Juuso Kosola

CRAMÉR-LUNDBERGIN MALLI JA YKSITTÄISYLITEJÄLLEENVAKUUTUS

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2024

Tiivistelmä

Juuso Kosola: Cramér-Lundbergin malli ja yksittäisylitejälleenvakuutus
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan maisteriohjelma
Huhtikuu 2024

Tässä tutkielmassa käsitellään vahinkovakuutusyhtiön varallisuuden muodostumista, vararikkoriskiä ja keinoja, joilla vakuutusyhtiö pystyy minimoimaan vararikon todennäköisyyden. Pääpaino tutkielmassa on jälleenvakuuttamisessa, jossa vakuutusyhtiö vakuuttaa oman vakuutuskantansa kokonaan tai osittain jollain toisella vakuutusyhtiöllä. Jälleenvakuutuskeinoja on useita ja tässä tutkielmassa keskitytään tutkimaan yksittäisylitejälleenvakuuttamista, lyhyemmin XL-jälleenvakuuttamista. Henkivakuutukseen liittyvät seikat jätetään tutkielman ulkopuolelle.

Tutkielmassa käydään läpi klassinen vakuutusmatemattinen Cramér-Lundbergin malli, jonka avulla muodostetaan yksinkertaistettu malli vakuutusyhtiön varallisuuden muodostumisesta. Mallin komponentit alkupääoma, vakuutusmaksutulo ja kokonaisvahinkomeno käsitellään tutkielmassa omina kokonaisuuksinaan. Mallin esittelyn jälkeen tutkitaan vakuutusyhtiön vararikkoa ja sen todennäköisyyttä. Tämän jälkeen esitellään Lundbergin epäyhtälö, joka antaa ylärajan vararikkotodennäköisyydelle, sekä sovituskerroin, joka on oleellinen osa epäyhtälöä.

Tämän jälkeen tutkitaan jälleenvakuuttamista, joka on yksi keinoista, joilla vakuutusyhtiö voi pienentää vararikkotodennäköisyyttä. Tutkielmassa käydään läpi yleisimmät jälleenvakuutusmenetelmät sekä muut tavat, joilla vakuutusyhtiö voi siirtää riskiään muille tahoille. Lopuksi tarkastellaan tarkemmin XL-jälleenvakuuttamista, sen vaikutusta vakuutusyhtiön kokonaisvahinkomenoon ja todistus siitä että XL-jälleenvakuutuksella vakuutusyhtiö pystyy maksimoimaan Lundbergin epäyhtälön sovituskertoimen ja näin minimoimaan oman vararikkotodennäköisyytensä.

Avainsanat: vakuutusmatematiikka, riskiteoria, Cramér-Lundberg, Lundbergin epäyhtälö, XL-jälleenvakuutus

Sisällys

1 Johdanto

Vakuuttaminen on läsnä kaikkialla. Siitä huolimatta vakuutus nähdään usein välttämättömänä pahana tai vakuutusyhtiön keinona rahastaa kuluttajia. Vakuutusyhtiö voidaan kuitenkin nähdä vakuutuksenottajien muodostaman yhteisön rahakirstun vartijana, joka jakaa yhteisön kirstuun laittamia varoja sovitulla tavalla niitä tarvitseville. Pahin mahdollinen skenaario olisi, jos kirstusta loppuisivat rahat. Tällöin yhtiön lisäksi myös yhteisö on vaarassa, sillä tyhjä kirstu ei enää tuo turvaa ikävien tilanteiden varalle. Tästä syystä vakuutusyhtiölle on tärkeää välttää kirstun tyhjenemistä, joka tunnetaan myös nimellä vararikko. Esitellään aluksi vakuuttamisen taustaa, peruskäsitteitä ja motivoidaan aiheen merkittävyyttä vakuutusyhtiön näkökulmasta. Lähteenä tässä luvussa on käytetty Jukka Rantalan ja Esko Kivisaaren teoksen Vakuutusoppi lukuja 1,2 ja 8. [10, s.9-12, 51-60 ja 152]

Vakuuttamisen käsite on ollut osana ihmiskunnan historiaa jo tuhansia vuosia ennen ajanlaskun alkua ja varhaisimmat tunnetut vakuuttamisen muodot ovat Babyloniasta 2000-3000 eaa, jolloin vakuutus oli osana karavaanien rahoituspalveluita. Silloin perusajatuksena oli, että karavaaneissa tavaroitaan kuljettavat kauppiaat sopivat karavaanien rahoittajien kanssa sopimuksen, jonka perusteella kauppias ei joudu palauttamaan lainaamiaan rahoja, jos karavaanimatka epäonnistui esimerkiksi luonnonilmiön tai rosvojen vuoksi. Jos karavaaniretki puolestaan onnistui, kauppias maksoi lainastaan ylikorkoa vastineeksi lainanottajan ottamasta riskistä. Tämä käytäntö vakiintui ja se on mainittu myös tunnetussa Hammurabin laissa. Tämän jälkeen vakuuttaminen oli pitkään osana erityisesti merimatkailua merilainojen muodossa. Jo ennen ajanlaskun alkua havaittiin merilainojen yhteydessä, että lainapääoman hajauttaminen laskee tappioiden vaaraa ja vaikka *suurten lukujen laki* pystyttiin matemaattisesti todentamaan vasta paljon myöhemmin, intuitiolla voitiin havaita sen perusajatuksen olemassaolo. Keskiajalla katolinen kirkko puuttui merilainoihin osana koronkiskonnan vastaisia toimia ja lopulta 1300-luvulla merilainojen kuljetuksen epäonnistumisvastuuosa irroitettiin ja sitä alettiin tarjoamaan omana kokonaisuutenaa. Tätä voidaan pitää vakuutuksen lopullisena eriytymisenä. Merivakuutus kasvoi erityisesti Euroopassa ja erityisesti Englanti nousi merkittävään asemaan merivakuuttamisessa 1600-luvulla ja nykyäänkin toiminnassa olevan Lloyd's-vakuutusmarkkinapaikan juuret ovat tuolta ajalta.

Vahinkovakuuttamisen pohjana ja merkittävänä edistäjänä voidaan pitää merivakuuttamista, mutta myös varhaisissa kaupungeissa ja muissa yhteisöissä perustettiin erilaisia paloapujärjestelmiä, joissa yhteisön jäsenet sopivat keskenään avun antamisesta tulipalojen sattuessa. Paloapujärjestelmät olivat osa suurempaa kiltajärjestelmää, joka yleistyi keskiajalla ja jonka yksi perusajatus oli turvan tarjoaminen vahinkotapauksissa. Teollistumisen myötä vakuuttaminen yleistyi erityisesti kasvavissa kaupungeissa ja 1900-luvulle tultaessa vakuutusyhtiöt alkoivat tarjoamaan muitakin vakuutuksia, kuten esimerkiksi murto- ja vastuuvakuutuksia. Näitä erillisiä vakuutuksia alettiin myöhemmin yhdistämään yhdistelmävakuutuksiksi, joista tutuimpia esimerkkejä ovat kotivakuutus ja kaskovakuutus. Vastaavasti vahinkovakuutusyhtiöt ovat muuttuneet tiettyyn vakuutuslajiin erikoistuneista yhtiöistä yleisyhtiöihin. Edelleen vakuutusyhtiöt ovat yhdistyneet pankkien ja finanssilaitosten kanssa ja muodostaneet suuria finanssikonserneja. Digitalisaation myötä vakuutusyhtiöt ovat saaneet laadukkaammat keinot tietomäärien käsittelyyn sekä enemmän tietoa vakuutuskannoista ja vahinkomääristä. Uusia haasteita ovat datan laadun määrittäminen ja vakuutustoiminnan eettiset arvot. Modernissa yhteiskunnassa vakuuttaminen näkyy ihmisten arjessa pakollisten ja vapaaehtoisten vakuutusten muodossa siinä määrin, että kirjallisuudessa puhutaan jopa *vakuutusyhteiskunnasta*.

Jotta vakuutusta voidaan lähteä tarkastelemaan tarkemmin, määritellään ensin oleellinen termi riski. Riski määritellään usein tarkoittamaan jonkilaista epävarmuustekijää, jonka toteutumisesta seuraa riskin kokijalle negatiivisia asioita. Yksilön näkökulmasta riskin totetuminen voi tarkoittaa sairastumista, kuolemaa, työttömyyttä tai esinevahinkoa, kun taas yrityksen näkökulmasta riski voi aiheuttaa esinevahingon lisäksi toiminnan keskeytyksen tai mainehaittaa. Riskien perusluonteessa olennaista on niistä aiheutuva tappion vaara ja niiden satunnaisuus usein kahdessa portaassa eli toteutuuko riski ja jos toteutuu, niin kuinka suuri vahinko tapahtuu. Matematiikassa osa-aluetta, joka tutkii vahinkovakuutusriskejä kutsutaan riskiteoriaksi. Riskiteorian perustyökaluja eli Poisson-prosessia ja kokonaisvahinkomenoa käsitellään tutkielman luvuissa 3 ja 4.

Vakuutustoiminnassa on vähintään kaksi osapuolta. *Vakuutuksenottaja* on aiemmin mainitun riskin kokija, jolle toteutuva riski aiheuttaa haittaa. *Vakuutuksenantaja* on vahinkojen tasaamiseen erikoistunut taho, usein vakuutusyhtiö, mutta kyseessä voi olla muukin toimija. Tässä tutkielmassa vakuutuksenantajasta käytetään myös termiä vakuutusyhtiö, sillä suurin osa vahinkovakuutusta tarjoavista tahoista on yrityksiä. Osapuolet tekevät keskenään *vakuutussopimuksen*, joka määrittää ehdot, joiden puitteissa vakuutuksenantaja korvaa vakuutuksenottajalle tietyn riskin aiheuttamat vahingot kokonaan tai osittain. Vastineeksi tästä vakuutuksenottaja maksaa vakuutuksenantajalle korvauksena *vakuutusmaksua*. Vakutusmaksuja käsitellään tutkielman aliluvussa 4.1. Vakuutusyhtiön tarjoama palvelu ei siis ole vakuutuskorvaus, vaan turva riskin toteutumisen varalle. Vakuutus mahdollistaa sen, että vakuutuksenottaja pystyy toimimaan eikä sen tarvitse pelätä, että yksittäinen riski realisoituessaan aiheuttaisi kohtuuttoman suuren vahingon.

Tutkielma keskittyy vakuutusyhtiön näkökulmaan ja erityisesti toiminnan jatkuvuuden turvaamiseen. Yksi tärkeä keino turvata toiminnan jatkuvuus on vakavaraisuuden varmistaminen. Vakavaraisuuden varmistamiseksi on laadittu niin kansallista kuin kansainvälistä lainsäädäntöä, joka velvoittaa vakuutusyhtiöitä ylläpitämään riittävän suurta pääomapuskuria, jotta yhtiö selviää korvausvastuistaan. Pääomapuskurin lisäksi on tärkeää määrittää vakuutusmaksut oikeassa suhteessa riskiin nähden siten, että ne vastaavat mahdollista vakuutuskorvausta. Tässä haasteena on muun muassa korvausten määrän arviointi, vahingon sattumisen todennäköisyyden arviointi sekä korvausten nykyarvon määrittäminen, sillä usein vakuutusmaksun vastaanottamisesta voi kulua pitkä aika siihen, kun yhtiö maksaa vakuutuskorvauksen vakuutuksenottajalle. Vararikon välttäminen on tärkeää myös vakuutuksenottajan näkökulmasta, sillä vararikko heikentää vakuutuksenottajan turvaa vahingon sattuessa. Myös jo maksussa olevat korvaukset vaarantuvat, mikäli vakuutusyhtiö kohtaa taloudellisia haasteita. Matemaattisesti vararikkoa ja vararikkotodennäköisyyttä käsitellään tutkielman luvussa 5.

Pääomapuskurin kerryttämisen ja vakuutusmaksujen määrittäminen liittyvät vakuutusyhtiöön tulevan rahan määrään. Tämä on kuitenkin vasta osa vakuutusyhtiön varallisuudesta. Vastavuoroisesti vakuutusyhtiö voi pyrkiä rajaamaan ulos maksettavia korvauksia. Tämä onnistuu luonnollisesti tarkoilla vakuutussopimusten ehtojen määrittämisellä, mutta toinen vaihtoehto on vakuuttaa vakuutusyhtiön vakuutukset toisessa vakuutusyhtiössä. Tätä prosessia kutsutaan *jälleenvakuuttamiseksi*. Jälleenvakuuttamisen käytäntöjä ja menetelmiä esitellään luvussa 6 ja luvussa 7 keskitytään erityisesti XL-jälleenvakuuttamiseen.

Lukijalta oletetaan todennäköisyyslaskennan sekä differentiaali- ja integraalilaskennan perusasioiden tuntemista. Syväosaamista vakuuttamisesta ei tarvita, mutta mikäli lukija haluaa tietää lisää vakuuttamisesta, suositeltava teos on tämän tutkielman lähteenäkin käytetty Rantalan ja Kivisaaren teos Vakuutusoppi. Matemaattisena lähteenä on käytetty enimmäkseen Tomas Mikoschin teosta Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process.

2 Todennäköisyyslaskennasta

2.1 Peruskäsitteitä todennäköisyyslaskennasta

Esitetään alkuun joitain todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä. Tämä luku pohjautuu Pekka Tuomisen kirjaan Todennäköisyyslaskenta 1 [11, s.17-82] ja muut lähteet mainitaan erikseen.

Todennäköisyysavaruuden avulla pystymme käsittelemään satunnaisilmiöitä matemaattisesti. Käsiteltäessä satunnaisilmiöitä valitaan ensin satunnaiskokeen mahdolliset tulokset eli *alkeistapaukset*. Näiden tapausten joukko muodostaa perusjoukon Ω. Tämän jälkeen kiinnitetään kokoelma Ω:n osajoukkoja ja merkitään tätä osajoukkoa symbolilla $\mathcal{F}$ ja tarkastellaan tapahtumaa $A \in \mathcal{F}$. Tämän tapahtuman realisoituminen tarkoittaa tilannetta, jossa perusjoukon alkeistapaus $\omega \in A$.

Määritelmä 2.1. Kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on *todennäköisyysavaruus* jos Ω on epätyhjä joukko ja $\mathcal{F}$ ja $\mathbb{P}$ toteuttavat seuraavat ehdot:

1. Kokoelma $\mathcal{F}$ perusjoukon Ω osajoukkoja on *σ-algebra* eli

   (a) $\Omega \in \mathcal{F}$,

   (b) jos $A \in \mathcal{F}, niin A^c \in \mathcal{F}$,

   (c) $A_i \in \mathcal{F} \quad (i = 1, 2, \dots) \rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

   Joukkoa A^c nimitetään joukon A komplementiksi. Komplementti tarkoittaa perusjoukon alkioita, jotka eivät kuulu alkuperäiseen joukkoon eli perusjoukon Ω tapauksessa $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$.

2. Kuvaus $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ on *todennäköisyys* eli

   (a) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$,

   (b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

   (c) jos $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \dots)$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, niin $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Tällöin *tapahtuman A todennäköisyys* $\mathbb{P}(A)$ on yksikäsitteinen reaaliluku, kun tapahtuma $A \in \mathcal{F}$ on annettu.

Määritelmä 2.2. Olkoot A ja B todennäköisyysvaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tapahtumia ja $\mathbb{P}(B) > 0$. Tällöin *tapahtuman A todennäköisyys ehdolla B* on

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ehdollinen todennäköisyys kuvaa tilannetta, jossa tiedämme että B on tapahtunut ja halutaan tietää millä todennäköisyydellä A tapahtuu.

Määritelmä 2.3. Olkoot A ja B ovat todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tapahtumia. Tapahtumien A ja B sanotaan olevan toisistaan *riippumattomia*, jos

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Riippumattomuus tarkoittaa tilannetta, jossa tapahtuman A sattuminen ei vaikuta tapahtuman B sattumisen todennäköisyyteen ja päinvastoin.

Määritelmä 2.4. [2, 3.3.2] Tapahtuman A *indikaattorifunktio* $\mathbb{1}_A$ määritellään funktioksi, joka saa arvon 1 kun tapahtuma A toteutuu ja 0 muutoin.

Määritelmä 2.5. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Kuvaus $X : \Omega \to \mathbb{R}$ on *satunnaismuuttuja*, jos

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Seuraavaksi tarkastellaan satunnaismuuttujia, joilla on tiettyjä mallintamisen kannalta mielekkäitä ominaisuuksia.

Määritelmä 2.6. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kuvaus. X on *diskreetti satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudella* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jos X:n arvojoukko $X(\Omega)$ on numeroituva joukko ($\{x_1, x_2, \dots\}$ tai $\{x_1 \dots x_n\}$) ja $\{X = x_k\} \in \mathcal{F}$ kaikilla k.

Diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauman määräävät tapahtumien pistetodennäköisyydet eli

$$p_k = \mathbb{P}\{X = x_k\},$$

kun $x_k \in X(\Omega)$.

Määritelmä 2.7. Diskreetin satunnaismuuttujan *pistetodennäköisyysfunktio* on funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$f(x) = \mathbb{P}\{X = x\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Diskreetin satunnaismuuttujan tapauksessa pistetodennäköisyysfunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $f(x) \geq 0$, kun $x \in \mathbb{R}$,
2. Jos $f(x) > 0$, niin x kuuluu X:n numeroituvaan arvojoukkoon $\{x_1, x_2, \dots\}$,
3. $\sum_k f(x_k) = 1$.

Määritelmä 2.8. Satunnaismuuttujalla X on *jatkuva jakauma tiheysfunktiona* f, jos

$$\mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

kaikilla $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tällöin satunnaismuuttuja X on *jatkuva satunnaismuuttuja*. Jotta funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olisi jatkuvan jakauman tiheysfunktio, sillä tulee olla seuraavat kaksi ominaisuutta:

1. $f(x) \geq 0$,

2. $f(x)$ on integroituva $\mathbb{R}$:n suhteen ja $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Määritelmä 2.9. Yleisesti satunnaismuuttujan X *kertymäfunktio* F on

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Jos F on kertymäfunktio, sillä on kolme ominaisuutta:

1. F on kasvava,

2. F on oikealta jatkuva,

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Diskreetin satunnaismuuttujan kertymäfunktio on funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pistetodennäköisyysfunktion arvot $p_k = f(x_k)$, $x_k \in X(\Omega)$ määräävät yksikäsitteisesti diskreetin satunnaismuuttujan X kertymäfunktion kaavan

$$F(x) = \sum_{k:x_k \leq x} p_k \quad x \in \mathbb{R}$$

avulla.

Jatkuvan satunnaismuuttujan X kertymäfunktio $F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}$ määräytyy puolestaan satunnaismuuttujan tiheysfunktion avulla kaavasta

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tällöin kaikissa f:n jatkuvuuspisteissä pätee myös kaava $F'(x) = f(x)$.

Pistetodennäköisyysfunktion ja kertymäfunktion yhteys voidaan ilmaista myös muodossa

$$\mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

kaikilla $a \leq b$.

Yleisesti satunnaismuuttujan ei tarvitse olla diskreetti tai jatkuva, vaan satunnaismuuttuja voi olla näiden kahden yhdistelmä tai jotain muuta. Vaikka satunnaismuuttujan yleinen määritelmä mahdollistaa hyvinkin erilaisten satunnaismuuttujien tutkimisen, usein keskitytään nimenomaan diskreetteihin tai jatkuviin satunnaismuuttujiin.

Määritelmä 2.10. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vastaavasti kuten yksittäisten tapahtumien tapauksessa, satunnaismuuttujat X ja Y ovat *toisistaan riippumattomia* jos tapahtumat $\{X \in B_1\}$ ja $\{Y \in B_2\}$ ovat riippumattomia, eli

$$\mathbb{P}(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}) = \mathbb{P}(\{X \in B_1\})\mathbb{P}(\{Y \in B_2\}),$$

kaikilla Borel-joukoilla B_1, B_2.

Huomautus. Borel-joukon käsite sivuutetaan. Olennaista on, että Borel-joukkojen käsite on riittävän laaja ja se käsittää kaikki tutkielman kannalta oleelliset joukot. Lisätietoja Borel-joukoista löytyy esimerkiksi Matthew Formanin ja Akihiro Kanamorin teoksesta Handbook of set theory [3, s.6, 298-299].

Määritelmä 2.11. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on $\{x_1, x_2, \dots\}$ ja arvojoukon alkioita vastaavat todennäköisyydet $p_k = \mathbb{P}\{X = x_k\}$. Tällöin X:n *odotusarvo* on luku

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k \cdot p_k.$$

Olkoon Y jatkuva satunnaismuuttuja, jolla on tiheysfunktio f. Tällöin Y:n *odotusarvo* on luku

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Odotusarvon olemassaolon ehtona on diskreetissä tapauksessa summan ja jatkuvassa tapauksessa integraalin itseinen suppeneminen, eli

$$\sum_k |x_k| \cdot p_k < \infty \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y)\, \mathrm{d}y < \infty.$$

Lause 2.12. *Odotusarvo on lineaarinen eli kaikilla satunnaismuuttujilla X ja Y sekä millä tahansa vakiolla c*

$$\mathbb{E}(cX + Y) = c\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y,$$

kun odotusarvot $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}Y$ ovat olemassa. Lisäksi, jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, tiedetään että

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.$$

Todistus. Todistus sivuutetaan, yksityiskohtainen todistus diskreeteille satunnaismuuttujille löytyy esimerkiksi teoksesta [4, 4.2.1] ja yleistys jatkuville satunnaismuuttujille samasta teoksesta [4, 5.1.0]. Yleistys muille satunnaismuuttujille voidaan tehdä momentit generoivan funtion avulla, joka määritellään kohdassa 2.18. □

Lause 2.13 (Markovin epäyhtälö)**.** *[2, 10.1.10] Kaikille positiivisille satunnaismuuttujille X, joiden odotusarvo on olemassa, ja reaaliluvuille a pätee*

$$\mathbb{P}\{|X| \geq a\} \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Lauseen todistamista varten oletetaan tunnetuksi seuraava aputulos. Olkoon A tapahtuma ja $\mathbb{1}_A$ määritelmän 2.4 mukainen A:n indikaattorifunktio. Tällöin $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ [4, s.45].

Todistus. [2, 10.1.10] Tutkitaan satunnaismuuttujaa $Y = \frac{X}{a}$. Tutkimalla satunnaismuuttujan Y indikaattorifunktiota havaitaan, että jos $\mathbb{1}_{Y \geq 1}(\omega) = 1$, niin indikaattorifunktion ominaisuuksien nojalla $Y(\omega) \geq 1$. Vastaavasti, jos $\mathbb{1}_{Y \geq 1}(\omega) = 0$, niin $Y(\omega) \geq 0$. Saadaan siis tulos $\mathbb{1}_{Y \geq 1} \leq Y$. Ottamalla odotusarvot puolittain ja hyödyntämällä yllä olevaa tulosta saadaan haluttu tulos. □

Määritelmä 2.14. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo $\mathbb{E}(X) = \mu$. Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Tällöin X:n *varianssi* on

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2.$$

Lause 2.15. *Varianssilla on seuraavat kolme kiinnostavaa ominaisuutta. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia sekä a ja b vakioita. Tällöin*

1. $\mathrm{Var}(X) = 0$*, jos ja vain jos X on melkein varmasti vakio, eli* $\mathbb{P}(X = c) = 1$ *jollakin c.*

2. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \,\mathrm{Var}(X)$.

3. *Jos X ja Y ovat toisistaan riippumattomia, niin* $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Todistus. Sivuutetaan, yksityiskohdat löytyvät esimerkiksi teoksesta [11, s.83]. □

Tunnuslukujen selvittämisen jälkeen on mielekästä alkaa pohtimaan tilannetta, jossa tutkitaan otosta, jossa on useita satunnaismuuttujia. Tässä tapauksessa voidaan puhua satunnaismuuttujien suppenemisesta eli *konvergenssistä*. Konvergenssejä on olemassa useita erilaisia ja seuraavaksi esitettävien *suurten lukujen lakien* yhteydessä esitellään näistä kaksi.

Lause 2.16 (vahva suurten lukujen laki)**.** *Olkoon $X_1, X_2, \ldots$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on samat odotusarvot μ ja varianssit σ^2. Tällöin todennäköisyydellä 1 eli lähes varmasti n:n ensimmäisen satunnaismuuttujan keskiarvo suppenee* pisteittäin *kohti satunnaismuuttujien odotusarvoa μ, kun $n \to \infty$.*

Lause 2.17 (heikko suurten lukujen laki)**.** *Olkoon $X_1, X_2, \ldots$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on samat odotusarvot μ ja varianssit σ^2. Merkitään n:n ensimmäisen satunnaismuuttujan keskiarvoa tunnuksella $\overline{X}_n$. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ pätee $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) \to 0$, kun $n \to \infty$. Tämä konvergenssi tunnetaan* stokastisena konvergenssina.

Todistus. Sivuutetaan lauseiden todistukset, yksityiskohdat löytyvät teoksesta [2, 10.2.1 ja 10.2.2.] □

Suurten lukujen laki tarkoittaa, että riittävän suurella otannalla otettaessa keskiarvo satunnaismuuttujista, joilla on samat odotusarvo ja varianssi, keskiarvo lähestyy yksittäisen satunnaismuuttujan odotusarvoa. Joissain tapauksissa ilmaistaan, että satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, mutta tämä on vahvempi ehto kuin oletuksessa annettu.

Määritelmä 2.18. [4, s.118] Satunnaismuuttujan X *momentit generoiva funktio* eli *momenttifunktio* m_X määritellään kaavalla

$$m_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

kaikille $t \in \mathbb{R}$, joille odotusarvo on olemassa.

Yleisesti kun käytetään määritelmän 2.11 merkintöjä

$$m_X(t) = \begin{cases} \sum\limits_k e^{tx_k} p_k, & \text{kun } X \text{ on diskreetti,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{kun } X \text{ on jatkuva.} \end{cases}$$

Kuten odotusarvon tapauksessa, tässäkin edellytetään, että summa ja integraali suppenevat itseisesti.

Lause 2.19. *[2, 6.4.6] Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, niin satunnaismuuttujan $X+Y$ momentit generoiva funktio on muotoa*

$$m_{X+Y}(t) = m_X(t)m_Y(t).$$

Todistus. Tämä seuraa satunnaismuuttujien riippumattomuudesta, jolloin $\mathbb{E}(e^{t(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{tX})\mathbb{E}(e^{tY})$. □

Momenttifunktiolla on kiinnostava ominaisuus, jonka avulla voidaan määrittää satunnaismuuttujan tunnuslukuja.

Määritelmä 2.20. [4, s.119] Sanotaan, että $\mathbb{E}(X^k)$ on satunnaismuuttujan X k:s *momentti*.

Merkitään $A^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ tarkoittamaan funktion A k:tta derivaattaa pisteessä x. Kun momenttifunktio m on olemassa jossain nollan ympäristössä,

$$\mathbb{E}(X^k) = m_X^{(k)}(0).$$

Erityisesti $\mathbb{E}X = m'_X(0)$ ja $\mathrm{Var}X = m''_X(0) - (m'_X(0))^2$.

Esimerkki 2.21. Tarkastellaan rajoittunutta positiivista satunnaismuuttujaa X ja oletetaan, että sillä on tiheysfunktio $f(x)$ ja kertymäfunktio $F(x)$. Tällaisen satunnaismuuttujan tutkiminen on mielekästä ja se auttaa meitä myöhemmissä tuloksissa. Nyt satunnaismuuttujan X r:s momentti saadaan hyödyntämällä osittaisittaisintegrointia.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^r) &= \int_0^v x^r f(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_0^v x^r(F(x)-1) - \int_0^v r x^{r-1}(F(x)-1)\,\mathrm{d}x \\ &= r\int_0^v x^{r-1}(1-F(x))\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2.2 Ehdollinen odotusarvo ja varianssi

Todennäköisyyslaskennassa on tärkeää ymmärtää, että satunnaismuuttujiin vaikuttavista asioista saatetaan saada uutta tietoa. Tilanteissa, joissa uutta tietoa saadaan, on erityisen tärkeää ottaa huomioon se, miten saamamme tieto vaikuttaa satunnaismuuttujiin ja todennäköisyyksiin. Tämä aliluku perustuu Joseph K. Blitzsteinin ja Jessica Hwangin teoksen Introduction to probability lukuhin 9.1, 9.2 ja 9.5 [2, 9.1, 9.2, 9.3, 9.5]. Aiemmin esiteltiin ehdollista todennäköisyyttä ja satunnaismuuttujan tunnusluvuista odotusarvoa ja varianssia. Seuraavaksi yhdistetään nämä asiat ja tutkitaan satunnaismuuttujien *ehdollista odotusarvoa* ja *ehdollista varianssia*. Tutkitaan ensin ehdollista odotusarvoa.

Ehdollinen odotusarvo voidaan jakaa kahteen perustapaukseen; sellaiseen, jossa tunnetaan yksittäinen tapahtuma, ja sellaiseen, jossa tunnetaan jokin toinen satunnaismuuttuja. Sivuutetaan tapaus, jossa tunnetaan yksittäinen tapahtuma, sillä se on tässä tutkielmassa vähemmän relevantti. Perusajatuksena tässä tapauksessa on tutkia tilannetta, jossa tunnetaan etukäteen, että satunnaismuuttuja Y on saanut arvon $\{Y = y\}$, ja halutaan tutkia miten tämä on mahdollisesti vaikuttanut satunnaismuuttujan X tapahtumien todennäköisyyksiin. Tätä ehdollista odotusarvoa merkitään $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ ja se lasketaan vastaavalla tavalla kuin tavallinenkin odotusarvo, mutta käyttäen ehdollisia todennäköisyyksiä tapauksissa, joissa pätee $\{Y = y\}$.

Tämän tutkielman tapauksessa kiinnostavampaa on tutkia tapausta, jossa satunnaismuuttuja ehdollistetaan toiseen satunnaismuuttujaan. Kun tiedetään, että satunnaismuuttuja Y saa arvon $\{Y = y\}$, ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ saa kiinteän arvon $g(y)$. Kun satunnaismuuttuja X ehdollistetaan satunnaismuuttujaan Y, eli $\mathbb{E}(X \mid Y)$, funktio g käy läpi koko santunnaismuuttujan Y, eli tutkitaan funktiota $g(Y)$, joka on myös satunnaismuuttuja. Ehdollinen satunnaismuuttuja määritellään seuraavalla tavalla.

Määritelmä 2.22. [2, 9.2.1] Merkitään $g(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$. Tällöin satunnaismuttujan X ehdollinen odotusarvo kun Y tunnetaan, jota merkitään $\mathbb{E}(X \mid Y)$, on satunnaismuuttuja $g(Y)$.

Ehdollisella todennäköisyydellä on muutamia hyödyllisiä ominaisuuksia, joiden avulla voidaan ratkaista sellaisia ongelmia, joiden ratkaiseminen muussa tapauksessa olisi erittäin työlästä suoraan määritelmän avulla. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, h funktio ja c vakio. Tällöin ehdollisella todennäköisyydellä on seuraavat ominaisuudet:

1. Jos X ja Y ovat riippumattomia, niin $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$.
2. Kaikilla funktioilla h pätee: $\mathbb{E}(h(Y)X \mid Y) = h(Y)\mathbb{E}(X \mid Y)$.
3. $\mathbb{E}(cX_1 + X_2 \mid Y) = c\mathbb{E}(X_1 \mid Y) + \mathbb{E}(X_2 \mid Y)$.
4. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y)) = \mathbb{E}(X)$.

Ensimmäinen kohta seuraa suoraan ehdollisen odotusarvon ja ehdollisen todennäköisyyden määritelmistä riippumattomilla satunnaismuuttujilla. Toinen ominaisuus perustuu siihen, että koska Y:n arvot tunnetaan, joten edelleen tunnetaan myös funktion $h(Y)$ arvot. Tunnettu osuus voidaan siis ottaa odotusarvon ulkopuolelle. Kolmas kohta on ehdollinen versio aiemmin todetusta odotusarvon lineaarisuudesta. Yleistys voidaan tehdä, sillä kuten aiemmin todettiin, ehdolliset satunnaismuuttujat ovat myös satunnaismuuttujia. Viimeisen kohdan yksityiskohtainen todistus löytyy teoksesta [2, 9.3.7]. Kun ehdollinen odotusarvo on määritelty, voidaan määritellän ehdollinen varianssi käyttäen varianssin määritelmää 2.14 ja korvaamalla odotusarvot ehdollisella odotusarvolla.

Määritelmä 2.23. [2, 9.5.1] Satunnaismuuttujan X ehdollinen varianssi, kun Y tunnetaan, saadaan kaavasta

$$\mathrm{Var}(Y \mid X) = \mathbb{E}(Y^2 \mid X) - (\mathbb{E}(Y \mid X))^2.$$

Vastaavasti kuten ehdollisella odotusarvolla, myös ehdollisella varianssilla on ominaisuuksia, joiden avulla voidaan ratkaista ongelmia, joiden ratkaiseminen suoraan määritelmästä on haastavaa. Tunnetuin näistä on kokonaisvarianssilause.

Lause 2.24. *[2, 9.5.4] Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joille Var$(X) < \infty$. Tällöin*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X \mid Y)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X \mid Y)).$$

Todistus. Todistus sivuutetaan, yksityiskohtainen todistus löytyy teoksesta [2, 9.5.4] ja siinä hyödynnetään ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia. □

Huomautus. Ehdollisen odotusarvon ominaisuus $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y)) = \mathbb{E}(X)$ tunnetaan myös nimellä *Aatamin laki* (engl. Adam's law) ja kokonaisvarianssilause puolestaan tunnetaan nimellä *Eevan laki* (engl. Eve's law). Nämä kaksi ovat oleellisessa osassa, kun määritetään haastavampien satunnaismuuttujien odotusarvoja ja variansseja.

2.3 Joitakin jakaumia

Esitellään jakaumia ja niiden tunnuslukuja. [11, s.223-225]

Määritelmä 2.25. Satunnaismuuttajan X sanotaan olevan *Poisson-jakautunut* parametrilla λ ($\lambda > 0$), jos X:n arvojoukko on $\{0, 1, 2, \ldots\}$ ja

$$\mathbb{P}\{X = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \{k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Tällöin merkitään

$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda).$$

Voidaan laskea

$$\mathbb{E}(X) = \lambda,$$
$$\mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Määritelmä 2.26. Satunnaismuuttajan X sanotaan olevan *eksponenttijakautunut* parametrilla λ ($\lambda > 0$), jos X:llä on jatkuva jakauma tiheysfunktiona f ja

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kun } x \geq 0 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin merkitään

$$X \sim \operatorname{Exp}(\lambda).$$

Eksponenttijakautuneen satunnaismuuttujan kertymäfunktio F on muotoa

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{kun } x \geq 0 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Eksponenttijakauman odotusarvo ja varianssi ovat

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\lambda}, \\ \operatorname{Var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.27. [9] Määritetään eksponenttijakaumalle määritelmän 2.18 mukainen momenttifunktio. Oletetaan, että satunnaismuuttuja X on eksponentiaalisesti jakautunut. Tällöin sen momenttifuntio $m_X(t)$ saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{x(t-\lambda)}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{t-\lambda} \Big/_0^\infty e^{x(t-\lambda)} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{\lambda}{t-\lambda} (e^{x(t-\lambda)} - 1). \end{aligned}$$

Osamäärästä havaitaan, että jos $t = \lambda$, momenttifunktiota ei ole olemassa. Tutkimalla lauseketta $e^{x(t-\lambda)}$ havaitaan, että kun $\lambda < t$, raja-arvo $\lim_{x\to\infty} e^{x(t-\lambda)} = \infty$, mikä tarkoittaa, että momenttifunktio ei ole olemassa. Kun $t < \lambda$, saadaan

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \lim_{x \to \infty} \frac{\lambda}{t-\lambda} (e^{x(t-\lambda)} - 1) \\ &= \frac{\lambda}{t-\lambda}(0 - 1) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t}. \end{aligned}$$

Eksponenttijakautuneen satunnaismuuttujan momenttifunktio on muotoa $m_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$, kun $t < \lambda$.

Määritelmä 2.28. Satunnaismuuttujan X sanotaan olevan *standardinormaalijakautunut*, kun se noudattaa standardinormaalijakaumaa. Tällöin satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiona

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Kertymäfunktiota merkitään Φ ja funktio on muotoa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Tällöin merkitään

$$X \sim N(0,1).$$

Odotusarvoksi ja varianssiksi saadaan

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0, \\ \mathrm{Var}(X) &= 1. \end{aligned}$$

3 Vahinkojen lukumäärä

Tässä tutkielmassa keskitytään tutkimaan vakuuttamista ja jälleenvakuuttamista *riskiteorian* näkökulmasta. Modernin riskiteorian edelläkävijänä pidetään usein ruotsalaista vakuutusmatemaatikkoa Filip Lundbergia. Vuonna 1903 Lundberg loi perustan, jonka keskeisimpänä ajatuksena oli yksinkertainen malli, jolla pystyttään kuvaamaan riittävän homogeenisen vakuutuskannan käyttäytymistä. Homogeenisellä vakuutuskannalla tarkoitetaan samantyyppisten riskien varalta otettujen vakuutussopimusten kokonaisuutta, esimerkiksi henkilöautojen kaskovakuutuksen varkausvakuutukset. Riskiteoriassa keskitytään tutkimaan nimenomaan vahinkovakuutusta ja siinä pyritään mallintamaan vakuutusyhtiöön saapuvia ja korvauksen maksuun johtavia vahinkoilmoituksia. Lundbergin luoman mallin avulla voidaan tutkia vakuutusmaksujen ja vakuutusmaksutulon suuruutta, jotta vakuutusyhtiö ei joudu vararikkoon. Tässä luvussa esitellään tunnetuimmat keinot vahinkojen lukumäärän mallintamiseen. Ensin määritellään *laskuriprosessi* ja yksi erityisen merkittävä laskuriprosessi: *Poisson-prosessi*. Tämän jälkeen osoitetaan joitain Poisson-prosessin keskeisiä ominaisuuksia, sekä esitellään Poisson-prosessin muunnelmat *epähomogeeninen Poisson-prosessi* ja *sekoitettu Poisson-prosessi*. Tämä luku pohjautuu Thomas Mikoschin kirjan Non-Life Insurance Mathematics lukuihin kaksi ja kolme.[8, s.7-19, 53-56 ja 71-79]. Ensimmäisessä kappaleessa tarkastellaan Poisson-prosessia yleisesti. Luvussa käytetään erillistä malli-ympäristöä kuvaamaan tilanteita, joissa luodaan jonkin asian kuvaamiseen erityinen malli ilman täsmällistä matemaattista määrittelyä.

Malli 3.1. *Lundbergin malli* sisältää kolme oletusta:

- Vahingot sattuvat ajanhetkillä T_i, jotka toteuttavat ehdon $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$. Näitä ajanhetkiä kutsutaan vahingon *sattumishetkiksi*.
- Ajanhetkellä T_i sattuvan *yksittäisen vahingon kokoa* ilmaistaan satunnaismuuttujalla X_i. Näiden satunnaismuuttujien jono (X_i) muodostaa jonon *riippumattomia samoin jakautuneita* ei-negatiivisia satunnaismuuttujia.
- Yksittäisten vahinkojen koot X_i ovat riippumattomia vahinkojen sattumishetkistä T_j.

Intuitiivisesti yksittäisten vahinkojen riippumattomuus kuulostaa hyvinkin luonnolliselta ja toisaalta kuvaa hyvin sitä, kuinka vakuutusyhtiön vakuutuskantaa voidaan mallintaa homogeenisellä tilastollisella rakenteella. Vahinkojen koon ja vahinkojen sattumishetkien riippumattomuus ei ole näin intuitiivista, vaan on valikoitunut malliin lähinnä matemaattista näkökulmaa ajatellen.

Tärkeässä osassa mallia on *laskuriprosessi*, joka ilmaistaan kaavalla

$$N(t) = \#\{i \geq 1 \mid T_i \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

$N(t)$ kuvaa siis ajanhetkeen t mennessä tapahtuneiden tapahtumien lukumäärää. Tapahtumien välinen aika tunnetaan nimellä *odotusaika*. Tästä edelleen voidaan johtaa vakuutusyhtiöille erityisen kiinnostava matemaattinen malli *kokonaisvahinkomeno*, joka yhdistää laskuriprosessin ja yksittäisen vahingon koon.

Malli 3.2. Kokonaisvahinkomeno $S(t)$ määritellään kaavalla

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0.$$

Kokonaisvahinkomeno on satunnaisen pituinen summa $S = (S(t))_{t\geq 0}$, jossa summattavien vahinkojen lukumäärä saadaan laskuriprosessista. Laskuriprosessissa prosessin lisäyksiä mallinnetaan erilaisilla tavoilla, joista tunnetuin on *Poisson-prosessi*.

Ennen Poisson-prosessin määritelmää esitellään merkintätapa. Kaikille reaaliarvoisille funktioille f joukossa $[0, \infty[$ merkitään

$$f]s, t] = f(t) - f(s), \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

Määritelmä 3.3. Stokastinen prosessi $N = (N(t))_{t\geq 0}$ on *Poisson-prosessi*, kun se täyttää seuraavat ehdot

1. Prosessi alkaa arvosta nolla melkein varmasti (almost surely: a.s.): $N(0) = 0$ a.s.

2. Prosessin lisäykset ovat toisistaan riippumattomat, eli kaikilla $t_i, i = 0, \dots, n$ ja $n \geq 1$, joilla $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, prosessin lisäykset $N]t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$ ovat toisistaan riippumattomia.

3. On olemassa kasvava oikealta jatkuva funktio $\mu : [0, \infty[\to [0, \infty[, \mu(0) = 0$, jolla pätee, että lisäykset $N]s, t], 0 < s < t < \infty$ noudattavat Poisson-jakaumaa parametrilla $\mu]s, t]$. Tätä funktiota kutsutaan prosessin *keskiarvofunktioksi*.

4. Poisson-prosessin N polut ovat oikealta jatkuvia kun $t \geq 0$ ja niillä on vasemmanpuoleiset raja-arvot kun $t > 0$.

Huomautus. [2, 13.1.1] Yllä oleva määritelmä Poisson-prosessille on hyvin yleisluontoinen ja laaja. Yleisemmin on käytössä suppeampi määritelmä, jonka mukaan jono jatkuvassa ajassa sattuvia tapahtumia on Poisson-prosessi parametrilla λ, jos se täyttää kaksi ehtoa.

- Aikavälillä $[0, t]$ tapahtuvien tapahtumien jakauma on Poisson(λt)-jakautunut.
- Eri aikaväleillä tapahtuvat tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia.

Yleisesti Poisson-prosesseista voidaan sanoa, että prosessilla on *intensiteettifunktio* λ, jos kaikilla $s < t$ lisäys $\mu]s, t]$ voidaan esittää muodossa

$$\mu(]s, t]) = \int_s^t \lambda(x)\, \mathrm{d}x, \quad s < t,$$

jollain ei-negatiivisella mitallisella funktiolla λ. Mikäli intensiteetti λ on vakio, voidaan vakuutuskontekstissa ajatella, että vahinkoja sattuu tasaiseen tahtiin.

Määritelmä 3.4. Yksinkertaisin ja eniten käytetty Poisson prosessi on *homogeeninen Poisson-prosessi*. Siinä keskiarvofunktio on lineaarinen ja muotoa

$$\mu(t) = \lambda t, \quad t \geq 0,$$

jollain vakiolla $\lambda > 0$, jonka sanotaan olevan prosessin *intensiteetti*.

Homogeenisella Poisson-prosessilla, jonka intensiteetti on λ, on seuraavat neljä ominaisuutta:

1. Prosessin polku on oikealta jatkuva ja vasemmalta rajoitettu.

2. Prosessi alkaa laskurin arvosta nolla.

3. Prosessin lisäykset ovat riippumattomia ja stationaarisia.

4. $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ jokaisella $t > 0$.

Lisäysten stationaarisuus viittaa siihen, että prosessissa tapahtuvien lisäysten määrä riippuu ainoastaan tutkitun aikavälin pituudesta, ei välin sijainnista. Tämä voidaan ilmaista täsmällisemmin siten, että kaikilla $0 \leq s < t$ ja $h > 0$,

$$N]s,t] = N]s+h, t+h] \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s)).$$

Homogeenisellä Poisson-prosessilla on merkittävä rooli vakuutusmatematiikassa. Rooli on niin merkittävä, että kun aiemmin määritellyn kokonaisvahinkomenon vahinkojen lukumäärä noudattaa Poisson-prosessia, kokonaisvahinkomenon mallia kutsutaan kutsutaan *Cramér-Lundbergin malliksi*.

Malli 3.5. Cramér-Lundbergin mallilla on seuraavat ominaisuudet:

- Vahinkoja tapahtuu ajanhetkillä $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ ja näitä voidaan mallintaa homogeenisellä Poisson-prosessilla $N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, t > 0$.

- Ajanhetkellä T_i tapahtuva i:s vahinko aiheuttaa satunnaismuuttujan X_i suuruisen vahingon. Näin muodostuu jono $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, jonka jäsenet X_i kuvaavat yksittäisten vahinkojen kokoa.

- Sattumishetkien jono $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ja yksittäisten vahinkojen koon jono $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ovat riippumattomia, josta edelleen seuraa, että N ja (X_i) ovat riippumattomia.

Tähän liittyvä kokonaisvahinkomenon prosessi S on erityinen *yhdistetty Poisson prosessi*.

Poisson-prosessin keskiarvofunktion ei kuitenkaan tarvitse olla lineaarinen. Vahinkojen sattumisen todennäköisyydessä saattaa olla huomattavaa vaihtelua johtuen esimerkiksi kellonajasta tai vuodenajoista. Tällöin voidaan sanoa, että vahinkojen trendi vaihtelee. Mikäli keskiarvofunktio $\mu(t)$ ei ole lineaarinen, sanotaan prosessin olevan *epähomogeeninen Poisson-prosessi*. Tällöin mikäli N on homogeeninen Poisson-prosessi, voidaan luoda epähomogeeninen Poisson-prosessi $\widetilde{N}$ asettamalla

$$\widetilde{N} = N(\mu(t)), \quad t > 0.$$

Mikäli puolestaan uskotaan, että vahinkojen sattumisprosessiin vaikuttaa useampi tekijä kuin yksittäinen Poisson-prosessi voidaan käyttää *sekoitettua Poisson-prosessia* $\widehat{N}$. Tämä muodostetaan homogeenisestä Poisson-prosessista asettamalla

$$\widehat{N} = N(\theta\mu(t)),$$

jossa $\theta > 0$ on ei-degenoroitunut satunnaismuuttuja (eli satunnaismuuttuja voi saada useamman kuin yhden arvon), joka ei riipu satunnaismuuttujan N arvoista. Tällaista prosessia voidaan käyttää esimerkiksi ajoneuvovakuutuksessa, jolloin satunnaismuuttuja θ edustaa tiettyjä ominaisuuksia, kuten ikää tai ajokokemusta.

Lause 3.6. *[4, 5.6.1] Homogeenisessa Poisson-prosessissa odotusajoilla on* $\mathrm{Exp}(\lambda)$*-jakauma.*

Todistus. Olkoon $N = (N(t))_{t\geq 0}$ Poisson-prosessi parametrilla λ. Tällöin tiedetään että todennäköisyys sille, että aikavälillä $[t, t + x]$ ei tapahdu yhtäkään tapahtumaa on

$$\mathbb{P}(N(t + x) - N(t) = 0) = e^{-\lambda x}.$$

Olkoon T_t ajanhetki, jolloin tapahtuu ajankohdasta t lähtien seuraava vahinko.Tällöin merkinnät $T_t > x$ ja $(N(t + x) - N(t) = 0)$ ovat yhtäpitäviä. Poisson prosessin ominaisuuksien nojalla tällöin seuraavan vahingon ajanhetken jakaumalle pätee

$$\mathbb{P}(T_t \leq x) = 1 - \mathbb{P}(T_t > x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

joka vastaa määritelmän 2.26 nojalla eksponenttijakauman kertymäfunktiota. Nyt määritelmän 3.4 riippumattomuus ja stationaarisuusehdon nojalla tämä voidaan yleistää koskemaan mitä tahansa aikaväliä. $\square$

4 Kokonaisvahinkomeno ja vakuutuksen hinnoittelu

Kokonaisvahinkomeno ja sen arviointi on tärkeä osa vakuutusyhtiön toimintaa. Tilastojen avulla pystytään päättelemään aikaisempien vuosien kokonaisvahinkomeno, mutta haastavampaa ja paljon tärkeämpää on kokonaisvahinkomenon arviointi tulevaisuudessa. Kun kokonaisvahinkomeno saadaan arvioitua riittävän tarkasti, voidaan vakuutusta alkaa hinnoittelemaan asiakkaille. Kappaleen alkuosa perustuu Tomas Mikoschin teoksen kappaleeseen 2.2 ja lukuun 3 [8, s.53-56 ja 71-79]. Aliluku 4.3 perustuu Jukka Rantalan ja Esko Kivisaaren kirjan Vakuutusoppi lukuun 6 [10, s.124-133].

Mallissa 3.2 määriteltiin kokonaisvahinkomeno yleisesti ja nyt syvennämme määritelmää hieman lisää. Kokonaisvahinkomeno $S(t)$ määriteltiin siten, että

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

jossa satunnaismuuttujat X_i kuvaavat yksittäisten vahinkojen suuruutta ja $N(t)$ on laskuriprosessi joka mallintaa vahinkojen lukumäärää. Kyseessä on siis satunnaisen pituinen summa satunnaismuuttujia. Käytännöllisyyden vuoksi oletetaan, että $X_i \geq 0$ kaikilla i. Tämä oletus sulkee pois ns. positiiviset vahingot, joissa vahingon sattuminen tuottaisi tuloa vakuutusyhtiölle. *Cramér-Lundbergin malli* on erityistapaus, jossa $N(t)$ on homogeeninen Poisson-prosessi. Toinen erityistapaus, jonka käsittelemme lyhyesti myöhemmin on *uusiutumis-* tai *Sparre-Andersonin malli*, jossa $N(t)$ on erityinen *uusiutumisprosessi*.

Lause 4.1. *Cramér-Lundbergin mallissa kokonaisvahinkomenon odotusarvo saadaan kaavasta*

$$\mathbb{E}(S(t)) = \lambda t \mathbb{E} X_1,$$

jossa λ on Poisson-prosessin intensiteetti. Vastaavasti varianssi ilmaistaan kaavalla

$$\mathrm{Var}(S(t)) = \lambda t \mathbb{E} X_1^2.$$

Todistus. Kokonaisvahinkomenon tapauksessa odotusarvon laskeminen on yksinkertaista. Käyttämällä hyväksi satunnaismuuttujien $N(t)$ ja X_i riippumattomuutta ja ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia, saadaan

$$\mathbb{E}(S(t)) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,\middle|\, N(t) \right) \right) = \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}X_i, \tag{4.1}$$

josta edelleen hyödyntämällä sitä, että $N(t)$ on Poisson jakautunut ja että kaikki X_i ovat samoin jakautuneita saadaan

$$\mathbb{E}(S(t)) = \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}X_i = \lambda t \mathbb{E} X_1.$$

Varianssia laskiessa voidaan käyttää hyväksi saatua kokonaisvahinkomenon odotusarvoa ja kokonaisvarianssilausetta 2.24. Tällöin, koska $\mathrm{Var}(N(t))$ ja $\mathrm{Var}(X_1)$ ovat äärellisiä ja satunnaismuuttujat $N(t)$ ja X_i ovat riippumattomia, käyttämällä kokonaisvahinkomenon $S(t)$ mallia saadaan

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,\middle|\, N(t)\right) &= \sum_{i=1}^{N(t)} \mathrm{Var}(X_1 \mid N(t)) \\ &= N(t)\,\mathrm{Var}(X_1 \mid N(t)) = N(t)\,\mathrm{Var}(X_1)\end{aligned}$$

ja

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,\middle|\, N(t)\right) = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbb{E}(X_1 \mid N(t)) = N(t)\mathbb{E}(X_1).$$

Kun käytetään hyväksi lausetta 2.24 sekä odotusarvon ja varianssin ominaisuuksia, saadaan kokonaisvahinkomenon varianssille kaava

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S(t)) &= \mathbb{E}[N(t)\,\mathrm{Var}(X_1)] + \mathrm{Var}[N(t)\mathbb{E}(X_1)] \\ &= \mathbb{E}(N(t))\,\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(N(t))(\mathbb{E}X_1)^2. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Kun tiedetään, että $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$ saadaan varianssiksi

$$\mathrm{Var}(S(t)) = \lambda t(\mathrm{Var}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2) = \lambda t\mathbb{E}(X_1^2).$$

Saadaan siis, että Cramér-Lundbergin mallissa kokonaisvahinkomenon odotusarvo $\mathbb{E}(S(t)) = \lambda t\mathbb{E}(X_1)$ ja varianssi $\mathrm{Var}(S(t)) = \lambda t\mathbb{E}(X_1^2)$. □

Tutkittaessa sellaisia vahinkoja, joita tapahtuu huomattavasti harvemmin, Poisson-prosessit eivät aina kuvaa parhaiten vahinkojen sattumista. Tällaisia vahinkoja voivat olla esimerkiksi suuret tuulivahingot, joissa yksittäisten vahinkojen välillä voi kulua hyvinkin pitkiä aikoja. Tutkimalla tanskalaisia palovahinkotapauksia on havaittu, että homogeeninen Poisson-prosessi mallintaa parhaiten vahinkojen sattumista lyhyellä aikavälillä, esimerkiksi vuoden aikajaksolla. Pidempiä ajanjaksoja tutkittaessa havaitaan, että Poisson-prosessin intensiteettifunktio λt ei ole vakio vaan vaihtelee tarkasteluajanjaksojen välillä. Tätä varten on mielekkäämpää olettaa, että vahinkojen väliset odotusajat noudattavat tiettyä jakaumaa. Tämän vuoksi määritellään *uusiutumisprosessi*.

4.1 Kokonaisvahinkomenon odotusarvo ja varianssi uusiutumisprosessissa

Malli 4.2. Olkoon $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan että ne kaikki ovat melkein varmasti positiivisia. Tällöin satunnaiskävelyn

$$T_0 = 0, \quad T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n, \quad n \geq 1$$

sanotaan olevan *uusiutumisjono* ja jonoa vastaavan laskuriprosessin

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}\ t \geq 0$$

sanotaan olevan *uusiutumisprosessi*. Sanotaan, että $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on uusiutumisprosessin N tapahtumien tapahtumisten ajankohtien jono ja $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on tapahtumien välinen aika.

Lause 4.3. *Homogeeniset Poisson-prosessit ovat uusiutumisprosesseja. [8, s.18]*

Todistus. Lauseessa 3.6 osoitettiin, että Poisson-prosessissa yksittäisten vahinkojen välinen odotusaika noudattaa Exp(λ)-jakaumaa, joten väite seuraa suoraan uusiutumisprosessin määritelmästä. □

Itse asiassa voidaan osoittaa myös, että uusiutumisprosessi, jossa odotusajat noudattavan eksponenttijakaumaa parametrilla λ, on Poisson-prosessi parametrilla λ. Tämä todistus sivuutetaan, mutta se löytyy Mikoschin teoksesta lauseesta 2.1.6. Mikoschin todistuksessa ensimmäinen osa todistaa että tietynlainen uusiutumisprosessi on Poisson-prosessi ja toinen osa todistaa tämän tutkielman lauseen 4.3.

Mikäli odotusajat noudattavat jotain muuta jakaumaa kuin eksponenttijakaumaa, joudutaan usein luopumaan monista Poisson-prosessin ominaisuuksista. Esimerkiksi yleisiesti uusiutumisprosesseissa ei voida tietää yksityiskohtaisesti mitä jakaumaa $N(t)$ noudattaa eikä jakauman odotusarvoa ja varianssia välttämättä tunneta täsmällisesti. Kuitenkin voidaan osoittaa, että homogeenisellä Poisson-prosessilla ja uusiutumisprosesseilla on useita asymptoottisia ominaisuuksia. Molemmat esimerkiksi noudattavat vahvaa suurten lukujen lakia, kun odotusaikojen odotusarvo $\mathbb{E}(W_1) = \lambda^{-1}$ on äärellinen. Tällöin $\mathbb{E}N(t)/t \to \lambda$, kun $t \to \infty$ ja yhtälöstä 4.1 saadaan kokonaisvahinkomenon odotusarvo uusiutumismallissa muotoon

$$\mathbb{E}S(t) = \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}X_1 = \lambda t\mathbb{E}X_1(1 - o(1)), \quad t \to \infty.$$

Huomautus. Nyt merkintä $o(1)$ tarkoittaa, että kun $t \to \infty$ niin $o(1) \to 0$. Vaihtoehtoinen tapa ilmaista odotusarvo ilman $o(1)$ merkintää on

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}S(t)}{t} = \lambda\mathbb{E}X_1.$$

Varianssin määrittämiseksi tarvitaan aputulos vahinkojen lukumäärän varianssista uusiutumismallissa. Aputulos on muunnos uusiutumisprosessien keskeisestä raja-arvolauseesta ja siinä uusiutumisprosessin varianssi määritellään tapahtumien välisten odotusaikojen odotusarvon ja varianssin avulla.

Apulause 4.4. ([8, s.60] ja [5, s.59]) Oletetaan että $0 < \mathbb{E}(W_1) < \infty$ ja $\mathrm{Var}(W_1) < \infty$. Tällöin

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}\,N(t)}{t} = \frac{\mathrm{Var}(W_1)}{(\mathbb{E}W_1)^3}.$$

Kokonaisvahinkomenon varianssi saadaan kaavasta 4.2, kun $\mathrm{Var}(W_1) < \infty$, $\mathrm{Var}(X_1) < \infty$ ja $\mathbb{E}(W_1) = \lambda^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S(t)) &= \mathbb{E}[N(t)]\,\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}[N(t)](\mathbb{E}X_1)^2 \\
&= \lambda t(1 - o(1))\,\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(W_1)\lambda^3 t(1 - o(1))(\mathbb{E}X_1)^2 \\
&= \lambda t(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(W_1)\lambda^2(\mathbb{E}X_1)^2(1 - o(1))).
\end{aligned}$$

Kun $N(t)$ on uusiutumisprosessi, kokonaisvahinkomenosta $S(t)$ käytetään nimeä *Sparre-Andersonin malli* tai *uusiutumismalli*. Tässä mallissa odotusarvo ja varianssi eivät ole yhtä tarkkoja kuin Cramér-Lundbergin mallissa, mutta niiden avulla voidaan päätellä, että kokonaisvahinkomeno kasvaa suunnilleen lineaarisesti suurilla t:n arvoilla. Tämä tarkoittaa, että koska kokonaisvahinkomeno kasvaa suurin piirtein lineaarisesti ajan t suhteen, myös vakuutusmaksutulojen tulisi kasvaa lineaarisesti ja mieluiten voimakkaammin kuin $\lambda\mathbb{E}X_1$. Tätä havainnollistetaan tarkemmin myöhemmin.

4.2 Vakuutuksen hinnoittelu

Määriteltyämme vakuutusyhtiön kokonaisvahinkomenon siirrymme tarkastelemaan vakuutuksen hinnoittelua. Vakuutustoiminnassa yksi perustavanlaatuisia kysymyksiä on miten vakuutuksenantaja pystyy hinnoittelemaan vakuutukset vakuutuksenottajille siten, että vakuutusmaksuista saatavat varat riittää kattamaan tulevat vakuutuskorvaukset. Määritellään *vakuutusmaksutulo* $p(t)$ deterministiseksi ajan t funktioksi, jolla kuvataan vakuutuksenantajalle maksettavaa vakuutusmaksutuloa. Käytännössä tämä muodostuu vakuutuksenottajien määräajoin, esimerkiksi kuukausittain tai vuosittain, maksamista *vakuutusmaksuista*. Tässä aliluvussa kokonaisvahinkomenoa mallinnetaan Cramér-Lundbergin mallilla merkintöjen yksinkertaistamiseksi.

Tulevaa kokonaisvahinkomenoa ei pystytä varmasti määrittämään johtuen nimenomaan siitä, että kokonaisvahinkomeno on satunnainen. Kokonaisvahinkomenoa arvioitaessa pystytään kuitenkin hyödyntämään sen tunnuslukuja, kuten aiemmin laskettua odotusarvoa ja varianssia. Intuitiivisesti voidaan ajatella, että jollain ajanhetkellä t vakuutuksenantaja kärsii tappiota, mikäli $p(t) < S(t)$ ja vastavuoroisesti tekee voittoa, kun $p(t) > S(t)$. Tästä syystä vakuutuksenantajan näkökulmasta on järkevää valita *varmuuslisä* $\rho > 0$ jolla "painotetaan"esimerkiksi kokonaisvahinkomenon odotusarvoa. Tällöin on saadaan

$$p(t) = (1+\rho)\mathbb{E}(S(t)) \quad \text{tai} \quad p(t) = (1+\rho)\lambda t\mathbb{E}(X_1),$$

jollain $\rho > 0$. Tästä havaitaan, että vakuutuksenantajan näkökulmasta toiminta on sitä turvallisempaa ja varmempaa mitä suurempi ρ valitaan. Käytännössä kuitenkin kaikki vahinkovakuutusta harjoittavat toimijat toimivat kilpailluilla markkinoilla, joissa liian suuren vakuutusmaksun periminen johtaa siihen, että vakuutuksenottajat eli asiakkaat todennäköisemmin valitsevat kilpailevan yhtiön. Tämä johtaisi vakuutussopimusten määrän laskuun, joka taas heikentää vakuutusyhtiöiden kilpailuasemaa ja ennen kaikkea poistaa yhtiöltä suurten lukujen lain tuoman hyödyn. Suurten lukujen laki näyttäytyy vakuutusyhtiössä seuraavassa muodossa:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \mathbb{E}(S(t)) = \lambda t \mathbb{E}(X_1) \qquad \text{a.s.},$$

kun t on riittävän suuri. Vakuutuksenantajalle tämä tarkoittaa sitä, että tarvitaan laaja vakuutuskanta, jotta vakuutusmaksutulo ja kokonaisvahinkomeno ovat tasapainossa. Vakuutusmaksun määräämiseen on valittavissa useita eri menetelmiä ja todellisuudessa siihen vaikuttavat monet tekijät niin vakuutuksenantajan tasolla kuin lainsäädännölliselläkin tasolla. Teoriassa kuitenkin vakuutusmaksutulon määrittäminen on yksinkertaista ja seuraavaksi käydään läpi joitain yksinkertaisimpia periaatteita, joista vakuutusyhtiö voi valita yhden, jonka avulla hinnoitella vakuutuskantansa.

- *Ekvivalenssiperiaate*. Tämä periaate määrittelee vakuutusmaksutulon $p(t)$ kokonaisvahinkomenon odotusarvon $\mathbb{E}S(t)$ avulla. Tällöin

$$p_E(t) = \mathbb{E}S(t).$$

  Vakuutuksenottaja maksaa tässä tapauksessa korvausta vakuutusturvasta ainoastaan vakuutuksesta maksettavien korvausten odotusarvon verran. Tätä voidaan yhdellä tavalla pitää reiluna riskin hintana, mutta käytännössä tämä on enemmän teoreettinen tulos. Tämä johtuu siitä, että oletusarvoisesti tällöin vakuutustoiminta ei tuottaisi voittoa tai tappiota, mutta todellisuudessa kokonaisvahinkomeno heittelee positiivisen varianssinsa ja tästä seuraavan keskihajonnan perusteella keskiarvon ympäillä ja korvausvastuun ollessa jonain vuonna korkea, ajatuisi vakuutuksenantaja todennäköisesti maksuvaikeuksiin. Myöhemmin osoitetaan, että ekvivalenssiperiaatteen käyttäminen hinnoittelussa johtaa vääjäämättä vakuutusyhtiön vararikkoon.

- *Odotusarvoperiaate*. Tätäkin periaatetta käytiin lyhyesti läpi aiemmin. Tässä kokonaisvahinkomenon keskiarvoa painotetaan jollain $\rho > 0$ ja näin saadaan

$$p_{OA}(t) = (1+\rho)\mathbb{E}S(t).$$

- *Varianssiperiaate*. Tässä periaatteessa kokonaisvahinkomenon odotusarvoon lisätään jollain $\alpha > 0$ painotettu kokonaisvahinkomenon varianssi ja saadaan

$$p_{VAR}(t) = \mathbb{E}S(t) + \alpha \operatorname{Var}(S(t)).$$

  Odotusarvoperiaatteessa pohjana on aiemmin mainittu suurten lukujen laki, eli oletus siitä, että riittävän pitkän ajan kuluessa kokonaisvahinkomenon keskiarvo lähestyy odotusarvoaan ja näin ollen vakuutuksenantaja kerää keskimäärin kunakin tarkasteluajanjaksona enemmän vakuutusmaksuja kuin maksaa korvauksia. Varianssiperiaate voidaan Cramér-Lundbergin mallissa mieltää asymptoottisessa mielessä ekvivalentiksi odotusarvoperiaatteen kanssa, sillä kuten kaavasta nähdään, $p_{VAR}(t) > \mathbb{E}S(t)$, sillä $\alpha > 0$, ja varianssin ominaisuuksista tiedetään, että kun $S(t)$ saa vaihtelevia arvoja, niin $\operatorname{Var}(S(t)) > 0$.

4.3 Vakuutusmaksun rakenne käytännössä

Yllä esitetty on enimmäkseen teoreettista ja yksinkertaistettua vakuutusmaksun määrittämistä. Käytännössä vakuutusmaksun voidaan katsoa koostuvan neljästä osasta: *riskimaksu*, *hoitokulukuormitus*, *riskilisä* ja *voittomarginaali*. Näiden päälle suomalaisessa kontekstissa tulevat vakuutusmaksuverot sekä tietyissä vakuutusluokissa vielä muut julkiset maksut, kuten esimerkiksi palosuojelu- ja liikenneturvallisuusmaksu. Nämä ovat kuitenkin vakuutuksenantajalle läpimaksettavia eriä, joten niitä ei tässä huomioida tämän tarkemmin.

Riskimaksun määrittäminen on ensimmäinen osa vakuutuksen hinnoittelua ja se voidaan edelleen jakaa kolmeen alakategoriaan. Määrittäminen aloitetaan riskien analysoinnista. Riskejä analysoidessa vakuutetut tai vakuutusta hakevat jaetaan luokkiin siten, että kuhunkin luokkaan valikoituu samankaltaisia riskejä. Merkittävä huomio tässä luokkiin jaossa on Poisson-prosessin *kompositio* ja *dekompositio*. Tämä tarkoittaa sitä, että usean toisistaan riippumattoman Poisson-prosessin summa on edelleen Poisson-prosessi ja vastavuoroisesti Poisson-prosessi voidaan jakaa toisistaan riippumattomiin Poisson-prosesseihin [4, 13.2.5 ja 13.2.13]. Kun riskit on saatu analysoitua ja kukin luokka saatu eriteltyä toisistaan, määritetään kullekin luokalle oma tariffinsa eli hinnoittelunsa. Hinnoittelussa käytetään apuna erilaisia tilastollisia menetelmiä ja näin pyritään saamaan valittua olennaisimmat tariffitekijät, eli luokkien ominaisuudet, jotta luodun tilastollisen mallin tulokset vastaisivat mahdollisimman paljon tilastoista saatua tulosta. Luokkiin jaetuista vahingoista on apua myös tilastojen saatavuuden suhteen, sillä yksittäisistä vahingoista on usein saatavilla huomattavasti enemmän aineistoa, kuin kokonaisvahinkomenosta. Kun tilastollinen malli on saatu luotua, sen ennustuskykyä, parametrien merkityksellisyyttä sekä muita merkityksellisimpiä tunnuslukuja vertaillaan toisiin luotuihin malleihin ja näistä vakuutuksenantajan päättävä taho, eli usein vakuutusyhtiön johto, valitsee käyttöön otettavan mallin.

Kun riskimaksu on saatu määritettyä, lähdetään analysoimaan mitä kustannuksia vakuutusten hoitaminen ja vakuutustoiminnan harjoittaminen aiheuttavat yhtiölle. Vakuutustoiminta työllistää muun muassa myyjiä, korvauskäsittelijöitä ja hallintoa. Nämä kustannukset jaetaan vakuutuskohtaisesti ja saatua kustannusta kutsutaan *hoitokulukuormitukseksi*. Hoitokulukuormitus jaotellaan edelleen kiinteiksi ja muuttuviksi kustannuksiksi ja nämä kustannukset vaihtelevat usein merkittävästi vakuutuslajeittain, riippuen usein siitä minkälaisesta ja minkä hintaisesta vakuutustuotteesta on kyse. Vahinkovakuutuksessa keskimäärin hoitokulukuormitus on noin 28%, mutta tutkittaessa yksittäisiä vakuutuslajeja on havaittu että esimerkiksi suurissa teollisuusvakuutuksissa kuormitus on noin 5%, kun taas pienissä massavakuutuksissa, kuten matka- ja ajoneuvovakuutuksissa, hoitokulukuormitus voi olla yli 40 %.

Näiden kahden osuuden lisäksi vakuutusmaksuun sisältyvät *riskilisä* ja *voittomarginaali*. Riskilisä määritellään kattamaan kokonaisvahinkomenon heilahtelusta johtuvaa vaihtelua. Kokonaisvahinkomeno voi puhtaan sattuman lisäksi vaihdella syklisesti esimerkiksi vuodenajan, sään tai taloudellisen tilanteen mukaan. Osaa syklisistä muutoksista, esimerkiksi ensimmäisten pakkasten vaikutuksia johtuvaa liikennevahinkojen määrän kasvua, pystytään ennustamaan, mutta toisia, kuten talouden syklejä on käytännössä mahdoton ennustaa tarkasti. Voittomarginaali on vakuutuksenantajan itse määrittelemä tuottovaade. Riippuen siitä, minkälainen vakuutuksenantajan yhtiömuoto on, saattaa voittomarginaalissa, kuten myös riskilisässä olla suurtakin vaihtelua. Osakeyhtiöillä voittomarginaali määrittyy pitkälti omistajien sijoitetun pääoman tuottovaateesta, kun taas keskinäisillä eli asiakkaiden omistamilla yhtiöillä, voittomarginaali on usein pienempi, mutta kriisitilanteessa keskinäisten yhtiöiden on hankalampi hankkia ulkoista pääomaa, jolloin yhtiön on järkevää veloittaa suurempaa riskilisää.

Mainitut osat sopivat hyvin massavakuutuksiin eli vakuutuksiin, joiden ehdot ovat kaikille vakuutuksenottajille samat eikä yksilöllisyyttä ole. Joissain vakuutustyypeissä on kuitenkin tyypillistä, että vakuutus hinnoitellaan yksilöllisesti ja vakuutuksenottaja voi omalla toiminnallaan vaikuttaa vakuutuksen hinnoitteluun. Tällöin puhutaan yksilöllisestä tariffoinnista ja bonuksista. Yksilöllistä tariffia käytetään suurempien asiakaskokonaisuuksien kanssa ja tunnetuin esimerkki bonusjärjestelmästä on ajoneuvovakuutuksesta tuttu vahingottomiin vuosiin pohjautuva palkkiojärjestelmä.

5 Vararikkotodennäköisyys

Kun vakuutus on saatu hinnoiteltua, muodostuu vakuutusyhtiölle vakuutusmaksuista kassavirtaa, jota kutsutaan *vakuutusmaksutuloksi*. Tämä kuvaa rahamäärää, jonka vakuutusyhtiö kerää asiakkailtaan vastineena siitä, että vahingon sattuessa ja korvausedellytysten täyttyessä vakuutusyhtiö korvaa asiakkailleen määritellyn korvauksen. Vakuutusmaksutuloa voidaan intuitiivisesti pitää kokonaisvahinkomenon vastapuolena ja yhdessä nämä muodostavat vakuutusyhtiölle portfolion, johon toisaalta virtaa rahaa ja josta toisaalta virtaa rahaa. Useinkaan nämä rahavirrat eivät kulje käsi kädessä. Vakuutusmaksutulo on yhtiökohtaisesti melko hyvin ennustettavissa, sillä se perustuu ennalta sovittuihin vakuutusmaksuihin, joita maksetaan esimerkiksi kuukausittain tai vuosittain. Kokonaisvahinkomeno puolestaan, kuten aiemmin saimme tietää, on pitkälti satunnaista. Puhtaan satunnaista kokonaisvahinko ei kuitenkaan ole, sillä siihen vaikuttavat muun muassa aiemmin käsitellyt syklit.

Vakuutusmaksutulon ja kokonaisvahinkomenon avulla voidaan vakuutusyhtiölle muodostaa yksinkertainen portfolio, jolla mallinnetaan vakuutusyhtiöön virtaavan ja sieltä virtaavan kassavirran määrää ja niiden välistä suhdetta. Tässä luvussa esitellään ensin tämä *vakuutusyhtiön ylijäämä*. Tätä käytetään edelleen tutkittaessa sitä, että milloin vakuutusyhtiö saattaa joutua vararikkoon ja mikä tärkeämpää, miten välttää vararikko. Luku perustuu Tomas Mikoschin kirjan Non-Life Insurance Mathematics lukuun 4. [8, s.151-161]

5.1 Vakuutusyhtiön ylijäämä

Tässä luvussa kokonaisvahinkomenoa mallinnetaan prosessilla

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

jossa $N(t)$ on määritelmän 4.2 mukainen uusiutumisprosessi ja vahingot X_i ovat positiivisia ja riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla on riippumattomat samoin jakautuneet odotusajat W_i. Lisäksi vahinkojen kokojen muodostama jono $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on riippumaton uusiutumisprosessista $N(t)$. Malli koskee tällöin lauseen 4.3 nojalla myös tapausta, jossa $N(t)$ on Poisson-prosessi.

Oletetaan lisäksi tasainen vakuutusmaksutulo $p(t)$ ja yksinkertaisuuden vuoksi vielä, että p on deterministinen funktio ja lineaarinen eli

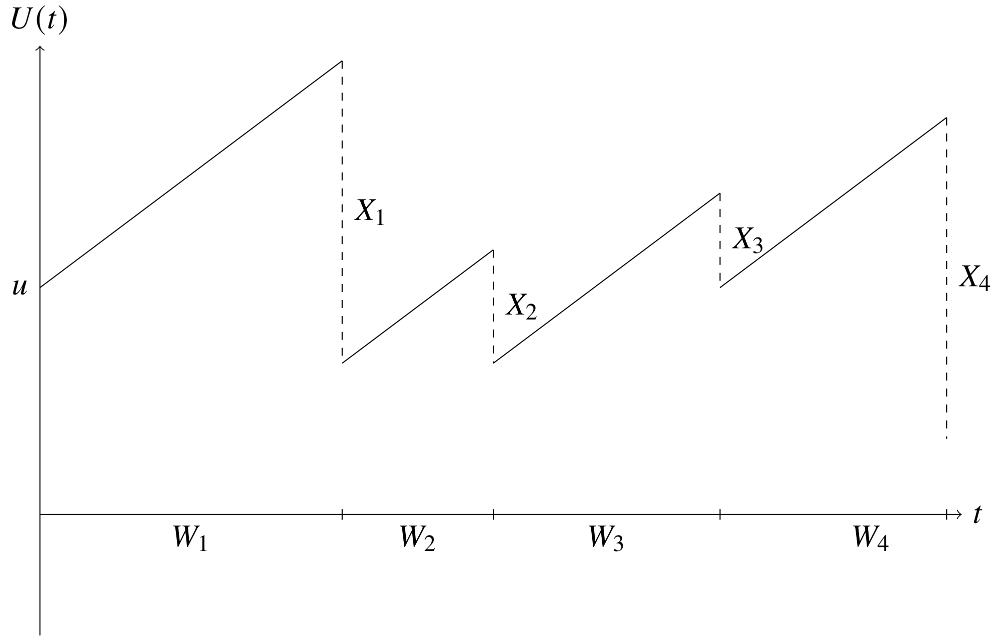
$$p(t) = ct, \quad c > 0.$$

Tässä vakio $c > 0$ ilmaisee vakuutusmaksutulon kertymisnopeutta. Tällöin *vakuutusyhtiön ylijäämä* määritellään

$$U(t) = u + p(t) - S(t),$$

jossa $u = U(0)$ on vakuutusyhtiön alkupääoma ajanhetkellä $t = 0$. $U(t)$ kuvaa siis vakuutusyhtiön varallisuutta ajanhetkellä t. Jos $U(t) < 0$, vakuutusyhtiöllä ei ole jäljellä varallisuutta, ja jos $U(t) > 0$, vakuutusyhtiöllä on varallisuutta. Malli on yksinkertaistus todellisuudesta, sillä kokonaisuudessaan vakuutusyhtiön tuottoihin ja kuluihin vaikuttavat muutkin seikat kuin alkupääoma, vakuutusmaksutulo ja korvausmeno.

Kuvassa 5.1 havainnollistetaan vakuutusyhtiön varallisuuden muuttumista ajan t kuluessa. Ajanhetkellä $t = 0$ yhtiöllä on alkupääomaan u:n verran ja odotusajan W_1 yhtiö kerryttää vakuutusmaksutuloa tasaisesti. Vahingon X_1 tapahtuessa yhtiö menettää varoja X_1:n suuruisen määrän ja taas kerryttää odotusajan W_2 vakuutusmaksutuloa kunnes seuraava vahinko tapahtuu. Kuten kuviosta huomataan ylijäämä $U(t)$ on koko ajan positiivinen, joten vakuutusyhtiö ei joudu *vararikkoon*.



Kuva 5.1. Havainnollistus vahinkojen ja vahinkojen välisen ajan vaikutuksesta vakuutusyhtiön vararikkoon.

Huomautus. Mallissa ajan hetkellä $t = 0$ vakuutusyhtiöllä on alkupääomaa u:n verran. Alkupääoma kytkeytyy vahvasti vakuutusyhtiön vakavaraisuuteen ja vakavaraisuuspääomaan. Niin vakuutusyhtiön kuin sen asiakkaidenkin näkökulmasta on suotavaa, että vakuutusyhtiöllä on riittävästi pääomaa siihen, että se kykenee selviämään mahdollisista vakuutuskorvauksista. Konkreettisesti vakavaraisuus ilmenee pääomapuskureina, joita vakuutusyhtiöiltä vaaditaan erilaisten riskien varalle. Suomessa ja muualla EU:ssa vakavaraisuuden laskenta perustuu EU:n Solvenssi II -direktiiviin, jonka avulla laskenta on unionin alueella yhdenmukaista. Direktiivi jakautuu kolmeen pääosaan: määrällisiin ja laadullisiin vakavaraisuusvaatimuksiin sekä vaadittavaan raportointiin. Määrällisissä vaatimuksissa yhtiölle määritetään joko standardikaavan mukaan tai erityistapauksissa yrityksen oman sisäisen kaavan mukaan. Oleellisimmat määritettävät seikat ovat vakavaraisuusvaatimus SCR ja vähimmäisvakavaraisuusvaatimus MCR. SCR kuvastaa tasoa, jossa vakuutusyhtiö selviää vastuistaan laskennallisesti 99,5% varmuudella vuoden mittaisella periodilla. Tätä rajaa alempi MCR kuvastaa tilannetta, jonka alittuessa vakuutuksenottajien etuihin kohdistuu merkittävää riskiä. MCR lasketaan vakuutuslajikohtaisesti ja tuloksena on euromääräinen minimiraja vakavaraisuuspääomalle. SCR määritetään kerran vuodessa tai jos riskit jostain syystä muuttuvat merkittävästi ja MCR vastaavasti määritetään neljännesvuosittain. Molemmat raportoidaan valvontaviranomaisille ja mikäli vakuutusyhtiö käyttää muuta kuin standardikaavaa vakavaraisuuden laskemiseen, tulee myös laskentaperusteet dokumentoida tarkkaan. Laadullisiin vakavaraisuusvaatimuksiin kuuluu muun muassa riskienhallinnan prosessin määrittäminen. [10, s.153-164]

5.2 Vararikko, vararikkohetki ja vararikkotodennäköisyys

Vararikko tarkoittaa siis tilannetta, jossa vakuutusyhtiön pääoma $U(t)$ putoaa nollan alapuolelle. Käytetään vararikosta merkintää R. Tällöin vararikko määritellään tapahtumana

$$R = \{U(t) < 0 \quad \text{jollain } t > 0\}.$$

Tästä edelleen voidaan määritellä *vararikkohetki* T, joka määritellään kaavalla

$$T = \inf\{t > 0 \mid U(t) < 0\}.$$

Tällöin vararikko voidaan ilmaista myös muodoissa

$$R = \bigcup_{t \geq 0} \{U(t) < 0\} = \left\{ \inf_{t \geq 0} U(t) < 0 \right\} = \{T < \infty\}.$$

Vararikkohetki T on siis ensimmäinen sellainen ajanhetki $t > 0$, jolloin vakuutusyhtiön varallisuus putoaa nollaan tai negatiiviseksi. *Vararikkotodennäköisyys* määritellään ehdollisena todennäköisyytenä

$$\psi(u) = \mathbb{P}(R \mid U(0) = u) = \mathbb{P}(T < \infty), \quad u > 0.$$

Vararikon määritelmän avulla ja tutkimalla vakuutusyhtiön varallisuutta hetkellä t, voidaan vararikko ja vararikkotodennäköisyys ilmaista myös vahinkojen odotusaikojen W_i, vahinkojen kokojen X_i ja vakuutusmaksun kertymänopeuden avulla. Tiedetään, että vararikko voi tapahtua vain vahingon $n \geq 1$ tapahtumahetkellä $t = T_n$, sillä U kasvaa lineaarisesti välillä $[T_n, T_{n+1}[$. Tällöin saadaan, että

$$\begin{aligned}
R &= \left\{ \inf_{t \geq 0} U(t) < 0 \right\} = \left\{ \inf_{n \geq 1} U(T_n) < 0 \right\} \\
&= \left\{ \inf_{n \geq 1} [u + p(T_n) - S(T_n)] < 0 \right\} \\
&= \left\{ \inf_{n \geq 1} \left[u + cT_n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right] < 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Viimeisessä kohdassa hyödynnetään tietoa siitä, että kun odotusajat $W_j > 0$ a.s. kaikilla $j \geq 1$, niin

$$N(T_n) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq T_n\} = n \quad \text{a.s.}$$

Merkitään sitten

$$Z_n = X_n - cW_n, \quad V_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, \quad V_0 = 0.$$

Tällöin kun kiinnitetään alkupääoma u, voidaan vararikkotodennäköisyys $\psi(u)$ ilmaista muodossa

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\inf_{n\geq 1}(-V_n) < -u\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1}(V_n) > u\right).$$

Koska jonot $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koostuvat riippumattomista samoin jakautuneista satunnaismuuttujista ja jonot ovat toisistaan riippumattomia, vararikkotodennäköisyys $\psi(u)$ on satunnaiskävelyn $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tulkintaa. Todennäköisyyden yksityiskohtainen tulkinta on haastavaa, sillä mallin käyttö vaatii monimutkaisten funktionaalisten satunnaisprosessien tuntemista. Päätavoite on kuitenkin välttää tilanne, jossa vararikko tapahtuu todennäköisyydellä 1. Lisäksi todennäköisyys siihen, että satunnaiskävely $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ylittää rajan u tulisi olla niin pieni, että vararikko voidaan voidaan käytännössä poissulkea, kun alkupääoma u on riittävän suuri.

Satunnaiskävelyllä $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on joitain kiinnostavia ominaisuuksia. Esitellään niistä yksi lyhyesti, yksityiskohtaisempi kuvaus löytyy Mikoschin kirjasta sivuilta 154-155. Satunnaiskävely $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noudattaa suurten lukujen lakia, eli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} = \mathbb{E}Z_1 \text{ lähes varmasti.}$$

Tällöin voidaan päätellä, että vararikko tapahtuu varmasti eli, $\psi(u) = 1$, kaikilla kiinteillä $u > 0$, kun $\mathbb{E}(W_1)$ ja $\mathbb{E}(X_1)$ ovat äärellisiä ja ehto

$$\mathbb{E}Z_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 \geq 0$$

on voimassa. Vararikon välttämiseksi vakuutusyhtiön tulisi mitoittaa vakuutusmaksutulonsa $p(t) = ct$ siten, että $\mathbb{E}Z_1 < 0$. Tätä ehtoa kutusutaan *nettotuottoehdoksi*.

Määritelmä 5.1 (Nettotuottoehto (Net profit condition))**.** Sanotaan, että uusiutumismalli täyttää *nettotuottoehdon* (engl. net profit condition, NPC) kun

$$\mathbb{E}Z_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 < 0.$$

Nettotuottoehdon ajatus ovat melko intuitiiviivinen. Odotusarvojen $\mathbb{E}W_1$ ja $\mathbb{E}X_1$ äärellisyys ovat odotettavissa, sillä vahinkoja tapahtuu eli vahinkojen välisen ajan W_i on oltava äärellinen ja toisaalta voidaan olettaa, että vakuutusyhtiön maksamilla korvauksilla on yläraja, jolloin vakuutusyhtiön maksamien korvausten odotusarvo $\mathbb{E}X_1$ on myös äärellinen. Itse mallissa vakuutusmaksuja kerätään nopeudella c vahinkojen välisinä aikona W_i, ja jotta vakuutusyhtiö välttyy vararikolta, tulee näiden kerättyjen vakuutusmaksujen odotusarvon olla suurempi kuin odotettavissa olevien korvausten määrä $\mathbb{E}X_1$. Näin saavutetaan tilanne, jossa vakuutusyhtiöön virtaava kassavirta on keskimäärin suurempi kuin sieltä keskimäärin pois virtaava. Tämä ei luonnollisesti tarkoita, että vararikko vältettäisiin varmasti, sillä tässä otetaan huomioon vain keskiarvot eikä ollenkaan todellisten arvojen vaihtelua keskiarvon ympärillä. Tätä käsitellään tarkemmin seuraavassa aliluvussa.

Esimerkki 5.2. Tutkitaan nettotuottoehdon täyttymistä kahdessa eri tapauksessa. Luvussa 4.2 käsiteltiin muutamia tapoja vakuutuksen hinnoitteluun. Valitaan näistä käsittelyyn ekvivalenssiperiaate ja odotusarvoperiaate. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi että kokonaisvahinkomeno määritetään Cramér-Lundbergin mallin avulla.

Ekvivalenssiperiaatteessa vakuutuksen hinta määriteltiin kokonaisvahinkomenon odotusarvon perusteella, eli

$$p_E(t) = \mathbb{E}S(t) = \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}X_1 = \lambda t\mathbb{E}X_1 = \frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1}t,$$

sillä W_1 on eksponenttijakautunut eli $\mathbb{E}W_1 = \frac{1}{\lambda}$. Kun oletetaan nettotuottoehdon mukaisesti että $p(t) = ct$ saadaan, että $c = \mathbb{E}X_1/\mathbb{E}W_1$. Kun tämä sijoitetaan nettotuottoehdon yhtälöön saadaan

$$\mathbb{E}Z_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 = \mathbb{E}X_1 - \frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1}\mathbb{E}W_1 = \mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_1 = 0.$$

Tällöin nettotuottoehdon mukaan ekvivalenssiperiaate johtaa varmuudella vararikkoon, mikä tukee periaatteen yhteydessä esitettyä intuitiota.

Tutkitaan sitten odotusarvoperiaatetta, jossa kokonaisvahinkomenon odotusarvoa painotetaan vakiolla $\rho > 0$. Tällöin vakuutusmaksutulo on muotoa

$$p_{OA}(t) = (1+\rho)\mathbb{E}S(t) = (1+\rho)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1}t,$$

jolloin

$$c = (1+\rho)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1}$$

ja

$$\mathbb{E}Z_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 = -\rho\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1} < 0.$$

Odotusarvoperiaate täyttää nettotuottoehdon, mutta kuten aiemmin todettiin, tämä tarkoittaa vasta sitä, että vararikon mahdollisuus saattaa olla jokin muu kuin 1.

5.3 Lundbergin epäyhtälö

Seuraavaksi tutkitaan vararikkotodennäköisyyden $\psi(u)$ ylärajaa. Oletetaan että kokonaisvahinkomeno noudattaa uusiutumismallia, joka toteuttaa lauseen 5.1 nettotuottoehdon. Lisäksi oletetaan, että vahinkojen lukumäärän satunnaismuuttujalla X on määritelmän 2.18 mukainen momenttifuntio

$$m_{X_1}(h) = \mathbb{E}e^{hX_1}$$

kun $h \in (-h_0, h_0)$ missä $h_0 > 0$. Tällöin Markovin epäyhtälön nojalla kun $h \in (0, h_0)$ ja $x > 0$,

$$\begin{aligned} P(X_1 > x) \leq P(X_1 \geq x) &= P(e^{hX_1} \geq e^{hx}) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}e^{hX_1}}{e^{hx}} \\ &= e^{-hx}m_{X_1}(h). \end{aligned}$$

Tulos $P(X_1 > x) \leq e^{-hx} m_{X_1}(h)$ tarkoittaa, että todennäköisyys $P(X_1 > x)$ vähenee nollaan eksponentiaalisen nopeasti. On havaittu, että tosielämän vahinkojen kokojen tapauksessa tämä ei pidä aina paikkaansa, mutta kuitenkin Cramérin ja Lundbergin alkuperäisessä työssä tämä ehto on käytössä. Tätä ehtoa kutsutaan *pienten vahinkojen ehdoksi* ja tämän ehdon toteuttaa muun muassa määritelmän 2.28 normaalijakauma.

Määritelmä 5.3. Olkoon Z määritelmässä 5.1 määritelty satunnaismuuttuja, jolla on momentit generoiva funktio jossain origon ympäristössä $(-h_0, h_0)$, $h_0 > 0$. Tällöin mikäli on olemassa positiivinen yksikäsitteinen r, joka toteuttaa yhtälön

$$m_{Z_1}(r) = \mathbb{E}e^{rZ_1} = \mathbb{E}e^{r(X_1 - cW_1)} = 1,$$

sitä kutsutaan *sovituskertoimeksi* tai *Lundbergin eksponentiksi*.

Tulee kuitenkin huomata, että momenttifuntkion olemassaolo ei aina takaa sovituskertoimen olemassaoloa.

Sovituskerrointa käytetään yhden riskiteorian klassisimman tuloksen määrittelyssä. Tämä lause tunnetaan *Lundbergin epäyhtälönä*.

Lause 5.4 (Lundbergin epäyhtälö)**.** *Olkoon $S(t)$ uusiutumisprosessi, joka toteuttaa lauseen 5.1 nettotuottoehdon. Oletetaan lisäksi, että määritelmässä 5.3 määritelty sovituskerroin r on olemassa. Tällöin vararikkotodennäköisyydelle $\psi(u)$ pätee kaikilla alkupääomilla $u > 0$ epäyhtälö*

$$\psi(u) \leq e^{-ru}.$$

Lauseen perusteella vararikkotodennäköisyydellä on yläraja, joka määrittyy sovituskertoimen r ja alkupääoman u avulla. Mitä suurempi alkupääoma, sitä pienemmäksi vararikkotodennäköisyys muodostuu. Toisaalta voidaan myös sanoa, että pienempi sovituskerroin lisää vararikon todennäköisyyttä. Käytännössä tulos tarkoittaa että pienten vahinkojen tapauksissa riittävän suurella alkupääomalla u vakuutusyhtiön vararikon todennäköisyys saadaan hyvin pieneksi.

Todistus. Käytetään Lundbergin epäyhtälön todistamiseen induktiota. Merkitään

$$\psi_n(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} V_k > u\right) = \mathbb{P}(V_k > u \text{ jollain } k \in \{1, \ldots, n\})$$

ja havaitaan, että kun $n \to \infty$, vararikkotodennäköisyydelle pätee $\psi_n(u) \uparrow \psi(u)$ kaikilla $u > 0$. Tällöin riittää todistaa, että kaikilla $n \geq 1$ ja $u > 0$

$$\psi(u) \leq e^{-ru}.$$

Todistetaan väite ensin, kun $n = 1$. Hyödyntämällä määritelmän 2.13 Markovin epäyhtälöä ja sovituskertoimen ominaisuutta saadaan

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &= P(V_1 > u) \leq P(V_1 \geq u) = P(e^{rV_1} \geq e^{ru}) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(e^{rV_1})}{e^{ru}} = \frac{\mathbb{E}(e^{rZ_1})}{e^{ru}} = e^{-ru} m_{Z_1}(r) \\
&= e^{-ru}.
\end{aligned}$$

Väite siis pätee kun $N = 1$. Kiinnitetään seuraavaksi $n = k \geq 1$ ja tehdään induktio-oletus, että väite pätee kun $n = k$. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että satunnaismuuttujalla Z_1 on tiheysfunktio. Merkitään tätä tiheysfunktiota f_{Z_1}:llä. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\psi_{k+1}(u) &= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq n \leq k+1} V_n > u \right) \\
&= \mathbb{P}(Z_1 > u) + \mathbb{P}\left(\max_{2 \leq n \leq k+1} V_n > u, Z_1 \leq u \right) \\
&= \mathbb{P}(Z_1 > u) + \mathbb{P}\left(\max_{2 \leq n \leq k+1} (Z_1 + (V_n - Z_1) > u, Z_1 \leq u \right) \\
&= \int_u^\infty f_{Z_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^u f_{Z_1}(x)\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq n \leq k} (x + V_n) > u \right) \mathrm{d}x \\
&= p_1 + p_2
\end{aligned}
$$

Nyt tutkitaan erikseen todennäköisyyksiä p_1 ja p_2. Tutkitaan ensin p_2:ta; hyödyntämällä induktio-oletusta saadaan

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \int_{-\infty}^u f_{Z_1}(x)\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq n \leq k} (x + V_n) > u \right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^u f_{Z_1}(x)\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq n \leq k} V_n > u - x \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^u f_{Z_1}(x)\psi_k(u - x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^u f_{Z_1}(x)e^{r(x-u)}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Vastaavasti arvioimalla integrandia ylöspäin saadaan

$$
p_1 \leq \int_u^\infty f_{Z_1}(x)e^{r(x-u)}\,\mathrm{d}x.
$$

Hyödyntämällä sovituskertoimen r ominaisuutta ja momenttifunktion ominaisuuksia saadaan

$$
\begin{aligned}
\psi_{k+1}(u) &= p_1 + p_2 \\
&\leq \int_{-\infty}^u f_{Z_1}(x)e^{r(x-u)}\,\mathrm{d}x + \int_u^\infty f_{Z_1}(x)e^{r(x-u)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^\infty f_{Z_1}(x)e^{r(x-u)}\,\mathrm{d}x = e^{-ru} \int_{-\infty}^\infty f_{Z_1}(x)e^{rx}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{-ru} m_{Z_1}(r) = e^{-ru}.
\end{aligned}
$$

Näin ollen väite pätee myös kun $n = k + 1$, joten induktioperiaatteen nojalla väite on tosi. $\square$

Tutkitaan seuraavaksi vararikkotodennäköisyyden ylärajaa ja sovituskerrointa ensin yleisesti Cramér-Lundbergin mallissa ja sen jälkeen esimerkin avulla.

Esimerkki 5.5. Käytetään Cramér-Lundbergin mallia, jossa vahinkoja tapahtuu Poisson-prosessin mukaisesti parametrilla λ ja jossa yksittäisten vahinkojen koot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja noudattavat eksponentiaalijakaumaa parametrilla γ. $\mathrm{Exp}(\gamma)$ jakautuneen satunnaismuuttujan momentit generoiva funktio on muotoa

$$m(h) = \frac{\gamma}{\gamma - h}.$$

Tämän ja lauseen 2.19 avulla funktion $Z_1 = X_1 - cW_1$ momenttifunktioksi saadaan

$$m_{Z_1}(h) = m_{X_1}(h) m_{cW_1}(-h) = \frac{\gamma}{\gamma - h}\frac{\lambda}{\lambda + ch}, \qquad \frac{-\lambda}{c} < h < \gamma.$$

Tällöin, kun ratkaistaan sovituskerroin yhtälöstä $m_{Z_1}(h) = 1$, saadaan yhtäpitävät yhtälöt

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\gamma - h}\frac{\lambda}{\lambda + ch} &= 1 \\
\frac{\gamma\lambda}{\gamma\lambda + \gamma ch - \lambda h - ch^2} &= 1 \\
\gamma\lambda + \gamma ch - \lambda h - ch^2 &= \gamma\lambda \\
\gamma ch - \lambda h - ch^2 &= 0 \\
h(\gamma c - \lambda - ch) &= 0.
\end{aligned}$$

Koska r on määritelmän 5.3 mukaan positiivinen, se voidaan saada ainoastaan yhtälön $\gamma c - \lambda - ch = 0$ ratkaisuna. Tämä yhtälö voidaan ilmaista muodossa

$$h = \gamma - \frac{\lambda}{c}.$$

Nyt voidaan tarkastella tätä yhtälöä määritelmän 5.1 nettotuottoehdon avulla. Koska oletettiin, että malli toteuttaa nettotuottoehdon ja λ, γ ja c ovat positiivisia,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1} = \frac{\lambda}{\gamma} &< c \text{ eli} \\
\gamma &> \frac{\lambda}{c}.
\end{aligned}$$

Tällöin saatu ratkaisu kelpaa sovituskertoimeksi eli

$$r = \gamma - \frac{\lambda}{c} > 0$$

on yhtälön $m_{Z_1}(h)$ yksikäsitteinen positiivinen vastaus. Esimerkissä 5.2 tarkasteltiin odotusarvoperiaatteen mukaista hinnoittelua. Tällöin saatiin, että

$$c = \frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1}(1 + \rho) = \frac{\lambda}{\gamma}(1 + \rho),$$

jossa ρ oli varmuuslisä, jolla kokonaisvahinkomenon odotusarvoa painotettiin. Siis

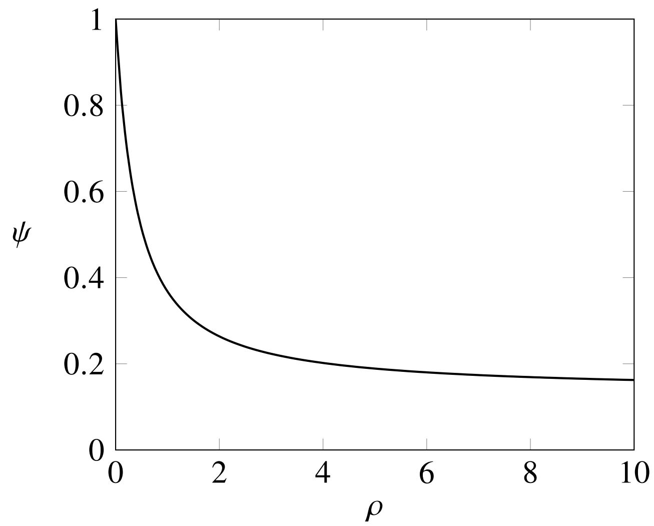
$$r = \gamma - \frac{\lambda}{c} = \gamma \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Vararikkotodennäköisyyden ylärajaksi saadaan Cramér-Lundbergin mallissa

$$\psi(u) \leq \exp\left\{ -\gamma \frac{\rho}{1+\rho} u \right\}.$$

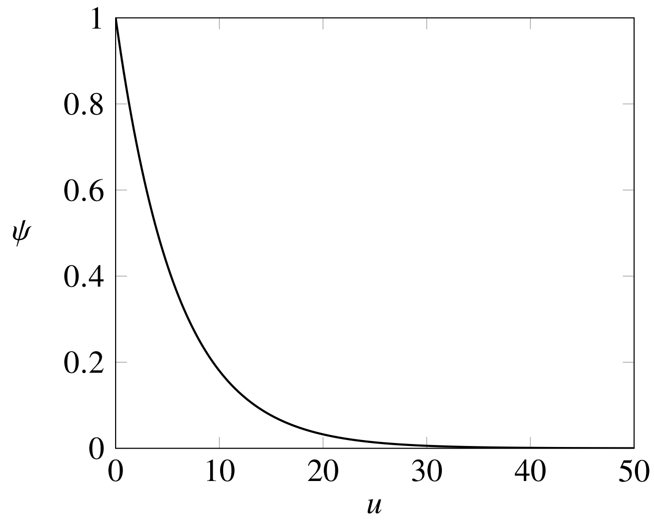
Tämän tuloksen avulla voimme tarkastella lisää vararikkotodennäköisyyden ylärajaa ja havaita kolme seikkaa. Ensimmäiseksi, kuten aiemmin jo todettiin, vararikon todennäköisyys on sitä pienempi, mitä enemmän alkupääomaa vakuutusyhtiöllä on. Toiseksi havaitaan, että varmuuslisän ρ suuruus ei vaikuta merkittävästi vararikkotodennäköisyyteen suurilla ρ arvoilla, sillä $\rho/(1+\rho) \uparrow 1$,kun $\rho \uparrow \infty$. Vakuutusyhtiön ei siis ole järkevää asettaa vakuutusmaksuihin kohtuuttoman suurta varmuuslisää vararikon välttämiseksi. Kolmanneksi havaitaan, että yksittäisten vahinkojen suuruuden keskiarvo vaikuttaa käänteisesti vararikkotodennäköisyyteen eli mitä pienempi yksittäisen vahingon koon odotusarvo, sitä pienempi on myös vararikon todennäköisyys.

Kuva 5.2 havainnollistaa tilannetta, jossa kiinnitetään $u = 10$ ja $\gamma = 0,2$. Tällöin havaitaan, että varmuuslisän ρ kasvattamisella ei enää tietyn pisteen jälkeen merkittävää vaikutusta vararikkotodennäköisyyden pienentymiseen.



Kuva 5.2. Havainnollistus vararikkotodennäköisyydestä, jossa alkupääoma ja yksittäisen vahingon koko ovat kiinteitä ja varmuuslisä ρ kasvaa.

Kuvassa 5.3 kiinnitetään $\gamma = 0,2$ ja $\rho = 6$ Tällöin havaitaan, että kun u kasvaa, se painaa hyvin tehokkaasti vararikkotodennäköisyyden $\psi(u)$ lähes nollaan.



Kuva 5.3. Vararikkotodennäköisyys tilanteessa, jossa yksittäisen vahingon koko ja varmuuslisä ovat kiinteitä ja alkupääoma u kasvaa.

5.4 Vararikkotodennäköisyys suurten vahinkojen tapauksessa

Sovituskertoimen yhteydessä esitettiin oletus siitä, että nettotuottoehdon satunnaismuuttujalla Z on momenttifunktio jollain $h \in (-h_0, h_0)$, $h_0 > 0$. Tätä ehtoa kutsuttiin pienten vahinkojen ehdoksi. Vararikkotodennäköisyyttä voidaan tutkia myös suurten vahinkojen tapauksessa ja tästä Mikosh esittelee varsin mielenkiintoisen tuloksen. Pienten ja suurten vahinkojen tapauksissa vararikko seuraa hyvin erilaisista tilanteista. Pienten vahinkojen tapauksessa vararikko on seuraus useista epätyypillisistä vahingoista, kun taas suurten vahinkojen tapauksessa vararikko tapahtuu yhden erittäin suuren vahingon seurauksena.

2000-luvulla erityisesti suuret vahingot ovat aiheuttaneet haasteita vakuutusyhtiöille. Luonnonilmiöt kuten maanjäristykset ja erilaiset myrskyt sekä ihmisten toiminnasta aiheutuvat vahingot, kuten konkurssit, terrorismi, mellakat ja ympäristön saastuminen aiheuttavat usein niin massiivisia vahinkoja, että ne riittäisivät ajamaan yksittäisen vakuutusyhtiön vararikkoon. Esimerkiksi suurin yksittäinen vahinko vakuutusmarkkinoille eli vuonna 2005 Yhdysvaltoihin iskenyt pyörremyrsky Katrina aiheutti n. 72 miljardin USD vahingot ja 9.11.2001 WTC-torneihin kohdistunut terrori-isku aiheutti n.23 miljardin dollarin suuruiset vahingot [10, s.473] Yhdysvaltalaisen Insurance Information Instituten mukaan vuonna 2005 suuret katastrofivahingot johtivat siihen, että kaikki vakuutusmaksuina kerättävät maksut kuluivat korvauksiin, kuluihin tai vastuuvelan kartuttamiseen [6]. Tällaisia tapauksia varten vakuutusyhtiöt voivat vakuuttaa edelleen, joko kokonaan tai osittain, toisessa vakuutushtiössä sellaisia riskejä, joita vakuutusyhtiö ei joko pysty vakuuttamaan itse tai ei syystä tai toisesta halua vakuuttaa. [10, s.472] Tällaista toimintaa kutsutaan *jälleenvakuuttamiseksi* ja tutkimme sitä seuraavassa luvussa lisää.

6 Jälleenvakuutus

Tässä luvussa keskustellaan jälleenvakuuttamisesta yleisesti. Luku perustuu pääosin Jukka Rantalan ja Esko Kivisaaren teokseen Vakuutusoppi, muut lähteet on ilmoitettu lähdekohtaisesti. Luvussa esitellään ensin jälleenvakuuttamisen konsepti sekä tärkeimmät termit. Tämän jälkeen käydään läpi erilaisia jälleenvakuutustekniikoita ja annetaan esimerkkejä niiden toiminnasta. Lopuksi käydään läpi muita tapoja jälleenvakuuttamisen lisäksi, joilla vakuutusyhtiöt voivat siirtää riskiä toiselle vakuutusyhtiölle. [10, s. 472-484]

Jos vakuutusyhtiö ei halua tai pysty jostain syystä kantamaan koko vakuutuskantaansa kohdistuvaa riskiä, vakuutusyhtiö voi jälleenvakuuttaa koko tai vain osan omaa kantansa toisessa yhtiössä. Tällöin vakuutusyhtiötä, jonka vakuutuskanta vakuutetaan edelleen toisessa yhtiössä sanotaan *ensivakuuttajaksi* tai *cedentiksi* (engl. cedent) ja vakuutuskannan jälleenvakuuttajaa sanotaan *jälleenvakuuttajaksi* (engl. reinsurer). Jälleenvakuuttajat ovat usein jälleenvakuuttamiseen erikoistuneita yhtiöitä, jotka joko ottavat vakuutuskannan omalle vastuulleen tai vakuuttavat sen kokonaan tai osittain edelleen toisella jälleenvakuuttajalla. Myös muut vakuutusyhtiöt voivat toimia jälleenvakuuttajina, mutta varsinkin Suomessa ulkomaisten yhtiöiden jälleenvakuuttaminen on vähentynyt merkittävästi 1990-luvulta lähtien johtuen mm. hankalasti ennustettavista vahinkotapahtumista ja pitkistä väleistä vahinkotapahtuman ja korvausten maksun välillä. Jälleenvakuuttaminen johtaa parhaimmillaan tilanteeseen, jossa riskit jakautuvat useiden eri vakuutusyhtiöiden kannettavaksi ympäri maailman ja näin pienennetään yksittäiseen vakuutusyhtiöön kohdistuvaa vararikkoriskiä.

Jälleenvakuutus on siis vakuutusyhtiöiden välistä vakuuttamista, jossa ensivakuuttaja ottaa jälleenvakuuttajalta vakuutuksen sen varalta, että ensivakuuttaja joutuu korvausvastuuseen itse myöntämästään vakuutuksesta. Vastineeksi tästä ensivakuuttaja maksaa jälleenvakuuttajalle vakuutusmaksua, joka on usein sidonnainen ensivakuuttajan keräämään vakuutusmaksuun. Vakuutukseen sisältyy erilaisia ehtoja, kuten mahdollinen *omapidätysosuus* eli ensivakuuttajan vastuulle jäävä osuus. Tämän lisäksi jälleenvakuutustapoja on useita erilaisia. Ensivakuuttaja voi myös tehdä jälleenvakuutussopimuksen ennen varsinaisen vakuutussopimuksen tekoa vakuutuksen ottajan kanssa. Tällä tavoin ensivakuuttaja varmistaa ennen varsinaisen vakuutussopimuksen tekemistä, että jälleenvakuutus suojaa ensivakuuttajaa suurelta korvausvastuulta. Jälleenvakuutussopimus ei kuitenkaan koske tilannetta, jossa ensivakuuttajan ja alkuperäisen vakuutuksenottajan välinen vakuutussopimus ei vielä ole voimassa, vaan sisältää ehdon siitä, että jotta jälleenvakuutussopimus olisi voimassa, ensivakuuttajalla tulee olla vakuutussopimus vakuutuksenottajan kanssa. Näin estetään se, että ensivakuuttaja ei saa tuottoa jälleenvakuutuksen ottamisesta. [12, s.11]

Jälleenvakuutustapojen luokittelu vaihtelee jonkin verran riippuen millaisessa kontekstissa niistä puhutaan. Perinteisesti jälleenvakuutukset on jaettu kahteen päätyyppiin: *suhteelliseen* ja *ei-suhteelliseen jälleenvakuuttamiseen*.

6.1 Suhteellinen jälleenvakuuttaminen

Suhteellisessa jälleenvakuuttamisessa ensivakuuttaja ja jälleenvakuuttaja jakavat vakuutuksen kohteen keskenään tietyssä suhteessa. Jakoperusteena on joko vakuutusmäärä (sum insured, SI) tai mikäli tätä ei pystytä tarkkaan määrittämään, kuten esimerkiksi omaisuus- ja keskeytysvakuutuksessa, jakoperusteena käytetään arviota suurimmasta mahdollisesta vahingosta (estimated maximum loss EML). Vakuutuksenottajan maksama vakuutusmaksutulo jaetaan ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan kesken samassa suhteessa kuin mahdollisesti maksuun tuleva vahinko. Jälleenvakuuttaja veloittaa jälleenvakuutuksesta vakuutusmaksua ensivakuuttajalta, mutta toisaalta maksaa ensivakuuttajalle palkkiota vakuutuksen hallinnasta ja ylläpidosta.

Suhteellisia jälleenvakuutustapoja ovat esimerkiksi *osamääräjälleenvakuutus* ja *ylitejälleenvakuutus*. Osamääräjälleenvakuutuksessa ensivakuuttaja vakuuttaa jälleenvakuuttajalla määrätyn osuuden $0 < p < 1$ joko koko vakuutusliiketoiminnastaan tai osasta sitä. Korvaukset ja vakuutusmaksut jaetaan tässä samassa suhteessa ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan välillä. Tällöin jälleenvakuuttajan osuus kokonaisvahinkomenosta $S_{\text{tot}}(t)$ on $S_{\text{re}}(t) = pS_{\text{tot}}(t)$ [8, s.143]. Osamääräjälleenvakuuttaminen on yksi vanhimpia jälleenvakuuttamisen muotoja, mutta siinä on myös paljon heikkouksia. Ensivakuuttaja siirtää osuuden koko vakuutuskannastaan, eli myös pienistä vahingoista, jotka se voisi mahdollisesti pitää itsellään. Taulukossa 6.1 havainnollistetaan kokonaisvahinkomenon jakautumista cedentin ja jälleenvakuuttajan kesken.

SI / EML	Ensivakuuttajan osuus	Jälleenvakuuttajan osuus
5	4	1
10	8	2
20	16	4
30	24	6

Taulukko 6.1. Ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan osuudet vahingoista osamääräjälleenvakuutuksessa kun $p = 0,2$.

Ylitejälleenvakuutus muistuttaa osamääräjälleenvakuutusta, mutta siinä tuodaan mukaan ensivakuuttajan omapidätysosuus eli ensivakuuttaja pitää osan riskistä itsellään. Tällöin kokonaisvahinkomenolle on sovittu tietty kiinteä raja $M > 0$, jonka ylittävien vahinkojen korvaamisesta jälleenvakuuttaja vastaa. Tällöin jälleenvakuutus suojaa ensivakuuttajaa suurilta vastuilta, mutta kuitenkin mahdollisesti osa suuren vakuutuskohteen pienistä osavahingoista siirtyy jälleenvakuuttajalle vaikka ensivakuuttaja olisi voinut pitää ne itsellään. Tämä vakuutustapa myös on hallinnollisesti työläs. Taulukossa 6.2 on havainnollistettu ensi- ja jälleenvakuuttajan osuuksia ylitejälleenvakuutuksessa. Taulukoiden 6.1 ja 6.2 avulla voidaan havaita erot osamäärä- ja ylitejälleenvakuutuksessa.

SI / EML	Ensivakuuttajan osuus	Jälleenvakuuttajan osuus (%)
5	5	0 (0 %)
10	10	0 (0 %)
20	10	10 (50 %)
30	10	20 (66,67%)

Taulukko 6.2. Ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan osuudet vahingoista ylitejälleenvakuutuksessa, kun omapidätysosuus $M = 10$.

6.2 Ei-suhteellinen jälleenvakuuttaminen

Ei-suhteellista jälleenvakuuttamista on kahta päätyyppiä. *Yksittäisylijännitejälleenvakuutuksessa* eli XL-jälleenvakuutuksessa (engl. excess of loss reinsurance) riski jaetaan yksittäisen vahingon suuruuden perusteella. Yksittäisen vahingon suuruus voidaan sopia tarkoittamaan joko yhtä riskikohdetta kuten teollisuuslaitosta tai yhtä vahinkotapahtumaa kuten myrskyä tai maanjäristystä. Ensi- ja jälleenvakuuttaja sopivat rajan $M > 0$, jonka alle jäävästä osuudesta vastaa ensivakuuttaja ja jonka ylittävästä osuudesta vastaa jälleenvakuuttaja. Usein sovitaan myös jälleenvakuuttajan korvauksille jokin yläraja $L > M$, joka estää liian suurten vastuiden muodostumisen jälleenvakuuttajalle. Ensivakuuttaja voi kuitenkin hankkia lisää jälleenvakuutusturvaa toiselta jälleenvakuuttajalta ja tällä tavoin muodostaa vahinkoon jälleenvakuutuskerroksia. XL-jälleenvakuutukseen perehdytään tarkemmin luvussa 7.

Toinen päätyyppi on *kokonaisylivahinkojälleenvakuutus* eli SL-jälleenvakuutus (stop-loss reinsurance). Tällöin vakuutuksen kohteena ei ole yksittäinen vahinko tai vahinkokohde, vaan vakuutus otetaan jollekin ajanjaksolle koskemaan koko vahinkomenoa koko vakuutusyhtiön liikkeestä tai sen osasta. Jälleenvakuuttaja ottaa itselleen osan korvausmenosta ja tämä osa määritetään usein tiettynä prosenttiosuutena vakuutusmaksutulosta. Tällöin kun ensivakuuttajan osuutta merkitään K, jälleenvakuuttajan korvausmeno on muotoa $S_{\mathrm{SL}}(t) = S(t) - K$ silloin, kun $S(t) - K > 0$ [8, s.143]. Tässä myös sovitaan usein jonkinlainen yläraja jälleenvakuuttajan osuudesta ja tämäkin raja ilmaistaan osuutena jälleenvakuutettavan kannan maksutulosta. Esimerkiksi voidaan valita jälleenvakuutuksen kohteeksi metsävakuutus, josta ensivakuuttaja saa vakuutusmaksutuloa 30 milj. euroa. Ensivakuuttaja hankkii tälle vakuutuskannalle SL-jälleenvakuutuksen, jonka suojaksi sovitaan (30% xs 90%) siis jälleenvakuuttaja vastaa korvauksista jotka ylittävät 90% vakuutusmaksutulosta ja kuitenkin enintään 30% maksutulosta. Siis jälleenvakuuttaja korvaa ensivakuuttajalle siinä tapauksessa, kun ensivakuuttaja joutuu maksamaan korvauksia yli 27 miljoonaa euroa, mutta kuitenkin jälleenvakuuttajan korvaus on korkeintaan 9 miljoonaa. Mikäli korvaukset ylittävät tämän summan, jää ylimenevä osuus ensivakuuttajan vastuulle. SL-jälleenvakuutukset soveltuvat parhaiten tapauksiin, joissa vahinkomeno vaihtelee suuresti tarkastelujaksojen esimerkiksi vuosien välillä. Tällaisia ovat esimerkiksi rae- ja myrskyvakuutukset. Heikkoutena SL-jälleenvakuutuksessa on vakuutusmaksun määrämisen haaste. SL-sopimuksissa on usein prosentuaalisen ylärajan lisäksi euromääräinen yläraja jälleenvakuuttajan korvauksille.

6.3 Muita jaottelutapoja

Suhteellisen ja ei-suhteellisen jaottelutavan jälkeen jälleenvakuutukset voidaan edelleen jakaa *pakollisiin*, *valinnaisiin* (*fakultatiivisiin*) ja *valinnais-pakollisiin jälleenvakuutuksiin*. Pakollisessa jälleenvakuutuksessa jälleenvakuutussopimus velvoittaa ensivakuuttajaa siirtämään kaikki sopimuksessa määritetyt riskit jälleenvakuuttajalle ja toisaalta myös velvoittaa jälleenvakuuttajaa kantamaan nämä riskit sopimusehtojen mukaisesti. Ensivakuuttajan ei siis tarvitse riskien realisoituessa erikseen sopia korvaamisesta jälleenvakuuttajan kanssa, vaan pakollinen jälleenvakuutussopimus velvoittaa jälleenvakuuttajan osallistumaan vakuutuskorvauksiin. Valinnainen jälleenvakuutus eroaa nimensä mukaisesti siinä mielessä, että siinä ensivakuuttaja voi valita mitkä riskit se haluaa tarjota jälleenvakuuttajalle ja jälleenvakuuttaja voi päättää, että haluaako osallistua riskiin. Vapaaehtoisuus koskee siis molempia osapuolia. Mikäli vapaaehtoisuus koskee vain ensivakuuttajaa, on tällöin kyseessä valinnais-pakollinen jälleenvakuutus. Tällöin ensivakuuttaja voi päättää mitkä riskit se haluaa sopimuksen puitteissa siirtää jälleenvakuuttajalle ja jälleenvakuuttaja on velvollinen ottamaan nämä riskit kannettavakseen.

Matemaattisesti jälleenvakuutus voidaan jakaa *satunnaiskävelyjälleenvakuutuksiin* (engl. random walk type) ja *ääriarvojälleenvakuutuksiin* (engl. extreme value type). Aiemmin esitellyt ei-suhteellinen ja suhteellinen jälleenvakuutus kuuluvat satunnaiskävelyjälleenvakuutuksiin, sillä niissä jälleenvakuuttajan osuus liittyy kiinteästi joko kokonaisvahinkomenon satunnaisuuteen tai yksittäisen vahingon koon satunnaisuuteen ja niiden tutkimisessa tärkeitä työkaluja ovat aiemmin läpikäyty suurten lukujen laki, luvussa 5 läpikäyty vararikkoteoria sekä keskeinen raja-arvolause. Ääriarvojälleenvakuutuksia ovat esimerkiksi yksinkertainen suurten korvausten jälleenvakuutus (largest claim reinsurance), jossa jälleenvakuuttaja ottaa kannettavakseen sopimuksen puitteissa tietyllä ajanjaksolla k suurinta korvausta, esimerkiksi yhden tehtaan vuoden 5 suurinta korvausta. Tällöin, jos vahingot X_i astetaan suuruusjärjestykseen $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \cdots \geq X_{(N(t))}$, jälleenvakuuttajan korvattavaksi tulee

$$S_{\text{LC}} = \sum_{i=1}^{k} X_{(k)}$$

[8, s.144]. Toinen ääriarvojälleenvakuutus on ns. *ECOMOR-jälleenvakuutus*, joka tulee ranskankielisistä sanoista Excédent du coût moyen relatif, joka voidaan vapaasti kääntää suhteellisten keskimääräisten kulujen ylitykseksi. ECOMOR-jälleenvakuutus muistuttaa XL-jälleenvakuutusta, mutta siinä kiinteän omapidätysosuuden sijaan omapidätysosuus määrittyy k:nneksi suurimman vahingon $X_{(k)}$ mukaan. Kaavassa käytetään merkintään x_+, jolla tarkoitetaan $\max(x, 0)$. ECOMOR-jälleenvakuuttamisessa jälleenvakuuttajan maksettavana on

$$S_{\text{ECOMOR}} = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_{(i)} - X_{(k)})_+,$$

jollain kiinteällä $k \geq 2$. Matemaattisessa mielessä luku k tulee määrittää sellaiseksi, että on lähes varmaa, että ainakin osa vahingoista on suurempia kuin k:s vahinko.

Esimerkiksi, jos vahinkojen suuruudet on suuruusjärjestyksessä 5, 5, 10, 15, 20, 30 ja on valittu, että $k = 3$, omapidätysosuus on 15 ja jälleenvakuuttajan osuus korvauksista on $5+15 = 20$. Ääriarvojälleenvakuutusten tutkinnassa käytetään eri tekniikoita kuin satunnaiskävelyjälleenvakuutuksessa. Näihin ei tässä paneuduta tarkemmin, sillä ne vaatisivat lisää ääriarvoteorian esitietoja. [8][s.144]

6.4 Muita riskinsiirtotapoja

Jälleenvakuuttamalla riskin ensivakuuttaja siirtää riskiä eteenpäin toiselle vakuuttajalle. Muita tapoja siirtää riskiä ovat esimerkiksi *rinnakkais-* ja *monivakuutus*. Rinnakkaisvakuutuksessa useampi kuin yksi vakuuttaja osallistuu kohteen vakuuttamiseen. Yksi vakuuttajista, jotka usein ovat vakuutusyhtiöitä, on ns. johtava yhtiö, joka vastaa sopimuksen neuvottelemisesta ja muut osallistuvat yhtiöt vastaavat sopimuksen mukaan omista osuuksistaan vakuutuksen kohteesta. Rinnakkaisvakuuttaminen vähentää ensivakuuttajien jälleenvakuutustarvetta, mutta toisaalta mikäli jälleenvakuuttaja vakuuttaa useita tietyn kohteen eri rinnakkaisvakuutuksia, se saattaa saada samaa riskiä useiden eri ensivakuuttajien kautta. Monivakuutuksessa puolestaan kaksi tai useampaa vakuuttajaa ovat vakuuttaneet saman kohteen toisistaan riippumattomin ehdoin. Ero rinnakkaisvakuutukseen on nimenomaan siinä, että monivakuuttamisessa ei ole yhtä johtavaa yhtiötä, joka määrittelisi vakuutussopimuksen vakuutuksenottajan kanssa, vaan kaikki vakuuttajat ovat määritelleet oman ja muista vakuuttajista riippumattoman vakuutussopimuksen, josta he vastaavat itsenäisesti. Monivakuuttamisella ei kuitenkaan tule päästä siihen tilanteeseen, että vakuutuksenottaja ylivakuuttaa vakuutuskohteen ja hyötyy vahingosta. Mikäli näin voisi päästä käymään, sovitetaan korvauksia vahingon todellisen määrän mukaan.

Näiden lisäksi vakuutusyhtiöt voivat keskenään muodostaa *pooleja*. Pooli on vakuutuksenantajien välinen yhteenliittymä ja jakosopimus, jolla ei ole omaa varallisuutta, vaan siihen osallistuvat jakavat vastuut sopimassaan suhteessa. Tunnetuimpia esimerkkejä ovat kotimaisen ryhmähenkivakuutuksen ja liikennevakuutuksen suurvahinkopoolit, joiden tarkoitus on jakaa kustannuksia vakuutuksenantajien välillä suurvahinkojen tapahtuessa.

Uusimpia keinoja riskien jakamiseen ovat ns. vaihtoehtoiset riskien rahoitusratkaisut (ART, alternative risk transfer). Näissä riskejä siirretään jälleenvakuutusmarkkinoiden ulkopuolisille rahoitusmarkkinoille muun muassa arvopaperistamisilla tai johdannaisilla. Esimerkkinä arvopaperistamisesta voidaan ottaa katastrofibondit. Niissä vakuutusyhtiö myy sijoittajille katastrofibondin ja saa näin pääomaa käyttöönsä. Vakuutusyhtiö siis hakee velkaa rahoitusmarkkinoilta, ja mikäli katastrofi tapahtuu, vakuutusyhtiö vapautuu velkojen maksusta. Vastineeksi bondista vakuutusyhtiö maksaa sijoittajille tuottoa. ART-tuotteet ovat vielä toistaiseksi vähäisessä käytössä jälleenvakuutuskeinona, mutta niissä on paljon kasvupotentiaalia, sillä rahoitusmarkkinat ovat huomattavasti jälleenvakuutusmarkkinoita suuremmat.

7 XL-jälleenvakuuttaminen

Tässä luvussa tarkastellaan XL-jälleenvakuutusta hieman tarkemmin. Luvussa esitellään matemaattiset kaavat ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan osuuksien odotusarvosta sekä varianssista ja käydään läpi lyhysti vakuutusmaksun määräytymistä XL-jälleenvakuutuksissa. Tämän jälkeen tarkastellaan Xuepeng Zhangin ja Zhubin Liangin artikkelia, jossa pyritään pyritään määrittämään optimaaliset pidätystasot M ja L siten, että sovituskerroin saadaan maksimoitua ja tämän avulla edelleen vararikkotodennäköisyydelle saadaan määritettyä pienin yläraja. Tämän todistuksen tarkastelu jätetään pintapuoliseksi sen monimutkaisuuden vuoksi, mutta erityistä huomiota kiinnitetään todistuksen johtopäätöksiin. Luvussa käytetään Cramér-Lundbergin mallia kokonaisvahinkomenosta.

Kuten kappaleessa 6.2 käytiin läpi, XL-jälleenvakuutuksessa jälleenvakuuttaja osallistuu sopimuksen mukaan jälleenvakuutuksen kohteessa tapahtuvien yksittäisten vahinkojen korvaamiseen, kun vahinkojen suuruus ylittää tietyn rajan. Merkitään koko vahingon kokonaisvahinkomenoa $S_{\text{tot}}(t)$, cedentin eli ensivakuuttajan osuutta tästä $S_{\text{ced}}(t)$ ja jälleenvakuuttajan osuutta $S_{\text{re}}(t)$. Tällöin jollain ennakkoon sovitulla ensivakuuttajan omapidätysosuudella M saadaan

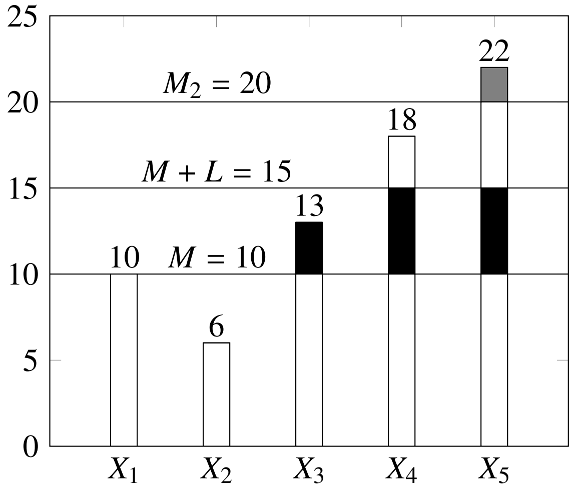
$$S_{\text{ced}}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \min(X_i, M) \text{ ja } \quad S_{\text{re}} = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - M)_+.$$

Tiedetään myös, että $S_{\text{tot}}(t) = S_{\text{ced}}(t) + S_{\text{re}}(t)$. On tyypillistä että jälleenvakuutussopimuksessa sovitaan jälleenvakuuttajan korvausten ylärajasta L, jolloin kokonaisvahinkomenot ovat muotoa

$$S_{\text{ced}}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (\min(X_i, M)\mathbb{1}_{X_i \leq M+L} + (X_i - L)\mathbb{1}_{X_i > M+L} \tag{7.1}$$

$$S_{\text{re}}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \min((X_i - M)_+, L), \tag{7.2}$$

jossa funktio $\mathbb{1}$ on määritelmän 2.4 mukainen indikaattorifunktio. [1][s.24] Tällaista jälleenvakuutussopimusta kutsutaan L xs M-jälleenvakuutukseksi tai kerrosjälleenvakuutukseksi (engl. layer reinsurance). Alla olevassa kuvassa on havainnollistettu ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan osuuksia eri suuruisilla vahingoilla, kun ensivakuuttajalla on XL-jälleenvakuutus.



Kuva 7.1. Tapahtumat X_1, X_2, X_3, X_4 ja X_5 ovat tapahtuneita vahinkoja ja y-akselilla näkyy vahinkojen suuruus. Kuvassa on mallinnettu tilannetta, jossa ensivakuuttaja on ottanut 5 xs 10 jälleenvakuutuksen. Ensivakuuttajan osuudet näkyvät kuvassa valkoisena ja jälleenvakuuttajan osuudet mustalla. Tämän lisäksi ensivakuuttaja on ottanut toisen XL-jälleenvakuutuksen, jossa omapidätysosuus $M_2 = 20$. Tämän jälleenvakuutuksen osuus näkyy kuviossa harmaana.

7.1 Ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan kokonaisvahinkomenojen odotusarvo

Tässä kappaleessa tutkitaan ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan kokonaisvahinkomenojen odotusarvoa. Luku perustuu Hansjörg Albrecherin, Jef L. Teugelsin ja Jan Bierlantin kirjan Reinsurance: actuarial and statistical aspects lukuihin 2.3 ja 6.5. Teoksessa on käsitelty tarkemmin myös muita tunnuslukuja, mutta emme tässä tutkielmassa syvenny niihin tarkemmin. [1, s.25-26, 184, 202 ja 229]

Tutkitaan ensin vahinkojen lukumäärän odotusarvoa. XL-jälleenvakuutuksessa ensivakuuttaja maksaa kaikista tapahtuneista korvauksista sen osuuden, joka jää sovitun omapidätysosuuden alle. Tämä tarkoittaa sitä, että ensivakuuttaja osallistuu jokaisen vahingon korvaamiseen eli, kun vahinkoja tapahtuu satunnaismuuttujan $N_{\mathrm{tot}}(t)$ mukaan, niin ensivakuuttajan osuus on tällöin $N_{\mathrm{ced}}(t) = N_{\mathrm{tot}}(t)$. Jälleenvakuuttalle korvauksia aiheutuu puolestaan siitä osuudesta, joka ylittää osuuden M. Merkitään tämän todennäköisyyttä $s_M = \mathbb{P}(X > M)$. Tällöin

$$N_{\mathrm{re}}(t) = \#\{k : 1 \leq k \leq N_{\mathrm{tot}}(t) \mid X_k > M\}.$$

Tällöin päästään tulokseen jälleenvakuuttajan vahinkojen lukumäärän odotusarvosta [1, s.184]

$$\mathbb{E}N_{\mathrm{re}}(t) = s_M \mathbb{E}N_{\mathrm{tot}}(t).$$

Tutkitaan seuraavaksi yksittäisen XL-jälleenvakuutetun vahingon jakaumaa sekä jälleenvakuutetun että jälleenvakuuttajan näkökulmasta. Tutkitaan satunnaismuuttujaa

$$\tilde{X} := \min((X-u)_+, v) = \min(X, u+v) - \min(X, u)$$

joillain $u, v > 0$. Jos $u = M$, $\tilde{X}$ viittaa jälleenvakuuttajan osuuteen yksittäisessä vahingossa, joka on vakuutettu v xs M jälleenvakuutuksella. Jos taas $u = 0$ ja $v = M$, $\tilde{X}$ kuvaa ensivakuuttajan osuutta ∞ xs M jälleenvakuutuksen yksittäisessä vahingossa. Näin ollen tutkimalla $\tilde{X}$ jakaumaa, saadaan tietoa XL-jälleenvakuutuksesta sekä ensivakuuttajan että jälleenvakuuttajan näkökulmasta. Jos F_X on satunnaismuuttujan X kertymäfunktio, niin satunnaismuuttujan $\tilde{X}$ kertymäfuntio on muotoa

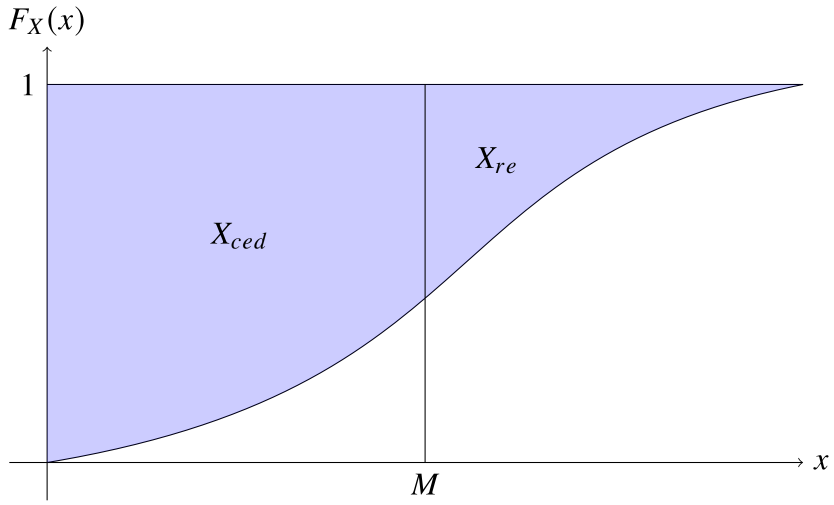
$$F_{\tilde{X}}(x) = \mathbb{P}(\tilde{X} \leq x) = \begin{cases} F_X(u+x) & 0 \leq x < v \\ 1 & x \geq v. \end{cases}$$

Hyödyntämällä esimerkkiä 2.21 saadaan satunnaismuuttujan $\tilde{X}$ r:s momentit kaavasta

$$\mathbb{E}(\tilde{X}^r) = r \int_0^\infty (1 - F_{\tilde{X}}(x))x^{r-1}\,\mathrm{d}x = r \int_0^v (1 - F_X(u+x)x^{r-1})\,\mathrm{d}x,$$

josta erityistapauksena saadaan yksittäisen vahingon X cedentin osuuden X_{ced} ja jälleenvakuuttajan X_{re} odotusarvot

$$\mathbb{E}X_{\mathrm{ced}} = \int_0^M (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \mathbb{E}X_{\mathrm{re}} = \int_M^\infty (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x.$$



Kuva 7.2. Visuaalinen havainnollistus jälleenvakuuttajan ja ensivakuuttajan osuuksista yksittäisessä vahingossa sekä omapidätysosuuden M vaikutuksesta kuhunkin osuuteen.

Mikäli kyseessä on L xs M jälleenvakuutus jälleenvakuuttajan odotusarvo tulee muotoon

$$\mathbb{E}X_{\mathrm{re}} = \int_M^L (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x.$$

Käyttämällä yhtälöä 7.1 ja Cramér-Lundbergin mallin oletusta riippumattomista ja samoin jakautuneista vahinkojen jakaumista, jotka ovat riippumattomia vahinkojen lukumäärän jakaumasta $N_{\mathrm{tot}}(t)$, saadaan jälleenvakuuttajan kokonaisvahinkomenon odotusarvoksi

$$\mathbb{E}(S_{\mathrm{re}}(t)) = \mathbb{E}(N_{\mathrm{tot}}(t)) \cdot \mathbb{E}(X_{\mathrm{re}}).$$

Vastaavasti, koska tiedetään että riippumattomuus pätee kaikkialla, saadaan

$$\mathbb{E}(S_{\mathrm{ced}}(t)) = \mathbb{E}(N_{\mathrm{tot}}(t)) \cdot \mathbb{E}(X_{\mathrm{ced}}).$$

Jälleenvakuutuksen merkitystä ensivakuuttajalle havainnollistaa hyvin erityisesti yksittäisen vahingon koon varianssi.Tutkittaessa satunnaismuuttujan $\tilde{X}$ varianssia saadaan

$$\mathrm{Var}(\tilde{X}) = 2\int_0^v (1 - F_X(u+x))x\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^v (1 - F_X(u+x))\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Osittaisderivoimalla muuttujan v suhteen saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\mathrm{Var}(\tilde{X}) &= 2(1 - F_X(u+v))v - 2\left(\int_0^v (1 - F_X(u+x)\,\mathrm{d}x)\right)(1 - F_X(u+v)) \\
&= 2(1 - F_X(u+v))\left(v - \int_0^v (1 - F(u+x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2(1 - F_X(u+v))\left(\int_0^v 1\,\mathrm{d}z - \int_0^v (1 - F(u+x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2(1 - F_X(u+v))\int_0^v F(u+x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Havaitaan, että derivaatta v:n suhteen on ei negatiivinen, joten varianssi on eivähenevä muuttujan v suhteen.

Toisaalta havaitaan, että kun tehdään muuttujanvaihto $x \to x - u$ ja arvioidaan integrointirajoja ylöspäin saadaan

$$\mathrm{Var}(\tilde{X}) \leq 2\int_u^\infty (1 - F_X(x))(x-u)\,\mathrm{d}x - \left(\int_u^\infty (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Havaitaan, että yhtälön oikea puoli on ei kasvava muuttujan u suhteen, joten saadaan

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\tilde{X}) &\leq 2\int_u^\infty (1-F_X(x))(x-u)\,\mathrm{d}x - \left(\int_u^\infty (1-F_X(x))\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leq 2\int_0^\infty (1-F_X(x))x\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^\infty (1-F_X(x))\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \operatorname{Var}(X).
\end{aligned}$$

Tuloksesta havaitaan siis, että jälleenvakuuttaminen pienentää ensivakuuttajalle aiheutuvan vahingon varianssia eli

$$\operatorname{Var}(\tilde{X}) \leq \operatorname{Var}(X).$$

Toisaalta tämä on myös intuitiivistä, sillä XL-jälleenvakuutuksessa nimenomaan tietyn rajan ylittävä osuus siirtyy jälleenvakuuttajalle, eli ensivakuuttajan korvausvastuu yksittäisen vahingon kohdalla on rajoitettu ylärajaan M.

Tyypillisesti XL-jälleenvakuuttamisessa on hankala määrittää useampi kuin kaksi ensimmäistä momenttia kokonaisvahinkomenolle, joten hinnoittelussa käytetään eniten aliluvussa 4.2 esiteltyjä odotusarvo ja varianssiperiaatteita. Jälleenvakuutuksen hinnoittelussa on kaksi päätoimintatapaa. *Kokemusmenetelmällä* jälleenvakuuttaja hyödyntää vakuutettavan portfolion vahinkohistoriaa ja määrittää sen avulla jälleenvakuutuksen hinnan. Tässä haasteena on, että aina vakuutettavasta portfoliosta ei ole saatavilla riittävästi dataa vakuutusmaksun määrittämiseen. Toisessa päätoimintatavassa eli *altistusmenetelmässä* jälleenvakuuttaja hyödyntää omaa kokemustaan ja riskiarviotaan vastaavista portfolioista. Altistusmenetelmän nimi tulee siitä, että jälleenvakuuttaja vertaa ensivakuuttajan keräämän vakuutusmaksutulon määrää muihin vastaaviin tilanteisiin ja määrittää tämän avulla, kuinka suurelle riskille jälleenvakuuttaja altistuu.

7.2 Vararikkotodennäköisyyden minimointi sovituskerrointa maksimoimalla

Tässä kappaleessa tarkastellaan Xuepeng Zhangin ja Zhibin Liangin artikkelia, jossa tutkitaan vararikkotodennäköisyyttä klassisessa vararikkoteorian mallissa Cramér-Lundbergin mallissa, sekä tapauksessa, jossa kokonaisvahinkomeno noudattaa Brownin liikettä, eli tietynlaista satunnaiskulkua. Artikkelin tarkoituksena on selvittää paras mahdollinen kerrosjälleenvakuutusSivuutamme näistä jälkimmäisen ja keskitymme nimenomaan tapaukseen, jossa vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaan ja vakuutusmaksuja kerätään odotusarvoperiaatteen mukaan. [13]

Käytetään aliluvussa 5.1 esiteltyä mallia vakuutusyhtiön ylijäämästä. Tällöin vakuutusyhtiön ylijäämä on muotoa

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

jossa $u \geq 0$ on alkupääoma, $c \in \mathbb{R}$ on vakuutusmaksujen kertymisnopeus ja $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ on kokonaisvahinkomeno ja vahinkojen lukumäärä N_t noudattaa Poisson-prosessia parametrilla λ. Yksittäisten vahinkojen koot X_i ovat toisistaan riippumattomia samoin jakautuneita positiivisia satunnaismuuttujia, jotka eivät riipu vahinkojen lukumäärästä N_t.

Oletetaan, että $F(x)$ on satunnaismuuttujan X_i kertymäfunktio, jolle pätevät ehdot: $F(0) = 0$, $0 \leq x \leq N$ ja $F(x) = 1$, kun $x \geq N$. Nyt $N = \inf\{x \mid F(x) = 1\}$ ja $0 < N < \infty$. Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujan X tiheysfunktio $f(x)$ on olemassa ja että $f(x)$ on jatkuva. Oletetaan myös, että funktion $F(x)$ momentit generoiva funktio $m_X(r)$ on olemassa jossain ympäristössä $r \in (-\infty, r_\infty)$ jollain $0 < r_\infty \leq \infty$ ja $\lim_{r \to r_\infty} m_X(r) = +\infty$. Merkitään $\mathbb{E}X_i = \mu$.

Ensivakuuttajalla on mahdollisuus hankkia L xs M jälleenvakuutus, jossa parametrit M ja L edustavat omapidätysosuuksia siten, että $0 < M \leq L \leq N$. Tällöin ensivakuuttajan vastuulle jää jokaisesta vahingosta osuus

$$X_i(M, L) = \min(X_i, M) + (X_i - L)_+ \quad i = (1, 2, \ldots N_t).$$

Oletetaan, että vakuutusmaksutulo lasketaan odotusarvoperiaatteen nojalla. Nyt koska vakuutusmaksussa otetaan huomioon niin ensi- kuin jälleenvakuuttajankin osuudet, vakuutusmaksutulo on muotoa

$$\begin{aligned} c(M, L) &= \lambda\mu(1 + \theta) - (1 + \eta)(\lambda\mathbb{E}(X_i - X_i(M, L)) \\ &= (\theta - \eta)\lambda\mu + (1 + \eta)\lambda\mathbb{E}(X_i(M, L)), \end{aligned}$$

jossa θ on ensivakuuttajan varmuuslisä ja η on jälleenvakuuttajan varmuuslisä. Oletetaan vielä että $\eta > \theta$. Mikäli $\eta \leq \theta$, ensivakuuttaja voisi jälleenvakuuttaa koko kantansa jälleenvakuuttajalla, mutta saisi kuitenkin suuremman kertymän vakuutusmaksutuloa.

Koska X_i:t ovat toisistaan riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia eivätkä ne riipu prosessista N_t, sama pätee myös satunnaismuuttujille $X_i(M, L)$. Ensivakuuttajan osuuksille saadaan seuraavat tunnusluvut

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_i(M, L) &= \int_0^M (1 - F(x))\,\mathrm{d}X + \int_L^N (1 - F(x))\,\mathrm{d}x =: \mu(M, L) \\ m_{X_i(M,L)}(r) &= r\int_0^M (1 - F(x))e^{rx}\,\mathrm{d}x + r\int_L^N (1 - F(x))e^{r(x+M-L)}\,\mathrm{d}x + 1. \end{aligned}$$

Tällöin vakuutusyhtiön ylijäämä saadaan kaavasta

$$U_t^{M,L} = u + c(M, L)t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i(M, L),$$

vararikkohetki tulee muotoon

$$T^{M,L} = \inf\{t \geq 0 : U_t^{M,L} < 0\}$$

ja vararikkotodennäköisyys

$$\psi^{M,L}(u) = \mathbb{P}\{T^{M,L} < \infty \mid U_0^{M,L} = u\}.$$

Vararikkotodennäköisyyden yksikäsitteinen määrittäminen ei ole aina yksinkertaista, mutta sitä voi kuitenkin arvioida käyttämällä sovituskerrointa sekä Lundbergin-epäyhtälöä. Zhangin ja Liangin artikkelissa pyritään löytämään optimaalinen jälleenvakuutusstrategia sovituskertoimen maksimointiin ja edelleen vararikkotodennäköisyyden minimointiin.

Olkoon $R_C(M, L)$ sovituskerroin, joka toteuttaa määritelmän 5.3 ehdon. Sovituskertoimimen määritelmän nojalla tiedetään, että$R_C(M, L)$ toteuttaa yhtälön

$$c(M, L)r = \lambda(m_{X_i(M,L)}(r) - 1).$$

Vaihtoehtoisesti tämä voidaan ilmaista muodossa

$$[(\theta - \eta)\lambda\mu + (1 + \eta)\lambda\mu(M, L)]r - \lambda(m_{X_i(M,L)}(r) - 1) = 0.$$

Tarkoitus on maksimoida sovituskerroin eli löytää optimaalinen jälleenvakuutusstrategia, jossa

$$R_C \coloneqq R_C(M^*, L^*) = \sup_{M,L}(R_C(M, L)).$$

Tällöin R_C on ratkaisu yhtälöön

$$\sup_{M,L}\big\{[(\theta - \eta)\lambda\mu + (1 + \eta)\lambda\mu(M, L)]r - \lambda r[\int_0^M (1 - F(x))e^{rx}\,\mathrm{d}x + \int_L^N (1 - F(x))e^{r(x+M-L)}\,\mathrm{d}x]\big\} = 0. \tag{7.3}$$

Merkitään

$$g(M, L) = [(\theta - \eta)\lambda\mu + (1 + \eta)\lambda\mu(M, L)]r - \lambda r[\int_0^M (1 - F(x))e^{rx}\,\mathrm{d}x + \int_L^N (1 - F(x))e^{r(x+M-L)}\,\mathrm{d}x].$$

Lause 7.1. *Yhtälö $g(M.L)$ saa maksimiarvonsa parametreilla M ja L, kun valitaan*

$$(\bar{M}, \bar{L}) = \left(\frac{\ln(1 + \eta)}{r}, N\right).$$

Todistus. Sivuutamme tämän todistuksen. Artikkelissa todistus on tehty osittaisderivoimalla funktiota g muuttujien M ja L suhteen. [13, s.27] □

Kun tämä tulos sijoitetaan yhtälöön 7.3 saadaan se muotoon

$$(\theta - \eta)\mu + (1 + \eta)\int_0^M (1 - F(x))\,\mathrm{d}x - \int_0^M (1 - F(x))(1 + \eta)^{\frac{x}{M}}\,\mathrm{d}x = 0$$

Tällä yhtälöllä puolestaan on yksi positiivinen ratkaisu jota merkitään d_{1C}, jolloin optimaalinen pidätystaso on

$$(M^*, L^*) = (\min(d_{1C}, N), N).$$

Tulokseksi saadaan siis, että sovituskerroin saadaan maksimoitua, kun valitaan ensivakuuttajan omapidätysosuuksiksi (d_{1C}, N), $d_{1C} < N$ ja sovituskerroin on tällöin

$$R_C = \frac{\ln(1+\eta)}{d_{1C}}.$$

Koska tiedetään, että R_C on pienin yläraja, saadaan edelleen vararikkotodennäköisyydelle määritettyä pienin yläraja

$$\psi^{d_{1C},N}(u) \leq e^{-R_C u}.$$

Tämän tuloksen avulla voidaan siis päätellä, että vararikkotodennäköisyyden minimoinnin kannalta paras mahdollinen kerrosjälleenvakuutusstrategia saadaan, kun valitaan omapidätysraja M kuten yllä ja havaitaan, että tällöin kyseessä on nimenomaan puhdas XL-jälleenvakuutus. Tuloksessa oletuksena on, että vakuutusmaksujen laskennassa käytetään odotusarvoperiaatetta. Mikäli vakuutusmaksuja kerättäisiin esimerkiksi varianssiperiaatteen mukaisesti, tulos ei ole enää voimassa.

Huomautus. Todellisuudessa tämä tilanne ei kuitenkaan kuvasta koko tilannetta ensivakuuttajan kannalta. Aiemmin on käyty läpi vakuutusyhtiön mahdollisuuksia hankkia lisätuottoja sijoittamalla osan jo kertyneistä vakuutusmaksutuotoista erilaisiin sijoitusinstrumentteihin. Tämän mahdollisuuden huomiointi tuo malliin lisäkomponentin, jota voidaan esimerkiksi mallintaa siten, että ensivakuuttaja sijoittaa yhteen riskittömään, eli kiinteää tuottoa tuottavaan sijoitustuotteeseen ja yhteen riskilliseen, eli matemaattisessa mielessä satunnaiseen sijoitustuotteeseen. Tällainen esimerkki löytyy esimerkiksi Xiaoqing Liangin ja Virginia R. Youngin artikkelista. [7]

Lähteet

[1] Hansjörg Albrecher, Jef L. Teugels, and Jan Beirlant. *Reinsurance: actuarial and statistical aspects*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, Hoboken, New Jersey, 1. laitos, 2017.

[2] Joseph K. Blitzstein and Jessica Hwang. *Introduction to probability*. Texts in statistical science. CRC Press/Taylor & Francis Group, Boca Raton, 1. laitos, 2015.

[3] M. (Matthew) Foreman and Akihiro Kanamori. *Handbook of set theory*. Springer, Dordrecht, 2010.

[4] Geoffrey Grimmett and D. J. A. Welsh. *Probability: an introduction*. Oxford University Press, Oxford, England, 2. laitos, 2014.

[5] Allan Gut. *Stopped Random Walks Limit Theorems and Applications*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York, New York, NY, 2nd ed. 2009. laitos, 2009.

[6] Insurance Information Institute. 2005 - year end results. https://www.iii.org/article/2005-year-end-results, vierailtu 17.12.2023.

[7] Xiaoqing Liang and Virginia R. Young. Minimizing the probability of ruin: Optimal per-loss reinsurance. *Insurance, mathematics & economics*, 82:181–190, 2018.

[8] Thomas Mikosch. *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2. laitos, 2009.

[9] The Book of Statistical Proofs. Proof: Moment-generating function of the exponential distribution. https://statproofbook.github.io/P/exp-mgf.html, vierailtu 10.3.2024.

[10] Jukka Rantala and Esko Kivisaari. *Vakuutusoppi*. FINVA, Helsinki, 13. laitos, 2020.

[11] Pekka Tuominen. *Todennäköisyyslaskenta 1*. Limes, Helsinki, 5. muuttamaton laitos, 2000.

[12] Oliver D. William. *Reinsurance and the Law of Aggregation: Event, Occurrence, Cause*. Contemporary Commercial Law. Routledge, 1. laitos, 2021.

[13] Xuepeng Zhang and Zhibin Liang. Optimal layer reinsurance on the maximization of the adjustment coefficient. *Numerical algebra, control and optimization*, 6(1):21–34, 2016.