

Johanna Witka

**YLIOPISTOMATEMATIIKAN OPINTOIHIN  
SIIRTYMISEN TUKEMINEN  
OPETUSMENETELMILLÄ**

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaali  
kehittämistutkimuksena

Diplomityö  
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta  
Huhtikuu 2024

# TIIVISTELMÄ

Johanna Witka: Yliopistomatematiikan opintoihin siirtymisen tukeminen opetusmenetelmillä  
Diplomityö  
Tampereen yliopisto  
Teknis-luonnontieteellinen DI-ohjelma  
Huhtikuu 2024

---

Opinnäytetyön tarkoituksena oli tutkia yliopistomatematiikan opintoihin siirtymisen haasteita ja tukikeinoja sekä kehittää kompleksilukujen itseopiskelumateriaali opintojen alkuvaiheeseen. Tutkimus toteutettiin yhden syklin mittaisena kehittämistutkimuksena, jonka vaiheet olivat ongelmanalyysi, suunnittelu, kehittäminen, testaaminen, arviointi, jatkokehittäminen ja raportointi.

Yliopisto-opintoihin siirtymisen myötä opiskelijan vastuu arjesta ja opinnoista lisääntyy. Samalla opiskeltavien sisältöjen laajuus ja haastavuus kasvavat. Siirtymää voidaan sujuvoittaa panostamalla ryhmäytymiseen, opettamalla opiskelutaitoja ja hyödyntämällä monipuolisia opetusmenetelmiä. Luennot ovat tyypillinen osa yliopisto-opetusta, mutta käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmien hyödyntäminen on lisääntynyt vähitellen. Käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmin toteutetuilla opintojaksoilla opiskelijat opiskelevat teorian verkkomateriaalin avulla ennen lähiopetustilaisuutta, jossa oppimista syvennetään tekemällä tehtäviä.

Yliopistomatematiikan haastavuuden ja abstraktiuden kokemukset korostuvat kompleksilukujen oppimiseen liittyvissä tutkimuksissa. Kompleksiluvut onkin havaittu yhdeksi haasteellisimmaksi lineaarialgebran osa-alueeksi kompleksilukujen laskutoimituksien ja käytännön sovellusten ymmärtämisen takia. Sovelluksia tekniikan aloilta löytyy kuitenkin paljon. Kompleksiluvuilla voidaan mallintaa esimerkiksi vaihtovirtapiirejä, sähkömagneettisia aaltoja ja fluidien virtausta.

Ongelmanalyysin perusteella kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin suunnittelun ja kehittämisen lähtökohdaksi asetettiin materiaalin helposti lähestyttävyyden, selkeyden ja aktiiviseen ajatteluun ohjaaminen sekä teorian opettaminen ja havainnollistaminen. Itseopiskelumateriaalin sisällöiksi valikoitui kompleksilukujen ominaisuudet ja laskutoimitukset, napakoordinaatti- ja eksponenttimuoto sekä kompleksiluvun juuret ja kompleksinen polynomi. Itseopiskelumateriaali koostuu johdannosta, opetusvideoista, automaattitarkisteisista perustehtävistä ja syventävistä tehtävistä itsearviointineen. Itseopiskelumateriaali rakennettiin Moodle-oppimisalustalle.

Itseopiskelumateriaalia testattiin käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmin toteutetulla matematiikan opintojaksolla. Juuri opintonsa aloittaneet opiskelijat opiskelivat kompleksiluvut itseopiskelumateriaalin avulla, vastasivat tutkimuskyselyyn ja osallistuivat tenttiin, jossa kompleksilukuihin liittyvä tehtävä osattiin hyvin. Tutkimuskyselyn vastaukset analysoitiin teoriaohjaavalla sisällönanalyysillä. Opiskelijat pitivät itseopiskelumateriaalia toimivana, mutta kaipasivat enemmän esimerkkejä ja tehtäviä. Eniten yliopisto-opintoihin siirtymistä vaikeuttaviksi tekijöiksi nimettiin sisältöjen haastavuus ja laajuus sekä kiireen tuntu. Opetusvideoiden, tehtävien ja kavereiden kanssa opiskelun koettiin tukeneen opiskelua, mutta lähiopetustilaisuuksia olisi toivottu lisää.

Itseopiskelumateriaalia jatkokehitettiin lisäämällä vinkkejä itsenäiseen opiskeluun, mainintoja kompleksilukujen sovelluskohteista sekä vapaaehtoisia lisätehtäviä. Itseopiskelumateriaaliin liittyvät tutkimustulokset vaikuttavat luotettavilta, joten kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin voidaan todeta olevan onnistunut.

Avainsanat: siirtymä, yliopisto, opiskelu, itseopiskelumateriaali, kompleksiluvut

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

## ABSTRACT

Johanna Witka: Supporting the transition to university mathematics studies with teaching methods  
Master of Science Thesis  
Tampere University  
Master's Programme in Science and Engineering  
April 2024

---

The purpose of the thesis was to research the challenges and support mechanisms related to the transition to university mathematics studies and to develop self-study material of complex numbers for the beginning of the studies. The research was carried out as a one-cycle design research with stages including problem analysis, planning, development, testing, evaluation, further development, and reporting.

Students' responsibility for everyday life and studies increases when transitioning to university studies. Simultaneously, the scope and complexity of the studied content increases. The transition can be made easier by emphasizing grouping, teaching study skills, and using versatile teaching methods. Lectures are a typical part of university education, but the use of flipped learning methods has increased. In flipped learning courses, students study the theory with online material before the teaching session, in which the learning is deepened by doing assignments.

The experiences of complexity and abstractness of university mathematics are emphasized in studies related to learning complex numbers. Complex numbers have been identified as one of the most challenging areas of linear algebra due to their calculations and the comprehension of practical applications. However, there are many applications in technology. Complex numbers can be used to model for instance alternating current circuits, electromagnetic waves, and fluid flow.

Based on the problem analysis, the objectives of the self-study material on complex numbers were chosen to plan and develop easily accessible and clear material that helps active thinking and to teach and illustrate the theory. The contents of the self-study material are the properties and calculations of complex numbers, polar form and exponent form, roots of a complex number, and a complex polynomial. The self-study material consists of an introduction, teaching videos, self-checking basic assignments, and applied assignments with self-assessments. The self-study material was built in the Moodle learning platform.

The self-study material was tested in a mathematics course where flipped learning was used. The students, who had just started their studies, studied complex numbers with the help of self-study material, answered a survey, and took part in an exam, in which they got good marks on the complex number assignment. The answers to the survey were analyzed using content analysis, which was guided by theory and data. The students thought that the self-study material worked, but needed more examples and assignments. The complexity and scope of the contents as well as the feeling of hurry were identified as the most difficult factors when transitioning to university studies. Teaching videos, assignments, and studying with friends were identified as supportive factors, but teaching sessions were hoped more.

The self-study material was further developed by adding tips for independent studying, mentions of the applications of complex numbers, and optional additional assignments. The research results seem reliable, so the self-study material for complex numbers can be said to be successful.

Keywords: transition, university, studying, self-study material, complex numbers

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

## ALKUSANAT

Yliopisto-opintojen aloittaminen oli minulle suuri elämänmuutos. Opinnnot sujuivat hyvin, mutta henkisesti olin todella kovilla, kun yritin tasapainotella urheilun, opintojen ja vapaa-ajan välillä. Pikkuhiljaa oppiessani yliopisto-opintojen käytännöt löysin oman polkuni ja tavan opiskella. Monia asioita jouduin kuitenkin opettelemaan kantapäähän kautta.

Opinnäytetyön aihetta miettiessäni minulle oli itsestään selvää, että haluan tutkia jotakin matematiikan opettamiseen ja oppimiseen liittyvää aihetta. Hyvin pian huomasin myös, että monet pohtimani aiheet liittyivät jollain tavalla yliopisto-opintoihin siirtymiseen, jonka olin kokenut vaikeaksi.

Kun minulle ehdotettiin kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin kehittämistä yliopisto-opintojen alkuvaiheeseen, innoistuin heti. Saisin suunnitella oppimateriaalin siirtymävaihetta ajatellen ja pääsisin tutustumaan tarkemmin kompleksilukuihin, jotka kiehtoivat minua, mutta olivat jääneet abstraktiksi matematiikan osa-alueeksi erityisesti sovellusten ymmärtämisen näkökulmasta.

Innostuksestani huolimatta opinnäytetyöprosessi ei ollut missään nimessä helppo. Tein monia asioita ensimmäistä kertaa ja koin paljon epävarmuutta tutkimuksen toteuttamiseen ja itseopiskelumateriaalin suunnitteluun liittyen. Sain kuitenkin paljon apua ja vinkkejä opinnäytetyön ohjaajiltani Terhi Kaarakalta ja Petteri Laakkoselta, mistä olen erittäin kiitollinen. Heidän kanssaan käydyt keskustelut opettivat ja kannustivat minua paljon.

Koulupolkuni aloittamisesta tulee tänä vuonna kuluneeksi 20 vuotta. Vuosien varrelle on mahtunut paljon oppimisen iloa, epätoivon ja tuskastumisen hetkiä sekä uusia ystävyys-suhteita ja ikimuistoisia kokemuksia. Opinnäytetyön valmistumisen myötä haluan kiittää kaikkia minua opettaneita ja kannustaneita opettajia.

Suuri kiitos kuuluu myös perheelleni, lähipiirilleni ja ystävilleni, jotka ovat tukeneet minua opintopolkuni eri vaiheissa. Erityiskiitos valmentajalleni Kari Pihkaselle, joka on huomioinut harjoittelun ohjelmoinnissa kaksoisurani vaikutukset jaksamiseen ja palautumiseen.

Lopuksi haluan toivottaa antoisia lukuhetkiä kaikille kompleksiluvuista, oppimisesta tai itseopiskelumateriaalin kehittamisestä kiinnostuneille tai muuten työn äärelle päätyneille!

Tampereella, 22. huhtikuuta 2024

Johanna Witka

## SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto . . . . .	1
2.	Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä . . . . .	3
2.1	Yleistä kehittämistutkimuksesta . . . . .	3
2.2	Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin kehittäminen . . . . .	5
3.	Siirtymävaihe aiemmista opinnoista yliopisto-opintoihin . . . . .	6
3.1	Elämänmuutokset aiemmista opinnoista yliopisto-opintoihin siirryttäessä . . . . .	6
3.2	Siirtymävaiheen tukeminen . . . . .	7
4.	Opiskelu ja oppiminen . . . . .	9
4.1	Yliopisto-opetus . . . . .	10
4.2	Itsenäinen opiskelu . . . . .	11
4.3	Verkko-oppiminen . . . . .	14
4.4	Yliopistomatematiikan opiskelu . . . . .	15
4.5	Kompleksilukujen oppiminen . . . . .	15
5.	Kompleksiluvut . . . . .	17
5.1	Kompleksilukujen ominaisuuksia. . . . .	18
5.2	Kompleksimuuttujan funktiot tasokuvauksina . . . . .	23
5.3	Konformikuvaus . . . . .	27
6.	Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin suunnittelu ja kehittäminen . . . . .	33
6.1	Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin suunnittelu . . . . .	34
6.2	Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin rakentaminen oppimisalustalle . . . . .	38
7.	Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin testaaminen ja arviointi . . . . .	42
7.1	Kokemuksia itseopiskelumateriaalista. . . . .	44
7.2	Haasteet yliopistomatematiikan opiskelun alkuvaiheessa . . . . .	51
7.3	Tukikeinot yliopistomatematiikan opiskelun alkuvaiheessa. . . . .	56
8.	Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin jatkokehittäminen ja pohdinta . . . . .	60
8.1	Kompleksilukujen itseopiskelumateriaaliin tehdyt muutokset . . . . .	60
8.2	Jatkokehitysideat . . . . .	62
8.3	Tutkimuksen luotettavuus . . . . .	63
9.	Yhteenveto . . . . .	64
	Lähteet . . . . .	66
	Liite A: Tutkimuskysely . . . . .	70
	Liite B: Kompleksilukujen itseopiskelumateriaali . . . . .	77

## LYHENTEET JA MERKINNÄT

CAS	Computer algebra system
engl.	Englanniksi
$f(z)$	Funktio $f$ muuttujalla $z$
$f'(z)$	Funktion $f(z)$ derivaatta
$\frac{df}{dz}$	Funktion $f$ derivaatta muuttujan $z$ suhteen
$f : S \rightarrow \mathbb{C}$	Funktion $f$ kuvaus määrittelyjoukosta $S$ maalijoukkoon $\mathbb{C}$
$S'$	Funktion $f$ kuvajoukko
$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	Funktion $f$ raja-arvo, kun $z$ lähestyy $z_0$
$f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S$	Funktion $f$ käänteisfunktio $f^{-1}$
HTML	Hypertext Markup Language
$i$	Imaginääriyksikkö
$\mathbb{C}$	Kompleksiluvut
$\arg(z)$	Kompleksiluvun $z$ vaihekulma eli argumentti
$\operatorname{Im}(z)$	Kompleksiluvun $z$ imaginääriosaa
$\bar{z}$	Kompleksiluvun $z$ liittoluku eli kompleksikonjugaatti
$ z $	Kompleksiluvun $z$ itseisarvo eli moduli
$\operatorname{Re}(z)$	Kompleksiluvun $z$ reaaliosa
$\in$	Kuuluu joukkoon
$z(t)$	Käyrän parametriesitys
$\mathbb{N}$	Luonnolliset luvut
PDF	Portable Document Format
$\mathbb{R}$	Reaaliluvut
STACK	System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel

# 1. JOHDANTO

Työn tarkoituksena on rakentaa kompleksilukujen itseopiskelumateriaali yliopistomatematiikan opintojen alkuvaiheeseen. Materiaalin kehityksen tueksi kartoitetaan opintojen aloittamiseen liittyviä haasteita ja toimivia tukikeinoja. Itseopiskelumateriaalin rakentamisessa hyödynnetään kehittämistutkimuksen (engl. *design research* tai *design-based research*) mallia [44, ss. 9–26]. Tarkoituksena on luoda konkreettinen opetusmateriaali, jota testataan ja kehitetään palautteen perusteella toimivan kokonaisuuden aikaansaamiseksi. Ennen tätä on kuitenkin tunnistettava kehittämistarpeet sekä suunniteltava ja toteutettava materiaali teoriaan ja aiempiin tutkimuksiin nojaten.

Lukion opetussuunnitelman perusteita on uudistettu viimeksi vuosina 2015 ja 2019. Uudemman opetussuunnitelman mukaan opiskelevia lukiolaisia valmistuu ylioppilaaksi ensikertaa keväällä 2024. Riippumatta opetussuunnitelman versiosta kompleksilukuja ei mainita matematiikan sisällöissä [39] [40], joten ne tulevat yliopisto-opintojaan aloittaville uutena asiana. Lukion ensimmäisen matematiikan opintojakson, joka on yhteinen sekä pitkän että lyhyen matematiikan lukijoille, sisällöissä nostetaan esille lukujoukot [39, s. 130] [40, ss. 223–224]. Käytännössä oppikirjoissa laajimpana lukujoukkona esiintyy reaaliluvut [19]. MAOL-digitaulukot, jotka ovat lukiolaisilla käytössä, esittelevät kuitenkin kompleksilukujen ominaisuudet ja laskutoimituksia [28].

Lukion pitkän matematiikan suoritettuaan yliopistoon tulevan opiskelijan oletetaan hallitsevan muun muassa peruslaskutoimitukset, yhtälöiden ratkaisemisen, geometrian ja vektorilaskennan perusteet [39, s. 129–136] [40, ss. 221–229]. Näin ollen edellytykset kompleksilukujen omaksumiselle uutena lukujoukkona ovat olemassa. Kompleksilukujen yhteydessä hyödynnetään reaaliluvuille opittuja laskutoimituksia. Yhtälön ratkaisussa voidaan käyttää samoja menetelmiä kuin reaaliluvuilla, mutta polynomiyhtälöillä ratkaisuna voi olla myös kompleksisia juuria. Kompleksilukujen havainnollistus puolestaan onnistuu geometrian ja vektoreiden avulla.

Tampereen yliopistossa teknis-luonnontieteellisen opiskelijat aloittavat matematiikan opintonsa Differentiaali- ja integraalilaskennan opintojaksolla. Differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa karakteristen polynomien nollakohtina esiintyy kompleksisia ratkaisuja, joten kompleksiluvut on otettava haltuun ennen differentiaaliyhtälöiden opiskelua. Opintojaksolla ei pidetä luentoja vaan se toteutetaan kahden opetusmenetelmän käänteinen opetus (engl.

*flipped classroom*) ja käänteinen oppiminen (engl. *flipped learning*) yhdistelmänä. Opetusmenetelmässä opiskelijat tutustuvat ensin itsenäisesti käsiteltäviin asioihin opintomoneen, opetusvideoiden ja verkkotehtävien avulla ennen viikottaisia pienryhmätillaisuuksia. Opiskelijat ovat kokeneet yliopistomatematiikan opintojen aloittamisen sekä kompleksilukujen omaksumisen uutena lukujoukkona haastavaksi aiempina vuosina. Näin ollen syntyi tarve luoda helposti lähestyttävä ja oppimista tukeva kompleksilukujen itseopiskelumateriaali, joka tukisi samalla siirtymää aiemmista opinnoista yliopisto-opintoihin.

Kompleksilukujen oppimiseen (esim. [33] [36] [54]) ja yliopisto-opintojen (esim. [4] [42]) aloittamiseen liittyen on tehty tutkimuksia aiemminkin, mutta kehittämistutkimuksena valmisteltua kompleksilukujen itseopiskelumateriaalia ei tullut vastaan. Kompleksilukujen opiskeluun ja opettamiseen on olemassa monia erilaisia materiaaleja ja yliopisto-opettajat ovat todennäköisesti omaan kokemukseensa perustuen luoneet sopivia opetusjärjestelyjä tukemaan uusia opiskelijoita. Tämän työn tavoitteena on kehittää materiaali, jolle on tutkimusnäyttöä, ja saada ajankohtaista tutkimustietoa uusien opiskelijoiden kokemuksista ja tarpeista siirtymävaiheessa.

Itseopiskelumateriaalin kehittämisen ohella työssä kartoitetaan yliopistomatematiikan opiskelun aloittamiseen liittyviä haasteita sekä opetuksellisia tukikeinoja siirtymävaiheen helpottamiseen, jotta saadaan mahdollisimman hyvä kuva opiskelijoiden tarpeista, ja itseopiskelumateriaalista voidaan kehittää entistä parempi ja toimivampi siirtymävaihetta ajatellen. Tutkimuskysymykset ovat

1. Millainen kompleksilukujen itseopiskelumateriaali edistää oppimista ja sopeutumista yliopistomatematiikan opiskeluun?
2. Mitkä asiat opintojaan aloittavat opiskelijat kokevat haastaviksi yliopistomatematiikan opiskelussa?
3. Miten opiskelijaa voidaan tukea opetusjärjestelyin siirryttäessä aiemmista opinnoista yliopisto-opiskeluun?

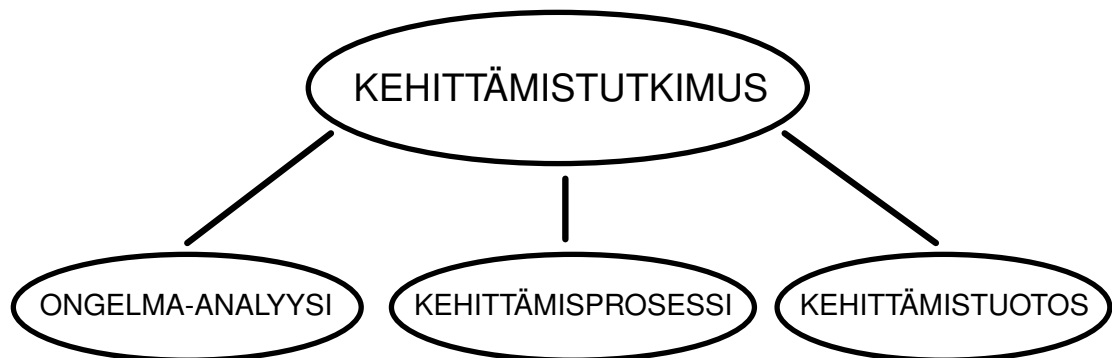
Seuraavassa luvussa tutustutaan tarkemmin kehittämistutkimuksen vaiheisiin ja menetelmiin. Kolmannessa luvussa kuvataan yliopisto-opintoihin siirtymiseen liittyviä elämänmuutoksia ja tukikeinoja. Luvussa neljä syvennyttään opiskeluun ja oppimiseen. Viidennessä luvussa esitellään kompleksilukujen ominaisuuksia ja sovelluksia. Luku kuusi keskittyy itseopiskelumateriaalin suunnitteluun ja rakentamiseen. Luvussa seitsemän kerrotaan itseopiskelumateriaalin testaamisesta ja tutkimustuloksista. Luvussa kahdeksan paneudutaan itseopiskelumateriaalin jatkokehittämiseen ja tutkimuksen luotettavuuteen. Työn viimeisessä luvussa tehdään vielä yhteenveto toteutetusta tutkimuksesta ja itseopiskelumateriaalin kehittämisestä.

## 2. KEHITTÄMISTUTKIMUS TUTKIMUSMENETELMÄNÄ

Kehittämistutkimus (engl. *design research* tai *design-based research*) on tutkimusmenetelmä, jonka tavoitteena on kehittää toimintaa ja tuottaa tutkimukseen perustuvaa käytännön läheistä tietoa. Kehittämistutkimus on suhteellisen uusi tutkimusmenetelmä opetuksen tutkimisessa, sillä ensimmäiset tutkimusartikkelit on julkaistu 1990-luvulla ja kiinnostus tutkimusmenetelmää kohtaan kasvoi kunnolla vasta 2000-luvulla. Tutkimusmenetelmän kehittymisen taustalla on ollut tarve tuottaa käytännönläheistä tietoa opetuskäyttöön. [44, ss. 9–26].

### 2.1 Yleistä kehittämistutkimuksesta

Kehittämistutkimuksen voidaan ajatella koostuvan kolmesta osa-alueesta kuvan 2.1 mukaisesti. [44, ss. 9–26]

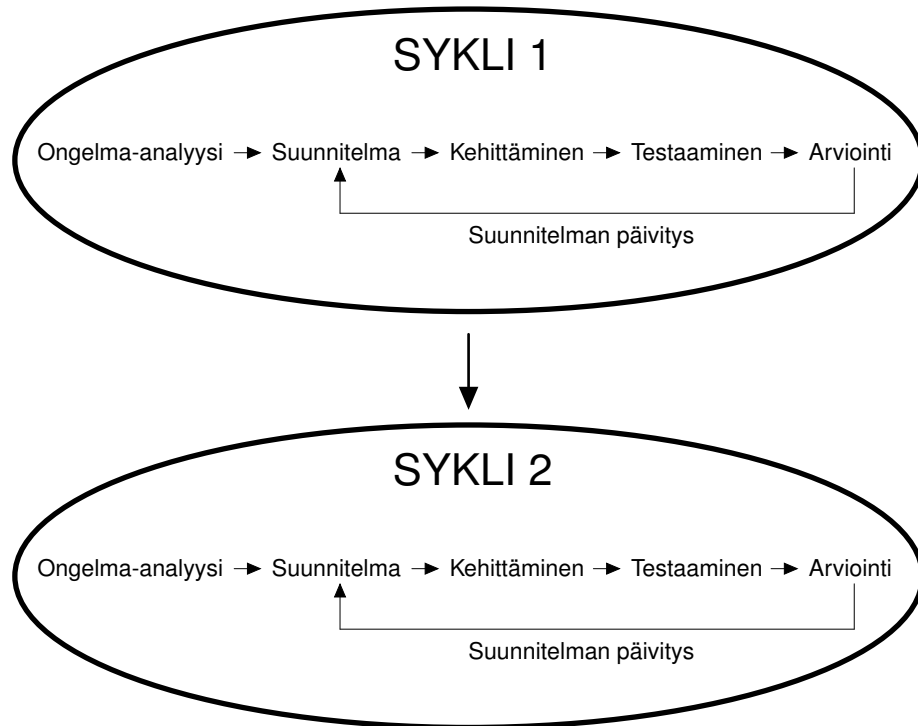


**Kuva 2.1.** Kehittämistutkimuksen osa-alueet (mukailtu [44])

Kehittämistutkimuksen toteutus alkaa aina ongelma-analyysillä, jossa tunnistetaan olemassa olevat haasteet ja kehittämisen tarpeet sekä tutustutaan aiempiin tutkimuksiin. Varsinaisessa kehittämisprosessissa yhdistyvät sekä kehittäminen että tutkimus osana syklistä prosessia, johon kuuluu sekä teoreettisia että kokeellisia vaiheita. Usein kehittämistutkimuksessa saadaan aikaan jokin konkreettinen kehittämistuotos. Kehittämistuotos voi olla esimerkiksi tiettyyn tarkoitukseen suunniteltu opetusmateriaali. [44, ss. 9–26]

Kehittämisprosessi sisältää yleensä useampia kehittämissyklejä, joissa tehdään suunnitelma ongelma-analyysiin perustuen sekä kehitetään, testataan ja arvioidaan kehittämistuotosta. Arvioinnin jälkeen voidaan päivittää suunnitelmaa ja toistaa kehittäminen,

testaaminen ja arviointi. Lopuksi kehittämisprosessin kaikki vaiheet on raportoitava huolellisesti. [44, ss. 9-26] Kuvassa 2.2 on havainnollistettu kehittämistutkimuksen kahden ensimmäisen syklin toteuttamista.



**Kuva 2.2.** Kehittämistutkimuksen kaksi ensimmäistä sykliä vaiheineen (mukailtu [44])

Kehittämistutkimuksen erona normaaliin kehittämiseen on sen tutkimusperusteisuus. Kehittämistutkimuksessa kehittämisen taustalla on teoria ja kehittämisen apuna käytetään tieteellistä tutkimusta. Kehittämispäätökset tehdään tutkimustuloksiin perustuen ja tutkimustulosten luotettavuutta arvioidaan tutkimusmenetelmien luotettavuuskriteerien mukaisesti. [20, ss. 19–24] Kehittämistutkimuksessa pyritään luomaan kehittämistuotoksen lisäksi uutta yleistettävää teoriaa. Toimintatutkimuksessa toteutetaan kehittämistutkimuksen kaltaista teoriaan pohjautuvaa kehittämistä, mutta erona on yleistettävän teorian luominen. Toimintatutkimusta voi toteuttaa esimerkiksi opettaja, joka tutkii ja kehittää omaa opetustaan. [44, ss. 9–26]

Kehittämistutkimuksella ei ole omia tutkimusmenetelmiä vaan siinä hyödynnetään sekä laadullisia että määrällisiä tutkimusmenetelmiä. Molemmista tutkimusmenetelmistä aineistoa voidaan kerätä erilaisilla kyselylomakkeilla. Laadullisessa tutkimuksessa aineistoa voidaan kerätä myös esimerkiksi havainnoimalla tai haastatteleamalla. Tekstiaineistoa voidaan analysoida esimerkiksi laadullisen sisällönanalyysin avulla. Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissä (engl. *conventional content analysis* [15]) pyrkimyksenä on luoda teoreettinen kokonaisuus ilmiöstä käsittelemällä aineistoa ilman ennalta sovittuja analyysiyksiköitä. Teorialähtöinen sisällönanalyysi (engl. *directed content analysis* [15]) perustuu tiettyyn teoriaan tai malliin ja aineiston analyysi tehdään sen perusteella. Numeerista da-

taa voidaan käsitellä määrällisen tutkimuksen mukaisesti erilaisilla ohjelmistoilla ja esittää tulokset esimerkiksi jakaumina tai ristiintaulukointeina. [20, ss. 19–149]

## 2.2 Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin kehittäminen

Tässä opinnäytetyössä toteutettiin vain yksi sykli, jonka vaiheet olivat

1. Ongelma-analyysi
2. Suunnittelu
3. Kehittäminen
4. Testaaminen
5. Arviointi
6. Jatkokehittäminen
7. Raportointi.

Kehittämistutkimus aloitettiin ongelma-analyysillä, kun tunnistettiin kompleksilukujen itseopiskelumateriaalille yliopistomatematiikan opintojen alkuun olevan tarvetta. Ongelma-analyysissä perehdyttiin aiemmin käytössä olleisiin opetusmateriaaleihin ja pohdittiin itseopiskelumateriaalin toteutusta sekä tutustuttiin siirtymävaiheeseen (luku 3), opiskeluun ja kompleksilukuihin (luku 4) liittyviin tutkimuksiin. Näiden pohjalta asetettiin tutkimuskysymykset, jotka esiteltiin luvussa 1.

Suunnitteluvaiheessa laadittiin tutkimussuunnitelma ja valmisteltiin tutkimuksen toteuttamiseen vaadittavat asiakirjat sekä suunniteltiin itseopiskelumateriaalia (luku 6) tunnistettujen kehitystarpeiden ja tutkimuksien perusteella. Kun materiaali oli suunniteltu huolella, rakennettiin varsinainen itseopiskelumateriaali (luku 6). Kehittämisen jälkeen vuorossa oli materiaalin testaus kohderyhmällä sekä arviointi kerätyn datan ja tutkimuskyselyvastauksien avulla (luku 7). Tämän jälkeen materiaalia jatkokehitettiin (luku 8) saadun palautteen pohjalta ja kehittämistutkimuksesta raportointiin tämän opinnäytetyön muodossa.

Aineistona käytettiin numeerista dataa itseopiskelumateriaalin testijaksosta ja tutkimuskyselystä peräisin olevia vastauksia väittämiin, monivalintoihin ja avoimiin kysymyksiin. Testiryhmän pienen koon vuoksi laaja määrällinen analyysi ei ollut mahdollista, mutta jakaumien esittäminen oli kuitenkin mielekästä numeerisesta datasta ja tutkimuskyselyn väittämistä ja monivalinnoista (luku 7). Avoimien kysymyksien analysoinnissa hyödynnettiin teoriaohjaavaa sisällönanalyysiä, jossa yhdistetään sekä aineisto- että teorialähtöistä sisällönanalyysia. Teoriaohjaavassa sisällönanalyysissä teoria ohjaa analyysiyksiköiden valitsemista, mutta analyysi ei pohjaudu täysin teoriaan. Aineistosta tehtyjä tulkintoja kuitenkin vahvistetaan tarjoamalla niille selityksiä ja perusteluja teorian ja aineiston avulla. [58, ss. 79–108]

### **3. SIIRTYMÄVAIHE AIEMMISTA OPINNOISTA YLIOPISTO-OPINTOIHIN**

Elämänkaaren (engl. *life span*) näkökulmasta tarkasteltuna ihminen kehittyy koko elämänsä ajan. Kehitysprosessiin vaikuttavat eri ikävaiheet, vallitseva historiallinen aika ja erilaiset epänormatiiviset tapahtumat. Jokaisen ihmisen elämänkulku (engl. *life course*) on erilainen. Siihen vaikuttavat elämänkaarinäkökulmaan vaikuttavien tekijöiden lisäksi esimerkiksi elinympäristön vallitseva kulttuuri, elämäntapahtumien ajoitukset elämässä ja läheisten ihmisten elämänkulku. Lisäksi yksilö voi suunnitelmallisuudellaan ja valinnoillaan vaikuttaa elämänkulkuunsa. [37, ss. 186–189]

Ihmisen kehitystä voidaan kuvata erilaisten kehitysteorioiden avulla. Erik Erikson [37, s. 181] ajatteli ihmisen kehityksen olevan seurausta biologisesta kypsymisestä ja sosiaalisten suhteiden muodostamisesta. Hänen mukaansa biologiset ja sosiaaliset muutokset aiheuttavat elämän eri vaiheissa erilaisia psykososiaalisia kriisejä, jotka yksilön tulee selvittää kehittyäkseen. Nuoruusvaiheen kriisi on oman identiteetin rakentaminen. Identiteetin kehitykseen vaikuttavat yhteiskunnalliset arvot, erilaiset kokemukset, ympärillä olevat ihmiset sekä elinympäristöt ja asema yhteiskunnassa. [37, ss. 142-177]

Robert Havighurstin kehitysteorian [37, ss. 149–162] mukaan ihmiset kohtaavat elämänsä eri vaiheissa erilaisia yhteiskunnan asettamia normatiivisia odotuksia, joita kutsutaan kehitystehtäviksi. Kohdalle osuvien kehitystehtävien ratkaiseminen tukee hyvinvointia ja mahdollistaa myöhemmän kehityksen. Nuoruusvaiheen tärkeimpiä kehitystehtäviä ovat ammatinvalinta ja koulutukseen hakeutuminen.

#### **3.1 Elämänmuutokset aiemmista opinnoista yliopisto-opintoihin siirryttäessä**

Suomessa kaikilla on mahdollisuus päästä yliopistoon ja opiskelu on ilmaista, mutta koulutuksen periytyminen on silti osittain läsnä, sillä yliopistoihin hyväksytyistä opiskelijoista suurempi osa on lähtöisin korkeakoulutetusta perheestä. Käytännössä yliopistoon hakeutumisen syitä ovat esimerkiksi aiempi koulumenestys, kiinnostuksen kohteet ja työllistymismahdollisuudet. Siirtyä yliopisto-opintoihin on joka tapauksessa muutos aiempaan elämäntilanteeseen. Sopeutuminen vaatii aikaa, ja sen tarve on yksilöllistä ja riippuu taus-

toista. Esimerkiksi korkeakouluttamattomasta perheestä tulevan opiskelijan sopeutuminen akateemiseen yhteisöön voi kestää kauemmin. [2, ss. 318–347]

Yliopisto-opintojen aloittamisen lisäksi siirtymään voi liittyä muitakin elämänmuutoksia. Opiskelija saattaa muuttaa ensimmäistä kertaa pois kotoa ja uudelle paikkakunnalle. Hänen on opetettava huolehtimaan itse arkiaskareista ja omaksuttava uusien oppimisympäristöjen käytännöt ja toimintatavat. Osalla opiskelijoista saattaa olla takana myös välivuotia opiskelusta, jolloin toimivat opiskelurutiinit eivät välttämättä ole tuoreessa muistissa. Näin ollen opiskelijat kohtaavat heti yliopisto-opintojen alussa monia elämänhallintaan ja opiskeluun liittyviä kehitystehtäviä, joihin tutustutaan tässä alaluvussa.

Yleensä aiemmissa opinnoissa opiskelu on ollut kohtuullisen ohjattua ja opiskeltavaa sisältöä on ollut vähemmän. Yliopistossa opiskelijan vapaus ja vastuu kasvavat. Lisäksi opiskeltavan sisällön haastavuus kasvaa. Muutos voi toimia joko rakentavana tai tuhoisana jännitteenä. Rakentavan jännitteen tilanteessa yliopisto uutena opiskeluympäristönä ohjaa opiskelijaa kehittämään opiskelutaitojaan yliopistossa vaaditulle tasolle. Tuhoisassa jännitte puolestaan haittaa oppimista esimerkiksi opiskelijan epämieluisiksi kokemina opetustapoina. [26, ss. 70–99]

Tampereen teknillisessä yliopistossa kartoitettiin aloittavien opiskelijoiden kokemuksia opintojen käynnistymisestä ”Miksi ja millaiseksi DI:ksi?” -hankkeessa vuosina 2009–2011 [42]. Kvalitatiivisen analyysin tuloksena havaittiin, että opiskelijat kokivat siirtymän lukios- ta yliopistoon odotettua suuremmaksi. Vaikka opiskelijat osasivat varautua muutokseen etukäteen, niin opintojen itsenäisyys, nopea etenemistahti ja opintojen haastavuus yllätti. Monet huomasivat, että oppimisen eteen piti nähdä paljon enemmän vaivaa kuin lukiossa. Lukiossa tuttuja opiskelutapoja oli muokattava vastaamaan yliopisto-opiskelun tarpeita.

Yliopistoon valittujen opiskelijoiden opiskelutaidot voivat vaihdella suuresti. Osa opiskelijoista voi olla jo itseohjautuvia oppimisensa suhteen, kun toiset ovat vielä riippuvaisia opettajan ohjauksesta ja tuesta. Opiskelu on taito, joka vaatii hyviä itsesäätelytaitoja. Itsenäistä opiskelua on kuvattu tarkemmin alaluvussa 4.2. Huolimatta itsesäätelytaitojen tasosta aloittavat yliopisto-opiskelijat ovat uuden edessä eikä opintojen aloittaminen suju aina mutkattomasti. Esimerkiksi lukemisen ja kirjoittamisen vaikeudet, motivaation ja arjenhallinnan haasteet, stressi, perfektionismi, mielenterveyden ongelmat ja yhteenkuuluvuuden tunteen puuttuminen voivat tehdä sopeutumisesta haastavaa. [2, ss. 122–150]

### **3.2 Siirtymävaiheen tukeminen**

Uusien opiskelijoiden kiinnittyminen yliopisto-opintoihin on tärkeä vaihe tulevien opintojen sujumisen kannalta. Opintoihin kiinnittymiseen, akateemiseen yhteisöön sopeutukseen ja edelleen ammatillisen identiteetin löytämiseen vaikuttaa, millaisista lähtökohdista opiskelijat tulevat yliopistoon, ja mikä heidän elämäntilanteensa on opintojen aloittamisen

hetkellä. Jos muutos aiempaan elämäntilanteeseen ja opintoihin on suuri, kiinnittyminen voi olla vaikeampaa. Opiskeluyhteisöön sosiaalistumista ja sopeutumista pyritään tukemaan opiskelijatuutoroinnilla, mutta myös opettajien toiminnalla ja vuorovaikutuksella on merkitystä. [2, ss. 318–347]

Yliopistossa aloittava opiskelija hallitsee yleensä jo jotain alaan liittyviä tietoja, taitoja tai käsitteitä, joita hän on oppinut omassa arjessaan, aiemmissa opinnoissaan tai esimerkiksi valmennuskurssilla. Aiemmilla kokemuksilla onkin positiivisia vaikutuksia uuden oppimiselle. Yliopisto-opintoihin sopeutumisessa olennaista on, että opiskelijat omaksuvat heti opintojen alkuvaiheessa kriittisen ajattelun ja tieteellisen tiedon muodostumisen periaatteet. Opintojen alkuvaiheen opettajien tulisi kiinnittää tähän huomiota. [2, ss. 83–93] Toisaalta kannustamalla korkeakouluopintojen suorittamiseen jo lukioaikana voitaisiin parantaa opiskelijoiden akateemisia taitoja jo ennen yliopisto-opintojen aloittamista ja sujuvoittaa siirtymää ja sopeutumista [25].

Monissa yliopistoissa siirtymävaiheen sujuvoittamiseen on järjestetty erilaisia tukitoimia. Aalto-yliopiston ja Tampereen yliopiston matematiikan opinnoissa on hyödynnetty onnistuneesti esimerkiksi perustaitotestiä, erilaisia sähköisiä tukimateriaaleja ja pienryhmätilaisuuksia [18, ss. 450–474] [34]. Siirtymävaihetta voi tukea myös järjestämällä alkuvaiheen opintoja samankaltaisin opetusjärjestelyin kuin toisen asteen koulutuksessa [34].

Tukitoimien lisäksi yksittäinen opettaja voi vaikuttaa opiskelijoiden motivaation ja opiskelutaitojen kehittymiseen ja näin ollen tukea siirtymävaihetta. Opintojakson aihepiiriin linkittäminen laajempaan kokonaisuuteen voi lisätä opiskelijoiden mielenkiintoa. Osaamistavoitteiden ja arviointimenetelmien määrittelemisen heti opintojakson alussa ohjaa opiskelijoiden oppimista kohti tavoitteita. Oikein mitoitettulla ajankäyttösuunnitelmalla ja arviointiperiaatteilla voi vähentää sekä opettajan että opiskelijoiden kuormituspiikkejä. Monipuolisilla ja aktivoivilla opetusmenetelmillä oppimisesta tulee mielekkäämpää ja formatiivisen arvioinnin ansiosta opiskelijat saavat palautetta etenemisestään myös opintojakson aikana. [1, ss. 19–24]

Opiskelijoiden ja opettajien myönteisiä opetus- ja opiskelukokemuksia tutkittaessa on havaittu, että vuorovaikutteisuus ja yhteisöllisyys lisäävät yliopistossa työskentelevien ja opiskelevien hyvinvointia ja tyytyväisyyttä [16]. Myönteisiä tunteita opetus- ja opiskelutilanteissa herättävät erilaiset tunteet ja tunnelmat, oppiminen, oivaltaminen, tavoitteiden saavuttaminen sekä vuorovaikutus ihmisten kanssa. Opiskelijoiden hyvinvoinnin ja opintoihin tyytyväisyyden kannalta on tärkeää panostaa myös ryhmäytymiseen, sillä kokemus tiedeyhteisöön kuulumisesta syntyy yhteisöllisyyden hetkien kautta.

Mikäli opiskelijan opiskelukyvyyssä ilmenee ongelmia, tukea on tarjolla esimerkiksi opinto-ohjaajien ja opintopsykologien sekä Ylioppilaiden terveydenhoitosäätiö YTHS:n ja Kansaneläkelaitoksen eli Kelan toimesta [2, s. 125]. Korkeakouluopiskelijoiden terveystutkimuksen mukaan tukea tarvittaisiin kuitenkin enemmän [24].

## 4. OPISKELU JA OPPIMINEN

Yleisesti opiskelu mielletään uusien tietojen ja taitojen omaksumisena ja kartuttamisena [55]. Vastaavasti oppiminen voidaan ajatella prosessina, jossa omaksutaan uusia tai muutetaan olemassa olevia tietoja ja taitoja [56]. Oppimisen määrittely ei ole kuitenkaan niin yksiselitteistä. Oppimiselle voidaan tunnistaa yhdeksän peruseriaa, joiden avulla sitä voidaan ymmärtää paremmin [41]. Peruseriaa ovat:

1. Oppiminen on jonkin muuttumista.
2. Oppiminen on väistämätöntä, välttämätöntä ja läsnä kaikkialla.
3. Oppimista voi vastustaa.
4. Oppiminen voi johtaa myös epäedulliseen lopputulokseen.
5. Oppiminen voi olla tiedostamatonta ja tarkoituksellista.
6. Oppiminen on yksilöllistä.
7. Oppimista on sekä prosessi että lopputulos.
8. Oppiminen on erilaista riippuen ajasta ja paikasta.
9. Oppiminen tapahtuu vuorovaikutuksessa.

Oppimista on siis monenlaista. Vastaavasti opiskelua voi toteuttaa monin eri tavoin. Opiskelu voi olla omaehtoista yleissivistyksen kasvattamista tai tutkintoon johtavaa tietojen kartuttamista. Opiskelu voi olla itsenäistä tai tapahtua osana yhteisöä. Joka tapauksessa tavoitteellinen opiskelu vaatii aikaa ja ponnistelua. [46]

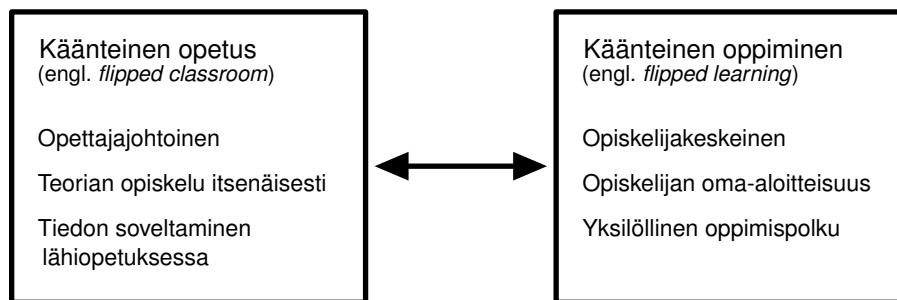
Oppimista voidaan tarkastella myös erilaisten oppimiskäsityksien avulla. Behavioristisen oppimiskäsityksen mukaisessa oppimistilanteessa aktiivisessa roolissa on opettaja, joka jakaa opiskelijoille tietoa sopivan kokoisina paloina. Humanistisessa oppimiskäsityksessä puolestaan korostetaan opiskelijan itseohjautuvuutta ja reflektiota osana ryhmätyöskentelyä, jossa opiskelijoiden kokemukset ohjaavat oppimisprosessia. Konstruktivisen oppimiskäsityksen mukaan opiskelija rakentaa itse tietoa omien kokemustensa ja aiempien tietojensa pohjalta ollessaan vuorovaikutuksessa muiden kanssa. Nykyään yleisesti käytössä on sosiokonstruktivistinen oppimiskäsitys, jonka mukaan oppiminen on sekä yksilöllinen että yhteisöllinen tietojen ja taitojen rakennusprosessi. Olennaista oppimisen kannalta on oppijan oma ajattelu. [22, ss. 15–52]

## 4.1 Yliopisto-opetus

Yliopistolain (2009/558 § 2) mukaan yliopistojen tehtävänä edistää tutkimusta ja antaa tutkimukseen perustuvaa ylintä opetusta sekä tarjota mahdollisuuksia jatkuvaan oppimiseen [60]. Suomessa tehtävää hoitaa 13 yliopistoa, joissa on useita tutkimusyksiköitä ja tutkinto-ohjelmia. Opiskelijoilla on mahdollisuus tutustua ajankohtaiseen tutkimukseen ja hakeutua tutkimusryhmiin harjoittelijaksi tai kesätyöntekijäksi. Yliopiston opettajat eivät välttämättä ole koulutukseltaan opettajia vaan oman alansa asiantuntijoita. Esimerkiksi tutkijan työhön kuuluu yleensä myös opetusta. Tutkijat ovat perillä ajankohtaisesta tutkimustiedosta, mutta pedagogista osaamista heiltä ei välttämättä löydy. [26, ss. 46–67]

Yliopistossa opettavien opetuskäsityksiä ja opetuksellisia lähestymistapoja tutkittaessa on erotettu kaksi lähestymistapaa opettamiseen: sisältölähtöinen ja oppimislähtöinen lähestymistapa. Sisältölähtöisessä lähestymistavassa tavoitteena on opintojakson sisällön välittäminen opiskelijoille asiantuntijaroolissa. Oppimislähtöisessä opetustavassa keskiössä on oppimisen edistäminen kannustamalla aktiiviseen opiskeluun pohtimalla ja olemalla vuorovaikutuksessa muiden kanssa. Oppimislähtöinen opetustapa mahdollistaa yksilöllisesti toimivien opiskelutapojen toteuttamisen ja opiskelun suuntaamisen omien toiveiden mukaan sekä pyrkimyksen syväsuuntautuneeseen oppimiseen pintasuuntautuneen oppimisen sijaan. Etenkin luonnontieteissä opettajat noudattavat enemmän sisältölähtöistä lähestymistapaa, mutta tutkimuksen ja yliopistopedagogisen koulutuksen avulla opetusta voidaan kehittää entistä enemmän oppimislähtöiseen suuntaan. [26, ss. 46–67]

Viimeisien vuosien aikana yliopisto-opetuksessa on tapahtunut muutoksia niin toteutustavoissa kuin oppimisympäristöissä. Esimerkiksi käänteisen opetuksen (engl. *flipped classroom*) ja oppimisen (engl. *flipped learning*) menetelmien (kuva 4.1) hyödyntäminen opetuksessa on yleistynyt. [53]



**Kuva 4.1.** Käänteinen opetus (engl. *flipped classroom*) ja käänteinen oppiminen (engl. *flipped learning*) [53] [57, ss. 19–23]

Käänteisessä opetuksessa opettaja ohjaa ja aikatauluttaa oppimista, mutta opiskelijat opiskelevat teorian itsenäisesti ennen lähiopetusta, jolloin yhteinen aika voidaan käyttää oppimisen syventämiseen. Käänteinen oppiminen puolestaan mahdollistaa yksilöllisemmän oppimisen, jossa opiskelija etenee oma-aloitteisesti omaa tahtia ja opettaja tarjoaa

tukea tarpeen tullen. Massatoteutuksilla voidaan hyödyntää näiden kahden opetusmenetelmän yhdistelmää. Tyypillisiä elementtejä käänteiselle opetukselle ja oppimiselle ovat esimerkiksi opetusvideot, harjoitustehtävät, pienryhmätilaisuudet sekä itse- ja vertaisarviointi. Yleensä arviointi noudattaa formatiivista arviointia. [53] [57]

Käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmien myötä opiskelu on muuttunut entistä opiskelijakeskeisemmäksi ja perinteiset luennot ovat jääneet vähemmälle, joten opettajien tehtäväksi on tullut oppilaiden aktivointi ja oppimisen tukeminen. Opiskelijoilta vaaditaan yhä enemmän toimivien opiskelumenetelmien hallitsemista, osaamisen osoittamista erilaisten suorituksen avulla ja oman oppimisen kehittämistä. Käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmien on havaittu edistävän erityisesti ongelmanratkaisutaitojen, kriittisen ajattelun ja ryhmätöytäitojen kehittymistä. [53] Lisäksi niiden on havaittu olevan yhteydessä syväsuuntautuneeseen lähestymistapaan oppimisessa [35].

Vaikka teorian opiskelu tapahtuu käänteisessä opetuksessa itsenäisesti ennen pienryhmätilaisuutta, ja käänteisessä oppimisessa opiskelijat voivat edetä eri tahtia, opiskelijoiden ei tarvitse opiskella yksin. Yhteisöllinen oppiminen ja vuorovaikutus lukeutuvat molempien opetusmenetelmien tunnuspiirteisiin. [53] Itseasiassa sekä käänteinen opetus että oppiminen voidaan luokitella sosiokonstruktivisen oppimiskäsityksen alle, sillä niissä yhdistyvät yksilölliset oppimisprosessit ja oppimista tukeva vuorovaikutus muiden yhteisön jäsenien kanssa [57, ss. 20–23]. Työskentelytavasta huolimatta tärkeintä on nähdä vaivaa oppimisen eteen. Opetusvideoiden katsomisen ja tehtävien tekemisen sekä yleisesti aktiivisen osallistumisen on havaittu olevan yhteydessä opintomenestykseen. [53]

## 4.2 Itsenäinen opiskelu

Itsenäistä opiskelua kuvataan tässä alaluvussa perustuen Tiina-Maria Päivänsalon kirjaan Oppimiskoodi [46]. Itsenäisessä opiskelussa opiskelijalla on mahdollisuus toteuttaa opiskelua itselleen parhaiten sopivalla tavalla, mutta se vaatii opiskelijalta hyviä opiskelutaitoja, sinnikkyyttä ja kokonaisuuden hallintaa. Ehkä tärkeimpänä taitona on usko omiin kykyihin ja oppimiseen niin hyvinä kuin huonoina hetkinä. Oppimisessa tulee vastaan haasteita ja virheitä, mutta niistä opitaan. Motivaation ylläpitämiseksi ja opiskelun ohjaukseksi opiskelijan kannattaa asettaa oppimiselleen tavoitteita. Yhden ison päämäärätavoitteen lisäksi kannattaa listata pienempiä prosessitavoitteita, jotta onnistumisen kokemukset mahdollistuvat myös prosessin aikana.

Ennen opiskelun aloittamista kaikki lähtee liikkeelle ajankäytön suunnitelmasta, joka voi löytyä kalenterista tai olla hahmoteltuna mielessä. Hyvin tehty realistinen opiskelusuunnitelma ehkäisee kiireen ja stressin tuntua, edistää arvojen mukaisen toiminnan toteuttamista ja tukee hyvinvointia. Se ottaa huomioon opiskelijan mieltymykset opiskeluajankohdista ja opiskeltavien asioiden kiireellisyyden ja tärkeyden niin, että opiskelijalle jää myös vapaa-aikaa, jolloin palautua opiskelusta.

Opiskelun suunnittelussa kannattaa ottaa huomioon myös opiskelua tehostavia keinoja. Opiskelun hajauttaminen useisiin pienempiin jaksoihin on tehokkaampaa kuin yksi pitkä opiskelujakso. Liian pitkäksi aikaa ei pidä jumiutua yhden osa-alueen harjoitteluun. Vaihtelu eri osa-alueiden välillä tuottaa paremmin pitkäkestoista osaamista, sillä tällöin opiskelija joutuu hahmottamaan eri asioiden olennaisia asioita mekaanisen toistamisen sijaan. Joskus voi olla oppimisen kannalta edullista keskeyttää kyseisen asian opiskelu ja jättää asia hautumaan. Erityisesti ongelmatilanteissa tauon pitäminen voi auttaa. Myös jonkin toisen osa-alueen opiskelu voi toimia tässä tilanteessa vaihtelun ja uusien virikkeiden näkökulmasta.

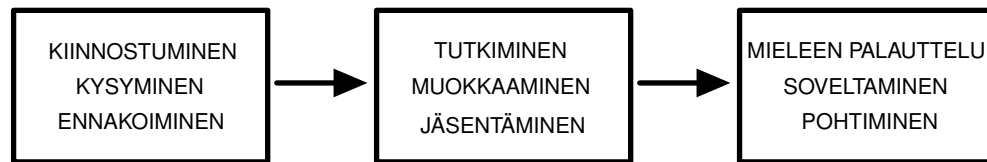
Opiskelun ajaksi on hyvä pyrkiä karsimaan ulkopuoliset ärsykkeet pois ja siirtää tarkkaavaisuutensa opiskeluun. Sopivan opiskeluympäristön valintaan kannattaa kiinnittää huomiota, sillä ympäristön ärsykkeet vaikuttavat oppimisen tehokkuuteen. Jokaisella on erilaisia mieltymyksiä opiskeluympäristöä kohtaan ja valinta kannattaa tehdä niitä kunnioittaen. Kriteerejä voivat olla esimerkiksi hiljaisuus, siisti työpiste tai mukava asento. Joku voi saada apua keskittymiseen musiikin kuuntelusta tai käsitöiden tekemisestä. Voi olla myös hyödyllistä kertoa muille keskittyvänsä opiskeluun tai ainakin laittaa puhelin sivuun, jotta ylimääräiset keskeytykset minimoituvat.

Joskus alkuun pääseminen voi olla vaikeaa. Tämä voi johtua esimerkiksi väsymyksestä, mukavuuden halusta, motivaation puutteesta tai vaatavuudesta itseään kohtaan. Myös kiireen tuntu ja stressi voivat lykätä aloitusta. Näissä tilanteissa itseään voi motivoida esimerkiksi pohtimalla, mitä hyvää opiskelusta voi seurata ja samalla muistuttaa itseään asetetuista tavoitteista. Lisäksi asettamalla vielä pienempiä prosessitavoitteita, jotka on mahdollista saavuttaa helposti, voi opiskelumotivaatio löytyä onnistumisten kautta. Pieni prosessitavoite voi olla esimerkiksi yhden tehtävän tekeminen.

Itselleen sopivien rutiinien eli samanlaisina toistuvien tapojen luominen tekee opiskelun aloittamisesta helpompaa. Rutiinit saavat alkunsa aina jostakin ärsykkeestä. Yksinkertainen esimerkki ärsykkeestä ja rutiinista on herääminen, jonka jälkeen vuorossa ovat aamutoimet. Uusia rutiineja voi luoda toistamalla tapaa useita kertoja, jolloin pikku hiljaa ärsykkeestä tulee kimmoke rutiinille. Jos rutiinilla on jokin positiivinen seuraus, se vahvistaa rutiinin muodostumista. Jokaisen on löydettävä itselleen sopivat rutiinit kokeilemalla.

Kun tavoitteet on asetettu, suunnitelmat tehty, opiskeluympäristö valittu ja rutiinit alkaneet muodostua, niin on syytä kiinnittää huomiota opiskelutapoihin. Oppiminen ei tapahdu itsestään vaan se vaatii opiskelijalta aktiivista ajattelua. Teorian lukeminen tai videon katsominen eivät välttämättä ole ajattelevaa oppimista. Tehokkaaseen ajattelevaan oppimiseen kuuluu kolme vaihetta, jotka on esitetty kuvassa 4.2.

Ajattelevan oppimisen ensimmäinen vaihe vaatii opiskelijan omaa aktiivisuutta ja aivojen virittämistä oppimiseen esimerkiksi palauttamalla mieleen aiemmin opittua ja pohtimalla mitä uudesta aiheesta tulisi oppia. Kysymysten esittäminen itselle herättää kiinnostusta,



**Kuva 4.2.** Ajattelevan oppimisen kolme vaihetta (mukailtu [46, s. 103])

motivoi oppimaan ja kohdentaa ajattelua. Tämän vaiheen voi ajatella myös ennakoitina, jossa voidaan esimerkiksi silmäillä nopeasti uutta aihetta.

Toinen vaihe on varsinainen oppimisen vaihe, jossa tutkitaan aihetta ja muokataan tietoa eri muotoihin oppimisen edistämiseksi. Tärkeintä tässä vaiheessa on, että opiskelu ei ole passiivista vaan aktiivista ajattelua esimerkiksi tekemällä alleviivauksia, muistiinpanoja tai käsittekarttoja. Opiskeltavat tietomäärät voivat olla laajoja, joten lähtökohtana kannattaa pitää kokonaisuuden hahmottaminen ja jäsentäminen.

Kolmas vaihe eli osaamisen lujittuminen tiedon mieleen palauttelulla ja soveltamisella on tärkeä siinä missä aiemmatkin, jotta asiat siirtyisivät pitkäkestoiseen muistiin. Mieleen palauttelussa kannattaa suosia myös aktiivisen ajattelun tapoja teorian uudelleen lukemisen sijaan. Esimerkiksi tiivistelmien kirjoittaminen ja tehtävien ratkaiseminen ilman oppimateriaalia ovat hyviä keinoja kehittää osaamista. Tiedon pohtiminen eri näkökulmista ja erilaisissa sovelluskohteissa voi myös syventää oppimista.

Tietyin väliajoin kannattaa pysähtyä tarkastelemaan omaa edistymistään suhteessa omiin tavoitteisiinsa. Jos on mahdollista saada ulkopuolista palautetta oppimisestaan, siitä kannattaa poimia itselleen juuri kyseisellä hetkellä hyödylliset asiat, joilla kehittää omia tietojaan ja taitojaan. Kaikkea ei voi kehittää kerralla, vaikka palautteessa nostettaisiinkin esiin monia asioita.

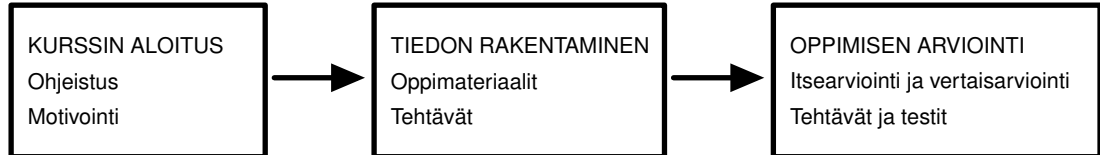
Tulee myös muistaa, että oppiminen ei ole aina pelkkää oppimisen iloa vaan se voi herättää monenlaisia tunteita prosessin eri vaiheissa. Tunteita kannattaa havainnoida, mutta muistaa myös, että ne ovat vain tunteita, jotka tulevat ja menevät. Hankalien tunteiden käsittelyssä apuna voi kokeilla esimerkiksi itsensä puhuttelemista tai tunteista kirjoittamista. Myönteisiä tunteita voi virittää esimerkiksi palkitsemalla itseään ahkeroinnista tai jakamalla tunteita kanssaopiskelijoiden kanssa.

Viime kädessä oppiminen tapahtuu kuitenkin osana yhteisöä ja yhteistyössä monien eri tahojen kanssa, joten vuorovaikutusta muiden kanssa ei sovi unohtaa itsenäisessäkään opiskelussa. Kannattaa kysyä apua ja auttaa toisia oppimaan. Parhaimmillaan yhteistyö auttaa toimimaan lähikehityksen vyöhykkeellä niin, että ihminen pystyy toisen avustuksella suoriutumaan tehtävästä, joka ei onnistuisi vielä hänen omilla tiedoillaan ja taidoillaan.

### 4.3 Verkko-oppiminen

Verkko-oppiminen (engl. *e-learning*) on oppimista, jossa hyödynnetään apuna tieto- ja viestintätekniiikkaa. Verkko-oppimista voidaan hyödyntää monin eri tavoin lähiopetuksesta verkkokursseihin. Vaikka oppimisessa hyödynnetään tekniikkaa, se vaatii yhtäläillä aikaa ja opiskelijan aktiivista ajattelua kuin mikä tahansa oppiminen. [23, s. 1–4] Verkko-oppimisessa hyödynnetään yleensä sähköistä oppimisalustaa, josta löytyvät kurssin suorittamiseen liittyvät ohjeet, aikataulut ja arviointiperusteet sekä varsinaiset oppimateriaalit, tehtävät palautusmahdollisuuksineen ja arvioinnit palautteineen. Tiedotus hoidetaan yleensä oppimisalustan välityksellä. [23, s. 27–70]

Verkko-oppimisprosessi koostuu kolmesta vaiheesta: kurssin aloitus, tiedon rakentaminen ja oppimisen arviointi, joita on havainnollistettu kuvassa 4.3. Kurssin aloituksessa on tärkeää ohjeistaa kurssilla toimimiseen ja motivoida aiheeseen. Mikäli kurssilla työskennellään yhdessä muiden kanssa, kurssin alkuun on hyvä sisällyttää myös ryhmäytymistä. Tiedon rakentamisen vaiheessa tapahtuu varsinainen oppiminen. Opiskelija käy itsenäisesti läpi oppimisalustalla olevat oppimateriaalit ja tekee tehtävät. Tämä edellyttää opiskelijan omaa aktiivisuutta, mutta edesauttaa konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaista tiedon rakentumista oman ajattelun kautta. Oppimisen arviointia voidaan toteuttaa itsearviointin, vertaisarviointin tai erilaisten tehtävien ja testien avulla. [23, s. 137-146]



**Kuva 4.3.** Verkko-oppimisen vaiheet: Kurssin aloitus, tiedon rakentaminen ja oppimisen arviointi [23, s. 137-146]

Opettajan näkökulmasta verkko-opetuksen toteuttaminen eroaa jonkin verran lähiopetuksesta. Verkko-oppimisessa koko kurssi pitää suunnitella ja toteuttaa ennen kurssin alkamista, kun taas lähiopetuksessa suunnitelmia voi muokata tilanteen mukaan. Verkko-opetuksessa toteutusta on mietittävä enemmän opiskelijan kuin oman toiminnan näkökulmasta. Olennaista on se, että kokonaisuus on jäsennelty sopiviin vaiheisiin oppimisprosessin edistämiseksi. Lisäksi on kiinnitettävä huomiota tehtäville varattavaan aikaan, opiskelijoiden tasoeroihin ja oppimisen arviointiin palautteineen. [23, s. 137–146]

Verkko-oppimisen etuna on opiskelijan autonomisuus ja aikataulujen joustavuus. Opiskelijat voivat itse valita, milloin, missä ja miten opiskelevat. [38] Toisaalta autonomisuus voi myös vaikeuttaa opiskelua, jos opiskelijan itsenäisen opiskelun taidot eivät ole riittävät [49]. Verkko-oppimisen käanttöpuolena on vuorovaikutuksen ja ryhmätyöskentelyn väheneminen [10].

## 4.4 Yliopistomatematiikan opiskelu

Matematiikan osaaminen on tärkeää sekä tieteiden että kansantalouden kannalta [18, ss. 450–474]. Yliopistoon voi hakeutua opiskelemaan esimerkiksi teoreettista matematiikka, sovellettua matematiikkaa tai tilastotiedettä. Myös muiden tutkinto-ohjelmien opintoihin sisältyy matematiikan opintojaksoja, sillä matematiikan osaamista tarvitaan monilla tekniikan aloilla ja liike-elämässä sekä tutkimuksen toteuttamisessa.

Matematiikan osaaminen on heikentynyt länsimaissa viime vuosikymmenien aikana. Yliopistoon siirryttäessä osalla opiskelijoista esiintyy puutteita algebran perusrutiinien hallitsemisessa, mikä aiheuttaa haasteita, sillä opintojen suunnittelussa oletetaan lukion pitkän matematiikan hallitseminen. Aalto-yliopistossa ja Tampereen yliopistossa on kehitetty tukikeinoja näiden puutteiden paikkaamiseen. Käyttöön on otettu perustaitotesti, jonka perusteella osa opiskelijoista ohjataan kertaamaan lukiotasoista matematiikkaa. Muille testi antaa palautetta omasta lähtötasosta. Lisäksi arjolla on vapaaehtoista laskutapa-toimintaa, jonne voi mennä tekemään laskuharjoitustehtäviä ja kysymään apua. [18, ss. 450–474] [50] [51]

Automaattitarkasteiset verkkotehtävät tarjoavat välitöntä palautetta ja vinkkejä tehtävän tekemiseen. [18, ss. 450–474] Matematiikan opintojaksojen näkökulmasta automaattitarkasteiset verkkotehtävät ovat hyviä käänteisen opetuksen ja oppimisen tavoin toteutetuille kursseille, sillä opiskelijat saavat heti tehtävän palautettuaan palautetta järjestelmältä riippumatta opiskeluympäristöstä. Lisäksi käsitteenmuodostustehtävät voivat tukea uusien käsitteiden itsenäistä opiskelua. [53]

Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden kokemuksia yliopistomatematiikasta tutkittaessa on havaittu, että opiskelijat kokevat opiskelun työlääksi, haastavaksi ja abstraktiksi [4]. Yksi syy haastavuuden kokemukseen voi olla todistamisen painottaminen laskemisen sijaan. Yliopistomatematiikan haastavuuden tunnetta opintojen alkuvaiheessa voivat lisätä myös yliopistomatematiikan opetustapojen erilaisuus ja niihin sopeutuminen [47]. Luentojen, laskuharjoitustilaisuuksien ja luennoista tehtyjen tallenteiden on kuitenkin katsottu edistävän oppimista. Abstrakteilta tuntuvien todistustehtävien oppimista voidaan tukea esimerkiksi tarjoamalla riittävästi havainnollistavia esimerkkejä ja aktivoimalla opiskelijoita keskustelemaan tehtävistä luonnollisella kielellä. [4]

## 4.5 Kompleksilukujen oppiminen

Kompleksiluvut ovat tärkeä matematiikan osa-alue, sillä niillä on monia sovelluksia tekniikan alalla [27] [33]. On kuitenkin havaittu, että kompleksilukujen oppiminen on haasteellista verrattuna muihin lineaarialgebran käsitteisiin [33]. Kompleksiluvut tulevat opinnoissa vastaan pääasiassa matematiikan ja tekniikan alan opiskelijoilla. Kompleksilukujen ominaisuudet ja laskutoimitukset opetetaan yleensä matematiikan opintojaksoilla, jotta niitä

voidaan käyttää apuna esimerkiksi fysiikan opintojaksoilla yhtölöiden ratkaisemisessa ja mallintamisessa.

Ruotsissa Maria ja Edvard Nordlander [36] tutkivat insinööriopiskelijoiden käsityksiä kompleksilukuihin liittyen ja tunnistivat haasteiksi kompleksilukujen laskusäännöt ja napakoordinaattiesityksen. He havaitsivat myös, että monet opiskelijat ymmärsivät kompleksiluvut kaksidimensionaalisina lukuina, joissa tulee olla sekä reaali-osa että imaginääriosa tai ainakin imaginääriosa. Opiskelijoiden käsityksistä nousi esille myös imaginääriyksikköön liittyvät symboliset käsitykset enemmän kuin matemaattiseen ymmärrykseen liittyvät käsitykset nähdä kompleksiluvut reaalityöiden joukon laajenuksena. Joillekin kompleksiluvut näyttävätyivät vain abstrakteina ja monimutkaisina mysteereinä ilman ymmärrystä mitä kompleksiluvut oikeasti ovat.

Zimbabwessa fysiikan aineenopettajaopiskelijoilla toteutetun tutkimuksen mukaan opiskelijoilla esiintyi virhekäsityksiä erityisesti kompleksilukujen jakolaskuun, kompleksiluvun juuriin ja napakoordinaattimuotoon liittyvissä tehtävissä [33]. Malesiassa on tutkittu reaalityöiden kompleksilukuihin siirtymisen etuja ja haasteita. Tyypillisesti matematiikan oppiminen etenee niin, että ensin opitaan reaalityöillä laskeminen ja vasta opintopolun myöhemmissä vaiheissa otetaan haltuun kompleksiluvut reaalityöiden joukon laajenuksena. Kompleksilukuihin siirtymisen haasteena voi olla vain reaalityöille voimassa olevien ominaisuuksien soveltaminen kompleksiluvuilla. Reaalityöiden voidaan asettaa suuruusjärjestykseen ja joukossa esiintyy myös negatiivisia lukuja. Näin ei ole kompleksiluvuilla. Myös kompleksiluvun juuri poikkeaa reaalityöille totutusta. Toisaalta yhteistäkin löytyy, sillä esimerkiksi kompleksilukujen summa ja tulo määritellään reaalityöiden summan ja tulon avulla. [54]

Tutkimuksissa [33] [36] nousi esille myös kompleksilukujen sovellusten ymmärtäminen. Kompleksilukuja opetetaan omina kokonaisuuksina osana matematiikan opintoja, joten niiden hyödyllisyyden ymmärtäminen tekniikan sovelluksissa voi jäädä taka-alalle. Maria ja Edvard Nordlander esittävät [36], että kompleksilukujen virhekäsityksien korjaamiseksi ja sovelluskohteiden ymmärtämiseksi opetuksessa tulisi kiinnittää enemmän huomiota havainnollistamiseen. Innovatiiset ja visuaaliset opetusmenetelmät voivat tarjota sekä opettajalle että oppilaille parempia oppimistilanteita kompleksilukujen saralla.

## 5. KOMPLEKSILUVUT

Kompleksilukujen historia sai alkunsa 1500-luvulla. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisuyrityksissä päädyttiin ratkaisuun, jossa esiintyi negatiivisen luvun neliöjuuri ja vähitellen käyttöön otettiin merkintä  $\sqrt{-1}$ . Suuren edistysaskeleen kompleksiluvut ottivat 1700-luvulla, kun Leonhard Euler (1707–1783) esitteli merkinnän  $i = \sqrt{-1}$ , havainnollisti kompleksilukuja koordinaatistossa ja määritteli yhteyden eksponenttimuodon ja napa-koordinaattimuodon esitysmuotojen välille. 1800-luvulla William Rowan Hamilton (1805–1865) määritteli kompleksiluvut järjestetyiksi reaalityypiksi ja esitti summan ja tulon laskukaavat. [31] Samoihin aikoihin Carl Friedrich Gauss (1777–1855) työskenteli kompleksilukujen parissa ja todisti algebran peruslauseen [45]. Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) puolestaan määritteli kompleksilukujen joukon ja loi pohjan kompleksianalyysille. [7] [31]

Nykyään kompleksiluvut ovat tärkeä laskennallinen apuväline monissa tekniikan sovelluksissa ja niiden ominaisuuksien ja laskutoimituksien opiskelu on tärkeää yliopistomatematiikan opintojaksoilla. Kompleksilukuja hyödynnetään esimerkiksi sähkötekniikassa, signaalinkäsittelyssä ja säätötekniikassa [27]. Sähkötekniikassa vaihtovirtapiirejä voidaan mallintaa differentiaaliyhtälöillä, joissa esiintyy kompleksilukuja [61, ss. 40–41]. Signaalinkäsittelyssä hyödynnettävissä Laplace-muunnoksessa ja Fourier-muunnoksessa tarvitaan myös kompleksilukujen ominaisuuksia [61, ss. 374–383]. Myös fraktaaleihin liittyvää matematiikkaa voidaan ymmärtää kompleksilukujen avulla. Esimerkkejä fraktaaleista ovat Kochin käyrä, Mandelbrotin joukko ja Julian joukko [3, ss. 316–320] [12].

Tässä luvussa on tarkoitus tutustua kompleksilukujen ominaisuuksiin ja sovelluskohteisiin. Seuraavassa alaluvussa esitellään lyhyesti kompleksilukujen itseopiskelumateriaalissakin esiintyviä kompleksilukujen ominaisuuksia ja laskutoimituksia. Tämän jälkeen toisessa alaluvussa tutustutaan kompleksilukujen hyödyntämiseen tasokuvauksissa ja viimeisessä alaluvussa perehdytään konformikuvaukseen. Tasokuvaukset valittiin tarkemmin tutustuttavaksi osa-alueeksi, sillä niiden avulla voidaan osoittaa lähes kaikki kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin sisällöt hyödyllisiksi sovelluksissa.

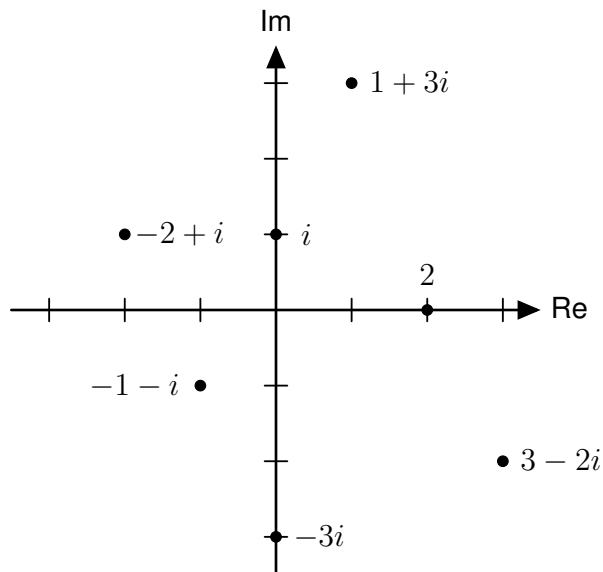
## 5.1 Kompleksilukujen ominaisuuksia

Kompleksiluvut ovat reaalilukujoukon laajennus [3, s. 1]. Ne koostuvat järjestetyistä reaalilukupareista ja imaginääriyksiköstä  $i$  [29, s. 7] [61, s. 2]. Kompleksilukuja kutsutaan myös imaginääriluvuiksi [3, s. 1].

**Määritelmä 5.1.** Kompleksiluku  $\mathbb{C}$  on muotoa  $z = a + bi$ , missä  $a, b \in \mathbb{R}$  ja  $i$  on imaginääriyksikkö.

Jos imaginääriosaa  $b = 0$ , niin kompleksiluku on reaalinen. Vastaavasti jos imaginääriosaa  $b \neq 0$ , niin kompleksiluku on imaginäärinen, ja jos reaaliosaa  $a = 0$  ja imaginääriosaa  $b \neq 0$ , niin kompleksiluku on puhtaasti imaginäärinen. Reaaliosasta  $a$  voidaan käyttää merkintää  $\operatorname{Re}(z) = a$  ja imaginääriosasta vastaavasti  $\operatorname{Im}(z) = b$ . [61, s. 2]

Kompleksiluvut  $z$  ja  $w$  ovat samoja,  $z = w$ , jos ja vain jos  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)$  ja  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$  [61, s. 3]. Kompleksilukuja voidaan havainnollistaa pisteinä (kuva 5.1) tai vektoreina kompleksitasossa, jossa 2-ulotteisen koordinaatiston vaaka-akselina on reaaliakseli ja pystyakselina on imaginääriakseli. [45, s. 665]



**Kuva 5.1.** Kompleksilukuja kompleksitasossa

Kompleksilukujen laskutoimitukset voidaan määritellä hyödyntämällä reaalilukujen laskutoimituksia. [61, ss. 3–6]

**Määritelmä 5.2.** Olkoot kompleksiluvut  $z = a + bi$  ja  $w = c + di$ . Tällöin *summa*

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

ja *tulo*

$$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Vastaluvun  $-w = -c - di$  avulla erotus

$$z - w = z + (-w) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$$

ja käänteisluvun  $\frac{1}{w}$  avulla osamäärä

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i, \quad c \neq 0 \text{ tai } d \neq 0.$$

Reaaliluvuille tutut laskutoimituslait yleistyvät kompleksiluvuille lauseen 5.1 mukaisesti. [61, s. 3]

**Lause 5.1.** Kompleksiluvuille  $x, y, z$  on voimassa

1.  $x + y = y + x$  ja  $xy = yx$ , (vaihdannaisuus)
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$  ja  $x(yz) = (xy)z$ , (liitännäisyys)
3.  $x(y + z) = xy + xz$ . (osittelulaki)

*Todistus.* Ominaisuudet seuraavat suoraan kompleksilukujen laskutoimitusten määritelmästä 5.2. Esimerkki vaihdannaisuuden todistuksesta summalle löytyy esimerkiksi lähteestä [29, s. 11].

Tulon määritelmää 5.2 hyödyntäen imaginääriyksikölle  $i$  saadaan lauseen 5.2 mukainen ominaisuus. [29, s. 12]

**Lause 5.2.** Imaginääriyksikölle  $i$  on voimassa, että  $i^2 = i \cdot i = -1$ .

*Todistus.* Neliö  $i^2 = i \cdot i$  voidaan laskea määritelmän 5.2 avulla tulona

$$i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) - (0 + 0)i = -1.$$

Näin ollen  $i^2 = -1$ . □

Lauseiden 5.1 ja 5.2 avulla saadaan vaihtoehtoinen tapa laskea kahden kompleksiluvun tulo, kun hyödynnetään osittelulakia ja ominaisuutta  $i^2 = -1$ . Lauseen 5.2 ominaisuutta  $i^2 = -1$  voidaan hyödyntää myös osamäärän laskemisessa, kun osamäärä lavennetaan ensin nimittäjän liittoluvulla eli kompleksikonjugaatilla. [61, ss. 4–5]

**Määritelmä 5.3.** Kompleksiluvun  $z = a + bi$  kompleksikonjugaatti  $\bar{z}$  on  $\bar{z} = a - bi$ .

Kompleksikonjugaatille on voimassa lauseen 5.3 ominaisuudet. [3, s. 5] [61, s. 5]

**Lause 5.3.** Jos  $z$  ja  $w$  ovat kompleksilukuja, niin

1.  $\overline{\overline{z}} = z$ ,
2.  $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ ,
3.  $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}\overline{w}$ ,
4.  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ ,  $\overline{w} \neq 0$ .

*Todistus.* Ominaisuudet seuraavat suoraan kompleksikonjugaatin määritelmästä 5.3. Esimerkki ominaisuuden 3 todistuksesta löytyy esimerkiksi lähteestä [3, s. 5].

Koska kompleksiluvut voidaan ajatella vektoreina kompleksitasossa, luvun paikkavektorin pituutta voidaan kuvata itseisarvolla eli modulilla. [61, s. 10]

**Määritelmä 5.4.** Kompleksiluvun  $z = a + bi$  moduli  $|z|$  on  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Moduli noudattaa lauseen 5.4 mukaisia ominaisuuksia. [3, s. 5] [61, s. 11]

**Lause 5.4.** Jos  $z$  ja  $w$  ovat kompleksilukuja, niin

1.  $|z|^2 = z\overline{z}$ ,
2.  $|z| = |\overline{z}|$ ,
3.  $|zw| = |z||w|$ ,
4.  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ ,
5.  $|z + w| \leq |z| + |w|$ . (kolmioepäyhtälö)

*Todistus.* Ominaisuudet seuraavat modulin määritelmästä 5.4 ja muista aiemmin esitellyistä kompleksilukujen ominaisuuksista. Esimerkki ominaisuuden 5 todistuksesta löytyy esimerkiksi lähteestä [29, s. 18].

Kompleksiluku  $z = a + bi$  voidaan esittää napakoordinaattien avulla muodossa

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

missä  $r = |z|$  eli kompleksiluvun etäisyys origosta ja  $\theta$  on kompleksiluvun  $z$  paikkavektorin ja reaaliakselin välinen kulma, kun positiivinen kiertosuunta on vastapäivään. Kulmaa  $\theta$  kutsutaan vaihekulmaksi eli argumentiksi  $\arg(z) = \theta$ . [3, s. 8] [61, ss. 16-17]

Napakoordinaattiesitys voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin hyödyntämällä Eulerin kaavaa. [45, ss. 673–674]

**Lause 5.5. Eulerin kaava.** Kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

*Todistus.* Todistus onnistuu eksponenttifunktion sekä sini- ja kosinifunktion Taylorin sarjojen avulla ja löytyy lähteestä [45, s. 673].

Eulerin kaavan avulla napakoordinaattiesitys voidaan kirjoittaa eksponenttimuodossa [45, s. 674]

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Eksponenttimuodossa kompleksilukujen laskutoimitukset voidaan suorittaa kompleksiluvun itseisarvon  $r$  ja vaihekulman  $\theta$  avulla lauseen 5.6 mukaisesti. [45, s. 675]

**Lause 5.6.** Jos  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  ja  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , niin

1.  $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ ,
2.  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ ,
3.  $\bar{z} = r e^{-i\theta}$ ,
4.  $z^n = r^n e^{in\theta}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Todistus.* Ominaisuudet seuraavat suoraan aiemmin esitellyistä ominaisuuksista ja potenssin laskusäännöistä.

Kompleksiluvun juuri voidaan määritellä kuten reaalityyppisillä. [45, s. 671]

**Määritelmä 5.5.** Olkoon  $n \in \mathbb{N}$ . Kompleksiluvun  $z \neq 0$   $n$ . juuri on kompleksiluku, joka toteuttaa yhtälön  $w^n = z$ .

Kompleksiluvun juuri ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen, kuten reaalityyppisillä, koska kompleksiluvulla on aina juuren asteen verran erisuuria juuria. [45, s. 672]

**Lause 5.7.** Olkoon  $z = r e^{i\theta}$  ja  $n \in \mathbb{N}$ . Kompleksiluvulla  $z$  on täsmälleen  $n$  erisuuria juurta  $w_k$ , jotka voidaan laskea yhtälöllä

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2\pi k}{n}},$$

missä  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

*Todistus.* Oletetaan, että kompleksiluku  $w$  on kompleksiluvun  $z$   $n$ . juuri. Tällöin kompleksiluku  $w$  toteuttaa yhtälön  $z = w^n$ .

Merkitään, että  $w = t e^{i\varphi}$  ja  $z = r e^{i\theta}$ . Tällöin lauseen 5.6 kohdan 4 perusteella oletuksesta

seuraa, että  $z = t^n e^{in\varphi}$ . Näin ollen kompleksiluvun  $z$  esitysmuodoista saadaan yhtälö

$$t^n e^{in\varphi} = r e^{i\theta}.$$

Jotta yhtälö toteutuu ja kompleksiluvun  $z$  esitysmuodot ovat samoja, niiden itseisarvojen ja eksponenttien on oltava keskenään yhtä suuret. Itseisarvoja tarkastelemalla saadaan yhtälö  $t^n = r$ . Luvut  $t, r > 0$  ovat kompleksilukujen itseisarvoina reaalisia ja näin ollen on olemassa yksikäsitteinen reaalinen  $n$ . juuri  $t = \sqrt[n]{r}$ .

Eksponenttien osista saadaan yhtälö  $e^{in\varphi} = e^{i\theta}$ , mikä toteutuu, kun  $n\varphi = \theta + 2\pi k$ , missä  $k$  on kokonaisluku. Tästä voidaan ratkaista vaihekulma  $\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$ . Näin ollen kompleksiluvun  $z = r e^{i\theta}$   $n$ . juuret voidaan kirjoittaa muodossa

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2\pi k}{n}}.$$

Itseisarvon mukaan juuret sijaitsevat  $\sqrt[n]{r}$ -säteisellä origokeskisellä ympyrällä ja peräkkäisten juurten vaihe-ero on  $\frac{\theta + 2\pi(k+1)}{n} - \frac{\theta + 2\pi k}{n} = \frac{2\pi}{n}$ .

Jokainen parametrin  $k$  valinta ei tuota erillistä juurta kulman jaksollisuuden takia. Jos parametriksi  $k$  valitaan  $k + n$ , niin

$$w_{k+n} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2\pi(k+n)}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2\pi k + 2\pi n}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i \left( \frac{\theta + 2\pi k}{n} + 2\pi \right)} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2\pi k}{n}} = w_k.$$

Näin ollen yhteensä  $n$  eri suurta juurta saadaan esimerkiksi parametreilla  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . □

Kompleksinen polynomi määritellään funktiona, jossa esiintyy kompleksilukukertoimia. [45, s. 676]

**Määritelmä 5.6.** Kompleksinen polynomi muuttujan  $z$  funktiona on

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

missä  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$  ja  $a_n \neq 0$ .

Kompleksilukujen joukossa jokaisella polynomilla on polynomien asteen verran juuria. Algebran peruslauseen mukaan jokaisella polynomilla on vähintään yksi nollakohta kompleksitasossa, mutta sen seurauksena voidaan osoittaa, että nollakohtia on täsmälleen polynomien asteen verran, kun nollakohtien monikerrat otetaan huomioon. [3, s. 125] [45, s. 676]

**Lause 5.8. Algebran peruslause.** Jokaisella astetta  $n$  olevalla polynomilla on vähintään yksi nollakohta kompleksilukujen joukossa  $\mathbb{C}$ .

*Todistus.* Löytyy lähteestä [3, ss. 125–126].

**Lause 5.9. Algebran peruslauseen seuraus.** Jokaisella astetta  $n$  olevalla polynomilla on monikerrat huomioiden täsmälleen  $n$  nollakohtaa kompleksilukujen joukossa  $\mathbb{C}$ .

*Todistus.* Löytyy lähteestä [3, ss. 125–127].

Algebran peruslauseen seurauksena esimerkiksi kaikilla toisen asteen polynomeilla on olemassa kaksi nollakohtaa kompleksilukujen joukossa, vaikka reaalisia nollakohtia ei olisi olemassa. Näin ollen myös toisen asteen yhtälöille voidaan löytää aina kaksi kompleksista ratkaisua.

## 5.2 Kompleksimuuttujan funktiot tasokuvauksina

Funktio on kuvaus lukujoukosta toiseen. Kompleksimuuttujan funktio on funktio, jossa muuttujana on kompleksiluku. [3, s.28]

**Määritelmä 5.7.** Olkoon  $S$  kompleksilukujen osajoukko. Kompleksimuuttujan *funktio*  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  on sääntö, jonka mukaan jokaista alkioita  $z \in S$  vastaa yksikäsitteinen kompleksiluku  $w = f(z) \in \mathbb{C}$ . Joukko  $S$  on funktion  $f$  *määrittelyjoukko*, joukko  $\mathbb{C}$  on funktion  $f$  *maalijoukko* ja joukko  $f(S) = \{f(z) \mid z \in S\} \subseteq \mathbb{C}$  on funktion  $f$  *arvo-* eli *kuvajoukko*  $S'$ .

Funktion käänteiskuvaus eli käänteisfunktio on kuvaus maalijoukolta takaisin määrittelyjoukkoon. Käytännössä käänteiskuvaus on kuitenkin arvojoukon kuvaus määrittelyjoukkoon. [29, ss. 53–54].

**Määritelmä 5.8.** Funktion  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  *käänteisfunktio* on funktio  $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S$ , jos  $f^{-1}(f(z)) = z$  kaikilla  $z \in S$  ja  $f(f^{-1}(w)) = w$  kaikilla  $w \in \mathbb{C}$ .

Kompleksimuuttujan funktiota ei voida havainnollistaa funktion kuvaajan avulla. Kompleksimuuttujan funktio kuvaa kaksiulotteisen kompleksitason alkioita toiselle kaksiulotteiselle kompleksitasolle, joten kuvaajan piirtämiseen tarvittaisiin neljä ulottuvuutta [61, s. 58]. Yksi tapa havainnollistaa kompleksimuuttujan funktiota on hyödyntää funktion tulkintaa tasokuvauksena [61, s. 58], johon tutustutaan seuraavaksi tarkemmin. Funktioiden ominaisuuksia voidaan havainnollistaa myös piirtämällä kahden muuttujan funktioiden, modulin tai argumentin, kuvaajia. Lisäksi värejä hyödyntämällä voidaan havainnollistamaan esimerkiksi funktioiden erikoispisteitä. [59]

Kompleksimuuttujan funktio  $w = f(z)$  (engl. *complex mapping*) kuvaa kaikki  $z$ -tason pisteet  $w$ -tasoon niin, että jokainen  $z$ -tason piste  $z_0$  kuvautuu  $w$ -tason pisteeksi  $w_0 = f(z_0)$ . [61, ss. 58–59] Kuvauksena toimiva funktio voi olla esimerkiksi lineaarinen, polynomiaalinen, eksponentiaalinen, logaritminen, trigonometrinen tai hyperbolinen [61, ss. 58–221].

Funktioiden kuvauksien havainnollistamisen apuna voidaan käyttää parametrisoitua käyrää (engl. *parametric curve*). [3, s. 77] [61, s. 61]

**Määritelmä 5.9.** Jos  $x(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $y(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ovat jatkuvia reaalimuuttujan  $t$  funktioita, niin käyrää

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b],$$

kutsutaan *parametrisoiduksi käyräksi*. Käyrää kutsutaan *sileäksi*, jos derivaatat  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$  ovat olemassa ja jatkuvia välillä  $[a, b]$  sekä  $z'(t) \neq 0$  kaikilla  $t \in [a, b]$ .

Pisteestä  $z_1 \in \mathbb{C}$  pisteeseen  $z_2 \in \mathbb{C}$  kulkevan janan parametriesitys [3, s. 78] voidaan kirjoittaa muodossa

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1].$$

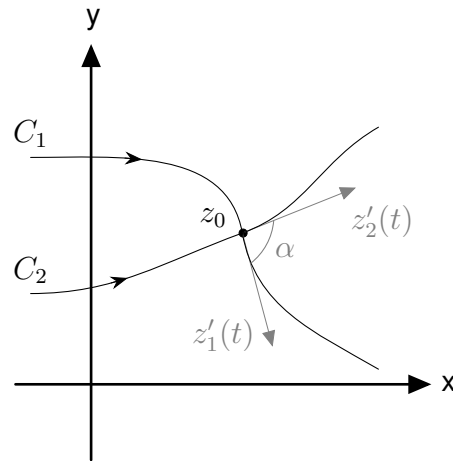
Ympyrän, jonka keskipiste on  $z_0 \in \mathbb{C}$  ja säde  $r \in \mathbb{R}$ , parametriesitys [61, s. 63] on muotoa

$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Käyrien välinen kulma määritellään leikkauspisteen tangenttivektorien välisenä kulmana [61, s. 390].

**Määritelmä 5.10.** Olkoon  $z_1(t)$  ja  $z_2(t)$  käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  parametriesitykset niin. Jos käyrät  $C_1$  ja  $C_2$  leikkaavat pisteessä  $z_0 = z_1(t_1) = z_2(t_2)$ , niin *käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  välinen kulma* on tangenttivektorien  $z'_1(t_1)$  ja  $z'_2(t_2)$  välinen kulma.

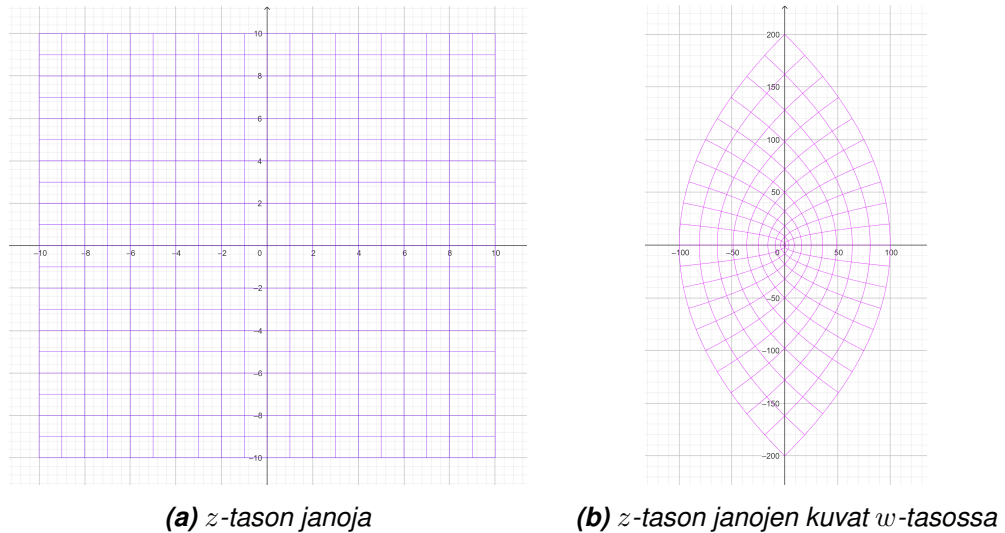
Kuvassa 5.2 on havainnollistettu kahden käyrän välistä kulmaa  $z$ -tasossa.



**Kuva 5.2.** Käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  välinen kulma  $\alpha$   $z$ -tasossa. (mukailtu [61, s. 390])

Kuvassa 5.3 on havainnollistettu Geogebra-ohjelmistoa apuna käyttäen kuvausta  $w = z^2$ , joka kuvaa  $z$ -tason janat  $w$ -tason paraabeleiksi. Vaikka  $z$ -tason janat muuttuvat taso kuvauksessa  $w$ -tason paraabeleiksi, niiden välinen kulma säilyy suorana kulmana. Tämä ei ole sattumaa. Yleisesti on voimassa, että konformikuvaus säilyttää käyrien väliset kulmat, kuten alaluvussa 5.3 huomataan.

Lineaarikuvaus on kuvaus, joka voi siirtää, suurentaa tai pienentää sekä kiertää kuvaa, mutta säilyttää sen muodon [3, s. 64] [61, ss. 71–73]. *Siirto* (engl. *translation*) voidaan



**Kuva 5.3.** Kuvaus  $w = z^2$ .

toteuttaa funktiolla

$$T(z) = z + b,$$

missä kompleksiluku  $b \neq 0$ . Tällöin jokaista  $z$ -tason pistettä  $z_0 = x + yi$  siirretään kompleksiluvun  $b = b_1 + b_2i$  paikkavektorin verran  $w$ -tasossa, jolloin piste  $w_0 = (x + b_1) + (y + b_2)i$ . [3, s. 64]

Kuvan kokoa voidaan muuttaa kertomalla reaaliluvulla  $a$  eli funktiolla

$$M(z) = az.$$

Funktio  $M(z)$  muuttaa jokaisen pisteen  $z_0 = re^{i\theta}$  itseisarvoa, sillä  $M(z) = a(re^{i\theta}) = (ar)e^{i\theta}$ . Kyseessä on *suurennus* (engl. *magnification*), kun  $a > 0$ , ja *pienennys* (engl. *contraction*), kun  $0 < a < 1$ . [61, ss. 70–71]

*Kierto* (engl. *rotation*) onnistuu funktiolla

$$R(z) = az,$$

missä kompleksiluvulle  $a$  on voimassa  $|a| = 1$ . Jos  $a = e^{i\alpha}$  ja  $z = re^{i\theta}$ , niin lauseen 5.6 mukaan  $R(z) = e^{i\alpha} re^{i\theta} = re^{i(\alpha+\theta)}$ . [61, ss. 69–71]

Jos kompleksilukua  $a$  ei rajoiteta, voidaan puhua *laajennuksesta* (engl. *dilation*)

$$D(z) = az,$$

mikä skaalaa ja kiertää kuvaa, sillä jos  $a = a_1e^{i\alpha}$  ja  $z = re^{i\theta}$ , niin lauseen 5.6 mukaan tulo  $D(z) = a_1e^{i\alpha} re^{i\theta} = (a_1r)e^{i(\alpha+\theta)}$ . Laajennuksesta  $D(z)$  huomataan, että kahden kompleksiluvun tulo voidaan geometrisesti ajatella vektorin pituuden eli itseisarvon muut-

tumisena ja kiertona eli vaihekulman muuttumisena. [3, s. 64]

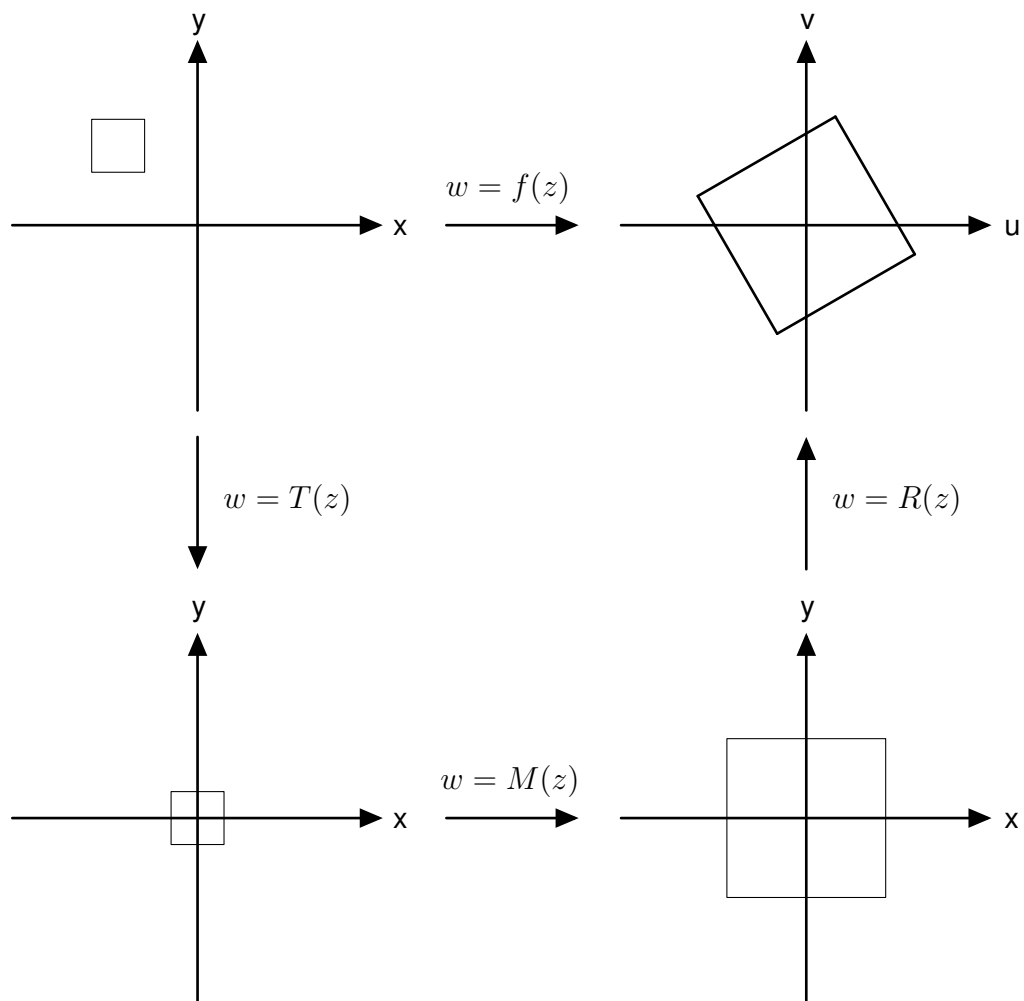
Edellä esitellyt kuvaukset voidaan yhdistää lineaarikuvaukseksi. [3, s. 64] [61, ss. 71–72]

**Määritelmä 5.11.** *Lineaarikuvaus*  $f(z)$  on muotoa

$$f(z) = az + b,$$

missä  $a, b$  ovat kompleksilukuja ja  $a \neq 0$ .

Lineaarikuvausta on havainnollistettu kuvassa 5.4. Lineaarikuvauksen mukaisia siirtoja ja kiertoja sekä suurennyksiä ja pienennyksiä hyödynnetään esimerkiksi valokuvien käsitteilyssä [5] ja virtausten mallintamisessa vektorikenttien avulla [61, ss. 133-137].



**Kuva 5.4.** *Lineaarikuvaus*  $f(z) = 3e^{i\frac{\pi}{6}}(3z + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i)$  koostuu siirrosta  $T(z) = z + (\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i)$ , suurenuksesta  $M(z) = 3z$  ja kierrosta  $R(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}z$ .

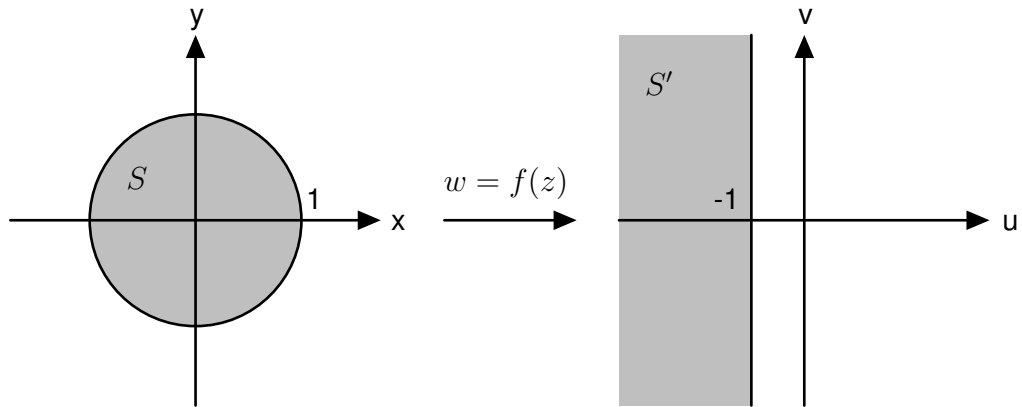
Esimerkki kuvauksesta, joka voi muuttaa kuvan muotoa, on Möbius-kuvaus (engl. *Möbius transformation*) [61, ss. 399–404]. Möbius-kuvaus kuvaa aina ympyrät ja suorat ympyröiksi tai suoriksi [3, s. 69].

**Määritelmä 5.12.** Jos  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ja  $ad - bc \neq 0$ , niin kompleksimuuttujan funktiota

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

kutsutaan *Möbius-kuvaukseksi*.

Möbius-kuvauksen avulla voidaan kuvata esimerkiksi  $z$ -tason yksikköympyrä  $w$ -tason vasemmaksi puolitasoksi [61, ss. 399–404]. Tätä on havainnollistettu kuvassa 5.5.



**Kuva 5.5.** Yksikköympyrän  $|z| = 1$  kuvaus Möbius-kuvauksella  $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ .

Lineaarikuvaus ja Möbius-kuvaus ovat esimerkkejä konformikuvauksesta [61, ss. 390–399]. Myös kuvan 5.3 kuvaus  $w = z^2$  on konformikuvaus.

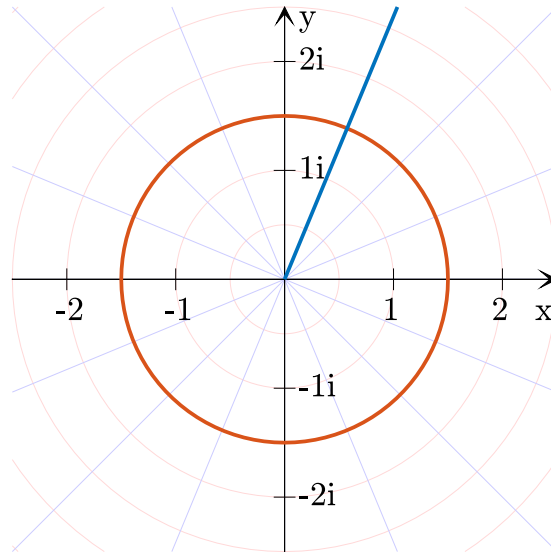
### 5.3 Konformikuvaus

Konformikuvaus (engl. *conformal mapping*) on kuvaus, jossa käyrien väliset kulmat säilyvät ennallaan [61, ss. 390–391]. Kyseessä tärkeä apuväline reunaehdollisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa [3, s. 258].

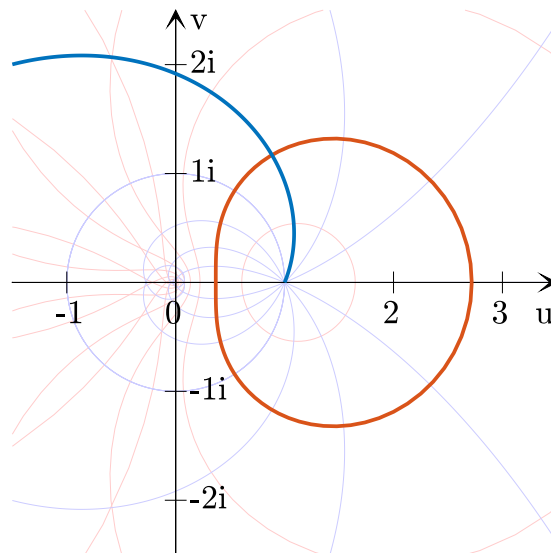
**Määritelmä 5.13.** Olkoon kompleksimuuttujan funktion kuvaus  $w = f(z)$  määritelty joukossa  $S$  ja piste  $z_0 \in S$ . Kuvaus  $w = f(z)$  on *konformikuvaus* pisteessä  $z_0$ , jos määrittelyjoukon  $S$  kaksi sileää käyrää  $C_1$  ja  $C_2$  leikkaavat pisteessä  $z_0$  ja käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  välisen leikkauskulman suunta ja suuruus pisteessä  $z_0$  ovat samat kuin kuvien  $C'_1$  ja  $C'_2$  leikkauskulman suunta ja suuruus pisteessä  $f(z_0)$ .

Konformikuvausta on havainnollistettu kuvassa 5.6. Konformikuvauksessa  $w = e^z$  parametrisoitujen käyrien välinen kulma säilyy suorana kulmana, vaikka käyrät muuttuvat. Havainnollistus on toteutettu MATLAB-ohjelmistolla.

Kuvauksen konformisuus voidaan selvittää funktion analyyttisyyden avulla. Funktion analyyttisyyden tarkastelu onnistuu funktion raja-arvon ja derivaatan käsitteiden avulla [3, s. 37]. Funktion raja-arvo on arvo, jota funktio lähestyy, kun muuttuja lähestyy jotakin tiettyä arvoa. [61, ss. 110–112]



(a) Sinisellä käyrä  $z_1(t) = \frac{3}{2}e^{it}$  ja punaisella käyrä  $z_2(t) = te^{i\frac{3\pi}{8}}$   $z$ -tasossa.



(b) Sinisellä käyrän  $z_1(t)$  ja punaisella käyrän  $z_2(t)$  kuvat  $w$ -tasossa.

**Kuva 5.6.** Konformikuvaus  $w = e^z$ .

**Määritelmä 5.14.** Oletetaan, että kompleksimuuttujan funktio  $f$  on määritelty pisteen  $z_0$  läheisyydessä ja  $L \in \mathbb{C}$ . Funktion  $f$  raja-arvo, kun  $z$  lähestyy kompleksilukua  $z_0$ , on  $L$ , jos kaikilla  $\varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta < 0$  niin, että  $|f(z) - L| < \varepsilon$ , kun  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Tällöin merkitään

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Raja-arvolle on voimassa lauseen 5.10 ominaisuudet. [61, s. 117]

**Lause 5.10.** Olkoot  $f$  ja  $g$  kompleksimuuttujan funktioita. Jos raja-arvot  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$

ja  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$  sekä  $c$  on vakio, niin

1.  $\lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = cL$ ,
2.  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = L \pm M$ ,
3.  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = L \cdot M$ ,
4.  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$ ,  $M \neq 0$ .

*Todistus.* Todistus löytyy lähteestä [61, s. 117].

Funktion  $f$  derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona. [61, ss. 142–146]

**Määritelmä 5.15.** Oletetaan, että kompleksimuuttujan funktio  $f$  on määritelty pisteen  $z_0$  läheisyydessä. Funktio  $f$  derivaatta pisteessä  $z_0$  on  $f'(z_0)$ , jos raja-arvo

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (5.1)$$

on olemassa.

Funktion  $f$  derivaatalle muuttujan  $z$  suhteen voidaan käyttää myös merkintää  $\frac{df}{dz}$ . Funktio  $f$  sanotaan olevan derivoituva pisteessä  $z_0$ , jos raja-arvo (5.1) ja näin ollen myös derivaatta ovat olemassa. Kompleksimuuttujan funktiolle on olemassa vastaavat derivoimisäännöt kuin reaalimuuttujan funktioille. [3, s. 38] [61, ss. 142–143]

**Lause 5.11.** Jos funktiot  $f$  ja  $g$  ovat derivoituvia pisteessä  $z_0$  ja  $c$  on vakio, niin

1.  $\frac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$ ,
2.  $\frac{d}{dz}(f(z) \pm g(z)) = f'(z) \pm g'(z)$ ,
3.  $\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ ,
4.  $\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$ ,
5.  $\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$ . (ketjusääntö)

*Todistus.* Ominaisuudet voidaan todistaa suorana laskuna hyödyntäen derivaatan määritelmää 5.15. [61, ss. 142–143] □

Funktion analyttisyys pisteessä  $z_0$  määritellään seuraavasti. [61, s. 145]

**Määritelmä 5.16.** Kompleksimuuttujan funktio  $f$  on *analyttinen* pisteessä  $z_0$ , jos on olemassa sellainen  $\delta > 0$ , että  $f$  on derivoituva kaikissa pisteissä  $z$ , jotka toteuttavat ehdon  $|z - z_0| < \delta$ .

Erona derivoitavuuteen analyyttisyys vaatii derivoitavuuden myös pisteen  $z_0$  läheisyydessä. Toisin sanoen pisteen  $z_0$  ympäriltä voidaan valita avoin joukko, jonka kaikki pisteet ovat derivoituvia. [3, s. 38] Funktio  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  on analyyttinen määrittelyjoukossa  $S$ , jos se on analyyttinen jokaisessa määrittelyjoukon  $S$  pisteessä. [61, s. 145]

Derivoitavuudesta pisteessä  $z_0$  seuraa myös jatkuvuus pisteessä  $z_0$ . Funktio  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  on jatkuva määrittelyjoukossa  $S$ , jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukon  $S$  pisteessä. [61, s. 146]

**Lause 5.12.** *Jos funktio  $f$  on derivoituva pisteessä  $z_0$ , niin funktio  $f$  on jatkuva pisteessä  $z_0$ .*

*Todistus.* Todistus onnistuu raja-arvon laskusääntöjen avulla [61, ss. 146–147]. □

Funktion analyyttisyys voidaan testata helposti jatkuvuuden ja Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla. [3, s. 37] [61, ss. 152–154]

**Lause 5.13. Cauchy-Riemannin yhtälöt.** *Oletetaan, että kompleksimuuttujan funktio  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  on derivoituva pisteessä  $z = x + iy$ . Tällöin funktioiden  $u$  ja  $v$  ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa ja noudattavat Cauchy-Riemannin yhtälöitä*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.2)$$

*Todistus.* Todistus onnistuu vertaamalla funktion  $f$  osittaisderivaattojen reaali- ja imaginaariosia. [61, ss. 152–153] □

**Lause 5.14.** *Oletetaan, että reaali- ja imaginaariosien funktiot  $u(x, y)$  ja  $v(x, y)$  ovat jatkuvia ja niiden ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa määrittelyjoukossa  $S$ . Jos  $u$  ja  $v$  toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt (5.2) määrittelyjoukossa  $S$ , niin funktio  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  on analyyttinen määrittelyjoukossa  $S$ .*

*Todistus.* Todistus derivoitavuuden suhteen löytyy lähteestä [29, ss. 105–106]. □

Analyyttisten funktioiden kuvaukset ovat konformikuvauksia seuraavan lauseen mukaisesti. [61, ss. 392]

**Lause 5.15.** *Jos  $f$  on analyyttinen määrittelyjoukossa  $S$ , piste  $z_0 \in S$  ja  $f'(z_0) \neq 0$ , niin kuvaus  $w = f(z)$  on konformikuvaus pisteessä  $z_0$ .*

*Todistus.* Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen määrittelyjoukossa  $S$ , piste  $z_0 \in S$  ja  $f'(z_0) \neq 0$ . Olkoot  $C_1$  ja  $C_2$  sileitä määrittelyjoukon  $S$  käyriä, joiden parametriesitykset ovat  $z_1(t)$  ja  $z_2(t)$ , kun  $t \in [a, b]$ . Käyrät leikkaavat pisteessä  $z_0$  eli on olemassa  $t_1, t_2 \in [a, b]$ , jolle  $z_1(t_1) = z_2(t_2) = z_0$ . Oletetaan lisäksi, että  $w = f(z)$  kuvaa käyrät  $C_1$  ja  $C_2$  käyriksi  $C'_1$  ja  $C'_2$ . On siis osoitettava, että käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  välisen leikkauskulman  $\alpha$  suunta ja suuruus pisteessä  $z_0$  on sama kuin käyrien  $C'_1$  ja  $C'_2$  välisen leikkauskulman  $\beta$  suunta ja suuruus pisteessä  $f(z_0)$ .

Leikkauskulma  $\alpha$  voidaan kirjoittaa käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  tangenttivektorien eli käyrien derivaattojen  $z_1'(t_1)$  ja  $z_2'(t_2)$  vaihekulmia eli argumenttia apuna käyttäen muodossa

$$\alpha = \arg(z_2'(t_2)) - \arg(z_1'(t_1)). \quad (5.3)$$

Käyrien  $C_1'$  ja  $C_2'$  parametriesitykset ovat muotoa  $w_1(t) = f(z_1(t))$  ja  $w_2(t) = f(z_2(t))$ . Käyrien  $C_1'$  ja  $C_2'$  tangenttivektorit pisteessä  $f(z_0) = f(z_1(t_1)) = f(z_2(t_2))$  saadaan hyödyntämällä lauseen 5.11 ketjusääntöä, jolloin

$$w_1(t_1) = f'(z_1(t_1)) \cdot z_1'(t_1) = f'(z_0) \cdot z_1'(t_1)$$

ja

$$w_2(t_2) = f'(z_2(t_2)) \cdot z_2'(t_2) = f'(z_0) \cdot z_2'(t_2).$$

Käyrät  $C_1$  ja  $C_2$  ovat sileitä, joten derivaatat  $z_1'(t_1)$  ja  $z_2'(t_2)$  ovat nolasta poikkeavia. Oletuksen  $f'(z_0) \neq 0$  mukaan myös derivaatat  $w_1'(t_1)$  ja  $w_2'(t_2)$  ovat nolasta poikkeavia, joten käyrien  $C_1'$  ja  $C_2'$  välinen leikkauskulma  $\beta$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \beta &= \arg(w_2'(t_2)) - \arg(w_1'(t_1)) \\ &= \arg(f'(z_0) \cdot z_2'(t_2)) - \arg(f'(z_0) \cdot z_1'(t_1)) \\ &= \arg(f'(z_0)) + \arg(z_2'(t_2)) - (\arg(f'(z_0)) + \arg(z_1'(t_1))) \\ &= \arg(z_2'(t_2)) - \arg(z_1'(t_1)), \end{aligned} \quad (5.4)$$

kun kolmannella rivillä on hyödynnetty lauseen 5.6 kohtaa 1. Kompleksilukujen kertolaskussa argumentit summataan keskenään. Tulon argumentti voidaan siis laskea tulon tekijöiden argumenttien summana.

Nyt vertaamalla yhtälöitä (5.3) ja (5.4) huomataan, että  $\alpha = \beta$ . Näin ollen kuvaus  $w = f(z)$  on konformikuvaus pisteessä  $z_0$ . [61, s. 392–393]  $\square$

Konformikuvausta voidaan hyödyntää esimerkiksi lämmön siirtymisen ja sähköstaattisten ilmiöiden mallintamisessa. Ratkaistavana on yleensä jokin reunaehdollinen differentiaaliyhtälö, kuten Laplacen yhtälö. Ratkaisemisessa voidaan käyttää Dirichletin ongelman ratkaisumallia, jossa etsitään analyyttinen kuvaus  $w = f(z)$  määrittelyjoukosta  $S$  joukkoon  $S'$ , muunnetaan reunaehdot joukkoon  $S'$  ja ratkaistaan muodostettu Dirichletin ongelma joukossa  $S'$ , minkä jälkeen ilmoitetaan lopullinen ratkaisu. Toinen keino Laplacen yhtälön ratkaisuun on Neumannin ongelman ratkaisumalli, jossa ratkaisun löytäminen perustuu oletukseen, että konformikuvauksessa funktion derivaatta tarkasteltavassa pisteessä on nolasta poikkeava. [61, ss. 429–437]

Konformikuvauksen periaatteet ovat tärkeitä myös fluidien virtauksen mallintamisessa.

Fluidin virtaamista voidaan mallintaa virtausviivoilla, jotka kaartuvat eri tavoin esteiden vaikutuksesta. Virtausviivojen käyttäytyminen saadaan selville ratkaisemalla tilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö Dirichletin tai Neumannin ongelman avulla. [61, ss. 437–442] Konkreettisia esimerkkejä fluidien virtauksien mallintamisesta suunnitteluprosesseissa ovat ilmavirtausten mallintaminen lentokoneen siivissä [8] ja laivojen käyttäytymisen mallintaminen merivedessä [48]. Edellä mainittujen lisäksi konformikuvausta voidaan hyödyntää sähkömagneettisten aaltojen mallintamisessa [9] ja karttojen tekemisessä [6].

## 6. KOMPLEKSILUKUJEN ITSEOPISKELUMATERIAALIN SUUNNITTELU JA KEHITTÄMINEN

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin kehittämistarve tunnistettiin keväällä 2023. Tämän jälkeen tutustuttiin teoriaan ja aiempiin tutkimuksiin, jonka jälkeen päästiin suunnittelemaan ja rakentamaan varsinaista itseopiskelumateriaalia.

Kehittämisen lähtökohtana oli Tampereen yliopiston Differentiaali- ja integraalilaskennan opintojakson tarve kompleksilukujen itseopiskelumateriaalille. Opintojakso toteutetaan syksyn ensimmäisessä periodissa käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmin ja pääsääntöisesti opintojaksolle osallistuu yliopisto-opintonsa aloittavia opiskelijoita. Kompleksilukuja ei mainita opintojakson osaamistavoitteissa, mutta niitä tarvitaan apuna toisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisussa. Näin ollen kompleksilukujen tunteminen on välttämätöntä ja niiden opiskelu on päädytty sijoittamaan heti opintojakson alkuun ensimmäiselle opiskeluviikolle.

Differentiaali- ja integraalilaskennan opintojaksolla on käytössä Henry Edwardsin ja David Penneyn kirja *Calculus: Early Transcendentals: Matrix Version* [11] sekä Janne Kauhasen ja Heikki Orelman kirjoittama opintomoniste *Differentiaali- ja integraalilaskenta* [21]. Kompleksiluvut on esitelty opintomonisteen liitteessä, joka on otettu suoraan Janne Kauhasen, Jani Hirvosen ja Petteri Laakkosen tekemästä *Analyysin peruskurssin opintomonisteesta* [17]. Itseopiskelumateriaalin tarkoituksena ei ollut syrjäyttää kirjaa ja opintomonistetta vaan toteuttaa materiaali, jonka avulla opiskelijoiden olisi helpompi opiskella itsenäisesti ja harjoitella yliopistossa vaadittavia opiskelutaitoja. Näin ollen jo suunnittelun alkuvaiheessa päädyttiin siihen, että itseopiskelumateriaalin rakenne noudattaa kirjan ja opintomonisteen rakennetta kompleksilukujen suhteen, jotta on mahdollista käyttää kaikkia materiaaleja opiskelun tukena.

Kehittämiskontekstista huolimatta materiaali on suunniteltu niin, että sitä voidaan jatkossa hyödyntää myös muilla opintojaksoilla kompleksilukujen opiskeluun tai kertaamiseen. Itseopiskelumateriaali voidaan opiskella yhden opiskeluviikon aikana tai hajauttaa pidemmälle ajan jaksolle kertaustarpeiden mukaisesti.

Itseopiskelumateriaalissa ei paneuduta lauseiden todistuksiin vaan nimenomaan komplek-

silukuihin laskennallisena apuvälineenä. Tarkoituksena on siis ottaa kompleksilukujen perusasiat haltuun ja saada valmiuksia tuleviin opintoihin. Muutamista yksinkertaisista todistuksista esitetään todistuksen idea, mutta muuten todistukset jätetään opiskelijoiden oman mielenkiinnon ja myöhempien opintojen varaan.

Itseopiskelumateriaalin tavoitteena on, että opiskeltuaan materiaalin mukaisesti opiskelija

- tietää mitä kompleksiluvut ovat
- ymmärtää kompleksilukujen geometrisen tulkinnan kompleksitasossa
- hallitsee kompleksilukujen laskutoimitukset
- tuntee kompleksiluvun liittoluvun ja itseisarvon sekä niiden ominaisuudet
- osaa ratkaista yksinkertaisia yhtälöitä ja epäyhtälöitä
- pystyy muuntamaan kompleksiluvut napakoordinaattimuotoon ja eksponenttimuotoon sekä suorittamaan niillä laskutoimituksia
- ymmärtää napakoordinaattimuodon ja eksponenttimuodon yhteyden reaali- ja imaginaariosaan
- osaa etsiä kompleksiluvun juuret
- tuntee kompleksisen polynomin ominaisuudet
- osaa ratkaista toisen asteen polynomiyhtälön juuret ratkaisukaavalla.

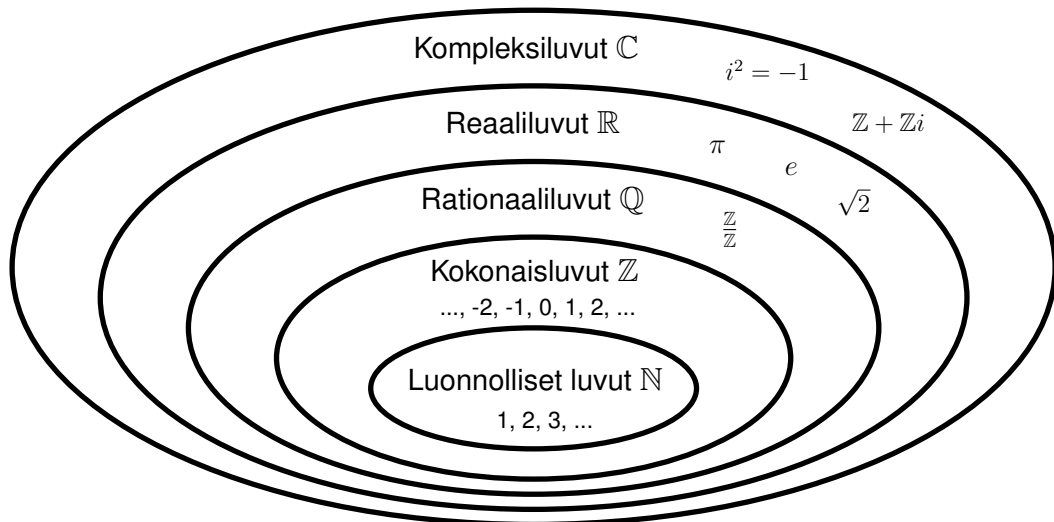
## 6.1 Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin suunnittelu

Differentiaali- ja integraalilaskennan opintojakso toteutetaan käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmiä hyödyntäen. Näin ollen oli luonnollista päätyä hyödyntämään itseopiskelumateriaalissa kyseisille opetusmenetelmille tyypillisiä opetusvideoita, harjoitustehtäviä ja itsearviointia [53]. Opetusvideoiden valitsemista puolsi myös opiskelijan autonomisuuden mahdollistaminen [38]. Harjoitustehtävien toteuttaminen automaattitarkasteisina tehtävinä mahdollistaa sen, että opiskelijat saavat tehtävästä heti palautetta opiskelivatpa he missä tai milloin tahansa [18, ss. 450–474] [53]. Toisaalta automaattitarkasteiset tehtävät antavat palautetta vain vastauksen oikeellisuudesta. Päädyttiin siis siihen, että perustehtävät toteutetaan automaattitarkasteisina ja syventävistä tehtävistä palautetaan koko ratkaisu, jolle suoritetaan itsearviointi malliratkaisuun ja arviointiohjeeseen perustuen. Itseopiskelumateriaali suunniteltiin differentiaali- ja integraalilaskennan opintojaksolle ensimmäisen viikon materiaaliksi, joten opiskelijat saivat tukea opiskeluun ja mahdollisuuden laskea tehtäviä yhdessä kavereiden kanssa viikon pienryhmätilaisuuksissa.

Siirtymä aiemmista opinnoista yliopisto-opintoihin voi olla haastava niin elämänmuutoksien [2, ss. 318–347] kuin opetusjärjestelyidenkin [26, ss. 70–99] [42] osalta. Opetusjär-

jestelyiden osalta sopeutumista voidaan tukea hyödyntämällä samankaltaisia opetusjärjestelyitä kuin toisen asteen koulutuksessa [34]. Itseopiskelumateriaalissa pyrittiin tällaiseen lähestymistapaan. Materiaali on suunniteltu niin, että sen avulla voi opiskella edeten järjestyksessä aihealueesta toiseen ikään kuin opettajan antamien ohjeiden mukaisesti. Opetusvideot vastaavat opettajajohtoista opetushetkeä, jossa asia opetetaan PowerPointesityksessä esiintyvien kuvien ja laskuesimerkkien avulla. Niissä pyritään myös linkittämään uusia asioita aiemmin opittuihin esimerkiksi vertaamalla kompleksilukujen ominaisuuksia reaalilukujen ominaisuuksiin. Tehtävät on valittu tukemaan oppimistavoitteiden saavuttamista ja moniin niistä löytyy laskuesimerkit dioista. Itsearvioinnilla ohjataan opiskelijan omaa reflektiota.

Kompleksilukuihin liittyvistä tutkimuksista nousi esille, että erityisesti napakoordinaattimuoto [33] [36] ja kompleksiluvun juuret [33] [54] ovat olleet opiskelijoille haastavia aiheita. Joillakin opiskelijoilla kompleksilukujen ymmärtäminen reaalilukujoukon laajennuksena [36] tuotti haasteita. Se taas voi aiheuttaa ongelmia reaalilukujen ominaisuuksien soveltamisena kompleksiluvuille [54]. Kompleksilukujen laskutoimituksiin ja lukujoukkojen välisiin suhteisiin liittyviin haasteisiin itseopiskelumateriaalin opetusvideoissa pyritään vastaamaan havainnollistavien kuvien ja esimerkkien avulla sekä esittämällä lukujoukot kaaviokuvana (kuva 6.1). Muutenkin opetusvideoiden PowerPoint-esitykset suunniteltiin mahdollisimman selkeiksi ja ymmärrettäviksi ilman videotakin. Näin opiskelijoiden on helppo turvautua opiskelutilanteessa PowerPoint-esityksen muistiinpanoihin ladattuaan ne itselle oppimisalustalta.



**Kuva 6.1.** Lukujoukkojen havainnollistaminen itseopiskelumateriaalissa

Kompleksilukujen tutkimuksista nousi myös ilmi kompleksilukujen käytännön sovellusten ymmärtämisen puute [33] [36]. Koska itseopiskelumateriaalin tavoitteena on käsitellä kompleksilukuja niin, että sitä voidaan käyttää osana matematiikan opintojaksoja, materiaalissa ei voida ajankäytön ja opiskelukuorman vuoksi paneutua syvällisemmin tekniikan

sovelluksiin. Materiaalin alkuun päädyttiin kuitenkin rakentamaan johdanto, joka mainitsee muutamia kompleksilukujen sovelluskohteita ja ohjaa opiskelijan pohtimaan kompleksilukujen tarpeellisuutta reaalityöjoukon laajenuksena yhtälöön ratkaisuun liittyvien tehtävien kautta.

Luvussa 4.2 itsenäisen opiskelun sujumisen kannalta tärkeiksi elementeiksi kuvattiin muun muassa prosessitavoitteiden asettaminen, opiskelun hajauttaminen pieniin jaksoihin ja vaihtelu eri aiheiden välillä sekä aktiivinen ajattelu osana oppimista [46]. Koska itseopiskelumateriaali on suunnattu yliopisto-opintojen alkuvaiheeseen, jolloin opiskelijat hakevat toimivia opiskelutapoja, tarkoituksena oli toteuttaa näitä elementtejä materiaaliin tukemaan opiskelutaitojen kehittymistä. Materiaalin sisällöt jaettiin johdannon lisäksi kolmeen osaan, joista jokainen voidaan nähdä yhtenä prosessitavoitteena. Sisältöjen jakaminen osiin helpottaa myös opiskelun hajauttamista eri ajankohtiin. Hajauttamalla opiskelu sujuu paremmin myös keskittymisen ja uuden tiedon omaksumisen kannalta. Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin osat ovat:

- Johdanto
- OSA 1: Kompleksilukujen ominaisuudet ja laskutoimitukset
- OSA 2: Napakoordinaattimuoto ja eksponenttimuoto
- OSA 3: Kompleksiluvun juuret ja kompleksinen polynomi

Itseopiskelumateriaalin alkuun rakennettiin johdanto, jonka tarkoitus motivoida opiskelijoita kompleksilukujen opiskeluun ja johdatella pohtimaan kompleksilukujen tarpeellisuutta laskennallisena apuvälineenä. Alussa opiskelijalle kerrotaan muutamia esimerkkejä sovelluksista, joissa kompleksilukuja tarvitaan, sekä tuodaan esille opintojakson aiheena olevat differentiaaliyhtälöt, joiden ratkaisemisessa kompleksilukuja tarvitaan myös. Jatkokäytössä viittaus differentiaaliyhtälöihin tulee päivittää vastaamaan kyseisen opintojakson sisältöjä. Sanallisen johdannon jälkeen opiskelijat pääsevät vielä kertaamaan toisen asteen yhtälön ratkaisujen olemassaoloa reaalityöjoukon yhtälönratkaisutehtävän ja monivalintatehtävän avulla.

Monivalintatehtävässä pohditaan, miksi toisen asteen yhtälölle  $x^2 - 2x + 2 = 0$  ei löydetä reaalityöjoukon ratkaisua toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Tämän jälkeen onkin loistava tilaisuus osoittaa kompleksilukujen hyödyllisyys esittelemällä kompleksiluku  $i$ , jolla on ominaisuus  $i^2 = -1$ . Näin ollen pystytään osoittamaan, että yhtälöllä  $x^2 + 1 = 0$  on kaksi ratkaisua  $i$  ja  $-i$ , vaikka reaalityöjoukon ratkaisua ei ole olemassa. Yhtälöön  $x^2 - 2x + 2 = 0$  palataan myöhemmin itseopiskelumateriaalissa, mutta sitä ennen opiskelijaa kannustetaan etenemään materiaalissa ja ottamaan selvää kompleksilukujen ominaisuuksista.

Jokainen osa sisältää aihealueeseen liittyvän opetusvideon ja PowerPoint-esityksen, automaattitarkasteiset perustehtävät sekä palautettavat syventävät tehtävät ja niiden itsear-

vioinnin. Itsearviointissa opiskelijat pisteyttävät palauttamansa syventävät tehtävät malliratkaisun avulla. Varsinaista eri aiheiden välillä tapahtuvaa vaihtelua materiaalisissa ei ole, sillä siinä opiskellaan kompleksilukuja edeten perusominaisuuksista kohti polynomeja. Tehtävät ovat kuitenkin erilaisia osien välillä, joten mekaanisen toistamisen vaaraa ei ole. Aktiiviseen ajatteluun opiskelijoita ohjataan opetusvideoihin sisällytetyillä käsitteenmuodostustehtävillä. Käsitteenmuodostustehtävien on tarkoitus olla helppoja monivalintakysymyksiä, joissa testataan videolla opetetun asian ymmärtämistä.

Itseopiskelumateriaalin ensimmäinen osa käsittelee kompleksilukujen ominaisuuksia ja laskutoimituksia. Osassa lähdetään liikkeelle lukualueista, kompleksilukujen määritelmästä ja geometrisesta tulkinnasta kompleksitasossa. Tämän jälkeen tutustutaan laskutoimituksiin (summa, erotus, tulo ja osamäärä) sekä liittolukuun ja itseisarvoon. Osassa ratkotaan myös yksinkertaisia yhtälöitä, joissa esiintyy kompleksiluvun liittoluku tai itseisarvo. Näihin aiheisiin liittyen opetusvideolla esiintyy kolme käsitteenmuodostustehtävää. Perustehtäviä on kolme ja ne testaavat laskutoimituksia, liittolukua ja itseisarvoa sekä itseisarvoyhtälön ratkaisujoukon geometrista tulkintaa. Syventävissä tehtävissä on kaksi yhtälönratkaisutehtävää, joista ensimmäisessä on esiintyy liittoluku ja toisessa itseisarvo.

Toisessa osassa tutustutaan kompleksiluvun vaihtoehtoisin esitystapoihin eli napakoordinaattimuotoon ja sen eksponenttimuotoon. Ensin käydään läpi vaihekulma ja hyödynnetään itseisarvoa selvitettäessä kompleksiluvun etäisyys origosta. Tämän jälkeen harjoitellaan muuntamaan kompleksilukuja napakoordinaattimuotoon, suorittamaan laskutoimituksia napakoordinaattimuodossa sekä hyödyntämään De Moivre'n kaavaa. Eksponenttimuodon yhteydessä esitellään Eulerin kaava ja kompleksilukujen laskutoimitukset eksponenttimuodossa. Opetusvideon kaksi käsitteenmuodostustehtävää käsittelevät vaihekulmaa ja eksponenttimuotoa. Perustehtäviä on kaksi, joissa testataan kompleksiluvun muuntamista napakoordinaattimuotoon ja eksponenttimuotoon sekä palauttamista reaali-osaan ja imaginääriosaan. Syventäviä tehtäviä on yksi ja siinä suoritetaan laskutoimituksia eksponenttimuodossa.

Kolmas osa keskittyy kompleksiluvun juuriin ja kompleksiseen polynomiin. Ensin opetellaan etsimään kompleksiluvun juuret, jotka sijaitsevat origokeskisellä ympyrällä tasaisin välein. Sen jälkeen tutustutaan kompleksisen polynomin määritelmään, algebran peruslauseeseen ja sen seuraukseen sekä erityistapauksina toisen asteen polynomiyhtälön juurien ratkaisukaavaan ja polynomin juurtenhakualgoritmiin. Opetusvideon kolme käsitteenmuodostustehtävää syventävät ymmärrystä kompleksiluvun juurien sijainnista origokeskisellä ympyrällä, polynomin kompleksisten nollakohtien lukumäärästä ja reaali-kertoimisen polynomin nollakohtien esiintymisestä liittolukuparina. Perustehtävien ensimmäisessä tehtävässä johdetaan kompleksisen juuren laskukaava pudotusvalikkotehtävän muodossa, jotta aiemmissä tutkimuksissa [33] [54] haasteeksi osoittautunut ymmärrys kompleksilukujen juurista syvenisi. Toisessa perustehtävässä ratkaistaan toisen asteen polynomiyhtälön juuria ratkaisukaavan avulla. Tässä tehtävässä palataan itseopiskelu-

materiaalin johdannossa esiintyvään yhtälöön  $x^2 - 2x + 2 = 0$ , jolle voidaan nyt ratkaista kompleksiset juuret. Ensimmäisessä syventävässä tehtävässä etsitään kompleksiluvun juuret ja toisessa hyödynnetään juurtenhakualgoritmia polynomin juurten hakemiseen.

Differentiaali- ja integraalilaskennan opintojaksolla on käytössä formatiiviseen arviointiin perustuva pistejärjestelmä, mikä on tyypillistä käänteiselle opetukselle ja oppimiselle [53]. Opintojaksolla on mahdollista kerätä maksimissaan 1000 pistettä, jotka koostuvat seitsemän opiskeluviikon aikaisista suorituksista (yhteensä 700 pistettä) ja opintojakson aikana järjestettävistä osaamistesteistä ja loppukokeesta (yhteensä 300 pistettä). Tyypillisesti jokaisen opiskeluviikon suorituksista on mahdollista saada 100 pistettä, mutta ensimmäisen opiskeluviikon pisterakenne on hieman erilainen opintojakson aloittamiseen liittyvien suoritusten takia. Opintojakson ja itseopiskelumateriaalin suunnitteluvaiheessa päädyttiin siihen, että kompleksilukujen kokonaisuudesta on mahdollista saada yhteensä 80 pistettä sisältäen viikottaisiin pienryhmätilaisuuksiin osallistumisen ja kaksiosaiseen tutkimuskyselyyn vastaamisen. Pistejakauma on taulukon 6.1 mukainen.

**Taulukko 6.1.** Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin pistejakauma

Suoritus	Pisteet
Johdanto-tehtävät (1 piste / tehtävä)	4 pistettä
Automaattitarkasteiset perustehtävät (3 pistettä / tehtävä)	21 pistettä
Palautettavat syventävät tehtävät (5 pistettä / tehtävä)	25 pistettä
Harjoitustehtävien itsearviointi (1 piste / tehtävä)	5 pistettä
Läsnäolo ja aktiivinen osallistuminen Prime time -tilaisuudessa	10 pistettä
Osallistuminen etäyhteydellä toteutettavaan laskuharjoitustilaisuuteen	5 pistettä
Tutkimuskyselyyn vastaaminen (5 pistettä / osa)	10 pistettä
Yhteensä	80 pistettä

Opetusvideoista ja niihin sisällytetyistä käsitteenmuodostustehtävistä ei jaeta pisteitä vaan ne toimivat oppimisen tukena. Opetusvideoiden katsominen ja käsitteenmuodostustehtäviin vastaaminen todennäköisesti kuitenkin helpottavat perustehtävien ja syventävien tehtävien tekemistä sekä ovat yhteydessä opintomenestykseen [53].

## 6.2 Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin rakentaminen oppimisalustalle

Itseopiskelumateriaalin huolellisen suunnittelun ja valmistelun jälkeen oli aika koota varsinainen itseopiskelumateriaali oppimisalustalle. Kyseisellä opintojaksolla oli käytössä Tampereen korkeakouluyhteisön Moodle. Moodle on maailmanlaajuisesti käytössä oleva avoimen lähdekoodin verkko-oppimisympäristö, johon on mahdollista luoda muokattavissa olevia Moodle-sivuja erilaisten opintojaksojen tarpeisiin [32]. Moodle-sivulle voi lisätä eri-

laisia aktiviteettejä ja aineistoja. Siellä voi esimerkiksi jakaa opintojakson oppimateriaaleja, luoda sähköisesti palautettavia tehtäviä, antaa palautetta ja seurata opiskelijoiden oppimisprosessia.

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalille luotiin Differentiaali- ja integraalilaskennan opintojakson Moodleen oma osio, johon koottiin kaikki itseopiskelumateriaaliin liittyvä aineisto ja aktiviteetit. Osion alkuun sijoitettiin ohjesivu, jonka alussa oli itseopiskelumateriaalin rakentajan terveiset sekä ohjeistus opiskeluun. Ohjeistuksessa opiskelijalle kerrotaan itseopiskelumateriaalin sisällöt ja osaamistavoitteet sekä käytännön vinkit itseopiskelumateriaalin opiskeluun ja kompleksilukujen kokonaisuuden pisterakenne. Käytännön vinkeistä tärkeimpänä mainittakoon, että etenemällä Kompleksilukujen osiossa järjestyksessä opiskelee automaattisesti itseopiskelumateriaalin suunnitelman mukaisesti, sillä seuraavana osiossa vastaan tulevat järjestyksessä johdanto ja osat 1–3 aineistoinen ja aktiviteetteineen. Osion lopusta löytyi vielä tutkimuskysely. Alla olevassa taulukossa kuvattu itseopiskelumateriaalin rakennetta Moodle-sivulla.

**Taulukko 6.2.** Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin rakenne Moodle-sivulla

Osa	Aineistot ja aktiviteetit
Ohjesivu	Ohjeita kompleksilukujen opiskeluun
Johdanto	Johdanto kompleksilukuihin
OSA 1: Kompleksilukujen ominaisuudet ja laskutoimitukset	Opetusvideo Diat Perustehtävät Syventävät tehtävät Itsearviointi
OSA 2: Napakoordinaattimuoto ja eksponenttimuoto	Opetusvideo Diat Perustehtävät Syventävät tehtävät Itsearviointi
OSA 3: Kompleksiluvun juuret ja kompleksinen polynomi	Opetusvideo Diat Perustehtävät Syventävät tehtävät Itsearviointi

Itseopiskelumateriaalin opetusvideot kuvattiin Panopton videopalvelussa [43]. Opetusvideoissa opetetaan aihe Microsoft PowerPointilla valmisteltujen dioiden avulla. Diat jaettiin opiskelijoille käyttäen Moodlen aineistotyökalua. Opetusvideot lisättiin Moodleen ja niihin lisättiin käsitteenmuodostustehtävät hyödyntäen Moodlen H5P-aktiviteettia [14], joka

mahdollistaa erilaisten interaktiivisten sisältöjen luomisen. Käsitteenmuodostustehtävät pysäyttävät videon, jonka jälkeen opiskelija vastaa monivalintatehtävään ja saa palautteen. Tämän jälkeen video jatkuu normaalisti seuraavaan käsitteenmuodostustehtävään asti. Opetusvideoiden kestot ovat itseopiskelumateriaalin järjestyksessä noin 35 minuuttia, 23 minuuttia ja 20 minuuttia.

Johdanto, perustehtävät, syventävät tehtävät ja itsearviointi toteutettiin Moodlen Tenttiaktiviteeteillä, joihin lisättiin aina tarpeen mukaan ohjetekstiä ja/tai kysymyksiä. Tenttiaktiviteetti mahdollisti itseopiskelumateriaalin pisteytyksen. Moodlen kysymystyypeistä johdannossa, perustehtävissä ja itsearvioinnissa hyödynnettiin monivalintaa, aukkotehdävää, valitse puuttuvat sanat -kysymystyyppiä ja STACK-kysymystyyppiä, jotka ovat automaattitarkasteisia tehtävätyyppejä ja mahdollistavat lyhyen palautteen antamisen vastaukseen perustuen. Kuvassa 6.2 on esimerkki STACK-tehtävän näkymästä itseopiskelumateriaalissa. Essee-kysymystyyppiä hyödynnettiin palautettaessa syventäviä tehtäviä PDF-muodossa.

Olkoon  $z_1 = 4 - 3i$  ja  $z_2 = 5i - 2$ .

Laske seuraavat laskutoimitukset. Anna vastaus tarkkana arvona muodossa  $a + bi$ .

Voit tehdä yhden laskun kerralla ja painaa "Lukitsen vastaukseni". Vaihtoehtoisesti voit laskea kaikki ja syöttää vastaukset kerralla. Tehtävä antaa palautteen vastauksen lukitsemisen jälkeen.

Syöttäessäsi vastausta imaginääriyksikkönä toimii pieni i-kirjain. Murtoluvun saat käyttämällä kenoviivaa esimerkiksi murtoluku  $\frac{1}{2}$  kirjoitetaan muodossa  $1/2$ .

Re( $z_1$ ) =

Im( $z_1$ ) =

$z_1 + z_2$  =

$z_1 - z_2$  =

$z_1 \cdot z_2$  =

$\frac{z_1}{z_2}$  =

**Tarkista**

**Kuva 6.2.** Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin ensimmäinen perustehtävä

STACK-kysymystyyppi (System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel) on tietokonealgebrajärjestelmää (computer algebra system, CAS) käyttävä opetus- ja arviointijärjestelmä, joka sopii erityisen hyvin matemaattisten tehtävien formatiiviseen arviointiin [52]. STACK-kysymystyyppi käyttää apuna Maxima-tietokonealgebrajärjestelmää [30], joka mahdollistaa vastausten matemaattisten ominaisuuksien tarkastamisen ja automaattisen palautteen antamisen, kun tehtävä on laadittu Maximian syntaksin mukaisesti. STACK-tehtäviin on mahdollista lisätä lukuarvojen satunnaistusta ja useita vastauslaatikoita.

Opiskelijalle näkyvät palautteet tehtävistä pyrittiin toteuttamaan oppimista tukeviksi. Niissä ei siis kerrota pelkästään, onko tehtävä oikein vai väärin vaan tarvittaessa kerrotaan,

missä vastauslaatikossa virhe on ja miten tehtävä tulisi ratkaista. Palautteita valmisteltaessa huomioitiin tehtävän mahdolliset kompastuskivet. Lisäksi tentti-aktiviteetit asetettiin niin, että tehtävän mennessä väärin opiskelija sai yrittää tehtävää uudelleen ilman pistevähennyksiä. Moodlessa tentin kysymysten toimintatavaksi oli siis asetettu ”mukautuvat kysymykset ilman pistevähennyksiä”.

Syventävät tehtävien tarkistaminen onnistui niin, että opiskelija palautti ratkaisustaan PDF-tiedoston tentti-aktiviteettiin, jonka jälkeen hän sai näkyviin malliratkaisun tentti-aktiviteetin yleisessä palautteessa ja pystyi vertaamaan omaa vastaustaan malliratkaisuun. Tämän jälkeen opiskelijalle avautui mahdollisuus suorittaa itsearviointi eli pisteyttää tehtävänsä malliratkaisun ja pisteytysohjeen mukaisesti. Itsearviointi asetettiin tentti-aktiviteetin asetuksista Rajoita pääsy -toiminnolla niin, että se aukesi vasta, kun kyseisen osan syventävät tehtävät oli palautettu.

## **7. KOMPLEKSILUKUJEN ITSEOPISKELUMATERIAALIN TESTAAMINEN JA ARVIOINTI**

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalia testattiin syksyllä 2023 Tampereen yliopiston Differentiaali- ja integraalilaskennan opintojaksolla, jolle osallistui pääsääntöisesti ensimmäisen vuoden opiskelijoita. Opintojakson opiskelijat opiskelivat kompleksilukujen kokonaisuuden kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin avulla opintojakson ensimmäisellä viikolla. Syksyllä 2023 aloittaneille opiskelijoille kyseessä oli yliopisto-opintojen ensimmäinen opiskeluviikko.

Opintojakson aloitusluento oli ensimmäisen opetusviikon maanantaiaamuna, jolloin opiskelijoille kerrottiin opintojakson käytännöistä, kuten käänteisestä opetuksesta ja oppimisesta, kompleksilukujen itseopiskelumateriaalista ja siihen liittyvästä tutkimuksesta. Tutkimuksesta kerrottiin myös opintojakson Moodlessa kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin yhteydessä. Tutkimuksen kuvauksessa kerrottiin kerättävistä tiedoista ja korostettiin tutkimukseen osallistumisen vapaaehtoisuutta. Opiskelijoille kerrottiin myös, että henkilötietoja käsitellään EU:n tietosuoja-asetuksen mukaisesti, ja heidän oli mahdollista tutustua tutkimuksen tietosuojailmoitukseen. Riippumatta tutkimukseen osallistumisesta kaikki opintojakson opiskelijat opiskelivat kompleksilukujen kokonaisuuden itseopiskelumateriaalin mukaisesti. Suostumus tutkimukseen osallistumiseen ja henkilötietojen käsittelyyn pyydettiin tutkimuskyselyyn vastattaessa.

Opiskelijoita ohjeistettiin aloittamaan opiskelu heti aloitusluennon jälkeen. Myös ryhmässä opiskeluun kannustettiin, jotta opiskelijat eivät jäisi yksin uuden aihekokonaisuuden kanssa. Viikon ensimmäinen pienryhmätilaisuus, Prime time -tilaisuus, oli jo keskiviikkona lähiopetuksena noin 6 henkilön ryhmissä, jotka olivat samat kuin opintojen alussa muodostetut tutorryhmät. Tilaisuus kesti kaksi tuntia ja siellä varmistettiin, että kaikki ovat päässeet alkuun kompleksilukujen opiskelussa, tehtiin yksilöllinen aikataulusuunnitelma opintojaksolla opiskeluun ja jatkettiin kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin tehtäviä.

Torstaina vuorossa oli tilapuuhteiden vuoksi kaikille yhteinen etäyhteydellä toteutettava laskuharjoitustilaisuus, jossa oli mahdollista kysyä apua tehtäviin. Laskuharjoitustilaisuudessa opiskelijat laskivat tehtäviä pienryhmissä ja kysyivät tarvittaessa opettajalta apua.

Opiskelijoiden oli lisäksi mahdollista käydä laskutuvassa kysymässä apua tehtäviin. Vapaaehtoinen laskutupa on paikka, jonne matematiikan opintojaksojen opiskelijat voivat mennä laskemaan tehtäviä ja kysymään apua ongelmakohtiin. Ensimmäisellä viikolla laskutupa oli auki torstaina ja perjantaina.

Ohjeena oli opiskella kompleksilukujen itseopiskelumateriaali kokonaisuudessa ensimmäisellä opiskeluviikolla, sillä toisella opiskeluviikolla opintojaksolla siirryttiin jo seuraavan aiheen opiskeluun. Itseasiassa seuraavan aiheen opiskelu oli suositeltavaa aloittaa jo perjantaina. Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin tehtävien deadline oli kuitenkin asetettu vasta kolmannen viikon maanantaille, jotta opintojen aloittamisessa olisi joustovaraa. Yhteensä 61 tutkimukseen osallistunutta opiskelijaa teki itseopiskelumateriaalin tehtävät.

Opiskeltuaan kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin kokonaan opiskelijat vastasivat tutkimuskyselyn ensimmäiseen osaan, joka keskittyi kokemuksiin itseopiskelumateriaalista. Ensimmäisessä osassa kysyttiin lyhyesti myös tuntemuksia yliopisto-opintojen aloittamisesta. Opiskeltuaan differentiaali- ja integraalilaskennan opintojakson opiskelijat vastasivat tutkimuskyselyn toiseen osaan, jossa kysyttiin monipuolisemmin kokemuksia yliopistomatematiikan opiskelusta. Tutkimuskysely oli toteutettu Moodleen Palaute-aktiviteetillä ja se sisälsi väittämiä, joihin vastattiin Likert-asteikolla, monivalintoja sekä avoimia kysymyksiä. Tutkimuskysely löytyy liitteestä A. Tutkimuskyselyn ensimmäiseen osaan vastasi 61 opiskelijaa ja toiseen osaan 50 opiskelijaa.

Opintojakson lopussa oli EXAM-luokassa tehtävä sähköinen tentti, jossa oli yksi tehtävä kompleksilukuihin liittyen. Tehtävässä testattiin kompleksilukujen laskutoimituksia, kompleksiluvun muuttamista napakoordinaattiesityksen eksponenttimuotoon sekä kompleksiluvun juurien ratkaisemista. Tehtävä oli automaattitarkasteinen. Opiskelijat syöttivät siis tehtävän vastauskenttään vain vastauksen, mutta tehtävän alussa heitä ohjeistettiin kuitenkin tekemään välivaiheita jollakin ohjelmistolla. Lukuarvojen osalta tehtävään tehtiin pientä satunnaistusta. Esimerkki tenttitehtävästä on esitetty kuvassa 7.1. Tutkimukseen osallistuneista opiskelijoista 60 opiskelijaa kävi tekemässä tentin.

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin arvioinnissa käytettiin apuna Moodlesta saatuja itseopiskelumateriaalin tehtävien pistejakaumia, tutkimuskyselyn vastauksia ja tenttipisteitä. Yliopisto-opintojen aloittamiseen liittyviä haasteita ja tukikeinoja kartoitettiin erityisesti tutkimuskyselyn toisen osan vastauksien perusteella. Tutkimusaineisto anonymisoidiin ja sitä käsiteltiin Tampereen yliopiston Microsoft 365 -palvelussa Microsoft Excel taulukkolaskentaohjelmalla. Tutkimusaineisto hävitetään tutkimuksen päättymisen jälkeen opinnäytetyön valmistumisen yhteydessä.

Tässä tehtävässä riittää, että syötät vastauksen vastauskenttään.

Tee kuitenkin välivaiheita jollakin ohjelmistolla virheiden välttämiseksi.

a) Laske seuraavat kompleksilukujen laskutoimitukset, kun  $z_1 = 3 \cdot i + 5$  ja  $z_2 = 2 - i$ .

$$z_1 + \overline{z_2} = \text{[input]}$$

$$z_1 z_2 = \text{[input]}$$

b) Muunna kompleksiluku  $z_3 = 2 \cdot i - 2$  napakoordinaattiesityksen eksponenttimuotoon  $z_3 = r e^{i\theta}$ .

Valitse vaihekulma väliltä  $[-\pi, \pi]$ . Neliöjuuren saat tarvittaessa komennolla  $\text{sqrt}(x)$  ja luvun  $\pi$  kirjoittamalla pi.

$$z_3 = \text{[input]} \cdot \exp(i \cdot \text{[input]})$$

c) Ratkaise kompleksiluku  $z$  ja sen kaikki kolmannet juuret, kun yksi kolmas juuri on  $w_0 = \sqrt[3]{4} e^{i \frac{\pi}{12}}$ .

Juuren  $\sqrt[n]{x}$  voit kirjoittaa vastaukseen potenssimuodossa  $x^{1/n}$ . Käytä vain positiivisia vaihekulman arvoja.

$$z = \text{[input]} \cdot \exp(i \cdot \text{[input]})$$

$$w_0 = \sqrt[3]{4} e^{i \frac{\pi}{12}}$$

$$w_1 = \text{[input]} \cdot \exp(i \cdot \text{[input]})$$

$$w_2 = \text{[input]} \cdot \exp(i \cdot \text{[input]})$$

Tarkista

**Kuva 7.1.** Kompleksilukuihin liittyvä tenttitehtävä

## 7.1 Kokemuksia itseopiskelumateriaalista

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen

1. Millainen kompleksilukujen itseopiskelumateriaali edistää oppimista ja sopeutumista yliopistomatematiikan opiskeluun?

tavoitteena oli selvittää valmistellun kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin toimivuutta ja kehityskohteita. Itseopiskelumateriaali sai paljon kehuja tutkimuskyselyssä, mutta myös kehityskohteita nousi esille. Suunnittelussa ja kehittämisessä kiinnitettiin huomiota erityisesti itseopiskelumateriaalin selkeään prosessitavoitteita sisältävään rakenteeseen, joka tukisi siirtymävaiheen opiskelijoita itsenäisen opiskelun taitojen muokkaamisessa ja kehittämisessä yliopisto-opiskeluun sopivaksi. Kompleksiluvut pyrittiin jakamaan valmiiksi selkeisiin kokonaisuuksiin, joka helpottaisi uuden lukujoukon omaksumista. Näiden tavoitteiden täyttymistä kartoitettiin tutkimuskyselyssä väittämällä, joihin vastattiin Likert-asteikolla. Vastaukset on esitetty taulukossa 7.1.

Enemmistö vastaajista oli täysin samaa mieltä tai osittain samaa mieltä siitä, että itseo-

**Taulukko 7.1.** Vastaukset tutkimuskyselyn väittämiin koskien itseopiskelumateriaalia ja tuen saamista opetustilaisuuksissa (61 vastaajaa)

Väittäjä	Täysin eri mieltä	Osittain eri mieltä	Ei samaa eikä eri mieltä	Osittain samaa mieltä	Täysin samaa mieltä
Itseopiskelumateriaalin avulla opiskelu oli helppoa.	1	7	8	27	18
Itseopiskelumateriaalin sisällöt olivat haastavia.	4	11	18	26	2
Itseopiskelumateriaalin opiskelu vaati paljon aikaa.	2	12	8	28	11
Itseopiskelumateriaalin rakenne oli selkeä.	0	4	8	16	33
Itseopiskelumateriaalin tapa esittää opiskeltavat asiat oli ymmärrettävä.	1	4	7	28	21
Sain tarpeeksi tukea opiskeluun opetustilaisuuksissa.	1	12	10	22	16

piskelumateriaalin rakenne oli selkeä (80,3 %) ja sen avulla opiskelu oli helppoa (73,8 %). Kompleksilukujen kokonaisuuden jakaminen osiin ja materiaalin osien sijoittelu oppimisolustalle niin, että opiskelija pystyi etenemään oppimisolustalle järjestyksessä, vaikuttaa siis olleen järkevä ratkaisu. Suuri osa vastaajista (80,3 %) oli ainakin osittain samaa mieltä siitä, että itseopiskelumateriaalin tapa esittää opiskeltavat asiat oli ymmärrettävä, joten dioja ja opetusvideoita voidaan pitää onnistuneina.

Itseopiskelumateriaalin sisältöjen haastavuuden kokemus jakaantui jonkin verran vastaajien keskuudessa. Oppimisen lähikehityksen vyöhykkeen [46] näkökulmasta on hyvä, että haastavuuden kokemus tutkimuskyselyssä ei painotu selkeästi kumpaankaan ääripäähän. Jokaisella opiskelijalla on yksilölliset vahvuudet ja heikkoudet, joihin itseopiskelumateriaali ei välttämättä pysty vastaamaan, mutta vaikuttaa siltä, että itseopiskelumateriaalin haastavuus ei ole ollut liian korkea eikä matala, sillä 45,9 % koki sisällöt jollakin tasolla haastaviksi ja 24,6 % oli ainakin osittain eri mieltä. Siitä huolimatta vain 62,3 % oli osittain tai täysin sitä mieltä, että sai tarpeeksi tukea opiskeluun opetustilaisuuksissa. Laskuharjoitustilaisuus toteutettiin etäyhteydellä isolle joukolle opiskelijoita, joten siellä yksilöllisen tuen saaminen oli haastavaa, mutta Prime time -tilaisuudet olivat pienissä 6 hengen tutorryhmissä. Viikkotuntimäärällisesti tuki näissä tilaisuuksissa tosin oli vain 4 tuntia, mikä on todennäköisesti vähemmän kuin aiemmissa opinnoissa. Opetustilaisuuksien lisäksi opiskelijoilla oli kuitenkin mahdollisuus käydä vapaaehtoisessa laskutuvassa.

Suuri osa vastaajista (80,3 %) oli täysin samaa mieltä tai osittain samaa mieltä siitä, että itseopiskelumateriaalin opiskelu vaati paljon aikaa. On hyvin todennäköistä, että itseopiskelumateriaalin opiskeluun on kulunut useampia tunteja Prime time -tilaisuuden ja laskuharjoitustilaisuuden lisäksi. Opiskeltavan sisällön laajuuden ja tehtävien lukumäärän osalta itseopiskelumateriaali vastaa kuitenkin opintojakson muiden viikkojen työmäärää. Väittämien vastauksissa korostuu varmasti se, että opiskelijat olivat juuri aloittaneet yliopisto-opinnot ja opiskelleet vasta noin 1–2 viikkoa yliopistossa vastaamisen hetkellä. Yliopistossa opiskeltavaa sisältöä on enemmän ja se on haastavampaa verrattuna aiempiin opintoihin [26], mikä voi tuntua aluksi suurelta muutokselta, kuten ”Miksi ja millaiseksi DI:ksi?” -hankkeessa havaittiin [42].

Itseopiskelumateriaalista pyydettiin palautetta myös tutkimuskyselyn avoimissa kysymyksissä. Vastauksissa esiintyi paljon mainintoja itseopiskelumateriaalin toimivasta rakenteesta ja oppimista edistävästä osa-alueista, mutta niissä esitettiin myös kehitysehdotuksia. Itseopiskelumateriaalin eniten oppimista edistäneeksi osaksi osoittautui opetusvideot (75,4 %), mutta myös perustehtävät ja syventävät tehtävät (63,9 %) saivat suuren kannatuksen. Taulukkoon 7.2 on koottu vastauksista teorian ja aineiston ohjaamana syntyneiden luokkien jakauma. Joissakin vastauksissa keuhuttiin yleisesti itseopiskelumateriaalia ja sen osia, mutta luokittelussa huomioitiin vain vastauksissa nimeltä mainitut osa-alueet.

**Taulukko 7.2.** Teoriaohjaavan sisällönanalyysin perusteella luokitellut vastaukset kysymykseen: *Mitkä itseopiskelumateriaalin osat (johdantotehtävät, opetusvideot, käsitteenmuodostustehtävät videoissa, diat, perustehtävät, syventävät tehtävät, malliratkaisut, itsearviointi, ohjeistukset yms.) edistivät oppimistasi? Miksi? (61 vastaajaa)*

Vastauksen luokka	Frekvenssi
Johdantotehtävät	3
Opetusvideot	46
Käsitteenmuodostustehtävät	8
Diat	28
Laskuesimerkit	8
Perustehtävät ja syventävät tehtävät	39
Malliratkaisut	16
Itsearviointi	5

Opetusvideoiden ja tehtävien tekemisen yhteys oppimiseen oli odotettavaa aiempien tutkimuksen perusteella [53]. Vastauksien perusteella opetusvideot ja tehtävät on toteutettu onnistuneesti. Johdantotehtävät (4,9 %) ja käsitteenmuodostustehtävät (13,1 %) eivät saaneet erityishuomiota vastauksissa. Johdantotehtävillä on kuitenkin olennainen osa itseopiskelumateriaalin rakenteessa ja motivoinnissa. Käsitteenmuodostustehtävät puolestaan tehostavat aktiivista ajattelua [46] opetusvideoissa, kuten eräät vastaajat kommentoivat: ”pitivät ns valppaana”, ”toivat oppimiseen interaktiivisen puolen myös kotona” ja

”auttoivat hahmottamaan sitä, että ymmärsikö asian oikeasti”. Moni kertoi käyttäneensä dioja (45,9 %) apuna tehtävien teon aikana, sillä niihin oli helppo palata tarkistamaan asia tai katsomaan mallia laskuesimerkeistä (13,1 %). Malliratkaisut (26,2 %) ja itsearviointi (8,2 %) edistivät myös osaltaan oppimista. Itsearvioinnin hyvänä puolena saattoi myös olla, että ”omiin virheisiin tulee tutustuttua tarkemmin, mikä myös opettaa jatkoa ajatellen”. Lisäksi eräs opiskelija tiivistä mielestäni hienosti itseopiskelumateriaalin eri osien vaikutuksen oppimiseen:

”Opetusvideot antoivat hyvän pohjan tehtävien tekemiseen ja dioista oli myös hyvä palata katsomaan apua, jos tehtävä ei heti meinannut sujua. Perustehtävillä oli hyvä opetella aihetta ennen vaikeampia syventäviä tehtäviä, joissa oli jo vähän enemmän haastetta, mutta ei kuitenkaan liian vaikeita. Malliratkaisutkin olivat hyvät, ja niistä näki jos jonkin asian olisi voinut tehdä eri tavalla tai jos jokin meni pieleen.”

Itseopiskelumateriaali sai edellä paljon positiivista palautetta, mutta kehitysehdotuksia kysyttäessä kävi ilmi, että itseopiskelumateriaaliin kaivattaisiin enemmän laskuesimerkkejä ja harjoitustehtäviä (taulukko 7.3). Muutama opiskelija koki, että teoria voisi olla selitetty perusteellisemmin opetusvideoilla ja dioissa, jotta uusi lukujoukko ja sen ominaisuudet olisi helpompi ymmärtää. Toisaalta opetusvideoita ja dioja kuvattiin aiemmin sanoilla ”selkeitä ja helposti ymmärrettäviä”, kun kysyttiin itseopiskelumateriaalin oppimista edistäviä osia (taulukko 7.2). Vastausten ristiriitaisuus selittyy todennäköisesti siis opiskelijoiden taitotasojen ja matemaattisen ajattelun eroina. Vastaavasti samasta syystä vaihteli varmasti myös toivottujen lisätehtävien vaatimustaso perustehtävistä vielä haastavampiin tehtäviin.

**Taulukko 7.3.** *Itseopiskelumateriaalin kehitysideoita luokiteltuna tutkimuskyselyn avoimesta kysymyksestä: Miten kehittäisit itseopiskelumateriaalia vastaamaan paremmin uuden yliopisto-opiskelijan tarpeita? (61 vastaajaa)*

Vastauksen luokka	Frekvenssi
Perusteellisempi teorian selitys	6
Enemmän laskuesimerkkejä	10
Enemmän perustehtäviä	5
Enemmän syventäviä tehtäviä	2
Haastava tehtävä lisäksi	2
Vapaaehtoisia tehtäviä lisäksi	3
Malliratkaisut heti saatavilla	2
STACK-tehtäviin enemmän vinkkejä	2
Kompleksilukujen sovellukset	1

Pari opiskelijaa ehdotti, että malliratkaisut olisivat heti saatavilla, jolloin voisi katsoa niis-

tä mallia, jos jää tehtävässä jumiin. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista formatiiviseen arviointiin perustuvalla opintojaksolla, jossa tehtävistä saa opintojakson arviointiin vaikuttavia pisteitä. Malliratkaisujen jakamisen riskinä olisi myös ratkaisujen katsominen liian matalalla kynnyksellä pohtimisen sijaan. Jos opiskelija jää jumiin tehtävässä, hän voi katsoa apua dioista, joissa on vastaavia laskuesimerkkejä tai kysyä apua Prime time -tilaisuudessa, laskuharjoitustilaisuudessa tai laskutuvassa.

Pari opiskelijaa huomautti, että STACK-tehtävä voisi antaa enemmän opastavia vinkkejä, jos tehtävä menee väärin. Tällä hetkellä STACK-tehtävä antaa saman palautteen joka kerta, kun tehtävä menee väärin. Palautteessa kerrotaan, miten tehtävä pitäisi ratkaista, mutta se ei pysty analysoimaan opiskelijan vastausta ja kertomaan, millainen virhe on kyseessä. Muuttamalla tentin kysymysten toimintatavaksi ”interaktiivinen, monta suorituskertaa” olisi mahdollista antaa erilaisia palautteita tehtävän mennessä väärin useamman kerran [32].

Eräs opiskelija nosti esille kompleksilukujen sovellukset pohtimalla jonkinlaista motivointia kompleksilukujen opiskeluun:

”Esim. minkälaisia sovelluksia niillä on matematiikassa, entä fysiikassa? Nyt kompleksiluvut jäi vähän mystiseksi matematiikan osa-alueeksi, josta ei tunnu olevan hyötyä käytännön laskuissa.”

Itseopiskelumateriaalin alussa olevan johdannon tarkoitus oli motivoida kompleksilukujen opiskeluun osoittamalla kompleksilukujen tarpeellisuus esimerkiksi toisen yhtälöitä ratkaistaessa. Tämä on tietysti vain yksi esimerkki eikä vielä kovin lähellä käytäntöä. Tämän lisäksi johdannossa mainittiin sanallisesti muutamia sovelluskohteita, mutta niihin ei paneuduttu yhtään tarkemmin, sillä itseopiskelumateriaalin tarkoituksena oli nimenomaan ottaa haltuun kompleksiluvut laskennallisena työvälineenä, jotta differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen onnistuisi kyseisellä opintojaksolla.

On mahdollista, että tarkempi sovellusten esittely saattaisi motivoida opiskelemaan kompleksilukuja, mutta tämän materiaalin valmistelussa siihen ei ollut resursseja. Näin ollen on mahdollista, että kompleksiluvut ovat itseopiskelumateriaalin opiskelleille edelleen hievan mystinen ja abstrakti matematiikan osa-alue. Tämä on havaittu ongelmaksi parissa aiemmassakin tutkimuksessa [33] [36], kun kompleksilukuja on opetettu matematiikan opintojaksoilla. Ratkaisuna olisi nimenomaan huomion kiinnittäminen sovelluskohteiden havainnollistamiseen, mutta siihen olisi valmistettava oma havainnollistusmateriaali.

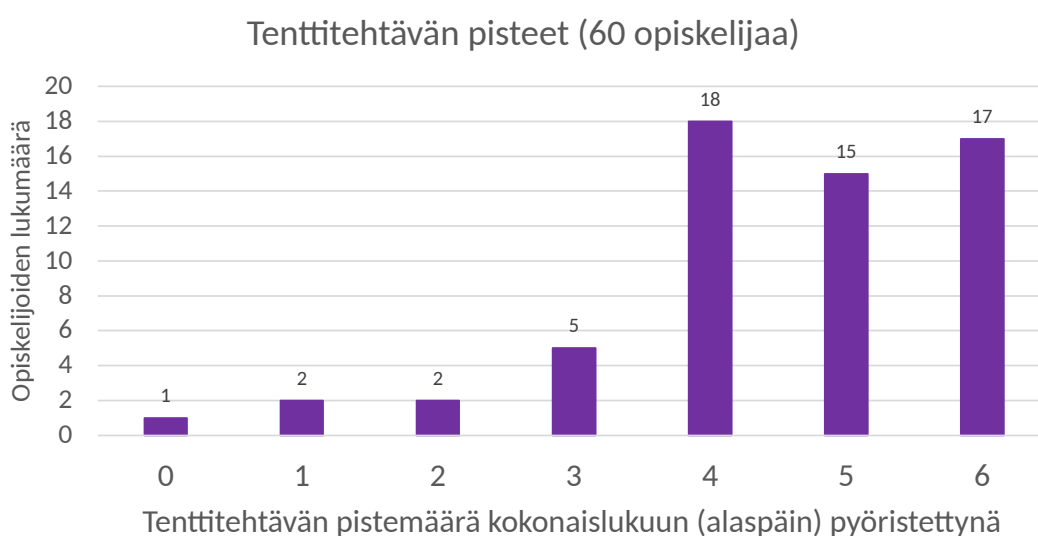
Kompleksilukujen kokonaisuuteen sisältyi kompleksilukujen ominaisuuksia ja laskutoimintuksia, napakoordinaattimuodon ja eksponenttimuodon harjoittelua sekä kompleksiluvun juurien selvittämistä ja kompleksiseen polynomiin tutustumista. Matemaattisia taitoja ja ajattelua haastetaan siis monella eri osa-alueella, joiden hallitseminen saattaa vaihdella opiskelijakohtaisesti. Aiemmissa tutkimuksissa [33] [36] [54] huomattiin, että kompleksi-

lukujen laskutoimitukset, napakoordinaattiesitys ja kompleksiluvun juuret tuottavat usein haasteita opiskelijoiden keskuudessa. Taulukossa 7.4 on esitetty tutkimuskyselyn vastaukset haastavina koettuihin osa-alueisiin. Opiskelijoiden vastauksissa korostuivat eksponenttimuoto (57,4 %), kompleksiluvun juuret (42,6 %), kompleksinen polynomi (41,0 %) ja napakoordinaattimuoto (37,7 %). Laskutoimitukset eivät opiskelijoiden omien kokemusten perusteella olleet erityisen haastavia (8,2 %).

**Taulukko 7.4.** Vastaukset tutkimuskyselyn monivalintakysymykseen: Mitkä kompleksilukujen osa-alueet koit haastaviksi? (Voit valita useita) (61 vastaajaa)

Vaihtoehto	Frekvenssi
Tulkinta kompleksitasossa	2
Laskutoimitukset	5
Liittoluku	1
Itseisarvo	2
Napakoordinaattimuoto	23
Eksponenttimuoto	35
Kompleksiluvun juuret	26
Kompleksinen polynomi	25
Ei mikään edellisistä	3

Opiskelijoiden omien kokemusten lisäksi on syytä tarkastella myös tenttitehtävän (kuva 7.1) pistejakaumaa, joka on esitetty kuvassa 7.2. Tenttitehtävän keskiarvo oli 4,73 pistettä tehtävän maksimipistemäärän ollessa 6 pistettä ja tyypillisin pistemäärä kokonaislukuun (alaspäin) pyöristettynä oli 4.



**Kuva 7.2.** Kompleksilukuihin liittyvän tenttitehtävän pistejakauma

Vaikuttaa siis siltä, että kompleksilukujen kokonaisuus on onnistuttu ottamaan aika hy-

vin haltuun itseopiskelumateriaalin avulla. Oppilaiden matemaattisesta taitotasosta ja ennakkotiedoista kompleksilukuihin liittyen ei ole tietoa, joten tuloksiin kannattaa suhtautua pienellä varauksella. Lisäksi pitää muistaa, että opiskelijat ovat saaneet apua opiskeluun Prime time -tilaisuuksissa, laskuharjoitustilaisuuksissa ja laskutuvassa sekä voineet vapaasti hankkia itse lisätietoa kirjallisuudesta tai internetistä. Onnistunut ja toimiva itseopiskelumateriaali ei siis ole välttämättä ainoa syy hyviin tenttituloksiin etenkin, kun tenttitehtävän todellisesta vaikeustasosta ei ole todisteita.

Tenttitehtävää suunniteltaessa alakohdat pyrittiin kuitenkin valitsemaan niin, että se testaisi osaamista mahdollisimman monipuolisesti. Tenttitehtävän a- ja b-kohta olivat hyvin samantyyppisiä laskutoimituksiin ja napakoordinaattiesityksen eksponenttimuotoon liittyvien itseopiskelumateriaalin tehtävien kanssa. c-kohta oli hieman eri tyyppinen kuin itseopiskelumateriaalissa ja testasi mekaanisen toistamisen sijaan ymmärrystä kompleksiluvun juurista, johon oli panostettu itseopiskelumateriaalissa havainnollistamalla ja johtamalla kompleksisen juuren laskukaava.

Tenttitehtävä oli automaattitarkasteinen. Näin ollen vastauskenttään syötetty vastaus tulkittiin joko oikeaksi tai vääräksi, välimuotoja ei ollut. Tenttitehtävän oikeiden vastausten lukumäärä ja pistemäärät vastauslaatikoittain on esitetty taulukossa 7.5. Vaikeimmaksi osa-alueeksi osoittautui kompleksiluvun vaihekulman ratkaiseminen eksponenttimuotoa muodostettaessa (65,0 % osasi). Myös tutkimuskyselyssä opiskelijat valitsivat eksponenttimuodon vaikeimmaksi osa-alueeksi (taulukko 7.4). Lisäksi napakoordinaattimuodon on havaittu tuottavan haasteita myös aiemmissä tutkimuksissa [33] [36]. Vaihekulman määrittämisen haastavuutta saattaa selittää myös se, että tenttitehtävän kompleksiluku ei sijainnut kompleksitason ensimmäisessä vaan toisessa tai neljännessä neljänneksessä.

**Taulukko 7.5.** Oikean vastauksen tuottama pistemäärä ja oikeiden vastausten lukumäärä vastauslaatikoittain kompleksilukuihin liittyvässä tenttitehtävässä (60 opiskelijaa)

Vastauslaatikko	Pisteet	Oikein
a) Kompleksilukujen summa $z_1$ ja $\bar{z}_2$	0,75	55
a) Kompleksilukujen $z_1$ ja $z_2$ tulo	0,75	51
b) Kompleksiluvun $z_3$ itseisarvo eksponenttimuodossa	1,00	56
b) Kompleksiluvun $z_3$ vaihekulma eksponenttimuodossa	1,00	39
c) Potenssiin korotetun kompleksiluvun $z$ itseisarvo	0,50	49
c) Potenssiin korotetun kompleksiluvun $z$ vaihekulma	0,50	42
c) Kompleksiluvun kolmannen juuren $w_1$ itseisarvo	0,25	47
c) Kompleksiluvun kolmannen juuren $w_1$ vaihekulma	0,50	43
c) Kompleksiluvun kolmannen juuren $w_2$ itseisarvo	0,25	46
c) Kompleksiluvun kolmannen juuren $w_2$ vaihekulma	0,50	46

Yleisesti ottaen parhaiten hallittiin kompleksiluvun itseisarvo (93,3 %) eksponenttimuotoa

muodostettaessa ja kompleksilukujen laskutoimitukset (summa 91,6 % ja tulo 85,0 %). Kompleksiluvun potenssiin korottamisessa vaihekulma aiheutti haasteita (70,0 % osasi), mutta itseisarvo oli helpompi (81,7 % osasi). Myös kompleksiluvun juurien tapauksessa itseisarvo (76,7 % / 78,3 %) oli osattu paremmin kuin vaihekulma (71,7 % / 76,7 %). Myös näiden osa-alueiden haastavuus on linjassa opiskelijoiden omien kokemusten (taulukko 7.4) ja aiempien tutkimusten [33] [36] [54] kanssa.

## 7.2 Haasteet yliopistomatematiikan opiskelun alkuvaiheessa

Toisen tutkimuskysymyksen

2. Mitkä asiat opintojaan aloittavat opiskelijat kokevat haastaviksi yliopistomatematiikan opiskelussa?

päämääränä oli kartoittaa yliopistomatematiikan opiskelun aloittamiseen liittyviä haasteita. Tunnistettuja haasteita huomioidaan itseopiskelumateriaalin jatkokehittämisessä, jotta itseopiskelumateriaali edistäisi paremmin oppimista.

Yliopistomatematiikan opiskelun aloittamiseen liittyviä haasteita kartoitettiin toisessa tutkimuskyselyssä, johon vastattiin noin 7–8 viikkoa opintojen aloittamisen jälkeen. Tutkimuskyselyn väittämien perusteella kokemukset aloittamisen haasteista jakautuvat molempien ääripäiden välille, kuten taulukosta 7.6 voi huomata. Melkein puolet (48,0 %) vastaajista on kokenut yliopisto-opintoihin sopeutumisen jollain tasolla haastavaksi ja vajaa puolet (42,0 %) on ainakin osittain toista mieltä.

**Taulukko 7.6.** Kokemuksia yliopisto-opintojen aloittamisesta noin 7–8 viikkoa opintojen aloittamisen jälkeen (50 vastaajaa)

Väittämä	Täysin eri mieltä	Osittain eri mieltä	Ei samaa eikä eri mieltä	Osittain samaa mieltä	Täysin samaa mieltä
Olen kokenut yliopisto-opintoihin sopeutumisen haastavaksi.	4	17	5	18	6
Yliopisto-opintojen aloittaminen oli minulle suuri elämänmuutos.	1	6	7	24	12
Olen saanut riittävästi tukea opintojen aloittamiseen.	1	2	7	30	10
Opetusjärjestelyt ovat olleet erilaisia kuin oletin.	2	8	7	27	6

Iso osa vastaajista (72,0 %) on kokenut, että yliopisto-opintojen aloittaminen on muuttanut ainakin osittain heidän elämäänsä. Suureksi elämänmuutokseksi yliopisto-opintojen aloittamista kuvasi noin neljännes (24,0 %) vastaajista, mikä saattaa olla yhteydessä yliopisto-

opintoihin sopeutumiseen [2, ss. 318–347]. Positiivista on kuitenkin, että suurin osa (80,0 %) on saanut riittävästi tukea opintojen aloittamiseen.

Opetusjärjestelyt olivat monien (66,0 %) mielestä erilaisia kuin he olivat olettaneet. Vastaustaan sanallisesti tarkensi 10 opiskelijaa ja heistä 7 mainitsi "flippauksen", jota käytetään puhekielessä yleisesti tarkottamaan käänteistä opetusta, käänteistä oppimista tai niiden yhdistelmää. Sosiokonstruktivistiseen oppimiskäsitykseen luokiteltavat käänteisen opetuksen ja käänteisen oppimisen menetelmien [22] [57] hyödyntäminen on vasta yleistyessä ja behavioristiselle oppimiskäsitykselle tyypillisiä luentoja [22] järjestetään edelleen monilla kursseilla, joten kyseisen etenkin kyseisen opintojakson opetusjärjestelyt ovat tosiaan saattaneet yllättää. Tämä saattaa näkyä haasteina opintojen alussa, sillä opetusmenetelmä on heille uusi ja vaatii totuttelua, mutta toisaalta käänteiselle opetukselle ja oppimiselle tyypillinen formatiivinen arviointi saattaa kannustaa opiskelemaan tasaisesti opintojakson aikana ja näin helpottaa uusien opintojen aloittamista:

"Itse olen ainakin muuttanut mieltäni flippauksesta. Aluksi se tuntui aika hirveälle, kun oli niin paljon itsenäistä tekemistä ja joka viikko tosi monta deadlinea. Mutta nyt tenttiviikolla olen niin tyytyväinen, että kurssin aikana on tehty paljon tehtäviä. On nimittäin ihan erilainen fiilis mennä nyt matikan tenttiin, kuin esimerkiksi fysiikan tenttiin, joka oli luento-opetuksena. Nyt tenttiviikolla riittää muutenkin matikan osalta vain se, että kertailee asiat suht nopeasti."

Lisähaastetta uuteen opetusmenetelmään sopeutumiseen voi kuitenkin tuoda puutteelliset opiskelutaidot [2, ss. 122–150], sillä käänteisen opetuksen ja käänteisen oppimisen yhdistelmässä teoria on opiskeltava itsenäisesti [53]. Toisaalta käänteiselle opetukselle ja käänteiselle oppimiselle tyypilliset pienryhmätilaisuudet eli Prime time -tilaisuudet ovat olleet oivia hetkiä edistämään yliopistoon sopeutumista vuorovaikutuksen ja yhdessä oivaltamisen ansiosta [16]. Uuden elämäntilanteen, uusien opetusmenetelmien ja itsenäisemmän opiskelun lisäksi yliopisto-opintojen aloittamisessa on yleensä totuteltava sisältöjen laajuuteen ja haastavuuteen [4] [42] sekä moneen muuhun asiaan. Lisämausteensa yliopistomatematiikan opiskeluun voi tuoda sen abstraktius [4]. Taulukko 7.7 havainnollistaa, mitkä asiat tekivät yliopistomatematiikan opiskelusta haastavaa toiseen tutkimuskyselyyn vastanneiden opiskelijoiden mielestä.

Eniten haastetta aiheuttaneiksi asioiksi tutkimuskyselyssä nimettiin odotetusti sisältöjen haastavuus (54,0 %) ja laajuus (58,0 %) sekä kiireen tuntu (58,0 %). Toisaalta yliopistossa opiskeltavien kokonaisuuksien kuuluu olla laajempia ja haastavampia, sillä yliopistot tarjoavat ylintä opetusta. Oppimisen eteen on nähtävä itse enemmän vaivaa, mikä näkyy myös ajankäytössä ja voi aiheuttaa aluksi kiireen tuntua. Myös opiskelun ja vapaa-ajan erottaminen (50,0 %), opiskelun aikatauluttaminen (48,0 %) ja stressi (44,0 %) aiheutti monilla haasteita. Aiemmissa opinnoissa opiskelijoilla on todennäköisesti ollut selkeä luku- ja järjestys, mutta näin ei ole vaan opiskelusuunnitelma on tehtävä itse. Aluksi nämä saat-

**Taulukko 7.7.** Vastaukset noin 7–8 viikkoa opintojen aloittamisen jälkeen täytetyn tutkimuskyselyn monivalintakysymykseen: Mitkä seuraavista ovat tehneet yliopistomatematiikan opiskelusta haastavaa? (Voit valita useita) (50 vastaajaa)

Vaihtoehto	Frekvenssi
Sisältöjen haastavuus	29
Sisältöjen laajuus	27
Abstraktius	13
Teoreettisuus	15
Suuri tehtävien määrä	10
Pieni tehtävien määrä	1
Stressi	22
Kiireen tuntu	29
Puutteelliset opiskelutaidot	15
Pakollisen kontaktiopetuksen määrä	12
Itsenäisen opiskelun suuri määrä	18
Vastuu omista opinnoista	11
Motivaatio	9
Opiskelun aikatauluttaminen	24
Opiskelun ja vapaa-ajan erottaminen	25
Yksinäisyys	3
Jokin muu	3
Ei mikään edellisistä	0

tavat aiheuttaa stressiä ja voivat vaikeuttaa opiskelua sekä vapaa-ajalla rentoutumista, kuten opiskelijat kuvasivat vastauksissaan kysyttäessä tuntemuksista yliopisto-opintojen alussa 1–2 viikkoa opintojen aloittamisen jälkeen:

”Yliopisto-opiskelu vaikuttaa haastavalta, mutta uskon että pärjään hyvin. Esimerkiksi lukioon verrattuna, aihealueet ovat paljon vaikeammat.”

”Opiskelu vie suunniteltua enemmän aikaa.”

”Aika ei meinaa riittää tehdä kaikkia matematiikan tehtäviä.”

”Ainakin nyt alussa aikataulutus tuntuu haastavalta, kun ei vielä osaa arvioida kuinka paljon aikaa tarvitsen mihinkin asioihin.”

”Omasta opiskelusta täytyy ottaa enemmän vastuuta, sillä joutuu suunnittelemaan, mitä opiskelee milloinkin ja kuinka paljon.”

”Pehmeää laskua ei tosiaan ole.”

”Itselle haastavinta on ollut se, että ei ole tiettyjä säännöllisiä aikoja opiske-

lulle, vaan opiskelu ja vapaa-aika sekottuu helposti. Kun periaatteessa voi opiskella missä vain ja milloin vain, tulee usein huono omatunto silloin kun en opiskele.”

”Aiemmat opinnot olivat enemmän rutiinin omaisia, mutta myös yliopisto-opiskelu muuttuu sellaiseksi toivottavasti kun vain saa muodostettua toimivan rutiinin.”

”Teorian itseopiskelu tuntuu raskaalta. Tuntuu, ettei saa tarpeeksi ohjausta ja perehdytystä mihinkään uuteen asiaan. Ehkä tämä on vain tottumiskysymys, koska lukiossa asiat olivat erilailla, mutta tällä hetkellä tämänlaisia tuntemuksia.

”Tällä hetkellä tuntuu kuitenkin siltä, että kun näkee vaivaa, pääsee kyllä kursseista kunnialla läpi.”

Siirtymävaiheen tuomat haasteet eivät ole pelkästään huono asia, sillä ne voivat toimia sopivana rakentavana jännitteenä [26, ss. 70–99] kehittämään tärkeitä taitoja myös työelämää ja sinne siirtymistä ajatellen. Edellä mainittujen lisäksi tärkeitä, mutta aluksi haastavia, taitoja ovat esimerkiksi itsenäisyys ja vastuun kantaminen. Näitä ajatellen rakentavana jännitteenä voi toimia myös itsenäisen opiskelun suuri määrä (36,0 %) ja vastuu omista opinnoista (22,0 %), jotka aiheuttivat jonkin verran haastetta. Onkin positiivista huomata, että 7–8 viikon kohdalla tuntemuksia kysyttäessä monissa vastauksissa oli havaittavissa positiivisempaa suhtautumista yliopisto-opintoihin:

”Tottunut työmäärään.”

”Rytmiin päässyt mukaan.”

”Uusiin rutiineihin ja opiskelumenetelmiin on päässyt kiinni, niin opiskelu tuntuu ihan mukavalta.”

”Aiempiin opintoihin verrattuna se on paljon joustavampaa, mutta taas toisaalta työläämpää, koska itsenäistä opiskelua on paljon.”

”Ensimmäisen periodin aikana olen tajunnut kuinka tärkeää on suunnitella ajankäyttöä ja pitää huolta siitä, että vapaa-aikaa riittää.”

Vaikuttaa siltä, että opiskelijoiden mielestä suuremman haasteen yliopistomatematiikan opiskeluun toivat siirtymävaiheeseen liittyvät muutokset ja niihin sopeutuminen kuin itse yliopistomatematiikan opiskelu. Abstraktius (26,0 %), teoreettisuus (30,0 %), suuri tehtävien määrä (20,0 %), pieni tehtävien määrä (2,0 %), puutteelliset opiskelutaidot (30,0 %) ja pakollisen kontaktiopetuksen määrä (24,0 %) olivat pienemmälle osalle opiskelijoista haastavuutta aiheuttavia tekijöitä. Yliopistomatematiikan abstraktius ja teoreettisuus voivat aluksi yllättää samoin kuin harjoitustehtävien määrä verrattuna esimerkiksi lukiomate-

matiikkaan. Lisäksi melkein kolmanneksella opiskelijoista olevat puutteelliset opiskelutaidot näkyvät tietysti myös matematiikan oppimisessa.

Melkein viidennes (18,0 %) raportoi myös motivaatio-ongelmista yliopistomatematiikan opiskelun haasteena. Tämä on siinä mielessä erikoista, että Differentiaali- ja integraalilaskennan opintojaksolle osallistuneet ja tutkimuskyselyyn vastanneet opiskelijat ovat haakuneet teknis-luonnontieteelliselle alalle. Tyypillisimmät pääainevaihtoehdot alalla ovat matematiikka, fysiikka, kemia tai tietotekniikka, joten matematiikalla on hyvin merkittävä rooli kaikissa vaihtoehdoissa. Toisaalta yliopistomatematiikan teoreettisuus ja abstraktius on saattanut yllättää negatiivisesti ja vaikuttaa motivaatioon opiskella matematiikka ja kyseistä alaa. Kysymykseen vastaamisen hetkellä opiskelijat olivat opiskelleet yliopistossa noin 7–8 viikkoa, joten ajatukset yliopistomatematiikasta tai teknis-luonnontieteellisestä itselle sopivana alana ovat voineet muuttua negatiiviseen suuntaan alkuvaiheen opintojen perusteella.

Muutama opiskelija kertoi yksinäisyyden (6,0 %) tehneen yliopistomatematiikan opiskelusta haastavaa. Tämä on erittäin valitettavaa. Käänteisen opetuksen ja käänteisen oppimisen menetelmien ansiosta opiskelijoilla oli kuitenkin enemmän mahdollisuutta yhteisölliseen oppimiseen kuin luentototeutuksella. Kyseisellä opintojaksolla viikottain Prime time -tilaisuus, johon osallistuttiin aina saman tutor-ryhmän kanssa, ja ryhmässä opiskeluun ja tehtävien tekoon kannustettiin. Laskuharjoitustilaisuus toteutettiin kuitenkin etäyhteydellä, mutta sielläkin tehtäviä laskettiin tutor-ryhmissä. Kääntöpuolena tutorryhmien hyödyntämisessä tosin on, jos henkilökemiat ja aikataulut opetustilaisuuksien ulkopuolella eivät kohtaa. Ryhmää on halutessaan kuitenkin ollut mahdollista vaihtaa. Opiskeluaiakataulujen kannalta poikkeavuutta muihin opiskelijoihin voi aiheuttaa esimerkiksi töissä käynti opintojen ohella, joka mainittiin vaihtoehdon ”jokin muu” sanallisessa tarkennuksessa.

Yliopisto-opintojen ja yliopistomatematiikan aloittamiseen liittyvät haasteet korostuivat taulukoissa 7.6 ja 7.7. On kuitenkin syytä huomata, että osalla opiskelijoista sopeutuminen sujui hyvin ja monet ovat onnistuneet kehittämään taitojaan vastaamaan yliopisto-opiskelun tarpeita alkuvaiheen haasteista huolimatta. Tätä havainnollistamaan opiskelijoiden vastaukset molemmissa tutkimuskyselyyn osissa esiintyneeseen kysymykseen: ”Miltä yliopisto-opiskelu tuntuu juuri nyt?” luokiteltiin ja vastaukset koottiin taulukkoon 7.8.

Taulukon 7.8 perusteella voi havaita, että 7–8 viikkoa yliopisto-opintojen aloittamisen jälkeen opiskelijoilla oli keskimäärin positiivisemmat tuntemukset yliopisto-opiskelusta kuin 1–2 viikkoa aloittamisen jälkeen. Osalla opiskelijoista tuntemus on pysynyt aika samana, mutta iso osa negatiivisia tai neutraaleita tuntemuksia ensimmäisessä kyselyssä kuvanneet opiskelijat suhtautuivat toisessa kyselyssä hieman positiivisemmin. Taulukosta 7.8 voi tarkastella kehityksen suuntaa, mutta lukuarvoihin kannattaa suhtautua pienellä varauksella, sillä joissakin tilanteissa vastauksien luokittelu oli haastavaa.

**Taulukko 7.8.** Tuntumuksia yliopisto-opiskelusta 1–2 viikkoa (T1) ja 7–8 viikkoa (T2) yliopisto-opintojen aloittamisen jälkeen luokiteltuna avoimista vastauksista (49 vastaajaa)

T1 \ T2	Loistava	Hyvä	Neutraali	Huono	Surkea	Yhteensä
Loistava	1	1	0	0	0	2
Hyvä	3	11	4	1	0	19
Neutraali	1	12	4	3	0	20
Huono	0	2	1	1	0	4
Surkea	0	1	2	0	1	4
Yhteensä	5	27	11	5	1	49

### 7.3 Tukikeinot yliopistomatematiikan opiskelun alkuvaiheessa

Kolmannen tutkimuskysymyksen

3. Miten opiskelijaa voidaan tukea opetusjärjestelyin siirryttäessä aiemmista opinnoista yliopisto-opiskeluun?

tarkoituksena oli tunnistaa siirtymävaiheeseen ja yliopisto-opintojen aloittamiseen liittyviä tukikeinoja, jotta ne voidaan ottaa huomioon itseopiskelumateriaaliin jatkokehittämisen vaiheessa ja näin helpottaa sopeutumista yliopisto-opiskeluun.

Tukikeinoja kartoitettiin tutkimuskyselyn toisessa osassa, kun opiskelijoilla oli noin 7–8 viikon kokemus yliopisto-opiskelusta. Tarkastellaan ensin käytössä olleiden opetusjärjestelyiden vaikuttavuutta tutkimuskyselyssä olleen monivalintakysymyksen avulla. Toimivimmiksi yliopistomatematiikan opiskelua tukeneiksi keinoiksi opiskelijat nimesivät opetusvideot (86,0 %), tehtävät (82,0 %) ja kaverin tai kavereiden kanssa opiskelun (82,0 %). Opetusvideoiden ja tehtävien hyöty oppimisessa on havaittu Tampereen yliopistossa aiemminkin tehdyn tutkimuksen perusteella [53]. Vastaukset on esitetty taulukossa 7.9.

Suosittuja oppimisen tukikeinoja olivat myös formatiivinen arviointi (68,0 %) ja Plussassa oleva opintomoniste (62,0 %). Formatiivinen arviointi antaa palautetta edistymisestä opintojakson aikana ja kannustaa opiskelemaan tasaisesti [1, ss. 19–24], mitkä ovat saattaneet auttaa yliopistomatematiikan opintojen alussa. Opintojakson opintomoniste oli saatavilla sekä PDF-tiedostona että Plussa-versiona. Plussa on Tampereen yliopiston tietotekniikan yksikön verkkopohjainen oppimisympäristö. Teoriasisällöiltään opintomonisteet olivat samanlaiset, mutta Plussan opintomonisteessa oli lisäksi aiheisiin liittyviä käsitteenmuodostustehtäviä ja mahdollisuus seurata omaa edistymistään. Plussan opintomoniste oli suositumpi, mutta myös PDF-versiolla on kannatuksensa (38,0 %). Oppiminen ja opiskelutavat ovat yksilöllisiä, joten jakautuminen on luonnollista. Opintomonisteiden PDF-versio mahdollistaa esimerkiksi omien muistiinpanojen ja korostuksien tekemisen tiedostoon, mikä saattaa edistää aktiivista ajattelua ja oppimista [46].

**Taulukko 7.9.** Vastaukset noin 7–8 viikkoa opintojen aloittamisen jälkeen täytetyn tutkimuskyselyn monivalintakysymykseen: *Mitkä seuraavista ovat tukeneet yliopistomatematiikan opiskelua? (Voit valita useita) (50 vastaajaa)*

Vaihtoehto	Frekvenssi
Opetusvideot	43
Tehtävät	41
Prime time -tilaisuudet	22
Laskuharjoitustilaisuudet	16
Ryhmätehtävät	19
Deadlinet	23
Kaverin tai kavereiden kanssa opiskelu	41
Positiivinen ilmapiiri	22
Laskutupa	5
Mahdollisuus valita milloin opiskelen	17
Opintomoniste (PDF)	19
Opintomoniste (Plussa)	31
Kurssikirja	0
Formatiivinen arviointi	34
Jokin muu	3
Ei mikään edellisistä	0

Prime time -tilaisuudet (44,0 %), deadlinet (46,0 %) ja positiivinen ilmapiiri (44,0 %) nähtiin myös hyödyllisinä tukikeinoina yliopistomatematiikan opiskelussa opiskelijoiden keskuudessa. Prime time -tilaisuudessa oli mahdollisuus kysyä epäselvistä asioista ja saada apua tehtäviin. Deadlineja opintojaksolla oli viikottain osana formatiivisen arviointia. Opintojakson avausluennolla ja Prime time -tilaisuuksissa kannustettiin kysymään rohkeasti apua ja korostettiin, että tyhmiä kysymyksiä ei ole, mikä on varmasti ollut yhteydessä positiiviseen ilmapiiriin oppimisen edistäjänä. Prime time -tilaisuuksissa tehtiin myös ryhmätehtäviä (38,0 %), jotka olivat osan mielestä tukeneet oppimista. Lisäksi niillä saattaa olla osansa positiivisen ilmapiirin muodostumisessa.

Laskuharjoitustilaisuudet (32,0 %) eivät tässä tutkimuskyselyssä saavuttaneet yhtä suurta suosiota kuin Prime time -tilaisuudet. Ero ei ole iso, mutta liittyy hyvin todennäköisesti ryhmäkokoihin ja toteutustapaan. Prime time -tilaisuudet toteutettiin pienryhmissä lähiopetuksena ja laskuharjoitustilaisuus oli etäyhteydellä kaikille yhtä aikaa. Yksilöllisen tuen saaminen laskuharjoituksissa haastavampaa. Laskutuvassa (10,0 %) se sen sijaan olisi ollut mahdollista, mutta vapaaehtoisena tilaisuutena sen kävijämäärät ja näin ollen myös vaikuttavuus jäivät pieneksi. Kurssikirjaa kukaan ei nimennyt opiskelua tukeneeksi välineeksi. Materiaalia oli aika kattavasti saatavilla opintojakson Moodlessa, joten on mahdollista, että kovin moni ei edes kirjan ääreen eksynyt.

Osa opiskelijoista (34,0 %) oli huomannut itsenäisen opiskelun tuoman joustavuuden aikatauluissa vaikuttaneen positiivisesti yliopistomatematiikan opiskeluun. Vaikka opintojaksolla käsiteltiin yksi aihekokonaisuus viikottain, opetustilaisuudet olivat määrättyinä ajankohtana ja formatiiviseen arviointiin liittyvät deadlinet ohjasivat opiskelua, opiskelijalla oli kuitenkin mahdollisuus valita itse milloin hän opiskelee. Tähän liittyen oli mahdollista valita myös opiskeluympäristö ja -tekniikat. Vaihtoehdon ”Jokin muu” tarkennuksessa tuotiinkin esille muistiinpanojen tekeminen, joka on hyvä ajattelevan oppimisen työkalu [46].

Käytössä olleiden opetusjärjestelyiden vaikuttavuuden lisäksi tutkimuskyselyssä selvitettiin avoimella kysymyksellä opiskelijoiden toiveita liittyen yliopisto-opintojen alkuvaiheen tukikeinoihin ja opetusjärjestelyihin. Sanallisista vastauksista luokitellut toiveet on esitetty taulukossa 7.10. Yleisin toive oli, että olisi enemmän lähiopetustilaisuuksia, joissa saa opettajalta apua tehtäviin (36,0 %). Aiemmissa opinnoissa opiskelu on tapahtunut pitkälti opettajan läsnä ollessa ja apua on ollut saatavilla vain kättä nostamalla, joten viikottain toteutettava kahden tunnin kestoinen Prime time -tilaisuus tuntuu varmasti vähältä.

**Taulukko 7.10.** *Yliopisto-opintojen alkuvaiheeseen toivottuja tukikeinoja luokiteltuna tutkimuskyselyn avoimesta kysymyksestä: Millaista tukea tai opetusjärjestelyitä toivoisit yliopisto-opintojen alkuvaiheessa? (50 vastaajaa)*

Vastauksen luokka	Frekvenssi
Lähiopetustilaisuuksia, joissa saa opettajalta apua tehtäviin	18
Vinkkejä opiskeluun ja aikatauluttamiseen	7
Palautusaikojen joustavuus	4
Opinto-ohjaus	3
Ohjeistuksien selkeys	2
Asteittainen aloitus	1

Sanallisissa vastauksissa nostettiin myös esille, että lähiopetustilaisuuksissa avun tarvisijoita oli monia ja yksittäisen opiskelijan ja opettajan kohtaamiselle jäävä aika oli lyhyt. Lähiopetustilaisuuden etuna nähtiin kuitenkin se, että ”pääsee tekemään tehtäviä porukassa”. Vapaaehtoisessa laskutuvassa tämä ei toteudu, jos muita saman tehtävän tekijöitä ei ole paikalla.

Yliopisto-opintojen alkuvaiheeseen liittyvistä toiveista selkeänä nousi esille myös erilaiset vinkit opiskeluun ja aikatauluttamiseen (14,0 %). Itsenäisen opiskelun tekniikat ja kalenterin käyttäminen saattavat olla osalle uusia asioita yliopistoon siirryttäessä. Lisäksi käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmät poikkeavat aiemmin totutusta. Jokaisen on löydettävä kokeilun kautta itselleen sopivat rutiinit ja opiskelutekniikat, mutta esimerkiksi vanhempien opiskelijoiden vinkkien kuuleminen tai muiden aloittavien opiskelijoiden kanssa ajatuksien vaihtaminen voisivat ehkä auttaa alussa. Eräs opiskelija ehdotti vastauksessaan keskustelua aiheesta Prime time -tilaisuuteen:

”Jossain vaiheessa ensimmäistä periodia voisi vaikka Primen keskustelutehtävänä olla, että minkälaisia opiskelutapoja on käyttänyt, ja mikä on toiminut.”

Opiskeluun ja aikatauluihin liittyen muutama opiskelija toivoi alkuvaiheen opinnoissa palautusaikojen joustavuutta (8,0 %) alkuvaiheen haasteisiin vedoten:

”Ehkä inasen enemmän joustavuutta deadlineihin yms. suorituksiin, koska ensimmäinen periodi on aikamoinen sekamelska.”

”Pientä luistavuutta palautus ajoissa. Joidenkin viikkojen tehtävissä menee huomattavasti pidempään kuin toisissa.”

On ymmärrettävää, että opintojen alussa moni asia voi tuntua sekavalta ja aikatauluja suunnitellessa voi olla vaikeaa arvioida, kuinka paljon aikaa tehtäviin kuluu, mutta isojen opiskelijamäärien opintojaksoilla aikatauluista kiinnipitäminen on tärkeää sujuvuuden kannalta. Aikatauluista joustamisen sijaan opettajat voivat opintojen alussa esimerkiksi muistuttaa opiskelijoita lähestyvistä palautuksista. Ohjeistuksien selkeyteen (4,0 %) panostamalla ja pohtimalla asteittaisen (2,0 %) aloituksen mahdollisuutta alkuvaiheen haasteet aikataulutuksessa voisivat myös pienentyä.

Muutama opiskelija (6,0 %) esitti toiveen opinto-ohjauksesta yliopisto-opintojen alkuvaiheeseessa. Teknis-luonnontieteellisen opiskelijoilla alkaa heti opintojen alussa opintoihin johdattava kurssi, jossa tutustutaan tarkemmin tutkinnon rakenteeseen ja käsitellään opiskelutaitoja. Lisäksi opiskelijoiden on mahdollista hakeutua opintosuunnittelijan, opintoneuvojan tai opintopsykologin vastaanotolle. Opinto-ohjausta on siis saatavilla, mutta sen suhteen pitää olla itse aktiivinen.

## **8. KOMPLEKSILUKUJEN ITSEOPISKELUMATERIAALIN JATKOKEHITTÄMINEN JA POHDINTA**

Yleensä kehittämisen, testaamisen ja arvioinnin jälkeen kehittämistuotoksen arvioinnissa ilmenneet haasteet asetetaan uusiksi kehittämistavoitteiksi ja kehittämistuotosta testataan uudelleen seuraavassa syklissä [44]. Tässä kehittämistutkimuksessa toteutettiin kuitenkin vain yksi kehittämissykli. Näin ollen itseopiskelumateriaalin testaamisen ja arvioinnin jälkeen sitä jatkokehitettiin tutkimustuloksiin perustuen, mutta itseopiskelumateriaalia ei testattu enää uudelleen. Jatkokehittämistäkin voitiin tehdä vain tiettyyn rajaan asti ajallisten resurssien puutteesta johtuen.

### **8.1 Kompleksilukujen itseopiskelumateriaaliin tehdyt muutokset**

Tutkimuskyselyn perusteella opiskelijat olivat pääosin tyytyväisiä itseopiskelumateriaaliin. Erityisesti opetusvideot, tehtävät ja diat saivat positiivista palautetta (taulukko 7.2). Opiskelijat saivat myös hyviä pisteitä (kuva 7.2) tenttitehtävästä. Kehitysehdotuksista merkittävimpinä osa-alueina nousi esille laskuesimerkkien ja lisätehtävien lisääminen materiaaliin sekä perusteellisempi teorian selitys (taulukko 7.3).

Itseopiskelumateriaalin opetusvideot ovat kestoiltaan hieman pitkäköjä, sillä asiat pyrittiin selittämään mahdollisimman selkeästi ja jokaisesta aihealueesta esitettiin videolla laskuesimerkki. Tästä syystä videoiden uudelleen kuvaaminen vielä perusteellisemmalla selityksellä ja suuremmalla määrällä laskuesimerkkejä ei tunnu järkevältä. Videoiden yhteiskesto on noin 78 minuuttia, joka tosin on lyhyempi aika kuin luentototeuksella järjestettävän opintojakson viikottaisten luentojen keskimääräinen yhteiskesto. Käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmin toteutetulla kurssilla itsenäiseen opiskeluun ja tehtävien tekemiseen kuluu kuitenkin paljon aikaa. Tutkimuskyselyn vastauksien perusteella itseopiskelumateriaalin opiskelu vaatii jo nyt paljon aikaa, joten tehtävien määrän kasvattaminen lisääisi ajan tarvetta entisestään.

Materiaalin jatkokehittämisessä on huomioitava, että materiaali olisi toimiva mahdollisimman monille erilaisille opiskelijoille. Osa opiskelijoista piti opetusvideoiden selitystä kattavana jo nyt. Jokaisesta aihealueesta oli vähintään yksi tehtävä, johon löytyi vastaava

laskuesimerkki. Osalle opiskelijoista harjoittelun määrä saattaa olla siis jo riittävä.

Näin ollen itseopiskelumateriaalin loppuun päädyttiin lisäämään ylimääräisiä lisätehtäviä vastauksineen erillisenä PDF-tiedostona. Lisämateriaalin läpi käyminen on täysin vapaaehtoista ja tehtävistä voi poimia ne, joissa tarvitsee itse lisäharjoitusta. Lisämateriaaliin pyrittiinkin valitsemaan eri tasoisia tehtäviä, sillä taulukon 7.3 mukaan osa kaipasi lisää helpompia tehtäviä ja osa haastavampia tehtäviä.

Tutkimuskyselyn perusteella yliopistomatematiikan opintojen alkuvaiheen haasteet liittyvät suurelta osin opintojen vaatimustason, itsenäisyyden ja vastuun lisääntymiseen niin opintojen suunnittelussa kuin opiskelun ja vapaa-ajan erottamisessa (taulukko 7.7). Sopeutuminen ja uusien rutiinien muodostaminen tuntuu aluksi haastavalta ja opiskelijat toivoivatkin tutkimuskyselyn vastauksissa enemmän aiempien opintojen kaltaisia lähiopeustilaisuuksia sekä vinkkejä opiskeluun ja aikatauluttamiseen (taulukko 7.10).

Lähiopeustilaisuuksien määrän kasvattaminen on haastavaa resurssien näkökulmasta eikä sinällään liity itseopiskelumateriaalin jatkokehittämiseen, mutta kokisin, että kannustamalla opiskelijoita hyödyntämään enemmän laskutupaa kokemus lähiopeustilaisuuksien ja tuen määrän pienuudesta saattaisi vähentyä. Laskutupa on avoinna useita tunteja viikossa opintojaksojen aikataulut huomioiden ja sinne voi mennä valmiiden kysymysten kanssa tai laskemaan tehtäviä itsenäisesti tai ryhmässä. Taulukon 7.9 mukaan kaverin tai kavereiden kanssa opiskelu oli yksi merkittävimmistä yliopistomatematiikan opiskelua tukeneista asioista. Jos kaveriporukka opiskelisi laskutuvassa, tukea tehtäviin olisi saatavilla myös ryhmän ulkopuolelta ja oppiminen tehostuisi.

Yliopisto-opintojen alussa opiskelijoilla on orientaatioviikko, jossa tutustutaan muihin opiskelijoihin ja saadaan paljon tietoa yliopisto-opiskelusta. Opintojen alussa on erilaisia johdantokursseja, joissa tutustutaan opiskeluun ja työllistymiseen kyseisellä alalla. Differentiaali- ja integraalilaskennan opintojakson ensimmäisessä Prime time -tilaisuudessa opiskelijat valmistelivat myös oman aikataulusuunnitelmansa opintojaksolla opiskeluun. Konkreettisia vinkkejä opiskeluun ja aikatauluttamiseen ei kuitenkaan ollut kerrottu riittävästi vielä tutkimuskyselyyn vastaamisen hetkellä, sillä niitä kaivattiin lisää.

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaali suunniteltiin hyödynnettäväksi opintojen alkuvaiheessa, joten opiskeluvinkit olisivat siihen hyvä lisä. Materiaalin alkuun päädyttiin yleisiä vinkkejä itsenäiseen opiskeluun erillisenä PDF-tiedostona. Vinkit perustuvat Tiina-Maria Päivänsalon kirjaan Oppimiskoodi [46], jota hyödynnettiin myös alaluvussa 4.2 tutustuttaessa itsenäiseen opiskeluun.

Lopuksi itseopiskelumateriaalin yleisilme ja kirjalliset ohjeistukset tarkistettiin vielä kertaalleen ennen materiaalin julkaisua. Julkaistu materiaali on kaikkien vapaasti käytettävissä ja muokattavissa haluttuun käyttötarkoitukseen. Materiaalin saatavuustiedot löytyvät liitteestä B.

## 8.2 Jatkokehitysideat

Tämän kehittämistutkimuksen kehittämistuotoksena syntynyt kompleksilukujen itseopiskelumateriaali ei missään nimessä ole täydellinen kokonaisuus eikä se ratkaise kaikkia kompleksilukujen oppimiseen ja yliopistomatematiikan opintoihin siirtymiseen liittyviä haasteita. Tässä työssä kehitettiin yksi esimerkki kompleksilukujen itseopiskelumateriaalista, mutta toimiva itseopiskelumateriaali voidaan toteuttaa varmasti hyvin monin eri tavoin. Yliopistomatematiikan opintoihin sopeutuminen riippuu hyvin monesta eri tekijästä eikä sitä voida ratkaista yhdellä kompleksilukujen itseopiskelumateriaalilla, mutta toimivat opetusjärjestelyt ja oppimateriaalit ovat varmasti tekijöitä, jotka voivat helpottaa muutokseen sopeutumista.

Itseopiskelumateriaalin jatkokehittämistä ajatellen STACK-tehtävien vinkkien parantaminen ja kompleksilukujen sovellusten esittely (taulukko 7.3) ovat perusteltuja kehitysideoituksia, vaikka moni niitä ei tutkimuskyselyssä tuonutkaan esille. STACK-tehtävien palautteita voisi saada kehitettyä hyödyntämällä tentin kysymysten toimintatapana valintaa ”interaktiivinen, monta suorituskertaa”. Itseopiskelumateriaalissa kompleksilukujen sovelluksista voisi kertoa opetusvideolla hyödyntäen kaavioita, animaatioita ja kuvia ennemmin kuin matemaattisia yhtälöitä. Toisaalta myös Youtube-videopalvelusta löytyy paljon valmiita videoita aiheeseen liittyen.

Aiempien tutkimuksien [33] [36] ja taulukon 7.4 perusteella napakoordinaattimuoto, eksponenttimuoto, kompleksiluvun juuret ja kompleksinen polynomi ovat opiskelijoille haastavia kompleksilukujen osa-alueita. Näihin osa-alueisiin voisi olla tarpeellista valmistella erilaisia havainnollistavia materiaaleja. Yhtenä esimerkkinä mieleen tulee erilaiset interaktiiviset sovelmat. Matemaattisten sovelmien toteuttaminen onnistuu esimerkiksi Geogebra-ohjelmistolla [13]. Sovelman pystyy upottamaan esimerkiksi Moodlen tenttiaktiviteettiin lisäämällä sen tekstieditoriin HTML-koodina.

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaalia on testattu vain yhdellä testiryhmällä ja ainoastaan ennen tutkimustuloksiin perustuvien muutoksien tekemistä. Testiryhmä koostui 61 teknis-luonnontieteellisen opiskelijasta, joiden voidaan olettaa omaavan aika hyvät matemaattiset taidot. Materiaalin jatkokehittämisen kannalta olisi siis tärkeää testata lisää materiaalin toimivuutta erilaisilla testiryhmillä. Näin kompleksilukujen itseopiskelumateriaalia voisi kehittää vastamaan paremmin eri tasoisia oppijoita oli kyse sitten kompleksilukujen opiskelusta ensi kertaa tai aiemmin opitun kertaamisesta. Kompleksilukuja tarvitaan kuitenkin monilla tekniikan aloilla ja eri vaiheissa opintoja.

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaali voisi sopia myös matematiikassa edistyneen tai aiheesta kiinnostuneen lukiolaisen lisämateriaaliksi. Vaikka kompleksiluvut eivät sisälly lukiion opetussuunnitelmaan [40], ei niiden opiskelusta esimerkiksi omalla ajalla ole mitään haittaa. Ne voivat tuoda lisää mielenkiintoa ja sopivaa haastetta matematiikan opiskeluun

sekä herättää kiinnostusta kompleksilukujen hyödyntämistä kohtaan.

### 8.3 Tutkimuksen luotettavuus

Itseopiskelumateriaalin monista mahdollisuuksista huolimatta on syytä kiinnittää huomiota myös tutkimustulosten luotettavuuteen. Kehittämistutkimus on suhteellisen uusi tutkimusmenetelmä ja sen luotettavuutta onkin kritisoitu jonkin verran tutkimuskirjallisuudessa [44, ss. 9–26]. Tyypillisiä haasteita luotettavuuden kannalta ovat yhtenevien tutkimuskäytäntöjen uupuminen, laajan ja monipuolisen datan analysointi sekä pienten kvalitatiivisten otoksien yleistettävyys.

Kehittämistutkimuksella ei ole omia luotettavuuskriteerejä vaan siinä hyödynnetään käytettyjen menetelmien omia luotettavuuskriteerejä [20, ss. 161–177]. Määrällisessä tutkimuksessa kriteereinä ovat validiteetti ja reliabiliteetti, jotka kertovat tutkimuksen pätevydestä eli onko tutkittu oikeita asioita tutkimustulosten saamiseksi ja ovatko tutkimustulokset toistettavia. Laadullisessa tutkimuksessa luotettavuuskriteereitä on enemmän: uskottavuus, siirrettävyys, luotettavuus, varmuus ja vahvistettavuus. [44, ss. 9–26] Yleisesti tieteellistä tietoa voidaan tarkastella objektiivisuuden, toistettavuuden, julkisuuden, kriittisyyden ja itsekorjautuvuuden näkökulmista [20, ss. 161-177].

Kyseisessä kehittämistutkimuksessa hyödynnettiin sekä määrällisiä että laadullisia tutkimusmenetelmiä. Kehittämistarpeen tunnistamisen ja kirjallisuuteen perehtymisen jälkeen asetettuja tutkimuskysymyksiä hyödynnettiin apuna tutkimuskyselyn suunnittelussa ja aineiston analysoinnissa, jotta tutkimuskysymyksiin saataisiin vastauksia. Itseopiskelumateriaalin suunnittelussa ja kehittämisessä jouduttiin tekemään monenlaisia valintoja materiaalin toteutustapaan ja rajaukseen liittyen. Valinnat pyrittiin tekemään mahdollisimman objektiivisesti erilaisten opiskelijoiden tarpeet huomioiden käyttäen apuna kirjallisuudesta esiin nousseita asioita. Tutkimus on raportoitu huolellisesti tässä opinnäytetyössä ja se voidaan tarvittaessa toistaa uudelleen. Tuloksissa voi ilmetä vaihtelua eri testiryhmillä verrattuna kyseisen tutkimuksen suhteelliseen rajattuun ja pieneen otokseen. Teknisen luonnontieteelliseen valituiksi tulevia opiskelijoita voidaan pitää keskimääräistä taitavammina matemaattisissa aineissa.

Tutkimustulokset vaikuttavat uskottavilta ja ovat pääosin linjassa aiemman tutkimuskirjallisuuden kanssa. Tutkimustulokset eivät ole suoraan siirrettävissä muihin elämäntulon siirtymävaiheisiin, mutta ne kuvaavat monipuolisesti yliopisto-opintoihin siirtymiseen liittyviä haasteita ja tukikeinoja. Pienestä otoskoosta ja yhdestä kehittämissyklistä huolimatta kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin toimivuuteen liittyviä tuloksia voidaan pitää aika luotettavina ja varmoina. Itseopiskelumateriaalin vaikuttavuuden jatkotutkimisella voitaisiin vahvistaa itseopiskelumateriaalin tieteellisyyttä. Tutkimisesta huolimatta on muistettava, että oppiminen on yksilöllistä ja siihen vaikuttavat myös monet muut tekijät [41] kuin tieteellisen tutkimuksen keinoin hyväksi osoitettu itseopiskelumateriaali.

## 9. YHTEENVETO

Tämän opinnäytetyön tavoitteena oli rakentaa kompleksilukujen itseopiskelumateriaali yliopistomatematiikan opintojen alkuvaiheeseen sekä tutkia yliopistomatematiikan aloittamiseen liittyviä haasteita ja toimivia tukikeinoja. Kehittämistutkimuksen ensimmäisen vaiheen eli ongelma-analyysin perusteella yliopisto-opintoihin siirtyminen ja yliopistomatematiikan opiskelu on koettu haastavaksi. Matematiikan osaaminen on heikentynyt ja opiskelutaidoissa esiintyy vaihtelua. Kompleksilukujen laskutoimitukset ja sovellusten ymmärtäminen tuottavat haasteita.

Itseopiskelumateriaalin suunnittelussa ja kehittämisessä pyrittiin toteuttamaan helposti lähestyttävä, selkeä ja aktiiviseen ajatteluun ohjaava sekä teoriaa opettava ja havainnollistava materiaali. Materiaalissa hyödynnettiin käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmille tyypillisiä opetusvideoita, harjoitustehtäviä ja itsearviointia. Teorian opettamisen lisäksi opetusvideoilla laskettiin laskuesimerkkejä. Tehtävätyypit mietittiin tukemaan haastavien kompleksilukujen osa-alueiden oppimista. Lisäksi johdannossa motivoitiin kompleksilukujen opiskeluun kertomalla kompleksilukujen tarpeellisuudesta sovelluksissa. Itseopiskelumateriaali oli mahdollista opiskella oppimisalustalla järjestyksessä edeten.

Tutkimuskyselyn ja tenttitehtävän pistejakaumien perusteella itseopiskelumateriaali vaikuttaa toimivalta. Opetusvideot, tehtävät ja diat koettiin kaikkein eniten oppimista edistäneiksi osiksi itseopiskelumateriaalissa. Kompleksilukujen osa-alueista haastavimmiksi koettiin eksponenttimuoto ja kompleksiluvut juuret, mikä oli odotettavissa aiempien tutkimusten perusteella. Tutkimuskyselyn perusteella laskuesimerkkejä ja tehtäviä olisi kuitenkin toivottu lisää. Tähän toiveeseen vastattiin lisäämällä vapaaehtoisia lisätehtäviä.

Iso osa opiskelijoista kuvasi yliopisto-opintojen aloittamista suureksi elämänmuutokseksi. Lisäksi opetusjärjestelyt olivat yllättäneet erityisesti käänteisen opetuksen ja oppimisen menetelmien takia. Siirtymään liittyviä haasteita kartoitettaessa esille nousivat erityisesti sisältöjen haastavuus ja laajuus sekä kiireen tuntu. Tuntemukset yliopisto-opiskelusta kehittivät kuitenkin positiiviseen suuntaan tutkimuskyselyiden välillä. Siitä huolimatta haasteet opintojen alkuvaiheessa ovat realismia ja sopeutumiseen ja opintoihin kiinnittymiseen on kiinnitettävä huomiota jatkossakin.

Aiempien tutkimuksien perusteella siirtymää voidaan sujuvoittaa panostamalla ryhmäytymiseen, opettamalla opiskelutaitoja ja hyödyntämällä monipuolisia opetusmenetelmiä.

Kavereiden kanssa opiskelu ja tehtävien tekeminen olivat tutkimuskyselyn perusteella tukenneet yliopistomatematiikan opiskelua. Ratkaisuna siirtymän sujuvoittamiseen tutkimuskyselyssä ehdotettiin suurempaa lähiopetustilaisuuksien määrää, jotta tehtävien laskeminen kavereiden kanssa ja avun saanti opettajalta olisi mahdollista kuten aiemmissa opinnoissa. Tämän toteuttaminen saattaa kuitenkin olla haastavaa resurssien näkökulmasta. Lisäksi opintojen alkuvaiheessa toivottiin tarjottavan enemmän vinkkejä opiskeluun ja aikatauluttamiseen. Vinkkejä ja tukea voivat tarjota esimerkiksi tutorit, kanssa opiskelijat, opettajat tai opintopsykologit. Tähän panostettiin myös itseopiskelumateriaalin jatkokehitysvaiheessa.

Kehittämistutkimuksen tutkimustulokset itseopiskelumateriaaliin sekä siirtymään liittyviin haasteisiin ja tukikeinoihin vaikuttavat luotettavilta ja ovat linjassa aiempien tutkimusten kanssa. On kuitenkin huomioitava, että tutkimuksen otos on pieni. Lisäksi otoksen opiskelijoita voidaan pitää keskimääräistä taitavampina matemaattisissa aineissa. Toisaalta on hyvä muistaa, että jokainen opiskelija on yksilö ja sopeutuu muutoksiin eri tavoin. Oppiminen on yksilöllistä, mutta tapahtuu usein vuorovaikutuksessa muiden kanssa.

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaali on vapaasti kaikkien käytettävissä ja muokattavissa erilaisiin tarpeisiin. Materiaalia voi hyödyntää opintojaksoilla ensisijaisena opetusmateriaalina ja lisämateriaalina muiden materiaalien rinnalla. Materiaalin avulla voi opiskella tai kerrata kompleksilukuja itsenäisesti. Materiaalista voi myös etsiä ideoita kompleksilukujen opettamiseen tai itseopiskelumateriaalin kehittämiseen. Tärkeintä on oppiminen ja oppimisen edistäminen.

## LÄHTEET

- [1] E. Myller (toim.) *Oppaiden opas - vinkkejä opetukseen opintopolun eri vaiheissa*. Aalto-Yliopisto, 2011.
- [2] M. Murtonen (toim.) *Opettajana yliopistolla*. Vastapaino, 2017.
- [3] R. P. Agarwal, K. Perera ja S. Pinelas. *An Introduction to Complex Analysis*. Springer, 2010.
- [4] M. Ahonen. *Matematiikan opiskelu yliopistossa on kuin pään hakkaamista seinään - opiskelukokemuksia ensimmäisistä yliopistomatematiikan kursseista*. Tampereen yliopisto, 2018.
- [5] W. A. Barrett ja A. S. Cheney. "Object-based image editing". *ACM Trans. Graph.* 21.3 (2002), s. 777–784. DOI: 10.1145/566654.566651.
- [6] C. Bateira. *Cartography. A Tool for Spatial Analysis*. IntechOpen, 2012.
- [7] C. Boyle. *Tieteiden kuningatar. Matematiikan historia osat I–II*. Arth House, 1994.
- [8] R. S. Burington. "On the Use of Conformal Mapping in Shaping Wing Profiles". *The American Mathematical Monthly* 47.6 (1940), s. 362–373. DOI: <https://doi-org.libproxy.tuni.fi/10.2307/2303633>.
- [9] S. T. Chui et al. "Scattering of electromagnetic waves from a cone with conformal mapping: Application to scanning near-field optical microscope". *Physical Review B* 97 (8 2018), s. 081406. DOI: 10.1103/PhysRevB.97.081406.
- [10] A. D. Dumford ja A. L. Miller. "Online learning in higher education: exploring advantages and disadvantages for engagement". *Journal of Computing in Higher Education* 3 (2018), s. 452–465. DOI: 10.1007/s12528-018-9179-z.
- [11] H. Edwards ja D. Penney. *Calculus: Early Transcendentals: Matrix Version*. 6. painos. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [12] K. Falconer. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. 3. painos. Wiley, 2014.
- [13] *Geogebra*. URL: <https://www.geogebra.org/?!lang=fi> (viitattu 29. 02. 2024).
- [14] *H5P*. URL: <https://h5p.org/> (viitattu 12. 12. 2023).
- [15] H-F. Hsieh ja S. Shannon. "Three Approaches to Qualitative Content Analysis". *Qualitative Health Research* 15.9 (2005), s. 1277–1288. DOI: <https://doi.org/10.1177/1049732305276687>.
- [16] T. Isoaho. *Onnelliset kohtaa - Yliopiston opettajien ja opiskelijoiden myönteiset opetus- ja opiskelukokemukset*. Tampereen yliopisto, 2014.
- [17] J. Hirvonen J. Kauhanen ja P. Laakkonen. *Analyysin peruskurssi. Kurssimateriaali*. Tampereen yliopisto, 2021.

- [18] J. Joutsenlahti, H. Silverberg ja P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, 2018.
- [19] *Juuri (LOPS21) Digiopetusaineisto*. Kustannusosakeyhtiö Otava.
- [20] J. Kananen. *Kehittämistutkimus opinnäytetyönä*. Jyväskylän ammattikorkeakoulu, 2012.
- [21] J. Kauhanen ja H. Orelma. *Differentiaali- ja integraalilaskenta. Kurssimateriaali*. Tampereen yliopisto, 2020.
- [22] R. Kauppila. *Ihmisen tapa oppia: Johdatus sosiokonstruktivistiseen oppimiskäsitykseen*. PS-kustannus, 2007.
- [23] V. Keränen ja J. Penttinen. *Verkkomateriaalin tuottajan opas*. Docendo, 2007.
- [24] J. Korkeamäki, M. Parkkila ja E. Poutiainen. *Toisen ja korkea-asteen opiskelijoiden mielenterveysongelmien yhteys koettuun opintosuoriutumiseen, sosiaaliseen hyvinvointiin sekä tuen hakemiseen ja saamiseen*. Kela, Helsinki, 2023.
- [25] E. Laitanen. *Kohti sujuvampaa siirtymää – Lukioaikaisten korkeakouluopintojen yhteys opiskelijan jatkokoulutusvalmiuksien kehittymiseen*. Tampereen yliopisto, 2019.
- [26] S. Lindblom-Ylänne ja A. Nevgi. *Yliopisto-opettajan käsikirja*. WSOYpro Oy, 2011.
- [27] V. Linja-aho. "Vaihtosähköpiirien osoitinlaskenta kompleksiluvuilla". *Matematiikka-lehti Solmu* 1 (2017).
- [28] *MAOL-digitaulukot*. Kustannusosakeyhtiö Otava.
- [29] J. H. Mathews ja R. W. Howell. *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*. 5. painos. Jones ja Bartlett Publishers, 2006.
- [30] *Maxima-tietokonealgebrajärjestelmä*. URL: <https://maxima.sourceforge.io/> (viitattu 12. 12. 2023).
- [31] O. Merino. "A short history of complex numbers". *University of Rhode Island* (2006).
- [32] *Moodle*. URL: <https://moodle.org/> (viitattu 12. 12. 2023).
- [33] L. Mutambara ja M. Tsakeni. "Cognitive obstacles in the learning of complex number concepts: A case study of in-service undergraduate pshysics student-teachers in Zimbabwe". *EURASIA Journal of Mathematics* 18.10 (2022). DOI: <https://doi.org/10.29333/ejmste/12418>.
- [34] A. Myötyri ja R. Kangaslampi. "Yliopistomatematiikan opiskelun aloittamisen tukeminen". *FMSERA Journal* 4.1 (2021), s. 31–43. DOI: <https://journal.fi/fmseera/article/view/94375>.
- [35] M. Nieminen. *Muutokset lähestymistavoissa oppimiseen insinöörimatematiikan kursseilla. Kahden eri pedagogisen toteutuksen vertailu*. Tampereen yliopisto, 2021.
- [36] M. Nordlander ja E. Nordlander. "On the concept image of complex numbers". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 43.5 (2012), s. 627–641. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.633629>.
- [37] J-E. Nurmi et al. *Ihmisen psykologinen kehitys*. PS-kustannus, 2018.

- [38] L. R. Octaberlina ja A. I. Muslimin. "Online learning: Students' autonomy and attitudes". *XLinguae* 14.1 (2021), s. 49–61. DOI: <https://doi.org/10.18355/XL.2021.14.01.04>.
- [39] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. 2015. URL: [https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124\\_lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2015.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf).
- [40] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. 2019. URL: [https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2019.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf).
- [41] D. Schallert P. Alexander ja R. Reynolds. "What Is Learning Anyway? A Topographical Perspective Considered". *Educational Psychologist* 44.3 (2009), s. 176–192.
- [42] E. Pajarre. *Minä DI-opiskelijana - Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden kokemuksia ja odotuksia yliopisto-opiskelusta*. Tampereen teknillinen yliopisto. Yliopistopalvelut, 2012.
- [43] *Panopto*. URL: <https://www.panopto.com/> (viitattu 12. 12. 2023).
- [44] J. Perna. *Kehittämistutkimus opetuslalla*. PS-kustannus, 2013.
- [45] D. Poole. *Linear Algebra, a modern introduction*. 2. painos. Thomson Brooks/Cole, 2006.
- [46] T-M. Päivänsalo. *Oppimiskoodi: Kuinka Oppiminen onnistuu*. PS-kustannus, 2020.
- [47] S. Rach ja A. Heinze. "Studying mathematics at the university: The influence of learning strategies". *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2011), s. 9–16.
- [48] M. Salehi, P. Ghadimi ja A. B. Rostami. "A more robust multiparameter conformal mapping method for geometry generation of any arbitrary ship section". *Journal of Engineering Mathematics* 89 (2014), s. 113–136. DOI: <https://doi-org.libproxy.tuni.fi/10.1007/s10665-014-9711-8>.
- [49] N. Serdyukova ja P. Serdyukov. "Student Autonomy in Online Learning". *CSEDU - 5th International Conference on Computer Supported Education* (2013).
- [50] K. Silius et al. "Korkeakoulumatematiikka teekkarin kompastuskivenä?" *Tampere University Press* (2011). DOI: <https://urn.fi/urn:nbn:uta-3-943>.
- [51] K. Silius et al. "What can be done to bridge the competency gap between upper-secondary school and university mathematics?" Teoksessa: *2011 IEEE Global Engineering Education Conference EDUCON, 4-6 April 2011, Amman, Jordania*. IEEE Global Engineering Education Conference EDUCON. IEEE, 2011, s. 428–436. DOI: [10.1109/EDUCON.2011.5773172](https://doi.org/10.1109/EDUCON.2011.5773172).
- [52] *STACK-kysymystyyppi*. URL: <https://docs.moodle.org/3x/fi/STACK-kysymystyyppi> (viitattu 12. 12. 2023).
- [53] R. Kangaslampi T. Kuokkanen ja J. Hirvonen. "Opetusmenetelmän ja oppimistehävien yhteys korkeakouluopiskelijoiden matematiikan oppimiseen". *Yliopistopedagogiikka* 2/2022 (2022).

- [54] E. Taliban, K. Chin ja F. Jiew. "The Transition from Real Numbers to Complex Numbers". *ASM Science Journal* 13 (2020). DOI: [https://doi.org/10.32802/asmscj.2020.sm26\(2.21\)](https://doi.org/10.32802/asmscj.2020.sm26(2.21)).
- [55] *TEPA-termipankki - Sanastokeskus. Opiskelu*. URL: <https://termipankki.fi/tepa/fi/haku/opiskelu> (viitattu 11. 05. 2023).
- [56] *TEPA-termipankki - Sanastokeskus. Oppiminen*. URL: <https://termipankki.fi/tepa/fi/haku/oppiminen> (viitattu 11. 05. 2023).
- [57] M. Toivola, P. Peura ja M. Humaloja. *Flipped Learning. Käänteinen oppiminen*. Edita, 2017.
- [58] J. Tuomi ja A. Sarajärvi. *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2018.
- [59] E. Wegert ja G. Semmler. "Phase plots of complex functions: a journey in illustration". *Notices AMS* 58 (2010), s. 768–780.
- [60] *Yliopistolaki 2009/558*. URL: <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/2009/20090558>.
- [61] D. G. Zill ja P. D. Shanahan. *A First Course in Complex Analysis*. Jones ja Bartlett Publishers, 2003.

## **LIITE A: TUTKIMUSKYSELY**

# Tutkimuskysely OSA 1: Kokemuksia itseopiskelumateriaalista

[Jatka](#)

Tila: Vastaajien nimet tallennetaan ja näytetään vastausten kanssa opettajille

Tutkimuksen tarkoituksena on kehittää kompleksilukujen itseopiskelumateriaali yliopisto-opintojen alkuvaiheeseen. Tutkimuksessa kartoitetaan, mitkä asiat opiskelijat kokevat haastaviksi opintojen aloittamisessa, ja miten siirtymävaihetta voitaisiin tukea opetusjärjestelyin. Pyrkimyksenä on siis sujuvoittaa siirtymää lukiosta yliopistoon.

Tutkimukseen kuuluu opiskelu kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin mukaisesti sekä vastaaminen kaksiosaiseen tutkimuskyselyyn, josta tämä on ensimmäinen osa. Tutkimusaineistossa esiintyviä henkilötietoja käsitellään EU:n tietosuojasetuksen mukaisesti. Tarkempi kuvaus henkilötietojen käsittelystä löytyy tietosuojailmoituksesta, joka löytyy Moodlesta tämän kyselyn yhteydestä.

Tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista ja suostumuksen voi perua niin kauan kuin tutkittava on tunnistettavissa tutkimusaineistosta (anonymisointiin asti). Mikäli haluat kurssin suoritukseen vaikuttavia pisteitä tutkimuskyselyyn vastaamisesta, vastaa tutkimuskyselyyn myös siinä tapauksessa, että et halua osallistua tutkimukseen (kyselyn alussa kysytään lupaa tutkimukseen osallistumisesta ja henkilötietojen käsittelystä). Tutkimukseen osallistuessa on annettava suostumus sekä tutkimukseen osallistumiseen että henkilötietojen käsittelyyn.

Olen lukenut ja ymmärtänyt yllä esitetyt tiedot tutkimuksesta ja tutkimukseen osallistumisesta ja suostun osallistumaan tutkimukseen.



- Kyllä  
 Ei

Olen tutustunut tietosuojailmoitukseen ja suostun henkilötietojeni käsittelyyn tutkimuksessa



- Kyllä  
 Ei

**Valitse mielestäsi sopivin vaihtoehto seuraaville väittämille ja kysymyksille**

Itseopiskelumateriaalin avulla opiskelu oli helppoa.



- Täysin eri mieltä  
 Osittain eri mieltä  
 Ei samaa eikä eri mieltä  
 Osittain samaa mieltä  
 Täysin samaa mieltä

Itseopiskelumateriaalin sisällöt olivat haastavia.



- Täysin eri mieltä  
 Osittain eri mieltä  
 Ei samaa eikä eri mieltä  
 Osittain samaa mieltä  
 Täysin samaa mieltä

Mitkä kompleksilukujen osa-alueet koit haastaviksi? (Voit valita useita)




- Tulkinta kompleksitasossa  
 Laskutoimitukset  
 Liittoluku  
 Itseisarvo  
 Napakoordinaattimuoto  
 Eksponenttimuoto  
 Kompleksiluvun juuret  
 Kompleksinen polynomi  
 Ei mikään edellisistä

Itseopiskelumateriaalin opiskelu vaati paljon aikaa. 

- Täysin eri mieltä
- Osittain eri mieltä
- Ei samaa eikä eri mieltä
- Osittain samaa mieltä
- Täysin samaa mieltä

Itseopiskelumateriaalin rakenne oli selkeä. 

- Täysin eri mieltä
- Osittain eri mieltä
- Ei samaa eikä eri mieltä
- Osittain samaa mieltä
- Täysin samaa mieltä


Itseopiskelumateriaalin tapa esittää opiskeltavat asiat oli ymmärrettävä. 

- Täysin eri mieltä
- Osittain eri mieltä
- Ei samaa eikä eri mieltä
- Osittain samaa mieltä
- Täysin samaa mieltä

Sain tarpeeksi tukea opiskeluun opetustilaisuuksissa. 

- Täysin eri mieltä
- Osittain eri mieltä
- Ei samaa eikä eri mieltä
- Osittain samaa mieltä
- Täysin samaa mieltä


#### Vastaa seuraaviin avoimiin kysymyksiin

Mitkä itseopiskelumateriaalin osat (johdantotehtävät, opetusvideot, käsitteenmuodostustehtävät videoissa, diat, perustehtävät, syventävät tehtävät, malliratkaisut, itsearviointi, ohjeistukset yms.) edistivät oppimistasi? Miksi? 

Miten kehittäisit itseopiskelumateriaalia vastaamaan paremmin uuden yliopisto-opiskelijan tarpeita? 

Millaiselta yliopisto-opiskelu tuntuu juuri nyt? Entä aiempiin opintoihin verrattuna? 

Tähän voit antaa vapaata palautetta tai tarkentaa aiempia vastauksiasi (vapaaehtoinen).

 pakollinen

**Jatka**

# Tutkimuskysely OSA 2: Kokemuksia yliopistomatematiikan opiskelusta

Jatka

Tila: Vastaajien nimet tallennetaan ja näytetään vastausten kanssa opettajille

**Valitse mielestäsi sopivin vaihtoehto seuraaville väittämille ja kysymyksille**

Olen kokenut yliopisto-opintoihin sopeutumisen haastavaksi. 

- Täysin eri mieltä
- Osittain eri mieltä
- Ei samaa eikä eri mieltä
- Osittain samaa mieltä
- Täysin samaa mieltä

Yliopisto-opintojen aloittaminen oli minulle suuri elämänmuutos. 

- Täysin eri mieltä
- Osittain eri mieltä
- Ei samaa eikä eri mieltä
- Osittain samaa mieltä
- Täysin samaa mieltä


Olen saanut riittävästi tukea opintojen aloittamiseen. 

- Täysin eri mieltä
- Osittain eri mieltä
- Ei samaa eikä eri mieltä
- Osittain samaa mieltä
- Täysin samaa mieltä

Opetusjärjestelyt ovat olleet erilaisia kuin oletin. 

- Täysin eri mieltä
- Osittain eri mieltä
- Ei samaa eikä eri mieltä
- Osittain samaa mieltä
- Täysin samaa mieltä

Tähän voit tarkentaa vastaustasi.

Mitkä seuraavista ovat tehneet yliopistomatematiikan opiskelusta haastavaa? (Voit valita useita) 

- Sisältöjen haastavuus
- Sisältöjen laajuus
- Abstraktius
- Teoreettisuus
- Suuri tehtävien määrä
- Pieni tehtävien määrä
- Stressi
- Kiireen tuntu
- Puutteelliset opiskelutaidot
- Pakollisen kontaktiopetuksen pieni määrä
- Itsenäisen opiskelun suuri määrä
- Vastuu omista opinnoista
- Motivaatio
- Opiskelun aikatauluttaminen
- Opiskelun ja vapaa-ajan erottaminen
- Yksinäisyys
- Ei mikään edellisistä
- Jokin muu


Jos valitsit "jokin muu", tarkenna vastaustasi tähän. Myös muussa tapauksessa voit halutessasi tarkentaa vastauksiasi tähän.


Mitkä seuraavista ovat tukeneet yliopistomatematiikan opiskelua? 

- Opetusvideot
- Tehtävät
- Prime Time tilaisuudet
- Laskuharjoitustilaisuudet
- Ryhmätehtävät
- Deadlinet
- Kaverin tai kavereiden kanssa opiskelu
- Positiivinen ilmapiiri
- Laskutupa
- Mahdollisuus valita milloin opiskelen
- Opintomoniste (PDF)
- Opintomoniste (Plussa)
- Kurssikirja
- Kurssin aikana kerättyihin pisteisiin perustuva arviointi
- Ei mikään edellisistä
- Jokin muu


Jos valitsit "jokin muu", tarkenna vastaustasi tähän. Myös muussa tapauksessa voit halutessasi tarkentaa vastauksiasi tähän.

### Vastaa seuraaviin avoimiin kysymyksiin

Millaista tukea tai opetusjärjestelyitä toivoisit yliopisto-opintojen alkuvaiheessa? 

Millaiselta yliopisto-opiskelu tuntuu juuri nyt? Entä aiempiin opintoihin verrattuna? Onko ajattelussa tapahtunut muutoksia ensimmäisen periodin aikana? 

Tähän voit antaa vapaata palautetta tai tarkentaa aiempia vastauksiasi (vapaaehtoinen).

 pakollinen

**Jatka**

## **LIITE B: KOMPLEKSILUKUJEN ITSEOPISKELUMATERIAALI**

Kompleksilukujen itseopiskelumateriaali on saatavilla Digicampuksessa ja Avointen oppimateriaalien kirjastossa. Digicampuksesta kompleksilukujen itseopiskelumateriaali löytyy kaikille avoimena kurssialustana. Avointen oppimateriaalien kirjastosta löytyy kompleksilukujen itseopiskelumateriaalin tiedostot. Tarkemmat saatavuustiedot löytyvät alta.

Digicampus <https://digicampus.fi/>

> Korkeakoulujen kurssit > Tampereen korkeakouluyhteisö > Kompleksilukujen itseopiskelumateriaali

Avointen oppimateriaalien kirjasto <https://aoe.fi/#/etusivu>

> Kompleksilukujen itseopiskelumateriaali