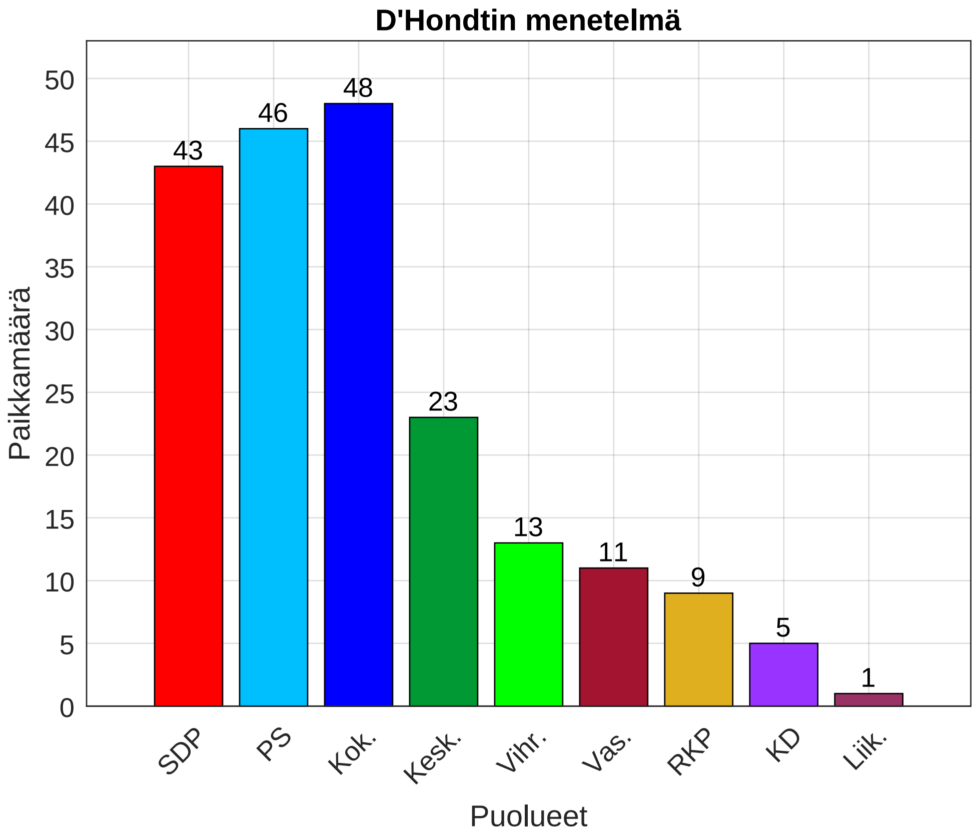
Taulukko 3.6. *Simulointien tuloksissa esiintyvien puolueiden nimet ja nimilyhenteet Kielitoimiston ohjepankin ohjeiden mukaisesti [39].*

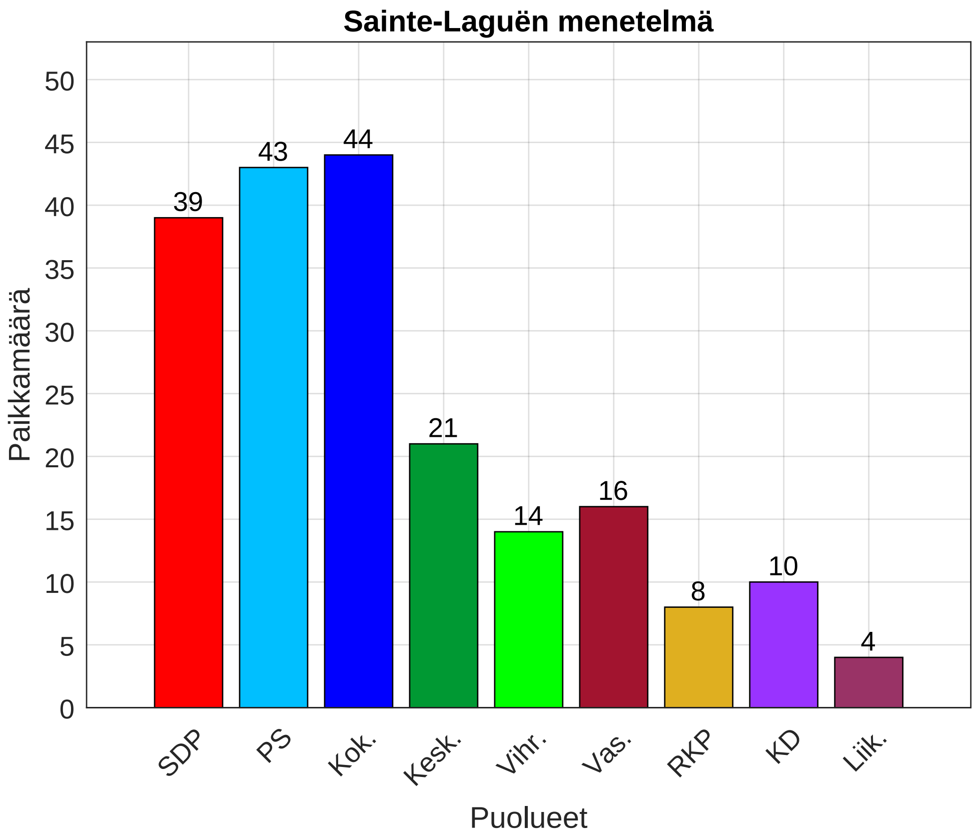
Puolueen nimi	**Nimilyhenne**
Suomen Sosialidemokraattinen Puolue	SDP
Perussuomalaiset	PS
Kansallinen Kokoomus	Kok.
Suomen Keskusta	Kesk.
Vihreä liitto	Vihr.
Vasemmistoliitto	Vas.
Suomen ruotsalainen kansanpuolue	RKP
Suomen Kristillisdemokraatit (KD)	KD
Liike Nyt	Liik.
Vapauden liitto	VL

simuloinnit on vastaavasti toteutettu `seats_lr`-komentoa hyödyntäen.

Simulointien tulokset esitetään pylväsdiagrammien avulla, joissa puolueet erotetaan toisistaan niiden nimilyhenteiden avulla. Taulukossa 3.6 on lueteltu puolueiden nimistä kuvaajissa käytettävät nimilyhenteet, jotka ovat Kielitoimiston ohjepankin puolueiden nimiä ja lyhenteitä käsittelevän ohjeen [39] mukaisia. Puolueet on listattu simulointien tuloksia esittäviin kuvaajiin siinä järjestyksessä, kuin missä ne on lueteltu oikeusministeriön tieto- ja tulospalvelussa [50] vuoden 2023 eduskuntavaalien tuloksiin liittyen. Simulointien tuloksissa esitetään ne puolueet, jotka ovat saaneet kyseessä olevassa simulaatiossa vähintään yhden paikan. Simulaatioiden vaalipiirikohtaiset tulokset on esitetty Liitteessä A laskentamenetelmä kerrallaan.

Tutkitaan ensin d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmien simulointien tuloksia. Vaalipiirikohtaisten tulosten perusteella on muodostettu näiden menetelmien antamat valtakunnalliset tulokset, jotka on esitetty Kuvassa 3.1. Simuloitaessa d'Hondtin menetelmää saatiin samat tulokset kuin vuoden 2023 eduskuntavaaleissa todellisuudessa saatiin (vrt. [50]).





Kuva 3.1. *Vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmillä laskettuna.*

Lähdetään vertailemaan keskenään d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmillä saatuja tuloksia. Vertailu on toteutettu vaalipiireittäin seuraavasti. Tarkasteltavan vaalipiirin simulointien tuloksista on muodostettu paikkavektorit sekä d'Hondtin että Sainte-Laguën menetelmän antamille tuloksille. Esimerkiksi Helsingin vaalipiirin kohdalla on muodostettu paikkavektorit

$$\mathbf{x}_D = (5,3,7,0,4,3,1,0,0,0) \quad \text{ja} \quad \mathbf{x}_S = (5,3,6,0,3,3,1,1,1,0),$$

joista paikkavektori $\mathbf{x}_D$ kuvaa d'Hondtin menetelmällä saatua tulosta. Paikkavektori $\mathbf{x}_S$ kuvaa vastaavasti Sainte-Laguën menetelmän antamaa tulosta. Puolueiden paikkamäärät on listattu paikkavektoreihin samassa järjestyksessä kuin missä ne on lueteltu Taulukossa 3.6. Vastaavat paikkavektorit on koottu myös kaikille muille vaalipiireille (katso liite A). Tämän jälkeen on tutkittu Ohjelmassa 3.48 esitetyn MATLAB-funktion avulla, majoroiko d'Hondtin menetelmän antama paikkavektori Sainte-Laguën menetelmän antamaa paikkavektoria Määritelmän 3.46 mukaisesti.

Ohjelma 3.48.

```
function majorointi(x,y)
%x: menetelmän A paikkavektori (menetelmä, jota oletetaan majoroitavan)
%y: menetelmän A' paikkavektori (menetelmä, jonka oletetaan majoroivan)
n=length(x);

%järjestetään paikkavektorien alkiot laskevaan järjestykseen
x=sort(x,"descend");
y=sort(y,"descend");
flag=1;

%vektorien välisen majoroinnin tutkiminen
for i=1:n-1
    if(sum(x(1:i)<=sum(y(1:i))))
        flag=1;
    else
        flag=0;
        break;
    end
end

if(flag==0)
    disp('Majorointi ei päde')
else
    disp('Majorointi pätee')
```

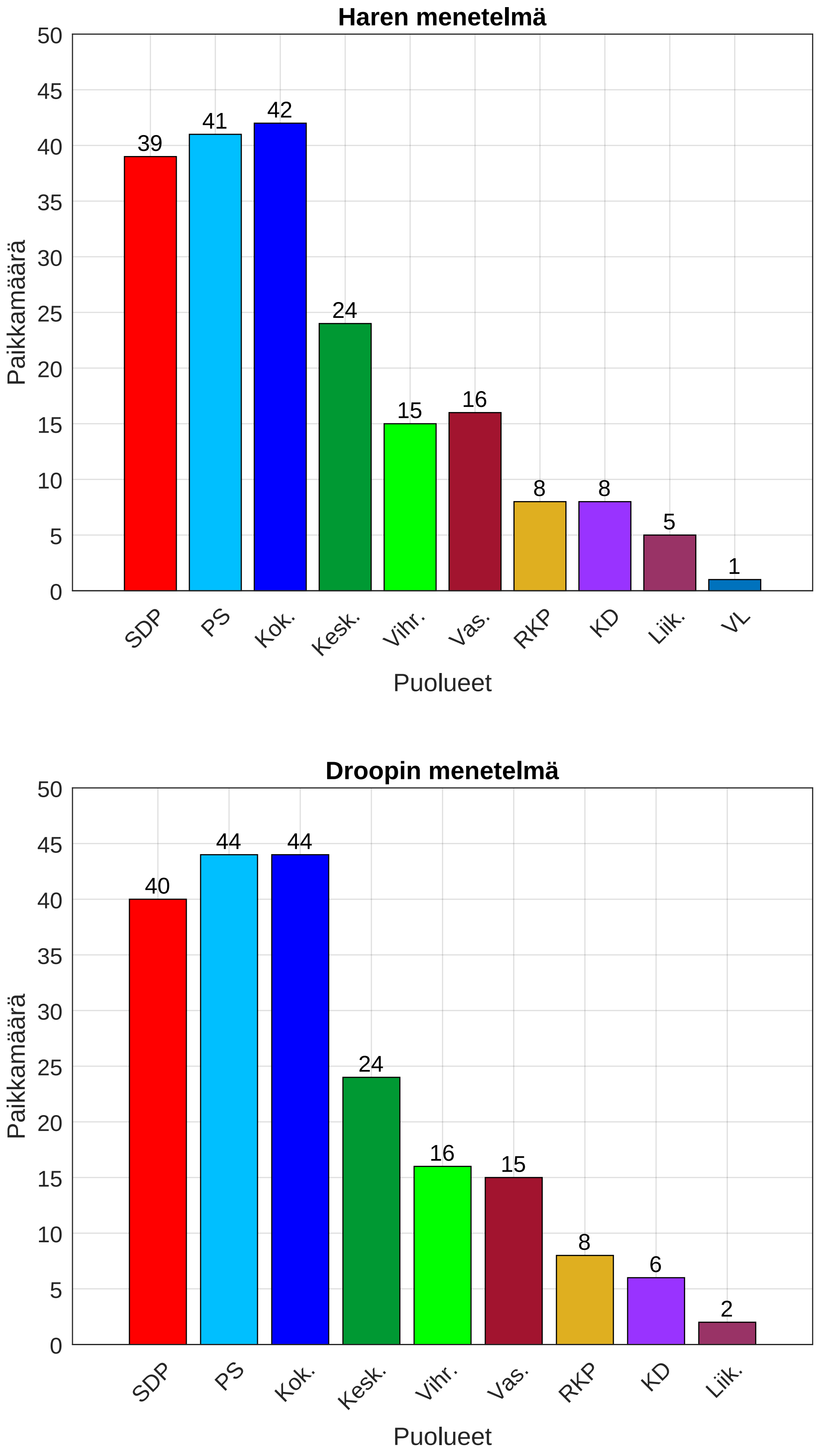
```
end
end
```

Tulokseksi saadaan, että d'Hondtin menetelmän antama paikkavektori majoroi Sainte-Laguën menetelmällä saatua paikkavektoria kaikkien vaalipiirien kohdalla. Tällöin d'Hondtin menetelmä majoroi Sainte-Laguën menetelmää Määritelmän 3.47 mukaisesti. Pukelsheimin [57, s. 114] mukaan d'Hondtin menetelmä suosii enemmän suuria puolueita Sainte-Laguën menetelmään verrattuna, koska d'Hondtin menetelmä majoroi Sainte-Laguën menetelmää. Täten vertailtaessa d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmiä keskenään, voidaan simulointien tuloksia pitää järkevinä.

Electoral-paketin komento `seats_lr` laskee kvoottimenetelmiä hyödynnättäessä vaalituloksen Määritelmässä 3.36 esitetyllä periaatteella. Komento käyttää Haren menetelmän kohdalla Määritelmän 3.37 mukaista Haren kvoottia (3.9). Droopin menetelmän tapauksessa kvoottina on Droopin kvootin (3.15) pyöristämätön muoto (3.16). Kuvassa 3.2 on esitetty Haren ja Droopin menetelmillä saadut valtakunnalliset tulokset.

Vertaillaan seuraavaksi d'Hondtin ja Haren menetelmillä saatuja tuloksia samalla periaatteella kuin edellä vertailtaessa d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmiä. Tulokseksi saadaan, että d'Hondtin menetelmällä saatu paikkavektori majoroi Haren menetelmän antamaa paikkavektoria kaikkien vaalipiirien kohdalla Määritelmän 3.46 mukaisesti. Täten Määritelmän 3.47 perusteella d'Hondtin menetelmä majoroi Haren menetelmää. Myös tämä tulos on järkevä, koska Pukelsheimin [57, s. 116] mukaan d'Hondtin menetelmä majoroi Haren menetelmää.

Edellä on vertailtu simuloinneissa tutkittuja lukusarjamenetelmiä keskenään. Tutkitaan lopuksi samalla idea kvoottimenetelmillä saatuja tuloksia. Jokaisen vaalipiirin kohdalla tulokseksi saadaan, että Droopin menetelmän antama paikkavektori majoroi Haren menetelmän antamaa paikkavektoria Määritelmän 3.46 mukaisesti. Määritelmän 3.47 perusteella voidaan todeta, että Droopin menetelmä majoroi Haren menetelmää. Sekä Droopin että Haren menetelmää simuloitaessa on käytetty kyseisten kvoottien pyöristämättömiä muotoja. Tällöin Droopin menetelmän tulee majoroida Haren menetelmää [34, s. 114–115]. Näin myös käy näissä simuloinneissa, jolloin edellä saatujen tulosten tapaan tämä tulos on järkevä.



Kuva 3.2. *Vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos Haren ja Droopin menetelmillä laskettuna.*

4. TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tämän työn tarkoituksena luoda suhteellista vaalitapaa käsittelevä oppimateriaali yläkoululaisille ja lukiolaisille. Oppimateriaalissa tarkastellaan suhteellista vaalitapaa matemaattisena ilmiönä. Lisäksi siinä pyritään tuomaan esille, että vaaleja voidaan tarkastella sekä matematiikan että yhteiskuntaopin näkökulmista. Työssä pyritään vastaamaan seuraaviin tutkimuskysymyksiin, joihin haetaan vastauksia työn teoreettisen viitekehyksen ja työssä toteutettavien matematiikan ja yhteiskuntaopin aineenopettajien teemahaastattelujen avulla.

1. Kuinka oppiainerajat ylittävä oppimiskokonaisuus voisi rakentua ja mitä siinä tulisi huomioida?
2. Miten vaalimatematiikka soveltuu opetettavaksi aiheeksi yläkoulussa ja lukiossa ja mitä sen opettamisessa tulisi huomioida?
3. Millaisia näkemyksiä tutkimukseen osallistuneilla aineenopettajilla on suhteellisen vaalitavan oppimateriaalin sisällöstä, laajuudesta ja oppimateriaalin kohderyhmästä?

Työssä kehitettävä oppimateriaali yhdistää sekä matematiikan että yhteiskuntaopin oppiaineiden sisältöjä, jolloin on kiinnostavaa selvittää, mihin oppiainerajat ylittävän oppimateriaalin luomisessa on kiinnitettävä huomiota. Tätä pyritään selvittämään ensimmäisen tutkimuskysymyksen avulla. Lisäksi on olennaista saada selville tietoa vaalimatematiikan opettamiseen liittyen oppimateriaalin kehittämiseksi, mihin toinen tutkimuskysymys keskittyy. Kolmannella tutkimuskysymyksellä halutaan saada esille tutkimukseen osallistuneiden aineenopettajien ajatuksia ja näkemyksiä työssä kehitettävän oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta. Tähän kysymykseen saatujen vastausten pohjalta lähdetään kehittämään oppimateriaalin toista versiota. Tutkimuskysymyksiin löydettyjä vastauksia käsitellään luvussa 6.

5. TUTKIMUSMENETELMÄT

Tässä luvussa esitellään työn tutkimusosuus ja tutkimusmenetelmät, joita siinä hyödynnetään. Työn lopputuloksena syntyvä oppimateriaali luodaan kehittämistutkimuksen keinoin, mitä käsitellään aluksi lyhyesti. Tämän jälkeen annetaan tarkempi kuvaus tämän työn tutkimusosuuden rakenteesta, minkä yhteydessä esitellään, mitä teemahaastattelulla tutkimusmenetelmänä tarkoitetaan, sillä se tulee olemaan pääasiallinen menetelmä aineiston hankkimiseksi. Aineiston hankkimisen kuvaamisen jälkeen esitellään tavat, joilla kerättyä aineistoa tullaan analysoimaan.

5.1 Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä

Kehittämistutkimus (engl. *design-based research*, *design research*) on kohtuullisen uusi tutkimusmenetelmä ja se on esitelty kirjallisuudessa ensimmäisen kerran 1990-luvulla [55, s. 10]. Kehittämistutkimuksen tunnettavuus on kasvanut suhteellisen nopeasti, minkä myötä sitä on alettu hyödyntämään merkittävissä määrin 2000-luvun aikana [4, s. 19]. Kehittämistutkimusta pidetään myös opiskelijaa motivoivana tutkimusmenetelmänä ja se soveltuu hyvin opinnäytetyössä sovellettavaksi tutkimusmenetelmäksi [2, s. 193–194]. Kehittämistutkimus on monipuolinen tutkimusmenetelmä, sillä siinä voidaan yhdistää sekä kvantitatiivisia että kvalitatiivisia menetelmiä [4, s. 17]. Kehittämistutkimuksen monipuolisuus tulee myös siinä esille, että sitä hyödynnettäessä yhdistetään eri lähteistä saatavaa tietoa [16, s. 7].

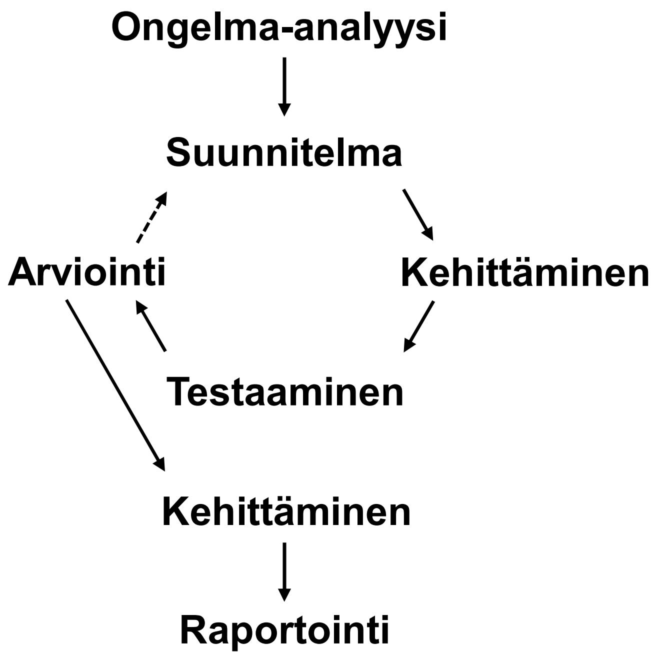
Kehittämistutkimuksessa tarkoituksena on parantaa toimintatapoja tutkimuksen antamaa tietoa hyödyntämällä [4, s. 16]. Toimintatavan kehittäjän eli tutkijan lisäksi tutkimuksen osallistujat, kuten opettajat, ovat osa kehittämisprosessia [37, s. 55]. Juuti ja Lavonen [37, s. 59] luonnehtivat koulutukseen liittyvän kehittämistutkimuksen tavoitteeksi luoda sellainen tuotos, joka edistää oppimista. Tämän tuotoksen tulee olla sellainen, että opettaja voi lähteä hyödyntämään sitä opetuksessaan ilman useiden uusien taitojen omaksumista [37, s. 62]. Tuotokseen liittyy olennaisesti tarkastellusta aiheesta tutkimuksen aikana saatu uusi tieto [37, s. 64]. Tuotoksena voi olla esimerkiksi oppimiskokonaisuus, arviointimenetelmän kehittäminen tai jokin teknologiaan liittyvä aihe [4, s. 16]. Pernaa [55, s. 11] tiivistää edellä esitettyjä näkökulmia kuvaamalla kehittämistutkimuksen tavoitteeksi opetuksen kehittämisen tutkimukseen perustuen niistä tarpeista käsin, joita käytännön opetustilanteet asettavat.

Kuvataan seuraavaksi, kuinka kehittämistutkimuksen käytännön toteutus etenee. Tutkimus alkaa kirjallisuuteen pohjautuvan teoreettisen ongelma-analyysin luomiselle, jossa pyritään tunnistamaan keinoja, joilla voidaan lähteä ratkaisemaan tutkimuksen kohteena olevaa ongelmaa [37, s. 59–60]. Edelsonin [18, s. 109] mukaan ongelma-analyysissä luonnehditaankin toteutettavan tutkimuksen tavoite ja tarve sen toteuttamiselle. Ongelma-analyysin laatimisen jälkeen kootaan kehittämissuunnitelma, jolla tuetaan tutkimuksen toteuttamista [55, s. 17]. Kehittämissuunnitelman laatimisesta edetään syklimäisesti tuotoksen kehittämiseen ja testaamiseen sekä saatujen tulosten arvioimiseen, minkä pohjalta tuotosta kehitetään eteenpäin [55, s. 17–19]. Tätä ongelma-analyysin laatimisesta alkavaa sykliä voidaan toistaa useita kertoja, jolloin kehittäminen tapahtuu iteratiivisesti [55, s. 17–19]. Prosessin rakentuminen iteratiivisesti onkin kehittämistutkimuksen olennainen piirre [37, s. 59]. Iteraatioiden toistaminen toinen toisensa perään tarkoittaa kuitenkin Andersonin ja Shattuckin [4, s. 17] mukaan sitä, että on haastavaa arvioida, missä vaiheessa tutkimus on saatu lopullisesti valmiiksi. Tutkijan tulee tämän vuoksi sietää epävarmuutta kehittämistutkimusta toteuttaessaan ja olla valmis muuttamaan tarvittaessa tekemiään suunnitelmia [37, s. 60]. Lisäksi tutkijan on tärkeätä panostaa kehittämistutkimuksensa dokumentointiin, jotta tutkimus olisi toistettavissa [4, s. 16–17].

Kirjallisuudessa tarkastellaan usein kehittämistutkimuksen avulla saatavien tulosten luotettavuutta ja kehittämistutkimuksen hyödyntämiseen liittyviä haasteita. Juutin ja Lavosen [37, s. 63] mukaan kehittämistutkimusta toteutettaessa tutkijan eräänä haasteena on aineistonkeruu ja sen varmistaminen, että kerätyn aineiston avulla voidaan kattavasti lähteä tutkimaan tarkasteltavaa aihetta. Toisaalta tutkijan rooli kehittämistutkimuksessa voidaan nähdä haastavana tutkimuksen luotettavuuden kannalta, mitä kuvataan seuraavaksi Barabin ja Squiren artikkelin [9, s. 10] pohjalta. Tutkijan mahdollisuudet tuottaa uskottavia tuloksia saattaa heidän mukaansa vaarantua sen vuoksi, että tutkijan vaikutus voi näkyä selvästi kehittämistutkimuksen eri vaiheissa. Täten tutkijan tulee itse tunnistaa, kuinka tarkasti hänen saamansa tulokset ovat yleistettävissä.

5.2 Tutkimuksen toteutuksen kuvaus

Akselan ja Pernaan [2, s. 185] mukaan opinnäytetyötasolla kehittämistutkimus rakentuu tyypillisesti yhdestä tai kahdesta syklistä. Syklien lukumäärä määräytyy heidän mukaansa esimerkiksi työn aiheen ja sen tekemiseen käytettävissä olevan ajan perusteella. Tässä työssä toteutetaan yksi kehittämissykli, jonka rakenne on Kuvassa 5.1. Kuva 5.1 on mukailtu Pernaan [55, s. 19] antamasta kehittämistutkimuksen syklimäisen rakenteen kuvauksesta, jonka hän on koostanut Edelsonin teosten pohjalta. Opinnäytetöissä kehittämistutkimuksen viimeisenä vaiheena voidaan pitää raportointia, minkä vuoksi se on liitetty osaksi Kuvaa 5.1 [2, s. 185–186].



Kuva 5.1. *Tässä työssä toteutettavan kehittämistutkimuksen rakenne.*

Kuvassa 5.1 esitetyn kehittämissyklin rakenne kuvataan tulevissa alaluvuissa seuraavasti. Kehittämisprosessin aloittavaa ongelma-analyysiä käsitellään alaluvussa 5.3 ja sen jälkeen laadittavaa kehittämissuunnitelmaa esitellään alaluvussa 5.4. Työssä kehitettävän oppimateriaalin ensimmäisen kehittämissyklin rakentuminen esitellään vastaavasti alaluvussa 5.5. Tässä työssä testausvaiheessa oppimateriaalia ei testata esimerkiksi jossakin yläkoulussa tai lukiossa, vaan oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta kerätään palautetta ja kehitysehdotuksia matematiikan ja yhteiskuntaopin aineenopettajien teemahaastatteluilla. Teemahaastattelujen tausta ja rakentuminen tässä työssä kuvataan alaluvussa 5.6. Teemahaastattelujen tulokset esitellään luvussa 6. Teemahaastattelujen pohjalta kehitetään oppimateriaalin toinen versio, jota kuvataan alaluvussa 7.2.1.

5.3 Ongelma-analyysi

Ongelma-analyysi rakentuu kahdesta kokonaisuudesta, joista ensimmäinen on perusopetuksen ja lukion opetussuunnitelmien perusteisiin tutustuminen, jota käsitellään alaluvussa 5.3.1. Vaikka tarkoituksena on kehittää oppimateriaalia ensisijaisesti yläkoululaisille, huomioidaan ongelma-analyysissä myös lukiokoulutuksen tavoitteet, jotta saadaan kuvaa siitä, kuinka vaaleja ja niihin liittyvää matematiikkaa ylipäänsä käsitellään opetuksessa ennen korkeakoulutasoisia opintoja. Kehittämisprosessin alussa yksi vaihtoehto on toisaalta se, että kehitettävää oppimateriaalia voi yläkoulun ohella hyödyntää lukiossa, jolloin on perusteltua huomioida lukiokoulutuksen sisältöjä ongelma-analyysiä laadittaessa.

Ongelma-analyysin toisena kokonaisuutena on oppikirja-analyysi vaalimatematiikan tehtäviin liittyen, jota käsitellään alaluvussa 5.3.2. Oppikirja-analyysi on tämän työn yhteydessä olennainen osa kehittämisprosessia, koska sen avulla voidaan arvioida, millaista sisältöä oppikirjoissa on suhteellista vaalitapaa koskien. Oppikirja-analyysi auttaa täten arvioimaan, millaisista tarpeista käsin oppimateriaalia lähdetään kehittämään.

5.3.1 Vaalit ja vaalimatematiikka opetussuunnitelmien perusteissa

Seuraavaksi tehtävän perusopetuksen vuoden 2014 [56] ja lukion vuoden 2019 [47] opetussuunnitelmien perusteiden analysoinnin tarkoituksena on kuvata lyhyesti, miten ne suhtautuvat oppiainerajat ylittäviin oppimiskokonaisuuksiin. Lisäksi tehdään havaintoja siitä, kuinka vaalit ja niihin liittyvät matemaattiset sisällöt tulevat esille matematiikan ja yhteiskuntaopin oppiaineiden sisällöissä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden osalta keskitytään oppiaineikohtaisten sisältöjen analysoinnissa vuosiluokkien 7–9 sisältöihin.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [56, s. 31–32] kuvataan opetuksen eheyttämistä ja monialaisia oppimiskokonaisuuksia osana perusopetusta. Opetuksen eheyttämisen tavoitteeksi mainitaan eri tiedonalojen sisältöjen yhdistäminen ja sen toteuttamiselle annetaan erilaisia vaihtoehtoja. Yhtenä vaihtoehtona tuodaan esille integroitujen kokonaisuuksien muodostaminen eri oppiaineista. Tämän kaltaista opetuksen eheyttämistä tavoitellaan myös tässä työssä kehitettävän oppimateriaalin kohdalla. Perusopetuksen tapaan myös lukio-opinnoissa tavoitellaan tiedonalojen välillä olevien yhteyksien tunnistamista [47, s. 19]. Lukion opetussuunnitelman perusteissa [47] monialaiset oppimiskokonaisuudet eivät ole niin selvästi esillä kuin perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [56]. Siinä puhutaan kuitenkin esimerkiksi siitä, että työskentelyn tulisi tarjota opiskelijalle mahdollisuuksia yhdistää osaamistaan yhteiskunnassa esiintyvien ilmiöiden kanssa [47, s. 20]. Lukion opetussuunnitelmaan perusteissa tuodaan myös esille, millaista laaja-alaista osaamista eri oppiaineet tukevat.

Vaalimatematiikkaa ei ole mainittu matematiikan sisällöissä perusopetuksen [56] eikä lukion [47] opetussuunnitelmien perusteissa. Kuten luvussa 3 huomataan, lukujonot ja pyöristäminen liittyvät läheisesti suhteellisen vaalitavan matemaattiseen kuvaamiseen. Lukujonot ja pyöristäminen mainitaankin perusopetuksen opetussuunnitelmaan perusteissa [56, s. 375] matematiikan sisältöalueiden yhteydessä. Lukion opetussuunnitelman perusteissa [47, s. 228–232] lukujonot ovat yhtenä aihealueena lyhyellä matematiikalla moduuleissa *MAB2 Lausekkeet ja yhtälöt* ja *MAB7 Talousmatematiikka.* Pitkällä matematiikalla lukujonot tulevat esille moduulissa *MAA9 Talousmatematiikka.* Lukion opetussuunnitelman perusteissa ei erikseen tuoda pyöristämistä opiskeltavana aiheena esille toisin kuin perusopetuksen opetussuunitelman perusteissa.

Vallankäyttöön ja päätöksentekoon liittyviä aiheita käsitellään lukiossa yhteiskuntaopin moduulissa *YH1 Suomalainen yhteiskunta* [47, s. 292–293]. Lukion opetussuunnitelman perusteissa ei kuitenkaan suoraan puhuta vaaleista tai vaalitavoista, mutta valta ja vaikuttaminen on mainittu yhtenä keskeisenä sisältöalueena. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [56, s. 419–420] kuvataan yhteiskuntaopin sisältöalueita samankaltaisesti lukion opetussuunnitelman perusteisiin verrattuna. Vaaleja tai vaalitapoja ei tuoda suoraan esille, mutta demokraattinen yhteiskunta ja vaikuttaminen ovat mukana oppiaineen sisältöalueissa. Vaaleihin liittyvien teemojen voidaan täten nähdä olevan selvästi esillä sekä perusopetuksen että lukion opetussuunnitelmien perusteissa.

Perusopetuksen ja lukion opetussuunnitelmien perusteiden analysoinnin tulokseksi voidaan tiivistää se, että tässä työssä kehitettävän oppimateriaalin aihepiirit tulevat niissä esille sekä matematiikan että yhteiskuntaopin sisällöissä. Erona matematiikan ja yhteiskuntaopin välillä voidaan nähdä se, että vaalimatematiikkaan liittyvät teemat on nostettu yhteiskuntaopissa näkyvämmin esille oppiaineen sisältöalueissa. Matematiikan kohdalla vaalimatematiikkaan liittyvät matematiikan aiheet ovat enemmänkin muiden sisältöalueiden osana.

5.3.2 Oppikirja-analyysiä vaalimatematiikkaa käsittelevistä tehtävistä

Oppikirja-analyysissä keskitytään siihen, kuinka suhteellista vaalitapaa kuvataan oppikirjoissa ja sitä käsittelevien aihealueiden tehtävissä. Analyysissä ei tämän myötä tarkastella, kuinka muita vaaleihin liittyviä aiheita, kuten esimerkiksi vaaleissa ehdolle asettumista tai presidentinvaalin toimittamista Suomessa käsitellään oppikirjoissa. Oppikirja-analyysissä tutkitaan yhteensä viittä yläkoulun yhteiskuntaopin oppikirjaa ja kolmea lukion yhteiskuntaopin oppikirjaa, joista osa on tehtäväkirjoja. Matematiikan oppikirjoja ei ole mukana oppikirja-analyysissä, koska vaalimatematiikkaan liittyvät aiheet tulevat selvemmin esille yhteiskuntaopin sisällöissä, kuten edellä alaluvussa 5.3.1 todetaan. Tässä työssä kehitettävää oppimateriaalia on mahdollista hyödyntää yläkoulun ohella lukio-opetuksen yhteydessä, minkä vuoksi analyysissä on myös lukion oppikirjoja mukana.

Oppikirja-analyysin tarkoituksena ei ole luoda kattavaa katsausta siitä, kuinka suhteellista vaalitapaa kuvataan juuri tällä hetkellä 2020-luvulla oppikirjoissa. Tarkoituksena on pikemminkin saada kuvaus siitä, kuinka suhteellista vaalitapaa on ylipäätänsä käsitelty oppikirjoissa. Tämän vuoksi analyysiin on valikoitunut oppikirjoja eri opetussuunnitelmakausilta. Yläkoulun oppikirjoista analyysissä ovat mukana WSOYpro:n Aikalainen. 9 [1] ja Aikalainen. 9, Tehtäväkirja [29]; Otavan Forum 9 Yhteiskuntaoppi [27] ja Forum. 9, Yhteiskuntaoppi, harjoituksia [28] sekä Finn Lecturan Selkeästi Suomessa : selkokielinen Suomen yhteiskuntaopin S2-oppikirja [11]. Viimeisenä mainittu oppikirja eroaa muista analysoitavista yläkoulun oppikirjoista siinä, että se on kirjoitettu selkokielellä, minkä lisäksi se on suunnattu maahanmuuttajille esimerkiksi aikuisten perusopetuksessa ja kotouttamiskoulutuksessa käytettäväksi. Lukion oppikirjoista analyysiin on valikoitunut Otavan Forum. 1, Suomalainen yhteiskunta [42] ja Editan Kanta. 1, suomalainen yhteiskunta [38].

Oppikirjoja analysoitaessa tutkitaan vain itse oppikirjoja, jolloin analyysi ei koske esimerkiksi erikseen opettajille suunnattuja materiaaleja. Selkeyden vuoksi oppikirjojen nimistä käytetään jatkossa lyhenteitä, jotka on listattu Taulukossa 5.1.

Taulukko 5.1. *Oppikirja-analyysissä tutkittavat oppikirjat ja niiden nimistä käytettävät lyhenteet.*

Oppikirja	Lyhenne
Aikalainen. 9	Aikalainen 9
Aikalainen. 9, Tehtäväkirja	Aikalainen 9 tehtäväkirja
Forum. 9, Yhteiskuntaoppi	Forum 9
Forum. 9, Yhteiskuntaoppi, harjoituksia	Forum 9 harjoituksia
Selkeästi Suomessa : Selkokielinen Suomen yhteiskuntaopin S2-oppikirja	Selkeästi Suomessa
Forum. 1, Suomalainen yhteiskunta	Forum 1
Kanta. 1, suomalainen yhteiskunta	Kanta 1

Suhteellisen vaalitavan käsitteestä annetaan yläkoulun oppikirjoissa erilaisia luonnehdintoja. Forum 9 antaa selkeimmän kuvauksen suhteellisen vaalitavan merkityksestä ja soveltamisesta Suomessa järjestettävissä vaaleissa. Oppikirjassa todetaan ensin suhteellisen vaalitavan tuovan vaaleissa puolueille paikkoja suhteessa niiden saamiin äänimääriin. Tämän jälkeen oppikirjassa todetaan, että Suomessa suhteellisissa vaaleissa käytettävä laskentamenetelmä on d'Hondtin menetelmä. Forum 9 on myös analysoitavista yläkoulun oppikirjoista ainoa, jossa mainitaan suoraan d'Hondtin menetelmä, muissa oppikirjoissa vertauslukujen laskeminen kuvataan sanallisesti d'Hondtin menetelmään perustuen mainitsematta itse menetelmän nimeä. Selkeästi Suomessa -oppikirjassa suhteellisen vaalitavan käsite kuvataan epätäsmällisemmin, sillä siinä ei puhuta paikkojen jakautumisesta äänimäärien mukaan vaan mainitaan pelkästään, että ehdokkaan puolueen äänimäärä vaikuttaa hänen mahdollisuuksiinsa mennä vaaleissa läpi. Aikalainen 9 -oppikirjan suhteellista vaalitapaa käsittelevässä kappaleessa vain todetaan, että kunta-, eduskunta- ja europarlamenttivaaleissa käytettävänä vaalitapana on suhteellinen vaalitapa, mutta oppikirjan sanastossa käsite kuvataan täsmällisesti Forum 9 -oppikirjan kaltaisesti. Selkeästi Suomessa -oppikirjassa annetaan havainnollistava laskuesimerkki suhteellisen vaalitavan soveltamisesta vaalituloksen laskemisessa vertauslukujen laskemisen periaatteen läpikäymisen jälkeen. Kyseisessä laskuesimerkissä tutkitaan, ketkä kolme ehdokasta menevät vaaleissa läpi, kun puolueita on kaksi ja niillä on yhteensä seitsemän ehdokasta, joiden äänimäärät ovat tiedossa. Vastaavaa laskuesimerkkiä ei anneta muissa analysoitavissa yläkoulun oppikirjoissa. Laskuesimerkki on monipuolinen, koska siinä vaalituloksen laskemisen ohella tulkitaan saatua tulosta mainitsemalla, että eräällä valitsematta jääneellä ehdokkaalla on suurempi äänimäärä kuin yhdellä läpimenneellä ehdokkaalla.

Suhteellisen vaalitavan käsitteen merkitys tulee molemmissa analysoitavissa lukion oppikirjoissa selkeästi ilmi. Kummassakin oppikirjassa sen kuvataan tarkoittavan paikkojen jakautuvan suhteessa puolueiden äänimääriin. Yläkoulun oppikirjoihin verrattuna lukion oppikirjoissa kerrotaan täsmällisesti, että Suomessa suhteellisissa vaaleissa käytettävä laskentamenetelmä on d'Hondtin menetelmä, minkä lisäksi menetelmän periaate kuvataan sanallisesti. Myös erilaiset mahdollisuudet vaalien järjestämisellä tulevat paremmin esille lukion oppikirjoissa, sillä niissä kuvataan esimerkiksi avoimen ja suljetun listavaalin eroja. Kanta 1 -oppikirja luonnehtii vaalijärjestelmän yhdeksi olennaiseksi ominaisuudeksi käytettävän laskentamenetelmän, joka on oppikirjan mukaan matemaattinen kaava, jonka avulla vaaleissa annetut äänet muunnetaan paikoiksi. Tämä kuvaus luo opiskelijalle ajatuksen siitä, että myös matematiikalla on merkitystä vaalien kannalta. Forum 1 -oppikirja puolestaan kuvaa eri vaalitapojen väliseksi eroksi sen, että vaalitulos muuttuu käytettäessä eri vaalitapoja, vaikka sen laskemisessa käytettävät puolueiden äänimäärät pysyisivät samoina.

Taulukossa 5.2 on yhteenvetoa oppikirja-analyysin tuloksista oppikirjojen tehtävien osalta ja se on koostettu seuraavasti. Sanallisella tehtävällä tarkoitetaan tehtävää, jossa on käsitelty suhteellista vaalitapaa esimerkiksi kirjoitustehtävän muodossa. Laskutehtävällä viitataan tehtävään, jossa pyydetään laskemaan vertauslukuja ja määrittämään niiden avulla esimerkiksi kuvitteellisen vaalin tulos. Tehtävätyyppien laskennassa yhdeksi tehtäväksi on laskettu sellainen tehtävä, jossa vähintään osa tehtävästä on käsitellyt suhteellista vaalitapaa. Suhteelliseen vaalitapaan liittyvien tehtävien esiintyvyyden havainnollistamiseksi taulukkoon on merkitty, kuinka monta tehtävää oppikirjan suhteellista vaalitapaa käsittelevässä aihealueessa on yhteensä. Aihealueella tarkoitetaan nyt sellaista oppikirjan kappaletta tai kappaleiden muodostamaa kokonaisuutta, joiden yhteydessä käsitellään suhteellista vaalitapaa.

Aloitetaan oppikirjojen tehtävistä saatujen havaintojen läpikäyminen yläkoulun oppikirjoista. Laskutehtävät ovat analysoiduissa oppikirjoissa rakenteeltaan sellaisia, että niissä tutkitaan äänestystuloksia tilanteessa, jossa vaaleihin osallistuu 2–4 puoluetta tai vaaliliittoa, joista kullakin 2–4 ehdokasta. Ehdokkaiden äänimäärät on ilmoitettu tehtävän yhteydessä ja niiden perusteella oppilaan tulee määrittää läpimenevät ehdokkaat, kun käytössä on suhteellinen vaalitapa. Läpimeneviä ehdokkaita on näissä tehtävissä 3–5 kappaletta. Tällaiset tehtävät löytyvät Aikalainen 9 tehtäväkirjasta ja Forum 9- ja Selkeästi Suomessa -oppikirjoista. Aikalainen 9 tehtäväkirjassa laskutehtävää seuraa sanallinen tehtävä, jossa pohditaan ja tulkitaan ehdokkaille määritettyjä vertauslukuja ja vaalin tulosta, mikä luo näistä kahdesta tehtävästä mielekkään kokonaisuuden. Vastaavanlaista vaalituloksen tulkintaa ei liity kahden muun kirjan laskutehtäviin. Huomattavaa laskutehtävien osalta on se, että tehtävänantojen yhteydessä Aikalainen 9 tehtäväkirjassa ja Selkeästi Suomessa -oppikirjassa laskentamenetelmän kerrotaan vain olevan suhteellinen vaalitapa. Forum 9 -oppikirjassa taas pyydetään oppilasta määrittämään vaalin tulos erikseen mainitsematta, *Taulukko 5.2. Suhteellista vaalitapaa käsittelevien tehtävien esiintyvyys tarkastelluissa yhteiskuntaopin oppikirjoissa.*

Oppikirja	Sanalliset tehtävät	Laskutehtävät	Suhteellisen vaalitavan tehtävät yhteensä	Aihealueen tehtävät yhteensä
Aikalainen 9	1	0	1	4
Aikalainen 9 tehtäväkirja	1	1	2	12
Forum 9	2	1	3	8
Forum 9 harjoituksia	1	0	1	4
Selkeästi Suomessa	2	1	3	4
Forum 1	1	0	1	6
Kanta 1	4	0	4	10

millä laskentamenetelmällä tulos halutaan määrittää. Tällöin oppilaalta saattaa jäädä tunnistamatta, että kyseisissä tehtävissä tarkoituksena on soveltaa nimenomaan d'Hondtin menetelmää.

Sanallisia suhteelliseen vaalitapaan liittyviä tehtäviä sisältyy jokaiseen analysoitavaan yläkoulun oppikirjaan. Yleinen tehtävätyyppi on se, että oppilasta pyydetään selittämään, mitä jokin suhteelliseen vaalitapaan liittyvä käsite tarkoittaa. Yksi tällainen käsite on itse suhteellinen vaalitapa ja sen selittäminen löytyy tehtävänä Aikalainen 9-, Forum 9- ja Selkeästi Suomessa -oppikirjoista. Toinen usein selitettävänä oleva käsite on vertausluku. Selkeästi Suomessa -oppikirjassa on käsitteiden selittämisen ohella pohdiskelevampi tehtävä. Siinä pyydetään pohtimaan, millaiset puolueet eivät hyödy suhteellisesta vaalitavasta, vaikka sitä ei erikseen kappaleen teoriaosuudessa kuvata. Forum 9 harjoituksia -tehtäväkirjassa taas suhteellinen vaalitapa näkyy kaikkein vähiten. Sitä käsitellään kyseisessä oppikirjassa yhdessä oikein-väärin-väittämiä sisältävässä tehtävässä, missä viidestä väittämästä ainoastaan yksi liittyy suhteelliseen vaalitapaan.

Selkeä ero yläkoulun ja lukion oppikirjojen välillä on se, että lukion oppikirjoissa ei ole lainkaan laskutehtäviä, joiden avulla opiskelija voisi harjoitella vaalituloksen määrittämistä. Tätä eroa on haastavaa tulkita, koska analysoitavissa lukion oppikirjoissa kuitenkin kuvataan, kuinka vaalitulos määritetään d'Hondtin menetelmän avulla. Toinen erottava tekijä yläkoulun ja lukion oppikirjojen välillä on niissä olevien sanallisten tehtävien muotoilut. Kun yläkoulun oppikirjoissa sanalliset tehtävät keskittyvät edellä kuvatulla tavalla enemmän käsitteiden selittämiseen, lukion oppikirjoissa ne ovat enemmän esseemäisiä ja vertailevia kirjoitustehtäviä. Sekä Forum 1- että Kanta 1 -oppikirjassa on sanallinen tehtävä, jossa opiskelijan tarkoituksena on tutkia suhteellisen vaalitavan ja enemmistövaalitavan etuja ja haittoja. Kanta 1 -oppikirjassa on esseemäisten tehtävien ohella myös käsitteenselitystehtäviä.

Tehdään seuraavaksi yhteenvetoa oppikirjojen analysoinnista saaduista tuloksista. Kaikissa analysoitavissa oppikirjoissa suhteellinen vaalitapa on osa muuta vaaleja käsittelevää aihealuetta Selkeästi Suomessa -oppikirjaa lukuun ottamatta, jossa sille on varattu oma kappaleensa. Tämä vaikuttanee siihen, että suhteelliseen vaalitapaan liittyviä tehtäviä ei aihealueiden tehtävissä ole erityisen paljoa tarjolla, kuten Taulukosta 5.2 nähdään. Yläkoulun oppikirjoissa vaalituloksen laskemista Suomessa käytävissä suhteellisissa vaaleissa yksinkertaistetaan Forum 9 -oppikirjaa lukuun ottamatta jättämällä d'Hondtin menetelmä mainitsematta, vaikka vertauslukujen laskeminen kuvataan siihen perustuen. Lukion oppikirjoissa taas d'Hondtin menetelmä mainitaan. Missään oppikirjassa ei kuitenkaan kerrota, että suhteellisissa vaaleissa d'Hondtin menetelmä ei ole ainoa mahdollinen laskentamenetelmä. Tällöin oppilailta ja opiskelijoilta saattaa jäädä huomaamatta, että suhteellista vaalitapaa voidaan soveltaa muillakin kuin d'Hondtin menetelmällä. Myös matematiikan yhdistäminen vaalituloksen määräytymiseen voi jäädä tunnistamatta, koska vertauslukujen ja d'Hondtin menetelmän hyödyntämistä kuvataan oppikirjoissa sanallisessa muodossa.

5.4 Kehittämissuunnitelma

Ennen oppimateriaalin ensimmäisen version kehittämisen aloittamista valittiin luvussa 2 esiteltävä teoreettinen viitekehys, johon tukeutuen oppimateriaalia ja sen tehtäviä laadittiin. Kehittämistyön aloittamista edelsi myös oppimateriaalin matemaattiseen viitekehykseen tutustuminen, joka on esitelty luvussa 3. Osana suhteellisen vaalitavan matemaattiseen taustaan tutustumista perehdyttiin yleisellä tasolla erilaisiin vaalitapoihin. Tässä yhteydessä oppimateriaalin aiheet rajattiin käsittelemään ainoastaan suhteellista vaalitapaa. Oppimateriaalin kehittämisprosessia suunniteltaessa selvitettiin lisäksi oppimateriaalien saavutettavuudelle ja laadulle asetettuja vaatimuksia. Näitä vaatimuksia ja niiden huomioimista kuvataan alaluvussa 5.5.

5.5 Oppimateriaalin ensimmäisen version kehittäminen

Ongelma-analyysiin ja kehittämissuunnitelmaan pohjautuen lähdettiin kehittämään oppimateriaalin ensimmäistä versiota. Pedagogista viitekehystä pyrittiin hyödyntämään etenkin tehtävien laatimisessa käyttämällä erilaisia tehtävätyyppejä, jotta materiaali sisältäisi laskutehtävien lisäksi muitakin tehtäviä. Oppimateriaalin teoriaosuudet laadittiin suhteellisen vaalitavan matemaattiseen taustaan perustuen. Koska työn matemaattisessa viitekehyksessä käsitellään sekä lukusarja- että kvoottimenetelmiä, tehtiin oppimateriaaliin omat luvut kummallekin menetelmällä. Lukujen sisältöjen kokoamisessa kiinnitettiin huomiota siihen, että ne sisältävät kaiken olennaisen tiedon lukujen sisältöjen läpikäymiseksi ja lukuihin liittyvien tehtävien tekemiseksi. Tämän myötä molempien lukujen alkuun lisättiin osuus, jossa esiteltiin suhteellisen vaalitavan perusperiaate.

Suhteellisen vaalitavan perusperiaatteen käsittelemisen lisäksi molempiin lukuihin sisällytettiin seuraavia asioita. Ennen yksittäisiin menetelmiin tutustumista kuvattiin yleisellä tasolla käsiteltävän menetelmän taustaa ja menetelmän hyödyntämisessä tarvittavaa matematiikkaa. Oppimateriaalin yhdeksi elementiksi haluttiin nostaa sen aiheiden historialliseen taustaan liittyvät osuudet. Historiaan liittyvien viittauksien tavoitteena oli tuoda esille sitä, millä tavalla matematiikka on näkynyt yhteiskunnassa ja päätöksenteossa historian saatossa. Tehtävät laadittiin sillä ajatuksella, että oppijat tekisivät niitä käsin oppimateriaalin monistetun version avulla.

Tärkeä osa oppimateriaalin ensimmäisen version kehittämistä oli sen saavutettavuuden ja laadun varmistaminen, jota käsitellään seuraavaksi. Tässä työssä on tavoitteena tuottaa sellainen suhteellista vaalitapaa käsittelevä oppimateriaali, jota aineenopettajien olisi mielekästä lähteä hyödyntämään osana opetustaan. Tavoitteen tukemiseksi oppimateriaalin laatimisessa ja kehittämisessä on huomioitu oppimateriaalien saavutettavuuteen liittyviä seikkoja. Avoin tiede -sivuston [6] mukaan oppimateriaalia laadittaessa saavutettavuutta voidaan parantaa esimerkiksi kiinnittämällä huomiota oppimateriaalissa käytetyn kielen selkeyteen ja ymmärrettävyyteen ja oppimateriaalin selkeään rakenteeseen. Nämä tekijät on pyritty huomioimaan oppimateriaalia laadittaessa. Oppimateriaaliin on myös lisätty tekstivastineet kuville, mikä on Avoin tiede -sivuston [6] suositusten mukainen saavutettavuutta lisäävä toimenpide. Oppimateriaali on laadittu Microsoftin Word-tekstinkäsittelyohjelmalla. Oppimateriaalista on laadittu myös pdf-tiedosto muuntamalla alkuperäinen Word-tiedosto pdf-muotoon. Word- ja pdf-tiedostojen saavutettavuuteen on pyritty seuraamalla Saavutettavuuskirjasto Celian ohjeita [63][64] saavutettavien Word- ja pdf-tiedostojen luomiseen liittyen. Word-tiedoston laatimisen kannalta tämä on tarkoittanut muun muassa Word-asiakirjan omien tyylien, ja kuvaavien otsikoiden käyttämistä sekä taulukoiden luomista Wordin omien työkalujen avulla.

Saavutettavuuden huomioiminen liittyy myös oppimateriaalin laadun varmistamiseen, jonka huomioimisessa on pyritty seuraamaan soveltuvin osin Avoin tiede -sivuston ohjeistusta [5] avointen oppimateriaalien laatuun liittyen. Tässä työssä on hyödynnetty kyseistä ohjeistusta, koska tavoitteena on saada aineenopettajat käyttämään kehitettävää oppimateriaalia julkaisemalla se avoimesti saataville. Tällöin on perusteltua soveltaa avoimiin oppimateriaaleihin liittyvää ohjeistusta. Avoin tiede -sivuston ohjeistus [5] kuvaa avoimen oppimateriaalin laadun koostuvan viidestä osa-alueesta, jotka ovat: sisältö, oppimis- ja opetusmenetelmät, käytettävyys ja saavutettavuus, löydettävyys ja jakaminen sekä elinkaari ja muokattavuus. Nämä osa-alueet jaetaan edelleen pienempiin kokonaisuuksiin ja niiden näkymistä kehitettävässä oppimateriaalissa kuvataan seuraavaksi. Oppimateriaalin laatimisessa hyödynnetyt lähteet on listattu lähdeluetteloon ja oppimateriaalissa kuvataan sen oppimistavoitteet ja se, kuinka sitä voi hyödyntää opetussuunnitelmien perusteiden pohjalta. Lisäksi se on pyritty laatimaan sellaiseksi, että sitä on mahdollista käyttää osana erilaisia opetustilanteita. Oppimateriaalin saavutettavuutta lisää edellä mainittujen piirteiden ohella se, että oppimateriaalin voi tulostaa tai käyttää tietokoneella ilman nettiyhteyttä. Avoin tiede -sivuston ohjeistuksen [5] huomioiminen auttaa aineenopettajia ennen kaikkea sen arvioimisessa, kuinka kehitettävä oppimateriaali soveltuu osaksi heidän opetustaan.

5.6 Tutkimusmenetelmän valinta ja aineiston hankinta

Hakalan [26, s. 22] mukaan laadullisen tutkimuksen soveltaminen on relevantti valinta, kun toteutettava tutkimus on luonteeltaan esitutkimus tai -selvitys laajempaan kokonaisuuteen liittyen. Tätä diplomityötä ei toteuteta esimerkiksi jonkin tutkimushankkeen osana, mutta työn aihetta vastaavaa suomenkielistä tutkimusta ei ole laajasti saatavilla. Täten työn voi nähdä esitutkimuksena suhteellisen vaalitavan ja vaalimatematiikan opettamiseen liittyen, minkä myötä on perusteltua lähteä hyödyntämään laadullisen tutkimuksen menetelmiä osana työn tutkimusosuutta. Laadulliselle tutkimukselle on tyypillistä, että sen tavoitteet ovat kuvailevia, kun taas määrällisessä tutkimuksessa tavoitteet voidaan esittää testattavina hypoteeseina [58]. Hakalan [26, s. 23] mukaan toinen selkeä ero laadullisen ja määrällisen tutkimuksen välille muodostuu siinä, millä tavalla tutkimusongelmat ja -menetelmät valitaan. Hakala kuvaa, että määrällisessä tutkimuksessa tutkimusongelmat ja -menetelmät kiinnitetään tutkimusta tehdessä aikaisessa vaiheessa. Laadullisessa tutkimuksessa näitä valintoja voidaan tarkentaa tutkimuksen edetessä. Käytännössä tämä voi tarkoittaa sitä, että laadullisessa tutkimuksessa tutkimuskysymyksiä muotoillaan uudelleen aineiston keräämisen jälkeen [58]. Laadullisen tutkimuksen tavoitteet voivat liittyä muun muassa ymmärryksen lisäämiseen tutkittavasta kohteesta, kohteena olevan ilmiön kuvaamiseen ja uuden tiedon hankkimiseen [58].

Laadullinen tutkimus ei sisällä vain yhdenlaisia menetelmiä vaan sitä voidaan lähestyä useista erilaisista näkökulmista [58]. Tähän työhön menetelmäksi on valikoitunut *teemahaastattelu*. Erilaiset haastattelutyypit eroavat toisistaan siinä, kuinka tarkasti haastattelussa esitettävät kysymykset on jäsennetty ja kirjallisuudessa puhutaan esimerkiksi *strukturoidusta*, *puolistrukturoidusta* ja *avoimesta haastattelusta* (katso esimerkiksi [22, s. 40][30, luku 4.2]). Teemahaastattelu on puolistrukturoitu haastattelumenetelmä, jossa haastattelun aihealueet eli teemat on päätetty etukäteen, minkä lisäksi tarkoituksena on keskustella kaikkien haastateltavien kanssa kustakin teemasta [22, s. 29, 37]. Ero strukturoituun haastatteluun eli esimerkiksi lomakehaastatteluun syntyy siinä, että kysymykset muotoillaan vain karkealla tasolla ennen haastattelua eli haastattelijalla ei ole mukanaan valmiita kysymyksiä haastattelua varten [22, s. 29]. Yksityiskohtaisten kysymysten sijasta laajempiin teemoihin keskittyminen mahdollistaa haastateltavien äänen ja tulkintojen esille tuomisen sekä tutkijan oman näkökulman vähentämisen [30, luku 4.2.3]. Tarkasteltavalle ilmiölle ominaisten piirteiden tunnistaminen voidaan nähdä teemahaastattelun yhtenä tavoitteena [30, luku 5.4]. Koska tässä työssä tutkitaan uudenlaista aihetta, suhteellisen vaalitavan ja vaalimatematiikan opettamista, on teemahaastattelu mielekäs valinta käytettäväksi menetelmäksi.

Teemahaastattelussa haastattelurunkona on Hirsijärven ja Hurmeen [30, luku 5.5.2] mukaan teema-alueluettelo haastattelussa käsiteltävistä aiheista. Teema-alueilla tarkoitetaan tässä yhteydessä niitä aihepiirejä, joihin haastattelussa esitettävät kysymykset liittyvät. Hirsijärvi ja Hurme kuvaavat, että teema-alueet tarkentavat varsinaisia tutkimusongelmia. Eskola ja Vastamäki [22, s. 36–38] taas puhuvat teemarungosta, joka pitää sisällään teemoja kolmella eri tasolla, joista ylin taso koostuu aihealueista, joista ylipäätänsä on haastattelussa tarkoitus keskustella. Toinen taso sisältää ylimmän tason aihealueita tarkentavia kysymyksiä. Kolmannella tasolla on tarkasti aseteltuja laajuudeltaan suppeampia kysymyksiä, joita voidaan käyttää niissä tilanteissa, joissa haastateltavalta ei ole saatu vastauksia aiempiin kysymyksiin. Haastattelurunko on koottu tässä työssä edellä kuvattua tapaa mukaillen neljän eri tason pohjalta ja se on esitetty liitteessä D. Ylimmällä tasolla ovat haastattelun pääaihealueet (esimerkiksi *oppiainerajat ylittävät oppimiskokonaisuudet*). Toisella tasolla kuvataan, mistä näkökulmista käsin pääaihealueita tarkastellaan (esimerkiksi *toteuttamistapa*) ja kolmas taso tarkentaa toisella tasolla olevia näkökulmia (esimerkiksi *kuinka laaja kokonaisuus*). Neljäs taso sisältää tarkentavia kysymyksiä toisen tason näkökulmiin liittyen. Eskola ja Vastamäki painottavat teemarungon suhteen sitä, että haastattelijan tulee tarvittaessa siirtyä seuraavan teeman käsittelyyn, jos haastateltava ei lähde kunnolla mukaan keskustelemaan jostakin tietystä teemasta. Hirsijärvi ja Hurme [30, luku 5.5.2] mainitsevat toisaalta, että haastattelijan lisäksi haastateltava voi tarkentaa esitettyjä kysymyksiä. Haastattelijan ei pidä myöskään Hirsijärven ja Hurmeen mukaan valita teemoja liian tarkasti, jotta kiinnostuksen kohteena olevan ilmiön monipuolisuus saadaan kunnolla esille.

Tässä työssä ennen varsinaisia teemahaastatteluja suoritettiin yksi esihaastattelu ryhmähaastatteluna, johon osallistui yksi matematiikan ja kaksi yhteiskuntaopin aineenopettajaopiskelijaa. Perustellaan seuraavaksi esihaastattelun järjestämistä Hirsijärven ja Hurmeen teoksen [30, luku 5.7] pohjalta. Esihaastattelu on tarkoitettu pidettäväksi ennen varsinaisia tutkimushaastatteluja ja sen ideana on tutkia haastattelurungon soveltuvuutta ja tarvetta sen muokkaamiselle. Haastattelurungon testaamisen ohella esihaastattelujen avulla haastattelija pääsee harjoittelemaan toimintaansa haastattelutilanteessa. Lisäksi esihaastattelut antavat mahdollisuuden muokata tarvittaessa haastattelun pituutta. Esihaastattelut voidaan nähdä olennaiseksi osaksi haastattelututkimusta ja olisi hyvä, jos niitä tehtäisiin paljon. Esihaastattelut eivät myöskään ole muista haastatteluista irrallinen kokonaisuus, sillä ne voidaan Eskolan ja Vastamäen [22, s. 40] mukaan ottaa osaksi haastatteluaineiston analysointia, mikäli ne koetaan onnistuneiksi. Tässä työssä esihaastattelulla päästiin haastattelurungon testaamisen ohella harjoittelemaan ryhmähaastattelussa toimimista.

Esihaastattelun jälkeen järjestettyihin varsinaisiin teemahaastatteluihin osallistui yhteensä seitsemän yläkoulun ja lukion aineenopettajaa. Osallistuneiden opettajien joukossa oli mukana sekä matematiikan että yhteiskuntaopin aineenopettajia. Taulukossa 5.3 on eritelty, kuinka monta kunkin oppiaineen aineenopettajaa oli mukana teemahaastatteluissa ja mitkä ovat heidän työskentelypaikkansa.

Taulukko 5.3. *Teemahaastatteluihin osallistuneiden aineenopettajien työskentelypaikat ja opetettavat aineet.*

Työskentelypaikka ja opetettava aine	Lukumäärä
Yläkoulu, matematiikka	3
Yläkoulu, yhteiskuntaoppi	1
Lukio, matematiikka	2
Lukio, yhteiskuntaoppi	1

Teemahaastatteluja toteutettiin yhteensä viisi kappaletta, joista neljä oli yksilöhaastatteluja. Yksi teemahaastattelu pidettiin ryhmähaastatteluna. Kaikki teemahaastattelut esihaastattelu mukaan luettuna pidettiin Microsoft Teams -sovelluksen välityksellä, josta käytetään jatkossa nimeä Teams. Yläkoulun aineenopettajat haastateltiin yksilöhaastatteluilla, kun taas ryhmähaastattelussa oli mukana kaikki tutkimukseen osallistuneet lukion aineenopettajat. Teemahaastatteluihin osallistuneet aineenopettajat pyydettiin mukaan tutkimukseen *eliittiotannan* mukaisesti. Eliittiotan ideana on, että tutkimukseen osallistujat pystyisivät antamaan mahdollisimman hyvin tietoa kiinnostuksen kohteena olevasta aiheesta [71, luku 3.4]. Tämän työn aihe rajautuu matematiikan ja yhteiskuntaopin opetuksessa esille nouseviin aiheisiin, jolloin oli luonnollista pyytää juuri näiden oppiaineiden aineenopettajia teemahaastatteluihin. Eliittiotantaa hyödynnettiin myös esihaastattelun haastateltavien valinnassa.

5.7 Aineiston analysointi

Litteroinnilla tarkoitetaan haastatteluaineiston muokkaamista tekstimuotoon [61, s. 427]. Haastatteluaineiston voi litteroida eri tarkkuudella sen mukaan, mitä toteutettava tutkimus edellyttää ja mitkä ovat sen haastattelujen analysoinnille asettamat tarpeet [30, luku 7.2.1][61, s. 427–429]. Litterointi on olennainen osa haastatteluaineiston analysointia, mutta tutkijan tulee tiedostaa se, että haastatteluaineiston litteroinnilla pystytään vain tulkitsemaan haastatteluja niiden tarkan kuvaamisen sijasta [61, s. 437–438]. Tämä tulee selvästi esille silloin, kun litterointi keskittyy haastatteluaineiston olennaisimpien kohtien esille tuomiseen, koska tällöin Eskolan ja Vastamäen [22, s. 42] mukaan ei voida yksiselitteisesti todeta, mikä on sitä kaikkein olennaisinta sisältöä. Tässä tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita ennen kaikkea teemahaastattelujen sisällöstä, jolloin litteroinnissa voidaan keskittyä haastattelujen sisällön kuvaamisen ilman, että litteroinnissa pyrittäisiin kuvaamaan myös puheen piirteitä [61, s. 427]. Tämän myötä litteroinnissa ei kiinnitetty huomiota esimerkiksi haastattelijan ja haastateltavien väliseen sosiaaliseen vuorovaikutukseen, äänenpainoihin tai puheenvuoroissa esiintyneisiin taukoihin.

Litteroinnissa on käytetty apuna Teamsin teemahaastattelujen nauhoittamisen aikana luomia tekstitallenteita. Litteraatit koostettiin näiden tekstitallenteiden pohjalta. Ennen haastatteluaineiston varsinaisen analysoinnin aloittamista litteraatit käytiin vielä kertaalleen läpi. Tässä yhteydessä tarkistettiin, että litteraatit ovat luettavassa muodossa eikä niissä ole epäselviä kohtia kielen kannalta. Esimerkiksi jos Teamsin luomassa tekstitallenteessa oli jokin sana turhaan kahdesti peräkkäin, jätettiin sana toistamatta litteraatissa. Litteraateissa ei käytetty teemahaastatteluihin osallistuneiden nimiä vaan lyhenteitä. Lyhenteet olivat muotoa H1=haastateltava yksi, H2=haastateltava kaksi ja niin edelleen. Lyhenteiden muodostamisen yhteydessä kirjattiin ylös, onko kyseessä matematiikan vai yhteiskuntaopin aineenopettaja, jotta on tarvittaessa mahdollista verrata keskenään eri oppiaineiden aineenopettajien antamia vastauksia. Litteraattien läpikäymisen jälkeen alkuperäiset haastattelutallenteet poistettiin. Myös esihaastattelu litteroitiin tarkempaa analysointia varten, koska sen katsottiin onnistuneen hyvin, jolloin sitä voitiin käyttää osana tutkimusaineistoa. Esihaastattelu oli kestoltaan noin 60 minuuttia. Varsinaisista teemahaastatteluista neljä oli kestoltaan noin 44–47 minuuttia. Yhden teemahaastattelun kesto oli noin 24 minuuttia.

Haastatteluaineisto purettiin analysointia varten seuraavasti. Litteraateista pyrittiin tunnistamaan, mitä kysymyksiä tarkalleen ottaen teemahaastatteluissa haastateltaville esitettiin. Tässä yhteydessä havaittiin, että nämä kysymykset kattoivat pitkälti teemahaastattelurungon D toisella ja kolmannella tasolla esitetyt aihealueet. Kysymysten tunnistamisen jälkeen haastatteluaineisto järjesteltiin niiden mukaan yhteen tiedostoon eli kunkin kysymyksen alle liitettiin siihen saadut vastaukset ja tutkijan ja haastateltavien välisiä keskusteluja. Tämän avulla muodostettiin alustava luokittelu haastatteluaineistolla.

Ennen haastatteluaineiston varsinaista analysointia edellä kuvattu luokiteltu aineisto koodattiin. Koodaamisessa on kyse perusteellisesta aineistoon perehtymisestä ja sen saattamisesta kokonaisuuksiin, joita on helpompi tulkita kuin koko ainestoa [21, luku 4]. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että aineiston sisältöä yhdistetään ja erotellaan keskenään [36]. Aineiston koodaamisen voi nähdä keinona yksinkertaistaa aineistoa [36] ja se on myös tässä työssä yksi perustelu koodauksen käyttämiselle. Tässä työssä koodauksen tukena hyödynnettiin liitteessä D esitettyä teemahaastattelurunkoa. Teemahaastattelurungon käyttäminen koodauksessa on Eskolan ja Suorannan [21, luku 4] mukaan mielekäs valinta, mutta haasteena on heidän mukaansa tässä sen tunnistaminen, milloin yksittäinen ote aineistosta tarkoittaa sitä asiaa, miksi tutkija sen tulkitsee. Koodauksessa voi käyttää apuna esimerkiksi värejä [36]. Tässä työssä luokiteltu aineisto koodattiin väreillä kysymys kerrallaan maalaamalla samaan aihepiiriin liittyvien otteiden fontit samalla värillä. Koodauksen yhteydessä tehtiin myös muistiinpanoja haastateltavien vastauksiin liittyen.

Koodauksen jälkeen aineiston analysointia jatkettiin teemoittelulla. Teemoittelun tavoitteena on löytää aineistosta sellaisia aihealueita, jotka toistuvat useampien haastateltavien vastauksissa [30, luku 7.5.3]. Tämä mahdollistaa sen, että tutkija voi tehdä päätelmiä siitä, kuinka paljon erilaiset teemat näkyvät aineistossa [71, luku 4.1]. Teemahaastattelun yhteydessä on Hirsijärven ja Hurmeen [30, luku 7.5.3] mukaan tyypillistä, että siinä esitetyt teemat nousevat esille myös aineiston teemoittelun yhteydessä. Teemahaastattelun teemat eivät välttämättä ole ainoita teemoittelussa löydettäviä teemoja, vaan Hirsijärven ja Hurmeen mukaan usein aineistosta paljastuu uusia teemoja. Teemoittelun voikin nähdä keinoksi luoda koontia siitä, mitä aineistosta on löydettävissä [21, luku 4]. Löydettyjä teemoja voidaan lisäksi pilkkoa pienempiin osiin tutkimalla, millaisia kokonaisuuksia niihin sisältyy, jolloin puhutaan pää- ja alateemoista [62]. Eskolan ja Suorannan [21, luku 4] mukaan teemoittelua voidaan hyödyntää esimerkiksi sellaisen aineiston analysoinnissa, joka tähtää käytännönläheisen ongelman ratkaisemiseen. Teemahaastattelujen pyrkimyksenä on tässä työssä erityisesti saada palautetta suhteellisen vaalitavan oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta sen kehittämiseksi ja parantamiseksi. Tällöin aineiston analysoinnissa on perusteltua hyödyntää teemoittelua.

Kuvataan seuraavaksi, kuinka haastatteluaineistoa on teemoiteltu tässä työssä. Teemoittelu toteutettiin tutkimuskysymys kerrallaan ja siinä pyrittiin löytämään aineistosta sellaisia pää- ja alateemoja, joilla pystytään selittämään tutkimuskysymyksiä. Tämä oli tärkeä osa teemoittelua, koska ennen aineiston analysointia on tiedettävä, mitä sen aikana halutaan selvittää [62]. Tutkimuskysymysten alle hahmoteltiin aluksi pääteemoiksi teemahaastatteluissa käsitellyistä aiheista niitä, joiden katsottiin olevan kaikkein hyödyllisimpiä tutkimuskysymysten kannalta. Pääteemoja kuvaaviksi alateemoiksi valittiin aluksi aineiston koodauksen yhteydessä muodostuneet koodit. Aineiston koodauksien läpikäymisen jälkeen tarkasteltiin ennen koodien eli alateemojen yhdistämistä luontevammiksi kokonaisuuksiksi, löytyykö aineistosta muita alateemoja koodien lisäksi. Aineistoa teemoitellessa ei keskitytty pelkästään pää- ja alateemojen tunnistamiseen, vaan aineistosta poimittiin alateemoja kuvaavia ja selittäviä kommentteja aineiston analysoinnin tueksi. Tässä yhteydessä kommentteja pelkistettiin tarpeellisin osin. Aineiston teemoittelusta on koostettu sitä havainnollistavat taulukot kunkin tutkimuskysymyksen osalta, jotka on esitetty luvussa 6 tutkimustuloksien esittelemisen yhteydessä.

Edellä on kuvattu, kuinka haastatteluaineiston koodaaminen ja teemoittelu on toteutettu tässä työssä. Koodaus ja teemoittelu ovat nyt edenneet haastatteluaineistosta käsin haastattelurunkoon D ja tutkimuskysymyksiin (katso luku 4) tukeutuen. Tällöin voidaan puhua *aineistolähtöisestä sisällönanalyysistä,* jossa aineistosta tehdään päätelmiä tutkittavan aiheen kuvaamiseksi [71, luku 4.4.3]. Aineistolähtöinen analyysi soveltuu hyvin ilmiöiden perusluonteen selvittämiseen, koska siinä ilmiötä selittävä teoria kootaan aineiston pohjalta [21, luku 1]. Luvussa 7 sovelletaan aineistolähtöisen sisällönanalyysin ohella *teorialähtöistä sisällönanalyysiä,* jonka ideana on analysoida aineistoa aiempaan tietoon, kuten teorioihin perustuen [71, luku 4.4.4]. Luvun 7 yhteydessä tämä tarkoittaa työn pedagogisen viitekehyksen (katso luku 2) ja ongelma-analyysin (katso alaluku 5.3) peilaamista ja vertaamista haastatteluaineistosta saatujen tutkimustulosten kanssa.

6. TUTKIMUSTULOKSET

Tässä luvussa esitellään aineenopettajien teemahaastattelujen avulla saadut tutkimustulokset tutkimuskysymys kerrallaan. Kutakin tutkimuskysymystä käsitellään omassa alaluvussaan. Tutkimusaineiston teemoittelua kuvaavissa taulukoissa esitetään ensin vasemmassa sarakkeessa pääteemat ja sen jälkeen oikeassa sarakkeessa pääteemoihin liittyvät alateemat, koska teemoittelu on edennyt tutkimuskysymyksistä kohti pää- ja alateemoja ja niitä kuvaavia havaintoja. Teemoittelua avataan ja perustellaan esittämällä löydettyjä teemoja kuvaavia havaintoja eli teemahaastatteluissa esitettyjä vastauksia ja näkemyksiä, jotka on tuonut esille yksi tai useampi aineenopettaja. Havaintojen ohella esitetään sitaatteja teemahaastatteluista, joiden yhteyteen on merkitty kyseessä olevan aineenopettajan tunnus, esimerkiksi H1, ja hänen opetettava aine. Luvussa puhutaan yleisellä tasolla oppijoista. Termejä oppilas ja opiskelija käytetään, kun esille tuotava havainto tai sitaatti käsittelee nimenomaan jompaakumpaa ryhmää.

6.1 Kuinka oppiainerajat ylittävä oppimiskokonaisuus voisi rakentua ja mitä siinä tulisi huomioida?

Ensimmäinen tutkimuskysymys tarkastelee oppiainerajat ylittäviä oppimiskokonaisuuksia. Tutkimuskysymykseen liittyen löydetyt pää- ja alateemat on esitetty Taulukossa 6.1. Alateemojen yhteydessä on esitetty suluissa frekvenssit siitä, kuinka moni haastateltava toi teemahaastatteluissa esille kyseisen alateeman. Esihaastattelu mukaan lukien teemahaastatteluihin osallistui yhteensä 10 haastateltavaa. Jatkossa kaikista haastateltavista käytetään selkeyden vuoksi termiä aineenopettaja, vaikka esihaastattelun osallistujat olivat aineenopettajaopiskelijoita. Samalla periaatteella on esitetty kahteen jälkimmäiseen tutkimuskysymykseen liittyen Taulukoissa 6.2 ja 6.3 alateemat esille tuoneiden aineenopettajien lukumäärät. Frekvenssit on laskettu teemoittelua muodostettaessa poimittaessa haastatteluaineistosta alateemoihin liittyviä kommentteja. Tutkimustulosten kirjoittamisen yhteydessä on hyödynnetty myös sellaisia kommentteja, joita ei ollut poimittu ylös teemoittelua laadittaessa. Tämän vuoksi frekvenssit ovat vain arvio siitä, kuinka moni aineenopettaja on tuonut minkäkin alateeman esille. Frekvenssit antavat kuitenkin suuntaa sille, kuinka paljon eri alateemat ovat painottuneet haastatteluaineistossa.

Oppiainerajat ylittävien oppimiskokonaisuuksien aihevalintaa ei nähty tarkkarajaisena,

Taulukko 6.1. *Ensimmäisen tutkimuskysymyksen teemoittelu pää- ja alateemoihin. Lyhenne OPS tarkoittaa opetussuunnitelmaa.*

Oppiainerajat ylittävän oppimiskokonaisuuden rakentuminen	
Pääteemat	**Alateemat**
Aiheen valinta	Sisältö OPS:n sisältä (2) Aihe voi olla joko OPS:sta tai sen ulkopuolelta (3) Sisältö voi olla OPS:n ulkopuolelta (4) Haasteet (5)
Vaikeustason valitseminen ja eriyttäminen	Materiaalin tulisi sopia kaikille (3) Materiaali voi olla opetusta eriyttävä (6) Eriyttämiseen liittyvät haasteet (4)
Laajuus	Kaksi tuntia (1) Yksi viikko (5) Viikon pituinen kokonaisuus pitkä (2) Laajuus riippuu aiheista, opetusryhmistä ja koulun käytännöistä (6)
Historiaviittaukset	Innostaminen ja motivoiminen (7) Laajemman kontekstin luominen (6) Historiaviittaukset vaativat opettajalta osaamista (1) Oppijan omaan elämään liittyvät viittaukset (3) Näkökulmaa ei kannata rajata tarkasti (3) Näkökulmana tulisi olla laajempi konteksti (1)

vaan aineenopettajien mukaan siinä voi huomioida niin opetussuunnitelman (jatkossa OPS) kuin sen ulkopuoliset sisällöt. Eräänä perusteena OPS:n ulkopuolisten aiheiden valitsemiselle mainittiin se, että aihevalinta on tullut hallinnollisena määräyksenä kohdistuen OPS:n ulkopuolelle. OPS:n sisällöissä pitäytymistä perusteltiin esimerkiksi sillä, että silloin opetettavia sisältöjä ei lisätä entisestään. Tämä näkökulma linkittyy haasteisiin, joihin aineenopettajat kertoivat kohdanneensa oppiainerajat ylittäviä oppimiskokonaisuuksia toteutettaessa. Eräs aineenopettaja koki, että opetettavia sisältöjä on paljon ja aikaa rajallisesti käytettävissä, mikä rajoittaa oppiainerajat ylittäviin kokonaisuuksiin käytettävissä olevaa aikaa. Toinen aineenopettaja kertoi toisaalta kokonaisuuksiin tarvittavan yhteisen suunnittelun järjestämisen olevan haastavaa. Haasteeksi koettiin myös se, että samaan aihepiiriin kuuluvat sisällöt voivat tulla eri oppinaineissa eri vuosiluokkien aikana.

”Että voi ollakin, että me käydään vaikka niitä ravintoaineita ysin kemiassa. Ja sitten niitä käydäänkin terveystiedossa jo vaikka seiska- ja kasiluokalla.” (H8, matematiikka)

Oppiainerajoja ylittävän oppimateriaaliin hyödyllisyyden kannalta olennaiseksi nähtiin sen soveltuvuus koko opetusryhmälle. Tähän liittyen tuotiin esille, että oppijat saattavat kokea turhautumista, jos oppimateriaali on heille turhan haastava. Moni aineenopettaja koki eriyttämisen liittämisen osaksi oppimateriaalia mahdolliseksi ja sen koettiin esimerkiksi lisäävän materiaalin joustavuutta. Eräs aineenopettaja koki, että ylöspäin eriyttämisen saa liitettyä sujuvasti osaksi oppiainerajat ylittäviä kokonaisuuksia. Eriyttämisen toteuttaminen vain ylöspäin koettiin toisaalta ongelmalliseksi, koska osa aineenopettajista koki, että silloin osa oppijoista jää oppimateriaalin aiheiden ulkopuolelle. Tähän liittyen esitettiin ajatus siitä, että eriyttämistä tulisi toteuttaa opetusryhmän tarpeista käsin.

Aineenopettajat kokivat oppiainerajat ylittävän oppimiskokonaisuuden laajuuden riippuvan useista eri tekijöistä, kuten opetusryhmästä, opetettavasta aiheesta ja koulun omista käytännöistä. Tämä vaikuttanee siihen, että oppimiskokonaisuuden laajuudesta nousi teemahaastatteluissa esille erilaisia näkemyksiä. Eräs opettaja näki kahden tunnin olevan minimilaajuus tällaiselle oppimiskokonaisuudelle ja hänen mukaansa siinä ajassa on mahdollista käsitellä tiivis ja hyvin suunniteltu kokonaisuus. Yksittäisten oppituntien ohella yhtenä vaihtoehtona laajuudelle esitettiin, että oppimiskokonaisuus voisi kestää 1–2 päivän ajan. Viikon pituinen kokonaisuus nähtiin mahdolliseksi silloin, kun kyseessä on esimerkiksi teemaviikko. Viikon pituisten kokonaisuuksien haasteeksi nähtiin kuitenkin se, että jaksavatko oppijat käydä läpi yhtä aihetta viikon ajan.

Teemahaastatteluissa keskusteltiin myös historian liittämisestä osaksi muiden oppiaineiden kuin historian opetusta, koska oppimateriaalin osana on sen aiheisiin liittyviä historiaviittauksia. Innostaminen ja motivoiminen nähtiin selkeästi historiaviittausten tarjoamaksi mahdollisuudeksi. Historiaviittausten etuina mainittiin lisäksi, että niiden avulla voidaan perustella, mihin opiskeltava aihe liittyy. Eräs opettaja totesi historiaviittausten tekemisen olevan myös yksi tapa toteuttaa oppiainerajat ylittävää opetusta pienellä vaivalla, mutta historiaviittausten tekeminen vaatii opettajalta hänen mukaansa osaamista. Historiaviittauksen näkökulman valitsemisesta nousi esille erilaisia vaihtoehtoja. Oppijan omaan elämään liittyvät viittausten koettiin olevan oppijan itsensä kannalta kiinnostavia. Erään aineenopettajan mukaan näkökulman valitsemisessa tärkeätä on pyrkiä opiskeltavan aiheen kuvaamiseen, jolloin laajemman kontekstin luominen olisi olennaisinta.

”No ihan historiatieteellisestä näkökulmasta. Mä oisin sitä mieltä, että se olisi silloin se laajempi historiallis-yhteiskunnallinen konteksti, joka perustelee sen, että joku asia on tehty. Että se olisi se tärkein.” (H5, yhteiskuntaoppi)

6.2 Miten vaalimatematiikka soveltuu opetettavaksi aiheeksi yläkoulussa ja lukiossa ja mitä sen opettamisessa tulisi huomioida?

Toinen tutkimuskysymys käsittelee vaalimatematiikan soveltuvuutta yläkoulussa ja lukiossa opetettavaksi aiheeksi. Tutkimuskysymykseen liittyvät pää- ja alateemat on esitetty

Taulukossa 6.2. Alateema ”Vaalimatematiikka lukioon soveltuva aihe” on tunnistettu haastatteluaineistosta teemoittelun raportoinnin yhteydessä ja päätetty nostaa mukaan yhdeksi alateemaksi.

Taulukko 6.2. *Toisen tutkimuskysymyksen teemoittelu pää- ja alateemoihin.*

Vaalimatematiikan soveltuminen yläkoulussa ja lukiossa opetettavaksi aiheeksi	
Pääteemat	**Alateemat**
Matematiikan soveltaminen muissa oppiaineissa	Vaalimatematiikka hyvä aihe matematiikan soveltamiseksi muissa oppiaineissa (9)
	Vaalimatematiikan opettaminen matematiikan ja yhteiskuntaopin yhteistyönä (2)
Vaalimatematiikan käsittelyn laajuus ajallisesti	Noin kaksi oppituntia (5)
	Yli kaksi oppituntia (1)
	Ajankäytön haasteet (6)
Vaalimatematiikan käsittely opetuksessa	Vaalimatematiikan olennaiset sisällöt (4)
	D’Hondtin menetelmän soveltuminen yläkoulussa opetettavaksi aiheeksi (3)
	Vaalien matemaattinen luonne (2)
	D’Hondtin menetelmä keskeisin menetelmä (4)
	Kuinka huomioida d’Hondtin menetelmän ohella muut menetelmät (8)
	Vaalimatematiikan kohdalla matematiikan ja yhteiskuntaopin opetuksen tulisi kulkea rinnakkain (2)
Virhekäsitykset vaalimatematiikasta	Vaaleissa läpimenevät ehdokkaat (1)
	Vaalituloksen laskemiseen liittyvät virheet (1)
Vaalimatematiikan haastavuudesta opetettavana aiheena	D’Hondtin menetelmä ja kvoottimenetelmät yläkoulutasolle soveltuvia aiheita (4)
	Vaalimatematiikka lukioon soveltuva aihe (2)
	Kokonaisuuden käsittäminen haasteena yläkoulussa (1)

Aineenopettajat pitivät vaalimatematiikkaa hyvänä aiheena matematiikan soveltamiseksi osana muiden oppiaineiden opetusta. Näkemystä perusteltiin esimerkiksi sillä, että vaalimatematiikka on esimerkki siitä, mihin matematiikkaa tarvitaan.

”Että niille [oppijoille] tulisi se käsitys, että matematiikkaa tarvitsee arjessa ja ihminen monessa muussakin paikassa kuin vaan siellä matematiikan tunnilla.” (H8, matematiikka)

Vaalimatematiikan eduksi mainittiin myös sen linkittyminen yhteiskuntaopin sisältöihin. Eräs aineenopettaja totesi vaalimatematiikan olevan aiheena mielekäs, koska sen käsittelemiseen tarvittava matematiikka ei ole liian yksinkertaista, kuten pelkästään yhteen- ja vähennyslaskuja. Teemahaastatteluissa nousi esille, että vaalimatematiikan käsittely opetuksessa antaa mahdollisuuksia tehdä yhteistyötä matematiikan ja yhteiskuntaopin opetuksen välillä. Tähän liittyen todettiin, että vaalimatematiikan ei tarvitsisi olla osana laajempaa monialaista oppimiskokonaisuutta, jotta sitä voisi lähteä opettamaan eri oppiaineiden yhteistyönä. Yhteistyön toteuttamiseksi tuotiin esille sellainen idea, että yhteiskuntaopin puolella vaalimatematiikan opetus voisi keskittyä vaalien teoreettisempaan tarkasteluun, jolloin matematiikan opetuksessa tutkittaisiin vaaleihin liittyvää matematiikkaa.

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen käsittelyn yhteydessä havaittiin, että aineenopettajien mukaan oppiainerajat ylittävä oppimiskokonaisuuden kesto voisi olla jotakin noin kahden oppitunnin ja viikon välillä. Vaalimatematiikan osalta oppimiskokonaisuuden mahdolliseksi kestoksi nähtiin 1–2 oppituntia. Eräs aineenopettaja kertoi käyttävänsä tällä hetkellä vaalimatematiikan käsittelemiseen matematiikan opetuksen yhteydessä yhden oppitunnin verran aikaa yläkoulutasolla. Kyseisen aineenopettajan mukaan aiheen käsittelyyn voisi käyttää enemmänkin aikaa. Selkeänä haasteena vaalimatematiikan ottamiseksi osaksi opetusta tuotiin esille se, että opetuksessa ei välttämättä löydy sille aikaa. Tämä voi johtua siitä, että vaalimatematiikka ei ole suoraan osana opetussuunnitelmien perusteita (katso alaluku 5.3.2), minkä myös aineenopettajat toivat esille.

Aineenopettajat toivat teemahaastatteluissa esille, mitkä vaalimatematiikan sisällöt olisivat heidän mukaansa keskeisiä opetuksen kannalta. Eräs aineenopettaja kuvasi vaalimatematiikan osaamisen minimitasoksi sen, että oppija tietää, että vaalitulos ei määräydy aina suoraan henkilökohtaisten äänimäärien perusteella. Myös Suomen kannalta keskeisimmän laskentamenetelmän eli d’Hondtin menetelmän tunteminen koettiin tärkeäksi asiaksi. Yleisemmällä tasolla hyödyllisenä pidettiin sen esille tuomista, että d’Hondtin menetelmän ohella on olemassa muitakin laskentamenetelmiä vaalituloksen määrittämiseksi. Lisäksi vaalien matemaattisuuden esille tuominen nähtiin tärkeäksi seikaksi, jotta vaalituloksen määräytyminen olisi selkeämpää oppijoille. Erään aineenopettajan mielestä opettajan rooli on tässä keskeinen, jolloin opettajan tulisi painottaa sitä, että jos vaalituloksia lasketaan yhteiskuntaopin oppitunneilla, niin myös silloin tarvitaan matematiikkaa, vaikka kyseessä on yhteiskuntaopin oppitunti. Vaalimatematiikkaa ei tulisi aineenopettajien mukaan kuitenkaan rajata vain yhteiskuntaopissa käsiteltäväksi aiheeksi, vaan matematiikan opetuksessa olisi hyvä käsitellä vaalimatematiikkaan liittyviä matematiikan sisältöjä rinnakkain yhteiskuntaopin opetuksen kanssa.

D’Hondtin menetelmä koettiin aiheeksi, jota voisi opettaa yläkoulussa. Eräs aineenopettaja toi toisaalta sellaisen näkökulman esille, että d’Hondtin menetelmän hallitseminen voi tuottaa haasteita yläkoulutasolla.

”Joku tommoinen d’Hondtin menetelmä voi olla aika vaikea monelle [oppilaalle] käsittää niinku jo konseptina.” (H3, yhteiskuntaoppi)

D’Hondtin menetelmään keskittymiselle nähtiin myös muita perusteluita kuin sen keskeisyys Suomessa käytettävänä laskentamenetelmänä. Muina argumentteina esille nousivat aiheen rajaaminen ja käsiteltävien matematiikan sisältöjen pitäminen sopivan haastavina. Muiden kuin d’Hondtin menetelmän opettamisen yhtenä toteuttamistapana voisi olla aineenopettajien mukaan ylöspäin eriyttäminen. Muihin menetelmiin viitatessa tulisi aineenopettajien mukaan tuoda esille, miten eri menetelmät vaikuttavat vaalitulokseen. Tähän liittyen eräs aineenopettaja näki suhteellisen vaalitavan eri vaihtoehtojen keskinäistä vertailua olennaisemmaksi suhteellisen vaalitavan ja enemmistövaalitavan erojen vertailemisen.

Vaalimatematiikan tarkastelemisen yhteydessä teemahaastatteluissa nousi esille aineenopettajien ajatuksia ja kokemuksia oppijoiden virhekäsityksistä vaalimatematiikkaan liittyen. Yhdeksi mahdolliseksi virhekäsitykseksi mainittiin oppijoiden ajattelevan, että eniten henkilökohtaisia ääniä saaneet ehdokkaat menisivät aina vaaleissa läpi. Tämä saattaa aineenopettajien mukaan vaikuttaa siihen, että oppijat eivät tunnista sitä, että suuresta henkilökohtaisesta äänimäärästä huolimatta ehdokas ei aina pääse läpi vaaleissa. Eräs aineenopettaja pohti, että oppijoiden tietoisuus suhteellisesta vaalitavasta ennen yhteiskuntaopin opiskelua yläkoulussa voi olla varsin rajallinen. Virhekäsitykset voivat toisaalta liittyä vaalitulokseen laskemiseen. Eräs aineenopettaja kuvasi, kuinka d’Hondtin menetelmää sovellettaessa oppijat saattavat laskea vertauslukuja väärällä algoritmilla. Kyseinen aineenopettaja on havainnut, että vertauslukuja laskettaessa jaettavana lukuna käytetään viimeisimpänä laskettua vertauslukua puolueen kokonaisäänimäärän sijasta. Toinen haaste on aineenopettajan kuvauksen mukaan sen tunnistaminen, mitä lukuja tulee käyttää jakajina vertauslukuja laskettaessa.

Edellä todettiin aineenopettajien pitäneen d’Hondtin menetelmää yläkouluun soveltuvaksi aiheeksi. Aineenopettaja, joka on käyttänyt d’Hondtin menetelmän opettamiseen yhden oppitunnin verran aikaa, kertoi monien oppijoiden oppivan d’Hondtin menetelmän jo yhden oppitunnin aikana. Kyseisen aineenopettajan mukaan d’Hondtin menetelmä on myös aiheena vaikuttanut kiinnostavan osaa oppijoista ja hänen mukaansa vaalituloksen laskemiseen tarvittavan matematiikan on sen tasoista, että se soveltuu kaikille oppijoille yläkoulutasolla. Samansuuntaisen havainnon oli tehnyt eräs toinen aineenopettaja, joka kuvasi d’Hondtin menetelmän olevan yhteiskuntaopin tunneilla oppijoille ”aika helppo aihe” (H9, yhteiskuntaoppi). Vaalimatematiikka koettiin myös lukioon soveltuvaksi aiheeksi, jos se kuuluisi lukion opetussuunnitelmaan. Kvoottimenetelmien osalta todettiin, että niitä olisi mahdollista käydä yläkoululaisten kanssa läpi. Yhdeksi vaihtoehdoksi kvoottimenetelmien opettamisen toteuttamiselle ehdotettiin ylöspäin eriyttämistä. Kokonaisuuden hallitsemisen arveltiin kuitenkin mahdollisesti tuottavan haasteita kvoottimenetelmien osalta.

6.3 Millaisia näkemyksiä tutkimukseen osallistuneilla aineenopettajilla on suhteellisen vaalitavan oppimateriaalin sisällöstä, laajuudesta ja oppimateriaalin kohderyhmästä?

Kolmas tutkimuskysymys keskittyy aineenopettajien oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta antamaan palautteeseen. Pää- ja alateemat tutkimuskysymystä koskien on esitetty Taulukossa 6.3.

Taulukko 6.3. *Kolmannen tutkimuskysymyksen teemoittelu pää- ja alateemoihin.*

Aineenopettajien näkemykset suhteellisen vaalitavan oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta	
Pääteemat	**Alateemat**
Oppimateriaalin sisältö	Haastavuus (6) Laajuus (3) Esimerkkien ja matematiikan esittämisen toimivuus (4) Matematiikalla vahva rooli materiaalissa (2) Materiaali on onnistunut (2) Yhteiskuntaopin näkökulman tulisi olla vahvemmin esillä (1)
Ajankäyttö	Aikaa tulisi varata paljon, jos kaikki oppijat käyvät materiaalin kokonaan läpi (3) Materiaalia kannattaisi käyttää pienemmissä osissa (3) Aikaa tulisi varata vähintään neljä oppituntia (5) Työtavat vaikuttavat materiaalin läpikäymiseen kuluvaan aikaan (1)
Oppimateriaalin soveltaminen opetuksessa	Ylöspäin eriyttäminen (4) Materiaalia voisi käyttää ilman, että se pitäisi käydä kerralla loppuun (2) Itsenäinen työskentely (1) Paperinen moniste (7) Sähköinen versio (1)
Oppimateriaalin tehtävät ja pedagoginen näkökulma	Tehtävät soveltuvat eri tasoisille oppijoille (4) Tehtävien määrä (3) Erilaiset tehtävätyypit (9) Pedagoginen näkökulma valittu hyvin (8)
Oppimateriaalin kohderyhmä	Lukio (8) Yläkoulu (1) Ylöspäin eriyttäminen yläkoulussa (4)

Teemahaastatteluissa nousi esille useammissa aineenopettajien kommenteissa oppimateriaalin haastavuus etenkin yläkoululaisten kannalta. Yhdeksi syyksi tähän pidettiin sitä, että oppimateriaalissa saattaa tulla liian paljon uusia sisältöjä, jos oppija ei ole aiemmin tutustunut esimerkiksi lukujonoihin. Eräs aineenopettaja kuvasi, että materiaalin käyttäminen yläkoulussa edellyttäisi runsaasti opettajan ohjausta ja että joidenkin opetusryhmien kanssa oppimateriaalin hyödyntäminen saattaisi olla haasteellista, koska esimerkiksi pelkästään vaalin käsitteen opettamiseen voi kulua runsaasti aikaa.

”Tuli kyllä heti mieleen monta semmoista luokkaa että ajattelen että tota jos näille tän löis eteen niin ei kyllä tulisi yhtään mitään.” (H3, yhteiskuntaoppi)

Yläkoulun näkökulmasta oppimateriaali nähtiin myös kokonaisuutena sen verran haastavana, että heikommin motivoituneet oppilaat eivät välttämättä pysy mukana oppimateriaalin läpikäymisessä. Lukio-opetuksen kannalta oppimateriaali taas voisi haastavuudeltaan sopivalla tasolla, sillä osa aineenopettajista koki oppimateriaalin soveltuvan lukioon koko opetusryhmän kanssa läpikäytäväksi.

Aineenopettajat kiinnittivät oppimateriaalin haastavuuden ohella huomiota sen laajuuteen. Erään aineenopettajan mielestä oppimateriaali on liian laaja, jos se on tarkoitus käydä koko opetusryhmän kanssa läpi yläkoulutasolla. Kyseisen aineenopettajan mukaan oppimateriaali on kuitenkin monipuolinen ja sitä on mahdollista hyödyntää eri tavoilla yläkoulun lisäksi lukiotasolla. Oppimateriaalin laajuuden osalta mainittiin, että sitä voisi säädellä opetuksessa esimerkiksi jättämällä jonkin menetelmän käsittelemättä. Laajuuteen liittyen osa aineenopettajien kommenteista oli toisaalta keskenään ristiriitaisia. Erään aineenopettajan mielestä oppimateriaalissa käsitellään sen sisältöjä riittävän syvällisesti yläkoulun kannalta, kun taas eräs toinen aineenopettaja koki, että sisältöjä käsitellään turhan pitkästi. Oppimateriaalin nähtiin toisaalta sisältävän sopivasti vaihtelua sekä historian ja yhteiskuntaopin sisältöjä.

Oppimateriaalin matemaattisista osuuksista annettiin hyvää palautetta teemahaastatteluissa. Matematiikan esittäminen ja oppimateriaalin esimerkit koettiin selkeiksi. Matemaattisten osuuksien ja esimerkkien nähtiin olevan lisäksi tarkoituksenmukaisia kokonaisuuden kannalta. Eräs aineenopettaja koki esimerkit onnistuneiksi, koska osa niistä käsitteli ennen itse vaalimatematiikan sisältöihin siirtymistä vaalimatematiikkaan liittyviä matemaattisia käsitteitä, kuten lukujonoja. Vaalituloksen laskemista käsittelevät esimerkit koettiin myös hyödyllisiksi, koska ne selventävät, mistä opiskeltavassa asiassa on kyse. Matematiikan osalta yhteiskuntaopin aineenopettajat toivat esille, että matematiikan rooli on oppimateriaalissa vahva ja näkyvä. Eräs yhteiskuntaopin aineenopettaja olikin sitä mieltä, että yhteiskunnallisen näkökulman tuominen enemmän esille voisi parantaa oppimateriaalia.

Laajuus ei ollut ainoa asia, jonka yhteydessä nousi esille ristiriitaisia kommentteja, vaan myös oppimateriaalin onnistumiseen liittyen tuli esille erilaisia näkemyksiä. Etenkin eräs aineenopettaja näki oppimateriaalin sisällön tuottavan mahdollisesti haasteita oppimisen kannalta.

”Arvioisin, että tällä materiaalilla lukiolaisellakin on aika kovasti vaara semmoiselle kuppi nurin -ilmiölle. Että tulee niin paljon, että sitä tavallaan tietoa, että sitten ei pysty enää vastaanottamaan sitä. Että sitten se niin kun mitä saavutetaan lisäarvoa sillä, että käsitellään useita vaihtoehtoisia laskumenetelmiä vs. se vaara, että kuinka moni opiskelija passivoituu sen takia, että ne kokee että ne tipahtaa kärryiltä ja sitten jää se alkuperäinen perusoppimistuloskin vajaaksi niin tuota on mun mielestä ihan huomattava tässä.” (H5, yhteiskuntaoppi)

Oppimateriaalin nähtiin kuitenkin olevan onnistunut ja selkeä. Sisältöjen esittämisen kannalta olennaisimpien asioiden korostaminen lihavoimalla sai positiivista palautetta. Oppimateriaalissa käytettiin myös taulukkoja apuna esimerkiksi vaalituloksen laskemisen jäsentämiseksi, mikä koettiin hyväksi asiaksi. Oppimateriaalin koettiin olevan myös huolellisesti laadittu.

Edellä tuotiin esille aineenopettajien kokemuksia oppimateriaalin laajuudesta. Laajuuden myötä oppimateriaalin läpikäyminen vaatisi aineenopettajien mukaan paljon aikaa, jos tarkoituksena on käsitellä se kokonaan koko opetusryhmän kanssa. Eräs aineenopettaja arvioi, että oppimateriaalin parissa saisi käytettyä jopa yhden kuukauden oppitunnit yläkoulussa, jos oppimateriaali on tarkoitus käydä kaikkien oppilaiden kanssa läpi. Tämä arvio poikkeaa selkeästi usean muun aineenopettajan arviosta, sillä moni aineenopettaja arvioi, että oppimateriaalin läpikäymiseen tulisi varata neljä 45 minuutin oppituntia. Aineenopettajat toisaalta arvioivat, että neljä 45 minuutin oppituntia olisi minimiaika, joka oppimateriaalin läpikäymiseen tarvittaisiin eli enemmänkin aikaa voisi kulua sen parissa. Oppimateriaalin läpikäymiseen kuluvaan aikaan vaikuttavana seikkana mainittiin se, käytetäänkö oppimateriaalia itsenäisen vai opettajajohtoisen työskentelyn yhteydessä. Aineenopettajat ideoivat myös, että oppimateriaalia voisi käyttää pienemmissä osissa. Erään aineenopettajan mukaan tällöin oppimateriaalia voisi hyödyntää sopivissa kohdissa muun opetuksen yhteydessä sen mukaan, mikä on opetusryhmän taso.

Oppimateriaalin ensimmäinen versio laadittiin sillä ajatuksella, että oppimateriaalia käytettäisiin paperisena monisteena. Oppimateriaalin hyödyntäminen paperisena monisteena saikin laajaa kannatusta aineenopettajilta. Paperisen monisteen eduiksi koettiin, että oppijat voisivat tehdä tehtäviä suoraan siihen ja lisätä omia merkintöjään ja muistiinpanoja. Paperisen monisteen etuna nähtiin myös se, että siitä voisi monistaa aina tarpeen mukaan ne sivut, joita on tarkoitus käsitellä opetuksessa. Tämä mahdollistaisi aineenopettajien mielestä oppimateriaalin käyttämisen pienemmissä osissa. Aineenopettajat toivat tässä yhteydessä esille kokemuksiaan siitä, että paperisen monisteen käyttäminen voi olla joillekin oppijoille helpompaa kuin sähköisten monisteiden käyttäminen. Eräs aineenopettaja näki oppimateriaalin käyttämisen sähköisessä muodossa perusteltuna vaihtoehtona, koska silloin oppijat voisivat harjoitella matematiikan kirjoittamista sähköisillä työkaluilla.

Oppimateriaali sisälsi erilaisia tehtävätyyppejä. Tehtävätyypit valikoituivat tämän työn ja oppimateriaalin pedagogisen näkökulman eli WTL:n kautta. Kirjallisiin tuotoksiin tähtäävien tehtävätyyppien hyödyntäminen oli aineenopettajien näkemyksen mukaan onnistunut valinta. Eräs aineenopettaja kuvasi oppimateriaalin pedagogisen näkökulman palvelevan kaikkia oppijoita, minkä lisäksi pedagogisen näkökulman koettiin luovan mahdollisuuksia monipuoliselle työskentelylle.

Erilaisten tehtävätyyppien hyödyntäminen antaa aineenopettajien mukaan mahdollisuuksia opetuksen eriyttämiseen. Oppimateriaali sisälsi käsitekarttatehtävän kvoottimenetelmiin liittyen. Eräs aineenopettaja mainitsi, että kyseistä tehtävää voisi tarjota oppijalle, joka kokee kirjoittamisen haastavaksi. Tehtävätyyppien avulla eriyttämisen näkökulmaksi mainittiin toisaalta se, että eri oppimistavat sopivat eri oppijoille, jolloin on perusteltua hyödyntää monipuolisesti erilaisia tehtävätyyppejä. Tehtävien lukumäärän osalta todettiin teemahaastatteluissa, että oppimateriaali sisälsi yläkoulutason kannalta riittävästi tehtäviä. Osa aineenopettajista koki toisaalta, että tehtäviä voisi olla enemmänkin, koska oppimateriaali itsessään on laaja.

Yleisellä tasolla oppimateriaalin tehtävät koettiin mielekkäiksi, koska niissä ei toisteta pelkästään yhtä tehtävätyyppiä. Tehtävät sisälsivät laskutehtävien ohella enemmän kirjoittamiseen keskittyviä tehtäviä, mitä pidettiin hyvänä asiana. Myös syventävien tehtävien erottaminen muista tehtävistä koettiin hyväksi valinnaksi.

”Nyt ei ole kuitenkaan niinku mitään puhdasta matematiikkaa tämä aihe. On ehdottomasti hyvä, että on muutakin kuin pelkkiä laskutehtäviä.” (H4, matematiikka)

Täydentämistehtävien sisällyttäminen oppimateriaaliin sai positiivista palautetta aineenopettajilta. Täydentämistehtävien etuna nähtiin etenkin se, että ne sopivat myös sellaisille oppijoille, jotka eivät ole kaikkein harjaantuneimpia oppijoita. Toisena etuna mainittiin täydentämistehtävien vaativan oppijalta sitä, että hän tutustuu kunnolla opiskeltavaan tekstiin. Täydentämistehtävien ohella alaluvussa 2.2 esitellyt opiskeltavan tekstin tiivistämiseen keskittyvät mikroteemat nähtiin hyvänä tehtävätyyppinä, koska ne saavat oppijan pohtimaan, mitkä asiat ovat olennaisia nostoja opiskeltavaan aiheeseen liittyen.

Oppimateriaalin luvut alkoivat alaluvussa 2.3 esitellyn KWL-menetelmän mukaisilla johdantotehtävillä, joissa oppija pohtii ennakkotietojaan opiskeltavaan aiheeseen liittyen ja sitä, mitä hän haluaa oppia kyseisestä aiheesta. Johdantotehtävien toimivuus epäilytti osaa aineenopettajista.

”Todennäköisesti ne vastaavat ’en tiedä mitään’. Ja sitten tuo ’mitä haluan tietää’, niin mä en tiedä mitä ne siihen vastaa. Niin kiltit sanoo että haluan tietää ja jotkut sitten ei halua tietää mitään.” (H6, matematiikka)

Johdantotehtävien idea koettiin kuitenkin hyväksi, koska erään aineenopettajan mukaan ennakkotietojen pohtiminen pohjustaa hyvin työskentelyä. Oppimateriaalissa oli mukana mikroteema-tehtävät sekä lukusarja- että kvoottimenetelmistä. Kyseisten tehtävien etuna taas pidettiin sitä, että niiden avulla oppija tulee pohtineeksi, mikä on keskeistä opiskeltavassa aiheessa.

Oppimateriaalin kohderyhmä ja käyttötarkoitus pohditutti aineenopettajia teemahaastatteluissa. Useat aineenopettajat kokivat, että oppimateriaali soveltuisi paremmin lukiotasolla kuin yläkoulussa käytettäväksi. Perusteluksi esitettiin, että materiaalin haastavuuden myötä lukiolaiset voisivat olla soveltuvampi kohderyhmä kuin yläkoululaiset. Lisäksi koettiin, että oppimateriaali soveltuisi kokonaisuutena paremmin lukiotasolle. Lukiotasoa perusteltiin myös siitä näkökulmasta, että oppimateriaalin aihe voisi olla kiinnostavampi lukiolaisille kuin yläkoululaisille, koska vaaleissa äänestäminen on lukiolaisille ajankohtaisempaa heidän ikänsä puolesta. Lukiomatematiikan osalta todettiin, että oppimateriaali soveltuisi vaikeustasonsa puolesta sekä pitkän että lyhyen matematiikan opetuksessa käytettäväksi.

Eräs aineenopettaja ideoi, että oppimateriaalia voisi hyödyntää lukiossa yhteiskuntaopin opetuksen yhteydessä ilman, että matematiikan opettaja olisi käymässä oppimateriaalin matemaattisia osuuksia läpi. Kyseinen aineenopettaja perusteli ajatustaan sillä, että lukiolaisten matemaattisen osaamisen tulisi olla sillä tasolla, että he selviävät oppimateriaalin matemaattisista tehtävistä itsenäisesti. Lukion yhteiskuntaopin opetukseen liittyen tuotiin myös esille, että oppimateriaalia voisi käyttää yhteiskuntaopin pakollisten kurssien yhteydessä.

Oppimateriaalin yhdeksi käyttötarkoitukseksi nousi ylöspäin eriyttäminen yläkoulussa, johon liittyen aineenopettajat toivat esille erilaisia vaihtoehtoja. Erään aineenopettajan mielestä ylöspäin eriyttämistä voisi toteuttaa antamalla oppimateriaali itsenäisesti suoritettavaksi tehtäväksi, koska hänen mukaansa oppimateriaali sisältää selkeät ohjeet sen läpikäymiseksi. Itsenäisen työskentelyn toteutustavaksi mainittiin myös se, että oppimateriaali voisi olla vapaaehtoinen lisätehtävä, jota oppija voisi omalla ajallaan tehdä tietyn aikaa ja palauttaa sen jälkeen vastaukset opettajalle. Yhtenä vaihtoehtona esille nousi oppimateriaalin käyttäminen pienemmissä osissa. Tällöin opettaja voisi poimia mukaan opetukseensa oppimateriaalista olennaisiksi kokemansa aihealueet. Eräs aineenopettaja nosti esille, että opettaja voisi tässä yhteydessä eriyttää opetusta esimerkiksi käsittelemällä d’Hondtin menetelmän yhteisesti koko opetusryhmän kanssa, jonka jälkeen muita menetelmiä käsitteleviä osuuksia voisi antaa nopeammin eteneville oppijoille. Kyseinen aineenopettaja koki, että oppimateriaalin d’Hondtin menetelmää käsittelevää osuutta voisi käyttää yläkoulutasolla koko opetusryhmän kanssa.

7. YHTEENVETO JA POHDINTA

Tässä luvussa arvioidaan työssä saatuja tutkimustuloksia. Lisäksi käydään läpi, kuinka oppimateriaalin toinen versio kehitettiin ja mitä sen myöhempien versioiden kehittämisessä on hyvä huomioida. Lopuksi käsitellään työn luotettavuutta ja eettisiä näkökulmia.

7.1 Pohdintaa tutkimustuloksista

Tässä alaluvussa tarkastellaan ja pohditaan luvussa 6 esiteltyjä tutkimustuloksia tutkimuskysymys kerrallaan.

7.1.1 Oppiainerajat ylittävien oppimiskokonaisuuksien rakentuminen

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden [56, s. 31] mukaan opetuksen eheyttämisen eli esimerkiksi eri oppiaineiden muodostamien integroitujen kokonaisuuksien kestojen ei tarvitse olla aina yhtä pitkiä, vaan kokonaisuuksien kestot voidaan valita sopiviksi oppilaiden tarpeisiin ja opetuksen tavoitteisiin nähden. Tämä näkökulma välittyy myös tutkimustuloksista. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa painotetaan lisäksi, että tällaisen oppimiskokonaisuuden keston tulee olla riittävä sen kannalta, että oppilailla on mahdollisuuksia perehtyä ja työskennellä kunnolla sen aiheiden parissa. Tutkimustulosten perusteella aineenopettajat tiedostavat tämän seikan, sillä monialainen oppimiskokonaisuus voi heidän mukaansa olla selkeästi pidempi kuin yksittäisten oppituntien laajuinen kokonaisuus.

Aineenopettajat kuvasivat, että oppiainerajat ylittävissä oppimiskokonaisuuksissa voi olla mukana OPS:n sisältöjen ohella OPS:n ulkopuolelta tulevia sisältöjä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet [56, s. 31–32] ei ota kantaa siihen, onko kokonaisuuksien aiheet sen sisältä vai ei, jolloin kokonaisuuksien aiheiden valinnassa voi käyttää luovuutta. Sekä perusopetuksen [56, s. 31] että lukion [47, s. 19] opetussuunnitelmien perusteet nostavat esille eri tiedonalojen välisten yhteyksien tunnistamisen, jolloin siihen keskittyminen olisi perusteltua aiheiden valitsemisessa. Sen toteuttaminen käytännössä voi olla haasteellista, koska tutkimustuloksien mukaan toisiinsa linkittyviä aiheita ei aina opeteta samojen vuosiluokkien aikana. Tämä taas hankaloittaa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden [56, s. 32] vaatimusta siitä, että monialaisissa oppimiskokonaisuuksissa tehdään yhteistyötä eri oppiaineiden välillä.

Tutkimustuloksissa huomattiin, että oppiainerajoja ylittävä oppimateriaali voi antaa mahdollisuuksia opetuksen eriyttämiseen, mutta sitä pitäisi pystyä käyttämään koko opetusryhmän kanssa. Tämä tulos on hyvin linjassa opetussuunnitelmien kanssa, sillä perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [56, s. 31] tuodaan esille kaikkien oppilaiden mahdollisuus osallistua opetusta eheyttäviin kokonaisuuksiin. Lukion opetussuunnitelman perusteet [47, s. 20] puhuu puolestaan yhdenvertaisista opiskelumahdollisuuksista opiskelumenetelmiin liittyen.

Tutkimustulosten perusteella voidaan todeta, että historiaviittausten tekeminen muiden kuin historian oppiaineen yhteydessä voi esimerkiksi motivoida oppijoita ja toimia tapana toteuttaa oppiainerajat ylittävää opetusta. Lukion opetussuunnitelman perusteissa [47, s. 280] historian oppiaineen yhdeksi näkökulmaksi kuvataan eri aikakausien välisten yhteyksien tutkiminen. Tällöin historiaviittausten tekeminen voidaan nähdä tavaksi luoda kontekstia opiskeltavalle aiheelle, mikä tulee esille myös tutkimustuloksissa.

7.1.2 Vaalimatematiikan soveltuvuus opetettavaksi aiheeksi

Tutkimustuloksista selvisi, että vaalimatematiikka sopii aiheena matematiikan soveltamiseksi muiden oppiaineiden yhteydessä. Tutkimustulosten ohella perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet [56, s. 31] tukee tätä näkemystä, koska sen mukaan opetusta eheytettäessä eri oppiaineiden opetuksessa ja oppiainerajat ylittävässä työskentelyssä mielenkiinnon kohteena ovat arjessa ja yhteiskunnassa näkyvät ilmiöt ja teemat. Vaalimatematiikkaa voi pitää perustellusti tällaisena ilmiönä, koska esimerkiksi 2020- ja 2030-lukujen taitteessa toimitetaan Suomessa yleisiä valtakunnallisia vaaleja lähes vuosittain ja joinakin vuosina toimitetaan useammat kuin yhdet vaalit [49]. Lisäksi julkisuudessa seurataan muualla maailmassa toimitettavia vaaleja.

Peruopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [56, s. 32] kuvataan, että monialaisissa oppimiskokonaisuuksissa sisältöjen valintaan vaikuttaa mahdollisuudet tehdä yhteistyötä eri oppiaineiden välillä. Vaalimatematiikkaa voidaan pitää myös tästä näkökulmasta mielekkäänä aihevalintana opetuksen eheyttämiseksi, koska se tarjoaa keinon matematiikan ja yhteiskuntaopin opetuksen yhteistyölle. Yhteistyön mahdollisuuksia lisää se, että vaalimatematiikkaan liittyviä teemoja löytyy opetussuunnitelmien perusteista sekä matematiikan että yhteiskuntaopin sisältöjen yhteydestä, kuten alaluvussa 5.3.1 kuvataan.

Luvussa 3 on kuvattu, kuinka suhteellista vaalitapaa voidaan mallintaa ja tutkia matemaattisesta näkökulmasta. Lukion opetussuunnitelman perusteet [47, s. 221–222] luonnehtii, että matematiikan opiskelun myötä opiskelijan tulisi saada käsitystä matematiikan merkityksestä yhteiskuntatieteiden kannalta ja siitä, että matematiikka antaa keinoja yhteiskunnan ilmiöiden kuvaamiseen. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet [56, s. 374] puolestaan mainitsee matematiikan opetuksen yhdeksi tavoitteeksi matematiikan hyödyllisyyden tunnistamisen yhteiskunnan kannalta. Nämä tavoitteet alleviivaavat vaalimatematiikan soveltuvuutta opetettavaksi aiheeksi ja tukevat aineenopettajien näkemystä siitä, että vaalimatematiikan avulla matematiikkaa voisi liittää osaksi muita oppiaineita.

Aineenopettajien mielestä vaalimatematiikkaa käsittelevään oppimiskokonaisuuteen voisi käyttää 1–2 oppitunnin verran aikaa. Tämä lienee realistinen arvio etenkin siihen nähden, kuinka paljon opetettavia sisältöjä on entuudestaan matematiikassa ja yhteiskuntaopissa. Vaalimatematiikka ei ole suoraan opetussuunnitelmien perusteiden osana, jolloin aineenopettajat voivat kokea hyödyllisemmäksi opetussuunnitelmien sisällöissä pitäytymisen. Opetussuunnitelmien sisältöihin keskittyminen tuli esille myös teemahaastatteluissa tutkittaessa, kuinka oppiainerajat ylittävä oppimiskokonaisuus voisi rakentua. Opetussuunnitelmien perusteita analysoitaessa alaluvussa 5.3.1 huomattiin lisäksi vaalimatematiikkaan liittyvien matemaattisten aiheiden sisältyvän muihin matematiikan opetuksen sisältöalueisiin. Tämän myötä voi olla niin, että matematiikan opetuksessa aineenopettajat haluavat keskittyä opetussuunnitelmien sisältöihin sen sijasta, että opetus rakentuisi vahvasti matematiikkaa soveltavien aiheiden ympärille. Yhteiskuntaopin opetuksen osalta huomattiin alaluvussa 5.3.2 suhteellisen vaalitavan olevan lähinnä yksi osa niitä aihealueita, joiden yhteydessä sitä käsitellään yhteiskuntaopin oppikirjoissa. Tämäkin vaikuttanee aineenopettajien näkemyksiin vaalimatematiikan käsittelyn laajuudesta.

Alaluvussa 5.3.2 kuvattiin, että yläkoulun yhteiskuntaopin oppikirjoissa käydään d’Hondtin menetelmään perustuen läpi, kuinka vertausluvut lasketaan suhteellisissa vaaleissa, minkä lisäksi Forum 9 -oppikirjassa käytettävän menetelmän kerrotaan olevan nimenomaan d’Hondtin menetelmä. Tällöin aineenopettajien ajatus siitä, että d’Hondtin menetelmä sopisi yläkoulussa opetettavaksi aiheeksi on varsin luonnollinen. Toisaalta voidaan ajatella niin, että d’Hondtin menetelmän käsittelemistä yläkoulutasolla ei tarvitse erikseen erityisemmin perustella, koska se tuodaan esille yläkoulun yhteiskuntaopin oppikirjoissa. Sekä yläkoulun että lukion yhteiskuntaopin oppikirjoissa havaittiin d’Hondtin menetelmän tarkastelemisen olevan keskeisessä roolissa. D’Hondtin menetelmään keskittyminen on myös aineenopettajien mukaan perusteltua. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [56, s. 31] puhutaan kuitenkin ”todellisen maailman ilmiöiden” käsittelemisestä opetusta eheytettäessä. Tällöin olisi tärkeätä tuoda opetuksessa esille se, että d’Hondtin menetelmä on vain yksi tapa vaalituloksen määrittämiseksi, kuten aineenopettajat esittivät teemahaastatteluissa.

D’Hondtin menetelmän opettamista yläkoulutasolla puoltaa myös se, että aineenopettajat eivät pitäneet sitä yläkoululaisten kannalta liian haastavana aiheena. Aineenopettaja, joka kertoi käyttävänsä yläkoulun matematiikan opetuksessa yhden oppitunnin d’Hondtin menetelmän opettamiseen, kuvasi vähintään keskimääräiset taidot omaavien oppilaiden oppivan d’Hondtin menetelmän idean yhdessä oppitunnissa. Eräs toinen aineenopettaja luonnehti puolestaan, että oppimateriaalin lukusarjamenetelmiä käsittelevää lukua voisi käydä läpi jo kahdeksasluokkalaisten kanssa.

Tutkimustulosten perusteella aineenopettajien on tiedostettava, että oppijoilla voi olla virhekäsityksiä vaalimatematiikkaan liittyen. Tällöin tulee arvioida, riittääkö aineenopettajien ehdottama 1–2 oppitunnin laajuinen oppimiskokonaisuus virhekäsitysten tunnistamiseksi ja torjumiseksi. Vaalimatematiikan opettamiseen olisi joka tapauksessa tärkeätä varata riittävästi aikaa, jotta sen käsittelemisessä voidaan tarkastella uutta opiskeltavaa aihetta riittävän syvällisesti. Eräs aineenopettaja mainitsi tähän liittyen teemahaastatteluissa, että jos opetuksessa vain sivutaan nopeasti jotakin aihetta, niin se ei aina edistä oppimista erityisen paljoa. Käytettävissä olevan ajan ohella opetettavan aiheen tunteminen on tässä yhteydessä olennaista ja aineenopettajan on tärkeätä korostaa niitä asioita, joihin virhekäsitykset voivat liitttyä. Aineenopettajalle itselleen tulee täten olla selvää ennen suhteellisen vaalitavan käsittelemistä opetuksessaan, miksi esimerkiksi vuoden 2023 eduskuntavaaleissa Uudenmaan vaalipiirissä [52, Valitut] Suomen Keskustan Eerikki Viljanen valittiin eduskuntaan 2 787 äänellä, kun taas Suomen ruotsalaisen kansanpuolueen Mikaela Nylander jäi valitsematta 4 794 äänellä.

7.1.3 Aineenopettajien näkemykset oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta

Tutkimustuloksissa nousi esille aineenopettajien kokemus siitä, että oppimateriaali on haastava. Tulos on ristiriitainen, koska aineenopettajat pitivät esimerkiksi d'Hondtin menetelmää jo yläkoulutasolle soveltuvaksi aiheena. Samoin kvoottimenetelmiä luonnehdittiin ylöspäin eriyttämiseen sopivaksi aiheeksi yläkoulutasolla. Tutkimustuloksista ei kuitenkaan täysin suoraan selviä, mitkä tekijät saavat oppimateriaalin vaikuttamaan haastavalta. Yksi syy oppimateriaalin haastavuudelle voi olla se, että siinä käsitellään suhteellista vaalitapaa laajasti. Tällöin kokonaisuuden hallitseminen ja matematiikan ja yhteiskuntaopin sisältöjen yhdistäminen voi olla haastavaa oppijoille. Aineenopettajat kokivat myös, että oppimateriaalin läpikäyminen edellyttää oppijoilta aiempaa osaamista sen aiheisiin liittyen. Jos aiempi osaaminen puuttuu oppijalta, oppimateriaalin haastavuus todennäköisesti kasvaa. Eräs aineenopettaja piti Sainte-Laguën, Haren ja Droopin menetelmiä matemaattisesti haastavampina d'Hondtin menetelmään verrattuna. Tällöin oppimateriaali voi näyttäytyä oppijalle haastavana kokonaisuutena, jos hänen matemaattisen osaamisensa pohjalta jo d'Hondtin menetelmän käsitteleminen tuottaa vaikeuksia.

Oppimateriaalin haastavuudesta yläkoulun näkökulmasta kertoo toisaalta se, että aineenopettajat pitivät lukiolaisia yläkoululaisia soveltuvampana kohderyhmänä oppimateriaalille. Haastavuutta selittänee myös se, että yläkoulutasolla oppimateriaalin käyttötarkoitukseksi esitettiin ylöspäin eriyttämistä. Oppimateriaalin haastavuuden arvioimisen osalta herää kuitenkin se kysymys, ovatko aineenopettajat tarkastelleet sitä lähinnä kaikkien oppijoiden näkökulmasta sen sijasta, että he olisivat pohtineet kattavasti, kuinka suurelle osalle oppijoista oppimateriaali voisi soveltua. Teemahaastatteluissa olisikin ollut hyödyllistä ja tärkeätä lähteä selvittämään kattavammin, mikä tekee oppimateriaalista haastavan, koska useampi aineenopettaja piti sitä haastavana.

Aineenopettajat kokivat oppimateriaalin näkökulman olevan selkeästi vaalien matemaattisessa tarkastelussa, mihin liittyen esille nousi ajatuksia siitä, että oppimateriaalissa voisi käsitellä vaaleja enemmän yhteiskunnallisena ilmiönä. Tämä on perusteltu näkemys, koska vaalimatematiikan aihealueet ovat opetussuunnitelmien perusteissa kiinteämmin osana yhteiskuntaopin kuin matematiikan sisältöjä, kuten alaluvussa 5.3.1 todetaan. Esimerkiksi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [56, s. 31–32] ei kuitenkaan oteta siihen kantaan, kuinka suuressa roolissa kunkin oppiaineen tulee olla opetusta eheyttävissä kokonaisuuksissa. Tätä taustaa vasten matematiikan roolin painottuminen oppimateriaalissa ei ole ongelma.

Ajankäytön kannalta perustelluin vaihtoehto oppimateriaalin hyödyntämiseksi opetuksessa olisi sen läpikäyminen pienissä osissa, mitä myös aineenopettajat ehdottivat. Aineenopettajien pääasiallinen arvio oppimateriaalin läpikäymiseen kuluvaksi ajaksi oli neljä oppituntia, mutta heidän mielestään vaalimatematiikkaa voisi käsitellä opetuksessa yleisesti ottaen 1–2 oppitunnin verran. Tällöin ei ole välttämättä realistista, että opetuksesta olisi mahdollista irrottaa neljä oppituntia tätä oppimateriaalia ja sen aiheita varten. Eräs aineenopettaja totesikin oppiainerajoja ylittävien oppimiskokonaisuuksien laajuuden osalta, että esimerkiksi 3–4 oppitunnin varaaminen niitä varten voi olla haastavaa joissakin kouluissa. Jos oppimateriaalia käytetään itsenäisen työskentelyn osana, tulisi selvittää, kuinka kauan minkäkin tasoisilla oppijoilla kuluu aikaa oppimateriaalin itsenäiseen läpikäymiseen. Tässä yhteydessä olisi hyödyllistä selvittää, eroaako oppimateriaalin läpikäymiseen kuluva aika siihen verrattuna, että oppimateriaalia käydään läpi opettajajohtoisessa opetuksessa.

Edellä on tuotu esille sekä tutkimustuloksiin että opetussuunnitelmien perusteisiin pohjautuen, että oppiainerajoja ylittävän oppimateriaalin tulisi soveltua koko opetusryhmälle. Tässä työssä kehitetty oppimateriaali vastaa tähän vaatimukseen ainakin osittain. Oppimateriaalin pedagogisen näkökulman tarkoituksena oli tuoda oppimateriaalin laskutehtävien ohella erilaisia kirjoittamista tukevia tehtäviä ja sitä pidettiin onnistuneena valintana. Pedagoginen näkökulma on myös perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden [56, s. 30] näkökulmasta mielekäs, sillä sen mukaan erilaiset työtavat auttavat oppijaa osaamisensa esille tuomisessa. Oppimateriaalin kuvailtiin lisäksi soveltuvan lukion yhteiskuntaopin pakollisilla kursseilla käytettäväksi ja sen d'Hondtin menetelmään liittyvää osuutta olisi mahdollista käsitellä yläkoulussa koko opetusryhmän kesken. Se, kuinka hyvin oppimateriaali todellisuudessa soveltuu yläkouluun ja lukioon eritasoisille oppijoille, saataisiin selville vasta testattaessa oppimateriaalia oppijoiden kanssa. Tässä työssä saatujen tutkimustulosten perusteella on todennäköistä, että oppimateriaali sopii paremmin lukioon koko opetusryhmän kanssa käytettäväksi yläkouluun verrattuna.

Käsitellään seuraavaksi oppimateriaalissa käytettyihin tehtävätyyppeihin liittyviä havaintoja. Alaluvussa 2.4 kuvattiin lauseiden täydentämistehtävien olevan hyödyllisiä niille oppijoille, jotka eivät ole kaikkein harjaantuneimpia kirjoittajia. Myös aineenopettajat jakoivat tämän saman näkemyksen. KWL-menetelmän olennaisena osana on selvittää, mitä ennakkotietoja oppijoilla on opiskeltavan aiheen osalta, minkä hyödyllisyys nousi esille tutkimustuloksissa. Mikroteemojen eduksi tehtävätyyppinä aineenopettajat kokivat puolestaan sen, että ne saavat oppijan kiinnittämään huomiota opiskeltavan aiheen tärkeimpiin seikkoihin, mikä on mikroteemojen kirjoittamisen tavoitteena [25]. Erilaisten tekstien kirjoittaminen ei ole ainoa keino tiedon tiivistämiseksi, vaan sitä voidaan tehdä myös käsitekarttojen avulla [48, s. 419]. Jokaisen oppijan olisi tärkeätä pystyä tiivistämään tietoa. Tämän vuoksi on hyvä, että oppimateriaalissa oli mukana käsitekarttatehtävä, koska teemahaastattelujen mukaan niillä voitaisiin tukea niitä oppijoita, jotka eivät ole kaikkein edistyneimpiä kirjoittajia.

Yhteenvetona oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta voidaan todeta, että sen haastavuus jää joissain määrin epäselväksi. Oppimateriaali saattaa olla myös turhan laaja sen kannalta, että sitä olisi mahdollista käsitellä kokonaisuudessaan opetuksessa. Näistä haasteista huolimatta oppimateriaalia pidettiin selkeänä ja sen pedagogista näkökulmaa hyvin valittuna. Vaikka oppimateriaalin kohderyhmä herätti aineenopettajissa kysymyksiä, tarjoaa oppimateriaali erilaisia mahdollisuuksia, koska sen koettiin soveltuvan käytettäväksi sekä yläkoulussa että lukiossa. Oppimateriaalin testaamisen avulla voitaisiin selvittää, missä yhteydessä se toimisi kaikkein parhaiten.

7.2 Jatkokehittäminen

Tässä alaluvussa käsitellään oppimateriaalin ensimmäisen version jatkokehittämistä. Alaluvussa 7.2.1 kuvataan, kuinka liitteessä B esitetty oppimateriaalin toinen versio kehitettiin sen ensimmäisen version pohjalta teemahaastatteluihin tukeutuen. Liite C sisältää malliratkaisut oppimateriaalin tehtäviin. Jatkokehitysideoita ja vaihtoehtoja oppimateriaalin myöhempien versioiden kehittämiselle esitetään alaluvussa 7.2.2.

7.2.1 Oppimateriaalin toisen version kehittäminen

Toisen version kehittämisen yhteydessä tarkennettiin ja muokattiin sekä luvussa 2 esiteltyä pedagogista viitekehystä että alaluvussa 5.3 läpikäytyä ongelma-analyysiä. Pedagogiseen viitekehykseen oli alun perin tarkoituksena ottaa visuaalinen oppiminen yhdeksi näkökulmaksi. Työn pedagogista viitekehystä valittaessa ideana oli lisäksi tarkentaa WTL:n tarkastelua keskittymään matematiikan oppimisen tukemiseen kirjoittamisen avulla, johon viitataan englanninkielisessä kirjallisuudessa termillä *writing-to-learn-mathematics,* *WTLM* (katso esimerkiksi [68]). Aineenopettajat pitivät WTL:ää onnistuneena valintana pedagogiseksi viitekehykseksi, minkä vuoksi se rajattiin toisen version kehittämisen aikana keskittymään nimenomaan WTL:ään ja erilaisiin kirjoittamista tukeviin tehtävätyyppeihin. Toisen version kehittämisen yhteydessä todettiin myös, että WTL:n tutkiminen riittää tarpeeksi laajan pedagogisen viitekehyksen luomiseen. WTL:ää tarkemmin tutkittaessa perehdyttiin siihen, kuinka lauseiden täydentämistä (katso alaluku 2.4) ja ennakkojäsentäjiä (katso alaluku 2.5) voidaan soveltaa tehtävätyyppeinä.

Alaluvun 5.3 ongelma-analyysiin lisättiin perusopetuksen vuoden 2014 [56] ja lukion vuoden 2019 [47] opetussuunnitelmien perusteita käsittelevä alaluku 5.3.1. Oppimateriaalin ensimmäisen version kehittämisen yhteydessä tutustuttiin siihen, kuinka vaalimatematiikka näkyy yhteiskuntaopin oppikirjoissa. Opetussuunnitelmien perusteisiin tutustumisen avulla pystyttiin laajentamaan kuvaa siitä, mikä on vaalimatematiikkaan liittyvien aiheiden rooli opetussuunnitelmissa. Samalla selvitettiin, mikä on opetussuunnitelmien perusteiden näkökulma oppiainerajoja ylittäviin oppimiskokonaisuuksiin.

Teemahaastatteluissa nousi esille useita erilaisia kehitysehdotuksia oppimateriaalin sisällön ja aiherajauksen osalta. Aineenopettajien ohella kehitysehdotuksia ovat antaneet tämän työn ohjaajat. Lisäksi työn tekijän itse huomaamia kehitystarpeita on toteutettu. Kaikkia kehitysehdotuksia ei toteutettu, vaan vain osa niistä toteutettiin oppimateriaalin laajuuden rajaamiseksi ja diplomityön tekemiseen käytettävissä olevan ajan vuoksi. Kehitysehdotuksista lähdettiin toteuttamaan vain sellaisia ehdotuksia, jotka olivat toteutettavissa järkevällä työmäärällä ja jotka eivät kasvattaneet oppimateriaalin laajuutta paljoa. Lisäksi pääpainona oli oppimateriaalin matemaattisiin sisältöihin liittyvät ja oppimateriaalin selkeyttä parantavat kehitysehdotukset. Yhteiskuntaopin sisältöjä käsitteleviä korjausehdotuksia toteutettiin rajallisesti, koska oppimateriaali suunnattiin toista versiota kehitettäessä käsittelemään suhteellista vaalitapaa matemaattisena ilmiönä.

Oppimateriaalin käyttömahdollisuudet ja sen läpikäymiseen kuluva aika olivat teemahaastatteluissa käsiteltyjä aiheita. Näihin aiheisiin saatujen vastausten perusteella oppimateriaalin toisen version johdantoon ja oppimistavoitteita kuvaavaan lukuun on lisätty ehdotuksia siitä, millä tavalla oppimateriaalia voisi käyttää osana opetusta. Samassa yhteydessä annetaan ehdotus oppimateriaalin ajankäyttösuunnitelmasta. Lisäksi kerrotaan, mitkä oppimateriaalin sivut ovat oppijan ja mitkä opettajan käyttöön, koska esimerkiksi lähdeluetteloa ei ole välttämättä tarpeellista antaa oppijoille. Tämän jaon selkeyttämiseksi opettajan käyttöön tarkoitetut luvut erotettiin muista luvuista lisäämällä teksti *Vain opettajalle* kyseisten lukujen otsikoihin. Jotta opettajan olisi mahdollisimman helppoa poimia materiaalista opetukseensa sopivia lukuja ja tehtäviä, on kunkin tehtävän yhteyteen lisätty tieto siitä, mitä aihetta tehtävä käsittelee. Oppimateriaalin käytön helpottamiseksi laadittiin lisäksi malliratkaisut oppimateriaalin tehtäviin.

Matemaattisten merkintöjen esittämisen parantamiseksi kaavaeditorilla kirjoitettuja kaavoja on aseteltu enemmän omille riveilleen, jotta niiden ulkoasu on luettavampi. Ensimmäiseen versioon verrattuna on lisätty myös olennaisten asioiden korostamista lihavointien avulla, koska siitä annettiin positiivista palautetta teemahaastattelujen yhteydessä. Oppimateriaalin eri lukujen ja alalukujen asettelussa kiinnitettiin huomiota siihen, että virkkeet ja tekstipätkät eivät katkea sivunvaihtojen yhteydessä. Sama tarkastelu on tehty myös tehtävien kohdalla. Tällöin opettajan on helppo tulostaa käyttöön juuri ne sivut, jotka sisältävät ne osiot, joita hän haluaa opetuksessaan hyödyntää.

Oppimateriaalin tehtäväosioiden selkeyttämiseksi KWL-menetelmää hyödyntävät tehtävät jaettiin kahteen osaan. Lukusarja- ja kvoottimenetelmiä käsittelevien lukujen alussa on nyt KWL-menetelmässä täydennettävästä Taulukosta 2.1 kaksi ensimmäistä saraketta. Kolmas sarake, jossa kerrotaan, mitä työskentelyn aikana on opittu, on sijoitettu omaksi taulukokseen niiden tehtävien yhteyteen, joissa pyydetään täyttämään se. Tällöin oppijalle tulisi olla selkeämpää, mikä ja millä sivulla oleva taulukko halutaan täydentää. Selkeyteen on pyritty myös lisäämällä eri menetelmien antamia vaalituloksia esittävien kuvien yhteyteen taulukot, joissa on listattu kuvissa käytettävät puolueiden nimilyhenteet. Lisäksi oppimateriaalin sanallisten osuuksien kohdalla on keskitytty selkeiden ja tiiviiden ilmaisujen käyttämiseen.

Teemahaastatteluissa nousi esille vaalituloksen laskemiseen liittyviä virhekäsityksiä, joista yksi oli vertauslukujen laskeminen virheellisellä algoritmilla. Oppimateriaalin d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmiä käsittelevissä osuuksissa käydään läpi, kuinka vertausluvut lasketaan kyseisiä menetelmiä käytettäessä, minkä yhteydessä korostetaan nyt, että jaettavana lukuna on koko ajan listan kokonaisäänimäärä. Matemaattisten termien ohella oppimateriaalissa käytetään erilaisia vaaleihin ja yhteiskuntaoppiin liittyviä termejä, joista kaikkia ei ollut avattu sanallisessa muodossa oppimateriaalin ensimmäisessä versiossa. Toiseen versioon on lisätty enemmän sanallisia selityksiä näistä termeistä, kuten äänikynnyksestä ja muunnetusta Sainte-Laguën menetelmästä.

Toista versiota kehitettäessä tarkasteltiin, onko ensimmäisessä versiossa joitakin sellaisia sisältöjä, joita voisi tiivistää oppimateriaaliin laajuuden rajaamiseksi. Tiivistämistä tehtiin tämän myötä historiaosuuksien kohdalla, jotta ne keskittyvät olennaisiin asioihin. Teemahaastatteluissa tuotiin esille Suomen ensimmäisiä eduskuntavaaleja käsittelevään osuuteen liittyen, että se oli turhan syvällinen, koska siinä kuvattiin, millaisia ehdokaslistat ovat olleet kyseisissä vaaleissa. Ehdokaslistojen kuvaileminen on jätetty täten pois ja samalla periaatteella on tiivistetty myös kvoottimenetelmien historiaa käsittelevää osuutta, jossa kuvataan Alabaman paradoksia.

Täydentämistehtävät nousivat esille teemahaastatteluissa ja niitä pidettiin mielekkäinä tehtävätyyppeinä. Tämän myötä toiseen versioon lisättiin kaksi täydentämistehtävää. Oppimateriaalin ensimmäinen versio sisälsi yhden täydentämistehtävän, jossa oppijan tuli täydentää puuttuvat sanat annettuun tekstiin. Uudet täydentämistehtävät ovat lähempänä alaluvussa 2.4 esiteltyjä lauseiden täydentämistehtäviä, joissa oppija täydentää tyhjiin kohtiin yksittäisten sanojen sijasta yhtenäisempää tekstiä. Toiseen versioon lisättiin näiden lauseiden täydentämistehtävien lisäksi d'Hondtin menetelmää käsittelevä laskutehtävä, koska aineenopettajat toivat esille d'Hondtin menetelmän keskeisyyden.

Kvoottimenetelmien tehtävissä on yhtenä tehtävänä käsitekartan täydentäminen. Tehtävän helpottamiseksi mukaan on lisätty vihjetekstejä kuvaamaan, mitä asioita käsitekarttaan tulisi täydentää. Vihjetekstien osalta tuli palautetta siitä, että niitä voisi asetella selkeämmin, jotta niistä näkisi, mihin ne liittyvät käsitekartassa. Tämän myötä käsitekartan visuaalista ilmettä ja vihjetekstien asettelua on muokattu toista versiota varten.

7.2.2 Oppimateriaalin myöhempien versioiden kehittäminen

Ennen oppimateriaalin myöhempien versioiden kehittämisen aloittamista tulisi testata oppimateriaalin toista versiota sekä yläkoulussa että lukiossa. Ideaalia olisi, jos testaukseen olisi käytettävissä vähintään neljän 45 minuutin oppitunnin verran aikaa, koska aineenopettajat arvioivat sen verran kuluvan aikaa oppimateriaalin läpikäymisessä. Tällöin ehdittäisiin todennäköisesti käsittelemään sekä lukusarja- että kvoottimenetelmien osuuksia oppimateriaalista, mikä olisi olennaista oppimateriaalin toimivuuden arvioimisen kannalta. Tutkimustulosten perusteella neljän oppitunnin varaaminen opetuksesta tätä oppimateriaalia varten voi olla epärealistista, jolloin yksi vaihtoehto testaamisen toteuttamiseksi voisi olla oppimateriaalin testaaminen yhden kaksoistunnin verran. Tällöin nähtäisiin, kuinka pitkälle eri tasoiset oppijat pääsevät oppimateriaalissa, mikä auttaisi sen arvioimisessa, kuinka paljon aikaa kuluisi, jos oppimateriaali käytäisiin kokonaan läpi.

Oppimateriaalin testaukseen käytettävän ajan ohella tulee kiinnittää huomiota siihen, minkä tyyppisen opetuksen yhteydessä testaus suoritetaan. Itsenäinen työskentely nousi esille tutkimustuloksissa yhdeksi vaihtoehdoksi oppimateriaalin käyttämiseksi opetuksessa, jolloin opettajajohtoisen työskentelyn lisäksi oppimateriaalia tulisi testata itsenäisen työskentelyn yhteydessä. Jotta erilaisista tavoista hyödyntää oppimateriaalia saataisiin monipuolisesti kokemuksia, oppimateriaalia olisi hyvä testata luokkahuoneessa tapahtuvan itsenäisen työskentelyn lisäksi siinä yhteydessä, kun oppimateriaali on itsenäisesti omalla ajalla suoritettava lisätehtävänä. Tämänkaltaista testausta on mahdollisesti helpompi toteuttaa yläkoulussa kuin lukiossa, koska itsenäisesti suoritettaville lisätehtäville jäänee lukiotasolla rajallisesti aikaa opintojen laajuuden ja työmäärän vuoksi. Erilaisten työtapojen testaamisen ohella olisi mielekästä päästä testaamaan oppimateriaalia matematiikan ja yhteiskuntaopin opetuksen yhteistyönä, koska oppimateriaalin ideana on muodostaa näiden oppiaineiden sisällöistä mielekäs ja hyödyllinen kokonaisuus.

Oppimateriaalin haastavuuden selvittäminen testaamisen avulla on keskeistä ennen myöhempien versioiden kehittämisen aloittamista, koska oppimateriaalin haastavuus ei täysin selvinnyt tämän työn yhteydessä. Jatkokehittämisen kannalta voisi olla hyödyllistä tutkia testaamisen yhteydessä, kokevatko sekä matematiikan että yhteiskuntaopin aineenopettajat oppimateriaalin yhtä haastavaksi. Jos aineenopettajien välillä syntyy eroja sen perusteella, mikä on heidän opetettava aineensa, voi sillä olla vaikutusta siihen, kuinka todennäköisesti he käyttävät oppimateriaali jatkossa opetuksessaan. Etenkin yhteiskuntaopin opettajien kohdalla olisi kiinnostavaa saada käsitystä siitä, millä tavalla heidän oma matemaattinen osaamisensa vaikuttaa oppimateriaalin käyttämiseen ja ylipäänsä vaalimatematiikan aiheiden opettamiseen.

Tutkimustulosten perusteella voidaan arvioida, että oppimateriaalin matemaattinen sisältö on yksi tekijä, joka saa sen näyttäytymään haastavana kokonaisuutena. Oppimateriaalin matemaattisen sisällön haastavuuden arvioimiseen tulisikin kiinnittää huomiota testauksen yhteydessä. Matemaattisten sisältöjen arvioimisessa olisi mielekästä saada oppijoilta kokemuksia siitä, kuinka haastavilta oppimateriaalin ja sitä myöden vaalimatematiikan aiheet vaikuttavat yleisesti ottaen muihin matematiikan opetuksessa käsiteltäviin aiheisiin verrattuna. Oppimateriaalin jatkokehittämisen kannalta on olennaista saada testauksen yhteydessä selville kuinka haastavia sen matemaattiset osuudet ovat sen mukaan, onko oppija yläkoululainen vai lukiolainen.

Oppimateriaalin haastavuuden selvittämisen ohella olennaista jatkokehittämisen kannalta on saada tietoa siitä, kuinka hyvin oppimateriaali toimii opetuksessa paperisena monisteena. Jos paperinen moniste osoittautuu toimivaksi ratkaisuksi, niin silloin myöhemmät versiot kannattaa kehittää siitä lähtökohdasta, että oppimateriaalia käytetään paperisena monisteena. Mikäli oppimateriaalin käyttäminen sähköisessä muodossa alkaisi vaikuttamaan järkevämmältä vaihtoehdolta, tulisi selvittää, mitä sähköistä työkalua kannattaisi käyttää. Sähköisen työkalun valinnassa tulisi panostaa sellaisen työkalun valitsemiseen, jonka käyttäminen ei vaadi aineenopettajilta paljoa lisätyötä, jotta kynnys oppimateriaalin käyttämisellä ei kasva.

Kehittämistutkimuksen toteuttamiseen kuuluu omaan tutkimusaiheeseen liittyvään tutkimukseen perehtyminen [4, s. 16]. Tässä työssä on arvioitu kehitettyä oppimateriaalia oppiainerajat ylittävänä oppimiskokonaisuutena siitä näkökulmasta, miten perusopetuksen [56] ja lukion [47] opetussuunnitelmien perusteet suhtautuvat oppiainerajoja ylittävään työskentelyyn. Oppimateriaalin jatkokehittämistä voisi sen testaamisen ohella rikastaa siihen perehtyminen, miten oppiainerajat ylittävien oppimiskokonaisuuksien tulisi rakentua tutkimuskirjallisuuden perusteella. Samalla olisi mielekästä selvittää, minkälaisia ratkaisuja tällaisten kokonaisuuksien muodostamisessa on tehty yläkouluissa ja lukioissa etenkin matematiikkaan ja yhteiskuntaoppiin liittyen. Tämä auttaisi siinä, että oppimateriaalista saataisiin mahdollisimman hyödyllinen arjen koulutyön kannalta, mikä on yksi kehittämistutkimuksen tavoitteista [37, s. 59, 62]. Selvää on, että oppimateriaalin jatkokehittämisen aloittaminen vaatii sen toisen versio testaamista oppijoilla, mikä on osa seuraavassa kehittämissyklissä tehtävää ongelma-analyysiä (katso Kuva 5.1).

7.3 Tutkimuksen luotettavuus

Aloitetaan työn luotettavuuden tarkasteleminen määrittelemällä, mitä validiteetilla ja reliabiliteetilla tarkoitetaan. Validiteetilla viitataan siihen, että tutkimus on keskittynyt niihin aiheisiin, joita on ollut tarkoitus tutkia [71, luku 6.2]. Reliabiliteettia tarkasteltaessa ollaan kiinnostuneita tutkimuksen toistettavuudesta ja siitä, saavatko eri tutkijat samaa aihetta tutkittaessa yhteneviä tuloksia [30, luku 8.2.1]. Laadullisen tutkimuksen luotettavuuden arvioimisen yhteydessä on kuitenkin hyvä tunnistaa se, että validiteetin ja reliabiliteetin käsitteet liittyvät läheisesti määrälliseen tutkimukseen [71, luku 6.2]. Tämän vuoksi validiteetin ja reliabiliteetin käyttämiselle laadullisessa tutkimuksessa on esitetty kritiikkiä [71, luku 6.2]. Käytetään kuitenkin validiteetin ja reliabiliteetin näkökulmia työn luotettavuuden tarkastelemisessa.

Tarkasteltaessa työn luotettavuutta on myös tiedostettava tutkijan rooli laadullisessa tutkimuksessa, sillä tutkijan omilla käsityksillä tutkittavasta aiheesta on vaikutusta tutkimuksessa saataviin tuloksiin [58]. Tämän työn tekijällä itsellään ei ollut ennen oppimateriaalin kehittämistä kokemusta oppiainerajoja ylittävän eikä matematiikan ja yhteiskuntaopin sisältöjä yhdistävän oppimateriaalin laatimisesta. Täten oppimateriaali olisi voinut muotoutua hyvin erilaiseksi kokonaisuudeksi, jos sitä olisi lähdetty kehittämään toisenlaisista lähtökohdista.

Validiteetin voidaan katsoa toteutuvan hyvin tässä työssä. Työssä on perehdytty suhteelliseen vaalitavan matemaattiseen kuvaamiseen ja oppimateriaalissa käsiteltyihin aiheisiin eli lukusarja- ja kvoottimenetelmiin. Lisäksi on työn eri vaiheissa perehdytty siihen, kuinka oppimateriaalin aihepiirejä käsitellään perusopetuksen [56] ja lukion [47] opetussuunnitelmien perusteissa ja yhteiskuntaopin oppikirjoissa. Opetussuunnitelmien perusteita tarkasteltaessa on arvioitu, millä tavalla ne suhtautuvat oppiainerajat ylittäviin oppimiskokonaisuuksiin, jollainen myös kehitetty oppimateriaali on. Oppimateriaali on suunnattu yläkoululaisille ja lukiolaisille, jolloin työn validiteetin kannalta yläkoulun ja lukion matematiikan ja yhteiskuntaopin aineenopettajien haastatteleminen teemahaastattelun keinoin on ollut hyvä ja järkevä valinta. Lisäksi on arvioitu teemahaastatteluihin perustuen vaalimatematiikan soveltuvuutta opetettavaksi aiheeksi, ja kuinka oppimateriaali soveltuisi käytettäväksi yläkoulussa ja lukiossa. Haastateltavia aineenopettajia oli yhteensä 10, mutta heistä vain 3 työskenteli lukiossa. Työn validiteettia olisi parantanut useampien lukion aineenopettajien haastatteleminen, koska silloin olisi voitu arvioida lukio-opetuksen näkökulmaa enemmän juuri lukion aineenopettajien näkemyksistä käsin. Validiteettia kasvattaa toisaalta se, että tutkimustuloksien muodostamisen ja tarkastelemisen yhteydessä on kiinnitetty huomiota työn pedagogisessa viitekehyksessä (katso luku 2) esiteltyihin tehtävätyypeihin, jolloin työn tutkimusosuudessa on tarkasteltu myös niitä.

Esihaastattelu ja lukion aineenopettajien teemahaastattelu pidettiin ryhmähaastatteluina yläkoulun aineenopettajien teemahaastattelujen ollessa yksilöhaastatteluja. Tämän vuoksi tutkijan ja haastateltavien välinen vuorovaikutus on ollut olennaisesti erilaista eri teemahaastattelujen välillä, millä on voinut olla vaikutusta haastateltavien antamiin vastauksiin. Yksittäisten ryhmähaastatteluihin osallistuneiden aineenopettajien näkemykset olisivat tulleet todennäköisesti selkeämmin haastatteluaineistossa esille, jos heitä olisi haastateltu yksilöhaastatteluilla, koska teemahaastattelujen kestot olivat yhtä teemahaastattelua lukuun ottamatta samaa luokkaa. Tutkimuksen toistettavuuden parantamisen kannalta olisi ollut mielekästä pitää kaikki teemahaastattelut joko yksilö- tai ryhmähaastatteluina, jotta haastateltavien ja tutkijan välinen vuorovaikutus olisi ollut samankaltaista eri teemahaastattelujen välillä. Sekä yksilö- että ryhmähaastattelujen pitämistä voidaan kuitenkin pitää perusteltuna valintana. Ryhmähaastatteluissa aineenopettajat pohtivat keskenään tutkijan esittämiä kysymyksiä, jolloin aineenopettajat ovat mahdollisesti esittäneet sellaisia näkemyksiä, joita heillä ei olisi tullut mieleen yksilöhaastattelussa.

Luvussa 6 esitettiin teemoittelujen kuvaamiseen yhteydessä frekvenssit siitä, kuinka moni aineenopettaja toi esille kunkin alateeman. Kuten alaluvussa 6.1 on kuvattu, frekvenssit ovat vain arvio siitä, kuinka monen aineenopettajan kommentit ovat liittyneet eri alateemoihin. Frekvenssien avulla olisi saatu täsmällisempi arvio eri alateemojen esiintymisestä, jos niiden arvoja olisi päivitetty tutkimustuloksia kirjoitettaessa. Tällöin niiden pohjalta olisi mielekkäämpää ja luotettavampaa arvioida eri alateemojen painottumista haastatteluaineistossa.

Puusa ja Juuti [58] korostavat tutkijan valmistautumisen ja tutkittavaan aiheeseen perehtymisen tärkeyttä käytettäessä teemahaastattelua aineistonkeruussa. Tässä työssä ennen teemahaastatteluja perehdyttiin työn pedagogiseen ja matemaattiseen viitekehykseen. Lisäksi tutustuttiin osana ongelma-analyysiä yhteiskuntaopin oppikirjojen sisältöihin ja osittain perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin [56] työn aiheiden osalta. Pedagogista viitekehystä ja ongelma-analyysiä opetussuunnitelmien perusteiden osalta kuitenkin tarkennettiin teemahaastattelujen jälkeen oppimateriaalin toista versiota kehitettäessä. Aineiston keräämisen ja luotettavuuden kannalta olisi voinut olla hyödyllistä, että työn pedagoginen viitekehys ja ongelma-analyysi olisivat olleet kokonaan valmiina ennen teemahaastatteluja.

Teemahaastattelujen luotettavuutta parantaa kuitenkin se, että niissä käytettiin teorian pohjalta muodostettua haastattelurunkoa ja ennen varsinaisia haastatteluja pidettiin yksi esihaastattelu. Luotettavuutta olisi myös lisännyt useampien esihaastattelujen pitäminen, koska se olisi auttanut haastattelurungon haltuun ottamisessa, mikä parantaa haastatteluaineiston laatua [30, luku 8.1]. Haastattelurungossa on kuitenkin ollut tässä työssä mukana teemahaastattelujen pääteemojen lisäksi niitä tarkentavia aiheita. Tällä on saatu parannettua haastatteluaineiston laatua, koska pääteemojen syventäminen jo haastattelurunkoa laadittaessa on laatua lisäävä tekijä [30, luku 8.1].

Yksi teemahaastatteluista kerätyn haastatteluaineiston tulkinnan ja analysoinnin ja siten koko työn luotettavuuden kannalta olennainen tekijä on haastatteluaineiston litterointi. Kuten alaluvussa 5.7 todetaan, litteroinnissa tehdään tulkintoja haastatteluaineistosta. Tässä työssä keskityttiin haastatteluaineiston olennaisimpien sisältöjen kuvaamiseen, missä haasteena on sen tunnistaminen, milloin litteroitava kohta on tärkeä sisällön kannalta ja milloin ei [22, s. 42]. Tämän myötä tutkijan tekemät tulkinnat ja arviot ovat vaikuttaneet voimakkaasti litterointiin ja teemahaastattelujen analysointiin. Tutkimuksen luotettavuutta heikentää tässä yhteydessä se, että jotakin olennaista on voinut jäädä huomaamatta haastatteluaineistosta litteroinnin aikana. Saman kysymyksen voi esittää myös haastatteluaineiston koodaamisen osalta, koska tutkijan tekemät ratkaisut vaikuttavat koodauksen muodostumiseen [36].

Aineenopettajat saivat ennen teemahaastatteluja tutustuttavakseen oppimateriaalin ensimmäisen version. Aineenopettajia ei erikseen ohjeistettu käyttämään tiettyä määrää aikaa oppimateriaaliin tutustumiseen. Oppimateriaalin jakamisen yhteydessä pyydettiin, että he tutustuisivat oppimateriaaliin sen verran, että he pystyvät keskustelemaan oppimateriaalin sisällöstä ja toimivuudesta matematiikan ja yhteiskuntaopin opetuksen kannalta. Aineenopettajien perehtyminen oppimateriaaliin on vaikuttanut luonnollisesti siihen, kuinka syvällisellä tasolla he ovat pystyneet tuomaan esille näkemyksiään oppimateriaalista. On todennäköistä, että kaikki aineenopettajat eivät ole tutustuneet oppimateriaaliin samalla tarkkuudella, koska osa aineenopettajista antoi varsin yksityiskohtaista palautetta oppimateriaalista, kun taas joiltakin aineenopettajilta saatiin suhteellisen niukasti konkreettisia kehitysehdotuksia. Jos oppimateriaalin jatkokehittämisessä lähdetään hyödyntämään teemahaastatteluja samalla periaatteelle kuin tämän työn yhteydessä, tulisi silloin kiinnittää huomiota aineenopettajien valmistautumiseen teemahaastatteluja varten, jotta tutkimuksen toistettavuus ja sitä kautta luotettavuus kasvaisi.

Alaluvussa 5.1 on kuvattu kehittämistutkimuksen piirteitä, jotka Juuti ja Lavonen [37, s. 65] tiivistävät seuraavasti. Kehittämistutkimuksen synnyttämää tuotosta voidaan käyttää laajasti ja kehittämisprosessi on muodostunut iteratiivisesti. Lisäksi kehittämistutkimus tuottaa uutta tietoa, jonka avulla voidaan edistää oppimista ja opetusta. Tässä työssä kehitetyn oppimateriaalin osalta voidaan todeta, että sitä on mahdollista hyödyntää laajasti, koska se tarjoaa mahdollisuuksia sekä yläkoulu- että lukiotasoisen opetuksen kannalta. Se jäi kuitenkin epäselväksi, mikä olisi oppimateriaalin toimivin kohderyhmä. Tämä heikentää tutkimuksen luotettavuutta, koska tarkkaan ei voida arvioida, kuinka laaja oppimateriaalin kohderyhmä on todellisuudessa. Tästä huolimatta oppimateriaalin toinen versio voidaan julkaista yleisöön käyttöön. Kuvataan seuraavaksi muiden Juutin ja Lavosen mainitsemien piirteiden toteutumista.

Tässä työssä toteutettiin yksi kokonainen kehittämissykli, minkä jälkeen oppimateriaalin kehittämistä jatkettiin ensimmäisessä syklissä saatujen tulosten eli aineenopettajien näkemysten pohjalta. Kehittämissyklejä lisäämällä voitaisiin kasvattaa työn luotettavuutta. Luotettavuuden voidaan kuitenkin katsoa parantuneen sen myötä, että työn lopullinen kehittämistuotos ei ole oppimateriaalin ensimmäinen versio, vaan ensimmäisen kehittämissyklin pohjalta kehitetty toinen versio.

Oppimisen ja opetuksen kehittämisen osalta työssä saatiin selville aineenopettajien näkemyksiä oppiainerajat ylittävien oppimiskokonaisuuksien muodostamisesta. Vaalimatematiikan opettamisen osalta saatiin tuloksia siitä, kuinka se soveltuu opetettavaksi aiheeksi ja mitä sen opettamisessa tulee huomioida. Näihin aiheisiin saatuja tuloksia voidaan pitää mielekkäinä, koska niille löydettiin yhtymäkohtia perusopetuksen [56] ja lukion [47] opetussuunnitelmien perusteista. Lisäksi saatiin selville, miltä kehitettävä oppimateriaali näyttäytyy matematiikan ja yhteiskuntaopin aineenopettajien näkökulmasta ja kuinka sitä voisi kehittää eteenpäin. Yhteenvetona voidaan todeta, että työssä on tuotettu opetuksen kehittämisen kannalta hyödyllistä tietoa, jolloin se täyttää kehittämistutkimukselta vaaditun piirteen uuden tiedon saamisen osalta.

Edellä mainittujen piirteiden lisäksi kehittämistutkimukseen voidaan katsoa kuuluvan muitakin piirteitä. The Design-Based Research Collectiven [16, s. 5] mukaan kehittämistutkimukseen kuuluu olennaisesti testaamista aidoissa olosuhteissa ja tutkimuksen eri vaiheiden dokumentointia. Dokumentointi on tärkeä osa kehittämistutkimusta, sillä Juuti ja Lavonen [37, s. 65] pitävät sitä tutkimuksen luotettavuutta parantavana tekijänä. Aidoissa olosuhteissa testaamista eli oppimateriaalin testaamista oppijoiden kanssa opetustilanteissa ei sisältynyt tähän työhön. Oppimateriaaliin ensimmäisestä versiosta kerättiin kuitenkin palautetta teemahaastatteluilla yläkoulun ja lukion matematiikan ja yhteiskuntaopin aineenopettajilta eli siltä opettajaryhmältä, jonka käyttöön oppimateriaali on tarkoitettu. Haastateltavien valinnassa käytettiin eliittiotantaa, jolloin oppimateriaalin toisen version kehittämisessä on päästy hyödyntämään mahdollisimman realistista näkemystä siitä, mitä oppimateriaalin kehittämisessä tulee huomioida. Oppimateriaalin testaaminen parantaisi kuitenkin merkittävästi tutkimuksen luotettavuutta ja se olisi oppimateriaalin kehittämisen kannalta hyödyllistä, kuten alaluvussa 7.2.2 on tuotu esille. Dokumentoinnin osalta pyrkimyksenä on ollut kuvata tarkasti työn eri vaiheet. Dokumentoinnissa kiinnitettiin erityistä huomiota sekä oppimateriaalin ensimmäisen että toisen version kehittämisen kuvaamiseen, jotta saatiin tuotua selkeästi esille, mihin niissä tehdyt ratkaisut ovat perustuneet. Työn toistettavuuden voidaan katsoa parantuneen sen dokumentoimiseen panostamisen myötä.

Kehittämistutkimuksen luotettavuuden arvioimisessa yhdeksi näkökulmaksi voidaan katsoa sen uutuusarvon tarkastelu [18, s. 117–118]. Tämän työn kohdalla tutkimuksen luotettavuus toteutuu parhaiten sen uutuusarvon osalta. Kehitetty oppimateriaali käsittelee aiheita, jotka eivät ole suoraan osana perusopetuksen [56] ja lukion [47] opetussuunnitelmien perusteita. Lisäksi siinä käsitellään vaalimatematiikan aiheita syvällisemmin kuin alaluvussa 5.3.2 analysoiduissa yläkoulun ja lukion yhteiskuntaopin oppikirjoissa. Uutuusarvoa kasvattavana tekijänä voidaan osaltaan pitää myös sitä, että oppimateriaali antaa mahdollisuuksia vaalimatematiikan opettamiselle sekä yläkoulussa että lukiossa.

Arvioidaan lopuksi työn reliabiliteetin toteutumista. Selkeinten reliabiliteettia edistävänä tekijänä voidaan pitää työn dokumentointia. Reliabiliteettia on saatu nostettua myös käyttämällä teemahaastatteluissa neljään eri tasoon perustuvaa haastattelurunkoa, mikä helpottaa samansisältöisten teemahaastattelujen toistamista. Työhön liittyy kuitenkin sen reliabiliteettia heikentäviä tekijöitä. Teemahaastattelut ovat olleet nyt sekä yksilö- että ryhmähaastatteluja ja tutkijan tulkinnat ovat vaikuttaneet niiden litterointiin ja analysointiin. Reliabiliteetin kannalta ongelmallista on myös se, että aineenopettajille ei annettu täsmällisiä ohjeita oppimateriaalin ensimmäiseen versioon tutustumista varten.

7.4 Eettiset näkökulmat

Eettisesti kestävän tutkimustoiminnan ja tutkimuksessa saatujen tulosten luotettavuuden perustana on hyvän tieteellisen käytännön seuraaminen tutkimusta tehdessä [67]. Jokaisen tutkijan tulee lähtökohtaisesti itse huolehtia hyvän tieteellisen käytännön toteutumisesta, mikä tarkoittaa muun muassa eettisesti kestävien tiedonhankinta-, tutkimus- ja arviointimenetelmien käyttämistä [67]. Kuvataan seuraavaksi Tuomen ja Sarajärven teoksen [71, luku 5.4.4] pohjalta, mitä toimenpiteitä tämä vaatii tutkijalta. Tutkittaville tulee kertoa tutkimuksen tavoitteista ja käytettävistä menetelmistä, minkä lisäksi heidän osallistumisensa tulee perustua vapaaehtoisuuteen. Tutkittavalle kuuluu myös oikeus keskeyttää tutkimukseen osallistuminen ja oikeus kieltää jälkikäteen häntä käsittelevän aineiston käyttäminen tutkimuksessa. Tutkittavalla on oikeus tietää oikeuksistaan ja luottaa siihen, että tutkija toimii vastuullisesti. Tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että tutkijan tulee käsitellä tutkimuksen aikana kerättyjä tietoja luottamuksellisesti aiheuttamatta vahinkoa tutkittavalle.

Teemahaastatteluihin osallistuneille aineenopettajille lähetettiin ennen etukäteen sovittuja haastatteluaikoja tutustuttavaksi tutkimustiedote ja tutkimuksen tietosuojailmoitus. Tutkimustiedote on esitetty liitteessä E ja tutkimuksen tietosuojailmoitus vastaavasti liitteessä F. Sekä tutkimustiedotteessa että tietosuojailmoituksessa kerrottiin tutkimusta varten kerättävistä henkilötiedoista ja niiden keräämisestä. Kerättävät henkilötiedot olivat aineenopettajan nimi, ääni, Teamsin profiilikuva, opetettava aine, tieto siitä työskenteleekö aineenopettaja yläkoulussa, lukiossa, sekä yläkoulussa että lukiossa vai onko hän opiskelija. Teemahaastattelut pidettiin Teamsilla ilman kameroita, mikä vähensi kerättävien tietojen määrää. Tällöin haastattelutallenteille jäi aineenopettajien ääni, nimi ja Teamsin profiilikuva. Muut henkilötiedot kerättiin liitteessä G esitetyllä suostumuslomakkeella. Aineenopettajat täyttivät suostumuslomakkeen sähköisesti ja heille lähetettiin siihen linkki ennen haastatteluaikoja. Suostumuslomakkeella kerättiin lisäksi aineenopettajilta suostumukset tutkimukseen osallistumisesta ja henkilötietojen käsittelystä. Haastattelutilaisuuksissa ennen itse teemahaastattelujen aloittamista aineenopettajille annettiin mahdollisuus esittää kysymyksiä tutkimuksesta ja sen tietosuojailmoituksesta. Aineenopettajista kerättyjä henkilötietoja on käsitelty luottamuksellisesti tutkimuksen tekemisen aikana.

Haastattelutallenteet tuhottiin mahdollisimman pian sen jälkeen, kun niitä ei enää tarvittu. Käytännössä haastattelutallenteet tuhottiin ennen haastatteluaineiston analysoimisen aloittamista siinä vaiheessa, kun litteraatit oli saatu valmiiksi. Litteraateissa aineenopettajista käytettiin lyhenteitä heidän nimiensä sijasta anonymiteetin parantamiseksi. Aineenopettajista on kerrottu teemahaastattelujen raportoinnin yhteydessä vain heidän työskentelypaikkansa ja opetettavat aineensa. Anonymiteetin vahvistamiseksi tutkimustulosten yhteydessä esitetyissä sitaateissa ei ole eritelty, onko kyseessä aineenopettajaopiskelijan vai yläkoulussa tai lukiossa työskentelevän aineenopettajan antama kommentti. Raportoinnin yhteydessä ei ole kerrottu myöskään sitä, missä kouluissa ja millä paikkakunnilla aineenopettajat työskentelevät, mikä parantaa anonymiteetin säilymistä.

LÄHTEET

[1] T. Ahonen ym. *Aikalainen. 9*. 1. painos. WSOYpro Oy, 2009. ISBN: 978-951-0-33758-5.

[2] M. Aksela ja J. Pernaa. ”Kehittämistutkimus pro gradu -tutkielman tutkimusmenetelmänä”. Teoksessa: *Pernaa, J. (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla*. PS-Kustannus, 2013, s. 181–200. ISBN: 978-952-451-580-1.

[3] J. Albuja. *Package 'electoral'*. R package version 0.1.3. 2022. URL: https://cran.r-project.org/web/packages/electoral/electoral.pdf (viitattu 13. 03. 2024).

[4] T. Anderson ja J. Shattuck. ”Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research?” *Educational researcher* 41.1 (2012), s. 16–25. DOI: 10.3102/0013189X11428813.

[5] Avoin tiede. *Miten huomioit laadun avoimissa oppimateriaaleissa?* 2023. URL: https://avointiede.fi/fi/asiantuntijaryhmat/oppimisen-avoimuus/miten-huomioit-laadun-avoimissa-oppimateriaaleissa (viitattu 17. 03. 2024).

[6] Avoin tiede. *Miten huomioit saavutettavuuden avoimissa oppimateriaaleissa?* 2022. URL: https://avointiede.fi/fi/asiantuntijaryhmat/oppimisen-avoimuus/miten-huomioit-saavutettavuuden-avoimissa-oppimateriaaleissa (viitattu 02. 02. 2024).

[7] M. F. Ayadi ja G. Onodipe. ”Writing-to-learn: Strategies to promote engagement, peer-to-peer learning, and active listening in economics courses”. *The Journal of Economic Education* 54.2 (2023), s. 198–204. DOI: 10.1080/00220485.2022.2160398.

[8] M. L. Balinski ja H. P. Young. *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. 2. painos. Brookings Institution Press, 2001. ISBN: 0-8157-0090-3.

[9] S. Barab ja K. Squire. ”Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground”. *The Journal of the Learning Sciences* 13.1 (2004), s. 1–14. DOI: https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1.

[10] J. C. Bean. *Engaging Ideas : The Professor's Guide to Integrating Writing, Critical Thinking, and Active Learning in the Classroom*. 2. painos. John Wiley & Sons, Inc., 2011. ISBN: 978-1-118-06231-9.

[11] M. Björklind ym. *Selkeästi Suomessa : Selkokielinen Suomen yhteiskuntaopin S2-oppikirja*. 1–2. Oy Finn Lectura Ab, 2018. ISBN: 978-952-346-108-6.

[12] I. Z. Bogdanović ym. ”The Relationship Between Elementary Students' Physics Performance and Metacognition Regarding Using Modified Know-Want-Learn Strategy”. *International Journal of Science and Mathematics Education* 20.8 (2022), s. 1907–1926. DOI: 10.1007/s10763-021-10231-9.

[13] D. Brassell. *Dare to Differentiate : Vocabulary Strategies for All Students*. 3. painos. Guilford Publications, 2010. ISBN: 9781609187576.

[14] D. Camp. ”It takes two: Teaching with Twin Texts of fact and fiction”. *The Reading Teacher* 53.5 (2000), s. 400–408.

[15] T. G. Campbell ym. ”Exploring how writing-to-learn in a mathematics methods course influences preservice teachers’ beliefs”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (2023), s. 1–27. DOI: 10.1080/0020739X.2023.2212278.

[16] The Design-Based Research Collective. ”Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry”. *Educational Researcher* 32.1 (2003), s. 5–8. DOI: 10.3102/0013189X032001005.

[17] Digi- ja väestötietovirasto. *Kansanedustajien paikkojen jako vaalipiirien kesken*. URL: https://dvv.fi/kansanedustajien-paikkojen-jako-vaalipiirien-kesken (viitattu 24. 04. 2024).

[18] D. C. Edelson. ”Design Research: What We Learn When We Engage in Design”. *The Journal of the Learning Sciences* 11.1 (2002), s. 105–121. DOI: 10.1207/S15327809JLS1101_4.

[19] *Eduskuntavaalijärjestelmän uudistaminen. Vaalialuetoimikunnan mietintö*. Oikeusministeriö, 2008. ISBN: 978-952-466-148-5. URL: https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/76110/vaalialuetoimikunnan_mietinto_24.4.2008_150_s.pdf (viitattu 01. 05. 2024).

[20] J. Emig. ”Writing as a Mode of Learning”. *College Composition and Communication* 28.2 (1977), s. 122–128. DOI: 10.2307/356095.

[21] J. Eskola ja J. Suoranta. *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Vastapaino, 1998. ISBN: 978-951-768-504-7.

[22] J. Eskola ja J. Vastamäki. ”Teemahaastattelu: opit ja opetukset”. Teoksessa: *Valli, R. ja Aaltola, J. (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin. 1, Metodin valinta ja aineistonkeruu : virikkeitä aloittelevalle tutkijalle*. PS-Kustannus, 2015, s. 27–44. ISBN: 978-952-451-648-8.

[23] Folketinget. *Folketingsvalg*. 2023. URL: https://www.ft.dk/da/folkestyret/valg-og-afstemninger/folketingsvalg (viitattu 08. 12. 2023).

[24] Folketingsvalgloven LBK nr 1156 af 08/09/2023. URL: https://www.retsinformation.dk/eli/lta/2023/1156 (viitattu 17. 12. 2023).

[25] R. M. Garner. ”An efficient approach to writing across the curriculum: Microthemes in accounting classes”. *Journal of Education for Business* 69.4 (1994), s. 211. DOI: 10.1080/08832323.1994.10117686.

[26] J. T. Hakala. ”Toimivan tutkimusmenetelmän löytäminen”. Teoksessa: *Valli, R. and Aaltola, J. (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin. 1, Metodin valinta ja aineistonkeruu : virikkeitä aloittelevalle tutkijalle*. PS-Kustannus, 2015, s. 14–26. ISBN: 978-952-451-648-8.

[27] E. Hämäläinen ym. *Forum. 9, Yhteiskuntaoppi*. 8. painos. Kustannusosakeyhtiö Otava, 2023. ISBN: 978-951-1-46836-3.

[28] E. Hämäläinen ym. *Forum. 9, Yhteiskuntaoppi, harjoituksia*. 1. painos. Kustannusosakeyhtiö Otava, 2018. ISBN: 978-951-1-31844-6.

[29] P. Hieta, T. Putus-Hilasvuori ja J. Ukkonen. *Aikalainen. 9, Tehtäväkirja*. 1. painos. WSOYpro Oy, 2010. ISBN: 978-951-0-33760-8.

[30] S. Hirsjärvi ja H. Hurme. *Tutkimushaastattelu : Teemahaastattelun teoria ja käytäntö*. 2. painos. Gaudeamus, 2022. ISBN: 978-952-345-812-3.

[31] B. Ives ja C. Hoy. "Graphic Organizers Applied to Higher-Level Secondary Mathematics". *Learning Disabilities Research & Practice* 18.1 (2003), s. 36–51. DOI: 10.1111/1540-5826.00056.

[32] A. Jääskelainen. *Suomen vaalijärjestelmä: Yleisesitys*. Oikeusministeriön julkaisuja, Toiminta ja hallinto 2023:3. Oikeusministeriö, 2023. ISBN: 978-952-400-374-2. URL: https://urn.fi/URN:ISBN:978-952-400-374-2 (viitattu 01. 05. 2024).

[33] S. Janson. "Asymptotic bias of some election methods". *Annals of Operations Research* 215.1 (2014), s. 89–136. DOI: 10.1007/s10479-012-1141-2.

[34] S. Janson. *Proportionella valmetoder*. Moniste, päivitetty 23.10.2018 (viitattu 26.04.2024). Matematiska institutionen, Uppsala universitet, 2012. URL: http://www2.math.uu.se/%7Esvante/papers/sjV6.pdf.

[35] R. C. Jones ja T. G. Thomas. "Leave no discipline behind". *The Reading Teacher* 60.1 (2006), s. 58–64. DOI: 10.1598/RT.60.1.6.

[36] K. Juhila. "Koodaminen". Teoksessa: *Vuori, J. (toim.) Laadullisen tutkimuksen verkkokäsikirja*. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto, 2021. URL: https://www.fsd.tuni.fi/fi/palvelut/menetelmaopetus/kvali/analyysitavan-valinta-ja-yleiset-analyysitavat/koodaaminen/ (viitattu 11. 03. 2024).

[37] K. Juuti ja J. Lavonen. "Design-Based Research in Science Education: One Step Towards Methodology". *Nordic studies in science education* 2.2 (2006), s. 54–68. DOI: https://doi.org/10.5617/nordina.424.

[38] E. Kestilä-Kekkonen ym. *Kanta. 1, suomalainen yhteiskunta*. 4. painos. Edita Publishing Oy, 2020. ISBN: 978-951-37-7778-4.

[39] Kielitoimiston ohjepankki, Kotimaisten kielten keskus. *Puolueiden nimet ja lyhenteet*. 2023. URL: https://kielitoimistonohjepankki.fi/ohje/puolueiden-nimet-ja-lyhenteet/ (viitattu 18. 01. 2024).

[40] S. Kneeshaw. "KISSing in the History Classroom: Simple Writing Activities That Work". *The Social Studies* 83.4 (1992), s. 176–179. DOI: 10.1080/00377996.1992.9956227.

[41] K. J. Knipper ja T. J. Duggan. "Writing to learn across the Curriculum: Tools for comprehension in content area classes". *The Reading Teacher* 59.5 (2006), s. 462–470. DOI: 10.1598/RT.59.5.5.

[42] A. Kohi ym. *Forum. 1, Suomalainen yhteiskunta*. 1. painos. Kustannusosakeyhtiö Otava, 2021. ISBN: 978-951-1-35607-3.

[43] Kosningalög. URL: https://www.althingi.is/lagas/nuna/2021112.html (viitattu 17. 12. 2023).

[44] M. Lewis, D. Wray ja P. Rospigliosi. ”And I want it in your own words”. *The Reading Teacher* 47.7 (1994), s. 528–536.

[45] Ley Orgánica 5/1985, de 19 de junio, del Régimen Electoral General. URL: https://www.boe.es/eli/es/lo/1985/06/19/5/con (viitattu 24. 01. 2024).

[46] Lov om valg til Stortinget, fylkesting og kommunestyrer (valgloven). URL: https://lovdata.no/dokument/NLO/lov/2002-06-28-57 (viitattu 01. 05. 2024).

[47] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Opetushallitus, 2019. ISBN: 978-952-13-6623-9. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf (viitattu 02. 05. 2024).

[48] J. C. Nesbit ja O. O. Adesope. ”Learning with Concept and Knowledge Maps: A Meta-Analysis”. *Review of Educational Research* 76.3 (2006), s. 413–448. DOI: 10.3102/00346543076003413.

[49] Oikeusministeriö. *Vuosina 2024–2035 toimitettavat säännönmukaiset vaalit*. 2024. URL: https://vaalit.fi/vaalit-2024-2035 (viitattu 02. 05. 2024).

[50] Oikeusministeriö – Tieto- ja tulospalvelu. *Koko maa*. 2023. URL: https://tulospalvelu.vaalit.fi/EKV-2023/fi/lasktila.html (viitattu 10. 01. 2024).

[51] Oikeusministeriö – Tieto- ja tulospalvelu. *Lapin vaalipiiri*. 2023. URL: https://tulospalvelu.vaalit.fi/EKV-2023/fi/vptulos_13.html (viitattu 30. 11. 2023).

[52] Oikeusministeriö – Tieto- ja tulospalvelu. *Uudenmaan vaalipiiri*. 2023. URL: https://tulospalvelu.vaalit.fi/EKV-2023/fi/vptulos_02.html (viitattu 20. 03. 2024).

[53] Oikeusministeriö – Tieto- ja tulospalvelu. *Vaasan vaalipiiri*. 2023. URL: https://tulospalvelu.vaalit.fi/EKV-2023/fi/vptulos_10.html (viitattu 13. 04. 2024).

[54] *Parlamentaarisen vaalityöryhmän loppuraportti*. Oikeusministeriön julkaisuja, Mietintöjä ja lausuntoja 2022:6. Oikeusministeriö, 2022. ISBN: 978-952-259-940-7. URL: http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-259-940-7 (viitattu 01. 05. 2024).

[55] J. Pernaa. ”Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä”. Teoksessa: *Pernaa, J. (toim.) Kehittämistutkimus opetusalalla*. PS-Kustannus, 2013, s. 9–26. ISBN: 978-952-451-580-1.

[56] *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Opetushallitus, 2014. ISBN: 978-952-13-5999-6. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf (viitattu 02. 05. 2024).

[57] F. Pukelsheim. *Proportional Representation: Apportionment Methods and Their Applications*. 1. painos. Cham: Springer, 2014. ISBN: 978-3-319-03855-1. DOI: 10.1007/978-3-319-03856-8.

[58] A. Puusa ja P. Juuti. ”Laadullisen tutkimuksen olemus”. Teoksessa: *Puusa, A. ja Juuti, P. (toim.) Laadullisen tutkimuksen näkökulmat ja menetelmät*. Gaudeamus, 2020. ISBN: 9789523456167.

[59] A. Reynolds, B. Reilly ja A. Ellis. *Electoral System Design: The New International IDEA Handbook*. International IDEA, 2005. ISBN: 91-85391-18-2. URL: https://www.idea.int/sites/default/files/publications/electoral-system-design-the-new-international-idea-handbook.pdf (viitattu 02. 05. 2024).

[60] Riigikogu Election Act. URL: https://www.riigiteataja.ee/en/eli/ee/514112013015/consolide/current (viitattu 17. 12. 2023).

[61] J. Ruusuvuori ja P. Nikander. ”Haastatteluaineiston litterointi”. Teoksessa: *Hyvärinen, M., Nikander, P. ja Ruusuvuori, J. (toim.) Tutkimushaastattelun käsikirja*. Vastapaino, 2017, s. 427–444. ISBN: 978-951-768-579-5.

[62] A. Saaranen-Kauppinen ja A. Puusniekka. ”7.3.4 Teemoittelu”. Teoksessa: *KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto*. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto, 2006. URL: https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus/kvali/L7_3_4.html (viitattu 31. 03. 2024).

[63] Saavutettavuuskirjasto Celia. *Pdf*. 2023. URL: https://www.saavutettavasti.fi/saavutettavat-asiakirjat/pdf/ (viitattu 23. 01. 2024).

[64] Saavutettavuuskirjasto Celia. *Word*. 2023. URL: https://www.saavutettavasti.fi/saavutettavat-asiakirjat/word/ (viitattu 23. 01. 2024).

[65] Saeimas vēlēšanu likums. URL: https://likumi.lv/ta/id/35261-saeimas-velesanu-likums (viitattu 24. 01. 2024).

[66] S. Szabo. ”KWHHL: A Student-Driven Evolution of the KWL”. *American secondary education* 34.3 (2006), s. 57–67.

[67] Tampereen korkeakouluyhteisö. *Hyvä tieteellinen käytäntö*. URL: https://www.tuni.fi/fi/tutkimus/vastuullinen-tiede/hyva-tieteellinen-kaytanto (viitattu 24. 04. 2024).

[68] D. Teuscher, P. H. Kulinna ja C. Crooker. ”Writing to Learn Mathematics: An Update”. *The Mathematics Educator* 24.2 (2015), s. 56–78.

[69] N. Tideman. ”The Single Transferable Vote”. *The Journal of Economic Perspectives* 9.1 (1995), s. 27–38. URL: https://www.jstor.org/stable/2138352 (viitattu 01. 05. 2024).

[70] Ş. Tok. ”Effects of the know-want-learn strategy on students’ mathematics achievement, anxiety and metacognitive skills”. *Metacognition and learning* 8.2 (2013), s. 193–212. DOI: 10.1007/s11409-013-9101-z.

[71] J. Tuomi ja A. Sarajärvi. *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Uudistettu laitos. Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2018. ISBN: 978-952-04-0011-8.

[72] Vaalilaki 714/1998. URL: https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980714 (viitattu 01. 05. 2024).

[73] Vallag (2005:837). URL: https://www.riksdagen.se/sv/dokument-och-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/vallag-2005837_sfs-2005-837/ (viitattu 17.12.2023).

[74] Valtioneuvoston asetus kansanedustajien paikkojen jaosta vaalipiirien kesken vuoden 2023 eduskuntavaaleissa 888/2022. URL: https://www.finlex.fi/fi/laki/alkup/2022/20220888 (viitattu 01.05.2024).

[75] Wall. A. ”Open List Proportional Representation: The Good, the Bad and the Ugly” (2021). International IDEA. DOI: 10.31752/idea.2021.55.

[76] A. Zollman. ”Write Is Right: Using Graphic Organizers to Improve Student Mathematical Problem Solving”. *Investigations in Mathematics Learning* 4.3 (2012), s. 50–60. DOI: 10.1080/24727466.2012.11790316.

LIITE A: SIMULOINTIEN VAALIPIIRIKOHTAISET TULOKSET

Tämä liite sisältää alaluvussa 3.7.2 esitettyjen simulointien tulokset vaalipiirikohtaisesti. Taulukoihin on merkitty, kuinka monta paikkaa kukin puolue sai kustakin vaalipiiristä kyseessä olevassa simulaatiossa. Taulukossa A.1 on esitetty d'Hondtin menetelmällä saadut paikkajaot. Taulukko A.2 sisältää vastaavasti paikkajaot käytettäessä Sainte-Laguën menetelmää. Haren menetelmän simuloinneissa saadut vaalipiirikohtaiset tulokset ovat Taulukossa A.3 ja Droopin menetelmällä saadut tulokset ovat puolestaan Taulukossa A.4.

Taulukko A.1. *Simulointien tulokset vaalipiireittäin d'Hondtin menetelmää käyttämällä.*

Vaalipiiri	SDP	PS	Kok.	Kesk.	Vihr.	Vas.	RKP	KD	Liik.	VL
Helsinki	5	3	7	0	4	3	1	0	0	0
Uusimaa	8	7	11	2	3	1	3	1	1	0
Varsinais-Suomi	3	4	5	1	1	2	1	0	0	0
Satakunta	2	3	2	1	0	0	0	0	0	0
Häme	4	4	3	1	0	1	0	1	0	0
Pirkanmaa	6	5	5	1	1	1	0	1	0	0
Kaakkois-Suomi	4	4	4	2	1	0	0	0	0	0
Savo-Karjala	3	3	3	3	1	1	0	1	0	0
Vaasa	2	4	2	3	0	0	4	1	0	0
Keski-Suomi	3	2	2	2	1	0	0	0	0	0
Oulu	2	5	3	5	1	2	0	0	0	0
Lappi	1	2	1	2	0	0	0	0	0	0

Taulukko A.2. *Simulointien tulokset vaalipiireittäin Sainte-Laguën menetelmää käyttämällä.*

Vaalipiiri	SDP	PS	Kok.	Kesk.	Vihr.	Vas.	RKP	KD	Liik.	VL
Helsinki	5	3	6	0	3	3	1	1	1	0
Uusimaa	8	7	10	2	3	2	3	1	1	0
Varsinais-Suomi	3	4	4	1	1	2	1	1	0	0
Satakunta	2	2	2	1	0	1	0	0	0	0
Häme	3	4	3	1	1	1	0	1	0	0
Pirkanmaa	5	4	5	1	2	1	0	1	1	0
Kaakkois-Suomi	3	3	3	2	1	1	0	1	1	0
Savo-Karjala	3	3	2	3	1	1	0	2	0	0
Vaasa	2	4	3	3	0	0	3	1	0	0
Keski-Suomi	2	2	2	2	1	1	0	0	0	0
Oulu	2	5	3	4	1	2	0	1	0	0
Lappi	1	2	1	1	0	1	0	0	0	0

Taulukko A.3. *Simulointien tulokset vaalipiireittäin Haren menetelmää käyttämällä.*

Vaalipiiri	SDP	PS	Kok.	Kesk.	Vihr.	Vas.	RKP	KD	Liik.	VL
Helsinki	5	3	6	0	3	3	1	1	1	0
Uusimaa	7	7	10	2	3	2	3	1	1	1
Varsinais-Suomi	3	3	4	2	1	2	1	1	0	0
Satakunta	2	2	2	1	0	1	0	0	0	0
Häme	3	3	3	1	1	1	0	1	1	0
Pirkanmaa	5	4	4	2	2	1	0	1	1	0
Kaakkois-Suomi	4	3	3	2	1	1	0	0	1	0
Savo-Karjala	3	3	2	3	1	1	0	2	0	0
Vaasa	2	4	2	3	1	0	3	1	0	0
Keski-Suomi	2	2	2	2	1	1	0	0	0	0
Oulu	2	5	3	5	1	2	0	0	0	0
Lappi	1	2	1	1	0	1	0	0	0	0

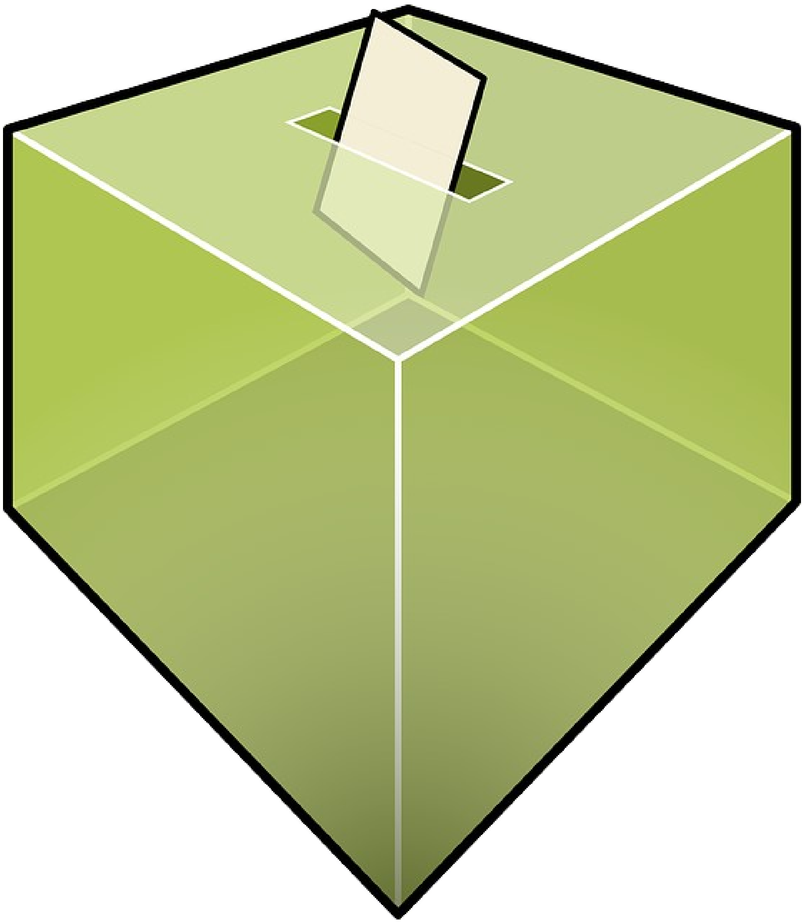
Taulukko A.4. *Simulointien tulokset vaalipiireittäin Droopin menetelmää käyttämällä.*

Vaalipiiri	SDP	PS	Kok.	Kesk.	Vihr.	Vas.	RKP	KD	Liik.	VL
Helsinki	5	3	6	0	4	3	1	1	0	0
Uusimaa	8	7	10	2	3	2	3	1	1	0
Varsinais-Suomi	3	4	4	2	1	2	1	0	0	0
Satakunta	2	2	2	1	0	1	0	0	0	0
Häme	3	4	3	1	1	1	0	1	0	0
Pirkanmaa	5	4	5	1	2	1	0	1	1	0
Kaakkois-Suomi	4	4	3	2	1	1	0	0	0	0
Savo-Karjala	3	3	3	3	1	1	0	1	0	0
Vaasa	2	4	2	3	1	0	3	1	0	0
Keski-Suomi	2	2	2	2	1	1	0	0	0	0
Oulu	2	5	3	5	1	2	0	0	0	0
Lappi	1	2	1	2	0	0	0	0	0	0

LIITE B: OPPIMATERIAALI SUHTEELLISESTA VAALITAVASTA

Suhteellinen vaalitapa matemaattisena ilmiönä: oppimateriaalia yläkouluun ja lukioon

Tekijä: Aaro Vuolteenaho



Sisällys

Johdanto (Vain opettajalle)

Oppimateriaalin idea

Tämän oppimateriaalin tarkoituksena on tutustuttaa oppija suhteellisen vaalitavan ideaan ja kahteen suhteellista vaalitapaa noudattavaan laskentamenetelmään. Oppimateriaalissa tarkastellaan suhteellista vaalitapaa matemaattisena ilmiönä, jolloin se soveltuu opetukseen esimerkiksi täydentäväksi sisällöksi. Aiheen rajaamisen vuoksi muita vaalitapoja, kuten enemmistövaalitapaa, ei oppimateriaalissa käsitellä. Oppimateriaalissa esitellään myös lyhyesti vaalituloksien laskemisessa tarvittavaa matematiikkaa, kuten lukujonoja.

2000-luvulla on tuotu erilaisissa selvityksissä esille vaihtoehtoja eduskuntavaalien uudistamiseksi, joihin kuuluvat erilaiset laskentamenetelmät vaalituloksen laskemiseksi. Vaalitulos lasketaan useissa maissa eri tavalla kuin Suomen vaaleissa, minkä vuoksi on tärkeätä olla tietoinen erilaisista tavoista määrittää vaalituloksia. Tässä oppimateriaalissa tutustutaan lukusarja- ja kvoottimenetelmiin. Suomessa useissa eri vaaleissa käytettävä d'Hondtin menetelmä kuuluu lukusarjamenetelmiin. Kansanedustajien paikkojen jakautuminen Manner-Suomen vaalipiirien kesken taas lasketaan kvoottimenetelmiin kuuluvalla Haren menetelmällä. Lukusarjamenetelmät voidaan kuvata lukujonojen avulla ja niissä puolueiden ja muiden ryhmittymien keräämiä äänimääriä jaetaan lukujonojen jäsenillä vertauslukujen laskemiseksi. Kvoottimenetelmissä äänimääriä jaetaan jollakin ennalta sovitulla jakajalla eli kvootilla, joka tyypillisesti riippuu vaaleissa annettujen äänien ja jaettavien paikkojen kokonaismääristä. Vaalitulos muodostuu erilaiseksi sen mukaan, mitä menetelmää käytetään. Oppimateriaalin tavoitteena onkin tuoda tämä vaaleihin liittyvä piirre esille oppijalle.

Oppimateriaalin rakenne

Oppimateriaalissa on omat lukunsa sekä lukusarja- että kvoottimenetelmille. Nämä luvut eivät ole esitietoja toisillensa eli niiden käsittelyjärjestyksellä ei ole väliä. Kummankin luvun alussa kuvataan suhteellisen vaalitavan ideaa. Luvut sisältävät sekä teoriaosuuden että tehtäväpaketin tutustuttavaan menetelmään liittyen. Vaalituloksen laskemista eri menetelmillä havainnollistetaan esimerkkien avulla. Vaalituloksen laskeminen kuvataan oppimateriaalissa avoimen listavaalin periaatteen mukaisesti.

Teoriaosuuksissa esitellään myös lukusarja- ja kvoottimenetelmiin liittyvää historiaa. Historiaosuudet ovat täydentävää sisältöä ja niiden tarkoituksena on antaa esimerkkejä lukusarja- ja kvoottimenetelmien taustoista aiheesta kiinnostuneille oppijoille. Historiaosuuksien toisena tavoitteena on näyttää, että matematiikka on osa yhteiskuntaa ja päätöksentekoa.

Oppimateriaalissa käytetään yksinkertaisuuden vuoksi termiä paikka puhuttaessa vaaleissa jaettavista edustajanpaikoista. Lisäksi termillä puolue viitataan vaaleissa ehdokkaita asettaviin puolueisiin ja valitsijayhdistyksiin. Opettajan on tämän vuoksi hyvä tuoda opetuksessa esille, että puolueiden lisäksi vaaleihin voi asettua ehdolle valitsijayhdistysten kautta.

Oppimateriaalin tausta

Oppimateriaali on laadittu osana diplomityötä Tampereen yliopistossa. Diplomityön nimi on *Suhteellinen vaalitapa matemaattisena ilmiönä: Oppimateriaalin kehittämistutkimus* ja sen tekijä on Aaro Vuolteenaho. Diplomityö on saatavissa Tampereen yliopiston avoimen julkaisuarkiston kautta osoitteessa https://trepo.tuni.fi/.

Oppimistavoitteet ja oppimateriaalin hyödyntäminen opetuksessa (Vain opettajalle)

Oppimistavoitteet

Oppimateriaalin oppimistavoitteita ovat:

- oppija tuntee suhteellisen vaalitavan idean
- oppija tutustuu lukusarja- ja kvoottimenetelmien ideaan
- oppija osaa kuvata, mitä vaiheita vaalituloksen laskemiseen kuuluu, kun vaalitulos lasketaan lukusarja- tai kvoottimenetelmien avulla
- oppija tunnistaa, että vaalitulos riippuu käytettävästä laskentamenetelmästä
- oppija osaa laskea yksinkertaisissa tilanteissa vaalituloksen lukusarja- ja kvoottimenetelmien avulla.

Oppimateriaalin hyödyntäminen opetuksessa

Oppimateriaalia voi hyödyntää sekä matematiikan että yhteiskuntaopin opetuksessa tai esimerkiksi kumpaakin oppiainetta yhdistävissä oppiainerajat ylittävissä oppimiskokonaisuuksissa. Oppimateriaalia on mahdollista käyttää pienemmissä osissa esimerkiksi silloin, kun vaalit ovat ajankohtainen aihe yhteiskunnassa. Oppimateriaalista voi esimerkiksi tulostaa tarpeen mukaan ne sivut, joita on tarkoituksena käsitellä sen sijasta, että oppijoille tulostettaisiin koko oppimateriaali kerralla. Oppimateriaalia on mielekästä käyttää paperisena monisteena, koska se on laadittu sillä ajatuksella, että tehtävät ratkaistaan käsin kirjoittamalla vastaukset monisteelle.

Oppimateriaalia voi hyödyntää niin opettajajohtoisen opetuksen kuin itseopiskelun osana esimerkiksi seuraavasti:

- ylöspäin eriyttäminen (oppimateriaalissa tutustutaan suhteelliseen vaalitapaan syvällisemmin kuin esimerkiksi yhteiskuntaopin oppikirjoissa)
- D'Hondtin menetelmää käsittelevän osuuden läpikäyminen yhteisesti koko opetusryhmän kanssa läpi, jonka jälkeen annetaan muita menetelmiä käsittelevät osuudet tutustuttavaksi niille oppijoille, jotka sisäistävät d'Hondtin menetelmän idean nopeasti ja tarvitsevat lisää tekemistä
- itsenäisesti tehtävä projektityö, jossa oppija tutustuu siihen itsenäisesti ja palauttaa tehtävien ratkaisut opettajalle.

Tehtävien yhteydessä on mainittu, mitkä tehtävistä ovat oppimateriaalin aiheita syventäviä tehtäviä. Lisäksi on kerrottu, mihin aiheeseen kukin tehtävä liittyy. Tällöin opettajan on helppo valita sopivia tehtäviä. Oppimateriaali sisältää teoriaosuuksien ja tehtäväpakettien lisäksi kuva- ja lähdeluettelon. Alla on lueteltu, mitkä oppimateriaalin sivut on tarkoitettu oppijoille, ja mitkä ovat vain opettajaa varten:

- Oppijoille tarkoitetut sivut: 7–48 (luvut 1. Lukusarjamenetelmät ja 2. Kvoottimenetelmät)
- Vain opettajalle tarkoitetut sivut: 1–6, 49–52 (Johdanto, Oppimistavoitteet ja oppimateriaalin hyödyntäminen opetuksessa, Kuvaluettelo ja Lähteet)

Oppimateriaali soveltuu sekä yläkoulussa että lukiossa käytettäväksi. Yläkoulussa se soveltuu parhaiten ylöspäin eriyttävän opetuksen osaksi. Lukiotasolla sitä voi käyttää joko koko opetusryhmän kanssa tai ylöspäin eriyttämisessä. Oppimateriaalin läpikäymiseen käytettävää aikaa kannattaa arvioida sen mukaan, mitkä ovat oppijoiden ennakkotiedot sen aiheisiin liittyen ja kuinka paljon opetuksessa on aikaa sen käsittelemiseen. Alla on ehdotus oppimateriaalin ajankäyttösuunnitelmaksi:

- luku 1 Lukusarjamenetelmät: 2 oppituntia
- luku 2 Kvoottimenetelmät: 2 oppituntia.

Oppitunnilla tarkoitetaan nyt 45 minuutin pituista oppituntia.

1. Lukusarjamenetelmät

Tervetuloa tutustumaan lukusarjamenetelmiin! Ennen kuin aloitat lukusarjamenetelmiin perehtymisen, pohdi seuraavia kysymyksiä joko itsenäisesti, parin tai ryhmän tai opettajanne kanssa.

1. Tiedätkö, kuinka eduskuntavaalien tulos lasketaan? Osaatko kertoa, kuinka d'Hondtin menetelmä liittyy eduskuntavaaleihin? Kirjoita vastauksesi seuraavalla sivulla olevan taulukon ensimmäiseen sarakkeeseen.
2. Mitä haluat tietää eduskuntavaalien tuloksen laskemisesta ja d'Hondtin menetelmästä? Kirjoita vastauksesi seuraavalla sivulla olevan taulukon toiseen sarakkeeseen.

Vääriä vastauksia ei ole! Tuo rohkeasti esille kaikki ajatuksesi ja kysymyksesi!

Taulukko 1: Taulukko johdantokysymysten vastauksia varten.

Mitä tiedän	Mitä haluan tietää

Suhteellinen vaalitapa

Suomessa käytetään kunta-, alue-, eduskunta- ja europarlamenttivaaleissa **suhteellista vaalitapaa.** Tällöin puolue saa edustajia suhteessa sen keräämään äänimäärään. Jos puolue saa 10 prosenttia annetuista äänistä, sen tulisi saada 10 prosenttia jaossa olevista paikoista.

Suomen vaalijärjestelmässä äänestäjän antama ääni menee sekä ehdokkaalle että ehdokkaan edustamalle puolueelle. Saman puolueen ehdokkaiden keskinäinen järjestys määräytyy tällöin ehdokkaiden henkilökohtaisten äänimäärien perusteella. Tällaiset vaalit ovat **avoimia listavaaleja.** **Suljetussa listavaalissa** saman puolueen ehdokkaiden keskinäinen järjestys on ennalta päätetty, jolloin äänestäjä äänestää vain puoluetta. **Listalla** tarkoitetaan nyt ehdokaslistaa, joka sisältää puolueen vaaleihin asettamat ehdokkaat.

Kun vaalituloksen laskemisessa käytetään suhteellista vaalitapaa, tarvitaan jokin laskentamenetelmä. Käytettävän laskentamenetelmän avulla puolueiden äänimäärät muunnetaan paikoiksi. On olemassa useita erilaisia laskentamenetelmiä, joista tässä luvussa tutustutaan **lukusarjamenetelmiin**. Esimerkiksi myöhemmin esiteltävä d'Hondtin menetelmä on lukusarjamenetelmä ja sen avulla määritetään vaalin tulos kunta-, alue-, eduskunta- ja europarlamenttivaaleissa.

Lukusarjamenetelmien taustaa

Lukusarjamenetelmät perustuvat **lukujonoihin**

- lukujono on järjestetty luettelo lukuja
- lukujono on päättymätön luettelo
- lukujonoon kuuluvia lukuja kutsutaan lukujonon jäseniksi.

Esimerkki 1.

Luonnolliset luvut 0, 1, 2, 3, 4,… muodostavat lukujonon. Lukujonon ensimmäinen jäsen on luku 0, toinen jäsen on luku 1 ja niin edelleen.

Esimerkki 2.

Lukujonon jäsenet voivat vuorotella. Lukujono 1, 2, 1, 2,… muodostavat vuorottelevan lukujonon. Lukujonon joka toinen jäsen on luku 1 ja joka toinen jäsen on luku 2.

Esimerkki 3.

Lukujono voi koostua samoista luvuista. Täten jono -5, -5, -5, -5,… on lukujono.

Lukusarjamenetelmiä käytettäessä ehdokkaiden keskinäinen järjestys ratkaistaan **vertauslukujen** avulla. Ehdokkaiden vertausluvut lasketaan eri tavalla sen mukaan, mitä lukusarjamenetelmää käytetään. Tällöin **vaalitulos riippuu siitä, mitä menetelmää käytetään**. Vertausluvut voidaan laskea usean eri lukusarjamenetelmän avulla, joista tässä materiaalissa tutustutaan d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmiin. Lukusarjamenetelmät voidaan kuvata lukujonojen avulla ja ne eroavat toisistaan siinä, minkä lukujonon avulla ne on määritelty.

Vaalituloksen laskemiseen lukusarjamenetelmän avulla kuuluu seuraavat vaiheet:

1. Selvitä, kuinka monta paikkaa jaetaan vaaleissa.
2. Selvitä ehdokkaiden henkilökohtaiset äänimäärät.
3. Laske, kuinka paljon ääniä kukin puolue on saanut yhteensä.
4. Jos puolueet muodostavat vaaliliiton, käsitellään niitä yhtenä listana. Tällöin niiden äänimäärät lasketaan yhteen.
5. Järjestä ehdokkaat listojen sisällä suuruusjärjestykseen heidän äänimääriensä perusteella.
6. Laske ehdokkaiden vertausluvut sen mukaan, mitä lukusarjamenetelmää ollaan käyttämässä.
7. Tutki, mitkä ovat suurimmat vertausluvut ja valitse niitä niin monta kuin vaaleissa on paikkoja jaossa. Jos vaaleissa on jaossa esimerkiksi kolme paikkaa, valitse laskemistasi vertausluvuista kolme suurinta vertauslukua.
8. Selvitä, keille ehdokkaille valitsemasi vertausluvut kuuluvat. Nämä ehdokkaat menevät läpi vaaleissa.
9. Vaalitulos on nyt laskettu!

D’Hondtin menetelmä

D’Hondtin menetelmän on kehittänyt belgialainen oikeustieteen professori ja matemaatikko Victor D’Hondt (1841–1901), joka esitteli menetelmänsä ensimmäisen kerran vuonna 1878. Suomessa d’Hondtin menetelmä on käytössä kunta-, alue-, eduskunta- ja europarlamenttivaaleissa. Menetelmää käytetään Suomen lisäksi useassa maassa esimerkiksi parlamenttivaalien yhteydessä. D’Hondtin menetelmää sovelletaan esimerkiksi Islannissa, Belgiassa ja Espanjassa.

D’Hondtin menetelmässä vertausluvut lasketaan seuraavasti:

- listan eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluvuksi tulee listan koko äänimäärä,
- listan toiseksi eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on puolet koko listan äänimäärästä,
- listan kolmanneksi eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on kolmannes koko listan äänimäärästä ja niin edelleen.

Merkitään koko listan äänimäärää kirjaimelle V. Matemaattisemmin ilmaistuna vertausluvut lasketaan d’Hondtin menetelmässä seuraavasti:

- listan eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on $V/1$,
- listan toiseksi eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on $V/2$,
- listan kolmanneksi eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on $V/3$ ja niin edelleen.

D’Hondtin menetelmässä vertausluvut lasketaan positiivisten kokonaislukujen eli lukujonon 1, 2, 3, 4,… avulla.

Huomaa, että ehdokkaiden vertauslukuja laskettaessa jaettavana lukuna on koko ajan listan kokonaisäänimäärä!

D’Hondtin menetelmä suosii suuria puolueita. Se myös kannustaa puolueita muodostamaan vaaliliittoja. Suomen eduskuntavaaleista löytyy tämän myötä esimerkkejä tilanteista, joissa ehdokas on jäänyt suuresta henkilökohtaisesta kannatuksesta huolimatta valitsematta, koska ehdokkaan puolueen kannatus on jäänyt alhaiseksi.

Esimerkki d’Hondtin menetelmän käyttämisestä

Vaaleihin osallistuu puolueet A, B ja C. Ehdokkaat ja heidän äänimääränsä on listattu alla olevassa taulukossa. Vaaleissa on jaossa yhteensä kolme paikkaa. Selvitetään d’Hondtin menetelmää käyttämällä, ketkä ehdokkaat tulevat valituiksi vaaleissa.

Taulukko 2: Puolueiden A, B ja C ehdokkaat ja heidän äänimääränsä.

Puolue A		Puolue B		Puolue C	
Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet
Janna	20	Carl	15	Max	13
Lisa	5	Onni	10		
Jouni	3				
Sofia	2				

Lasketaan puolueen A ehdokkaiden vertausluvut. Puolue A sai yhteensä 20+5+3+2=30 ääntä. Vertausluvut on listattu alla olevassa taulukossa. Tarkista tarvittaessa sivulta 11, kuinka vertausluvut lasketaan d’Hondtin menetelmässä.

Taulukko 3: Puolueen A ehdokkaiden äänet ja vertausluvut.

Puolue A		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Janna	20	30/1=30
Lisa	5	30/2=15
Jouni	3	30/3=10
Sofia	2	30/4=7,5

Lasketaan puolueen B ehdokkaiden vertausluvut. Puolue B sai yhteensä 15+10=25 ääntä. Vertausluvut on listattu alla olevassa taulukossa.

Taulukko 4: Puolueen B ehdokkaiden äänimäärät ja vertausluvut.

Puolue B		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Carl	15	25/1=25
Onni	10	25/2=12,5

Lopuksi tulee laskea puolueen C ainoan ehdokkaan Maxin vertausluku, joka on hänen saamansa äänimäärä eli 13.

Taulukko 5: Puolueen C ehdokkaan äänimäärä ja vertausluku.

Puolue C		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Max	13	13/1=13

Kiinnitä huomiota siihen, että vertauslukuja laskettaessa jaettiin koko ajan listojen kokonaisäänimääriä!

Vaaleissa on jaossa kolme paikkaa eli edellä lasketuista vertausluvuista tulee valita kolme suurinta vertauslukua. Suurin vertausluku on Jannalla, toiseksi suurin Carlilla ja kolmanneksi suurin Lisalla. He tulevat valituiksi vaaleissa. Puolue A saa täten kaksi paikkaa ja puolue B saa yhden paikan.

Huomaa vaalituloksessa se, että Onni ja Max eivät tule valituiksi, vaikka heidän henkilökohtainen äänimääränsä on suurempi kuin Lisalla. Ehdokkaan suuri henkilökohtainen äänimäärä ei takaa läpimenoa, vaan ehdokkaan edustaman puoleen tulee kerätä tarpeeksi suuri osuus annetuista äänistä.

Sainte-Laguën menetelmä

Ranskalainen matemaatikko André Sainte-Laguë (1882–1950) esitteli vuonna 1910 hänen mukaansa nimetyn lukusarjamenetelmän. **Sainte-Laguën menetelmä** on d'Hondtin menetelmän ohella yleinen lukusarjamenetelmä. Sitä käytetään parlamenttivaalien yhteydessä esimerkiksi Ruotsissa, Norjassa ja Latviassa.

Sainte-Laguën menetelmässä vertausluvut lasketaan seuraavasti:

- listan eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluvuksi tulee listan koko äänimäärä,
- listan toiseksi eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on kolmannes koko listan äänimäärästä,
- listan kolmanneksi eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on viidennes koko listan äänimäärästä ja niin edelleen.

Merkitään koko listan äänimäärää kirjaimelle V. Matemaattisemmin ilmaistuna vertausluvut lasketaan Sainte-Laguën menetelmässä seuraavasti:

- listan eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on $V/1$,
- listan toiseksi eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on $V/3$,
- listan kolmanneksi eniten ääniä saaneen ehdokkaan vertausluku on $V/5$ ja niin edelleen.

Sainte-Laguën menetelmässä käytettävä lukujono koostuu parittomista positiivisista kokonaisluvuista eli luvuista 1, 3, 5, 7,… ja niin edelleen.

Huomaa, että vertauslukuja laskettaessa jaettavana lukuna on koko ajan listan kokonaisäänimäärä!

Ruotsissa Sainte-Laguën menetelmää on muunnettu. Ruotsissa vertauslukuja laskettaessa ensimmäisenä jakajana on desimaaliluku 1,2 ja muina jakajina ovat parittomat positiiviset kokonaisluvut 3, 5, 7,… ja niin edelleen. Ensimmäisen jakajan muuntaminen lukua 1 suuremmaksi luvuksi kasvattaa kynnystä puolueen ensimmäisen paikan saamiseksi. Tällä on vaikutusta etenkin pienempien puolueiden mahdollisuuksiin saada paikkoja. **Sainte-Laguën menetelmä suosii d'Hondtin menetelmään verrattuna enemmän pieniä puolueita**.

Historiaa lukusarjamenetelmistä

Vaaleihin ja vaalituloksien laskemiseen käytettäviin laskentamenetelmiin liittyy paljon kiinnostavaa historiaa. Seuraavaksi tutustutaan lyhyesti Yhdysvalloissa käytetyn Jeffersonin menetelmän historiaan ja Suomen ensimmäisiin eduskuntavaaleihin, jotka järjestettiin vuonna 1907.

Jeffersonin menetelmä

Vaalituloksen laskemisessa käytettävän laskentamenetelmän valitseminen on ollut historian saatossa yksi vaaleihin liittyvä poliittinen kysymys. Eräs esimerkki tähän liittyen on 1790-luvun Yhdysvallat, jossa oltiin päättämässä, kuinka edustajainhuoneen jäsenten paikat jaetaan osavaltioiden kesken. Poliittisten ryhmien keskinäisten ristiriitojen lisäksi paikkojen jakamisessa käytettävän menetelmän valitseminen synnytti alueellista ja eri toimialojen, kuten maatalouden ja teollisuuden, välistä vastakkainasettelua. Myös edustajainhuoneen koon määrittämisestä esitettiin erilaisia mielipiteitä.

Kuva 1: Thomas Jefferson (1743–1826).

Laskentamenetelmän valitsemisessa oli esillä kaksi vaihtoehtoa, Thomas Jeffersonin ja Alexander Hamiltonin esittelemät menetelmät. Sekä Jefferson että Hamiltonin olivat yhteydessä presidentti George Washingtoniin vakuuttaakseen presidentin siitä, että kummankin oma menetelmä on parempi kuin toisen ehdottama menetelmä. Washington päätyi lopulta kannattamaan Jeffersonin esittelemää menetelmää. Jeffersonin menetelmän antamat tulokset ovat samoja kuin d’Hondtin menetelmällä saatavat tulokset. Hamiltonin menetelmä taas vastaa Haren menetelmää, joka esitellään kvoottimenetelmiä käsittelevässä luvussa. Jeffersonin menetelmä oli käytössä vuosien 1792–1832 aikana.

Kuva 2: Alexander Hamilton (1755–1804).

Suomen vaalien historiaa: ensimmäiset eduskuntavaalit vuonna 1907

Ensimmäiset eduskuntavaalit järjestettiin vuonna 1907, jolloin Suomi oli vielä Venäjän autonominen suuriruhtinaskunta. Ennen eduskunnan perustamista Suomen suuriruhtinaskunnassa järjestettiin säätyvaltiopäiviä, joissa oli edustettuna aatelisto, papisto, porvarit ja talonpojat. Vuoden 1907 eduskuntavaaleissa äänioikeus laajeni yleiseksi ja yhtäläiseksi äänioikeudeksi, joka kosketti tuolloin kaikkia 24 vuotta täyttäneitä suomalaisia. Täten myös naiset saivat äänioikeudet ja vuonna 1907 valittiinkin 19 naiskansanedustajaa.

Suhteellinen vaalitapa otettiin käyttöön jo ensimmäisissä eduskuntavaaleissa. Sen käyttöönottaminen ja yksikamarisen parlamentin muodostaminen sai laajaa kannatusta puolueilta. Yksi syy suhteellisen vaalitavan kannatukselle oli se, että puolueet eivät olleet tuolloin niin suuria, että ne olisivat olleet tavoittelemassa ehdotonta enemmistöä eli yli puolta jaettavista paikoista, minkä muodostaminen olisi todennäköisempää enemmistövaalitapaa käytettäessä.
Laskentamenetelmäksi valikoitui vuoden 1907 eduskuntavaaleihin d’Hondtin menetelmä.

Kuva 3: Ensimmäiset eduskuntavaalit Maarian Kärsämäessä vuonna 1907.

Tehtäviä lukusarjamenetelmistä

Kirjoitustehtävä luvun 1 sisällöistä.

1.1 Oman oppimisen kuvaaminen.

Luvun läpikäymisen alussa pohdittiin, kuinka eduskuntavaalien tulos lasketaan ja miten d'Hondtin menetelmä liittyy siihen.

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

- Mitä opit lukusarjamenetelmistä?
- Mitä vastauksia sait luvun alussa esittämiisi kysymyksiin lukusarjamenetelmiä käsittelevästä tekstistä?

Kirjoita vastauksesi alla olevaan taulukkoon.

Taulukko 6: Taulukko vastauksia varten.

Mitä opin

Laskutehtävä d'Hondtin menetelmästä.

1.2 Vaalituloksen laskeminen d'Hondtin menetelmällä.

Alla olevassa taulukossa on lueteltu kolmen vaaleihin osallistuneen puolueen ehdokkaat ja ehdokkaiden keräämät äänimäärät. Vaaleissa on neljä paikkaa jaossa.

Taulukko 7: Puolueiden D, E ja F ehdokkaat ja heidän äänimääränsä.

Puolue D		Puolue E		Puolue F	
Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet
Li	10	Niko	25	Jemina	6
Johan	8	Ami	20	Marko	4
Antti	7				
Soile	3				
Jani	2				

Selvitä d'Hondtin menetelmää käyttämällä, ketkä neljä ehdokasta menevät läpi vaaleissa. Kerro myös, mitkä ovat heidän henkilökohtaiset äänimääränsä.

Voit käyttää tällä ja seuraavalla sivulla olevia taulukoita apuna vaalituloksen laskemisessa! Jos vertausluvut ovat desimaalilukuja, pyöristä ne kolmen desimaalin tarkkuuteen.

Taulukko 8: Puolueen D ehdokkaiden äänet ja vertausluvut.

Puolue D		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Li	10	
Johan	8	
Antti	7	
Soile	3	
Jani	2	

Taulukko 9: Puolueen E ehdokkaiden äänimäärät ja vertausluvut.

Puolue E		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Niko	25	
Ami	20	

Taulukko 10: Puolueen F ehdokkaiden äänimäärät ja vertausluvut.

Puolue F		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Jemina	6	
Marko	4	

Tutki halutessasi, miten vaalitulos muuttuisi, jos puolueet D ja F olisivat vaaliliitossa. Kirjoita tälle sivulle läpimenneiden ehdokkaiden nimet ja heidän henkilökohtaiset äänimääränsä.

Kirjoitustehtävä luvun 1 sisällöistä.

1.3 Täydennä puuttuvat sanat.

Eduskuntavaaleissa käytetään _ vaalitapaa. Vaalitulos lasketaan eduskuntavaaleissa _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ menetelmällä, joka on kehitetty _ _ _ _ _ _ _ _-luvulla. Vaalituloksen laskemiseen on olemassa erilaisia menetelmiä ja esimerkiksi Ruotsissa käytetään _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ menetelmää. D’Hondtin menetelmä suosii _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ puolueita kun taas Sainte-Laguën menetelmä suosii _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _puolueita. Lukusarjamenetelmiä käytettäessä ehdokkaiden keskinäinen järjestys selvitetään _ avulla.

Kirjoitustehtävä d’Hondtin menetelmästä.

1.4 Täydennä seuraavat lauseet.

D’Hondtin menetelmää käytettäessä lasketaan vertauslukuja. Jos ehdokas on saanut kaikista oman puolueensa ehdokkaista eniten ääniä, hänen vertauslukunsa on _
_ _.

Jos ehdokas on saanut kaikista oman puolueensa ehdokkaista neljänneksi eniten ääniä, hänen vertauslukunsa on _
_ _.

Ehdokas voi jäädä valitsematta vaaleissa suuresta henkilökohtaisesta äänimäärästä huolimatta, jos _
_ _.

Aluevaalien lisäksi d’Hondtin menetelmää käytetään Suomessa _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
_ _.

Vertailu- ja pohdintatehtävä d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmistä.

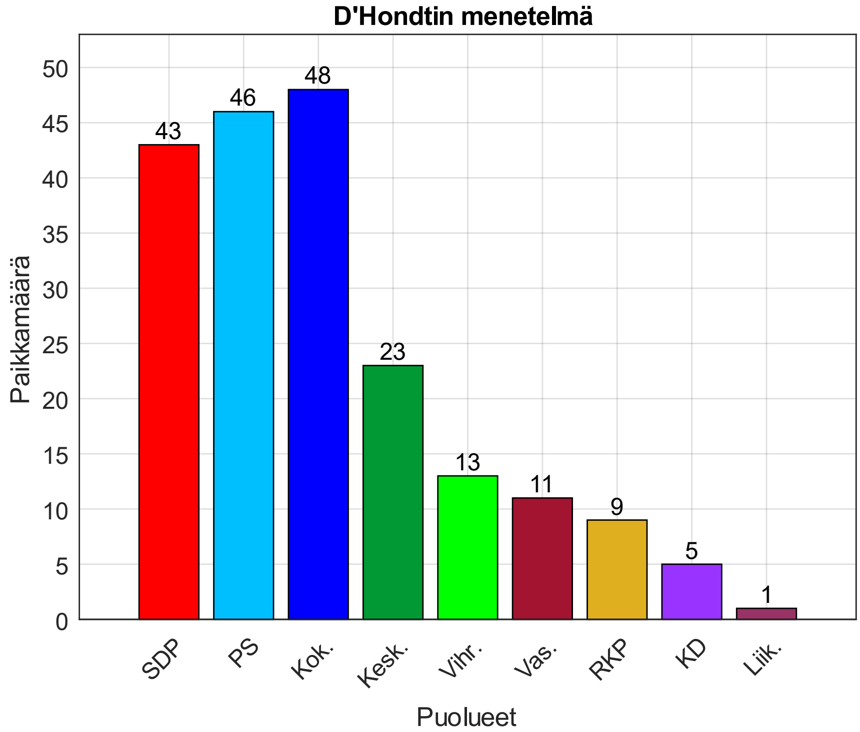
1.5 Vaalituloksien vertailua.

Seuraavalla sivulla on kuvat vuoden 2023 eduskuntavaalien tuloksista laskettuna sekä d'Hondtin (kuva 4) että Sainte-Laguën (kuva 5) menetelmien avulla. D'Hondtin menetelmän avulla laskettu tulos vastaa vuoden 2023 eduskuntavaalien varsinaista tulosta. Taulukossa 11 on puolueiden nimet ja nimilyhenteet.

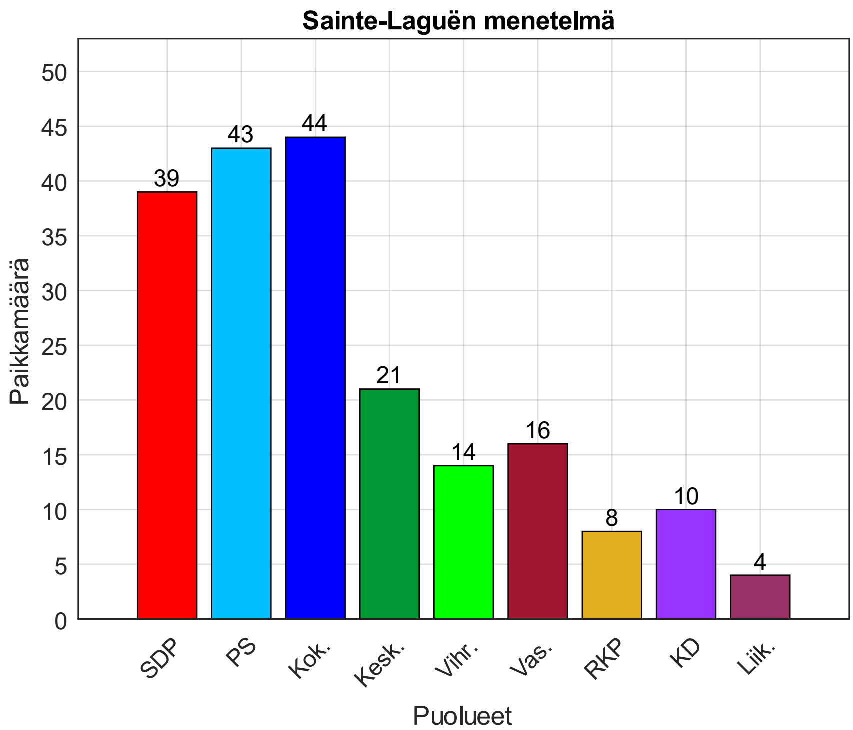
Taulukko 11: Puolueiden nimet ja nimilyhenteet.

Puolueen nimi	Puolueen nimilyhenne
Suomen Sosialidemokraattinen Puolue	SDP
Perussuomalaiset	PS
Kansallinen Kokoomus	Kok.
Suomen Keskusta	Kesk.
Vihreä liitto	Vihr.
Vasemmistoliitto	Vas.
Suomen ruotsalainen kansanpuolue	RKP
Suomen Kristillisdemokraatit (KD)	KD
Liike Nyt	Liik.

Tuloksissa ei ole huomioitu äänikynnystä. Äänikynnyksellä tarkoitetaan osuutta annetuista äänistä, joka puolueen tai tulee kerätä ennen kuin se voi saada paikkoja vaaleissa.



Kuva 4: Vuoden 2023 eduskuntavaalien d'Hondtin menetelmällä laskettuna eli vaalin varsinainen tulos.



Kuva 5: Vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos Sainte-Laguën menetelmällä.

Vertaile tuloksia ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Millä tavalla puolueiden paikkamäärät eroavat d’Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmien välillä?
b) Ovatko tulokset sellaisia, mitä itse odotat luettuasi d’Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmiä käsittelevät osuudet? Tarkista tarvittaessa, minkä kokoisia puolueita nämä menetelmät suosivat.

Kirjoita vastauksesi tälle sivulle.

Kirjoitustehtävä luvun 1 sisällöistä.

1.6 Kirjoitustehtävä lukusarjamenetelmistä.

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

- Mitä vaiheita vaalituloksen laskemiseen kuuluu lukusarjamenetelmiä käytettäessä?
- Millä tavalla d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmät eroavat toisistaan?

Kirjoita vastauksesi alla olevan suorakulmion sisälle. Vastauksen tulee mahtua alueen sisälle. Keskity olennaiseen!

Laskutehtävä Sainte-Laguën menetelmästä.

1.7 Syventävä tehtävä: Vaalituloksen laskeminen Sainte-Laguën menetelmällä.

Vaaleihin osallistuu puolueet A, B ja C. Puolueella A on neljä ehdokasta ja puolueella B on kaksi ehdokasta. Puolueelta C osallistuu vaaleihin yksi ehdokas. Vaaleissa on jaossa yhteensä kolme paikkaa. Puolueiden asettamien ehdokkaiden äänimäärät on lueteltu alla olevassa taulukossa.

Taulukko 12: Puolueiden A, B ja C ehdokkaat ja heidän äänimääränsä.

Puolue A		Puolue B		Puolue C	
Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet
Janna	20	Carl	15	Max	13
Lisa	5	Onni	10		
Jouni	3				
Sofia	2				

Selvitä vaalitulos Sainte-Laguën menetelmää käyttämällä ja vastaa seuraaviin kysymyksiin. Käytä vertauslukuja laskettaessa ensimmäisenä jakajana lukua 1.

a) Ketkä kolme ehdokasta menevät läpi?

b) Eroaako vaalitulos sivujen 12–13 esimerkin vaalituloksesta, joka on laskettu d'Hondtin menetelmän avulla? Vastaa ”Kyllä” tai ”Ei”.

c) Jos vastasit edelliseen kysymykseen ”Kyllä”, niin millä tavalla vaalitulokset eroavat toisistaan?

Voit käyttää seuraavalla sivulla olevia taulukoita apuna vaalituloksen laskemisessa!

Taulukko 13: Puolueen A ehdokkaiden äänet ja vertausluvut.

Puolue A		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Janna	20	
Lisa	5	
Jouni	3	
Sofia	2	

Taulukko 14: Puolueen B ehdokkaiden äänimäärät ja vertausluvut.

Puolue B		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Carl	15	
Onni	10	

Taulukko 15: Puolueen C ehdokkaan äänimäärä ja vertausluku.

Puolue C		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Max	13	

Kirjoita tälle sivulle vastauksesi edellisellä sivulla esitettyihin kysymyksiin.

Laskutehtävä lukusarjamenetelmistä.

1.8 Syventävä tehtävä: Lukujonot ja erilaiset lukusarjamenetelmät.

Tutustutaan aluksi lukujonojen matemaattisiin merkintöihin.

Lukujonojen merkintöjä:

- lukujonoja nimetään usein pienten kirjainten avulla,
- lukujonon nimen alaindeksi kertoo, kuinka mones lukujonon jäsen on kyseessä.

Jos lukujonon nimi on a, tällöin

- merkinnällä a_5 tarkoitetaan lukujonon 5. jäsentä,
- lukujonon yleisen eli n. jäsenen merkintä on a_n ja
- koko lukujonon merkintä on (a_n).

Lukujonojen indeksit voivat vaihdella. Indekseinä voivat olla esimerkiksi:

- luonnolliset luvut 0, 1, 2, 3,…
- positiiviset kokonaisluvut 1, 2, 3, 4,…

Esimerkki 4.

Lukujonon n. jäsen on

$$a_n = \frac{n+1}{5}$$

ja $n = 1, 2, 3, \ldots$. Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä lasketaan seuraavasti.

1. jäsen: sijoitetaan muuttujan n paikalle luku 1

$$a_1 = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5}.$$

2. jäsen: sijoitetaan muuttujan n paikalle luku 2

$$a_2 = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Tehtävä.

Taulukossa 16 on lueteltu eri lukusarjamenetelmiin liittyvät lukujonot. **Laske kunkin menetelmän lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä**, kun $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$.

Jos lukujonon jäsenet ovat desimaalilukuja, pyöristä ne kolmen desimaalin tarkkuuteen. Täydennä vastauksesi taulukkoon 16.

Taulukko 16: Lukusarjamenetelmiin liittyviä lukujonoja.

Menetelmän nimi	Lukujonon yleisen jäsenen kaava	1. jäsen	2. jäsen	3. jäsen
D'Hondt	n			
Sainte-Laguë	$2n-1$			
Imperiali	$n+1$			
Tanskan menetelmä	$3n-2$			
Viron menetelmä	$n^{0,9}$			
Macaon menetelmä	2^{n-1}			
Huntington	$\sqrt{n(n-1)}$			
Dean	$\frac{2n(n-1)}{2n-1}$			

2. Kvoottimenetelmät

Tervetuloa tutustumaan kvoottimenetelmiin! Ennen kuin aloitat kvoottimenetelmiin perehtymisen, pohdi seuraavia kysymyksiä joko itsenäisesti, parin tai ryhmän tai opettajanne kanssa.

1. Osaatko sanoa, mitkä asiat vaikuttavat siihen, kuinka kansanedustajat on jaettu vaalipiirien kesken? Entä kuinka matematiikka voisi liittyä siihen? Miksi esimerkiksi Savo-Karjalan vaalipiiristä valitaan eduskuntavaaleissa 15 kansanedustajaa? Kirjoita vastauksesi seuraavalla sivulla olevan taulukon ensimmäiseen sarakkeeseen.
2. Mitä haluat tietää kohdan 1 kysymyksiin liittyen? Kirjoita vastauksesi seuraavalla sivulla olevan taulukon toiseen sarakkeeseen.

Vääriä vastauksia ei ole! Tuo rohkeasti esille kaikki ajatuksesi ja kysymyksesi!

Taulukko 17: Taulukko johdantokysymysten vastauksia varten.

Mitä tiedän	Mitä haluan tietää

Suhteellinen vaalitapa

Suomessa käytetään kunta-, alue-, eduskunta- ja europarlamenttivaaleissa **suhteellista vaalitapaa.** Tällöin puolue saa edustajia suhteessa sen keräämään äänimäärään. Jos puolue saa 10 prosenttia annetuista äänistä, sen tulisi saada 10 prosenttia jaossa olevista paikoista.

Suomen vaalijärjestelmässä äänestäjän antama ääni menee sekä ehdokkaalle että ehdokkaan edustamalle puolueelle. Saman puolueen ehdokkaiden keskinäinen järjestys määräytyy tällöin ehdokkaiden henkilökohtaisten äänimäärien perusteella. Tällaiset vaalit ovat **avoimia listavaaleja.** **Suljetussa listavaalissa** saman puolueen ehdokkaiden keskinäinen järjestys on ennalta päätetty, jolloin äänestäjä äänestää vain puoluetta. **Listalla** tarkoitetaan nyt ehdokaslistaa, joka sisältää puolueen vaaleihin asettamat ehdokkaat.

Kun vaalituloksen laskemisessa käytetään suhteellista vaalitapaa, tarvitaan jokin laskentamenetelmä. Käytettävän laskentamenetelmän avulla puolueiden äänimäärät muunnetaan paikoiksi. On olemassa useita erilaisia laskentamenetelmiä, joista tässä luvussa tutustutaan **kvoottimenetelmiin**. Esimerkiksi myöhemmin esiteltävä Haren menetelmä on kvoottimenetelmä ja sen avulla jaetaan kansanedustajien paikat vaalipiirien kesken.

Kvoottimenetelmien taustaa

Kvoottimenetelmiä käytettäessä tutkitaan osamääriä, joissa puolueiden saamia äänimääriä jaetaan jollakin ennalta sovitulla luvulla Q. Lukua Q kutsutaan **kvootiksi**. Kvootin voi ajatella yhden paikan hinnaksi eli äänimääräksi, joka antaa puolueelle paikan. Kvoottimenetelmät eroavat toisistaan siinä, miten kvootti Q lasketaan.

Paikat jaetaan puolueiden kesken tarkastelemalla osamäärien

$$\frac{\text{puolueen äänimäärä}}{Q}$$

kokonais- ja desimaaliosia.

Käydään seuraavaksi läpi, mitä desimaaliluvun kokonais- ja desimaaliosalla tarkoitetaan. Tarkastellaan positiivisia desimaalilukuja. **Kokonaisosalla** tarkoitetaan ennen desimaalipilkkua olevaa osaa. **Desimaaliosalla** tarkoitetaan desimaaliluvun jälkeen olevaa osaa. **Desimaaliluku voidaan kirjoittaa sen kokonais- ja desimaaliosan summana**

Esimerkki 5.

Mitkä ovat seuraavien positiivisten desimaalilukujen kokonais- ja desimaaliosat?

a) 1,02
b) 0,98
c) 10,33

Ratkaisu.

a) Desimaaliluvun 1,02 kokonaisosa on 1 ja desimaaliosa on 0,02.
b) Desimaaliluvun 0,98 kokonaisosa on 0 ja desimaaliosa on 0,98.
c) Desimaaliluvun 10,33 kokonaisosa 10 ja desimaaliosa on 0,33.

Seuraavaksi esitetään syventävää lisätietoa kokonais- ja desimaaliosaan liittyen. Voit halutessasi siirtyä suoraan seuraavalle sivulle.

Kokonais- ja desimaaliosalla on olemassa omat merkinnät:

- luvun x kokonaisosan merkintä on $\lfloor x \rfloor$
- luvun x desimaaliosa saadaan vähentämällä siitä sen kokonaisosa eli desimaaliosa on $x - \lfloor x \rfloor$.

Pohdi, mille lukusuoran välille luvun desimaaliosan tulee kuulua. Selvitä halutessasi, mikä on lattiafunktio ja miten se liittyy desimaaliluvun kokonaisosaan. Miltä lattiafunktion kuvaaja näyttää?

Vaalituloksen laskemiseen kvoottimenetelmän avulla kuuluu seuraavat vaiheet:

1. Selvitä, kuinka monta paikkaa jaetaan vaaleissa.
2. Selvitä ehdokkaiden henkilökohtaiset äänimäärät.
3. Laske, kuinka paljon ääniä kukin puolue on saanut yhteensä.
4. Jos puolueet muodostavat vaaliliiton, käsitellään niitä yhtenä listana. Tällöin niiden äänimäärät lasketaan yhteen.
5. Laske, kuinka monta ääntä vaaleissa annettiin yhteensä.
6. Laske kvootti Q sen perusteella, mitä kvoottimenetelmää käytetään.
7. Jaa kunkin puoleen kokonaisäänimäärä kvootilla Q eli laske osamäärät

$$\frac{\text{puolueen äänimäärä}}{Q}$$

8. Jaa kullekin puolueelle edellä lasketun osamäärän kokonaisosan verran paikkoja. Jos esimerkiksi puolueen A osamäärä on

$$\frac{\text{puolueen A äänimäärä}}{Q} = 3{,}47$$

   jaettaisiin puolueella A tässä vaiheessa kolme paikkaa.

9. Laske, kuinka monta paikkaa on tässä vaiheessa jaettu yhteensä.
10. Jos kaikkia paikkoja ei ole vielä jaettu, jaa loput paikat seuraavasti. Laske kunkin puolueen osamäärän desimaaliosa.
11. Järjestetä puolueiden desimaaliosat suuruusjärjestykseen.
12. Jaa loput paikat yksi kerrallaan niille puolueille, joiden desimaaliosat ovat suurimmat. Jos jakamatta olisi esimerkiksi kaksi paikkaa, ne puolueet, joilla on suurin ja toiseksi suurin desimaaliosa, saisivat molemmat yhden lisäpaikan.
13. Tarkastele puolueita, jotka ovat saaneet paikkoja. Jaa paikat puolueittain ehdokkaille heidän henkilökohtaisten äänimäärien suuruusjärjestyksen perusteella. Jos esimerkiksi puolue A saisi kolme paikkaa, paikat menisivät kolmelle eniten ääniä saaneelle puolueen A ehdokkaalle.
14. Vaalitulos on nyt laskettu!

Haren menetelmä

Esitellään seuraavaksi **Haren kvootti**. Oletetaan, että vaaleissa on annettu yhteensä V kappaletta ääniä ja jaettavia paikkoja on h kappaletta. Haren kvootti Q on osamäärä

$$Q = \frac{V}{h}.$$

Haren kvootti on nimetty Thomas Haren (1806–1891) mukaan, joka oli englantilainen lakimies. Hän oli suhteellisen vaalitavan kannattaja ja hänet tunnetaan siirtoäänivaalitavan parissa tehdystä työstä. Suhteellista vaalitapaa voidaan soveltaa siirtoäänivaalitavan avulla ja siinä äänestäjät järjestävät ehdokkaat mieluisuusjärjestykseen. Kun käytetään kvoottimenetelmää ja kvoottina on Haren kvootti, puhutaan **Haren menetelmästä**. Jos puolue on kerännyt 20 % annetuista äänistä, se saa Haren menetelmää käytettäessä 20 % jaettavista paikoista.

Kuva 6: Thomas Hare.

Haren menetelmä suosii d'Hondtin menetelmään verrattuna enemmän pieniä puolueita.

Vaalimatematiikassa tutkitaan usein, kuinka paikat jaetaan puolueiden kesken niiden keräämien äänimäärien perusteella. Lisäksi voidaan tutkia, kuinka paikat jaetaan eri alueiden kesken niiden asukasmääriin pohjautuen. Yksi esimerkki tähän liittyen on kansanedustajien paikkojen jakaminen vaalipiirien kesken, mitä käsitellään seuraavaksi.

Haren menetelmä ja kansanedustajien jakaminen vaalipiirien kesken

Kansanedustajat jaetaan Manner-Suomen vaalipiirien kesken Haren menetelmän avulla. Jako tehdään äänimäärien sijasta Suomen kansalaisten ja kussakin vaalipiirissä asuvien Suomen kansalaisten lukumääriin perustuen. Ahvenanmaan vaalipiiristä valitaan aina yksi kansanedustaja. Tällöin Manner-Suomen vaalipiirien kesken jaetaan 199 kansanedustajan paikkaa. Haren kvootti on täten muotoa

$$Q = \frac{\text{Suomen kansalaisten lukumäärä}}{199}.$$

Taulukossa 18 on esitetty vuoden 2023 eduskuntavaaleissa käytetty kansanedustajien jako Manner-Suomen vaalipiirien kesken.

Taulukko 18: Kansanedustajien jako Manner-Suomen vaalipiirien kesken vuoden 2023 eduskuntavaaleissa.

Vaalipiiri	Valittavien kansanedustajien lukumäärä
Helsinki	23
Uusimaa	37
Varsinais-Suomi	17
Satakunta	8
Häme	14
Pirkanmaa	20
Kaakkois-Suomi	15
Savo-Karjala	15
Vaasa	16
Keski-Suomi	10
Oulu	18
Lappi	6

Esimerkki Haren menetelmän käyttämisestä

Vaaleihin osallistuu puolueet A, B ja C. Puolueella A on neljä ehdokasta ja puolueella B on kaksi ehdokasta. Puolueelta C osallistuu vaaleihin yksi ehdokas. Vaaleissa on jaossa yhteensä kolme paikkaa. Selvitetään Haren menetelmän avulla, ketkä ehdokkaat menevät läpi. Puolueiden asettamien ehdokkaiden äänimäärät on lueteltu alla olevassa taulukossa.

Taulukko 19: Puolueiden A, B ja C ehdokkaat ja heidän äänimääränsä.

Puolue A		Puolue B		Puolue C	
Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet
Janna	20	Carl	15	Max	13
Lisa	5	Onni	10		
Jouni	3				
Sofia	2				

Lasketaan ensin kunkin puolueen kokonaisäänimäärä. Puolue A sai 20+5+3+2=30 ääntä, puolue B sai 15+10=25 ääntä ja puolue C 13 ääntä. Vaaleissa annettiin täten yhteensä $V = 30 + 25 + 13 = 68$ ääntä. Jaettavia paikkoja on $h = 3$ kappaletta, jolloin Haren kvootti on

$$Q = \frac{V}{h} = \frac{68}{3} \approx 22{,}667.$$

Laskennan seuraavat vaiheet on tiivistetty alla olevaan taulukkoon. Ensin kunkin puolueen äänimäärä jaetaan Haren kvootilla $Q \approx 22{,}667$. Tämän jälkeen määritetään osamääriksi saatujen desimaalilukujen kokonais- ja desimaaliosat.

Taulukko 20: Puolueiden paikkamäärien laskeminen Haren menetelmällä.

Puolue	Puolueen äänimäärä	Osamäärä	Kokonaisosa	Desimaaliosa	Paikkamäärä
A	30	1,3235	1	0,3235	1
B	25	1,1029	1	0,1029	1
C	13	0,5735	0	0,5735	1

Puolueille jaetaan ensin niiden kokonaisosan verran paikkoja. Tässä vaiheessa puolueet A ja B saavat molemmat yhden paikan. Koska jaossa on yhteensä kolme paikkaa, jaetaan yksi paikka puolueiden desimaaliosien perusteella. Puolueen C desimaaliosa on suurin, jolloin viimeinen paikka menee sille.

Jokainen puolue saa vaaleissa yhden paikan. **Nämä paikat menevät puolueiden eniten ääniä saaneille ehdokkaille. Vaaleissa menevät läpi Janna, Carl ja Max.**

Droopin menetelmä

Tutustutaan seuraavaksi **Droopin kvoottiin**. Oletetaan, että vaaleissa on annettu yhteensä V kappaletta ääniä ja jaettavia paikkoja on h kappaletta. Droopin kvootti on muotoa

$$Q = \lfloor V/(h+1) \rfloor + 1.$$

Droopin kvootti saadaan laskemalla ensin osamäärän

$$\frac{V}{h+1}$$

kokonaisosa, minkä jälkeen siihen lisätään luku 1.

Droopin kvootti on nimetty englantilaisen lakimiehen Henry Richmond Droopin (1831–1884) mukaan. Kun käytetään kvoottimenetelmää ja kvoottina on Droopin kvootti, puhutaan **Droopin menetelmästä**.

Droopin menetelmä suosii enemmän suuria puolueita Haren menetelmään verrattuna.

Historiaa kvoottimenetelmistä

Historian saatossa on tutkittu, kuinka parlamentin koko vaikuttaa edustajien jakautumiseen puolueiden tai alueiden kesken. Yhdysvalloissa laskettiin vuoden 1880 väestönlaskentaan perustuen, kuinka monta edustajaa kukin osavaltio saisi edustajainhuoneeseen. Edustajien jako laskettiin Haren menetelmän avulla, joka tunnetaan Yhdysvalloissa Hamiltonin menetelmänä.

Aluksi laskennassa edustajainhuoneen kokona käytettiin 275 edustajaa, minkä jälkeen kokoa kasvatettiin yksi kerrallaan 350 edustajaan asti. Laskelmien tuloksia tutkittaessa huomattiin, että kun edustajainhuoneen kokona oli 299 edustajaa, Alabaman osavaltio saisi kahdeksan edustajaa. Kummallista tuloksissa oli se, että jos edustajainhuoneen kokoa kasvatettaisiin 300 edustajaan, Alabama saisikin vain seitsemän edustajan.

Kuva 7: Yhdysvaltain kongressitalo.

Näiden laskelmien tulokset herättivät edustajainhuoneessa huomiota niin paljon, että jopa matematiikan luonnetta tieteenalana kyseenalaistettiin. Texasin edustaja Roger Q. Mills nimittäin kuvasi edustajainhuoneen paikkojen jakamiseen liittyvän matematiikan olevan jotakin sellaista matematiikkaa, joka saa ”totuuden näyttämään valheelta”. Laskelmien tuloksissa on kuitenkin kyse siitä, että Haren menetelmä saattaa johtaa tietyissä tilanteissa maalaisjärjen vastaisiin paikkojen jakoihin. Tällaista paikkojen jakamisessa muodostuvaa tilannetta, jossa alueen tai puolueen edustajien lukumäärä pienenee jaettavien paikkojen lukumäärän kasvaessa, kutsutaan **Alabaman paradoksiksi**.

Tehtäviä kvoottimenetelmistä

Kirjoitustehtävä luvun 2 sisällöistä.

2.1 Oman oppimisen kuvaaminen.

Luvun alussa pohdittiin, mitkä asiat vaikuttavat kansanedustajien paikkojen jakautumiseen eri vaalipiirien kesken. Lisäksi pohdittiin, kuinka matematiikka voisi liittyä tähän aiheeseen.

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

- Mitä opit kvoottimenetelmistä?
- Mitä vastauksia sait luvun alussa esittämiisi kysymyksiin kvoottimenetelmiä käsittelevästä tekstistä?

Kirjoita vastauksesi alla olevaan taulukkoon.

Taulukko 21: Taulukko vastauksia varten.

Mitä opin

Kirjoitustehtävä luvun 2 sisällöistä.

2.2 Täydennä seuraavat lauseet.

Kun käytetään Haren menetelmää ja puolue saa vaaleissa 30 % annetuista äänistä, se saa _.

Eri kvoottimenetelmät erottaa se, _.

Kvoottimenetelmiä käytettäessä tutkitaan _.

D’Hondtin menetelmä suosii Haren menetelmään verrattuna _.

Kansanedustajien paikkajako Manner-Suomen vaalipiirien kesken lasketaan _.

Droopin kvootin kaavan erona Haren kvootin kaavaan on esimerkiksi se, että _.

Vertailu- ja pohdintatehtävä Haren ja Droopin menetelmistä.

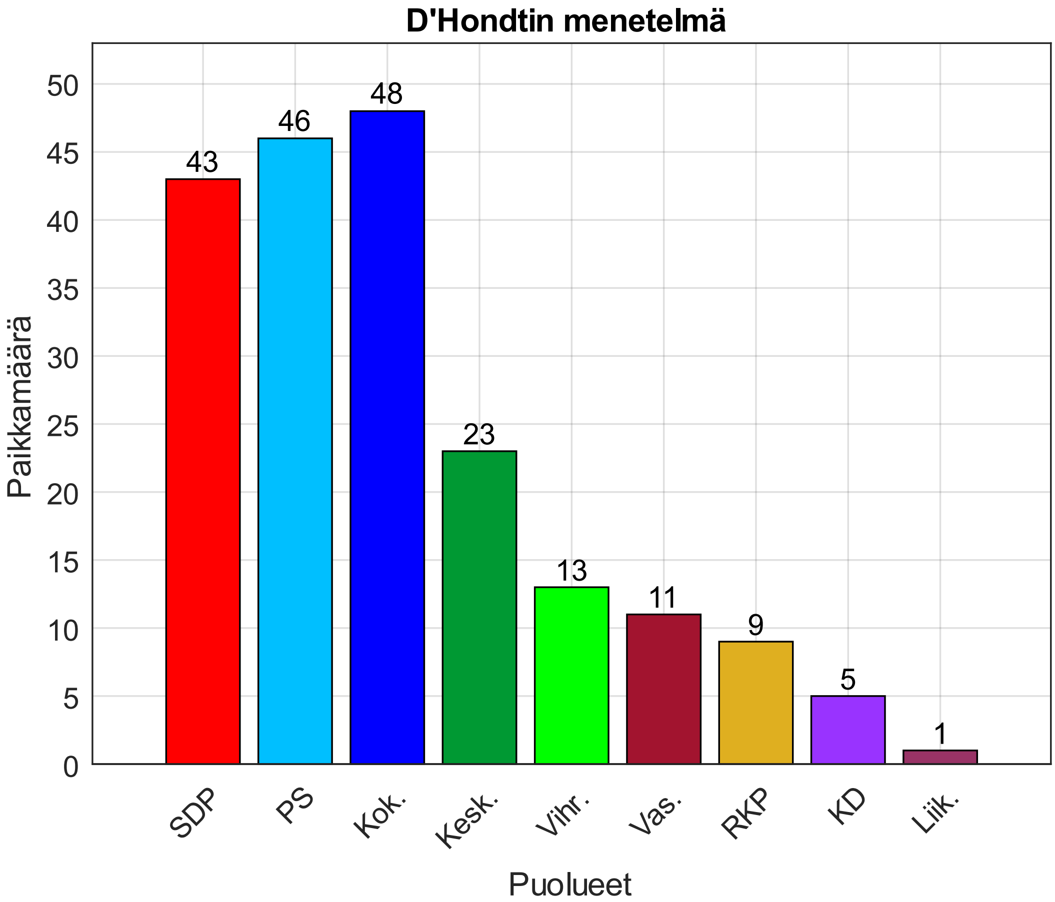
2.3 Vaalitulosten vertailua.

Alla on kuva vuoden 2023 eduskuntavaalien tuloksesta (kuva 8). Sen jälkeen on esitetty saman vaalin tulos Haren (kuva 9) ja Droopin (kuva 10) menetelmillä laskettuna. Taulukossa 23 on puolueiden nimet ja nimilyhenteet.

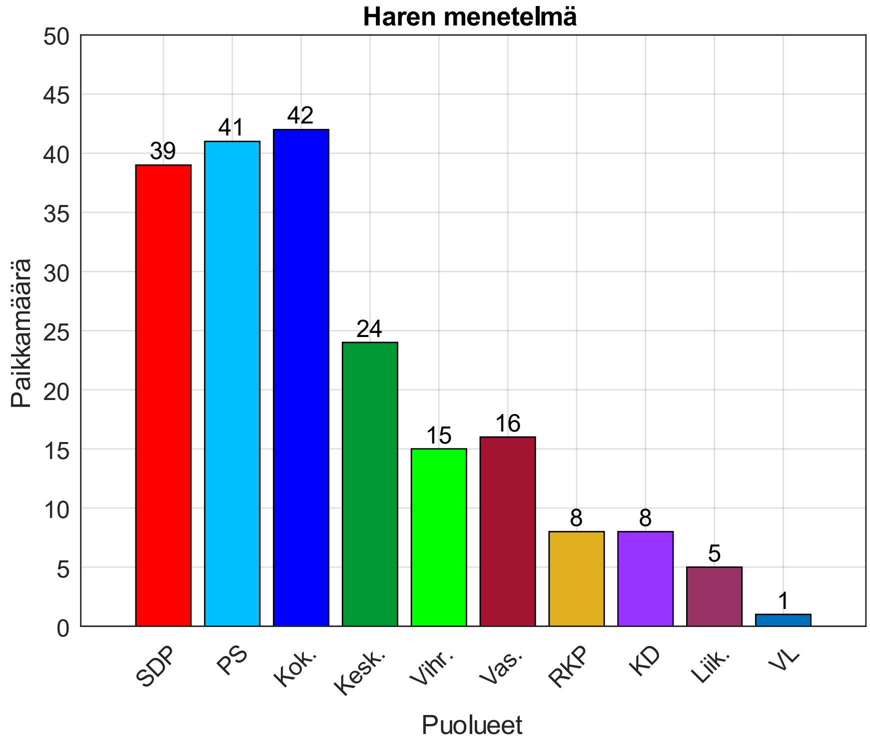
Taulukko 22: Puolueiden nimet ja nimilyhenteet.

Puolueen nimi	Puolueen nimilyhenne
Suomen Sosialidemokraattinen Puolue	SDP
Perussuomalaiset	PS
Kansallinen Kokoomus	Kok.
Suomen Keskusta	Kesk.
Vihreä liitto	Vihr.
Vasemmistoliitto	Vas.
Suomen ruotsalainen kansanpuolue	RKP
Suomen Kristillisdemokraatit (KD)	KD
Liike Nyt	Liik.
Vapauden liitto	VL

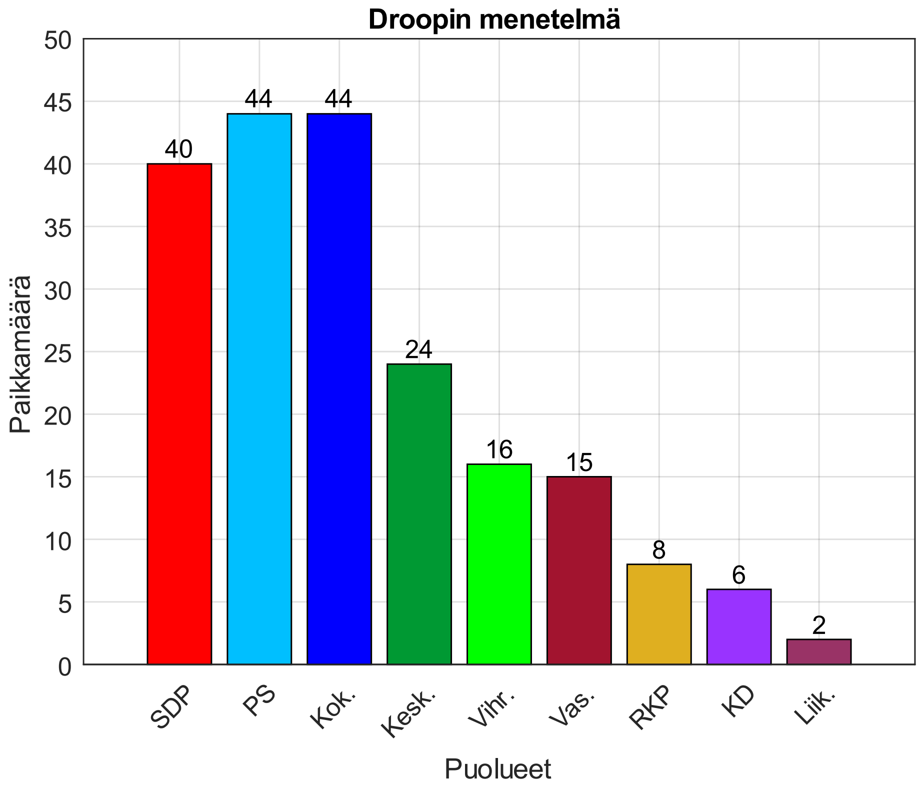
Tuloksissa ei ole huomioitu äänikynnystä. Äänikynnyksellä tarkoitetaan osuutta annetuista äänistä, joka puolueen tulee kerätä ennen kuin se voi saada paikkoja vaaleissa.



Kuva 8: Eduskuntavaalien 2023 tulos d'Hondtin menetelmällä laskettuna eli vaalin varsinainen tulos.



Kuva 9: Vuoden 2023 eduskuntavaalien Haren menetelmällä.



Kuva 10: Vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos Droopin menetelmällä.

Vertaile tuloksia ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Miten puolueiden saamat paikkamäärät muuttuvat, kun käytetään d’Hondtin menetelmän sijasta Haren menetelmää?
b) Miten puolueiden saamat paikkamäärät muuttuvat, kun käytetään d’Hondtin menetelmän sijasta Droopin menetelmää?
c) Millä tavalla Haren ja Droopin menetelmien antamat tulokset eroavat toisistaan? Ovatko tulokset sellaisia, mitä itse odotat luettuasi Haren ja Droopin menetelmiä käsittelevät osuudet? Tarkista tarvittaessa, minkä kokoisia puolueita nämä menetelmät suosivat.

Kirjoita vastauksesi tälle sivulle.

Kirjoitustehtävä luvun 2 sisällöistä.

2.4 Kirjoitustehtävä kvoottimenetelmistä.

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

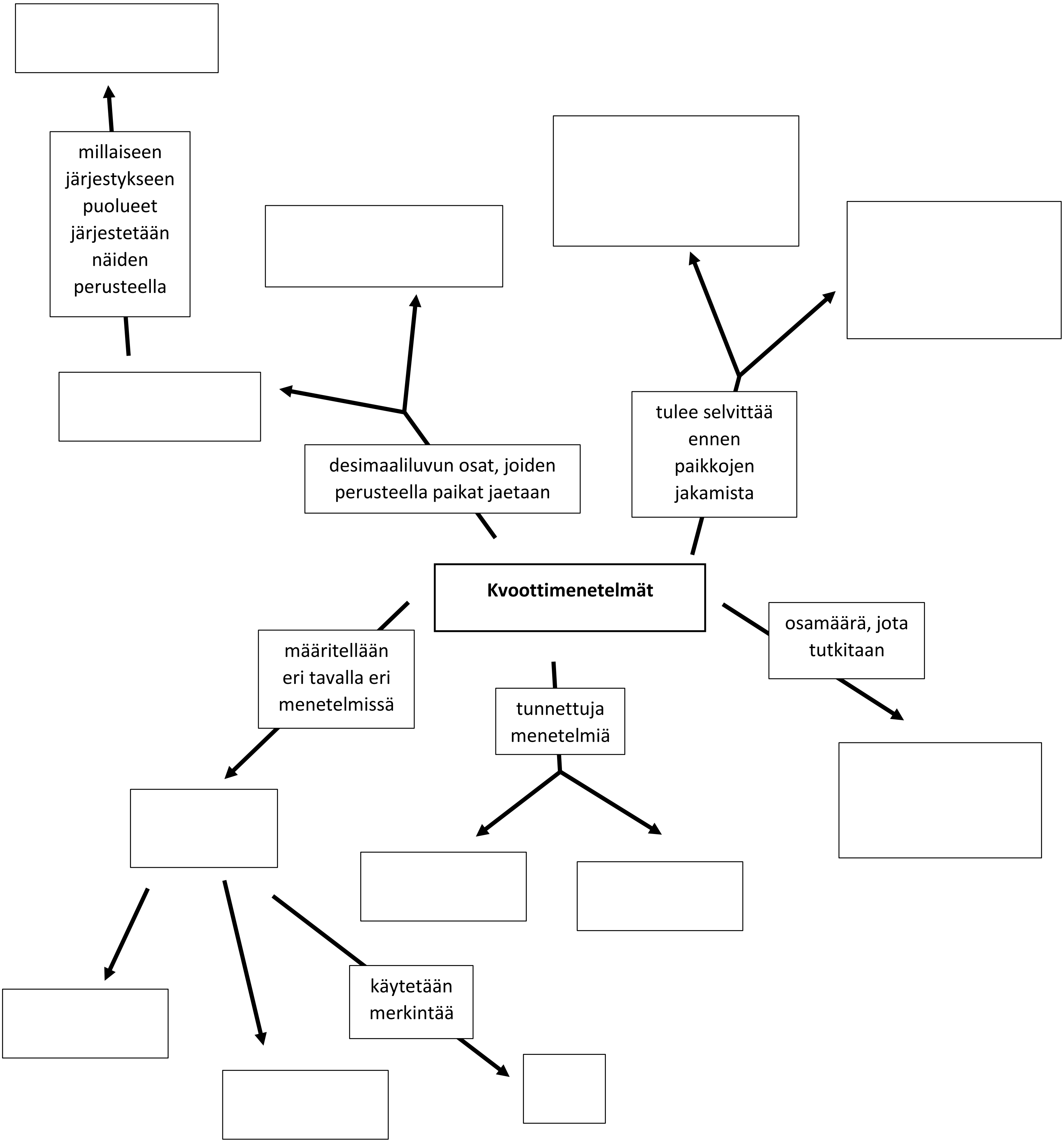
- Miten desimaaliluvut liittyvät kvoottimenetelmiin?
- Mitä vaiheita vaalituloksen laskemiseen kuuluu kvoottimenetelmiä käytettäessä?

Kirjoita vastauksesi alla olevan suorakulmion sisälle. Vastauksen tulee mahtua alueen sisälle. Keskity olennaiseen!

Käsitekarttatehtävä luvun 2 sisällöistä.

2.5 Käsitekartan täydentäminen kvoottimenetelmiin liittyen.

Täydennä käsitekartan tyhjät laatikot sopivilla sanoilla. Katso laatikoihin liittyvät vihjetekstit.



Laskutehtävä Haren menetelmästä.

2.6 Vaalituloksen laskeminen Haren menetelmällä.

Alla olevassa taulukossa on lueteltu kolmen vaaleihin osallistuneen puolueen ehdokkaat ja ehdokkaiden keräämät äänimäärät. Vaaleissa on neljä paikkaa jaossa.

Taulukko 23: Puolueiden D, E ja F ehdokkaat ja heidän äänimääränsä.

Puolue D		Puolue E		Puolue F	
Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet	Ehdokas	Äänet
Li	10	Ami	20	Jemina	6
Johan	8	Niko	25	Marko	4
Antti	7				
Soile	3				
Jani	2				

Selvitä Haren menetelmää käyttämällä, ketkä neljä ehdokasta menevät läpi vaaleissa. Kerro myös, mitkä ovat heidän henkilökohtaiset äänimääränsä. Voit käyttää tuloksen laskennassa apuna alla olevaa taulukkoa!

Taulukko 24: Puolueiden paikkamäärien laskeminen Haren menetelmällä.

Puolue	Puolueen äänimäärä	Osamäärä	Kokonaisosa	Desimaaliosa	Paikkamäärä
D					
E					
F					

Kirjoita tälle sivulle läpimenneiden ehdokkaiden nimet ja heidän henkilökohtaiset äänimääränsä.

Laskutehtävä kvoottimenetelmistä.

2.7 Syventävä tehtävä: erilaisiin kvootteihin tutustuminen.

Vuoden 2023 eduskuntavaaleissa valittiin Hämeen vaalipiiristä 14 kansanedustajaa. Hämeen vaalipiirissä annettiin yhteensä 207 266 ääntä.

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

- Mikä on nyt muuttujan V arvo?
- Mikä on nyt muuttujan h arvo?
- Mitkä ovat alla olevassa taulukossa lueteltujen kvoottien arvot kolmen desimaalin tarkkuudella Hämeen vaalipiirin tapauksessa?

Taulukko 25: Erilaisia kvootteja ja niiden arvoja Hämeen vaalipiirin tapauksessa.

Kvootin nimi	Kvootin kaava	Kvootin arvo
Hare	$\frac{V}{h}$	
Droop	$\left\lfloor \frac{V}{h+1} \right\rfloor + 1$	
Imperiali	$\frac{V}{h+2}$	

Tutustu tarvittaessa ensin Droopin kvootissa esiintyviin merkintöihin, jotka löytyvät sivulta 37.

Kuvaluettelo (Vain opettajalle)

Kansilehden kuva. Pixabay. Haettu 25.1.2024 osoitteesta https://pixabay.com/vectors/ballot-election-polling-vote-box-158828/. Public domain.

Kuva 1. Pixabay. Haettu 25.1.2024 osoitteesta https://pixabay.com/vectors/thomas-jefferson-president-4896816/. Public domain.

Kuva 2. *Alexander Hamilton, John Trumbull. Painting, National Gallery of Art*. 1792. Haettu 25.1.2024 osoitteesta https://picryl.com/media/alexander-hamilton-74c188. Public domain.

Kuva 3. V. H. Auer. *Ensimmäiset eduskuntavaalit Maarian Kärsämäessä 1907.* 1907. Turun museokeskus. Haettu 24.1.2024 osoitteesta https://finna.fi/Record/tmk.161042555144800?sid=3741490136&imgid=2. Public domain.

Kuva 4. Vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos d'Hondtin menetelmällä. Oppimateriaalin tekijän itse laatima.

Kuva 5. Vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos Sainte-Laguën menetelmällä. Oppimateriaalin tekijän itse laatima.

Kuva 6. *Thomas Hare by Lowes Cato Dickinson*. 1908. National Portrait Gallery London. Haettu 25.1.2024 osoitteesta https://picryl.com/media/thomas-hare-by-lowes-cato-dickinson-4cdd3a. Public domain.

Kuva 7. Pixabay. Haettu 26.1.2024 osoitteesta https://pixabay.com/photos/washington-dc-capital-america-4457046/. Public domain.

Kuva 8. Vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos d'Hondtin menetelmällä. Oppimateriaalin tekijän itse laatima.

Kuva 9. Vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos Haren menetelmällä. Oppimateriaalin tekijän itse laatima.

Kuva 10. Vuoden 2023 eduskuntavaalien tulos Droopin menetelmällä. Oppimateriaalin tekijän itse laatima.

Lähteet (Vain opettajalle)

Oppimateriaali perustuu seuraaviin lähdeteoksiin.

M. L. Balinski ja H. P. Young. *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote.* 2. painos. Brookings Institution Press, 2001. ISBN: 0-8157-0090-3.

A. M. Carstairs. *A Short History of Electoral Systems in Western Europe.* London: Allen & Unwin, 1980. ISBN: 0-04-324006-2.

Census Bureau. *Apportionment Legislation 1790-1830.* i.a. URL: https://www.census.gov/history/www/reference/apportionment/apportionment_legislation_1790_-_1830.html (viitattu 03.04.2024).

Eduskunta. *Eduskunnan lyhyt historia – autonomian ajalta EU-Suomen parlamentiksi.* i.a. URL: https://www.eduskunta.fi/FI/naineduskuntatoimii/historia/Sivut/default.aspx (viitattu 24.01.2024).

Eduskuntavaalijärjestelmän uudistaminen. Vaalialuetoimikunnan mietintö. Oikeusministeriö, 2008. ISBN: 978-952-466-148-5. URL: https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/76110/vaalialuetoimikunnan_mietinto_24.4.2008_150_s.pdf.

Halinen H. ym. *Otavan matematiikka MAY1, Luvut ja lukujonot.* 1.–2. painos. Kustannusosakeyhtiö Otava, 2016. ISBN: 978-951-1-29454-2.

Hähkiöniemi, M. *Juuri. Kertaus.* 1. painos. Kustannusosakeyhtiö Otava, 2018. ISBN: 978-951-1-29542-6.

S. Janson. ”Asymptotic bias of some election methods”. *Annals of Operations Research* 215.1 (2014), s. 89–136. DOI: 10.1007/s10479-012-1141-2.

S. Janson. *Proportionella valmetoder.* Moniste, päivitetty 23.10.2018. (viitattu 26.04.2024). Matematiska institutionen, Uppsala universitet, 2012. URL: http://www2.math.uu.se/%7Esvante/_papers/sjV6.pdf.

A. Jääskelainen. *Suomen vaalijärjestelmä: Yleisesitys.* Oikeusministeriön julkaisuja, Toiminta ja hallinto 2023:3. Oikeusministeriö, 2023. ISBN: 978-952-400-374-2. URL: https://urn.fi/URN:ISBN:978-952-400-374-2.

Kielitoimiston ohjepankki, Kotimaisten kielten keskus. *Puolueiden nimet ja lyhenteet.* 2023. URL: https://kielitoimistonohjepankki.fi/ohje/puolueiden-nimet-ja-lyhenteet/ (viitattu 01.04.2024).

Kosningalög. URL: https://www.althingi.is/lagas/nuna/2021112.html (viitattu 17.12.2023).

Ley Orgánica 5/1985, de 19 de junio, del Régimen Electoral General. URL: https://www.boe.es/eli/es/lo/1985/06/19/5/con (viitattu 24.01.2024).

Lov om valg til Stortinget, fylkesting og kommunestyrer (valgloven). URL: https://lovdata.no/dokument/NLO/lov/2002-06-28-57 (viitattu 01.05.2024).

Oikeusministeriö - Tieto- ja tulospalvelu. *Koko maa.* 2023. URL: https://tulospalvelu.vaalit.fi/EKV-2023/fi/lasktila.html (viitattu 10.01.2024).

Parlamentaarisen vaalityöryhmän loppuraportti. Oikeusministeriön julkaisuja, Mietintöjä ja lausuntoja 2022:6. Oikeusministeriö, 2022. ISBN: 978-952-259-940-7. URL: http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-259-940-7.

F. Pukelsheim. *Proportional Representation: Apportionment Methods and Their Applications.* 1. painos. Cham: Springer, 2014. ISBN: 978-3-319-03855-1. DOI: 10.1007/978-3-319-03856-8.

A. Reynolds, B. Reilly ja A. Ellis. *Electoral System Design: The New International IDEA Handbook.* International IDEA, 2005. ISBN: 91-85391-18-2. URL: https://www.idea.int/sites/default/files/publications/electoral-system-design-the-new-international-idea-handbook.pdf (viitattu 02.05.2024).

Saeimas vēlēšanu likums. URL: https://likumi.lv/ta/id/35261-saeimas-velesanu-likums (viitattu 24.01.2024).

Vaalilaki 714/1998. URL: https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980714 (viitattu 01.05.2024).

Vallag (2005:837). URL: https://www.riksdagen.se/sv/dokument-och-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/vallag-2005837_sfs-2005-837/ (viitattu 01.05.2024).

Valtioneuvoston asetus kansanedustajien paikkojen jaosta vaalipiirien kesken vuoden 2023 eduskuntavaaleissa 888/2022. URL: https://www.finlex.fi/fi/laki/alkup/2022/20220888 (viitattu 17.12.2023).

A. Wall. ”Open List Proportional Representation: The Good, the Bad and the Ugly” (2021). International IDEA. DOI: https://doi.org/10.31752/idea.2021.55

Yle. *Kaikki ehdokkaat – Ehdokkaiden äänimäärät.* 2007. URL: https://vaalit.yle.fi/tulospalvelu/2007/eduskuntavaalit/ehdokkaat/index.htm (viitattu 03.04.2024).

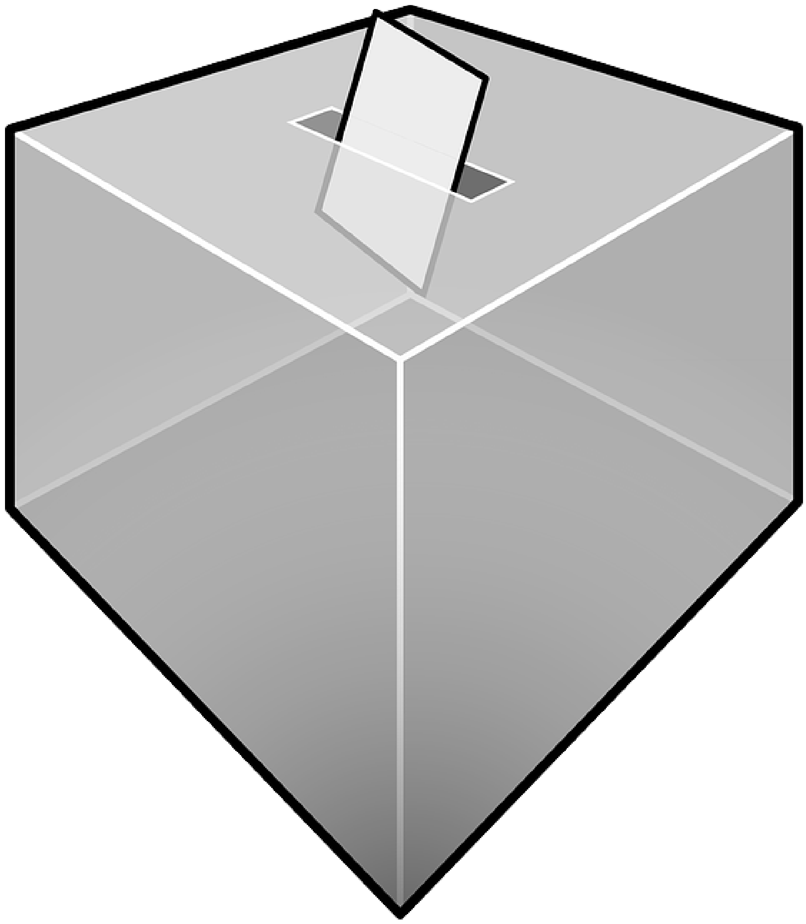
Yle. *Lapin vaalipiiri.* 2019. URL: https://vaalit.yle.fi/ev2019/fi/regions/13/ (viitattu 03.04.2024).

LIITE C: SUHTEELLISEN VAALITAVAN OPPIMATERIAALIN MALLIRATKAISUT

Suhteellinen vaalitapa matemaattisena ilmiönä: oppimateriaalia yläkouluun ja lukioon

Malliratkaisut

Tekijä: Aaro Vuolteenaho



Sisällys

Infoa malliratkaisuista

Oppimateriaalin malliratkaisujen rakenne

Tämä moniste sisältää malliratkaisut *Suhteellinen vaalitapa matemaattisena ilmiönä: oppimateriaalia yläkouluun ja lukioon* kokonaisuutta varten. Malliratkaisut etenevät samassa järjestyksessä kuin itse oppimateriaali. Ensin luvussa 1 esitetään lukusarjamenetelmien luvun tehtävien malliratkaisut, jonka jälkeen esitetään vastaavasti luvussa 2 malliratkaisut kvoottimenetelmien luvun tehtäviin.

Malliratkaisut esitetään tehtävä kerrallaan. Tehtävät on numeroitu samoin kuin oppimateriaalissa. Niiden yhteydessä ei toisteta tehtävänantoja ja tehtäviin liittyviä taulukoita tai kuvia, vaan ne voi tarkistaa oppimateriaalista. Oppimateriaalin tehtävien ja malliratkaisujen laatimisessa hyödynnetyt lähteet on saatavilla oppimateriaaliin liitetyn lähdeluettelon kautta. Malliratkaisuissa esitettävien taulukkojen numeroinnit eivät ole yhteneviä oppimateriaalin taulukkojen numerointien kanssa. Yksittäisten tehtävien malliratkaisut on pyritty asettelemaan omille sivuilleen siten, että yhden yksittäisen tehtävän malliratkaisu olisi esimerkiksi helppo tulostaa käyttöön. Lukusarja- ja kvoottimenetelmien lukujen alussa oleviin pohdintatehtäviin ei esitetä malliratkaisuja, koska ne rakentuvat oppijan oman pohdinnan ja ennakkotietojen pohjalta.

Oppimateriaalin ja sen malliratkaisujen tausta

Oppimateriaali ja sen malliratkaisut on laadittu osana diplomityötä Tampereen yliopistossa. Diplomityön tekijä on Aaro Vuolteenaho ja sen nimi on *Suhteellinen vaalitapa matemaattisena ilmiönä: Oppimateriaalin kehittämistutkimus.* Diplomityö on saatavissa Tampereen yliopiston avoimen julkaisuarkiston kautta osoitteessa https://trepo.tuni.fi/.

1. Malliratkaisut lukusarjamenetelmien luvun tehtäviin

1.1 Oman oppimisen kuvaaminen.

Malliratkaisu:

Tehtävässä oppija kuvaa, mitä hän on oppinut lukusarjamenetelmiä käsittelevästä luvusta. Oppijaa voi ohjata kertomaan esimerkiksi siitä, kuinka vaalitulos lasketaan lukusarjamenetelmien avulla ja mitä eroja d'Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmien välillä on. Oppija voi tarkastella myös lukusarjamenetelmien historiaa käsitteleviä osuuksia ja kertoa niiden kautta oppimistaan asioista.

1.2 Vaalituloksen laskeminen d’Hondtin menetelmällä.

Malliratkaisu tilanteelle, jossa puolueiden välillä ei ole vaaliliittoja:

Lasketaan aluksi puolueiden D, E ja F ehdokkaiden vertausluvut. Ennen vertauslukujen laskemista tulee laskea kunkin puolueen kokonaisäänimäärä.

Taulukko 1: Puolueen D ehdokkaiden äänet ja vertausluvut.

Puolue D		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Li	10	$30/1 = 30$
Johan	8	$30/2 = 15$
Antti	7	$30/3 = 10$
Soile	3	$30/4 = 7{,}5$
Jani	2	$30/5 = 6$

Taulukko 2: Puolueen E ehdokkaiden äänimäärät ja vertausluvut.

Puolue E		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Niko	25	$45/1 = 45$
Ami	20	$45/2 = 22{,}5$

Taulukko 3: Puolueen F ehdokkaiden äänimäärät ja vertausluvut.

Puolue F		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Jemina	6	$10/1 = 10$
Marko	4	$10/2 = 5$

Vaaleissa pääsee läpi neljä ehdokasta. Läpi menevät ne ehdokkaat, joiden vertausluvut kuuluvat neljän suurimman vertausluvun joukkoon. Nämä ehdokkaat ja heidän henkilökohtaiset äänimääränsä on lueteltu alla puolueittain.

Puolue D: Li (10 ääntä), Johan (8 ääntä)

Puolue E: Niko (25 ääntä), Ami (20 ääntä)

Malliratkaisu tilanteelle, jossa puolueet D ja F ovat vaaliliitossa:

Lasketaan aluksi puolueiden D, E ja F ehdokkaiden vertausluvut. Puolueita D ja F käsitellään yhtenä listana, koska ne ovat vaaliliitossa. Ennen vertauslukujen laskemista tulee laskea kunkin puolueen kokonaisäänimäärä. Koska puolueet D ja F ovat vaaliliitossa, niiden kokonaisäänimäärät lasketaan yhteen.

Taulukko 4: Puolueiden D ja F ehdokkaiden äänet ja vertausluvut. Ehdokkaiden nimien perässä on suluissa ilmoitettu, kumpaa puoluetta ehdokas edustaa.

Puolueet D ja F		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Li (puolue D)	10	$40/1 = 40$
Johan (puolue D)	8	$40/2 = 20$
Antti (puolue D)	7	$40/3 \approx 13{,}333$
Jemina (puolue F)	6	$40/4 = 10$
Marko (puolue F)	4	$40/5 = 8$
Soile (puolue D)	3	$40/6 \approx 6{,}667$
Jani (puolue D)	2	$40/7 \approx 5{,}714$

Taulukko 5: Puolueen E ehdokkaiden äänimäärät ja vertausluvut.

Puolue E		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Niko	25	$45/1 = 45$
Ami	20	$45/2 = 22{,}5$

Vaaleissa pääsee läpi neljä ehdokasta. Läpi menevät ne ehdokkaat, joiden vertausluvut kuuluvat neljän suurimman vertausluvun joukkoon. Nämä ehdokkaat ja heidän henkilökohtaiset äänimääränsä on lueteltu alla puolueittain.
Puolue D: Li (10 ääntä), Johan (8 ääntä)
Puolue E: Niko (25 ääntä), Ami (20 ääntä)

Puolueiden D ja F välinen vaaliliitto ei täten vaikuttanut siihen, ketkä ehdokkaat menevät läpi vaaleissa.

1.3 Täydennä puuttuvat sanat.

Malliratkaisussa puuttuvat eli täydennettävät sanat on erotettu muista sanoista lihavoinnilla.

Malliratkaisu.

Eduskuntavaaleissa käytetään **suhteellista** vaalitapaa. Vaalitulos lasketaan eduskuntavaaleissa **d'Hondtin** menetelmällä, joka on kehitetty **1800**-luvulla. Vaalituloksen laskemiseen on olemassa erilaisia menetelmiä ja esimerkiksi Ruotsissa käytetään **Sainte-Laguën** menetelmää. D'Hondtin menetelmä suosii **suuria** puolueita, kun taas Sainte-Laguën menetelmä suosii **pieniä** puolueita. Lukusarjamenetelmiä käytettäessä ehdokkaiden keskinäinen järjestys selvitetään **vertauslukujen** avulla.

Lisähuomio:
Sainte-Laguën menetelmän kohdalla on hyvä huomata, että on olemassa lukusarjamenetelmiä, jotka suosivat enemmän pieniä puolueita kuin Sainte-Laguën menetelmä. Näitä menetelmiä ovat esimerkiksi Huntingtonin ja Deanin menetelmät. D'Hondtin menetelmään verrattuna Sainte-Laguën menetelmä suosii enemmän pieniä puolueita.

1.4 Täydennä seuraavat lauseet.

Malliratkaisussa lauseisiin täydennetyt osat on lihavoitu. Tässä on esitetty esimerkit siitä, kuinka tämän tehtävän lauseet voidaan täydentää.

Malliratkaisu.

D'Hondtin menetelmää käytettäessä lasketaan vertauslukuja. Jos ehdokas on saanut kaikista oman puolueensa ehdokkaista eniten ääniä, hänen vertauslukunsa on **ehdokkaan edustaman puolueen kokonaisäänimäärä / ehdokkaan edustaman listan kokonaisäänimäärä**.

Jos ehdokas on saanut kaikista oman puolueensa ehdokkaista neljänneksi eniten ääniä, hänen vertauslukunsa on **neljäsosa ehdokkaan edustaman puolueen kokonaisäänimäärästä / neljäsosa ehdokkaan edustaman listan kokonaisäänimäärästä**.

Ehdokas voi jäädä valitsematta vaaleissa suuresta henkilökohtaisesta äänimäärästä huolimatta, jos **ehdokkaan edustaman puolueen kannatus on jäänyt alhaiseksi**.

Aluevaalien lisäksi d'Hondtin menetelmää käytetään Suomessa **kunta-, eduskunta- ja europarlamenttivaaleissa**.

1.5 Vaalituloksien vertailua.

Malliratkaisu.

Alla on esimerkkivastaukset kysymyksiin. Vastauksissa käytetään selkeyden vuoksi Kielitoimiston ohjepankin puolueiden nimiä koskevan ohjeen mukaisia puolueiden epävirallisia nimiä.

a) Sosialidemokraattien, perussuomalaisten, kokoomuksen, keskustan ja ruotsalaisen kansanpuolueen paikkamäärät pienevät, kun käytetään Sainte-Laguën menetelmää d’Hondtin menetelmän sijasta. Vastaavasti vihreiden, vasemmistoliiton, kristillisdemokraattien ja Liike Nytin paikkamäärät kasvavat Sainte-Laguën menetelmää käytettäessä.

   Vastauksessa voi myös eritellä, kuinka monen paikan verran puolueiden paikkamäärät muuttuvat, kun vaalitulos on laskettu Sainte-Laguën menetelmällä d’Hondtin menetelmän sijasta.

b) Tulokset ovat järkeviä, kun mietitään sitä, minkä kokoisia puolueita d’Hondtin menetelmä ja Sainte-Laguën menetelmä suosivat. Sainte-Laguën menetelmä suosii enemmän pieniä puolueita kuin d’Hondtin menetelmä. Tämä näkyy tuloksissa, koska Sainte-Laguën menetelmän kohdalla suuret puolueet menettävät paikkoja d’Hondtin menetelmän antamaan tulokseen verrattuna. Vastaavasti pienet puolueet saavat enemmän paikkoja Sainte-Laguën menetelmää käytettäessä.

Lisähuomio:

Ruotsalaisen kansanpuolueen paikkamäärä pienenee Sainte-Laguën menetelmää käytettäessä. Kuitenkin esimerkiksi vasemmistoliiton paikkamäärä kasvaa merkittävästi Sainte-Laguën menetelmää käytettäessä, vaikka puolueet saavat melkein yhtä paljon paikkoja d’Hondtin menetelmällä. Tämä johtuu siitä, että ruotsalainen kansanpuolueen kannatus on suurta Vaasan vaalipiirissä, jossa se menettää yhden paikan, koska Sainte-Laguën menetelmä suosii enemmän pieniä puolueita d’Hondtin menetelmään verrattuna. Tehtävässä esitettyjen vaalituloksien muodostumisesta voi lukea enemmän oppimateriaalin tekijän diplomityöstä.

1.6 Kirjoitustehtävä lukusarjamenetelmistä.

Malliratkaisu.

Alla on esimerkkejä aiheista, joita vastauksissa voi käsitellä.

- Mitä vaiheita vaalituloksen laskemiseen kuuluu lukusarjamenetelmiä käytettäessä?
  - Lasketaan puolueiden kokonaisäänimäärät.
  - Ehdokkaat järjestetään listojen sisällä suuruusjärjestykseen äänimäärien mukaan.
  - Ehdokkaiden vertausluvut lasketaan eri tavalla sen mukaan, mitä lukusarjamenetelmää käytetään.
  - Vertauslukuja laskettaessa jaettavana lukuna on listan kokonaisäänimäärä.
- Millä tavalla d’Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmät eroavat toisistaan?
  - D’Hondtin menetelmä suosii suuria puolueita.
  - Sainte-Laguën menetelmä suosii enemmän pieniä puolueita d’Hondtin menetelmään verrattuna.
  - Vertauslukujen laskemiseen käytetään eri lukujonoja d’Hondtin ja Sainte-Laguën menetelmissä.

1.7 Syventävä tehtävä: Vaalituloksen laskeminen Sainte-Laguën menetelmällä.

Malliratkaisu:

Lasketaan aluksi puolueiden A, B ja C ehdokkaiden vertausluvut. Ennen vertauslukujen laskemista tulee laskea kunkin puolueen kokonaisäänimäärä.

Taulukko 6: Puolueen A ehdokkaiden äänet ja vertausluvut.

Puolue A		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Janna	20	$30/1 = 30$
Lisa	5	$30/3 = 10$
Jouni	3	$30/5 = 6$
Sofia	2	$30/7 = 4{,}286$

Taulukko 7: Puolueen B ehdokkaiden äänimäärät ja vertausluvut.

Puolue B		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Carl	15	$25/1 = 25$
Onni	10	$25/3 \approx 8{,}333$

Taulukko 8: Puolueen C ehdokkaan äänimäärä ja vertausluku.

Puolue C		
Ehdokas	Äänet	Vertausluku
Max	13	$13/1 = 13$

Alla on vastaukset kysymyksiin a), b) ja c).

a) Vaaleissa menee läpi kolme ehdokasta. Nämä ehdokkaat ovat ne ehdokkaat, joiden vertausluvut ovat kolmen suurimman vertausluvun joukossa. Vaaleissa menevät läpi puolueesta A Janna, puolueesta B Carl sekä puolueesta C Max. Jannan vertausluku on suurin, Carlin toiseksi suurin ja Maxin kolmanneksi suurin.

b) Kyllä.

c) Kun saman vaalin tulos laskettiin d'Hondtin menetelmällä, vaaleissa menivät läpi puolueesta A Janna ja Lisa sekä puolueesta B Carl. Sainte-Laguën menetelmää käytettäessä Lisa ei enää pääse läpi, vaan hänen paikkansa siirtyy Maxille. Tämä johtuu siitä, että pienemmästä puolueesta, kuten Maxin edustamasta puolueesta C on helpompi päästä läpi, kun vaalitulos lasketaan Sainte-Laguën menetelmällä d'Hondtin menetelmän sijasta.

1.8 Syventävä tehtävä: Lukujonot ja erilaiset lukusarjamenetelmät.

Malliratkaisu.

Lukujonojen kolme ensimmäistä jäsentä saadaan laskettua sijoittamalla lukujonon yleisen jäsenen kaavaan luvut 1, 2 ja 3.

Taulukko 9: Lukusarjamenetelmiin liittyviä lukujonoja.

Menetelmän nimi	Lukujonon yleisen jäsenen kaava	1. jäsen	2. jäsen	3. jäsen
D'Hondt	n	1	2	3
Sainte-Laguë	$2n-1$	1	3	5
Imperiali	$n+1$	2	3	4
Tanskan menetelmä	$3n-2$	1	4	7
Viron menetelmä	$n^{0,9}$	1	1,866	2,688
Macaon menetelmä	2^{n-1}	1	2	4
Huntington	$\sqrt{n(n-1)}$	0	1,414	2,449
Dean	$\frac{2n(n-1)}{2n-1}$	0	1,333	2,400

2. Malliratkaisut kvoottimenetelmien luvun tehtäviin

Lisätehtävä lattiafunktiosta

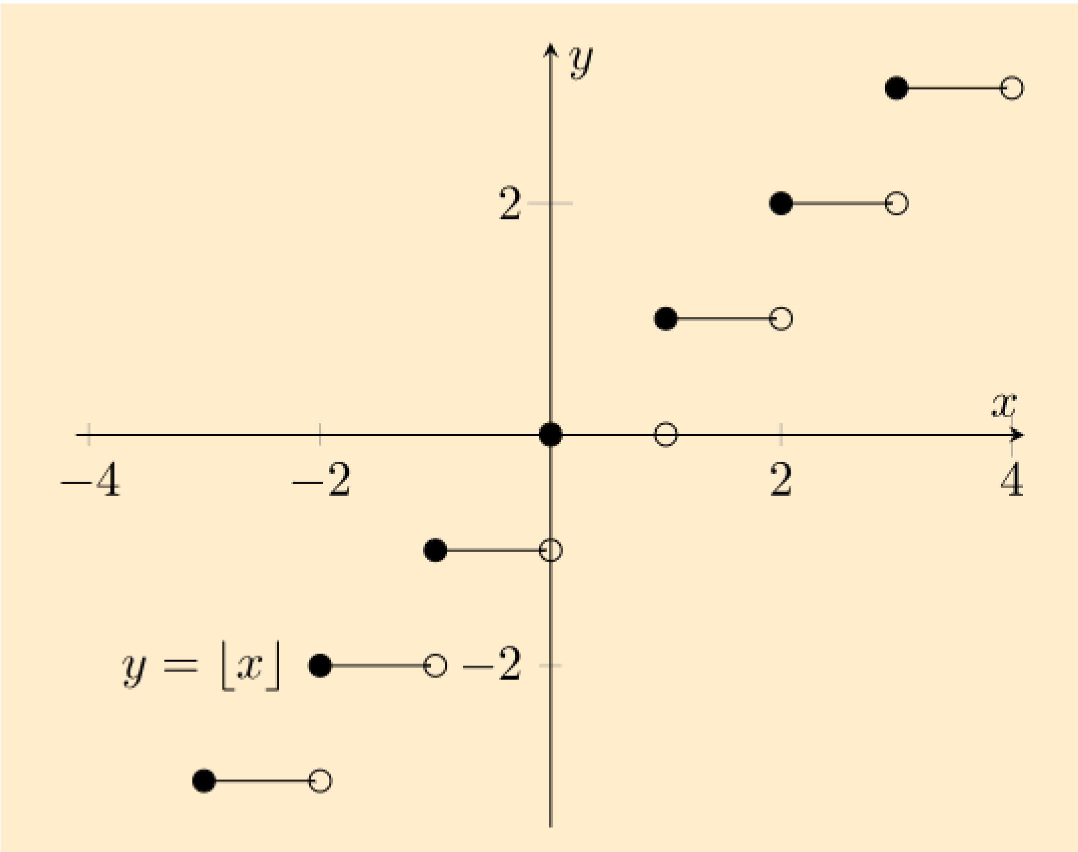
Oppimateriaalin sivulla 32 on lisätehtävä lattiafunktioon liittyen. Alla on esitetty siihen malliratkaisu.

Malliratkaisu.

Tutkitaan jotakin lukua x. Luvun x desimaaliosa kuuluu puoliavoimelle välille $[0, 1)$. Toisin sanoen desimaaliosa on luku, joka on vähintään 0 ja jonka arvo on pienempi kuin 1.

Lattiafunktiolla tarkoitetaan funktiota, joka saa arvokseen kokonaisluvun, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin luku x. Lattiafunktiolle käytetään merkintää $\lfloor \cdot \rfloor$. Toisin sanoen lattiafunktion avulla saadaan selville luvun x kokonaisosa $\lfloor x \rfloor$.

Kuvassa 1 on esitetty lattiafunktion kuvaaja.



Kuva 1: Lattiafunktion kuvaaja.

2.1 Oman oppimisen kuvaaminen.

Malliratkaisu:

Tehtävässä oppija kuvaa, mitä hän on oppinut kvoottimenetelmiä käsittelevästä luvusta. Oppijaa voi ohjata kertomaan esimerkiksi siitä, kuinka vaalitulos lasketaan kvoottimenetelmien avulla ja mitä eroja Haren ja Droopin menetelmien välillä on. Oppija voi tarkastella myös kvoottimenetelmien historiaa käsittelevää osuutta ja kertoa sen kautta oppimistaan asioista.

2.2 Täydennä seuraavat lauseet.

Malliratkaisussa lauseisiin täydennetyt osat on lihavoitu. Tässä on esitetty esimerkit siitä, kuinka tämän tehtävän lauseet voidaan täydentää.

Malliratkaisu.

Kun käytetään Haren menetelmää ja puolue saa vaaleissa 30 % annetuista äänistä, se saa **30 % jaettavista paikoista**.

Eri kvoottimenetelmät erottaa se, **mitä kvoottia käytetään ja miten käytettävä kvootti lasketaan**.

Kvoottimenetelmiä käytettäessä tutkitaan **kokonais- ja desimaaliosia**.

D'Hondtin menetelmä suosii Haren menetelmään verrattuna **enemmän suuria puolueita**.

Kansanedustajien paikkajako Manner-Suomen vaalipiirien kesken lasketaan **Haren menetelmällä**.

Droopin kvootin kaavan erona Haren kvootin kaavaan on esimerkiksi se, että **puolueen äänimäärä jaetaan luvulla, joka on jaettavien paikkojen lukumäärä lisättynä yhdellä / puolueen äänimäärä jaetaan eri luvulla kuin Haren kvoottia laskettaessa**.

2.3 Vaalitulosten vertailua.

Malliratkaisu.

Alla on esimerkkivastaukset kysymyksiin a), b) ja c). Vastauksissa käytetään selkeyden vuoksi Kielitoimiston ohjepankin puolueiden nimiä koskevan ohjeen mukaisia puolueiden epävirallisia nimiä.

a) Sosialidemokraattien, perussuomalaisten, kokoomuksen ja ruotsalaisen kansanpuolueen paikkamäärät pienevät, kun käytetään Haren menetelmää d'Hondtin menetelmän sijasta. Vastaavasti keskustan, vihreiden, vasemmistoliiton, kristillisdemokraattien ja Liike Nytin paikkamäärät kasvavat Haren menetelmää käytettäessä. Vapauden liitto ei saanut d'Hondtin menetelmällä yhtään paikkaa, mutta Haren menetelmällä se saa yhden paikan.

   Vastauksessa voi myös eritellä, kuinka monen paikan verran puolueiden paikkamäärät muuttuvat, kun vaalitulos on laskettu Haren menetelmällä d'Hondtin menetelmän sijasta.

b) Sosialidemokraattien, perussuomalaisten, kokoomuksen ja ruotsalaisen kansanpuolueen paikkamäärät pienevät, kun käytetään Droopin menetelmää d'Hondtin menetelmän sijasta. Vastaavasti keskustan, vihreiden, vasemmistoliiton, kristillisdemokraattien ja Liike Nytin paikkamäärät kasvavat Haren menetelmää käytettäessä. Vapauden liitto ei saa Droopin menetelmällä yhtään paikkaa, kuten ei myöskään d'Hondtin menetelmällä.

c) Droopin menetelmää käytettäessä sosialidemokraattien, perussuomalaisten ja kokoomuksen paikkamäärät ovat suurempia kuin Haren menetelmää hyödynnettäessä. Lisäksi vasemmistoliiton, kristillisdemokraattien, Liike Nytin ja vapauden liiton paikkamäärät ovat pienempiä Droopin kuin Haren menetelmällä.

   Tulokset ovat järkeviä, kun mietitään sitä, minkä kokoisia puolueita Haren ja Droopin menetelmät suosivat. Haren menetelmä suosii enemmän pieniä puolueita kuin d'Hondtin menetelmä. Tämä näkyy tuloksissa, koska suuret puolueet menettävät paikkoja, kun taas pienet puolueet saavat enemmän paikkoja Haren menetelmää käytettäessä d'Hondtin menetelmällä saatuihin tuloksiin verrattuna.

Droopin menetelmä suosii enemmän suuria puolueita kuin Haren menetelmä, mikä myös näkyy tuloksissa, kuten b) -kohdan vastauksessa on kuvattu.

Lisähuomio:

Ruotsalaisen kansanpuolueen paikkamäärä pienenee Haren menetelmää käytettäessä. Kuitenkin esimerkiksi vasemmistoliiton paikkamäärä kasvaa merkittävästi Haren menetelmää käytettäessä, vaikka puolueet saavat melkein yhtä paljon paikkoja d'Hondtin menetelmällä. Tämä johtuu siitä, että ruotsalainen kansanpuolueen kannatus on suurta Vaasan vaalipiirissä, jossa se menettää yhden paikan, koska Haren menetelmä suosii enemmän pieniä puolueita d'Hondtin menetelmään verrattuna. Tehtävässä käytettyjen vaalituloksien muodostumisesta voi lukea enemmän oppimateriaalin tekijän diplomityöstä.

2.4 Kirjoitustehtävä kvoottimenetelmistä.

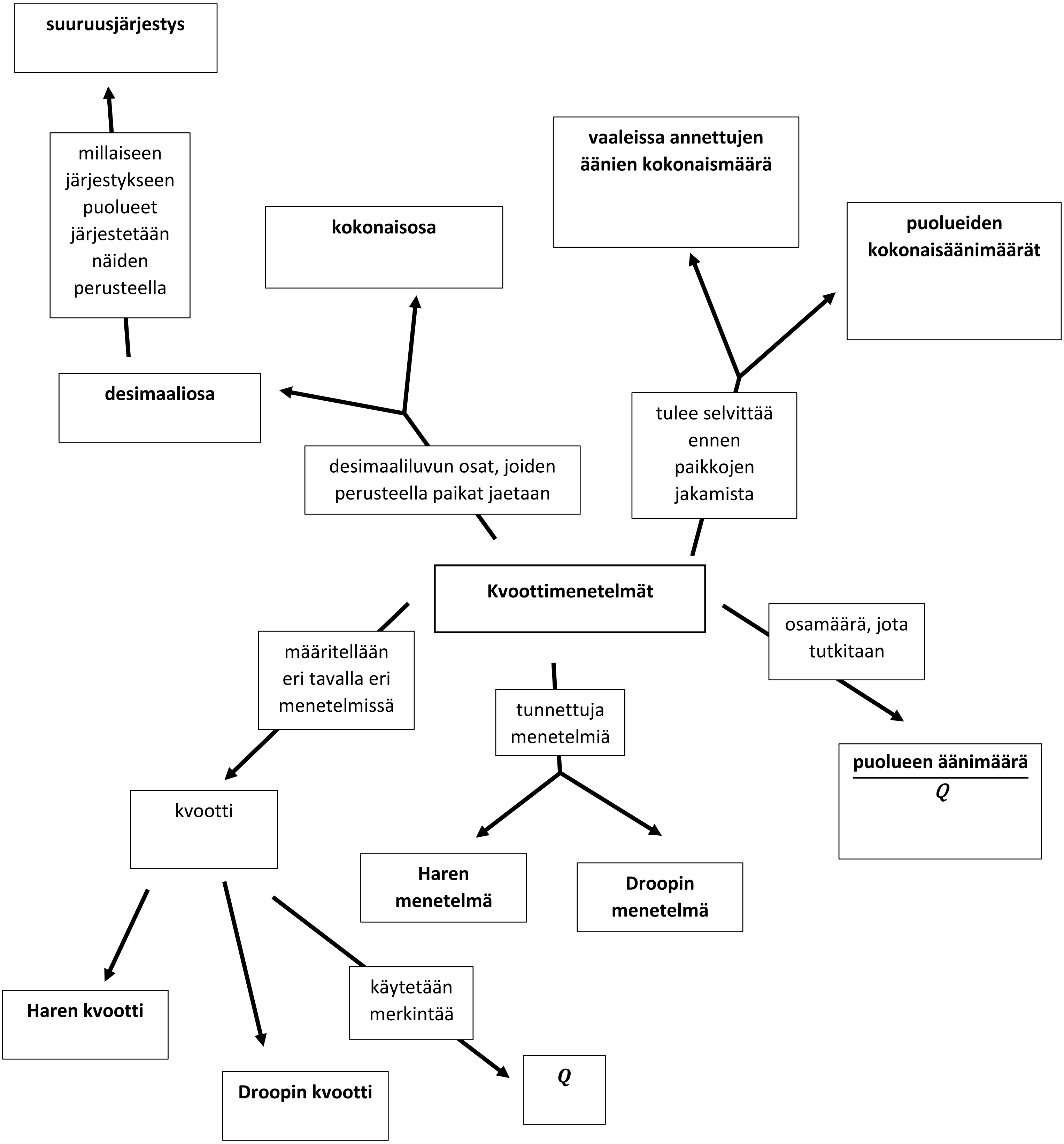
Malliratkaisu.

Alla on esimerkkejä aiheista, joita vastauksissa voi käsitellä.

- Miten desimaaliluvut liittyvät kvoottimenetelmiin?
    - Kvoottimenetelmiä käytettäessä tutkitaan desimaalilukujen kokonais- ja desimaaliosia.
- Mitä vaiheita vaalituloksen laskemiseen kuuluu kvoottimenetelmiä käytettäessä?
    - Käytettävän kvootin arvo lasketaan sen perusteella, mitä kvoottimenetelmää käytetään.
    - Puolueiden äänimäärät jaetaan käytettävällä kvootilla.
    - Puolueille jaetaan aluksi niiden osamäärien kokonaisosien verran paikkoja.
    - Jos paikkoja jää jakamatta, jaetaan jäljellä olevat paikat niille puolueille, joiden osamäärien desimaaliosat ovat suurimmat.

2.5 Käsitekartan täydentäminen kvoottimenetelmiin liittyen.

Käsitekarttaan täydennettävät sanat on lihavoitu.



2.6 Vaalituloksen laskeminen Haren menetelmällä.

Malliratkaisu.

Lasketaan aluksi puolueiden kokonaisäänimäärät. Puolue D sai yhteensä $10+8+7+3+2=30$ ääntä, puolue E sai $20+25=45$ ääntä ja puolueen F kokonaisäänimäärä on $6+4=10$ ääntä.

Lasketaan seuraavaksi vaaleissa annettujen äänien kokonaismäärä V.

$V=30+45+10=85.$

Nyt voidaan laskea Haren kvootin Q arvo. Jaettavia paikkoja on $h=4$ kappaletta.

$Q=\frac{V}{h}=\frac{85}{4}=21{,}25.$

Nyt voidaan täydentää alla oleva taulukko. Puolueiden osamäärillä tarkoitetaan osamääriä, jotka saadaan jakamalla puolueen kokonaisäänimäärä Haren kvootilla Q. Osamäärät voi laskea esimerkiksi kolmen desimaalin tarkkuudella.

Taulukko 10: Puolueiden paikkamäärien laskeminen Haren menetelmällä.

Puolue	Puolueen kokonais-äänimäärä	Osamäärä	Kokonaisosa	Desimaaliosa	Paikkamäärä
D	30	1,412	1	0,412	1
E	45	2,118	2	2,118	2
F	10	0,471	0	0,471	1

Kokonaisosien perusteella jaetaan kolme paikkaa neljästä jaossa olevasta paikasta. Tällöin yksi paikka jaetaan desimaaliosien perusteella ja kyseinen paikka menee puolueelle F, koska sen desimaaliosa on suurin.

Läpimenevät ehdokkaat saadaan selville tutkimalla ehdokkaiden henkilökohtaisia äänimääriä. Puolueiden saamat paikat menevät niiden eniten henkilökohtaisia ääniä saaneille ehdokkaille. Vaaleissa läpimenevät ehdokkaat ja heidän henkilökohtaiset äänimääränsä on lueteltu alla puolueittain.
Puolue D: Li (10 ääntä). Puolue E: Niko (25 ääntä) ja Ami (20 ääntä). Puolue F: Jemina (6 ääntä).

2.7 Syventävä tehtävä: erilaisiin kvootteihin tutustuminen.

Mallivastaus.

Muuttuja V on vaaleissa annettujen äänien kokonaismäärä eli nyt $V = 207266$.

Muuttuja h taas on jaettavien paikkojen lukumäärä eli nyt $h = 14$.

Taulukko 11: Erilaisia kvootteja ja niiden arvoja Hämeen vaalipiirin tapauksessa.

Kvootin nimi	Kvootin kaava	Kvootin arvo
Hare	$\frac{V}{h}$	$14804{,}714$
Droop	$\left\lfloor \frac{V}{h+1} \right\rfloor + 1$	13818
Imperiali	$\frac{V}{h+2}$	$12954{,}125$

Kuvaluettelo

Kansilehden kuva. Pixabay. Haettu 25.1.2024 osoitteesta https://pixabay.com/vectors/ballot-election-polling-vote-box-158828/. Public domain.

Kuva 1. Tampereen yliopisto PLUSSA. MATH.APP.111 Analyysin peruskurssi. Haettu 1.5.2024 osoitteesta https://plus.tuni.fi/math.app.111/current/funktioteoria/reaalifunktio/?hl=fi.

LIITE D: TEEMAHAASTATTELUISSA KÄYTETTY HAASTATTELURUNKO

Haastattelurungossa on käytetty Taulukossa D.1 listattuja lyhenteitä.

Taulukko D.1. *Haastattelurungossa käytetyt lyhenteet.*

Termi	Lyhenne
opetussuunnitelma	OPS
perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet	POPS

Haastattelurunko

Oppiainerajat ylittävät oppimiskokonaisuudet

Sisältö

-tuleeko olla OPS:ssa vai voiko olla sen ulkopuolelta

-tuleeko löytyä myös oppikirjoista vai voiko olla niiden ulkopuolelta

(Tulisiko aihevalinta tehdä yhdessä oppilaiden / opiskelijoiden kanssa?)

Aiheen valitseminen

-vaikeustason huomioiminen

-eriyttäminen pelkästään yhteen suuntaan

(Milloin oppiainerajat ylittävän oppimiskokonaisuuden aihevalinta on onnistunut?)

Toteuttamistapa

-kuinka laaja kokonaisuus

-oppimateriaalin modulaarisuus (edut, haitat)

(Kuinka paljon lukujärjestyksiin jää tilaa oppiainerajat ylittäville oppimiskokonaisuuksille?)

Historian esille tuominen muilla kuin historian oppitunneilla ja sisällöissä

Mahdollisuudet

-motivointi ja innostaminen

-uuden ja/tai erilaisen näkökulman tarjoaminen

(Kuinka paljon historiaviittauksia tulisi tehdä muilla kuin historian oppitunneilla? Vaihteleeko tämä oppiaineen mukaan?)

Toteuttamistapa

-laajuus

-video, kuva, teksti, audio yms.

(Mikä olisi innostava tapa liittää historiaviittauksia osaksi opetusta?)

Näkökulma

-oman lähialueen historia

-Suomen historia

-muun kuin Suomen historia

(Onko sillä merkitystä, minkä maantieteelliseen alueen historiaan tehdään viittauksia?)

POPS yleisesti ja oppiainekohtaiset POPS:n sisällöt

Matematiikka

-matematiikan soveltaminen muissa oppiaineissa: vaalimatematiikan soveltuminen tähän tarkoitukseen

-algoritminen ajattelu: vaalimatematiikka esimerkkinä tästä?

(Näkeekö opettajat ja oppilaat / opiskelijat vaalituloksen laskemisen aiheena, jossa sovelletaan matematiikkaa?)

Yhteiskuntaoppi

-vaaleja ja laskentamenetelmiä vaalituloksen laskemiseksi ei suoraan OPS:ssa mainittuna

-vaalimatematiikan käsittelyn laajuus peruskoulussa ja lukiossa

(Käsitelläänkö vaaleja ja vaalituloksen laskemista riittävän laajasti peruskoulussa ja lukiossa?)

Monialaiset oppimiskokonaisuudet

-vaalimatematiikan soveltuvuus monialaisiin oppimiskokonaisuuksiin

(Voisiko monialaisen oppimiskokonaisuuden / vastaavan koota vaalimatematiikan teemojen ympärille?)

Vaalimatematiikka

Suhteellinen vaalitapa

-tietoisuus erilaisista tavoista laskea vaalitulos suhteellisen vaalitavan mukaisesti

-aiheen merkitys yleisellä tasolla: kuinka paljon ja kuinka laajasti tulisi käsitellä opetuksessa

-oppikirjoissa mainitaan lähinnä D'Hondt

(Oletko tietoinen siitä, että D'Hondtin menetelmän lisäksi on olemassa muitakin laskentamenetelmiä vaalituloksen laskemiseksi? Pitäisikö näitä muita laskentamenetelmiä tuoda oppikirjoissa esille?)

Oppimateriaalin 1. versio

Rakenne

-sisältö

-historiaviittaukset

-esimerkit

-matematiikan esittäminen

-ajankäyttö

-formaatti (pdf, docx, joku muu)

(Onko oppimateriaali nykyisellään käyttökelpoinen?)

Tehtävät

-tehtävätyyppien soveltuvuus

-tehtävien lukumäärä

-vaikeustaso

(Onko tehtäviä riittävästi? Ovatko tehtävät järkevästi valittuja?)

Pedagoginen näkökulma

-visuaalinen oppiminen + writing-to-learn-mathematics (WTLM): näiden soveltuvuus ja mielekkyys

(Tukeeko valittu pedagoginen näkökulma oppimateriaalin aiheen opettamista?)

Kehitysehdotukset

-kohderyhmän valinta (yläkoulu, lukio vai molemmat)

-sisältö

-tehtävät ja niiden lukumäärä

-ajatukset yleisesti ottaen materiaalista

(Mitkä tekijät parantaisivat oppimateriaalia, miten sitä kannattaisi muokata?)

LIITE E: TUTKIMUSTIEDOTE

TAMPEREEN YLIOPISTO
Tutkimustiedote

Tutkimus – Oppimateriaalin kehittämistutkimus suhteellisesta vaalitavasta

Pyydän Teitä osallistumaan tähän tutkimukseen, jossa luodaan yläkoululaisille oppimateriaali, jonka aiheena on suhteellinen vaalitapa. Suostumukset tutkimukseen osallistumisesta kerätään erikseen. Teillä on mahdollisuus esittää kysymyksiä tutkimuksesta ennen päätöksen tekemistä siitä, annatteko suostumuksenne tutkimukseen osallistumisesta.

Tutkimuksen tarkoitus

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on luoda oppimateriaali yläkoululaisille suhteelliseen vaalitapaan liittyen. Tutkimus on osa diplomityötä. Oppimateriaali luodaan kehittämistutkimuksen keinoin. Oppimateriaalin ensimmäistä versiota kehitetään matematiikan ja yhteiskuntaopin aineenopettajien teemahaastattelujen avulla kerätyn palautteen pohjalta. Teemahaastattelujen tarkoituksena on kartoittaa lisäksi aineenopettajien ajatuksia oppiainerajat ylittäviin oppimiskokonaisuuksiin ja vaalimatematiikkaan liittyen.

Tutkimuksen kulku

Tutkija lähettää ennen teemahaastatteluja haastateltaville aineenopettajille suhteellisen vaalitavan oppimateriaalin ensimmäisen version tutustuttavaksi. Teemahaastattelujen kesto on arviolta korkeintaan 60 minuuttia yhtä teemahaastattelua kohti. Teemahaastattelut toteutetaan etäyhteyksin Teams-alustalla. Tutkija lähettää haastateltaville linkin Teams-tapaamiseen ennen sovittua haastatteluaikaa. Yhdessä teemahaastattelussa voi olla tutkijan lisäksi useampia haastateltavia.

Tutkimukseen osallistumisesta ei makseta palkkiota.

Millä tavalla tutkimusaineistoa kerätään?

Tutkimusaineisto koostuu tutkimuksen suostumuslomakkeiden yhteydessä kysyttävistä tiedoista ja teemahaastatteluista muodostettavista haastattelutallenteista. Haastattelutallenteet muodostetaan tallentamalla Teams-tapaamiset. Teams-tapaamiset järjestetään ilman kameroita.

Tutkimuksessa kerätään haastateltavilta aineenopettajilta seuraavat henkilötiedot:

- opetettava aine
- tieto siitä, työskenteleekö haastateltava yläkoulussa, lukiossa, sekä yläkoulussa että lukiossa vai onko hän opiskelija
- ääni
- nimi

- Teams-palvelun profiilikuva.

Haastateltavien nimi näkyy mahdollisesti teemahaastattelusta muodostettavalla haastattelutallenteella. Haastateltavilta ei kysytä heidän nimiään tutkimuksen suostumuslomakkeiden täyttämisen yhteydessä.

Henkilötietojen käsittelystä kerrotaan haastateltaville heille ennen teemahaastatteluja jaettavasta tutkimuksen tietosuojailmoituksessa.

Tutkimukseen liittyvät hyödyt ja riskit

Tutkimukseen osallistumisesta ei ole teille välitöntä hyötyä. Tutkimuksessa käytettäviin menetelmiin ei liity terveydellisiä riskejä, sosiaalisia riskejä, taloudellisia riskejä eikä henkilötietojen käsittelyyn liittyviä riskejä

Luottamuksellisuus, tietojen käsittely ja säilyttäminen

Teistä kerättyä henkilötietoja käsitellään luottamuksellisesti EU:n tietosuoja-asetuksen ja Suomen tietosuojalain edellyttämällä tavalla. Kerättyjä henkilötietoja käsitellään siten, että haastateltavia ei ole mahdollista tunnistaa niiden perusteella.

Tutkimusaineistoa säilytetään Tampereen yliopiston Office 365 -palvelussa. Tutkimusaineisto suojataan käyttäjätunnuksella, salasanalla ja kaksivaiheisella tunnistautumisella. Tutkimusaineistoa käytetään ainoastaan diplomityön laatimiseen ja sen yhteydessä luotavan suhteellisen vaalitavan oppimateriaalin kehittämiseen. Ainoastaan tutkijalla on pääsy tutkimusaineistoon.

Henkilöiden yksityisyydensuoja turvataan tieteellisissä julkaisuissa

Kerättyjä henkilötietoja käsitellään siten, että haastateltavia ei ole mahdollista tunnistaa niiden perusteella. Tutkimusaineistoa säilytetään diplomityön laatimisen ajan, minkä jälkeen tutkimusaineisto hävitetään.

Vapaaehtoisuus

Tutkimukseen osallistuminen on täysin vapaaehtoista ja haastateltavat voivat peruuttaa osallistumisenne tutkimukseen tahansa koska tahansa. Lisäksi haastateltavat voivat väliaikaisesti keskeyttää tutkimuksen. Osallistumisen peruuttamisella tarkoitetaan vetäytymistä kokonaan pois tutkimuksesta. Tutkimuksen väliaikainen keskeyttäminen tarkoittaa esimerkiksi teemahaastattelun aikana pidettävää taukoa. Osallistumisen peruuttamisesta tai tutkimuksen väliaikaisesta keskeyttämisestä ei aiheudu haittaa haastateltaville.

Tutkimuksen väliaikainen keskeyttäminen ei estä tutkimuksessa siihen asti kerättyjen tietojen hyödyntämistä osana tutkimusaineistoa.

Tutkimukseen osallistuminen peruutetaan ilmoittamalla siitä tutkijalle. Mikäli haastateltava peruuttaa osallistumisensa tutkimukseen, hänen antamiaan tietoja ei käytetä osana tutkimusaineistoa ja poistetaan mahdollisimman pian peruuttamisen jälkeen.

Tutkimuksesta tiedottaminen

Tutkija lähettää haastateltaville suhteellisen vaalitavan oppimateriaalin lopullisen version diplomityön valmistumisen jälkeen.

Materiaalin käyttäminen muuhun kuin tutkimuskäyttöön ja materiaalin käyttäminen jatkotutkimukseen tai tutkimusaineiston hävittäminen

Tutkimusaineistoa ei käytetä muuhun kuin diplomityön yhteydessä tehtävään tutkimukseen. Tutkimusaineisto hävitetään kokonaan diplomityön valmistumisen jälkeen.

Lisätietoja tutkimukseen osallistumisesta saa suoraan tutkijalta sähköpostitse.

Ystävällisin terveisin,
Aaro Vuolteenaho
aaro.vuolteenaho@tuni.fi

LIITE F: TUTKIMUKSEN TIETOSUOJAILMOITUS

EU:n tietosuoja-asetus (EU 2016/679), art. 12, 13, 14

1. Tutkimuksen nimi, luonne ja kesto

Tutkimuksen nimi: Diplomityö: Oppimateriaalin kehittämistutkimus suhteellisesta vaalitavasta

☒Kertatutkimus
☐Seurantatutkimus

Tutkimuksen kestoaika: Diplomityön laatimiseen kuluva aika. Diplomityö valmistuu vuoden 2024 aikana.
Henkilötietojen käsittelyaika: Diplomityön laatimiseen kuluva aika. Diplomityö valmistuu vuoden 2024 aikana.
Mikäli tarkka käsittelyaika ei ole määritettävissä, ilmoita määräytymisperuste.

2. Rekisterinpitäjä

☐ Tutkimus tehdään työsuhteessa Tampereen yliopistona toimivaan Tampereen korkeakoulusäätiöön, jolloin rekisterinpitäjä on Tampereen korkeakoulusäätiö.

Tampereen korkeakoulusäätiö sr
33014 Tampereen yliopisto
Kalevantie 4, 33100 Tampere
Y-tunnus 2844561-8

☒ Kyseessä on opiskelijatutkimus (rekisterinpitäjä ei työsuhteessa Tampereen korkeakoulusäätiöön), jolloin rekisterinpitäjä on opiskelija.

Nimi: Aaro Vuolteenaho, Sähköpostiosoite: aaro.vuolteenaho@tuni.fi

☐ Kyse on yhteisrekisteristä, ja rekisterinpitäjiä on useita. Mainitse tässä kaikki rekisterinpitäjät:
Kirjoita tekstiä napsauttamalla tai napauttamalla tätä.

3. Tutkimuksen suorittajat

Tutkimuksen suorittaa rekisterinpitäjä.

4. Tutkimusrekisterin tietosisältö

Tutkimusrekisteriin kerätään seuraavat tiedot tutkittavista: nimi, ääni, Teams-palvelun profiilikuva, tieto tutkittavan opettamista oppiaineista ja tieto siitä, työskenteleekö tutkittava yläkoulussa, lukiossa, sekä yläkoulussa että lukiossa vai onko hän opiskelija.

5. Henkilötietojen tietolähteet

Tutkimusaineisto koostuu tutkimuksen suostumuslomakkeiden ja tutkimuksessa järjestettävien teemahaastattelujen yhteydessä kerättävästä aineistosta.

6. Henkilötietojen käsittelyn tarkoitus

Diplomityön laatiminen.

EU:n tietosuoja-asetus (EU 2016/679), art. 12, 13, 14

7. Henkilötietojen käsittelyn oikeusperuste

Henkilötietojen käsittelyn oikeusperuste: *EU:n yleinen tietosuoja-asetus, artikla 6 kohta 1 sekä tietosuojalaki 4 §*:

☒ Tutkittavan suostumus

Miten suostumuksen voi peruuttaa: Ilmoittamalla rekisterinpitäjälle.

8. Arkaluonteiset henkilötiedot (erityisiin henkilötietoryhmiin kuuluvat tiedot ja rikostiedot)

☒ Tutkimuksessa ei käsitellä arkaluonteisia henkilötietoja
☐ Tutkimuksessa käsitellään seuraavia arkaluonteisia henkilötietoja:

- ☐ Rotu tai etninen alkuperä
- ☐ Poliittiset mielipiteet
- ☐ Uskonnollinen tai filosofinen vakaumus
- ☐ Ammattiliiton jäsenyys
- ☐ Geneettiset tiedot
- ☐ Biometristen tietojen käsittely henkilön yksiselitteistä tunnistamista varten
- ☐ Terveystiedot
- ☐ Luonnollisen henkilön seksuaalinen käyttäytyminen tai suuntautuminen

Tutkimuksessa käsitellään rikostuomiota tai rikkomuksia koskevia tietoja:
☒ Ei
☐ Kyllä

9. Henkilötietojen siirto tai luovuttaminen EU:n/ETA-alueen ulkopuolelle

Siirretäänkö rekisterin tietoja kolmanteen maahan tai kansainväliselle järjestölle EU:n tai ETA-alueen ulkopuolelle:
☒ Ei
☐ Kyllä, mihin: Kirjoita tekstiä napsauttamalla tai napauttamalla tätä.

Kuvaus käytettävistä suojatoimista: Kirjoita tekstiä napsauttamalla tai napauttamalla tätä.

EU:n tietosuoja-asetus (EU 2016/679), art. 12, 13, 14

10. Rekisterin suojauksen periaatteet

Digitaalisen aineiston suojaaminen (esim. tietojärjestelmät ja laitteet):
☒ käyttäjätunnus
☒ salasana
☒ kaksivaiheinen käyttäjän tunnistus (MFA)
☐ pääsynhallinta verkko-osoitteiden avulla (IP-osoitteet)
☐ käytön rekisteröinti (lokitietojen kerääminen)
☐ kulunvalvonta
☐ muu, mikä:

Suorien tunnistetietojen käsittely:
☒ Suorat tunnistetiedot poistetaan analysointivaiheessa
☐ Aineisto on pseudonymisoitu
☐ Aineisto analysoidaan suorin tunnistetiedoin, koska (peruste suorien tunnistetietojen säilyttämiselle): Kirjoita tekstiä napsauttamalla tai napauttamalla tätä.

Tietojen suojaus tietojen siirroissa:
☒ tiedonsiirron salaus (kuvaile miten): Tutkimusaineistoa säilytetään ja käsitellään Tampereen yliopiston Office 365 -palvelussa.
☐ tiedoston salaus (kuvaile miten): Kirjoita tekstiä napsauttamalla tai napauttamalla tätä.
☐ muu, mikä: Kirjoita tekstiä napsauttamalla tai napauttamalla tätä.

11. Henkilötietojen käsittely tutkimuksen päättymisen jälkeen

☒ Tutkimusrekisteri hävitetään
☐ Tutkimusrekisteri arkistoidaan anonymisoituna ilman tunnistetietoja
☐ Tutkimusrekisteri arkistoidaan tunnistetiedoin

Mihin aineisto arkistoidaan ja miten pitkäksi aikaa: Tutkimusaineisto hävitetään diplomityön valmistumisen jälkeen vuoden 2024 aikana.

12. Rekisteröidyn oikeudet ja niiden mahdollinen rajoittaminen

Rekisteröidyllä on, ellei tietosuojalainsäädännöstä muuta johdu:

EU:n tietosuoja-asetus (EU 2016/679), art. 12, 13, 14

- Tietojen tarkastusoikeus (oikeus saada pääsy henkilötietoihin)
  - Rekisteröidyllä on oikeus tietää, käsitelläänkö hänen henkilötietojaan vai ei, ja mitä henkilötietoja hänestä on tallennettu.

- Oikeus tietojen oikaisemiseen
  - Rekisteröidyllä on oikeus vaatia, että häntä koskevat virheelliset, epätarkat tai puutteelliset henkilötiedot oikaistaan tai täydennetään ilman aiheetonta viivytystä. Lisäksi henkilöllä on oikeus vaatia, että tarpeettomat henkilötiedot poistetaan.

- Oikeus tietojen poistamiseen
  - Rekisteröidyllä on poikkeustapauksissa oikeus saada henkilötietonsa kokonaan poistettua rekisterinpitäjän rekistereistä (oikeus tulla unohdetuksi).

- Oikeus käsittelyn rajoittamiseen
  - Rekisteröidyllä on tietyissä tilanteissa oikeus pyytää henkilötietojensa käsittelyn rajoittamista siksi aikaa, kunnes hänen tietonsa on asianmukaisesti tarkistettu ja korjattu tai täydennetty.

- Vastustamisoikeus
  - Henkilöllä on tietyissä tilanteissa oikeus henkilökohtaiseen, erityiseen tilanteeseensa perustuen milloin tahansa vastustaa henkilötietojensa käsittelyä.

- Oikeus siirtää tiedot järjestelmästä toiseen
  - Rekisteröidyllä on tietyissä tilanteissa oikeus saada häntä koskevat henkilötiedot, jotka hän on toimittanut rekisterinpitäjälle, jäsennellyssä, yleisesti käytetyssä ja koneellisesti luettavassa muodossa, ja oikeus siirtää tiedot toiselle rekisterinpitäjälle.

- Oikeus tehdä valitus valvontaviranomaiselle
  - Rekisteröidyllä on oikeus tehdä valitus erityisesti vakinaisen asuin- tai työpaikkansa sijainnin mukaiselle valvontaviranomaiselle, jos hän katsoo, että henkilötietojen käsittelyssä rikotaan EU:n yleistä tietosuoja-asetusta (EU) 2016/679. Rekisteröidyllä on lisäksi oikeus käyttää hallinnollisia muutoksenhakukeinoja sekä muita oikeussuojakeinoja.

    Yhteystiedot:

    Tietosuojavaltuutetun toimisto
    Käyntiosoite: Ratapihantie 9, 6. krs, 00520 Helsinki
    Postiosoite: PL 800, 00521 Helsinki
    Vaihde: 029 56 66700
    Faksi: 029 56 66735
    Sähköposti: tietosuoja@om.fi

Rekisteröidyn oikeuksien käyttämistä koskevissa pyynnöissä noudatetaan rekisterinpitäjän tietopyyntöprosessia.

LIITE G: SUOSTUMUSLOMAKE TUTKIMUKSEEN OSALLISTUMISEKSI

SUOSTUMUSLOMAKE: Oppimateriaalin kehittämistutkimus suhteellisesta vaalitavasta

SUOSTUMUS TUTKIMUKSEEN OSALLISTUMISEKSI

Minua on pyydetty osallistumaan yllä mainittuun tieteelliseen tutkimukseen, ja olen saanut kirjallista tietoa tutkimuksesta ja mahdollisuuden esittää siitä tutkijalle kysymyksiä.

Ymmärrän, että tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista ja että minulla on oikeus kieltäytyä siitä sekä peruuttaa suostumus ja keskeyttää tutkimus väliaikaisesti syytä ilmoittamatta. Ymmärrän myös, että tiedot käsitellään luottamuksellisina.

* Pakollinen

1. Annan suostumukseni tutkimukseen osallistumiseksi *

◯ Kyllä

◯ Ei

2. Annan suostumukseni henkilötietojeni käsittelemiseksi *

◯ Kyllä

◯ Ei

3. Opetettava aineeni on *

◯ Matematiikka

◯ Yhteiskuntaoppi

4. Työskentelen *

◯ Lukiossa

◯ Yläkoulussa

◯ Sekä lukiossa että yläkoulussa

◯ Olen vielä opiskelija