Tampereen yliopisto

Jenny Niemelä

”OLI IHAN KIVAA KU EI TARVINNU TEHÄ MATIKKAA”

Liikunnallisten matematiikan tehtävien vaikutus yläkoululaisten motivaatioon

Pro gradu
Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Tarkastajat: Jorma Joutsenlahti, Lauri Hella
Tammikuu 2024

TIIVISTELMÄ

Jenny Niemelä: ”OLI IHAN KIVAA KU EI TARVINNU TEHÄ MATIKKAA”
Pro gradu
Tampereen yliopisto
Tutkinto-ohjelma
Tammikuu 2024

Oppilaiden motivaatio matematiikkaa kohtaan on pitkään laskenut ja yläkouluiässä mukaan tulee matematiikka ahdistus ja minäpystyvyyden katoaminen. Viime aikoina on tutkittu liikunnalisuuden lisäämisen vaikutusta matematiikan oppimiseen ja motivaatioon. Tutkimuksessa keskitytäänkin siihen, miten liikunnalliset tehtävät vaikuttavat oppilaan motivaatioon.

Teoreettinen osa tarkastelee oppilaan asenteita matematiikkaa kohtaan sekä sen vaikutusta oppimiseen. Asenteisiin vaikuttavista tekijöistä esitellään ensimmäisenä motivaatio, joka määrittelee mikä saa meidät tekemään asioita. Toisena asennetta muovaama aihe on minäpystyvyys, joka kertoo miten henkilö näkee itsensä ja osaamisensa sekä kolmantena aiheena tuodaan esiin mitä on matematiikkaa kohtaan oleva ahdistus ja miten se ilmenee. Lisäksi teoreettinen osuus käsittelee liikunnan vaikutteita aivoihin sekä millaisia vaikutuksia koulupäivän aikaisella liikunnalla on ollut matematiikassa menestymiseen.

Tutkimuksessa käytetyt liikunnalliset tehtävät sisältää murtolukuja, joten tutkimuksessa tuodaan tunnetuksi matemaattisessa osuudessa rationaaliluvut. Osiossa konkstruktoidaan luonnolliset luvut sekä kokonaisluvut ja lopulta esittelyyn pääsee rationaaliluvut.

Tutkimus on toteutettu empiirisesti ja lähestymistapana kvalitatiivinen. Tutkimuksen kohteena ovat Hämeenlinnan alueella sijaitsevan koulun 7-luokan oppilaita. Tutkimusotanta 35 oppilasta sekä kokeellinen osa tutkimuksesta on toteutettu yhden päivän aikana oppituntien aikana.

Tutkimustuloksista sai viitteitä, että liikunnalliset matematiikan tehtävät vaikuttivat motivaatioon sen mukaan, mikä oppilaan kiinnostus oli liikuntaa tai matematiikkaa kohtaan. Vastaanotto oppilailla oli pääosin positiivinen. Aihetta olisi syytä tutkia lisää laajemmalla otannalla sekä tutkia lisäksi sitä, auttavatko tehtävät parempaan menestykseen matematiikassa heitä, jotka tutkimuksessa pitivät liikunnallisista matematiikan tunneista.

Avainsanat: matematiikka, motivaatio, matemaattinen ahdistus, liikunnallisuus matematiikassa

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1. Johdanto 1
2. Matematiikan oppimiseen vaikuttavat asenteet 2
2.1 Motivaatio 2
2.2 Minäpystyvyys 4
2.3 Matikka ja ahdistus 5
3. Liikunta ja oppiminen 6
3.1 Liikunnan vaikutus aivoihin 6
3.2 Koulupäivän aikaisen liikunnan vaikutus matematiikassa menestymiseen . 7
4. Matemaattinen osuus 8
4.1 Luonnolliset luvut 8
4.2 Kokonaisluvut 10
4.3 Rationaaliluvut 15
5. Tutkimuskysymys 19
6. Tutkimuksen toteuttaminen 21
6.1 Tutkimusmenetelmät 21
6.2 Tutkimusineiston kuvaus 21
6.3 Tutkimusaineiston kerääminen 22
6.4 Liikunnallisia matematiikan tehtäviä 23
7. Tutkimus tulokset 26
8. Johtopäätökset 30
Lähteet 32
Liite A: Palautekysely lomake 34

1. JOHDANTO

Ajatus lähti liikkeelle lapsesta, joka ei kyennyt hahmottamaan mittamuunnoslaskuja, jotka avautuivat hänelle, kun hän käveli eripituisia matkoja välillä senttimetreinä mitattuna ja välillä metreinä mitattuna. Sen lisäksi, että tämä oli lapsen mielestä hauskaa, se auttoi lasta hahmottamaan muunnoslaskuja matemaattisesti. Sen sijaan, että hän vain olisi istunut paikallaan paperin ja kynän kanssa pohtien asiaa, hän liikkui ja havainnoi tekemiään asioita. Asia konkretisoitui hänelle, tällä tavalla hän ymmärsi että kun hän kävelee 200 metriä on se sama asia kuin 0,2 kilometriä.

Alakoulussa matematiikan opetuksessa on mukana paljon toiminnallisuutta ja konkreettisia esimerkkejä. Yläkoulussa oppilaat kaipaavat paljon toiminnallisuutta ja varsinkin ymmärrystä mihin niitä asioita tarvitaan, joita matematiikassa opetellaan. Ensimmäisenä ei tule välttämättä mieleen matematiikka ja liikunta yhdessä oppiaineina. Samalla kansainvälisten pisa-tulosten laskeminen ja oppilaiden lisääntyvä motivaatiopuute yläkouluikään tultaessa ovat yhtälö, joita on myös hyvä pohtia sekä kaikkia mahdollisia erilaisia keinoja millä kiinnostavuutta matematiikkaa kohtaan voitaisiin lisätä.

Tutkimuksessa tarkastellaan liikkunnallisten matematiikan tehtävien vaikutusta yläkouluikäisten motivaatioon. Tutkimuksen kohteena on 7.-luokkalaiset oppilaat, joiden toimintaa havainnoitiin tunnilla sekä he täyttivät palautelomakkeen, jossa oli oppituntia koskevia kysymyksiä. Tutkimustuloksissa vertaillaan millaisia eroja on oppilailla sen mukaan paljonko he liikkuvat viikossa sekä sen mukaan paljonko he pitävät matematiikasta. Tutkimustulosten mukaan on viitteitä siitä, että vähemmän matematiikasta pitävät pitivät liikunnallisista matematiikan tehtävistä eli positiivista vaikutusta motivaatioon oli havaittavissa heidän osaltaan.

2. MATEMATIIKAN OPPIMISEEN VAIKUTTAVAT ASENTEET

Koulun alkuvuosina oppilaiden asenteet matematiikkaa kohtaan ovat pääsääntöisesti positiivisia, sillä ensimmäisiä kouluvuosia leimaa oppilaiden yleinen optimismi ja myönteiset asenteet matematiikkaa kohtaan. Lapsen normaaliin kehitykseen kuuluu, että koulun alkuvuosina lapset suhtautuvat myönteisesti lähes kaikkeen sekä usko omiin kykyihin on korkealla. Peruskoulun edetessä asenteet matematiikkaa kohtaan muuttuvat kielteisemmiksi, aluksi pitämisen väheneminen ja tämän jälkeen pystyvyyden tunteen heikkeneminen. Matematiikasta pitäminen laskee tutkimusten mukaan reilusti alakoulun loppua kohden. Pystyvyyden tunne huononee yläkouluun mentäessä tai aikana huononee huomattavasti. [10].

2.1 Motivaatio

Motivaatio sana on peräisin latinan movere-sanasta, joka tarkoittaa liikkumista ja liikuttamista, joten motivaatio on siis jotain sellaista joka saa meidät liikkeelle, pitää meidät toiminnassa ja auttaa meitä saamaan työmme päätökseen [8]. Motivaation merkitys on erityisen suuri matematiikan oppimisessa ja opettajalla on merkitystä matematiikkaan liittyvän motivaation kehityksessä [1]. Oppimismotivaatiolla tarkoitetaan yhtäältä lapselle ominaista yleistä suhtautumistapaa oppimistilanteisiin (tehtävää välttelevä vs. tehtäväsuuntautunut työskentelytapa) ja toisaalta tiettyyn oppiaineeseen kuten matematiikkaan liittyvää kiinnostusta tai ahdistuneisuutta [1].

Ensimmäisen kouluvuoden aikana matemaattisten taitojen taso vaikutti myöhempään motivaatioon: hyvät aritmeettiset taidot lisäsivät kiinnostusta matematiikkaa kohtaan. Toiselle luokalle siirryttäessä motivaatio matematiikkaa kohtaan muuttui pysyvämmäksi ja kiinnostus laskutehtäviin alkoi heijastua myönteisesti aritmeettisten taitojen kehitykseen. Yläkouluiässä motivaation merkitys matematiikan taitojen kehityksessä voimistui entisestään [1]. Aiemmat oppimiskokemukset rakentavat ihmisen käsitystä itsestään oppijana. Monet meistä muistavat tilanteita, joissa epäonnistumiset ovat heikentäneet uskoa omiin kykyihin. Vastaavasti onnistumiset vahvistavat luottamusta itseen ja edistävät oppimisen motivaatiota. Käsitys omista kyvyistä ja opiskeltavan sisällön merkityksestä ohjaa tavoitteiden asettelua, säätelee tehtävään paneutumista ja voi vaikuttaa jopa tehtävästä suo-

riutumiseen. [16]

Oppimismotivaation teorioita on tällä hetkellä useita keskeisiä ja yksi niistä on odotusarvoteoria [16], jonka mukaan koulusuoriutumisen kannalta on merkityksellistä kuinka paljon yksilö uskoo omiin kykyihinsä ja odottaa menestyvänsä eri oppiaineissa sekä miten yksilö arvostaa näitä. Eri oppiaineisiin liitetyillä arvostuksilla tarkoitetaan sitä, miksi ja miten paljon tietty oppiaine vetää yksilö puoleensa, kuinka paljon se saa sitoutumaan siihen sekä mitkä on odotukset ja arvostukset oppiainetta kohtaan. Teorian mukaan arvostukset jaetaan neljään eri osa-alueeseen [16], joista kolme kuvaa tiettyyn tehtävään liittyvää myönteistä arvoa ja ne ovat seuraavat. Kiinnostusarvo kertoo missä määrin tehtävä kiinnostaa yksilöä ja kuinka paljon yksilö siitä pitää esim. oppilaan mielestä matematiikka on hauskaa ja hän tekee mielellään tehtäviä, koska kokee niiden tekemisen kiinnostavaksi ja palkitsevaksi. Hyötyarvo puolestaan tarkoittaa sitä, missä määrin yksilö kokee tehtävän tekemisen olevan hyödyllistä tulevaisuuden kannalta esimerkiksi oppilaan mielestä tehtävät ei ole kiinnostavia, mutta hän kokee opiskelun hyödylliseksi, jos hän tietää tarvitsevansa matematiikkaa myöhemmin esimerkiksi jatko-opinnoissa. Tärkeysarvolla osoitetaan, kuinka tärkeänä yksilö pitää tehtävään sitoutumista ja siinä onnistumista oman identiteettinsä kannalta esimerkiksi urheilullinen oppilas pitää liikuntaa ja siinä pärjäämisen itselleen hyvin tärkeäksi asiaksi. Neljä osa-alue eli kustannukset puolestaan kuvaa tehtävään mahdollisesti liittyviä kielteisiä seurauksia ja haittoja esimerkiksi matematiikan opiskelu voi olla liian aikaa paljon aikaa vievää, jolloin oppilaan on luovuttava jostain muusta tai tehtävät voivat aiheuttaa oppilaassa hermostuneisuuden ja ahdistuneisuuden tunteita.

Lapsi, joka tutkii ympäristöään oman kiinnostuksen pohjalta, on sisäisesti motivoitunut [15]. Koulutaipaleen alussa monet koulunkäyntiään aloittavat lapset pitävät useista eri kouluaineista ja useimmissa aineissa ne hiipuvat koulutaipaleen edetessä aina yläkouluvuosiin saakka. Ymmärrys eri oppiaineiden tärkeydestä, hyödyllisyydestä ja kustannuksista lisääntyy ja viidennestä luokasta eteenpäin oppilaat kykenevät erottelemaan nämä eri arvostukset toisistaan. [16]. Oppimisen kannalta sisäinen motivaatio on erittäin hyödyllinen, sillä sen on osoitettu edistävän myönteisiä tunteita oppimista kohtaan [15]. Viljaranta & Tuominen [16] tuo esille, että Wigfiels kollegoineen on havainnut tutkimuksissaan alakoululaisten matematiikkaan ja urheiluun liittämät tärkeys- ja hyötyarvot vähenivät alakoulun aikana mutta kiinnostusarvo matematiikkaan ja urheiluun ei muuttunut. Lisäksi on huomattu että, että siirryttäessä yläkouluun matematiikkaan liitetyt tärkeys- ja kiinnostusarvot vähenevät. Arvostuksen muutoksiin vaikuttaa esimerkiksi kouluvuosien ja erilaisten oppimiskokemusten vaikutuksesta lasten ymmärrys eri oppiaineista muotoutuu selkeämmiksi ja samalla lasten omat näkemykset itsestään ja omista vahvuuksistaan kehittyvät realistisemmiksi, jolloin oppilaat kykenevät paremmin arviomaan eri oppiaineiden merkitystä itselleen, joka ohjaa arvotusten kehitystä.

Kiinnostuksen on liitetty olevan yhteydessä koulusuoriutumiseen ja koulutaitojen kehitykseen jo ensimmäisistä kouluvuosista lähtien ja kun oppilas on kiinnostunut jostakin oppiai-

neesta ja sen asiasisällöistä, hän todennäköisemmin suuntautuu tämän aineen tehtäviin innokkaammin ja sinnikkäämmin kuin oppilas, joka ei ole yhtä kiinnostunut. [16] Sen lisäksi, että oppiainekohtaiset arvostukset kouluvuosien aikana heikkenevät, lisääntyy oppilaiden kokemukset siitä, etteivät opiskeltavilla asioille ole merkitystä tai hyötyä käytännön elämän kannalta [16]. Lisäksi oppilas saattaa valita tavoitteensa ulkoisen tai sosiaalisen paineen vaikutuksesta omien arvojen tai sisäisten kiinnostusten sijaan [15]. Eri arvostuksista hyötyarvo on kaikkein eniten yksilön ulkopuolisista tekijöistä syntyvää motivaatiota, koska oppilas sitoutuu opiskeluun saavuttaakseen muita tavoitteita. Oppiaineiden koettuun hyötyarvoon on mahdollista vaikuttaa joko esittämällä oppilaalle tietoa ja perusteluja siitä, miksi oppiaine tai aihe voisi olla hyödyllinen tai herätellä oppilas itse pohtimaan oppiaineen tai aihekokonaisuuden hyödyllisyyttä omien tavoitteidensa kannalta. [16]

2.2 Minäpystyvyys

Oppilaalla on itsellään oma käsitys millainen hän oppijana, se voi pohjautua käsitykseen, että on olemassa synnynnäistä matemaattista lahjakuutta, omiin kokemuksiin perustuvia uskomuksia omista kyvyistä tai itse oppimiseen liittyvistä uskomuksista [4]. Oppilaan myönteinen käsitys omista matematiikan taidoista näkyy siinä, että hän uskoo pärjäävänsä matematiikan tehtävissä [15] Tutkimuksissa minäpystyvyys käsite kuvailee oppilaan arvioita siitä, miten hän suoriutuu tietynlaisista tehtävistä. Onnistumiset matematiikassa lisäävät uskoa omiin kykyihin ja innostaa oppimaan uutta. Onnistumisten myötä matematiikasta muodostuu oppilaalle mieleinen oppiaine, jossa hän tuntee olevansa hyvä ja haluaa menestyä siinä. Epäonnistumiset ja vaikeudet matematiikassa puolestaan aiheuttavat negatiivisia tunteita, jolloin oppilas menettää uskon omiin kykyihinsä matematiikan osaajana ja oppijana. [4]

Matemaattikuvan ollessa myönteinen oppilaalla, hän jaksaa yleensä ponnistella pidempään ja todennäköisemmin voittaa matemaattiset haasteet [4] ja tätä tukee Ecclesin odotusarvoteoria, jonka mukaan henkilö joka uskoo pärjäävänsä jossakin tehtävässä ja arvostaa siinä onnistumista, niin hän myös panostaa tehtävään ja menestyy siinä [15]. Täten oppilas, joka ei anna negatiivisten tunteiden häiritä oppimistaan vaan voi jopa kokea negatiiviset tunteet viestiksi esimerkiksi siitä, että valittu ratkaisumenetelmä ei olekaan välttämättä toimiva. Puolestaan oppilas, joka ei usko omiin kykyihinsä, voi luovuttaa jo vähäisten negatiivisten kokemusten jälkeen. Oppilas voi myös ajatella, että olen lahjakas eikä tarvitse ahkeroida ja pienikin epäonnistumisen voi kokea merkkinä, ettei olekaan lahjakas. Toisaalta perfektionisti voi kokea itsensä huonoksi, ellei pysty täydelliseen suoritukseen, jolloin hänellä on kielteinen minäkuva itsestään. Heikosti suoriutuva oppilas taasen voi olla tyytyväinen omaan suoritustasoonsa ja näin ollen hänellä on myönteinen minäkuva itsestään. [4]

Opettaja voi asenteellaan vaikuttaa oppilaan matikkakuvaan, sillä opettajan myönteinen

asenne, tuki ja kannustus vaikuttavat myönteisesti oppilaan uskomuksiin itsestään matematiikan oppijana. Myös vanhempien myönteinen asenne matematiikkaa kohtaan vaikuttaa vahvasti siihen, miten oppilas arvostaa matematiikkaa. [4]

2.3 Matikka ja ahdistus

Matematiikka-ahdistuksella on motivaatioon sekä minäkuvaan valtavan negatiivinen vaikutus, joka on maailmanlaajuinen ongelma ja vaikuttaa kaikkiin ikäryhmiin [17]. Matemaattista ahdistusta voi esiintyä jo koulutaipaleen alussa, mutta usein lisääntyy yläkouluun mentäessä. Suomalaisen perusopetuksen oppimistulosten pitkittäisarvioinnissa [9] on tutkittu myös matematiikka-ahdistuksen vaikutusta matematiikan oppimiseen. Näiden tutkimuksien mukaan yleisopetuksen mukana olevien heikkojen oppijoiden kokema matematiikka-ahdistus on lisääntynyt voimakkaasti 6. luokan ja 9.luokan seurantajaksojen välissä, kun puolestaan yksilölliseen opetukseen siirretyillä näyttäytyi vähäistä vähenemistä. Matematiikka-ahdistuneisuus on osoitettu olevan vahvasti sukupuolittunutta ja tytöt saivat sekä kuudennella että yhdeksännellä luokalla korkeammat ahdistuneisuuspisteet. On tutkimushavaintoja, että erityiseen tukeen siirretyt oppilaat olivat ainoa ryhmä, jonka käsitys itsestä matematiikan oppijana ei heikentynyt yläkoulun aikana sekä siirtyminen erityiseen tukeen vähensi matematiikkaan liittyviä ahdistuneisuuden kokemuksia. [9]

Matemaattinen ahdistus on usein jatkuvaa ja vaikuttaa siihen, miten yksilö tuntee, näkee ja arvioi tietyissä tilanteissa ja ahdistus kasvaa matematiikkaan liittyvissä tilanteissa. Matematiikka-ahdistukseen liitettäviä tunteita ovat esimerkiksi jännityksen, pelon ja hermostuneisuuden tunteet. Lisäksi voi olla myös fyysisiä oireita, kuten kohonnut syke, käsien hikoilu, huimaus ja vatsavaivat. Ahdistusta aiheuttavia syitä on esimerkiksi numeerinen ahdistus, kokeesta aiheutunut ahdistus tai luokkahuoneessa koettu ahdistus. Luokkahuoneessa koetun ahdistuksen syynä voi olla esimerkiksi matematiikan opettajaan liittyvä pelko. Matematiikasta ahdistuneet välttelevät matematiikkaa ja suoriutuvat kokeissa odotuksia heikommin, joka aiheuttaa noidankehän koska todennäköisesti se vain lisää matemaattista ahdistusta. Lisäksi vielä opettajat, vanhemmat ja muut tärkeät aikuiset voivat omilla asenteillaan vaikuttaa lapsiin, esimerkiksi negatiivinen suhtautuminen matematiikkaan tai levittämällä myyttiä, että matemaattiset kyvyt olisivat synnynnäisiä. [17]

3. LIIKUNTA JA OPPIMINEN

Liikunta on tärkeä kasvuympäristön tarjoama oppimisväylä, koska sen avulla opitaan liikkumaan, opitaan itsestään liikkujana sekä opitaan liikunnasta. Lisäksi liikunta voi vahvistaa lasten tiedollista toimintaa, erityisesti muistia ja toiminnanohjausta.[2] Liikunnan ja oppimisen välinen yhteys ei ajatuksena Suomessakaan ole uusi, vaan väitöskirjoja on julkaistu jo useampia [2] (esim. Sneck 2022 [18]; Ruotsalainen 2017, Haapala 2015; Syväoja 2014; Kantomaa 2010) sekä hallituksen Liikkuva koulu -ohjelma on opetussuunnitelman [13] lisäksi pyrkinyt tuoda liikuntaa lisää lasten ja nuorten päiviin.

3.1 Liikunnan vaikutus aivoihin

Liikunta lisää aivojen tilavuutta ja aktiivisuutta erityisesti niillä aivoalueilla, joissa muisti ja toiminnanohjaus toimivat. Nämä aivojen rakenteissa ja toiminnassa tapahtuneet liikunnan aikaansaamat muutokset luovat lisää mahdollisuuksia oppimiseen.[6]

Tutkimusten [6] mukaan osa liikunnan ja tiedollisten toimintojen yhteydestä perustuu muutoksiin aivojen aineenvaihdunnassa, joten liikunta esimerkiksi lisää aivojen verenkiertoa ja parantaa hapensaantia, jotka edistävät esimerkiksi ajattelua ja päätöksentekoa. Osa näiden kahden yhteydestä ajatellaan perustuvan aivojen rakenteiden kehittymisestä esimerkiksi lapsuuden fyysinen aktiivisuus optimoi muistiin liittyviä aivojen hermoverkkoja ja synnyttää uusia alkeissoluja, jotka vaikuttavat oppimiskykyyn. Lisäksi säännöllisen liikunnan on todettu kasvattavan aivoissa olevien hiussuonten määrää ja synnyttävän uusia hermosoluja aivoissa alueeseen, jossa on oppimisen ja muistin keskus.

Liikunnalla on myös vaikutusta toiminnan ohjaukseen sekä tarkkaavaisuuden suuntaamiseen, sillä liikunta lisää aivokuoren sähköistä aktiivisuutta. Pidempi kestoinen liikunta lisää aivojen aktiivisuutta niillä aivokuoren alueilla, joissa toiminnan ohjaus sijaitsee. Akuutti liikuntasuoritus puolestaan lisää aktiivisuutta niillä aivokuoren alueilla, jotka tarvitaan tarkkaavaisuuden suuntaamiseen. [6] Toisaalta vapaa-ajalla, urheiluseurassa ja koulussa toteutetulla liikunnallisella aktiivisuudella voi olla toisistaan poikkeavia eroavaisuuksia oppimiseen. Urheiluseurassa tapahtuva fyysinen aktiivisuus on stukturoidumpaa ja tavoitteellisempaa ja hyvin korkea urheiluharrastukseen sitoutuminen voi viedä liikaa aikaa haitaten opiskelua, mutta toisaalta vaikuttaa itsetuntoon ja mielenhyvinvointiin ja sitä myöten positiivisesti oppimistuloksiin. [3]

3.2 Koulupäivän aikaisen liikunnan vaikutus matematiikassa menestymiseen

Oppitunnin aikaisen liikunnallisen tauon yhteyttä koulumenestykseen on useampi taho tutkinut ja tulokset ovat olleet lupaavia erityisesti matematiikan osalta [6]. Koululiikunnan lisääminen on yhdistetty olevan yksi tapa parantaa matematiisia taitoja [3] ja liikunnan vaikutus matematiikkaan positiivisesti nousee esille ympäri maailmaa tehdyissä tutkimuksissa [6].

Yhdysvalloissa Fedeva kollegoineen [6] on todennut tutkiessaan liikunnallisten taukojen merkitystä koulupäivän aikana, että ne ovat parantanut matematiikan testituloksia tuloksia merkittävästi vertailuryhmän lapsiin verrattuna. Mulleder-Wijnsma tutkimusryhmänsä kanssa sai selville Hollannissa, että fyysisesti aktiiviset oppitunnit vaikuttivat oppilaiden pärjäämiseen matematiikan testeissä, koska he menestyivät verrokki ryhmää paremmin. McIsaac kollegoineen on todennut Kanadassa tehdyissä tutkimuksissa, että välitunneilla vähemmän fyysisesti aktiiviset lapset saivat huonompia arvosanoja matematiikassa kuin fyysistesti aktiiviset lapset. Telford muiden kanssa sai selville tutkimuksissa Australiassa, että oppilaiden matematiikan taidot paranivat enemmän niillä ryhmillä joiden liikunnan tunnin piti liikuntaan erikoistunut opettajan kuin niiden joiden liikunnan tunnin piti luokanopettaja.

Lisäksi liikuntakerhot ja muu koulupäivän aikana tapahtuva liikunta ovat olleet positiivisesti yhteydessä matematiikan koulumenestykseen Ruotsissa ja Saksassa tehtyjen tutkimusten mukaan. Norjassa Rosland kumppaniensa kanssa teki huomion, että oppitunteihin integroidut viiden minuutin liikunnalliset tauot, joita oli yhteensä viikossa 90 minuuttia sekä päivittäin annetut kymmenen minuutin liikunnalliset kotitehtävät vaikuttivat heikosti matematiikassa menestyviin, joiden tulokset paranivat enemmän kuin verrokkiryhmässä olevien. [6]

4. MATEMAATTINEN OSUUS

Tutkimuksessa oppilaiden tehtävissä pyydetään merkitsemään murtoluvuin ja seuraavaksi esittelenkin mitä murtoluvut oikeastaan ovat. Murtoluvut kuuluvat rationaalilukujen joukkoon, joka on lukualue. Päästäksemme rationaalilukuihin, lähdetään liikkeelle luonnollisista luvuista ja tehdään ne tunnetuksi. Luonnollistenlukujen konkstruktoinnin jälkeen siirrymme kokonaislukuihin ja lopulta rationaalilukuihin. Lisäksi käytämme operaatioita $+$, $-$, $<$ ja $\leqslant$, jotka arkikielessä tunnemme paremmin sanoilla plus, miinus, pienempi kuin ja pienempi tai yhtäsuuri kuin. Päälähteenä käytetään Erkki Pehkosen kirjaa Matematiikan peruskurssi 1 vuodelta 1978 [12].

4.1 Luonnolliset luvut

Esittelen seuraavaksi kaksi erilaista tapaa määritellä luonnolliset luvut. Ensimmäisessä näistä von Neumann lähestyi luonnollisia lukuja joukko-opin kautta, joka perustuu ajatukseen, että nolla on tyhjä joukko. Numero yksi on joukko jossa alkiona on tyhjä joukko ja numero kahden alkiot ovat tyhjä joukko ja joukko jonka alkio on tyhjä joukko. Tavassa luvun määrittelee se, montako alkiota joukossa on.

Määritelmä 1. *Von Neumannin [19] lähestymistapa luonnollisiin lukuihin:*

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \{\varnothing\} \\
2 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Mikä tarkoittaa seuraavaa:

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \{0\} \\
2 &= \{0, 1\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} \\
&\vdots \\
n + 1 &= \{0, 1, 2, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

Matemaatikko von Neumannin tapa kuvailee joukko-opillisesti luonnollisia lukuja. Koska von Neumann määrittelee, että tyhjä joukko on nolla, niin saadaan konkreettinen joukko, joka kertoo mikä nolla on ja voidaan kiinnittää nolla tästä eteenpäin. Lisäksi von Neumann mahdollistaa yhden tavan saada konstruoitua luonnolliset luvut, mutta päästäksemme laajentamaan lukualueita tarvitsemme myös toisen lähestymistavan luonnollisiin lukuihin. Luonnollisten lukujen joukko voidaan määritellä myös käyttämällä Peanon aksioomajärjestelmää, jossa luonnollisia lukuja voi ajatella jonona. Esimerkiksi tälläinen jono voi olla kävelymatka. jossa alkupiste on nolla ja seuraava askel aina yhden numeron/luvun suurempi kuin edellinen. Peanon aksioomajärjestelmässä käytetään peruskäsitteitä ”nolla”, ”kuuluu joukkoon” ja ”on seuraaja”.

Määritelmä 2. *Peanon aksioomat:*
P1. $0 \in N$
P2. Jokaisella $n \in N$ *on seuraaja* n'*, joka myös kuuluu joukkoon* N*.*
P3. Jos $n \in N$*, niin* $n' \neq 0$
P4. Jos $n, p \in N$ *ja* $n' = p'$*, niin* $n = p$
P5. Jos $A \subset N$ *ja sillä pätee* $0 \in A$ *ja aina kun* $n \in A$ *niin siitä seuraa* $n' \in A$*, niin* $A = N$

Luonnollisten lukujen joukossa N määritellään yhteen- ja kertolasku sekä järjestys annetuista peruskäsitteistä ”nolla (0)” ja ”seuraaja” lähtien. Otetaan käyttöön luonnollisten lukujen merkinnät: $1 := 0'$, $2 := 1'$, $3 := 2'$,... ja esim. $1 := 0'$ luetaan ”määritelmän mukaan luku yksi on nolla’, määritelmän mukaan luku kaksi on yksi’ jne”.

Määritelmä 3. Luonnollisten lukujen yhteenlasku määritellään rekursiivisesti seuraavasti

$$a + 0 := a \qquad ja \qquad a + b' := (a + b)'.$$

Luonnollisten lukujen kertolasku määritellään rekursiivisesti seuraavasti:

$$a \cdot 0 := 0 \qquad ja \qquad a \cdot b' := a \cdot b + a.$$

Määritelmä 4. Luonnollisten lukujen järjestys:

Lukua a sanotaan pienemmäksi kuin lukua b, jos on olemassa luonnollinen luku c siten, että pätee $a + c = b$ ja $c \neq 0$. Tällöin merkitään $a < b$.

Joukko N, jossa on alkio 0 ja sillä seuraaja n', joten von Neumannin luonnollisten lukujen joukko on tälläinen Peanon systeemi kun n seuraaja on n' eli $n + 1 = n'$. Viimeistä aksiomaa P.5 kutsutaan induktioaksioomaksi ja siihen perustuu tärkeä todistusmenetelmä, jota kutsutaan täydelliseksi induktioksi.
Olk. $p(n)$ luonnollisten lukujen joukossa N määritelty kaava ja olkoon $L = \{n \in N \mid p(n)\}$.
Jos voidaan todistaa väitteet:
1) "$p(0)$ on tosi"
2) "Jos $p(k)$ on tosi, niin silloin $p(k + 1)$ on tosi, missä $n \in L$"
niin $L = N$.

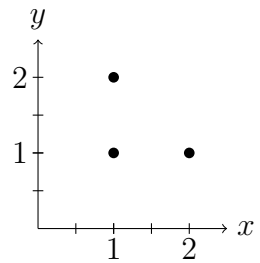
Tämän todistaaksemme tarkastellaan joukkoa L. Oletuksen 1 mukaan pätee, että $0 \in L$ ja oletuksen 2 mukaan jokaisella $n \in L$ ehdosta seuraa, että $n + 1 \in L$. Joten induktioaksiooman P.5 nojalla on voimassa $L = N$ ja ehto $p(n)$ on tosi jokaisella $n \in N$.

4.2 Kokonaisluvut

Luonnollisten lukujen joukossa ei kyetä ratkaisemaan yhtälöä $a+x = b$, jos b on pienempi kuin a. Luonnollisia lukuja voidaan laajentaa niin, että on ratkaisu x on olemassa myös silloin, kun $b < a$. Luonnollisissa luvuissa esiintyneet yhteen- ja kertolaskusäännöt sekä järjestyksen "<" pidetään tunnettuina tässä kohtaa.

Määritelmä 5. *Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Niiden tulojoukon $A \times B$ osajoukkoja R kutsutaan relaatioiksi joukosta A joukkoon B, joka merkitään $R : A \to B$.*

Esimerkki. Relaatiota R voidaan havainnoillistaa usealla eri tavalla ja yleisin niistä on koordinaatisto. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ voidaan esittää koordinaastiosta seuraavalla tavoin.



Määritelmä 6. *Joukon A relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio, jos seuraavat kolme ehtoa täyttyvät:*

1. *Relaatio $\sim$ joukossa A sanotaan olevan refleksiivinen, jos jokaisella $a \in A$ pätee $a \sim a$*
2. *Relaatiota $\sim$ joukossa A sanotaan symmetriseksi, jos kaikilla $a, b \in A$ pätee $a \sim b$ niin myös $b \sim a$.*
3. *Relaatio $\sim$ on transitiivinen, jos kaikilla $a, b, c \in A$ pätee $a \sim b$ ja $b \sim c$ niin $a \sim c$.*

Määritelmä 7. *Määritellään joukossa $N \times N$ relaatio $\sim$ asettamalla $(a, b) \sim (c, d)$ jos ja vain jos $a + d = b + c$.*

Lause 1. *Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio tulojoukossa $N \times N$*

Todistus.

Refleksiivisyys: Olk. $(a, b) \in N \times N$. Koska $a + b = b + a$, niin $(a, b) \sim (a, b)$.

Symmetrisyys: Oletetaan, että $(a, b) \sim (a', b')$. Koska $a + b' = a' + b$, niin myös $a' + b = a + b'$, jolloin määritelmän mukaan $(a', b') \sim (a, b)$.

Transitiivisuus: Oletetaan, että $(a, b) \sim (c, d)$ ja $(c, d) \sim (e, f)$. Siis $a + d = b + c$ ja $c + f = d + e$ ja laskemalla nämä puolittain yhteen, saadaan:

$$(a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e).$$

Järjestellään uudelleen

$$(a + f) + (c + d) = (b + e) + (c + d),$$

josta nähdään, että $a + f = b + e$ ja relaation määritelmällä saadaan $(a, b) \sim (e, f)$. $\square$

Määritelmä 8. *Kokonaislukujen Z relaatio $\sim$ on ekvivalenssiluokkien joukko. Parin (a, b) ekvivalenssiluokkaa merkitään jatkossa $[a, b]$.*

Määritelmä 9. *Kokonaislukujen joukon Z yhteen- ja kertolasku määritellään seuraavasti.*

Yhteenlasku:

$$[a, b] \oplus [c, d] := [a + c, b + d].$$

Kertolasku:

$$[a, b] \odot [c, d] := [ac + bd, ad + bc].$$

Yhteen- ja kertolaskut on osoitettu hyvinmääritellyiksi [12, s. 160].

Kokonaislukujen joukko Z on Abelin ryhmä [12, s. 146] ja Abelin ryhmän määritelmän mukaan yhteenlasku on liitännäinen, yhteenlaskussa on nolla- ja vasta-alkio sekä yhteenlasku on vaihdannainen. Lisäksi kokonaisluvut on rengas [12, s. 147], eli kokonaisluvut on Abelin ryhmä, kertolasku on liitännäinen sekä toteuttaa osittelulait yhteenlaskuun nähden. Todistukset löytyy lähteestä [12, s. 160-161].

Määritelmä 10. *Joukossa A määritellyn relaation $\sqsubseteq$ (lue: edeltää) sanotaan olevan järjestysrelaatio joukossa A, jos relaatio $\sqsubseteq$ on refleksiivinen, transitiivinen, antisymmetrinen ja vertailullinen eli jokaisella $a \sqsubseteq b$ tai $b \sqsubseteq a$. Relaatio on antisymmetrinen silloin, kun jokaisella $a, b \in A$ pätee $a \sqsubseteq b$ ja $b \sqsubseteq a$ niin $a = b$. Järjestetty joukko on pari A ja $\sqsubseteq$.*

Määritelmä 11. Kokonaislukujen joukon Z järjestys määritellään seuraavasti.

$$[a, b] \sqsubseteq [c, d] := a + d \leqslant b + c$$

Lause 2. $(Z, \sqsubseteq)$ *on järjestetty joukko.*

Todistus.

Refleksiivisyys: Koska $a + b \leqslant b + a$ on määritelmän mukaan $[a, b] \sqsubseteq [a, b]$.

Antisymmetrisyys: Oletetaan, että $[a, b] \sqsubseteq [c, d]$ ja $[c, d] \sqsubseteq [a, b]$. Tällöin $a + d \leqslant b + c$ ja $b + c \leqslant a + d$ mistä seuraa, että $a + d = b + c$, joten $[a, b] = [c, d]$

Transitiivisuus: Oletetaan, että $[a, b] \sqsubseteq [c, d]$ ja $[c, d] \sqsubseteq [e, f]$. Tällöin $a + d \leqslant b + c$ ja $c + f \leqslant d + e$ ja laskemalla puolittain yhteen, saadaan:

$$(a + d) + (c + f) \leqslant (b + c) + (d + e).$$

Järjestellään uudelleen:

$$(a + f) + (c + d) \leqslant (b + e) + (c + d),$$

josta seuraa

$$a + f \leqslant b + e,$$

jolloin järjestyksen määritelmän mukaan

$$[a, b] \sqsubseteq [e, f].$$

Vertailullisuus: Järjetyksen täydellisyyden todistaminen ks. [12, s.162].

□

Määritelmä 12. *Joukko A on järjestetty rengas kun seuraavat neljä aksioomaa ovat voimassa:*

1. $(A, +, \cdot)$ *on rengas.*
2. $(A, \leqslant)$ *on järjestetty joukko.*
3. *Ehdosta* $a \leqslant b$ *seuraa* $a + c \leqslant b + c$*, kaikilla* $a, b, c \in A$*.*
4. *Ehdoista* $0 \leqslant a$ *ja* $0 \leqslant b$ *seuraa* $0 \leqslant a \cdot b$ *kaikilla* $a, b \in A$*, missä* 0 *on renkaan* $(A, +, \cdot)$ *nolla-alkio.*

Lause 3. $(Z, \oplus, \odot, \sqsubseteq)$ *järjestetty rengas.*

Todistus. $(Z, \oplus, \odot)$ on rengas ks. [12, s. 160-161] sekä lauseen 2 nojalla $(Z, \sqsubseteq)$ on järjestetty joukko. Osoitetaan seuraavaksi, että aksiooma 3 pätee, eli jos $[a, b] \sqsubseteq [c, d]$, niin $[a, b] \oplus [e, f] \sqsubseteq [c, d] \oplus [e, f]$ pätee kaikilla $[a, b], [c, d], [e, f] \in Z$. Oletetaan, että pätee $[a, b] \sqsubseteq [c, d]$ ja määritelmästä seuraa

$$a + d \leqslant b + c,$$

josta seuraa

$$a + d + e + f \leqslant b + c + e + f.$$

Järjestellään uudelleen

$$a + e + d + f \leqslant b + f + c + e$$

ja järjestyksen määritelmän avulla saadaan

$$[a + e, b + f] \sqsubseteq [c + e, d + f].$$

Tästä yhteenlaskun määritelmän avulla saadaan $[a, b] \oplus [e, f] \sqsubseteq [c, d] \oplus [e, f]$.

Oletetaan aksiooma 4:n todistusta varten, että $[0, 0] \sqsubseteq [a, b]$ ja $[0, 0] \sqsubseteq [c, d]$. Koska $[0, 0]$ edeltää molempia kokonaislukuja $[a, b]$ ja $[c, d]$, niin kokonaisluvut ovat suurempia tai yhtäsuuria kuin nolla eli $0 \leqslant b \leqslant a$ ja $0 \leqslant d \leqslant c$. Joten on todistettava, että $[0, 0]$ edeltää myös kokonaislukujen $[a, b]$ ja $[c, d]$ kertolaskua eli

$$[0, 0] \sqsubseteq [ac + bd, ad + bc]$$

On olemassa sellainen $e \in N$, jolla $a = b + e$ ja sellainen $f \in N$, jolla $c = d + f$, jolloin saadaan

$$ac + bd = (b + e)(d + f) + bd = ed + bf + ef + 2bd$$

ja

$$ad + bc = (b + e)d + b(d + f) = ed + bf + 2bd.$$

Tästä saadaan

$$ed + bf + 2bd \leqslant ed + bf + ef + 2bd,$$

joten

$$0 \leqslant ad + bc \leqslant ac + bc.$$

Tästä järjestyksen määritelmän avulla saadaan

$$[0,0] \sqsubseteq [ac + bd, ad + bc],$$

ja kokonaislukujen kertolaskun määritelmän avulla saadaan

$$[0,0] \sqsubseteq [a,b] \odot [c,d].$$

□

Määritelmä 13. *Kokonaisluku [a,b] on positiivinen, jos nolla-alkio [0,0] edeltää aidosti sitä, eli* $[0,0] \sqsubset [a,b]$*, jolloin* $b < a$*.*

Määritelmästä nähdään, että positiivinen kokonaisluku voidaan esittää muodossa $[a,b] = [n,0]$, missä $a = b + n \quad (n \in N)$.

Määritelmä 14. *Kokonaisluku* $[a,b]$ *on negatiivinen, jos se edeltää nolla-alkiota aidosti, eli* $[a,b] \sqsubset [0,0]$*, jolloin* $a < b$*.*

Määritelmä 15. *Kokonaisluvun* $[a,b]$ *vasta-alkio on* $[b,a] \in Z$*. Kun nämä lasketaan yhteen, niin saadaan* $[a,b] + [b,a] = [0,0]$*.*

Luonnollisten lukujen joukko N ja ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko Z_+^0 ovat keskenään isomorfiset. Nimittäin kuvaus $f : N \to Z_+^0$, $f(n) = (n,0)$ on isomorfismi, eli bijektio, joka siirtää rakenteiden laskutoimitukset joukosta toiseen. Tästä eteenpäin voidaan todeta, että joukon N laskutoimitusominaisuudet ovat voimassa myös joukossa Z_+^0. Joukon Z negatiivisia lukuja varten määritellään seuraavaksi vähennyslaskutoimitus.

Määritelmä 16. *Kokonaislukujen joukon* Z *erotus määritellään vasta-alkion avulla:*

$$[a,b] \ominus [c,d] := [a,b] \oplus [d,c] = [a + d, b + c]$$

Esim. Joukon Z_+^0 alkioiden kohdalla saadaan

$$[a,0] \ominus [b,0] := [a + 0, b + 0] = [a,b],$$

jolloin merkitsemme jatkossa kokonaislukua $[a,0]$ lyhyesti a ja kahden positiivisen koko-

naisluvun erotukseksi voidaan merkitä lyhyesti:

$$a - b := [a, b]$$

.
Olkoon $a = 0$, jolloin saadaan

$$-b := 0 - b = [0, b]$$

ja nyt voidaan määritellä, että $-b$ on negatiivinen kokonaisluku, jos b on positiivinen kokonaisluku.

4.3 Rationaaliluvut

Kokonaislukujen joukossa ei kyetä aina ratkaisemaan yhtälöä $n \cdot x = p \ \ (n, p \in Z)$, joten tässä luvussa konstruoidaan kokonaisluvuista rationaaliluvut. Aiemmin käydyt kokonaislukujen laskusäännöt pidetään tunnettuina sekä järjestyksen $\leqslant$ tunnetut tulokset.

Määritelmä 17. *Joukon $Z \times Z_+$ relaatio $\sim$ määritellään seuraavasti: $(a, b) \sim (c, d)$ jos ja vain jos $ad = bc$.*

Lause 4. *Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio tulojoukossa $Z \times Z_+$.*

Todistus.

Refleksiivisyys: Olkoon $(a, b) \in Z \times Z_+$. Koska $ab = ba$, niin $(a, b) \sim (a, b)$.

Symmetrisyys: Oletetaan, että $(a, b) \sim (a', b')$. Tällöin $a \cdot b' = a' \cdot b$, joten myös $a' \cdot b = a \cdot b'$, jolloin määritelmän mukaan $(a', b') \sim (a, b)$.

Transitiivisuus: Oletetaan, että $(a, b) \sim (c, d)$ ja $(c, d) \sim (e, f)$. Siis $a \cdot d = b \cdot c$ ja $c \cdot f = d \cdot e$ ja nähdään, että

$$a \cdot d \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot d \cdot e$$

ja siitä seuraa, että

$$a \cdot f = b \cdot e \quad ts. \, (a, b) \sim (e, f)$$

. □

Määritelmä 18. *Olkoon Q relaation $\sim$ ekvivalenssiluokkien joukko ja joukon alkioita kutsutaan rationaaliluvuiksi. Lukuparin (a, b) määräämää rationaalilukua merkitään [a,b] ja määritelmän mukaan on voimassa*

$$[a, b] = [c, d] \iff ad = bc$$

.

Esim. Parit $(2, 4)$ ja $(4, 8)$ määräävät saman rationaaliluvun eli $[2, 4] = [4, 8]$ koska pätee $2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$.

Määritelmä 19. *Rationaalilukujen joukossa Q yhteen- ja kertolasku määritellään seuraavasti.*
Yhteenlasku:

$$[a, b] \oplus [c, d] := [ad + bc, bd]$$

Kertolasku:

$$[a, b] \odot [c, d] := [ac, bd]$$

Laskutoimitukset ovat hyvinmääriteltyjä, ks. [12, s. 166].

Määritelmä 20. *Rationaalilukujen nolla-alkio alkio voidaan esittää muodossa $[0, 1]$, sillä jokaisella rationaaliluvulla pätee:*

$$[a, b] \oplus [0, 1] = [a \cdot 1 + b \cdot 0, b \cdot 1] = [a, b].$$

Rationaaliluvun $[a, b]$ vastaluku on $[-a, b]$, koska pätee

$$[a, b] \oplus [-a, b] = [ab + b(-a), bb] = [0, bb] = [0, 1].$$

Ykkösalkio on $[1, 1]$, sillä jokaisella rationaaliluvulla $[a, b]$ pätee

$$[a, b] \odot [1, 1] = [a \cdot 1, b \cdot 1] = [a, b]$$

Rationaaliluvun $[a, b]$ ($\neq [0, 1]$) käänteisalkio on $[b, a]$, koska pätee

$$[a, b] \odot [b, a] = [ab, ba] = [1, 1].$$

Lause 5. *$(Q, \oplus, \odot)$ on kunta, eli seuraavat aksioomat ovat voimassa:*

K1: Kolmikko $(Q, \oplus, \odot)$ on rengas.
K2: Kertolasku on vaihdannainen.
K3: Renkaassa on ykkösalkio; ts. on olemassa $1 \in Q$ siten, että jokaisella $x \in Q$ pätee $1 \cdot x = x$.
K4: Jokaisella renkaan nolla-alkiosta eroavalla alkiolla on käänteisalkio joukossa Q.

Todistus. [12, s. 167-168] □

Määritelmä 21. Rationaalilukujen joukon Q järjestys määräytyy kokonaislukujen järjes-

tyksen $\leqslant$ avulla seuraavasti

$$[a,b] \sqsubseteq [c,d] :\Longleftrightarrow \; ad \leqslant bc$$

.

Lause 6. $(Q, \sqsubseteq)$ *on järjestetty joukko.*

Todistus.

Refleksiivisyys: Koska $a \cdot b \leqslant b \cdot a$, niin $[a,b] \sqsubseteq [a,b]$.

Antisymmetrisyys: Oletetaan, että $[a,b] \sqsubseteq [c,d]$ ja $[c,d] \sqsubseteq [a,b]$. Tällöin $a \cdot d \leqslant b \cdot c$ ja $c \cdot b \leqslant d \cdot a$ ja saadaan, että $a \cdot d = b \cdot c$ ja siitä seuraa, että $[a,b] = [c,d]$.

Transitiivisuus: Oletetaan, että $[a,b] \sqsubseteq [c,d]$ ja $[c,d] \sqsubseteq [e,f]$. Tällöin $a \cdot d \leqslant c \cdot b$ ja $c \cdot f \leqslant e \cdot d$ ja saadaan, että

$$a \cdot d \cdot c \cdot f \leqslant c \cdot b \cdot e \cdot d,$$

josta seuraa

$$a \cdot f \leqslant b \cdot e,$$

jolloin järjestyksen määritelmän mukaan

$$[a,b] \sqsubseteq [e,f].$$

Vertailullisuus: Ks. [12, s.168].

□

Lause 7. $(Q, \oplus, \odot, \sqsubseteq)$ *on järjestetty kunta.*

Todistus. Aiemmin on määritelty järjestetty rengas 12 ja sen aksioomia käytetään seuraavassa todistuksessa. Lisäksi, jos rengas on kunta, niin kyseessä on järjestetty kunta. Lauseen 5 nojalla $(Q, \oplus, \odot)$ on rengas ja lauseen 6 nojalla $(Q, \sqsubseteq)$ on järjestetty joukko, eli järjestetyn renkaan aksioomat 1 ja 2 ovat todistettu. Osoitetaan seuraavaksi, että Aksiooma 3 on tosi: jos $[a,b] \sqsubseteq [c,d]$ niin $[a,b] \oplus [e,f] \sqsubseteq [c,d] \oplus [e,f]$ jokaisella $[a,b], [c,d], [e,f] \in Q$. Oletetaan, että $[a,b] \sqsubseteq [c,d]$ eli $ad \leqslant bc$ jolloin

$$afdf \leqslant cfbf, koskaf > 0.$$

Lisätään molemmille puolille $bdef$

$$afdf + bdef \leqslant cfbf + bdef,$$

jolloin uudelleen järjestelemällä saadaan

$$afdf + bedf \leqslant cfbf + debf$$

ja nähdään, että

$$(af + be)(df) \leqslant (cf + de)(bf).$$

Yhteenlaskun ja järjestyksen määritelmän avulla saadaan $[a, b] \oplus [e, f] \sqsubseteq [c, d] \oplus [e, f]$.

Vielä pitää osoittaa, että Aksiooma 4 tosi: jos $[0, 1] \sqsubseteq [a, b]$ ja $[0, 1] \sqsubseteq [c, d]$ niin silloin $[0, 1] \sqsubseteq [a, b] \odot [c, d]$ kaikilla $[a, b], [c, d] \in Q$. Huomataan, että $[0, 1]$ on nolla-alkio, eli 0. Näin ollen $[0, 1] \sqsubseteq [a, b]$ eli $0 \cdot b \leqslant 1 \cdot a$ ja $[0, 1] \sqsubseteq [c, d]$ eli $0 \cdot d \leqslant 1 \cdot c$ ja $0 \leqslant a,\ 0 \leqslant c$, jolloin saadaan, että $0 \leqslant a \cdot c$. Lisäksi, koska $b \leqslant a$ ja $d \leqslant c$ niin saadaan, että $bd \leqslant ac$. Huomataan, että $0 \cdot bd \leqslant 1 \cdot ac.$, koska $0 < 1$, jolloin järjestyksen määritelmällä saadaan, että

$$[0, 1] \sqsubseteq [ac, bd] = [a, b] \odot [c, d].$$

□

Määritelmä 22. *Kokonaiseksi rationaaliluvuksi sanotaan rationaalilukua $[a, b]$, jos luvussa $[a, b]$ on edellinen luku a jaollinen jälkimmäisellä luvulla b ts. jos on olemassa kokonaisluku p siten, että pätee $a = pb$ ja merkitään kokonaista rationaalilukua muodossa $[p, 1]$.*

Kokonaislukujen joukko Z ja kokonaisten rationaalilukujen joukko Q_Z ovat isomorfiset, eli kokonaisia rationaalilukuja voidaan merkintää vaille pitää samoina kuin kokonaislukuja ja niissä on voimassa samat laskutoimitukset. Seuraavaksi otetaan käyttöön osamäärälaskutoimitus.

Määritelmä 23. *Rationaalilukujen joukon Q osamäärä määritellään vasta-alkion avulla seuraavasti:*

$$[a, b] \oplus\!\!\!\!\div [c, d] = [a, b] \odot [d, c] = [ad, bc]$$

.

Esim. Joukon Q_Z kohdalla saadaan

$$[a, 1] \oplus\!\!\!\!\div [b, 1] = [a \cdot 1, 1 \cdot b] = [a, b],$$

jolloin rationaaliluku $[a, b]$ voidaan tulkita kahden kokonaisen rationaaliluvun $[a, 1]$ ja $[b, 1]$ osamääräksi. Lisäksi jos merkitään kokonaista rationaalilukua $[a, 1]$ lyhyesti a, niin isomorfian nojalla saadaan:

$$[a, b] \Rightarrow a : b \Rightarrow \frac{a}{b}.$$

5. TUTKIMUSKYSYMYS

Matemaattisen osaamisen laskemisesta on viime vuosina ollut paljon keskustelua sekä asiaa on monelta taholta myös tutkittu. Kansallisen tutkimuksen tuloksista kertovat Metsämuuronen & Nousiainen [10] teoksessa Matematiikkaa Covid-19 pandemian varjossa, jossa tarkastellaan syitä matemaattisen osaamisen laskevaan trendiin. Tutkimusten mukaan osaamisen suhteen 9-luokkalaiset oppilaat ovat jakautunut kolmeen toisistaan eroavaan ryhmään: heikosti menestyvät, keskimenestyvät ja erittäin hyvin menestyvät [10]. Tutkimuksessa nousee yhdeksi selittäväksi tekijäksi koulujen väliset erot, jotka ovat ovat olleet lievässä nousussa viimeiset 20 vuotta. [10]. Oksanen puolestaan tarkastelee opettajamuuttujien yhteyttä osaamisen muutokseen matematiikassa ja analyysin perusteella voidaan todeta opetusryhmän selittävän noin neljänneksen yhdeksännellällä luokalla havaitusta matematiikan vaihtelusta ja noin viidenneksen havaitusta oppilaan asenteen muutoksesta [11]

Opettajan vaikutusta matematiikan oppimiseen tarkasteltiin Karvin teettämässä perusopetuksen matematiikan pitkittäisarvioinnissa ja ainaistoanalyysissä nousi esiin, että kun opettajalla oli muodollinen kelpoisuus, oli muilla tekijöillä varsin vähän merkitystä oppimistuloksiin [11]. Opettajien lisäksi peruskoulun matematiikan opetuksessa aikaisempien tutkimusten mukaan oppikirjalla ja opettajan oppaalla on keskeinen asema opiskelun tukena ja ohjaajana [9]. Oppikirjan lisäksi on tarjolla monenlaista muuta oppimateriaalia ja puolestaan vahvempi aineenhallinta antaa aineenopettajille luokanopettajia enemmän vapauksia suhteessa oppikirjaan [9]. Alakoulumatematiikassa keskeistä on ymmärtävä oppiminen ja vuosiluokkien edetessä matematiikan opiskelu muuttuu enemmän ja enemmän mekaniiseksi laskemiseksi [9]. Samaan aikaan asenteet matematiikkaa kohtaan laskevat: Peruskoulun alkuvuosina asenteet ovat positiivisia, 6. luokan mittauksessa asenteen muutos matematiikasta pitämiseen on heikentynyt olennaisesti ja yläkoulun aikana matematiikan kokeminen hyödylliseksi laskee samanaikaisesti pystyvyyden tunteen heiketessä ja ahdistuksen tunteen kasvaessa [9].

Liikunnallisten tehtävien vaikutusta matematiikan oppimiseen on tutkinut Sneck väitöskirjassaan [18] ja tutkimuksen kohteena olleet 3-luokkalaiset pitivät positiivisena sitä, kun liikkuminen sisällytettiin matematiikan oppimiseen. Oppilaiden asenteiden laskettua matematiikkaa kohtaan sekä konkretian vähentyminen peruskoulun edetessä luovat yhtälön, jota tulisi tarkastella. Perusopetuksen opetussuunnitelmassakin [13] mainitaan konkretian

olevan tärkeä osa matematiikan opiskelua. Joillekin oppilaille pelkkien kirjan esimerkkien avulla on vaikea hahmottaa, millaisia yhteyksiä matematiikalla on arkielämään ja liikunta puolestaan pitää sisällään paljon matemaattisia elementtejä, jotka soveltuvat myös yläkoulun matematiikkaan. Tästä syystä onkin tärkeä tutkia, miten konkretia vaikuttaa oppilaiden motivaatioon matematiikan opiskelua kohtaan. Liikunnallisuutta matematiikassa hyödynnetään matematiikassa verrattaen vähän ja siihen liittyviä tutkimuksia on suppeasti. Joten olisi hyvä tutkia lisää, voisiko liikunnallisuus matematiikan opiskelussa olla opetusmenetelmä, joka edistäisi oppilaiden motivaatiota, vahvistaa minäpystyvyyden tunneta tai vähentää matematiikkaa kohtaan koettua ahdistusta. Tämän tutkimuksen tarkoitus onkin siis tutkia liikunnallisten matematiikantehtävien vaikutus oppilaiden motivaatioon yläkoulussa.

6. TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

Tutkimus toteutettiin Hämeenlinnan alueella sijaitsevassa yhtenäiskoulussa joulukuussa 2022. Tutkimuksen kohteena olivat 7-luokan oppilaat kahdesta eri ryhmästä. 7-luokan oppilaat soveltuvat tutkimuksen kohteeksi hyvin, koska he ovat juuri aloittaneet yläkoulun, jolloin heidän asenne yläkoulun matematiikkaa kohtaan ei ole vielä kehittynyt.

6.1 Tutkimusmenetelmät

Pro gradu -tutkielmani on tutkimusmenetelmältään empiiristä tutkimusta ja lähestymistapana kvalitatiivinen eli laadullinen tutkimus. Kokemusperäinen tutkimus soveltuu parhaiten tutkimukseen, sillä tarkoitus on havainnoida oppimiskokemusta ja arvioida tutkittavien omaa kokemusta. Laadullinen tutkimus on perusteltua sillä, että se keskittyy tarkastelemaan yksittäisiä tapauksia, ja olennaista tutkimuksessa on osallistuvien ihmisten näkökulma ja hyvin keskeistä tutkimuksessa on tutkittavien kokemukset. Lisäksi laadulliselle tutkimukselle on ominaista lähestyä tutkimuskohdetta sen luonnollisissa olosuhteissa. Voidaankin sanoa, että laadullinen lähestymistapa korostaa todellisuuden ja siitä saatavan tiedon subjektiivista luonnetta. [7]

Koska tutkimuksessa tarkastellaan matematiikan opetusta sekä sen mielekkyyttä oppilaille melko pienellä otannalla, soveltuu tähän tutkimukseen myös tapaustutkimus (case study research). Tapaustutkimus soveltuu tähän tutkimukseen siltä osin, että tutkimuksessa tutkitaan yksittäistä tapahtumaa ja rajattua kokonaisuutta eli tässä tapauksessa yhden oppitunnin aikaista tapahtumaa. Tapaustutkimukselle tyypillistä on valita yksittäinen tilanne tai tapahtuma ja pyritään tutkimaan yksitätinen tilanne luonnollisessa ympäristössä kuvailemalla yksityiskohtaisesti tutkittavaa ilmiötä. [14]

6.2 Tutkimusineiston kuvaus

Tutkimuskohteeksi valikoitui Hämeenlinnan alueella sijaitsevassa yhtenäiskoulusta kaksi 7-luokan ryhmää. Suunnitelmavaiheessa olin yhteydessä Hämeenlinnan kaupunkiin saadakseni tutkimusluvan opetuksen aikana suoritettavaan tutkimukseen. Opetuskokeilua varten olevia materiaaleja varten tutkin lisätietoa liikunnallisista tehtävistä matematiikasta ja syksyllä 2022 aineistoa aiheesta oli vähänlaisesti, joten suunnittelin eri matematiikan

osa-alueista liikunnallisia tehtäviä. Tehtävien suunnitteluun käytin hyödykseni 6.luokan ja 7.luokan matematiikan kirjoja eri kirjavalmistajilta. Näiden pohjalta pystyin yhdistelemään matematiikan tasoon soveltuvia liikunnallisia tehtäviä. Seuraavaksi kävin tutkimuskohteena olevien oppilaiden opettajan kanssa läpi tehtäviä ja hän esitti toiveita sen mukaan, että tehtävät soveltuvat heidän sen hetkiseen matematiikan oppituntien sisältöön.

Tutkimus toteutettiin yhden päivän aikana ryhmien omilla matematiikan tunneilla. Ensimmäisellä ryhmällä oli tuplatunti (2x45min) ja toisella ryhmällä oli yksi oppitunti (45min). Molempien ryhmien kanssa käytiin aluksi toimintaohjeet läpi, eli jokaisen tehtäväpisteen käytänteet läpi. Oppilaat jaettiin satunnaisesti pienryhmiin, eli rivissä olleet oppilaat numeroitui 1-4 ja muodostui ryhmät 1, 2, 3 ja 4. Tehtäväpisteitä oli 4, joten jokainen ryhmä aloitti omassa tehtäväpisteessään. Tehtäväpisteissä oli määritelty aika, kauanko tehtävää sai suorittaa ja jonka jälkeen siirryttiin seuraavaan tehtävään. Ensimmäisellä ryhmällä oli hankaluuksia suorittaa osaa tehtävistä määritellyssä ajassa, joten alkuperäisiä tehtäväsuunnitelmia supistettiin esimerkiksi vähentämällä yrityksiä heittää koriin. Toiselle ryhmälle oli valmiiksi muokattu ohjeistus vastaamaan ensimmäisen ryhmän ohjeistusta ja heille ei tullut ongelmia ajan kanssa.

6.3 Tutkimusaineiston kerääminen

Tutkimuksessa tarkoituksena on tarkastella liikunnallisten matematiikan tehtävien vaikutusta oppilaiden motivaatioon. Koska tutkittava kohde oli tutkijalle täysin tuntematon, oli tutkimuksen toiminnallista osuutta seuraamassa ja havainnoimassa oppilaiden oma matematiikan opettaja. Opettaja kertoi havainnoistaan suullisesti sekä kirjallisesti. Oppilaiden oma kokemus tehtävistä on tutkimuksen pääosassa ja näitä kokemuksia kartoitettiin liikunnallisten tehtävien suorittamisen päätteksi tunnin lopulla. Oppilaita pyydettiin täyttämään palautekysely (Liite A). Oppilaille myös tuotiin esille, että tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista ja vanhempia tiedotettiin ennakkoon Wilmaviestillä, jossa kerrottiin oppitunnilla toteutettavasta tutkimuksesta ja mahdollisuudesta kieltää lapsen osallistuminen tutkimuskyselyyn vastaamiseen. Palautekyselyssä oli lisäksi kohta, jossa jokainen oppilas kykeni vahvistamaan saako hänen vastauksiaan käyttää tutkimuksessa sekä pystyi myös kieltämään vastausten käytön. 36 oppilaasta 35 oppilasta antoi luvan käyttää tuloksia, sekä 1 oppilas kieltäytyi. Vastaukset ovat anonyymejä ja tämä mahdollistettiin sillä, että oppilaiden palautettua lomakkeet lajittelin myöntävän vastauksen antaneet sekä kieltäytyneet. Lajittelun jälkeen leikkasin lupaosuuden pois ja sekoitin lupaosuudet, jolloin niitä ei voi enää liittää palautevastauksiin. Lisäksi anonyymisuojaa antaa se, että oppilaat olivat tutkijalle tuntematon ryhmä. Kerätty aineisto hävitetään asianmukaisesta tutkimuksen tullessa kokonaisuudessaan päätökseen.

6.4 Liikunnallisia matematiikan tehtäviä

Tutkimukseen valikoitui neljä liikunnallista tehtävää, joita seuraavaksi esittelen. Ensimmäisessä tehtävässä 6.1 yhdistetään pallon pomputus ja numero kahden kertotaulu. Tehtävässä kerrotaan aina kahdella aiempi saavutettu tulos ja tehtävän matemaattinen osa onkin tarkastella oppilaan taito kertoa luku kahdella.

Ohje:

-Pomputa palloa oikealla kädellä kaksi kertaa, sen jälkeen vasemmalla kädellä kaksi kertaa enemmän kuin oikealla eli neljä kertaa. Sen jälkeen oikealla kaksi kertaa enemmän kuin vasemmalla eli 8 kertaa. Vaihda taas vasemmalle kädellä ja pomputa kaksi kertaa niin paljon kuin oikealla. Jatka tätä niin kauan, kuin pomputtelu on katkeamaton.

Merkitse mihin kertolaskuun saakka pääsit ja lisää se tulostaulukkoon

Esim. Jonne pompotteli 2 pomppua oikealla, 4 vasemmalla, mutta seuraavaksi oikealla kädellä pomppu karkasi 6 pompun jälkeen, jolloin hänen tulos oli 2x2

Kuva 6.1. *Tehtävä 1.*

Toisessa tehtävässä 6.2 oppilaat heittävät palloa koriin ja laskevat montako kertaa saivat korin tehtyä. Tehtävässä on tarkoitus selvittää oppilaan onnistumisprosentti murtoluvun avulla. Tehtäväpisteellä voi kaksi heitellä vuorotellen parin laskiessa koreja, näin kyetään sopivassa ajassa saavuttamaan vaaditut heittomäärät.

Kolmas tehtävä on muutoin samanlainen kuin tehtävä 2 6.2, mutta siinä oppilaan silmät sidotaan ja oppilas heittää pallon sokkona. Ohjeessa 6.3 ohjeistetaan oppilasta varmistamaan ennen heittoa, minne suuntaan pallon heittää. Matemaattinen osuus tehtävässä on sama kuin tehtävässä 2. Sujuvoittaakseen heittoja tehtäväpisteellä ohjeistetaan ryhmän muut oppilaat avustamaan sokkoheittäjää siten, että heittäjälle käydään heiton jälkeen ojentamassa pallo.

Tehtäväpiste 2

Ohje:

-Yritä 12 kertaa saada pallo heittämällä koriin, laske montako kertaa sait korin. Ilmoita murtolukuna

-Heitä uudelleen palloa koriin 7 kertaaja. Ilmoita murtolukuna montako kertaa sait korin.

Laske murtoluku ja kerro tulos 100:lla, jolloin saat onnistumisprosenttisi. Ympyröi suurempi onnistumisprosenttisi ja lisää se tulostaulukkoon.

Kuva 6.2. *Tehtävä 2.*

Tehtäväpiste 3.

Ohje:

- Heitä koriin sokkona. Ennen heittoa, katso että olet heittoviivan edessä ja olet heittämässä oikeaan suuntaan. Sen jälkeen laita huivi silmille ja pyri heittämään koriin.

-Heitä pallo koriin 12 kertaa, laske montako kertaa sait korin. Ilmoita murtolukuna

-Heitä uudelleen palloa koriin 7 kertaa ja ilmoita murtolukuna montako kertaa sait korin.

Laske murtoluku ja kerro tulos 100:lla, jolloin saat onnistumisprosenttisi. Ympyröi suurempi onnistumisprosenttisi ja lisää se tulostaulukkoon.

Kuva 6.3. *Tehtävä 3.*

Neljännessä tehtävässä 6.4 liikunnallisessa osuudessa hypätään paikaltaan mahdollisimman pitkälle. Matemaattisessa osuudessa hyppääjä mittaa oman pituutensa ja vertaa sitä hypättyyn matkaan. Lisäksi kun oppilas merkitsee saadut tulokset sekä senttimetreinä että metreinä, niin lopputulemana oppilaan on tarkoitus havainnoida niistä saaduista tuloksista, että ne ovat molemmilla mittayksiköillä samat.

Tehtäväpiste 4.

Ohje:

-Hyppää paikaltaan pituutta. Mittaa hypätty matka.

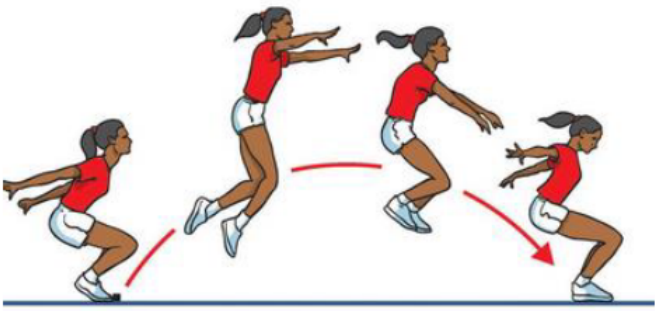
-Mittaa oma pituutesi

-Merkitse oma pituutesi ja hypätty matka senttimetreinä

-Merkitse oma pituutesi ja hypätty matka metreinä

$$\frac{\text{Hypätty pituus}}{\text{Oppilaan pituus}}$$

Laske murtoluvut ja ilmoita saatu tulos tulostaulukkoon



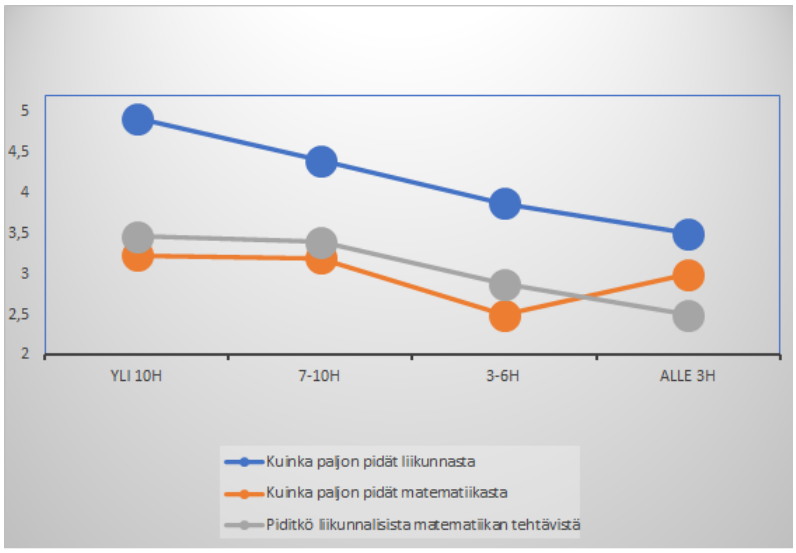
Kuva 6.4. *Tehtävä 4.*

7. TUTKIMUS TULOKSET

Ensimmäisellä tunnilla osassa tehtävissä aika ei meinannut riittää oppilailla tehtävien suorittamiseen. Tehtäväpisteellä 2 ja 3 täytyi supistaa heittojen määrää. Sinällään hyvä, että tämä tapahtui ensimmäisellä tunnilla, koska toisella tunnilla tehtäväpisteillä käytettiin samoja supistettuja heittomääriä. Tehtäväpisteiden aikana molempien ryhmien oppilaita sai ohjata paljon, sekä oppilaat kysyivät paljon apuja tehtävien laskennallisten osuuksien suorittamiseen. Tunneilla tehtyjen havaintojen perusteella, osa jaetuista pienryhmistä teki hienosti yhteistyötä ja kaikki osallistuivat tehtävien tekoon. Ensimmäisen ryhmän oppilaiden kanssa ryhmiin jakautuminen oli vaikeaa ja osa oppilaista ei ollut ryhmävalinnan lopputulokseen tyytyväisiä. Tehtävien teon aikana parissa pienryhmässä muodostui kirjuri, joka huolehti kaikkien kirjaukset sekä laski tehtävät ja ryhmästä loput ajautuivat helposti ajelehtimaan muiden pienryhmien kanssa keskustelemaan tai tekemään muuta oheistoimintaa liikuntasalissa. Oppilaiden opettajan mukaan ensimmäisen tunnin ryhmä kaipaa opetuksessa enemmän rutinoitunutta laskemista ja normaalista poikkeava oppitunti aiheuttaa ryhmän oppilaissa levottomuutta. Ensimmäisellä ryhmällä meni tehtäväpisteissä sekä palautekyselyssä kokonaisuudessaan 2x45min. Toisessa ryhmässä oppilaat kuuntelivat ja noudattivat ohjeistusta sekä tekivät ryhmässä yhdessä tehtävät.

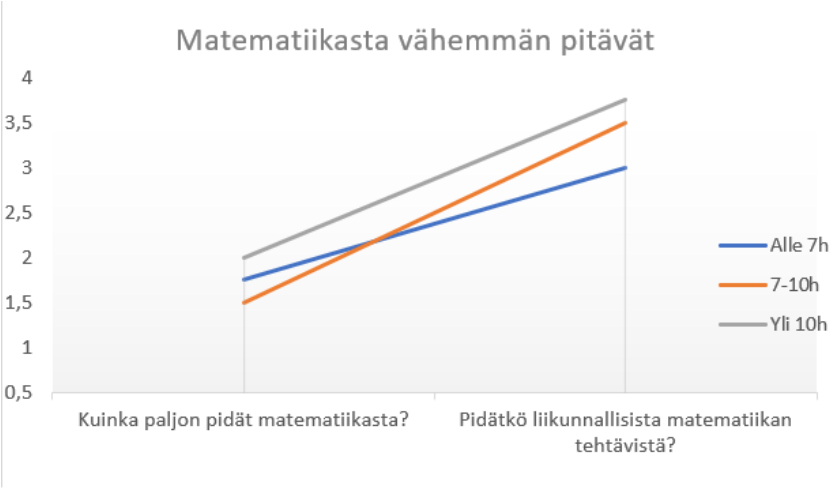
Palautekyselyssä (Liite A) kyseltiin oppilaiden arviota, kuinka paljon viikossa he liikkuvat. Vaihtoehtoina ovat alle 3h viikossa liikkuvat, 3-6h viikossa liikkuvat, 6-10h viikossa liikkuvat sekä yli 10h viikossa liikkuvat. Vastaukset perustuvat täysin oppilaiden omiin arvioihin heidän omasta liikkumisen määrästä viikosta. Lähdin jaottelemaan oppilaat (35kpl) näiden vastauksien mukaan ryhmiin, miten paljon he liikkuvat ja viivadiagrammi 7.1 kuvailee näiden vastausten tuloksia.

Oppilaat arvioivat ensimmäisessä kysymyksessä kuinka paljon he pitävät liikunnasta ja arviointiasteikko oli 1-5. Liikunnan määrä ja liikunnasta pitäminen korreloivat toisiaan johdonmukaisesti. Liikunnasta pitäminen väheni sitä mukaan, kun oppilaan ilmoittaman liikunnan määrä. Myös liikunnallisten matematiikan tehtävissä oli samanlainen trendi, liikunnan määrän laskiessa oppilaiden innostuvuus matemaattisia tehtäviä kohtaan laski. Oppilaan viikottaisesta liikunnan määrästä ja matematiikasta pitämisen määrästä ei voida tehdä johtopäätöksiä, mutta tarkoitus ei olekaan verrata näitä kahta. Vastauksien perusteella opetusryhmät eivät erotu toisistaan.



Kuva 7.1. *Jaottelu liikkumisen määrän mukaan. N=35*

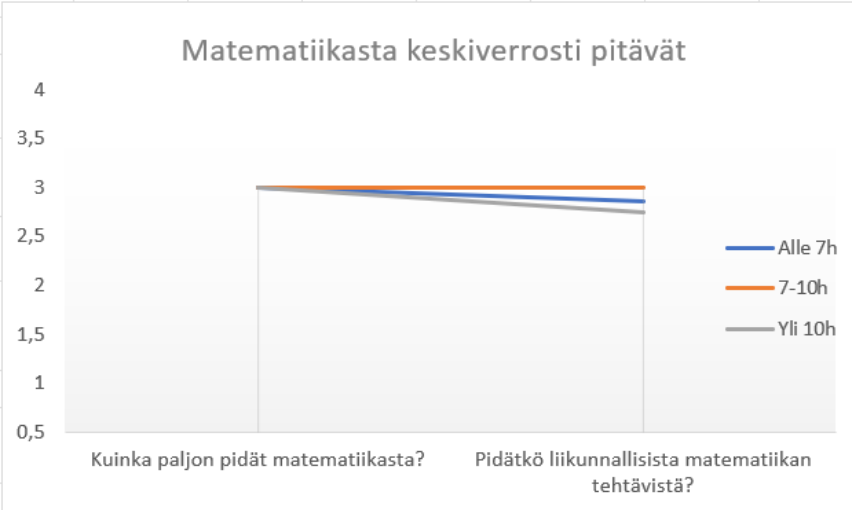
Seuraavaksi tarkastelin tuloksia toisenlaisesta näkökulmasta, eli jaottelin oppilaat kolmeen eri ryhmään sen mukaaan paljonko he pitävät matematiikasta. Oppilailta kysyttiin palautekyselyssä (Liite A) kuinka paljon he pitävät matematiikasta ja arviointi asteikko oli 1-5. Muodostin näiden vastausten pohjalta kolme eri ryhmää eli vähemmän pitäviin jaottelin ne, jotka vastasivat kyselyyn pitävänsä vähän vastauksen ollessa 1 tai 2 ja oppilaiden lukumäärä tässä ryhmässä on 10 (N=10). Toiseen ryhmään jaoin vastaukset, joissa kysymykseen oli vastattu 3 (N=14) ja nimensin ryhmän keskivertoisesti matematiikasta pitävät. Kolmanteen ryhmään eli matematiikasta enemmän pitäviin jaoin ne oppilaat (N=11), jotka olivat vastanneet 4 tai 5.



Kuva 7.2. *Matematiikasta vähemmän pitävät (N=10)*

Viivadiagrammista 7.2 viivat kuvastavat sitä, miten keskiarvot jakautuvat sen mukaan paljonko oppilaat liikkuvat viikossa. Oppilaat jotka liikkuvat vähemmän kuin 7 tuntia viikossa, pitivät vähemmän liikunnallisista matematiikan tehtävistä kuin oppilaat, jotka liikkuvat vä-

hintään 7 tuntia viikossa. Viivadiagrammista nähdään myös, että riippumatta siitä paljonko oppilaat liikkuvat viikossa, he ovat vastanneet pitävänsä liikunnallisista matematiikan tehtävistä enemmän, kuin mitä vastasivat pitävänsä matematiikasta.

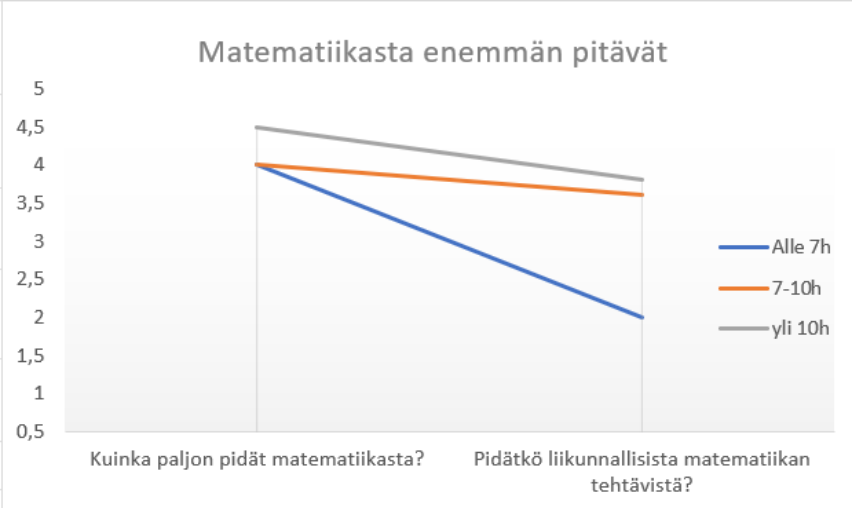


Kuva 7.3. *Matematiikasta kestovertoisesti pitävät (N=14)*

Keskivertoisesti matematiikasta pitävien oppilaiden vastaukset liikunnallisia matematiikan tehtäviä kohtaan oli hyvin samanlaiset keskenään. Eli oppilaat, jotka olivat vastanneet pitävänsä matemaatikasta keskiverrosti vastasivat pitävänsä liikunnallisista matematiikan tehtävistä keskivertoisesti. Viivadiagrammissa 7.3 nähdään ovat melko yhtenevät.

Matematiikasta enemmän pitävien oppilaiden vastauksista puolestaan kiinnostus liikunnallisia tehtäviä kohtaan ei ollut yhtä korkea verrattaen paljonko he pitävät matematiikasta. Viivadiagrammista 7.4 nähdään, ettei liikunnan määrällä viikossa ole vaikutusta siihen, että oppilaat pitävät vähemmän liikunnallisista tehtävistä kuin matematiikasta. Lisäksi viivadiagramissa on nähtävissä myös se, että mitä vähemmän oppilas on kertonut viikossa liikkuvansa, sen vähemmän hän on pitänyt liikunnallisista tehtävistä.

Lisäksi palautekyselyssä (Liite A) kysyttiin oppilailta millaisista matematiikan tunneista oppilaat itse pitävät ja pyydettiin kuvailemaan parilla sanalla, mitä ajatuksia heillä heräsi pidetystä oppitunnista. Siitä millaisista matematiikan oppitunneista oppilaat pitävät, löytyi tuloksista paljon eroavaisuuksia oppilaiden kesken keskenään, mutta yhtäläisten vastausten kesken ei löytynyt kuitenkaan yhteistä tekijää. Oppilaista (N=35) 34% vastasi samansuuntaisesti, eli muuta kuin kirjan tehtäviä tai toiminallisuutta, joko kahoot:in muodossa, joka on verkossa toimiva pelillinen oppimisympäristö tai jotain muuta sellaista toiminnallisuutta mutta eivät osanneet tarkemmin sanoittaa. Oppilaista 26% puolestaan kertoi pitävänsä matematiikan tunneista, joissa joko opettajan johdolla lasketaan tai tehtävien itsenäistä tekoa. 17% oppilasta vastasi koodauksen ja geometrian olevan mieluista. 8,5% oppilaista vastasi helpoista matematiikan tunneista. Loppuja vastauksia ei voinut kategoroida koska vastaukset olivat tyyliltään seuraavanlaisia ”en tiedä” ja ”semmoisista jotka ei ole tylsiä”



Kuva 7.4. *Matematiikasta enemmän pitävät (N=11)*

Oppilaiden kuvailut siitä, mitä ajatuksia heillä heräsi oppitunnista, jolle he osallistuivat olivat suurimmaksi osaksi positiivisia eli 54% vastauksista. Vastauksissa toistui, että oli ihan kivaa/hauskaa ja kivoja tehtäviä. Oppilaista 14% ei vastannut kysymykseen ollenkaan. 6% oppilaista kuvaili tuntia vahvoilla negatiivisilla sanoilla, kuten inhoa, turhautumista ja kaaottinen. Ja loppujen oppilaiden vastaukset olivat ristiriitaisia, esim. ”tykkäsin, mutta ei mun juttu” (Op16) ja ”olivat välillä kivoja ja hieman tylsiä” (Op14) tai annettiin tehtäväpisteitä koskevaa palautetta esimerkiksi ”mielummin koripallot kuin pomppusat pallot” (Op4). Positiivisia ajatuksia heräsi tasaisesti kaikissa ryhmissä riippumatta siitä jaoteltiinko sen mukaan paljonko oppilas liikkuu viikossa vai sen mukaan paljonko oppilas pitää matematiikasta. Enemmän matematiikasta pitävät kertoivat tarkemmin mistä pitivät tunnilla esim. ”Prosentti laskut oli kivoja.” (Op34) sekä yksi oppilas avasi ajatuksiaan vastauksessaan seuraavanlaisesti: ”Oli hauskaa ja nyt ainakin tietää millaista on liikunna ja matikan yhdiste” (Op24). Vähemmän matematiikasta pitävien vastauksissa ei tullut esille tarkemmin mikä oli kivaa ja vastaukset oli pääosin ”iha hauskaa"(Op11) ja ”Tunti oli kiva ja tehtävät hauskoja” (Op8) tyylisiä. Yksi vähemmän matematiikasta pitävä oppilasta vastasi ajatuksistaan seuravaasti: ”Oli iha kivaa ku ei tarvinnu tehä matikkaa” (Op9).

8. JOHTOPÄÄTÖKSET

Tutkimuksen tarkoituksena oli tutkia miten liikunnalliset matematiikantehtävät vaikuttavat oppilaiden motivaatioon. Sneck:in tutkimuksessa on tullut ilmi, että 3-luokkalaiset pitivät positiivisena sitä, kun liikkuminen sisällytettiin matematiikan oppimiseen. Kun vertaa aiempaa tutkimusta tähän tutkimukseen, niin tutkimuskohteena olevista 7lk oppilaista valtaosa havaintojen ja vastausten perusteella piti liikunnallistentehtävistä matematiikan tunnilla. 7-luokkalaiset ovat juuri siirtyneet yläkouluun ja oppilaat vastausten perusteella kaipaavat paljon toiminnallisuutta matematiikan tunneille. Osa kuitenkin kertoi vastauksissaa pitävänsä ihan normaaleista matematiikan tunneista, jotka ovat opettajajohtoisia ja tehdään tehtäviä.

Tässä tutkimuksessa oppilaiden, jotka eivät pitäneet muihin nähden yhtä paljon matematiikasta, kertoivat pitävänsä liikunnallisista matematiikan tehtävistä enemmän, kuin matematiikasta. Tätä tuki myös oppilaiden kuvailut siitä, mitä ajatuksia heillä heräsi oppitunnista. Vähemmän matematiikasta pitävät kuvailivat tunnin olleen hauskaa ja kivaa. Aiemmin esitetyssä norjalaisessa tutkimuksessa on samankaltaisia huomioita. Norjalaisen tutkimuksen mukaan heikommin matematiikassa menestyvien matematiikan tulokset paranivat verrokkiryhmään nähden, kun heillä oli integroituna oppitunteihin liikuuntaa.

Matematiikassa paljon pitävien vastauksista nousi esille se, että mitä vähemmän oppilas piti liikunnasta, sen vähemmän se piti liikunnallisista matematiikan tehtävistä. Tutkimuksessa ei myöskään otettu huomioon, kuinka paljon motivaation lisääntyminen/vähentyminen vaikutti oppimistulokseen. Tutkimuksessa lähinnä keskityttiin siihen, mikä on vaikutus oppilaan asenteeseen matemaattisia tehtäviä kohtaan kun tehtävät on liikunnallisia. Vastauksien perusteella viitteitä näkyi siitä, että vähemmän matematiikasta sekä enemmän liikunnasta pitävät oppilaat motivoituivat positiivisesti toiminnallisuudesta.

Tutkimuksessa vastauksissa näkyis ristiriitaisuutta sekä matematiikasta keskiarvoisesti pitävillä näkyi viitteitä siitä, että kyselyyn vastattiin kaikkiin kohtiin keskivertoisesti, eli heillä ei joko muodostunut mielipidettä tai eivät olleet motivoituneet vastaamaan. Tutkimuksen luotettavuudessa on aukkoja siltä osin, ettei oppilaiden kanssa päässyt syvemmin keskustelemaan ajatuksista sekä pienen otannan vuoksi ei voi yleistää tutkimustuloksia. Tutkimuksessa oppilaiden henkilöllisyys pysyi anonyymina hyvin, koska tutkimuskohteena olevat oppilaat olivat ennestään tuntemattomia sekä heidän vastauksistaan lupaosio

leikattiin pois siinä kohtaan kun palautelomakkeet palautettiin ja lajittelu luvan antaneisiin tehtiin. Tutkimuksessa ei vertailtu sukupuolisia eroja, koska oppilaat olivat myös siltä osin anonyymejä. Täten tutkimusta voisi laajentaa vertailemaan onko tyttöjen sekä poikien välisiä eroja siihen, miten liikunnalliset tehtävät motivoivat. Tutkimuksessa ei myöskään tarkasteltu vaikutusta oppimiseen, joten lisäksi voisi tutkia hyötyvätkö matematiikasta ahdistuneet ja negatiivisen matematiikkakuvan omaavat oppilaat liikunnallisista matematiikan tehtävistä ja mikä niiden vaikutus olisi oppimistuloksiin.

LÄHTEET

[1] Kaisa Aunola ja Jani-Erik Nurmi. ”Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä”. Teoksessa: *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Toim. Jorma Joutsenlahti et al. Niilo Mäki Instituutti, 2018, s. 54–69.

[2] Eero Haapala et al. ”Liikunnan ja oppimisen vuorovaikutusta kartoittamassa”. Suomi. *Liikunta tiede* (2017). ISSN: 0358-7010.

[3] Eero A Haapala. ”Liikunta–ihmelääke oppimiseen?” *Liikunta ja tiede* 59.5 (2022).

[4] Markku Hannula ja Marja Holm. ”Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä”. Teoksessa: *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Toim. Jorma Joutsenlahti et al. Niilo Mäki Instituutti, 2018, s. 132–156.

[5] Jorma Joutsenlahti et al., toim. *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, 2018.

[6] Marko Kantomaa et al. ”Koulupäivän aikainen liikunta ja oppiminen”. Suomi (2018). ISSN: 1798-8926.

[7] *Laadullisen tutkimuksen näkökulmat ja menetelmät*. fin. Helsinki: Gaudeamus, 2020. ISBN: 978-952-345-616-7.

[8] Tuija Lukin. *Motivaatio matematiikan opiskelussa : seurantatutkimus motivaatiotekijöistä ja niiden välisistä yhteyksistä yläkoulun aikana*. Toim. Soveltavan kasvatustieteen ja opettajankoulutuksen osasto Filosofinen tiedekunta ja School of Applied Educational Science and Teacher Education Philosophical faculty. Publications of the University of Eastern Finland. Dissertations in Education, Humanities, and Theology. Itä-Suomen yliopisto, 2013. URL: https://erepo.uef.fi/handle/123456789/12759.

[9] J. Metsämuuronen, toim. *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005-2012*. Koulutuksen seurantaraportit. Helsinki: Opetushallitus, 2013. URL: http://www.oph.fi/download/150841_Perusopetuksen_matematiikan_oppimistulosten_pitkittaisarviointi_vuosina_2005.pdf.

[10] Metsämuuronen J. ja Nousiainen S. *Matematiikkaa Covid-19 pandemian varjossa. Matematiikan osaaminen 9. luokan lopussa keväällä 2021.* Karvi, 2021.

[11] Susanna Oksanen. *PERUSOPETUKSEN MATEMATIIKAN OPPIMISTULOSTEN PITKITTÄISARVIOINTI VUOSINA 2005 2012: OPETTAJAMUUTTUJIEN YHTEYS OSAAMISEN MUUTOKSEEN*. Huhtikuu 2013. ISBN: 978-952-13-5529-5. DOI: 10.13140/2.1.1403.6805.

[12] Erkki. Pehkonen. *Matematiikan peruskurssi korkeakouluja varten. 1*. Kirjayhtymä, 1978. ISBN: 951-26-1491-X.

[13] *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Opetushallitus. 2016. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_%20opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf.

[14] Anita Saaranen-Kauppinen Anna Puusniekka. *KvaliMOTV- Menetelmäopetuksen tietovaranto*. Tamepere: Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto. 2006. URL: https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus.

[15] Katariina Salmela-Aro, Jari-Erik Nurmi ja Taru Feldt. *Mikä meitä liikuttaa : motivaatiopsykologian perusteet*. fin. Jyväskylä: PS-kustannus, 2017. ISBN: 978-952-451-796-6.

[16] Katariina Salmela-Aro et al. *Motivaatio ja oppiminen*. Jyväskylä: PS-kustannus, 2018. ISBN: 978-952-451-811-6.

[17] Sigrid Wimmer Silke Luttenberger ja Manuela Paechter. ”Spotlight on math anxiety”. *Psychology Research and Behavior Management* 11 (2018), s. 311–322. DOI: 10.2147/PRBM.S141421. eprint: https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.2147/PRBM.S141421. URL: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.2147/PRBM.S141421.

[18] Sirpa Sneck. *Moving Maths: Effects and experience of physical activity integrated into primary school lessons*. 2022. ISBN: 978-952-62-3417-5. URL: http://urn.fi/urn:isbn:9789526234175.

[19] Iivari Ylinen. *Reaalilukujen konstruointi*. University of Helsinki. 2014. URL: https://www.researchgate.net/profile/Iivari-Ylinen/publication/313870244_Reaalilukujen_konstruointi/links/58ac435e92851cf0e3ccd307/Reaalilukujen-konstruointi.pdf.

LIITE A: PALAUTEKYSELY LOMAKE

Palautekysely

Nimi: _____

Kyselyn tuloksia esitellään täysin anonyymisti.

Vastauksiani saa käyttää tutkimukseen

___ Kyllä ___ Ei

---

1. Kuinka monta tuntia viikossa liikut aktiivisesti?

Alle 3h	3-6h	7-10h	Yli 10h
○	○	○	○

2. Kuinka paljon pidät liikunnasta?

	1	2	3	4	5	
hyvin vähän	○	○	○	○	○	todella paljon

3. Kuinka paljon pidät matematiikasta?

	1	2	3	4	5	
hyvin vähän	○	○	○	○	○	todella paljon

4. Piditkö liikunnallisista matematiikan tehtävistä?

	1	2	3	4	5	
hyvin vähän	○	○	○	○	○	todella paljon

5. Millaisista matematiikan tunneista sinä pidät?

_____

_____

6. Kuvaile parilla sanalla, mitä ajatuksia sinulla heräsi tunneista.

_____

_____