Tampereen yliopisto

Juha Kallio-Korhonen

BOLZANON–WEIERSTRASSIN LAUSE

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Joulukuu 2023

Tiivistelmä

Juha Kallio-Korhonen: Bolzanon–Weierstrassin lause
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Joulukuu 2023

Tässä työssä esitellään *Bolzanon–Weierstrassin lause* reaalilukujonoille sekä kyseinen lause yleistettynä euklidisiin avaruuksiin $\mathbb{R}^n$ kuuluville jonoille. Työn tavoitteena on esitellä näiden lauseiden samankaltaisuutta. Samalla nostetaan esiin eri lähteiden erilaisia tulkintoja *Bolzanon–Weierstrassin lauseesta*, sillä eri lähteissä voidaan viitata eri lauseisiin *Bolzanon–Weierstrassin lauseena*.

Aluksi esitellään taustatietoja, joita tarvitaan edellä mainitun lauseen todistamiseen reaalilukujonojen tapauksessa. Näitä ovat muun muassa jonon suppenemisen määritelmä, suppenevan jonon rajoittuneisuus ja monotoninen suppeneminen. Lisäksi esitellään lause 2.4, joka todistaa, että jokaisella jonolla on monotoninen osajono sekä lause 2.5, joka todistaa, että jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono. Esimerkin avulla huomautetaan, että myös rajoittamattomalla jonolla voi olla suppeneva osajono.

Seuraavaksi esitellään taustatietoja, joita tarvitaan *Bolzanon–Weierstrassin lauseen* yleistyksen todistamisessa euklidisissa avaruuksissa $\mathbb{R}^n$. Näitä ovat muun muassa komponenteittain suppeneminen, osajoukon rajoittuneisuus, jonokompaktius sekä lause 3.2, jossa osoitetaan, että jonokompakti osajoukko on suljettu ja rajoitettu.

Luvussa 4 esitellään lauseiden todistukset ensin reaalilukujonoille ja sitten euklidisien avaruuksien jonoille. Samalla esitellään eri lähteiden erilaiset tulkinnat *Bolzanon–Weierstrassin lauseelle*. Lopuksi huomioidaan lauseiden 4.1 ja 4.3 yhtenevyys yleistettäessä lause reaalilukujonoista euklidisien avaruuksien jonoihin sekä huomioidaan esiteltyjen jonokompaktiuslauseiden todistusten samankaltaisuus.

Tulokset perustuvat päälähteenä käytettyyn Patrick Fitzpatrickin teokseen *Advanced Calculus: Second Edition*. Työn tukena on käytetty Donald Yaun teosta *A First Course in Analysis*. Lukijalta oletetaan täydellisyysaksiooman ja perusanalyysin tuntemusta.

Avainsanat: Bolzanon–Weierstrassin lause, jonokompaktius, jonon suppeneminen

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä työssä esitellään *Bolzanon–Weierstrassin lause* reaalilukujonoille sekä lause yleistettynä euklidisiin avaruuksiin $\mathbb{R}^n$ kuuluviin jonoihin. Työn tavoitteena on esitellä näiden lauseiden samankaltaisuutta. Samalla nostetaan esiin eri lähteiden erilaisia tulkintoja *Bolzanon–Weierstrassin lauseesta*, sillä eri lähteissä viitataan eri lauseeseen *Bolzanon–Weierstrassin lauseena*.

Aluksi esitellään taustatietoja, joita tarvitaan edellä mainitun lauseen todistamiseen reaalilukujonojen tapauksessa. Näitä ovat muun muassa jonon suppenemisen määritelmä, suppenevan jonon rajoittuneisuus ja monotoninen suppeneminen. Lisäksi osoitetaan, että jokaisella jonolla on monotoninen osajono, ja että jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.

Seuraavaksi esitellään taustatietoja, joita tarvitaan *Bolzanon–Weierstrassin lauseen* yleistyksen todistamisessa euklidisissa avaruuksissa $\mathbb{R}^n$. Näitä ovat muun muassa komponenteittain suppeneminen, osajoukon rajoittuneisuus ja jonokompaktius sekä osoitetaan, että jonokompakti osajoukko on suljettu ja rajoitettu.

Luvussa 4 esitellään lauseiden todistukset ensin reaalilukujonoille ja sitten euklidisien avaruuksien jonoille. Samalla esitellään eri lähteiden erilaiset tulkinnat *Bolzanon–Weierstrassin lauseelle*. Lopuksi huomioidaan kyseisten lauseiden yhtenevyys sekä jonokompaktiuslauseiden todistusten samankaltaisuus.

Tulokset perustuvat päälähteenä käytettyyn Patrick Fitzpatrickin teokseen *Advanced Calculus: Second Edition*. Työn tukena on käytetty Donald Yaun teosta *A First Course in Analysis*. Lukijalta oletetaan täydellisyysaksiooman ja perusanalyysin tuntemusta.

2 Esitietoja reaaliluvuilla

2.1 Suppenemisen määritelmä

Määritellään aluksi jonon suppeneminen, sillä suppenemisen määritelmää tarvitaan myöhemmin suppenevan jonon rajoittuneisuutta todistettaessa.

Määritelmä 2.1 (vrt. [1, s. 26]). Jonon $\{a_n\}$ sanotaan *suppenevan* kohti pistettä a, jos jokaiselle luvulle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen indeksi $N \in \mathbb{N}$ siten, että on voimassa

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Olkoon luvut $x, l, r \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$, jolloin

$$|x - l| < r, \quad \text{jos ja vain jos} \quad l - r < x < l + r.$$

Silloin jono $\{a_n\}$ suppenee kohti pistettä a, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen indeksi N, että on voimassa

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N,$$

mikä tarkoittaa sitä, että a_n kuuluu välille $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ kaikilla $n \geq N$.

2.2 Suppeneva jono on rajoitettu

Joukon S sanotaan olevan *rajoitettu*, jos se on rajoitettu ylhäältä ja alhaalta. Toisin sanoen on olemassa luku $M \geq 0$, jolle on voimassa

$$|x| \leq M \quad \text{jokaisella pisteellä } x \in S.$$

Määritelmä 2.2 (vrt. [1, s. 35]). Jono $\{a_n\}$ on *rajoitettu*, jos on olemassa luku M siten, että

$$|a_n| \leq M \quad \text{kaikilla } n.$$

Lause 2.1. *Jokainen suppeneva jono on rajoitettu.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 35].) Olkoon $\{a_n\}$ jono, joka suppenee kohti pistettä a. Suppenemisen määritelmästä seuraa, että valittaessa $\varepsilon = 1$ voidaan valita indeksi N siten, että on voimassa

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Voidaan kirjoittaa $a_n = (a_n - a) + a$, mistä kolmioepäyhtälöä soveltamalla saadaan, että

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a|.$$

Valitaan indeksi N siten, että

$$|a_n| \leq 1 + |a| \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Olkoon $M \equiv \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$. Silloin

$$|a_n| \leq M \quad \text{jokaisella } n,$$

minkä seurauksena jono $\{a_n\}$ on rajoitettu määritelmän 2.2 nojalla. □

Seuraavaa apulausetta tarvitaan sitä seuraavan lauseen todistuksessa.

Apulause 2.1. Oletetaan, että jono $\{d_n\}$ suppenee kohti lukua d ja että $d_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Silloin luku $d \geq 0$.

Todistus. (Vrt. [1, s. 36].) Todistetaan väite tekemällä vastaoletus, että $d < 0$. Olkoon $\varepsilon \equiv -d/2$. Silloin $\varepsilon > 0$ ja $d + \varepsilon = d/2 < 0$. Tällöin väli $(d - \varepsilon, d + \varepsilon)$ koostuu negatiivisista luvuista, jolloin yksikään jonon $\{d_n\}$ termi ei ole kyseisellä välillä. Siitä syystä jono $\{d_n\}$ ei voi supeta kohti lukua d. Tämä on ristiriita, mistä seuraa, että $d \geq 0$. □

Lause 2.2. *Olkoon* $\{c_n\}$ *jono, jonka alkiot kuuluvat välille* $[a, b]$. *Jos* $\{c_n\}$ *suppenee kohti pistettä c, niin piste c kuuluu välille* $[a, b]$.

Todistus. (Vrt. [1, s. 37].) Suppenevien jonojen ominaisuuksien nojalla voidaan kirjoittaa, että

$$\lim_{n\to\infty} [b - c_n] = \lim_{n\to\infty} b - \lim_{n\to\infty} c_n = b - c.$$

Jokaisella indeksillä n jono c_n kuuluu välille $[a, b]$, jolloin $b - c_n \geq 0$. Silloin apulauseen 2.1 nojalla myös $b - c \geq 0$. Samalla tavalla voidaan kirjoittaa, että

$$\lim_{n\to\infty} [c_n - a] = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} a = c - a.$$

Koska jonon c_n alkiot kuuluvat välille $[a, b]$, niin $c_n - a \geq 0$, niin apulauseen 2.1 nojalla myös $c - a \geq 0$. Koska $a \leq c \leq b$, niin siitä seuraa, että piste c kuuluu välille $[a, b]$. □

2.3 Monotonisen jonon suppeneminen

Määritellään aluksi jonon kasvaminen ja väheneminen.

Määritelmä 2.3 (vrt. [1, s. 38])**.** Jono $\{a_n\}$ on kasvava, jos

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{jokaisella } n.$$

Jono $\{a_n\}$ on vähenevä, jos

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{jokaisella } n.$$

Jonoa $\{a_n\}$ sanotaan *monotoniseksi*, jos se on kasvava tai vähenevä.

Seuraavaksi esitellään monotonisen jonon suppenemislause, jota tarvitaan myöhemmin seuraavissa todistuksissa.

Lause 2.3. *Monotoninen jono suppenee, jos ja vain jos se on rajoitettu. Rajoitettu ja monotoninen jono* $\{a_n\}$ *suppenee kohti raja-arvoa*

i) $\sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$*, jos se on kasvava tai*

ii) $\inf\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$*, jos se on vähenevä.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 38–39].) Aiemmin on todistettu, että suppeneva jono on rajoitettu. Osoitetaan, että jos monotoninen jono $\{a_n\}$ on rajoitettu, se suppenee kohdissa i) ja ii) mainittuja raja-arvoja kohti.

Oletetaan, että jono $\{a_n\}$ on kasvava. Jos määritellään $S = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, oletuksen mukaan S on ylhäältä rajoitettu. Täydellisyysaksiooman nojalla joukolla S on pienin yläraja. Määritellään $l \equiv \sup S$. Todistetaan, että jono $\{a_n\}$ suppenee kohti pistettä l. Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin tulee löytää indeksi N siten, että

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N,$$

eli

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N. \tag{2.1}$$

Koska l on joukon S yläraja, on voimassa

$$a_n \leq l < l + \varepsilon \quad \text{kaikilla } n. \tag{2.2}$$

Toisaalta, koska l on joukon S pienin yläraja, $l - \varepsilon$ ei ole joukon S yläraja. Silloin on olemassa indeksi N siten, että $l - \varepsilon < a_N$. Mutta koska jono $\{a_n\}$ on kasvava, niin on voimassa

$$l - \varepsilon < a_N \leq a_n \quad \text{kaikilla } n \geq N. \tag{2.3}$$

Epäyhtälöistä (2.2) ja (2.3) seuraa ensiksi mainittu epäyhtälö (2.1), joten jono $\{a_n\}$ suppenee kohti pistettä l. Vähenevän jonon tapaus todistetaan samaan tapaan. □

Määritelmä 2.4 (vrt. [1, s. 45]). *Maksimi-indeksi* (*peak index*) on jonon $\{a_n\}$ indeksi m siten, että

$$a_n \leq a_m \quad \text{kaikilla } n \geq m.$$

Toisin sanoen, jonon $\{a_n\}$ alkio $\{a_m\}$ on myös yläraja kaikille sitä seuraaville alkioille.

Lause 2.4. *Jokaisella jonolla on monotoninen osajono.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 45].) On olemassa joko äärellinen määrä tai ääretön määrä jonon $\{a_n\}$ maksimi-indeksejä. Käsitellään tapaukset, joissa on äärellinen ja ääretön määrä maksimi-indeksejä erikseen.

Jos on olemassa äärellinen määrä maksimi-indeksejä, voidaan valita sellainen indeksi $N \in \mathbb{N}$, että ei ole olemassa suurempia maksimi-indeksejä kuin N. Määritellään rekursiivisesti monotonisesti kasvavan jonon $\{n_k\}$ osajono $\{a_n\}$, missä $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $n_1 = N + 1$. Oletetaan, että positiivinen kokonaislukuindeksi k

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$$

on valittu siten, että

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots < a_{n_k}.$$

Koska $n_k > N$, niin n_k ei ole maksimi-indeksi. Silloin on olemassa indeksi $n_{k+1} > n_k$, josta seuraa että $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$. Näin ollen rekursiivisesti määritellyllä, aidosti kasvavalla jonolla $\{n_k\}$ on aidosti kasvava osajono $\{a_{n_k}\}$.

Toisena tapauksena käsitellään tilannetta, jossa on olemassa ääretön määrä maksimi-indeksejä. Olkoon jokaiselle luonnolliselle luvulle k voimassa, että n_k on k. maksimi-indeksi. Suoraan maksimi-indeksin määritelmästä seuraa, että silloin osajono $\{a_{n_k}\}$ on monotonisesti vähenevä. □

Lause 2.5. *Jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 45].) Olkoon $\{a_n\}$ rajoitettu jono. Lauseen 2.4 mukaan voidaan valita monotoninen osajono $\{a_{n_k}\}$, joka on rajoitettu, koska $\{a_n\}$ on rajoitettu. Siitä seuraa, että osajono $\{a_{n_k}\}$ on rajoitettu monotoninen jono. Silloin lauseen 2.3 mukaan osajono $\{a_{n_k}\}$ suppenee. □

Seuraavassa esimerkissä esitetään huomio, että myös rajoittamattomalla jonolla voi olla suppeneva osajono.

Esimerkki 2.1 (Vrt. [2, s. 47])**.** Jono $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{1}, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ ei ole rajoitettu, mutta sillä on suppeneva osajono $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$.

3 Esitietoja useammassa ulottuvuudessa

3.1 Komponenteittain suppeneminen

Seuraavaksi tarkastellaan esitietoja euklidisissa avaruuksissa $\mathbb{R}^n$. Aluksi tutustutaan *komponenttiprojektiofunktioon*, joka tunnetaan myös nimellä *koordinaattiprojektio*, sekä *komponenteittain suppenemisen kriteeriin*, jota tarvitaan lauseen 4.3 todistamisessa.

Määritelmä 3.1 (vrt. [1, s. 279]). Määritellään jokaiselle indeksille i, kun $1 \leq i \leq n$, *i. komponenttiprojektiofunktio* $p_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten, että

$$p_i(\boldsymbol{u}) \equiv u_i, \quad \text{kun } \boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Tästä seuraa suoraan, että

$$\boldsymbol{u} = (p_1(\boldsymbol{u}), \ldots, p_n(\boldsymbol{u})), \quad \text{kun } \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n,$$

jolloin piste on täysin määritelty *komponenttiprojektiofunktion* arvoina kyseisessä pisteessä.

Määritelmä 3.2 (vrt. [1, s. 280]). Jono $\{\boldsymbol{u}_k\} \in \mathbb{R}^n$ *suppenee komponenteittain* kohti pistettä $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, jos jokaiselle indeksille i, missä $1 \leq i \leq n$, on voimassa

$$\lim_{k \to \infty} p_i(\boldsymbol{u}_k) = p_i(\boldsymbol{u}).$$

Lause 3.1 (Komponenteittain suppenemisen kriteeri). *Olkoon jono $\{\boldsymbol{u}_k\} \in \mathbb{R}^n$ ja piste $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$. Jono $\{\boldsymbol{u}_k\}$ suppenee kohti pistettä $\boldsymbol{u}$, jos ja vain jos $\{\boldsymbol{u}_k\}$ suppenee komponenteittain kohti pistettä $\boldsymbol{u}$.*

Todistus. Sivuutetaan. Ks. [1, s. 280]. □

3.2 Osajoukon rajoittuneisuus

Tarkastellaan, mitä tarkoittaa, että osajoukko on *jonokompakti* tai että se on *rajoitettu*. Sen jälkeen jatketaan jonokompaktin osajoukon ominaisuuksiin.

Määritelmä 3.3 (vrt. [1, s. 299]). Olkoon A joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Osajoukko A on *jonokompakti*, jos jokaisella jonolla, jonka alkiot kuuluvat osajoukkoon A, on osajono, joka suppenee kohti pistettä osajoukossa A.

Määritelmä 3.4 (vrt. [1, s. 299])**.** Osajoukko $A \in \mathbb{R}^n$ on rajoitettu, jos on olemassa luku M, jolle on voimassa

$$\|\boldsymbol{u}\| \leq M \quad \text{kaikilla } \boldsymbol{u} \in A.$$

Lause 3.2. *Jonokompakti osajoukko $A \in \mathbb{R}^n$ on rajoitettu ja suljettu.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 299].) Olkoon $A \in \mathbb{R}^n$ jonokompakti osajoukko. Osoitetaan, että A on suljettu. Olkoon $\{\boldsymbol{u}_k\} \in A$ jono, joka suppenee kohti pistettä $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$. Silloin jokainen jonon $\{\boldsymbol{u}_k\}$ osajono suppenee kohti pistettä $\boldsymbol{u}$. Jonokompaktiuden määritelmän mukaan jokin osajono suppenee kohti pistettä osajoukossa A. Silloin $\boldsymbol{u}$ kuuluu osajoukkoon A, joten A on suljettu. Todistetaan, että A on rajoitettu vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että A ei ole rajoitettu. Silloin jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ ei ole voimassa, että

$$\|\boldsymbol{u}\| \leq k \quad \text{kaikilla pisteillä} \quad \boldsymbol{u} \in A.$$

Valitaan piste $\boldsymbol{u}_k$ osajoukosta A, siten että $\|\boldsymbol{u}_k\| > k$. Koska A on jonokompakti, jonon $\{\boldsymbol{u}_k\}$ osajono $\left\{\boldsymbol{u}_{k_j}\right\}$ suppenee kohti pistettä $\boldsymbol{u} \in A$. Mutta silloin

$$\|\boldsymbol{u}_{k_j}\| > k_j \geq j \quad \text{kaikille } j \in \mathbb{N}.$$

Silloin reaalilukujono $\left\{\|\boldsymbol{u}_{k_j}\|\right\}$ ei ole rajoitettu, mutta se suppenee kohti pisteen $\boldsymbol{u}$ normia. Mutta tällaiset reaalilukujonot ovat rajoitettuja, jolloin tämä on ristiriita, minkä seurauksena osajoukon A täytyy olla rajoitettu. □

4 Bolzanon–Weierstrassin lause

4.1 Lause reaaliluvuilla

Seuraavaa lausetta kutsutaan usein *Bolzanon–Weierstrassin lauseeksi*, kun käsitellään reaalilukujonoja.

Lause 4.1. *Jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 46-47].) Olkoon $\{a_n\}$ rajoitettu jono ja on olemassa positiivinen luku $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|a_n| < M$ kaikilla luvuilla $n \in \mathbb{R}$. Koska lauseen 2.4 mukaan jokaisella jonolla on monotoninen osajono, myös jonolla $\{a_n\}$ on monotoninen osajono $\{a_{n_k}\}$. Siitä seuraa, että $|a_{n_k}| < M$ kaikilla indekseillä n_k, joten se on myös rajoitettu. Tällainen monotoninen, rajoitettu jono $\{a_{n_k}\}$ suppenee lauseen 2.3 perusteella. $\square$

Päälähteenä käytetyssä Fitzpatrickin teoksessa *Bolzanon–Weierstrassin lauseeksi* kutsutaan kuitenkin lauseesta 4.1 seuraavaa *Jonokompaktiuslausetta*, joka esitellään seuraavaksi.

Määritelmä 4.1 (vrt. [1, s. 46])**.** Reaalilukujoukko S on *jonokompakti*, jos jokaisella joukon S jonolla $\{a_n\}$ on osajono, joka suppenee kohti jotakin joukon S pistettä.

Lause 4.2 (Jonokompaktiuslause)**.** *Olkoon a ja b sellaiset reaaliluvut, että $a < b$. Väli $[a, b]$ on* jonokompakti*, jos jokaisella välin $[a, b]$ jonolla on osajono, joka suppenee kohti jotakin pistettä välillä $[a, b]$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 46].) Lauseen 4.1 mukaan jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono. Olkoon $\{x_n\}$ jono, jonka alkiot kuuluvat välille $[a, b]$, jolloin se on rajoitettu. Lauseen 4.1 mukaan on olemassa osajono $\{x_{n_k}\}$, joka suppenee. Koska jonon $\{x_{n_k}\}$ alkiot kuuluvat välille $[a, b]$, lauseen 2.2 mukaan se suppenee kohti pistettä, joka kuuluu välille $[a, b]$. $\square$

Esimerkki 4.1. Olkoon $S \equiv (0, 1]$. Tarkastellaan jonoa $\{a_n\} = \{\, 1/n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$. Jono $\{a_n\}$ on jono joukossa S. Jono $\{1/n\}$ ja sen osajonot suppenevat kohti nollaa, kun $n \to \infty$. Mutta koska nolla ei kuuluu joukkoon S, niin joukko S ei ole *jonokompakti.*

4.2 Lauseen yleistys

Joissakin teoksissa seuraavaa lausetta, joka on yleistys lauseesta 4.1 reaalilukujen $\mathbb{R}$ joukosta euklidiseen avaruuteen $\mathbb{R}^n$, kutsutaan *Bolzanon–Weierstrassin lauseeksi*.

Lause 4.3. *Jokaisella rajoitetulla jonolla, joka kuuluu joukkoon $\mathbb{R}^n$, on suppeneva osajono.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 299].) Todistetaan induktiolla. Tapaus $n = 1$ on täsmälleen lauseen 2.5 mukainen. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoon jokaisella avaruuden $\mathbb{R}^n$ rajoitetulla jonolla suppeneva osajono. Olkoon $\{\boldsymbol{u}_k\}$ rajoitettu jono avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$. Kiinnitetään positiivinen kokonaisluku k. Olkoon x_k on jonon $\{\boldsymbol{u}_k\}$ viimeinen alkio, jolloin

$$\boldsymbol{u}_k = (\boldsymbol{v}_k, x_k)$$

missä $\boldsymbol{v}_k$ on piste avaruudessa $\mathbb{R}^n$, jonka i.komponentti on jonon $\boldsymbol{u}_k$ i.komponentti, kun $1 \leq i \leq n$. Tämä määrittää kaksi jonoa: reaalilukujonon $\{x_k\}$ ja avaruuden $\mathbb{R}^n$ jonon $\{\boldsymbol{v}_k\}$. Jono $\{\boldsymbol{v}_k\} \in \mathbb{R}^n$ on rajoitettu ja $\{x_k\}$ on rajoitettu reaalilukujono. Induktio-oletuksen mukaan jonon $\{\boldsymbol{v}_k\}$ osajono suppenee kohti pistettä $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Vastaavasti jonon $\{x_k\}$ osajono suppenee kohti pistettä $x \in \mathbb{R}$. *Komponenteittain suppenemisen kriteeristä* (lause 3.1) seuraa, että jonon $\{\boldsymbol{u}_k\}$ osajono suppenee kohti $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}, x)$, missä $\boldsymbol{u}$ on piste avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Seuraavaa jonokompaktiuteen liittyvää lausetta 4.4 kutsutaan muun muassa päälähteenä käytetyssä Fitzpatrickin teoksessa *Bolzanon–Weierstrassin lauseeksi*.

Lause 4.4. *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ on jonokompakti, jos ja vain jos A on rajoitettu ja suljettu.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 300].) Lauseen 3.2 mukaan jokainen jonokompakti osajoukko $A \in \mathbb{R}^n$ on suljettu ja rajoitettu.

Todistetaan päinvastainen väite olettamalla, että osajoukko A on suljettu ja rajoitettu. Olkoon $\{\boldsymbol{u}_k\}$ jono osajoukossa A. Koska $\{\boldsymbol{u}_k\}$ on rajoitettu, lauseesta 4.3 seuraa, että on olemassa jonon $\{\boldsymbol{u}_k\}$ osajono $\{\boldsymbol{u}_{k_j}\}$, joka suppenee kohti pistettä $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$. Mutta koska $\{\boldsymbol{u}_{k_j}\}$ on osajoukon A jono, ja koska osajoukko A on suljettu, niin piste $\boldsymbol{u}$ kuuluu osajoukkoon A, josta seuraa että osajoukko A on jonokompakti. □

Lauseita 4.1 ja 4.3 tarkasteltaessa huomataan, että lause yleistyy samanlaisena siirryttäessä reaalilukujonojen joukosta euklidisiin avaruuksiin $\mathbb{R}^n$ kuuluviin jonoihin. Erona lauseissa on, että reaaliluvuilla jonon alkiot kuuluvat reaalilukujen joukkoon, ja yleistetyssä lausessa jonon alkiot kuuluvat joukkoon $\mathbb{R}^n$. Toisaalta, kun verrataan edellisistä lauseista seuraavien jonokompaktiuslauseiden todistuksia, eli lauseiden 4.2 ja 4.4 todistuksia, nähdään myös niissä selvää samankaltaisuutta.

Lähteet

[1] Fitzpatrick, P. *Advanced Calculus: Second Edition*. American Mathematical Society, 2009.

[2] Yau, D. *A First Course in Analysis*. Singapore : World Scientific, 2013.