

Niilo Santaharju

DISKREETTIAIKAISEN LQG-SÄÄTIMEN SUUNNITTELU KÄÄNTÖHEILURILLE

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastajat: Veli-Pekka Pyrhönen
Tammikuu 2024

TIIVISTELMÄ

Niilo Santaharju: Diskreettiaikaisen LQG-säätimen suunnittelu kääntöheilurille

Kandidaatintyö

Tampereen yliopisto

Automaatiotekniikka

Tammikuu 2024

Tässä työssä tutkitaan diskreettiaikaisen LQG-säädön (Linear Quadratic Gaussian) suunnittelua kääntöheilurijärjestelmälle. Kääntöheiluri on epälineaarinen järjestelmä, jonka yläasennon tasapainon ylläpitäminen vaatii jatkuvaa ohjausta. Kääntöheilurin tasapainoittamiselle on useita sovelluskohteita, kuten Segway-henkilökuljetin. Tasapainotilan muutosta kuvataan epälineaarilla differentiaaliyhtälöryhmällä. Tässä työssä käytetään lineaarisia säätömentelmiä, joten epälineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä linearisoidaan yläasennon tasapainotilaan. Tasapainotilan ympäristössä lineaarisilla menetelmillä suunnitellun säätimen tulee suoriutua säätötehtävästä.

Linearisoidun differentiaaliyhtälöryhmän perusteella luodaan järjestelmästä LTI-tilamalli (Linear Time Invariant), joka diskretoidaan. Diskretoidun tilamallin avulla suunnitellaan diskreettiaikainen LQR-säädin (Linear Quadratic Regulator). Menetelmä tuottaa täyden tilan takaisinkytkennälle optimaalisen vahvistuksen K valittuun kustannusfunktioon nähden. Kustannusfunktiossa tilojen ja ohjauksien suuruuksille valitaan painokertoimet. Painokertoimien valinta on useimmille järjestelmille iteratiivinen prosessi. Järjestelmästä on mitattavissa kaksi tilaa: kääntöheilurin sekä alustan kulma. Näitä kulmia vastaavien kulmanopeuksien mittauksien estimaatit tuotetaan Kalman-suotimella, jotta täyden tilan takaisinkytkentä voidaan toteuttaa. Kalman-suodin on LQE (Linear Quadratic Estimator), jonka kustannusfunktion parametreina on järjestelmän mittauksen ja mallin virhe. Kalman-suodin vaimentaa mittauksen sekä mallin virhettä. LQG-säädin on LQR- ja LQE-menetelmien yhdistelmä.

Säätimen suorituskyvyn arvioimiseen on olemassa erilaisia menetelmiä. Tässä työssä suorituskyvyn tutkimiseen käytettiin simuloituja reguloititehtävän vastekokeita ja niiden tulkitsemista. Vastekokeita varten ohjelmoitiin neljä kääntöheilurisimulaattoria. Ohjelmoidut simulaattorit olivat diskreettiaikainen ja jatkuva-aikainen kääntöheiluri lineaarisena sekä epälineaarisenä. Tehtyjen kokeiden perusteella saatiin valittua LQG-säätimelle parametrit, joiden avulla takaisinkytketty järjestelmät suoriutuivat reguloititehtävästä. Mallinnusvirheiden vuoksi ei voida ennustaa, tuottaako suunniteltu säädin toivotun suorituskyvyn fyysisessä järjestelmässä.

Avainsanat: LQG-säädin, kääntöheiluri, säätötekniikka, Kalman-suodin

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto	1
2.	Ohjattava prosessi	3
2.1	Kääntöheiluri	3
2.2	Quanser Qube-Servo 2	3
3.	Lineaarinen tilamalli	5
3.1	Linearisointi	6
3.2	Diskreetti LTI-tilamalli	7
4.	DLQG	8
4.1	DLQR	8
4.2	Kalman-suodin.	10
5.	Säädön suunnittelu ja toteutus MATLAB-ohjelmistolla	11
5.1	Suunnittelu	11
5.2	Takaisinkytketyn säätöjärjestelmän Simulink-simulaattori	13
6.	Testaus ja tulokset	15
6.1	Lineaarisen järjestelmän viritys	15
6.2	Epälineaarisen järjestelmän viritys	17
6.3	Ohjaukset.	19
7.	Yhteenveto	22

LYHENTEET JA MERKINNÄT

CCW	Counter Clock Wise
DC	Direct Current
DLQG	Discrete Linear Quadratic Gaussian
DLQR	Discrete Linear Quadratic Regulator
ZOH	Zero Order Hold
LQE	Linear Quadratic Estimator
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LTI	Linear Time Invariant
LQR	Linear Quadratic Regulator

1. JOHDANTO

Reaalimaailmassa pyritään usein hallitsemaan erilaisia järjestelmiä, jotta saataisiin aikaiseksi toivottu lopputulos. Hallintaan toisinaan tarvitaan päätöksentekoa sekä järjestelmän ulkopuolista vaikuttamista. Eräs tapa toteuttaa hallintaa on rakentaa järjestelmään takaisinkytkentä. Monet luonnolliset järjestelmät ovatkin luonnostaan takaisinkytkettyjä. Takaisinkytkentä mahdollistaa automaattisen päätöksenteon saadun palautteen perusteella. Tätä kutsutaan säätämiseksi.[1, s. 1–6]

Säätöä suunniteltaessa tärkeimpien järjestelmään liittyvien syy-seuraussuhteiden tunteminen on tärkeää. Riittävän järjestelmätuntemuksen avulla voidaan luoda ongelmanasettelu sekä sen perusteella tunnistaa ohjattavat sekä säädettävät tilat sekä niihin vaikuttavat häiriöt. Edellä olevien muuttujien ominaisuudet vaikuttavat säätimen valintaan.[1, s. 17–23, 27–30]

Tässä kandidaatintyössä tutustutaan diskreettiaikaisen LQG-säätömenetelmän (Linear Quadratic Gaussian) soveltamiseen kääntöheilurin pystyasennon regulointitehtävässä. Kääntöheilurin pystyasento on epästabili, jolloin sen ylläpitämiseen tarvitaan takaisinkytkentä [2, s. 2]. LQG on lineaarinen optimaalinen säätömenetelmä, joka mahdollistaa täyden tilan säädön, vaikka tiloissa olisi stokastista häiriötä ja kaikki tilat eivät ole mitattavissa. LQG-menetelmän käyttö vaatii lineaarisen dynaamisen mallin tutkittavasta järjestelmästä. [3, s. 408–409] Kääntöheiluri on järjestelmänä epälineaarinen, joten sen pystyasennon tilaan on linearisoitava dynaaminen malli [4].

Kääntöheiluri on jatkuva-aikainen järjestelmä, jota ohjataan tietokoneella. Tietokone käsittelee diskreettiä informaatiota, joten järjestelmän mittaukset näytteistetään ja ohjaukset annetaan analogisina. Tarvittavat muunnokset analogisten ja digitaalisten signaalien välillä voidaan tehdä automaattisesti tai tarkoituksella. [3, s. 11–16] Tässä työssä toteutetaan suunnittelu diskreettiaikaiselle järjestelmälle.

Säätö suunnitellaan Quancerin valmistamalle Qube-Servo 2 -opetusjärjestelmälle, johon on asennettu kääntöheilurimoduuli. Järjestelmän valintaan johtivat sen saatavuus yliopistolta, sen soveltuvuus diskreettiaikaisen tilaprediktoidun optimisäädön testaamiseen sekä kääntöheilurin ominaisuudet. Työssä viritetään LQG- ja DLQG-säädin (Discrete Linear Quadratic Gaussian) kääntöheilurille ja niiden ominaisuuksia verrataan keskenään.

Työn toisessa luvussa käsitellään kääntöheilurijärjestelmää. Kolmannessa luvussa esi-

tellään epälineaarisen järjestelmän linearisointimenetelmä sekä LTI-tilamalli (Linear Time Invariant). Neljännessä luvussa käsitellään sovelluksessa käytettävä LQG-menetelmä ja sen laskentakaavat. Viides luku käsittelee MATLAB-tietokoneohjelmistoa sekä sen käyttöä säädön suunnittelussa. Kuudennessa luvussa esitellään säätimellä saadut tulokset. Luvussa seitsemän esitellään työn yhteenveto.

2. OHJATTAVA PROSESSI

Takaisinkytkentään perustuvalla päätöksenteolla pyritään tuottamaan toivottava lopputulos ohjatussa järjestelmässä. Tärkeää on tunnistaa toivottu lopputulos, ohjattavat muutujat sekä määrittellä suunnitelma, jolla lopputulokseen päästään. [5, s. 50] Tässä luvussa käsitellään tutkittavaa järjestelmää. Alaluvussa 2.1 esitellään kääntöheilurijärjestelmää yleisesti ja alaluku 2.2 käsittelee Quanserin QUBE-Servo 2-opetusjärjestelmää, jolle säädin suunnitellaan.

2.1 Kääntöheiluri

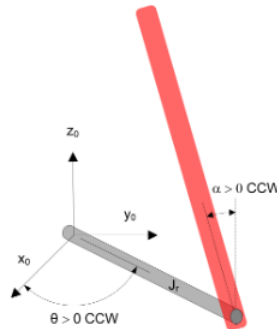
Heiluri on rakeenteeltaan yksinkertainen järjestelmä, joka koostuu kääntyvästä liitoksesta sekä esimerkiksi jäykästä sauvasta. Sitä on käytetty historiassa esimerkiksi jaksollisen liikkeen sekä energian säilymisen opetuksessa. Heilurin massakeskipiste on tasapainotilassa liitoksen alapuolella, kun siihen ei kohdisteta ulkoisia voimia, maan painovoiman vaikutuksesta. Heilurin massakeskipisteen pystyy pakottamaan tasapainoon liitoksen yläpuolelle kohdistamalla voimaa liitokseen oikealla voimakkuudella oikeaan suuntaan. [2, s. 2] Kääntöheilurin dynaamisella mallilla voidaan mallintaa erilaisia tasapainojärjestelmiä, esimerkiksi Segway-henkilökuljettimia, sen yksinkertaisuuden ansiosta [2, s. 19]. Teoriassa massakeskipiste pysyy yläasennossa, jos siihen ei kohdistu voimia, joilla on kohtisuora komponentti liitoksen ja massakeskipisteen välisellä viivalla. Todellisuudessa tasapainotettavaan kappaleeseen kohdistuu häiriövoimia esimerkiksi epävakaa alustan vuoksi, joten yläasennon pysyminen vaatii jatkuvaa ohjausta. [2, s. 1]

2.2 Quanser Qube-Servo 2

Tutkimuksen kohteena oleva järjestelmä on Quanserin valmistama Qube-Servo 2-opetuskäyttöön tarkoitettu kääntöheiluri, jonka periaatekuva on kuvassa 2.2. Se on rakeenteeltaan kiertoheilurijärjestelmä, joka tunnetaan myös Furuta-heilurina (Furuta Pendulum). Järjestelmän tärkeimmät osat ovat DC-moottori (Direct Current), kaksi enkooderia, sisäinen datankeräysjärjestelmä ja vahvistin. [4] Kääntöheilurin suunnille tehdään suuntasopimus, jonka perusteella luodaan tarvittavat yhtälöt. Heilurin nollakulma sijaitsee pystyasennossa, ja alustan nollakulma on moottorin liikealueen keskikohdassa. Kuvassa 2.2 merkintä CCW(Counter Clock Wise) tarkoittaa kääntymiskulman kasvavan, kun kierto-

suunta on vastapäivään. Tämä suuntasopimus pätee molemmille kääntymiskulmille.

Järjestelmässä on kaksi vapausastetta, DC-moottorin akselin kulma sekä heilurin kääntymiskulma kiinnityspisteeseen. Ainoastaan DC-moottorin akselin kääntymiskulmaa voidaan ohjata, jolloin yhdellä ohjauksella hallitaan kahta vapausastetta tehden järjestelmästä aliohjatun. Järjestelmässä on fyysisiä rajoitteita, kuten ohjausjännitteen maksimi ja minimi, jotka tulee ottaa suunnittelussa huomioon. [6, s. 606] Järjestelmässä mitataan enkoorderilla molemmat kulmat. [4].



Kuva 2.1. Kääntöheilurin periaatekuva ja suuntasopimus [4]

Kääntöheilurin epälineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä voidaan kehittää Euler—Lagrange-menetelmällä[4][6, s. 607]. Liiketytälö on muotoa

$$\begin{cases} (J_r + J_p \sin^2 \alpha) \ddot{\theta}(t) + m_p l r \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} - m_p l r \sin \alpha \dot{\alpha}^2 = \tau - b_r \dot{\theta} \\ J_p \ddot{\alpha} + m_p l r \cos \alpha \ddot{\theta} - J_p \sin \alpha \cos \alpha \dot{\theta}^2 + m_p g l \sin \alpha = -b_p \dot{\alpha}. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{m_r r^2}{3} \\ J_p &= \frac{m_p L_p^2}{3} \\ l &= L_p / 2 \\ \tau &= \frac{k_m}{R_m} (v_m - k_m \dot{\theta}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

jossa α on kääntöheilurin kulmanpoikkeama yläasennosta, $\dot{\alpha}$ on kääntöheilurin kulmanopeus, θ on alustan sauvan poikkeama keskiasennosta, $\dot{\theta}$ on alustan sauvan kulmanopeus, τ on DC-moottorin tuottama vääntö alustan sauvaan, R_m on moottorin resistanssi, k_m on moottorin emf-vakio, m_r on alustan massa, r on alustan sauvan pituus, J_r on alustan sauvan hitausmomentti heilurin kiinnityspisteessä, b_r on alustan vastaava viskoosi vaimennuskerroin, m_p on heilurin massa, L_p on heilurin pituus, J_p on heilurin hitausmomentti kiinnityspisteessä, b_p on heilurin vastaava viskoosi vaimennuskerroin ja g on putoamiskiihtyvyys [4].

3. LINEAARINEN TILAMALLI

LTI-tilamalli on aikataason differentiaaliyhtälöistä koostuva lineaarinen aikainvariantti esitys. Aikataason ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmää kutsutaan tilayhtälöiksi, ja ne kuvastavat tilamuuttujien muutosta muiden tilamuuttujien yhtälöinä. [7, s. 49] Tilamallin häiriötön yleinen esitysmuoto on

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

jossa $x(t)$ on järjestelmän n -dimensioinen tilavektori

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

jonka alkiot ovat järjestelmään valittuja tilamuuttujia. Lisäksi järjestelmää kuvaa m -dimensioinen sisääntulovektori ja p -dimensioinen ulostulovektori, jotka ovat muotoa

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}.$$

Lisäksi LTI-tilaesitykseen kuuluvat matriisit A, B, C ja D , jotka kuvaavat eri tilojen ja inputtien vaikutukset tilan- ja ulostulon muutokseen. Näiden matriisien dimensiot ovat $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ ja $p \times m$. [7, s. 49]

Tilamalli koostuu differentiaaliyhtälöistä, joten alkuarvojen määrittely on tärkeää. Alkuarvo on tilamuuttujan tila hetkellä t_0 ja alkuarvo vektori $x(t_0) = x_0$, jossa x_0 on pystyvektori koostuen jokaisen tilamuuttujan alkuarvosta. Matriisin A rivit sisältävät jokaisen tilamuuttujan vaikutuksen jokaisen tilamuuttujan muutokseen. Matriisin B rivit sisältävät jokaisen sisääntulon vaikutuksen tilan muutokseen. Matriisi C kertoo, mitkä järjestelmän tilat ovat

mitattavissa olevia ulostuloja, ja matriisi D kuvastaa sisääntulon suoravaikutusta ulostuloon. Useissa käytännön järjestelmissä D on nollavektori. [7, s. 49]

3.1 Linearisointi

Linearisointi on menetelmä, jonka avulla epälineaarinen differentiaaliyhtälö approksimoidaan lineaarikseksi differentiaaliyhtälöksi valitun pisteen ympäristössä [7, s. 17–18]. Useat säätömenetelmät ovat lineaarisia, kuten DLQG, ja useat reaalimaailman järjestelmät ovat epälineaarisia, joten linearisointia on syytä käsitellä tässä työssä. Linearisointipisteen voi valita mielivaltaisesti, mutta säätösovelluksissa on järkevää valita linearisointipisteet haluttujen tasapainotilojen mukaan. Yleinen tapa on valita jokin järjestelmän haluttu tasapainotila. Tasapainotilassa systeemi on vakioliikkeessä, jolloin kaikkien funktioiden arvot ovat vakioita ja kaikki aikaderivaatat ovat nollia. [7, s. 18] Pyritään luomaan sisääntulo \bar{u} , joka tuottaa tasapainotilan. Tasapainotila voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\bar{\dot{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0, \quad (3.2)$$

jossa \bar{x} on tilan tasapainotila ja \bar{u} on tasapainotilan sisääntulo.

Linearisoinnissa differentiaaliyhtälöt approksimoidaan Taylorin sarjalla jokaisen tilamuuttujan suhteen. Muodostetaan matriisi

$$J = \begin{bmatrix} \nabla^T F_1 \\ \vdots \\ \nabla^T F_n \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

jossa $\nabla^T F_n$ on 3.3 viimeinen elementti. [7, s. 18] Saatu matriisi kerrotaan jokaisen tilan tasapainotilan poikkemalla, jolloin saadaan linearisoitu malli

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} \nabla^T F_1 \\ \vdots \\ \nabla^T F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \vdots \\ \delta_{x_n} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

jossa δ_{x_n} on tilan poikkeama linearisointipisteestä. Linearisoitujen mallien approksimaation virhe kasvaa toimintapisteen etäännyessä linearisointipisteestä. Oletetaan, että järjestelmän tilojen arvot pysyvät lähellä linearisointipistettä, jolloin Taylorin sarjan korkeamman asteen termit voidaan jättää pois. Tällöin matriisien perusteella pystyy rakentamaan jatkuva-aikaisen LTI-tilamallin. [7, s. 18–20]

3.2 Diskreetti LTI-tilamalli

Ohjattavat järjestelmät voivat olla luonteeltaan diskreettiaikaisia tai jatkuva-aikaisia. Järjestelmiä ohjataan usein tietokoneella sen tuomien etujen vuoksi. Tietokoneohjatut järjestelmät ovat esimerkiksi helpompia muovata. [3, s. 6] Järjestelmän mittaukset näytteistetään, jotta tietokone voi prosessoida ne. Tietokone laskee mittausten perusteella ohjauksen ja syöttää sen järjestelmään. Näytteenottoväleissä ohjaus pidetään vakiona, tätä kutsutaan zero order holdiksi (ZOH). Tietokoneohjattuja järjestelmiä voidaan mallintaa diskreettiaikaisina. [3, s. 25] Jatkuva-aikaisen tilamallin voi diskretoida käyttämällä näytteistykseen kaavoja

$$\begin{aligned} A_d &= e^{Ah}, \\ B_d &= \int_0^T e^{Ah} B dh, \end{aligned} \tag{3.5}$$

missä h on järjestelmän pitoaika ja T on näytteenottoväli. [3, s. 34] Pitoaika kuvastaa sitä, millä näytteistysväleillä järjestelmää mitataan ja kuinka kauan ohjausta tehdään edellisen mittauksen perusteella. Mitä pienempi pitoaika on, sitä lähempänä järjestelmän toiminta on jatkuva-aikaisen järjestelmän toimintaa. [3, s. 66]

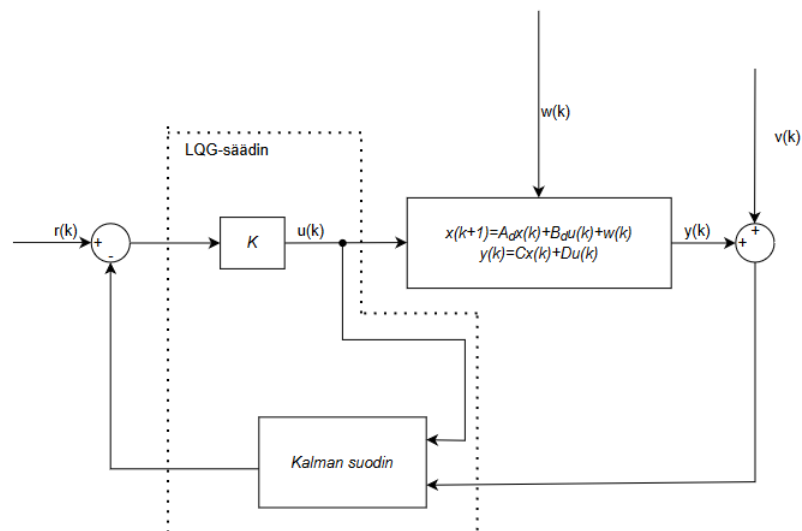
Kaavan 3.5 avulla tilayhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k), \end{aligned} \tag{3.6}$$

mikä on diskreettiaikaisen tilayhtälön kaava. Tätä mallia voi käyttää diskreettiaikaisten lineaaristen säätimien suunnittelussa.

4. DLQG

DLQG-säädin on DLQR-regulaattorin (Discrete Linear Quadratic Regulator) sekä Kalman-suotimen yhdessä muodostama säädinrakenne. LQR-regulaattori toimii lineaarisena optimisäätimenä, mutta se tarvitsee toimiakseen täyden tilan takaisinkytkennän. Kalman-suodin on digitaalinen suodin, joka pystyy estimoimaan täyden tilan, vaikka mitatut tilat olisivat kohinaisia. [3, s. 408–409] Kuvassa 4.1 on esitetty DLQG-säätimen rakenne lohkokkaaviona.



Kuva 4.1. Diskreettiaikaisen LQG-säätimen lohkokkaavio muokattu lähteestä [5, s. 838]

4.1 DLQR

DLQR on neliölliseen optimointiin perustuva säätömenetelmä, mikä vaatii täyden tilan takaisinkytkennän. Systemin diskreettiaikainen tilaesitys on muotoa

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k). \quad (4.1)$$

Systemin tila kerrotaan vahvistusmatriisilla K , mikä määrittää optimiohjausvektorin

$$u(k) = -Kx(k), \quad (4.2)$$

jonka avulla muodostetaan suljetun järjestelmän tilaesitys

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d(-Kx(k)) = (A_d - B_d K)x(k) \quad (4.3)$$

[8, s. 281]. Optimiohjausvektori ratkaistaan minimoimalla kustannusfunktio:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) \quad (4.4)$$

Q on positiivisesti definiitti, tai positiivisesti semidefiniitti Hermiittinen tai reaalinen ja symmetrinen matriisi ja R on positiivisesti definiitti Hermiittinen tai reaalinen ja symmetrinen matriisi. Hermiittinen matriisi, on matriisi jonka transpoosi on sen kompleksikonjugaat- ti. Reaali symmetrinen matriisi on itsensä transpoosi ja se sisältää vain reaalilukuja. [8, s. 364–379] Q määrittää tilojen painokertoimet kustannusfunktiossa ja R määrittää tilojen ohjauksen painokertoimet kustannusfunktiossa. [9, s. 793] Painokerroinmatriisit määrittä- vät kustannusfunktion, joissain tapauksissa kustannusfunktio voidaan johtaa järjestelmän differentiaaliyhtälöistä. Useimmissa tapauksissa tämä ei ole mahdollista ja painokerroin- matriisien määrittäminen jää suunnittelijan vastuulle. Tilojen differentiaali yhtälöistä voi pystyä päättelemään, mitkä tilat tulee painottaa. [3, s. 427–428]

Voidaan osoittaa, että kustannusfunktion arvo on

$$J = \frac{1}{2} x^T(0) S(0) x(0), \quad (4.5)$$

missä $S(0)$ on diskreettiaikaisen Ricatti yhtälön ratkaisu. [8, s. 370] Diskreettiaikainen Ricatti yhtälö

$$S = A_d^T S A_d - (A_d^T S B_d)(R + B_d^T S B_d)^{-1} (B_d^T S A_d) + Q \quad (4.6)$$

ja optimivahvistus voidaan laskea kaavasta.

$$K = R^{-1} (B_d^T S). \quad (4.7)$$

Mikäli Riccati matriisille S on olemassa positiivi-definiitti tasapainotilan ratkaisu, takai- sinkytkentämatriisin $A - BK$ ominaisarvot toteuttavat stabiilius ehdon. [3, s. 423] Arvot matriiseille Q, R voidaan hakea iteratiivisesti. Hyvänä alkuarvauksena on asettaa painot merkittäville tiloille. Suurempi paino tarkoittaa pienempää vastetta. [3, s. 427–428]

4.2 Kalman-suodin

LQR säädintä soveltaessa kaikki systeemin tilat tulee olla mitattavissa. [3, s. 429] Usein todellisissa järjestelmissä kaikkien tilojen mittaaminen ei ole mahdollista, jolloin nämä puuttuvat tilat tulee estimoida ohjaussignaalin luomiseksi. [9, s. 682] Kalman-suodin on optimiestimaattori LQE(Linear Quadratic Estimator), mikä estimoi puuttuvat tilat systeemin tilayhtälön, ulostulon, sisääntulon sekä kohinan perusteella. [3, s. 431] Kalman-suodin on soveltuva estimaattori sovelluksiin, jossa kohinan voidaan olettaa olevan normaali-jakautunutta. [10, s. 431] Kalman-suodin voi olla muuttovaparametrinen, mutta useissa käytännön ratkaisuissa vakioparametrinen Kalman-suodin tuottaa riittävän hyvän lopputuloksen.

Kalman-suotimen kustannusfunktiona toimii estimointivirheen varianssi

$$P(k) = E((\tilde{x}(k) - E\tilde{x}(k))(\tilde{x}(k) - E\tilde{x}(k))^T), \quad (4.8)$$

josta voidaan johtaa

$$P(k+1) = A_d P(k) A_d^T + R_w - (A_d P(k) C^T + R_{vw})(R_v + C P(k) C^T)^{-1} (C P(k) A_d^T + R_{vw}^T) \quad (4.9)$$

Missä R_w on prosessinhäiriön kovarianssi, R_v on mittauskohinan kovarianssi ja R_{vw} kohinoiden kovarianssi [3, s. 410, 430–431]. Lasketun varianssin avulla voidaan laskea staattinen kalman vahvistus lähteen [3, s. 430–431] mukaan:

$$K_k(k) = (A_d P(k) C^T + R_{vw})(R_v + C P(k) C^T)^{-1}. \quad (4.10)$$

Lasketulla vahvistuksella voidaan muodostaa kalman-suotimen diskreetti-aikainen tilayhtälö

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A_d \hat{x}(k) + B_d u(k) + K_k(k)(y(k) - C \hat{x}(k)). \\ \hat{x}(k+1) &= (A_d - K_k(k)C) \hat{x}(k) + B_d u(k) + K_k(k)y(k). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Suotimen vahvistus K_k vaikuttaa kahdella tapaa järjestelmään. Takaisinkytkentämatriisin $A_d - K_k(k)C$ napojen paikat vaikuttavat siihen, kuinka nopeasti tilan estimointi tapahtuu, ja kuinka herkkä se on mittaushäiriölle. Kalman-suotimen tulee olla stabiili. Lisäksi K_k vaikuttaa mittausvirheeseen vahvistuksena. Käytännössä K_k tulee olla suunniteltuun järjestelmään nähden riittävän pieni, jotta kohinalla ei ole liikaa vaikutusta ulostuloon. Samaan aikaan kuitenkin sen tulee olla riittävän suuri, jotta tilan observointi on riittävän nopea. [11, s. 124 – 125] Kalman-suotimen yhtälöistä voidaan huomata, Kalman-suotimen vahvistus ei riipu mitatuista tiloista, joten se voidaan laskea etukäteen ja tallentaa tietokoneen muistiin. [3, s. 431]

5. SÄÄDÖN SUNNITTELU JA TOTEUTUS MATLAB-OHELMISTOLLA

MATLAB on Mathworksin ylläpitämä ohjelmisto ja ohjelmointikieli, mikä pohjautuu matriisilaskentaan. Laajojen kirjastojen sekä tehokkaan laskennan vuoksi se on suosittu useilla eri tieteen aloilla, joissa tehdään systeemisuunnittelua. Säädön suunnitteluun MATLAB soveltuu hyvin, sillä sen avulla voi ratkaista helposti esimerkiksi matriisien ominaisarvoja. Matlabilla myös visualisointi on helppoa, tehden datantulkinnasta ja päätöksenteosta helpompaa. [12]

5.1 Suunnittelu

Kääntöheilurin diskreettiaikainen LQG-säätö tehtiin lähteen [4] pohjalta. Työn aluksi liikeyhtälöt tuli linearisoida ja lineaaristen tilayhtälöiden pohjalta tuli rakentaa LTI-tilaesitykset. Linearisointiin voi käyttää kahta menetelmää, linearisoinnin voi tehdä käsin, tai käyttää Matlabin symbolista ohjelmistoa ja laskea linearisoidut tilayhtälöt käyttämällä *gradient()*-funktioita. Jatkuva-aikaisen LTI-tilaesityksen matriisit ovat

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mp^2l^2rg}{Jt} & \frac{-brJp}{Jt} & \frac{-mplrbp}{Jt} \\ 0 & \frac{mpglJr}{Jt} & \frac{-mplrbr}{Jt} & \frac{-Jrbp}{Jt} \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Jp}{Jt} \\ \frac{mplr}{Jt} \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Järjestelmän tilat ovat $\dot{x} = \begin{bmatrix} \theta & \alpha & \dot{\theta} & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T$. Suunnittelua varten jatkuva-aikaiset tilayhtälöt tulee muuntaa diskreettiaikaiseen muotoon käyttämällä osion 3.2 kaavoja, tai tekemällä MATLAB:iin tilamatriisien perusteella tilaesitysobjektin komennolla $ss(A,B,C,D)$ ja sitten käyttämällä komentoa $c2d(sys,h)$, missä sys on jatkuva-aikaisen järjestelmän tilaesitysobjekti, sen diskretoimiseen. Kun tilaesitykset ovat määritetty, voidaan määrittellä Kalman-suotimen ja DLQR-säätimen vahvistukset. DLQR-regulaattorin vahvistus voidaan laskea käyttämällä MATLAB-komentoa $idare(Ad, Bd, Q, R)$, joka ratkaisee takaisinkytkentävahvistuksen diskreetillä algebrallisella Ricatti yhtälöllä. Kalman-suotimen suodin vahvistus L^T voidaan laskea komennolla $idare(Ad', Cd', Bd*Rw*Bd', diag([Rv, Rv]))$ ja siitä tarvittava Kalman-suotimen vahvistus komennolla $Ad^{-1}L$. Alla on esitelty käytetyt parametrit jatkuva-aikaisen sekä diskreettiaikaisen järjestelmän virittämisessä.

$$\begin{aligned}
 Q_d &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & Q_c &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 R_d &= 1, & R_c &= 1 \\
 R_w &= 10, & S_w &= 10 \\
 R_v &= 0.5, & S_v &= 0.5 \\
 R_{vw} &= 0, & S_{vw} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Esityksessä 5.2 on asetettuna työn lopulliset parametrien arvot. Näillä parametrivalinnoilla saatiin tyydyttävä säätötulos. Tuloksen optimaalisuudesta ei voida tehdä johtopäätöksiä puuttuvan vertailudatan vuoksi. Matriisin Q arvot valikoituivat iteroimalla painottaen merkittäviä tiloja, joita ovat alustan ja heilurin kulma. Edellämainitut tilat valikoituivat siksi, että ohjauksen tulee pitää niiden arvot mahdollisimman pieninä. Systeemissä on vain yksi sisääntulo, jolloin sen painona on skalaari R , jonka arvolla saatiin ohjaus, joka on responsiivinen eikä se riko sisääntulon rajoitteita. Kääntöheilurin kulmaa mittaavien enkooderien aiheuttama kohina voidaan olettaa pieneksi, jolloin diskreettiaikaisen Kalman-suotimien tarvisemat varianssit R_w, R_v ja R_{vw} ja jatkuva-aikaisen Kalman suotimen spektritiheydet S_w, S_v ja S_{vw} valittiin iteroimalla siten, että Kalman-suodin tuotti stabiilit tilanestimaatit. Parametreilla 5.2 saadut DLQG:n vahvistukset tilatakaisinkytkentään 5.3 ja Kalman-suotimeen 5.4 sekä LQG:n vahvistukset tilatakaisinkytkentään 5.5 Kalman-suotimeen 5.6 ovat listattu alla.

$$K_d = \begin{bmatrix} -0.8545 & 16.5863 & -0.6419 & 1.2317 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

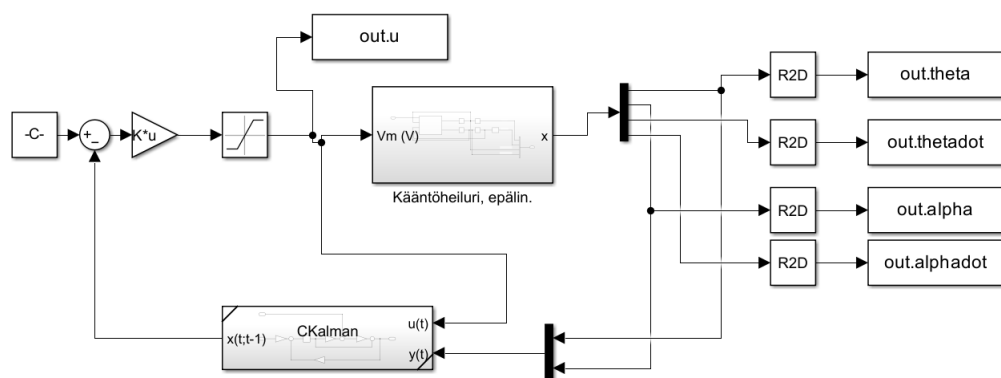
$$K_k = \begin{bmatrix} 0.2097 & 0.0957 \\ 0.0957 & 0.2662 \\ 3.1354 & 3.0491 \\ 2.6231 & 4.8419 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

$$K_c = \begin{bmatrix} -3.1623 & 41.1946 & -1.9346 & 3.6245 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

$$K_{kc} = \begin{bmatrix} 24.3462 & 12.6731 \\ 12.6731 & 31.8184 \\ 376.6722 & 380.7417 \\ 331.0354 & 586.5073 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

5.2 Takaisinkytketyn säätöjärjestelmän Simulink-simulaattori

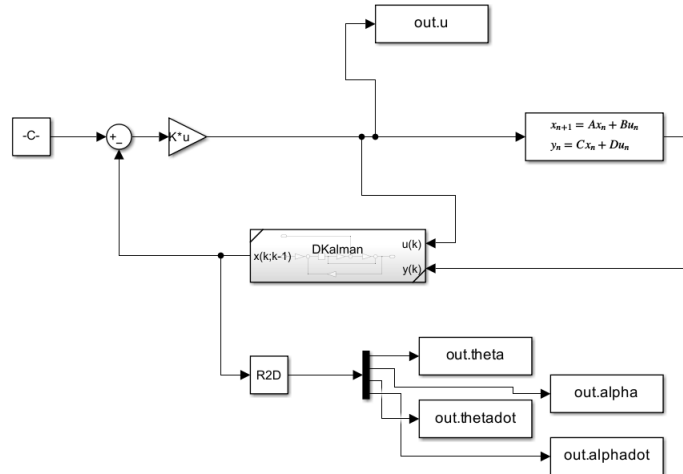
Simulink on Mathworksin kehittämä ja ylläpitämä lohkokaavioympäristö systeemien suunnittelua varten. Simulink mahdollistaa säätimien ja ohjelmien testaamista järjestelmän mallia vasten, ennen kuin siirrytään testaamaan toimintaa todelliseen järjestelmään. Kääntöheilurin säädön virittämisen ja vasteiden testaamista varten tehtiin neljä simulaattoria. Linaarinen takaisinkytketty simulaattori (kuva 5.2), sekä epälineaarinen takaisin kytketty simulaattori (kuva 5.1) jatkuva-aikaisena sekä diskreettiaikaisena.



Kuva 5.1. Epälineaarinen takaisinkytketty simulaattori

Kuvassa 5.1 olevan simulaattorin Kääntöheiluri, epälin. - lohkon on konfiguroitu 2.1 mu-

kainen toiminta. Säätimen ulostuloon myös on konfiguroitu Saturation-lohko, mikä estää säätimen ulostulon ylittävän $[-12V, 12V]$ rajat. Se on asetettu fyysisen toimilaitteen rajojen mukaisesti. Järjestelmän reguloititehtävää ohjataan *constant* lohkoilla, mihin on asetettu järjestelmän kaikki tilat nolllaksi. Mikäli järjestelmän tila poikkeaa nolllasta, ohjaus lasketaan erosuureesta. Samaa ohjaustapaa käytetään myös kuvan 5.2 simulaattorissa. Molemmista simulaattoreista on alkeislohkokaaviolla luotu Kalman-suodin.



Kuva 5.2. Lineaarinen takaisinkytketty simulaattori

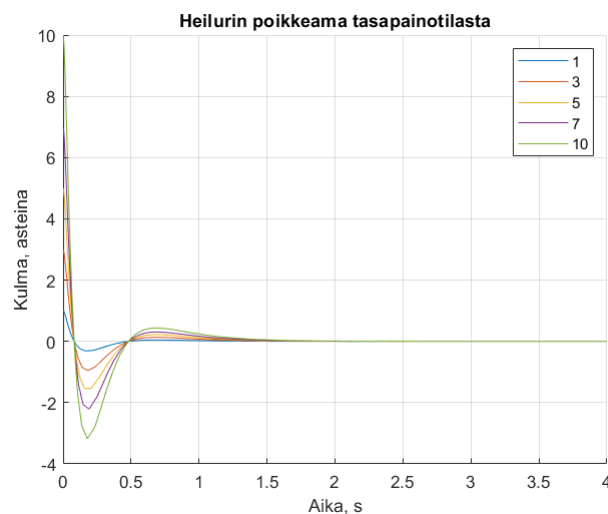
Vastekokeet simulaattorilla on eräs tapa testata säädön toimivuutta. Säädön suorituskyvyn testaamiseen on myös muita menetelmiä, kuten Gang-of-Six siirtofunktiot ja robusti stabiluus. Tässä työssä reguloititehtävän vastetta testataan lineaarisella, sekä epälineaarilla simulaattorilla.

6. TESTAUS JA TULOKSET

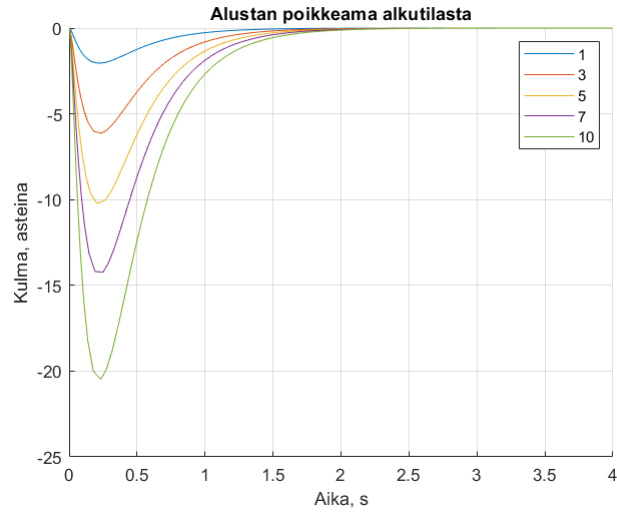
Tässä työssä käytettiin simulointikokeita, sekä iterointia säätimen virittämisessä. Tavoitteena on löytää hyvät painokerroinmatriisit sekä sopivat Kalman-suotimen varianssit, joiden avulla saadaan sopiva vaste epälinearisessa simulaattorissa. Työssä sopiva vaste määritetään mahdollisimman nopeana asettumisena kääntöheilurin yläasentoon sekä mahdollisimman pieneen virheeseen reguloititehtävässä. Vaimuksena on se, että ohjausjännitteet ovat mahdollisia toteuttaa todellisessa kääntöheilurijärjestelmässä. Simulointi tehtiin kulmille 10° , 7° , 5° , 3° , 1° . Vertailun vuoksi LQG-säätö toteutettiin jatkuva-aikaiselle, sekä diskreettiaikaiselle järjestelmälle. Molemmille säätötavoille pyrittiin tuottamaan hyvä säätötulos. Johtuen diskreettiaikasten ja jatkuva-aikaisten järjestelmien välisestä eroista, LQG-menettelmien painokertoimet poikkeavat toisistaan. Tämän vuoksi järjestelmien välisestä paremmuudesta ei voida tämän tutkimuksen perusteella johtopäätöstä.

6.1 Lineaarisen järjestelmän viritys

LQG-menettelmä takaa stabiilit navat lineaarisen järjestelmän takaisinkytkennälle. Täten simuloinnit palautuvat alkukulmasta nopeasti ja tehokkaasti tasapainotilaan kuvat 6.1, 6.3, 6.2, 6.4.

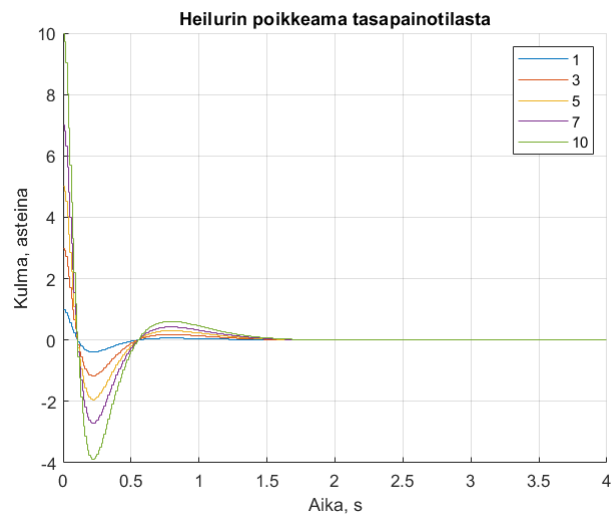


Kuva 6.1. Jatkuva-aikaisen lineaarisen heilurin kulma

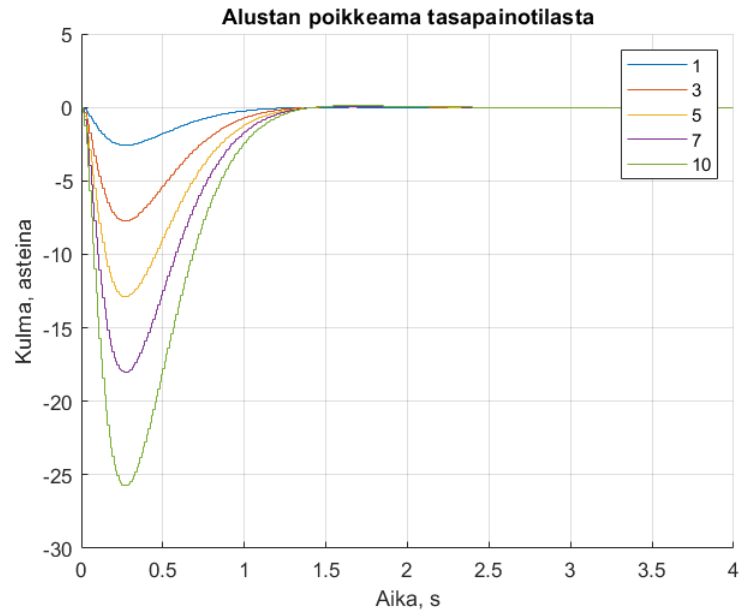


Kuva 6.2. Jatkuva-aikaisen lineaarisen alustan kulma

Jatkuva-aikasessa tapauksessa vasteet ovat hyviä sekä heilurin että alustan vasteiden kulmat pysyivät pieninä suhteessa liikealueeseen.



Kuva 6.3. Diskreettiaikaisen lineaarisen heilurin kulma

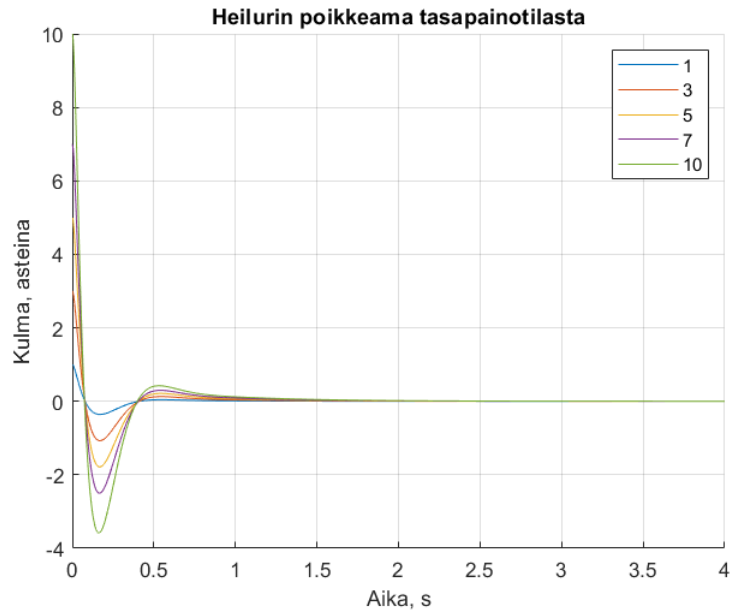


Kuva 6.4. Diskreettiaikaisen lineaarisen alustan kulma

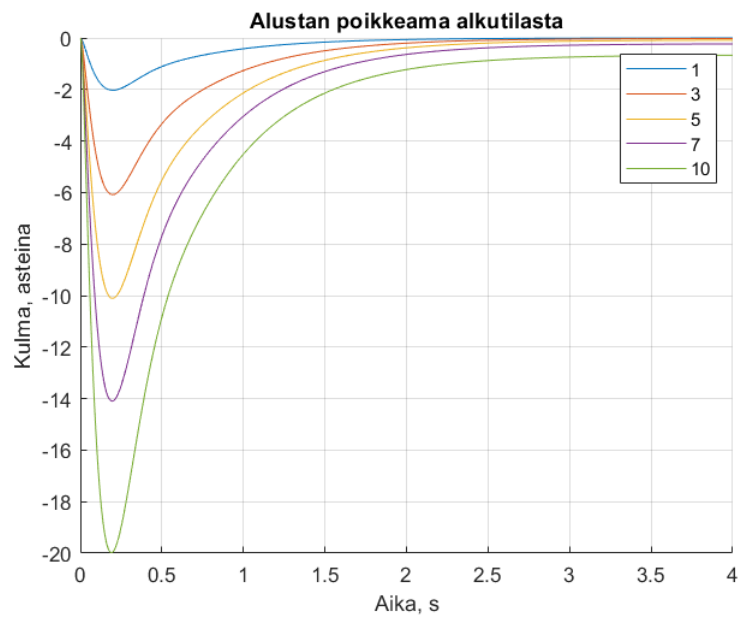
Diskreettiaikaisessa järjestelmässä vasteet vastaavat hyvin jatkuva-aikaisen järjestelmän vasteita. Voitaneen todeta, että valittu pitoaika on tyydyttävä. Kuvista voidaan huomata, että diskreettiaikaisen järjestelmän kulmien heilahduksien suuruudet ovat suurempia kuin jatkuva-aikaisessa järjestelmässä.

6.2 Epälineaarisen järjestelmän viritys

Epälineaariseen järjestelmään sopivien vasteiden hakeminen on haastavaa. Lineariselle järjestelmälle suunniteltu säädin, mikä tuottaa halutun toiminnan lineaarisessa simulaattorissa, ei takaa haluttua toimintaa epälinearisessa simulaattorissa. [11, s. 371]

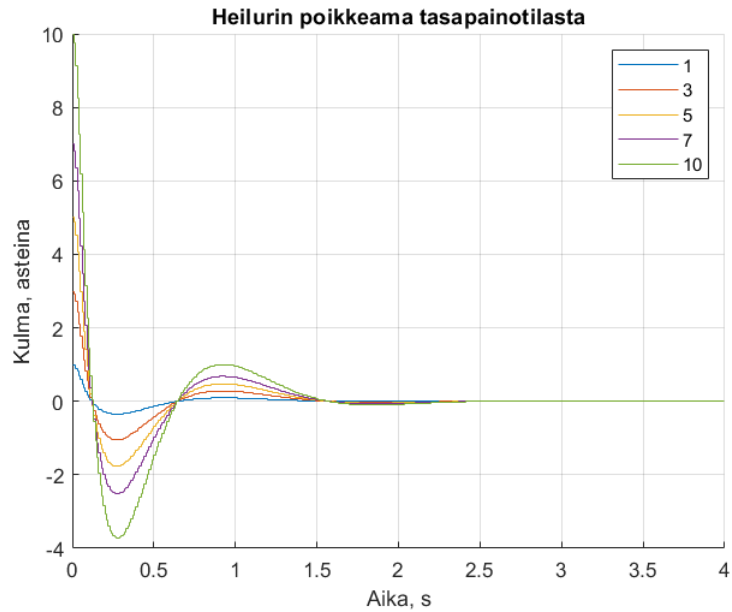


Kuva 6.5. Jatkuva-aikaisen epälineaarisen heilurin kulma

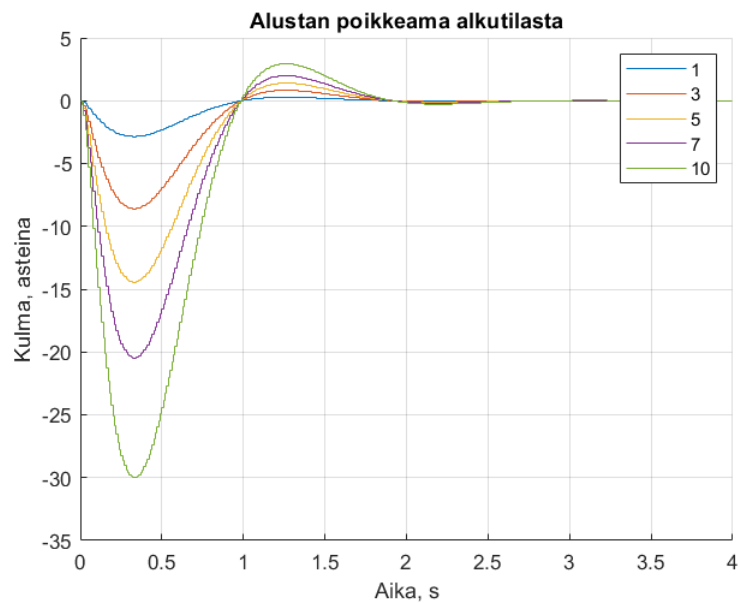


Kuva 6.6. Jatkuva-aikaisen epälineaarisen alustan kulma

Jatkuva-aikaisen simulaattorin vastekokeista voidaan nähdä, että systeemin tilat alkuvä-
 rähdyksien jälkeen päätyvät tavoiteltuun yläasentoon. Alustan kulmaan jää isoimmilla kul-
 man alkuarvoilla pieni asetusarvovirhe. Virhe voitaneen poistaa integroivalla säätötoimin-
 nolla tai kompensattorilla, jota ei tässä työssä tutkita[5, s. 274][9, s. 218]. Asetusarvo
 virhe voinee myös johtua siitä, että heilurin pystyasennon ylläpitäminen vaati suuren alus-
 tan kulman muutoksen. Tämän jälkeen se jäi kyseiseen tilaan, sillä heilurin pystyasento
 on olennaisempi tila kuin alustan keskiasento. Tuloksista voidaan olettaa virityksen oleva
 riittävä alkuarvaus todellisen QUBE-Servo 2 järjestelmän ohjaukseen.



Kuva 6.7. Diskreettiaikaisen epälineaarisen heilurin kulma

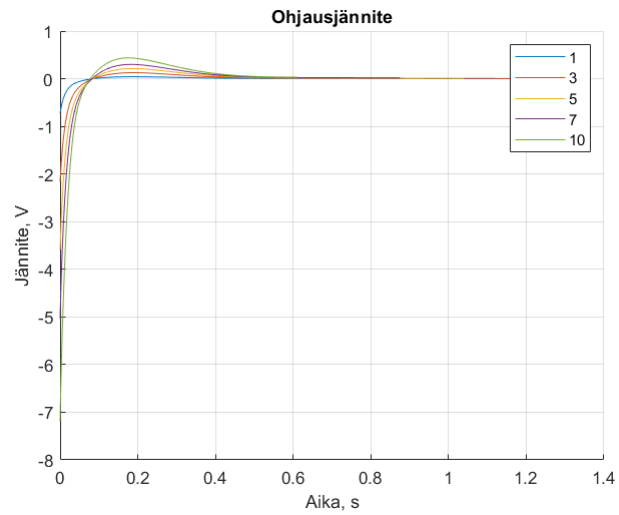


Kuva 6.8. Diskreettiaikaisen epälineaarisen alustan kulma

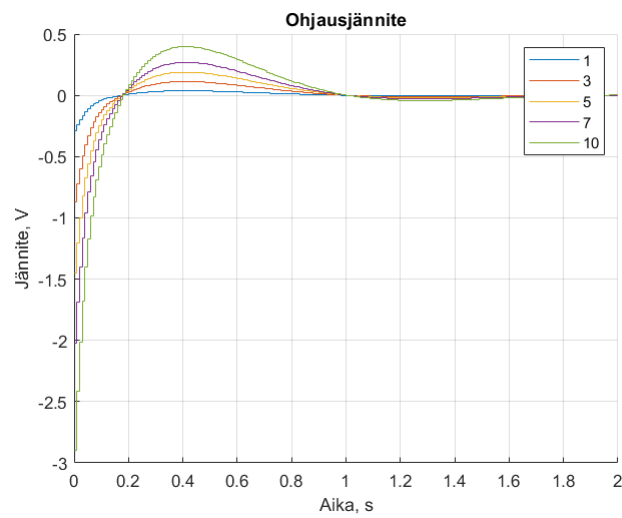
Diskreettiaikaisen järjestelmän tapauksessa kulmien arvot ovat suurempia, mutta alustan sekä heilurin poikkeamat asettuvat nollaan.

6.3 Ohjaukset

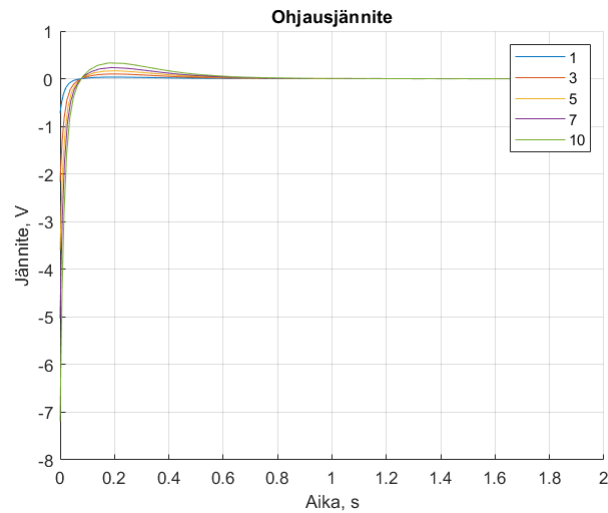
Tässä aluvuussa on listattuna järjestelmän vaatimat ohjausjännitteet. Kuten aiemmin huomattiin ovat järjestelmien ohjausjännitteet toteutettavissa kuvien 6.9, 6.10, 6.11, 6.12 mukaisesti.



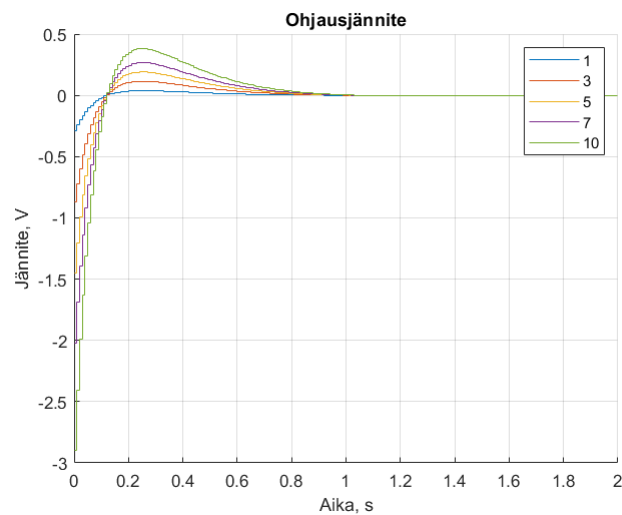
Kuva 6.9. Jatkuva-aikaisen epälineaarisen järjestelmän ohjaus



Kuva 6.10. Diskreettiaikaisen epälineaarisen järjestelmän ohjaus



Kuva 6.11. Jatkuva-aikaisen lineaarisen järjestelmän ohjaus



Kuva 6.12. Diskreettiaikaisen lineaarisen järjestelmän ohjaus

Ohjausjännitteet pysyvät vastekokeissa $[-12V, 12V]$ rajoissa. Jännitteiden muutosnopeudet vaikuttavat suurilta ja niiden toteutuskelpoisuus tulee arvioida fyysisen järjestelmän testeissä.

7. YHTEENVETO

Työssä tutkittiin DLQG-säätimen virittämistä kääntöheilurille. Työssä haasteina oli epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden linearisointi, simulaattorien rakentaminen sekä sopivien viritysparametrien löytäminen Kalman-suotimelle sekä LQR-regulaattorille sopivan vasteen saavuttamiseksi.

Parametrien löytämiseen tarvittiin useita iterointikertoja. LQG-mentelmä koostuu kahdesta eri ohjausrakenteesta, jolloin toimimattoman ratkaisun vian etsintä oli haastavaa. Ratkaisevana tekijänä iteroinnissa oli aloittaa LQR-regulaattorin viritys sillä oletuksella, että kaikki tilat ovat mitattavissa. Sitten sopivan virityksen löytyessä Kalman-suotimelle piti iteroida sopivat parametrit, joiden avulla säätötulos ei heikentynyt.

Sekä jatkuva-aikaisille ja diskreettiaikaisille järjestelmille saatiin sopivat vasteet oikeilla parametrien valinnoilla. Kalman-suotimen kompensoimien kohinoiden syvempää arvointia ei toteutettu, sillä se on todellisille järjestelmille hyvin haastavaa. Molempien tapojen vastekokeiden tulokset olivat lupaavia, joten toteutettu DLQR-säädin ja Kalman-suodin voitaneen toteuttaa todelliselle järjestelmälle. Työn tuloksien perusteella voidaan todeta DLQG-säätimen olevan sopiva säätömenetelmä kääntöheilurin regulointitehtävässä. Vertailua muihin säätömenetelmiin ei tehty, jolloin tulokset voivat toimia hyvänä lähtökohtana tulevissa tutkimuksissa, missä voidaan vertailla eri säätömenetelmien tuloksia keskenään.

LÄHTEET

- [1] *Feedback systems: An introduction for scientists and engineers*. eng. New Jersey: Princeton University Press, 2010.
- [2] *The inverted pendulum in control theory and robotics: from theory to new innovations*, eng, sarja IET control, Robotics and Sensors Series; 111. Herts, England: The Institution of Engineering ja Technology, 2017.
- [3] K. J. Åström ja B. Wittenmark, *Computer-controlled systems: theory and design*, eng, 3rd ed., sarja Prentice-Hall information and system sciences series. Upper Saddle River (NJ): Prentice-Hall, 1997.
- [4] *QUBE - Servo 2 - Quanser*. <http://www.quanser.com/>, Luettu: 31/08/2023.
- [5] R. C. Dorf ja R. H. Bishop, *Modern control systems*, eng, 13th ed. Harlow: Pearson, 2017.
- [6] N. Arulmozhi ja A. V. T. Aruldoss, "Kalman Filter and Hinf Filter Based Linear Quadratic Regulator for Furuta Pendulum," eng, *Computer Systems Science and Engineering*, vol. 43, nro 2, 2022.
- [7] L. Williams II, *Linear State-Space Control Systems*. John Wiley and Sons, 2007, 464 pp.
- [8] G. F. Franklin, M. L. Workman ja J. D. Powell, *Digital control of dynamic systems*, eng, 3rd ed. Menlo Park (CA): Addison-Wesley, 1998.
- [9] K. Ogata, *Modern Control Engineering*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, United States, 2001.
- [10] B. Friedland, *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods*, eng. New York: Dover Publications, 2012.
- [11] T. Glad, *Control Theory*, eng. Independence: CRC Press, 2000.
- [12] *MATLAB product, MATLAB*, <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>, Luettu: 24/11/2023.