Tampereen yliopisto

Enni Vihakara

OSITTAIN JÄRJESTETYT JOUKOT JA HILAT

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Marraskuu 2023

Tiivistelmä

Enni Vihakara: Osittain järjestetyt joukot ja hilat
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan maisteriohjelma
Marraskuu 2023

Tässä tutkielmassa tarkastellaan osittain järjestettyjä joukkoja ja erityisesti hiloja osittain järjestettyinä joukkoina. Turkielman aluksi esitetään osittain järjestetyn joukon määritelmä sekä muita tarvittavien käsitteiden määritelmiä. Lisäksi tarkastellaan tutkielman kannalta tärkeimpiä osittain järjestetyn joukon ominaisuuksia sekä Hassen diagrammia, jonka avulla voidaan esittää erilaisia osittain järjestettyjä joukkoja.

Osittain järjestetyistä joukoista tarkastellaan hieman syvemmin ketjuja eli osittain järjestettyjä joukkoja, jotka ovat lineaarisesti järjestettyjä. Lisäksi tarkastellaan lyhyesti myös insidenssifunktioiden joukkoa ja Möbiuksen funktiota, mutta näitä ei tulla käsittelemään tutkielmassa enää myöhemmin.

Hila on osittain järjestetty joukko, jonka jokaisen kahden alkion osajoukolla on pienin yläraja ja suurin alaraja. Hila voidaan määritellä myös algebrallisesti, ja tutkielmassa esitetään myös algebrallinen määritelmä. Tutkielmassa määritellään modulaarinen hila, distributiivinen hila ja komplementoitu hila, sekä tarkastellaan näiden ominaisuuksia. Lisäksi tutustutaan lyhyesti Boolen hilaan eli hilaan, joka on distributiivinen ja komplementoitu.

Boolen hilaa tarkastellaan tutkielmassa myös algebrallisena joukkona, jolloin tavallisesti puhutaan Boolen algebrasta. Lisäksi esitetään renkaan ja Boolen renkaan määritelmät, sekä esitetään tutkielman kannalta olennaisimmat Boolen renkaan ominaisuudet. Tutkielman lopussa osoitetaan, kuinka Boolen algebra muodostaa Boolen renkaan, ja toisin päin eli kuinka Boolen renkaasta voidaan konstruoida Boolen algebra.

Avainsanat: osittain järjestetty joukko, hila, Boolen hila, Boolen algebra

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan osittain järjestettyjä joukkoja ja erityisesti hiloja osittain järjestettyinä joukkoina. Hila on osittain järjestetty joukko, jonka jokaisen kahden alkion osajoukolla on pienin yläraja ja suurin alaraja. Hila voidaan määritellä myös algebrallisesti, ja tutkielmassa esitetään myös algebrallinen määritelmä.

Toisessa luvussa esitetään osittain järjestetyn joukon määritelmä sekä muita tarvittavien käsitteiden määritelmiä. Lisäksi tarkastellaan osittain järjestetyn joukon ominaisuuksia sekä Hassen diagrammia, jonka avulla voidaan esittää erilaisia osittain järjestettyjä joukkoja. Luvussa tarkastellaan lyhyesti ketjuja eli osittain järjestettyjä joukkoja, jotka ovat lineaarisesti järjestettyjä. Lopuksi tarkastellaan lyhyesti myös insidenssifunktioiden joukkoa ja Möbiuksen funktiota.

Kolmannessa luvussa esitetään hilan järjestysteoreettinen ja algebrallinen määritelmä. Hiloja on pyritty havainnollistamaan erilaisten esimerkkien ja kuvien avulla. Lisäksi tarkastellaan tutkielman kannalta olennaisimpia hilan ominaisuuksia.

Neljäs luku sisältää erilaisten hilaluokkien tarkastelua. Luvussa määritellään modulaarinen hila, distributiivinen hila ja komplementoitu hila, sekä tarkastellaan näiden ominaisuuksia. Luku sisältää havainnollistavia esimerkkejä ja eniten näissä tarkastellaan kahta hyvin tunnettua hilaa, viisikulmio N_5 ja timantti M_3. Lopuksi tutustutaan lyhyesti Boolen hilaan eli hilaan, joka on distributiivinen ja komplementoitu.

Viidennessä luvussa tarkastellaan Boolen hilaa algebrallisena joukkona, jolloin tavallisesti puhutaan Boolen algebrasta. Lisäksi esitetään renkaan ja Boolen renkaan määritelmät, sekä esitetään tutkielman kannalta olennaisimmat Boolen renkaan ominaisuudet. Lopuksi osoitetaan, kuinka Boolen algebra muodostaa Boolen renkaan, ja toisin päin eli kuinka Boolen renkaasta voidaan konstruoida Boolen algebra.

Lukijalta edellytetään lukuteorian peruskäsitteiden hallintaa. Tutkielman määritelmät ja lauseet todistuksineen perustuvat lähdeluettelossa mainittuihin lähdeteoksiin. Tutkielman päälähteinä on käytetty Tero Harjun luentomonistetta *Ordered Sets* [2] ja Steven Romanin kirjaa *Lattices and Ordered sets* [7] lukuja 1 - 4.

2 Osittain järjestetyt joukot

Tässä luvussa tarkastellaan osittain järjestettyjä joukkoja sekä niiden tärkeimpiä ominaisuuksia. Ketjuista eli osittain järjestetyistä joukoista, jotka ovat lineaarisesti järjestettyjä, on oma alalukunsa, ja niiden ominaisuuksia tarkastellaan lyhyesti. Luvun lopussa tarkastellaan lyhyesti myös insidenssifunktioiden joukkoa ja Möbiuksen funktiota, mutta näitä ei tulla käsittelemään tutkielmassa enää myöhemmin. Luvun sisältö perustuu erityisesti Tero Harjun luentomonisteeseen *Ordered Sets* [2].

2.1 Tarvittavien käsitteiden määritelmiä

Määritelmä 2.1. Olkoon R joukossa X määritelty relaatio, ja olkoot $x, y, z \in X$. Relaatio R on

1. *refleksiivinen*, jos $\forall x \in X : xRx$,
2. *symmetrinen*, jos $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$,
3. *antisymmetrinen*, jos $\forall x, y \in X : (xRy \text{ ja } yRx) \Rightarrow x = y$,
4. *transitiivinen*, jos $\forall x, y, z \in X : (xRy \text{ ja } yRz) \Rightarrow xRz$,
5. *vertailullinen*, jos $\forall x, y \in X : xRy$ tai yRx.

Määritelmä 2.2. Olkoon R joukossa X määritelty relaatio. Relaatio R on

1. *osittainen järjestys*, jos se on refleksiivinen, transitiivinen ja antisymmetrinen,
2. *ekvivalenssirelaatio*, jos se on refleksiivinen, transitiivinen ja symmetrinen,
3. *esijärjestys*, jos se on refleksiivinen ja transitiivinen,
4. *lineaarijärjestys*, jos se on refleksiivinen, transitiivinen, antisymmetrinen ja vertailullinen. Lineaarijärjestystä kutsutaan myös *ketjuksi* tai *täydelliseksi järjestykseksi*.

Määritelmä 2.3. Olkoon R joukossa X määritelty relaatio. Jos R on osittainen järjestys, niin pari $P = (X, R)$ on *osittain järjestetty joukko*. Merkitään osittain järjestetyn joukon P järjestystä symbolilla $\leq_P$.

Jos $x \leq_P y$, niin alkion y sanotaan olevan alkion x *seuraaja* ja alkion x sanotaan olevan alkion y *edeltäjä*. Jos $x \leq_P y$ ja $x \neq y$, niin merkitään $x <_P y$. Tällaista järjestystä, jossa yhtäsuuruus ei ole mukana, kutsutaan relaation $\leq_P$ indusoimaksi *tiukaksi osittaiseksi järjestykseksi*.

Huomautus. Olkoon $P = (X, R)$ osittain järjestetty joukko. Tutkielmassa käytetään merkintää $x \in P$ ja $A \subseteq P$ sen sijaan, että merkittäisiin $x \in X$ ja $A \subseteq X$. Lisäksi osittain järjestetystä joukosta voidaan käyttää myös sen englanninkielistä lyhennystä *poset* (partially ordered set).

Määritelmä 2.4. Olkoon $(P, \leq_P)$ osittain järjestetty joukko, ja olkoot $x, y \in P$. Joukko $[x, y]_P$ on *alkioiden x ja y määräämä väli osittain järjestetyssä joukossa P* eli

$$[x, y]_P = \{z \in P \mid x \leq_P z \text{ ja } z \leq_P y\}.$$

Jos $x \nleq y$, niin väli $[x, y]_P$ on tyhjä.

Määritelmä 2.5. Osittain järjestetty joukko P on *paikallisesti äärellinen*, jos jokainen sen väli $[x, y]_P$ on äärellinen.

Esimerkki 2.1. Reaalilukujen osittain järjestetty joukko $(\mathbb{R}, \leq)$ ei ole paikallisesti äärellinen. Kokonaislukujen osittain järjestetty joukko $(\mathbb{Z}, \leq)$ on myös ääretön, mutta paikallisesti äärellinen.

Määritelmä 2.6. Olkoon $\leq_P$ osittainen järjestys. Jos $x \leq_P y$ tai $y \leq_P x$, niin alkioiden x ja y sanotaan olevan *keskenään vertailulliset* ja merkitään $x \bowtie y$. Jos alkiot x ja y eivät ole keskenään vertailulliset, niin merkitään $x \parallel y$. Relaatio $\bowtie$ on refleksiivinen ja symmetrinen, mutta ei välttämättä transitiivinen.

Jos jokaisella alkioparilla $x, y \in P$ on olemassa alkiot $z_0, z_1, \ldots, z_n \in P$ siten, että $x \bowtie z_0 \bowtie z_1 \bowtie \cdots \bowtie z_n \bowtie y$, niin osittain järjestetty joukko P on *yhtenäinen*.

Määritelmä 2.7. Olkoon P osittain järjestetty joukko ja $A \subseteq P$ sen epätyhjä osajoukko.

1. Alkio $x \in A$ on joukon A *minimaalinen alkio*, jos se ei ole minkään muun joukon A alkion seuraaja, eli kaikilla $y \in A$ pätee, että

   $$y \leq_P x \Rightarrow y = x.$$

2. Alkio $x \in A$ on joukon A *pienin alkio*, jos se edeltää kaikkia joukon A alkioita, eli kaikilla $y \in A$ pätee, että

   $$x \leq_P y.$$

   Jos osittain järjestetyllä joukolla P on pienin alkio, sitä merkitään symbolilla 0_P.

3. Alkio $x \in A$ on joukon A *maksimaalinen alkio*, jos se ei edellä mitään muuta joukon A alkiota, eli kaikilla $y \in A$ pätee, että

   $$x \leq_P y \Rightarrow y = x.$$

4. Alkio $x \in A$ on joukon A *suurin alkio*, jos kaikki muut joukon A alkiot ovat sen edeltäjiä, eli kaikilla $y \in A$ pätee, että

   $$y \leq_P x.$$

   Jos osittain järjestetyllä joukolla P on suurin alkio, sitä merkitään symbolilla 1_P.

Lause 2.1. *Osittain järjestetyllä joukolla voi olla enintään yksi pienin alkio ja enintään yksi suurin alkio.*

Todistus (vrt. [5, s. 241]). Olkoon P osittain järjestetty joukko, ja olkoot $x, y \in P$. Oletetaan, että alkiot x ja y ovat osittain järjestyn joukon P pienimpiä alkioita. Koska x on pienin alkio, niin $x \leq_P y$. Vastaavasti koska y on pienin alkio, niin $y \leq_P x$. Näin ollen $x = y$, eli osittain järjestetyn joukon P pienin alkio on yksikäsitteinen.

Oletetaan sitten, että alkiot x ja y ovat osittain järjestetyn joukon P suurimpia alkioita. Koska x on suurin alkio, niin $y \leq_P x$. Vastaavasti koska y on suurin alkio, niin $x \leq_P y$. Näin ollen $x = y$, eli osittain järjestetun joukon P suurin alkio on yksikäsitteinen. □

Määritelmä 2.8. Osittain järjestetty joukko P on *rajoitettu*, jos sillä on pienin alkio 0_P ja suurin alkio 1_P.

Määritelmä 2.9. Olkoon P osittain järjestetty joukko, ja olkoot $x, y \in P$. Jos $[x, y]_P = \{x, y\}$, niin alkion y sanotaan olevan alkion x *välitön seuraaja* ja alkion x sanotaan olevan alkion y välitön edeltäjä. Tällöin merkitään $x \prec_P y$.

Määritelmä 2.10. Äärellinen osittain järjestetty joukko P voidaan esittää *Hassen diagrammin* avulla. Hassen diagrammissa alkiot järjestetään siten, että jos $x \prec_P y$, niin alkiot x ja y yhdistetään viivalla niin, että alkio y on ylempänä kuin alkio x. Kuvassa 2.1 on esitetty Hassen diagrammi osittain järjestetystä joukosta.

Jokainen paikallisesti äärellinen poset P voidaan esittää matriisina M, joka määritellään seuraavasti:

$$\begin{cases} M_{xy} = 1 & \text{kun } x = y \text{ tai } x \prec_P y, \\ M_{xy} = 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan osittain järjestettyä joukkoa $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja sen määrittävää matriisia M.

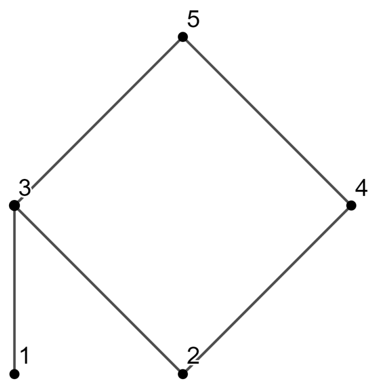
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tällöin osittain järjestetty joukko P voidaan esittää Hassen diagrammina kuvan 2.1 mukaisesti.

Määritelmä 2.11. Olkoon $P = (X, \leq_P)$ osittain järjestetty joukko ja A joukon X epätyhjä osajoukko. Määritellään *alijärjestys* $\leq_A$ rajoittamalla järjestys $\leq_P$ osajoukon A alkioihin eli

$$x \leq_A y \Leftrightarrow x \leq_P y \text{ ja } x, y \in A.$$

Tällöin $(A, \leq_A)$ on posetin P *aliposet*.



Kuva 2.1. Hassen diagrammi osittain järjestetystä joukosta.

Määritelmä 2.12. Olkoon A osittain järjestetyn joukon P osajoukko. Joukko

$$\uparrow A = \{y \in P \mid \exists x \in A : x \leq_P y\}$$

on joukon A generoima *järjestysfiltteri* osittain järjestetyssä joukossa P. Joukko

$$\downarrow A = \{y \in P \mid \exists x \in A : y \leq_P x\}$$

on joukon A generoima *järjestysideaali* osittain järjestetyssä joukossa P.

Jos joukossa A on vain yksi alkio x, eli $A = \{x\}$, niin $\uparrow A$ on osittain järjestetyn joukon P *pääyläjoukko* ja $\downarrow A$ on osittain järjestetyn joukon P *pääalajoukko*. Pääyläjoukkoa merkitään symbolilla $\uparrow x$ ja pääalajoukkoa symbolilla $\downarrow x$.

Määritelmä 2.13. Olkoon A osittain järjestetyn joukon P osajoukko.

Alkio $x \in P$ on joukon A *yläraja*, jos kaikilla $y \in A$ pätee, että $y \leq_P x$. Joukko

$$A^u = \{x \in P \mid y \leq_P x \text{ kaikilla } y \in A\} = \bigcap_{x \in A} \uparrow x$$

on joukon A kaikkien ylärajojen joukko. Alkiota $x \in A^u$ kutsutaan joukon A *pienimmäksi ylärajaksi* eli *supremumiksi*, jos $x \leq_P y$ kaikilla ylärajoilla $y \in A^u$. Jos joukon A supremum on olemassa, sitä merkitään symbolilla $\bigvee A$.

Alkio $x \in P$ on joukon A *alaraja*, jos kaikilla $y \in A$ pätee, että $x \leq_P y$. Joukko

$$A^\ell = \{x \in P \mid x \leq_P y \text{ kaikilla } y \in A\} = \bigcap_{x \in A} \downarrow x$$

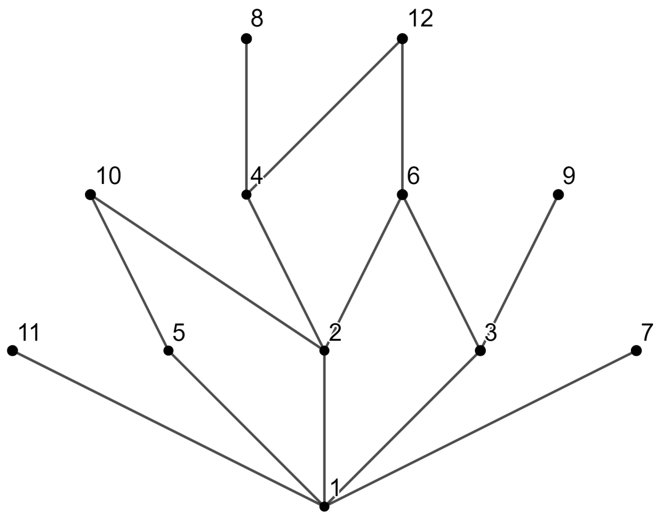
on joukon A kaikkien alarajojen joukko. Alkiota $x \in A^\ell$ kutsutaan joukon A *suurimmaksi alarajaksi* eli *infimumiksi*, jos $y \leq_P x$ kaikilla alarajoilla $y \in A^\ell$. Jos joukon A infimum on olemassa, sitä merkitään symbolilla $\bigwedge A$.

Jos joukossa A on vain yksi alkio x, niin $\uparrow x = \{x\}^u$ ja $\downarrow x = \{x\}^\ell$.

Esimerkki 2.3. Tarkastellaan esimerkissä 2.2 määriteltyä osittain järjestettyä joukkoa P ja sen osajoukkoa $A = \{2, 3\}$. Tällöin $\uparrow A = \{2, 3, 4, 5\}$ ja $\downarrow A = \{1, 2, 3\}$. Huomataan, että $\downarrow A = \downarrow \{3\}$, mutta $A^\ell = \{2\} \neq \{3\}^\ell$.

Kaikkien alarajojen joukossa A^ℓ on vain yksi alkio, joten $\bigwedge A = 2$. Lisäksi kaikkien ylärajojen joukossa $A^u = \{3, 5\}$ on pienin alkio, joten $\bigvee A = 3$.

Esimerkki 2.4. Positiiviset luonnolliset luvut $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja jaollisuusrelaatio $\leq_\mathbb{N}$ muodostavat äärettömän osittain järjestetyn joukon. Jaollisuusrelaatiossa $n \leq_\mathbb{N} m$, jos ja vain jos $n \mid m$. Tätä osittain järjestettyä joukkoa ja sen aliposeteja kutsutaan *jaollisuusposeteiksi* ja merkitään $\mathbb{N}_n = (\{1, 2, \ldots, n\}, |)$. Kuvassa 2.2 on esitetty Hassen diagrammi jaollisuusposetista $\mathbb{N}_{12}$.



Kuva 2.2. Jaollisuusposet $\mathbb{N}_{12}$.

Esimerkki 2.5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Luvun n jakavien lukujen joukko ja jaollisuusrelaatio muodostavat osittain järjestetyn joukon, jota kutsutaan *jakajaposetiksi* ja merkitään T_n. Jakajaposet T_n on jaollisuusposetin $\mathbb{N}_n$ aliposet. Kuvassa 2.3 on esitetty Hassen diagrammi jakajaposetista T_{12}.

Määritelmä 2.14. Olkoot P ja Q osittain järjestettyjä joukkoja, ja olkoon $\alpha : P \to Q$ funktio.

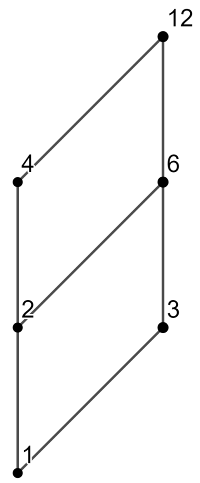
- Funktio α on *isotoninen kuvaus*, jos kaikilla $x, y \in P$ pätee, että

$$x \leq_P y \Rightarrow \alpha(x) \leq_Q \alpha(y).$$

  Isotonista kuvausta kutsutaan myös *monotoniseksi* ja *järjestyksen säilyttäväksi*.

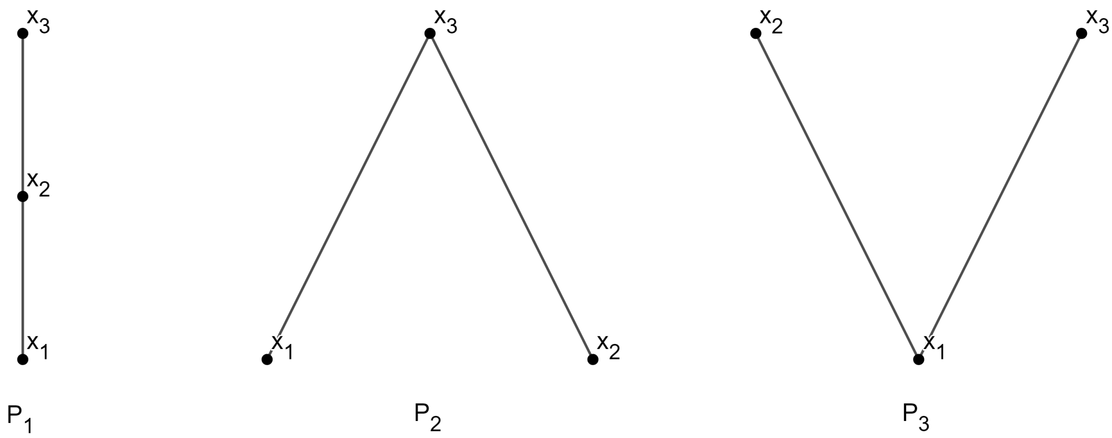
- Funktiota α sanotaan *järjestysupotukseksi*, jos se on isotoninen ja injektiivinen.

- Funktio α on *järjestysisomorfismi*, jos se on isotoninen bijektio ja myös sen käänteisfunktio $\alpha^{-1} : Q \to P$ on isotoninen. Jos osittain järjestettyjen joukkojen P ja Q välillä on järjestysisomorfismi, niin niiden sanotaan olevan *isomorfiset* ja merkitään $P \cong Q$.



Kuva 2.3. Jakajaposet T_{12}.

Esimerkki 2.6. Kolmesta alkiosta pystyy muodostamaan viisi erilaista osittain järjestettyä joukkoa, jotka eivät ole isomorfisia keskenään. Kuvassa 2.4 on esitetty kaikki kolmen alkion yhtenäiset osittain järjestetyt joukot P_1, P_2, ja P_3. Kuvassa 2.5 on esitetty kolmen alkion epäyhtenäiset osittain järjestetyt joukot P_4 ja P_5.

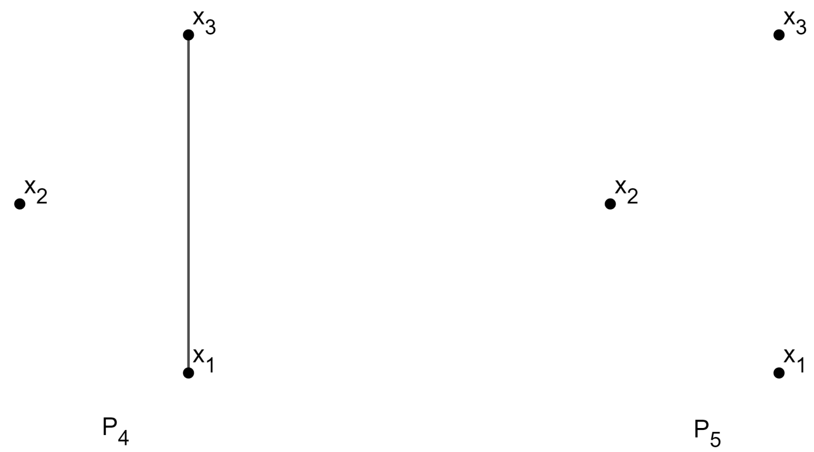


Kuva 2.4. Kolmen alkion yhtenäiset osittain järjestetyt joukot.

Lause 2.2. *Posetit P ja Q ovat isomorfiset, jos ja vain jos on olemassa sellainen surjektiivinen funktio $\alpha : P \to Q$, että kaikilla $x, y \in P$ pätee, että*

$$x \leq_P y \Leftrightarrow \alpha(x) \leq_Q \alpha(y). \tag{2.1}$$

Todistus (vrt. [2, s. 10]). Oletetaan, että funktio α on surjektiivinen ja toteuttaa ehdon (2.1). Tällöin α on bijektio joukolta P joukkoon Q, sillä jos $\alpha(x) = \alpha(y)$ eli



Kuva 2.5. Kolmen alkion epäyhtenäiset osittain järjestetyt joukot.

$\alpha(y) = \alpha(x)$, niin ehdon (2.1) perusteella $x \leq_P y$ ja $y \leq_P x$, joten $x = y$ ja funktio α on siis injektiivinen. Funktio α on isotoninen ja lisäksi sen käänteisfunktio $\alpha^{-1} : Q \to P$ on isotoninen, koska ehto (2.1) on ekvivalentti ehdon

$$\alpha^{-1}(u) \leq_P \alpha^{-1}(v) \Leftrightarrow u \leq_Q v$$

kanssa. Näin ollen funktio α on järjestysisomorfismi.

Oletetaan sitten, että funktio α on järjestysisomorfismi. Tällöin α ja sen käänteisfunktio α^{-1} ovat isotonisia ja näin ollen ehto (1.2) on voimassa. □

Esimerkki 2.7. Olkoot P, Q ja G osittain järjestettyjä joukkoja. Kuvassa 2.6 on esitetty bijektiivinen funktio $\alpha : P \to Q$. Huomataan, että kyseinen funktio on isotoninen, sillä kaikkien alkioiden järjestys säilyy joukolta P joukkoon Q. Funktion α käänteisfunktio $\alpha^{-1} : Q \to P$ ei ole isotoninen, sillä $\alpha(b) \leq_Q \alpha(c)$, mutta $b \nleq_P c$.

Kuvassa 2.7 on esitetty funktio $\beta : P \to G$, joka on järjestysisomorfismi. Tällöin osittain järjestetyt joukot P ja G ovat isomorfiset ja niiden Hassen diagrammit ovat samanlaiset.

Määritelmä 2.15. Olkoot P ja Q osittain järjestettyjä joukkoja. Määritellään niiden *suora tulo* $P \times Q$ karteesisena tulona $\{(x, y) \mid x \in P, y \in Q\}$. Suoran tulon $P \times Q$ osittainen järjestys $\leq_{P \times Q}$ määritellään seuraavasti:

$$(x_1, y_1) \leq_{P \times Q} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_P x_2 \text{ ja } y_1 \leq_Q y_2.$$

Esimerkki 2.8. Kuvassa 2.8 on esitetty osittain järjetyt joukot P ja Q sekä niiden suora tulo $P \times Q$ Hassen diagrammeina.

Määritelmä 2.16. Olkoon P osittain järjestetty joukko. Tällöin sen *duaali* P^d on osittain järjestetty joukko $(P, \leq_{P^d})$ ja järjestys $\leq_{P^d}$ määritellään seuraavasti:

$$x \leq_{P^d} \Leftrightarrow y \leq_P x.$$

Esimerkki 2.9. Kuvassa 2.9 on esitetty esimerkki osittain järjestetystä joukosta P ja sen duaalista P^d.

Kuva 2.6. Hassen diagrammi esimerkin 2.7 funktiosta α.

Kuva 2.7. Hassen diagrammi esimerkin 2.7 funktiosta β.

2.2 Ketjut

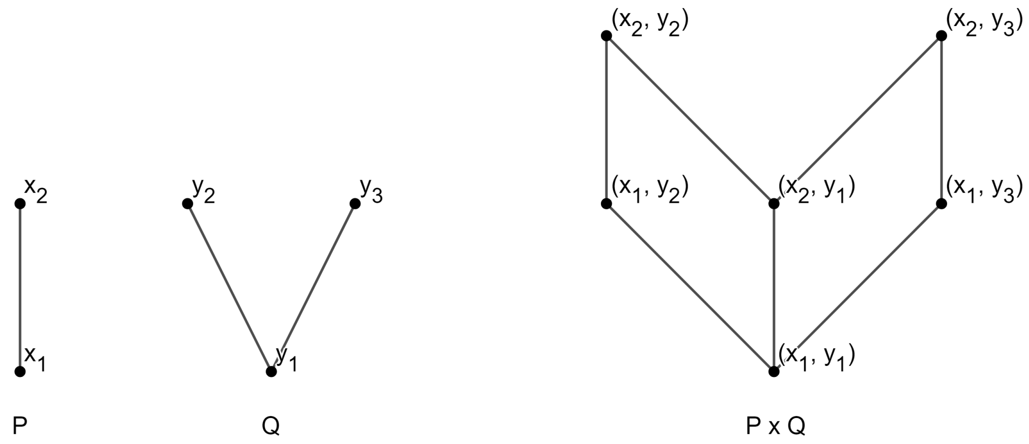
Määritelmä 2.17. Olkoon C osittain järjestetyn joukon P aliposet. Jos aliposetin C kaikki alkiot ovat vertailullisia, sitä kutsutaan *ketjuksi*. Toisin sanoen ketju on lineaarisesti järjestetty joukko. Ketju C on *maksimaalinen*, jos kaikilla $z \in P \setminus C$ pätee, että $C \cup \{z\}$ ei ole ketju.

Osittain järjestetyn joukon P aliposetia C kutsutaan *antiketjuksi*, jos se koostuu ainoastaan alkioista, jotka eivät ole vertailullisia. Antiketju C on *maksimaalinen*, jos kaikilla $x \in P$ pätee, että x on vertailullinen jonkin antiketjun C alkion kanssa.

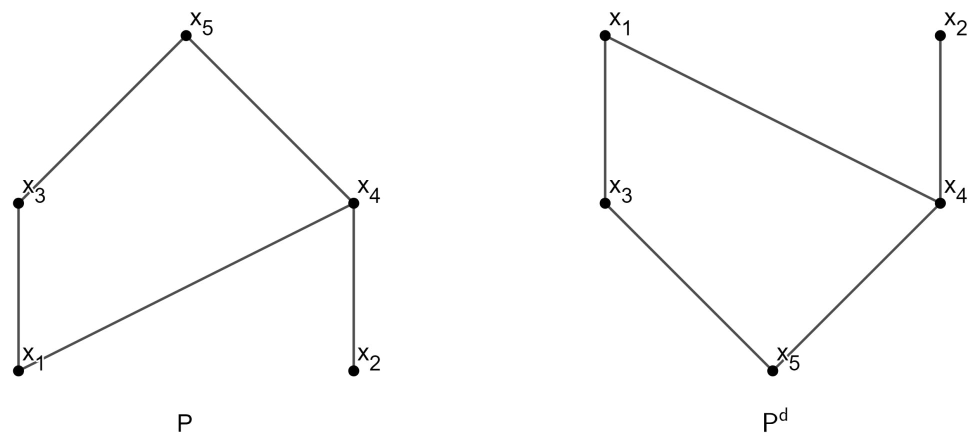
Esimerkki 2.10. Kuvassa 2.4 esitetty osittain järjestetty joukko P_1 on ketju.

Lause 2.3. *Olkoon P osittain järjestetty joukko. Tällöin seuraavat kohdat ovat keskenään ekvivalentteja:*

1. *(Zornin lemma). Jos osittain järjestetyn joukon P jokaisella ketjulla on yläraja, niin osittain järjestetyllä joukolla P on maksimaalinen alkio.*



Kuva 2.8. Osittain järjestetyt joukot P ja Q sekä niiden suora tulo $P \times Q$.



Kuva 2.9. Osittain järjetetty joukko P ja sen duaali P^d.

2. *Jos osittain järjestetyn joukon P jokaisella ketjulla on yläraja, niin jokaiselle alkiolle $p \in P$ on olemassa sellainen maksimaalinen alkio $q \in P$, että $q \geq p$.*

Todistus (vrt. [7, s. 9]). Olkoon $p \in P$. Oletetaan, että 2. kohta on voimassa ja osittain järjestetyn joukon P jokaisella ketjulla on yläraja. Tällöin osittain järjestetyllä joukolla P on maksimaalinen alkio, koska jokainen maksimaalinen alkio $q \in P$, jolla $q \geq p$, on osittain järjestetyn joukon P maksimaalinen alkio.

Oletetaan nyt, että 1. kohta on voimassa ja osittain järjestetyn joukon P jokaisella ketjulla on yläraja. Tällöin myös joukon P_u jokaisella ketjulla on yläraja ja 1. kohdan perusteella maksimaalinen alkio q, joka on myös osittain järjestetyn joukon P maksimaalinen alkio ja toteuttaa ehdon $q \geq p$. □

Määritelmä 2.18. Osittain järjestetyn joukon P sanotaan olevan *hyvinjärjestetty*, jos jokaisella epätyhjällä osajoukolla $X \subseteq P$ on pienin alkio. Tällöin järjestystä $\leq_P$

kutsutaan osittain järjestetyn joukon P *hyvinjärjestykseksi*.

Lause 2.4. *Jokainen hyvinjärjestetty osittain järjestetty joukko P on ketju.*

Todistus (vrt. [2, s. 15]). Olkoot $x, y \in P$ kaksi eri alkiota, jolloin osajoukolla x, y on pienin alkio. Näin ollen $x \leq_P y$ tai $y \leq_P x$, eli osittain järjestetty joukko P on ketju. □

Määritelmä 2.19. Olkoon P äärellinen osittain järjestetty joukko.

1. Osittain järjestetyn joukon P *korkeus* on sen pisimmän ketjun alkioiden lukumäärä. Korkeutta merkitään symbolilla $h(P)$.

2. Osittain järjestetyn joukon P *leveys* on sen pisimmän antiketjun alkioiden lukumäärä. Leveyttä merkitään symbolilla $w(P)$.

Lause 2.5. *Äärellinen osittain järjestetty joukko P jakautuu yhtä moneen antiketjuun kuin sen korkeus* $h(P)$.

Todistus (vrt. [2, s. 22]). Suoritetaan induktiotodistus korkeuden $h(P)$ suhteen. Tapaus $h(P) = 1$ on selvä, koska tällöin P koostuu ainoastaan alkoista, jotka eivät ole vertailullisia.

Oletetaan sitten, että väite on voimassa osittain järjestetyille joukoille, joiden korkeus on pienempi kuin osittain järjestetyn joukon P korkeus. Olkoon M osittain järjestetyn joukon P maksimaalisten alkioiden joukko. Tällöin M muodostaa antiketjun ja jokainen maksimaalinen ketju sisältää alkion joukosta M. Näin ollen osittain järjestetyn joukon $P \setminus M$ korkeus on $h(P) - 1$. Induktio-oletuksen nojalla joukko $P \setminus M$ jakautuu yhtä moneen antiketjuun kuin sen korkeus $h(P) - 1$. Näin ollen osittain järjestetty joukko P, joka sisältää joukon M, jakautuu yhtä moneen antiketjuun kuin sen korkeus $h(P)$. □

2.3 Möbiuksen funktio

Määritelmä 2.20. Olkoon P paikallisesti äärellinen osittain järjestetty joukko. *Insidenssifunktioiden joukko* $I(P)$ on kaikkien reaaliarvoisten funktioiden joukko, joilla $f(x, y) = 0$, jos $x \notin \downarrow y$. Eli

$$I(P) = \{f : P \times P \to \mathbb{R} \mid f(x, y) = 0, \text{ jos } x \not\leq_P y\}.$$

Määritellään summa ja skalaaritulo joukossa $I(P)$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}(f + g)(x, y) &= f(x, y) + f(x, y),\\ (cf)(x, y) &= c \cdot f(x, y), c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Määritelmä 2.21. Funktioiden $f, g \in I(P)$ *konvoluutio* määritellään seuraavasti:

$$(f * g)(x, y) = \begin{cases} \sum_{z \in [x,y]_P} f(x, z)g(z, y) & \text{jos } x \leq_P y,\\ 0 & \text{jos } x \not\leq_P y.\end{cases}$$

Lause 2.6. *Olkoon P paikallisesti äärellinen osittain järjestetty joukko. Konvoluutio on assosiatiivinen joukossa $I(P)$ eli*

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Todistus (vrt. [2, s. 26]). Olkoot f, g, ja h funktioita joukossa $I(P)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x, y) &= \sum_{z \in [x,y]_P} (f * g)(x, z) h(z, y) \\
&= \sum_{z \in [x,y]_P} \Big(\sum_{t \in [x,z]_P} f(x, t) g(t, z) \Big) h(z, y) \\
&= \sum_{t \in [x,y]_P} f(x, t) \Big(\sum_{z \in [t,y]_P} g(t, z) h(z, y) \Big) \\
&= \sum_{t \in [x,y]_P} f(x, t)(g * h)(t, y) \\
&= (f * (g * h))(x, y).
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 2.22. Joukko $I(P)$ ja operaatiot $+, \cdot$ ja $*$ muodostavat paikallisesti äärellisen osittain järjestetyn joukon P *insidenssialgebran*.

Määritelmä 2.23. Olkoon P paikallisesti äärellinen osittain järjestetty joukko. Osittain järjestetyn joukon *deltafunktio* on funktio δ, joka määritellään seuraavasti:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x = y, \\ 0 & \text{jos } x \neq y. \end{cases}$$

Funtio δ on insidenssialgebran $I(P)$ *identiteetti*, eli kaikilla $f \in I(P)$ pätee, että

$$f * \delta = f = \delta * f.$$

Funktiolla $f \in I(P)$ on käänteisfunktio $f^{-1} \in I(P)$, jos

$$f * f^{-1} = \delta = f^{-1} * f.$$

Määritelmä 2.24. Olkoon P paikallisesti äärellinen osittain järjestetty joukko. Osittain järjestetyn joukon karakteristinen funktio on *zeeta-funktio* ζ, joka määritellään seuraavasti:

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \leq_P y, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritelmä 2.25. Olkoon P paikallisesti äärellinen osittain järjestetty joukko. Osittain määritellyn joukon P *Möbiuksen funktio* μ määritellään seuraavasti:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x = y, \\ -\sum_{x \leq_P z <_P y} \mu(x, z) = -\sum_{x < z \leq_P y} \mu(z, y) & \text{jos } x <_P y, \\ 0 & \text{jos } x \nleq_P y. \end{cases}$$

Lause 2.7. *Paikallisesti äärellisen osittain järjestetyn joukon P Möbiuksen funktion μ käänteisfunktio on zeta-funktio ζ.*

Todistus (vrt. [2, s. 27]).

1. Oletetaan, että $x \not\leq_P y$. Tällöin konvoluution määritelmän perusteella
$$(\mu * \zeta)(x, y) = 0 = (\zeta * \mu)(x, y).$$

2. Oletetaan, että $x = y$. Tällöin
$$(\mu * \zeta)(x, x) = \sum_{z \in [x,x]_P} \mu(x, z)\zeta(z, x) = \mu(x, x)\zeta(x, x) = 1 \cdot 1 = 1$$
ja vastaavasti
$$(\zeta * \mu)(x, x) = \sum_{z \in [x,x]_P} \zeta(x, z)\mu(z, x) = \zeta(x, x)\mu(x, x) = 1 \cdot 1 = 1.$$

3. Oletetaan, että $x <_P y$. Tällöin
$$\begin{aligned}
(\mu * \zeta)(x, y) &= \sum_{z \in [x,y]_P} \mu(x, z)\zeta(z, y) \\
&= \sum_{z \in [x,y]_P} \mu(x, z) \cdot 1 \\
&= \sum_{z \in [x,y]_P} \mu(x, z) \\
&= \sum_{x \leq_P z <_P y} \mu(x, z) + \mu(x, y) \\
&= \sum_{x \leq_P z <_P y} \mu(x, z) - \sum_{x \leq_P z <_P y} \mu(x, z) \\
&= 0
\end{aligned}$$
ja vastaavasti
$$\begin{aligned}
(\zeta * \mu)(x, y) &= \sum_{z \in [x,y]_P} \zeta(x, z)\mu(z, y) \\
&= \sum_{z \in [x,y]_P} 1 \cdot \mu(z, y) \\
&= \sum_{z \in [x,y]_P} \mu(z, y) \\
&= \mu(x, y) + \sum_{x <_P z \leq_P y} \mu(z, y) \\
&= -\sum_{x < z \leq_P y} \mu(z, y) + \sum_{x <_P z \leq_P y} \mu(z, y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\mu * \zeta = \delta = \zeta * \mu$ kaikilla $x, y \in P$ eli funktio μ on funktion ζ käänteisfunktio. □

Esimerkki 2.11. Tarkastellaan ketjua $P = (\mathbb{N}, \leq)$. Tällöin kaikilla k ja $n \in P$ pätee, että

$$\mu(k,n) = \begin{cases} 1 & \text{jos } k = n, \\ -1 & \text{jos } k+1 = n, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Todistus (vrt. [2, s. 28]). Oletetaan, että $k < n$. Jos $k < n - 1$, niin

$$\mu(k,n) = -\sum_{i=k}^{n-1} \mu(k,i) = 0$$

Jos $k = n - 1$, niin

$$\begin{aligned} \mu(n-1,n) &= -\sum_{i=n-1}^{n-1} \mu(n-1,i) \\ &= -\mu(n-1,n-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

□

Lause 2.8. *(Möbius inversion formula) Olkoon P paikallisesti äärellinen osittain järjestetty joukko, jolla on pienin alkio 0_P, ja olkoot $f, g : P \to \mathbb{R}$ funktioita. Tällöin*

$$g(x) = \sum_{z \in [0_P, x]_P} f(z),$$

jos ja vain jos

$$f(x) = \sum_{z \in [0_P, x]_P} g(z)\mu(z,x).$$

Todistus (vrt. [2, s. 28]). Olkoon $g(x) = \sum_{z \in [0_P, x]_P} f(z)$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{t \in [0_P, x]_P} f(t)\delta(t,x) \\ &= \sum_{t \in [0_P, x]_P} f(t)(\zeta * \mu)(t,x) \\ &= \sum_{t \in [0_P, x]_P} \Big(f(t) \sum_{z \in [t,x]_P} \zeta(t,z)\mu(z,x) \Big) \\ &= \sum_{t \in [0_P, x]_P} \sum_{z \in [t,x]_P} f(t)\zeta(t,z)\mu(z,x) \\ &= \sum_{z \in [0_P, x]_P} \Big(\sum_{t \in [0_P, z]_P} f(t)\zeta(t,z) \Big) \mu(z,x) \\ &= \sum_{z \in [0_P, x]_P} \Big(\sum_{t \in [0_P, z]_P} f(t) \Big) \mu(z,x) \\ &= \sum_{z \in [0_P, x]_P} g(z)\mu(z,x). \end{aligned}$$

□

Lause 2.9. *(Dual möbius inversion formula) Olkoon P paikallisesti äärellinen osittain järjestetty joukko, jolla on suurin alkio 1_P, ja olkoot $f, g : P \to \mathbb{R}$ funktioita. Tällöin*

$$g(x) = \sum_{z \in [x, 1_P]_P} f(z),$$

jos ja vain jos

$$f(x) = \sum_{z \in [x, 1_P]_P} \mu(x, z) g(z).$$

Todistus. Olkoon $g(x) = \sum_{z \in [x, 1_P]_P} f(z)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{t \in [x, 1_P]_P} \delta(x, t) f(t) \\
&= \sum_{t \in [x, 1_P]_P} (\mu * \zeta)(x, t) f(t) \\
&= \sum_{t \in [x, 1_P]_P} \Big(\sum_{z \in [x, t]_P} \mu(x, z) \zeta(z, t) \Big) f(t) \\
&= \sum_{t \in [x, 1_P]_P} \sum_{z \in [x, t]_P} \mu(x, z) \zeta(z, t) f(t) \\
&= \sum_{z \in [x, 1_P]_P} \Big(\mu(x, z) \sum_{t \in [z, 1_P]_P} \zeta(z, t) f(t) \Big) \\
&= \sum_{z \in [x, 1_P]_P} \Big(\mu(x, z) \sum_{t \in [z, 1_P]_P} f(t) \Big) \\
&= \sum_{z \in [x, 1_P]_P} \mu(x, z) g(z).
\end{aligned}$$

□

3 Hilat

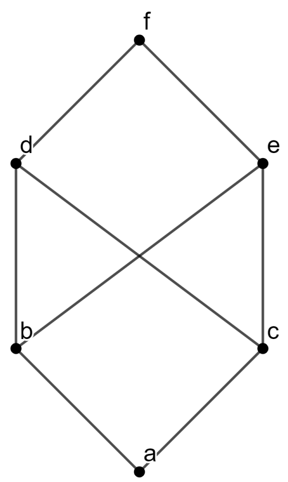
3.1 Määritelmä

Tässä tutkielman luvussa tarkastellaan hiloja ja pyritään havainnollistamaan niitä erilaisten esimerkkien avulla. Hilan määritelmien lisäksi esitetään tutkielman kannalta olennaisimpia hilan ominaisuuksia. Luvun sisältö perustuu erityisesti Tero Harjun luentomonisteeseen *Ordered Sets* [2], Steven Romanin kirjaan *Lattices and Ordered sets* [7] sekä Garret Birkhoffin kirjaan *Lattice Theory* [1].

Määritelmä 3.1. Osittain järjestetty joukko on *hila*, jos jokaisella kahden alkion osajoukolla $\{x, y\}$ on pienin yläraja ja suurin alaraja. Osajoukon $\{x, y\}$ pienintä ylärajaa merkitään symbolilla $x \vee y$ ja kutsutaan *supremumiksi*. Osajoukon $\{x, y\}$ suurinta alarajaa merkitään symbolilla $x \wedge y$ ja kutsutaan *infimumiksi*.

Hila voidaan määritellä myös algebrallisesti. *Hila* on epätyhjä joukko, jonka operaatiot $\wedge$ ja $\vee$ toteuttavat lauseen 3.2 ehdot.

Esimerkki 3.1. Kuvassa 3.1 on esitetty osittain järjestetty joukko P. Tarkastellaan sen osajoukkoa $\{b, c\}$. Huomataan, että osajoukon $\{b, c\}$ ylärajojen joukolla $\{d, e, f\}$ ei ole pienintä alkiota. Näin ollen osajoukolla $\{b, c\}$ ei ole supremumia, joten osittain järjestetty joukko P ei ole hila.



Kuva 3.1. Osittain järjestetty joukko, joka ei ole hila.

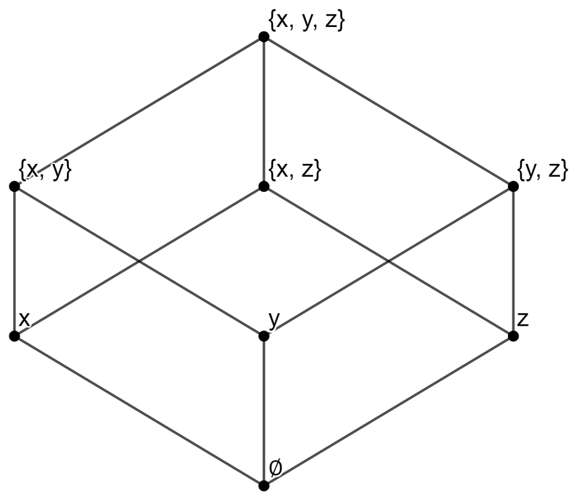
Esimerkki 3.2. Olkoon osittain järjestetty joukko L ketju. Tällöin L on hila, jossa $x \vee y = \max\{x, y\}$ ja $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

Esimerkki 3.3. Olkoon X epätyhjä joukko. Tällöin sen potenssijoukko $P(X)$ ja osajoukkorelaatio $\subseteq$ muodostavat hilan. Jos joukot A ja B ovat potenssijoukon $P(X)$

alkioita, niin osajoukon $\{A, B\}$ supremum on yhdiste $A \cup B$. Yhdiste $A \cup B$ on joukkojen A ja B yläraja, koska $A \subseteq A \cup B$ ja $B \subseteq A \cup B$. Jos joukko $C \in P(X)$ on joukko, joka sisältää joukot A ja B, niin joukko C sisältää myös yhdisteen $A \cup B$. Näin ollen $A \cup B$ on osajoukon $\{A, B\}$ supremum.

Vastaavasti osajoukon $\{A, B\}$ infimum on leikkaus $A \cap B$. Leikkaus $A \cap B$ on joukkojen A ja B alaraja, koska $A \cap B \subseteq A$ ja $A \cap B \subseteq B$. Jos joukko $D \in P(X)$ on joukko, joka sisältyy joukkoihin A ja B, niin joukko D sisältyy myös leikkaukseen $A \cap B$. Näin ollen $A \cap B$ on osajoukon $\{A, B\}$ infimum.

Kuvassa 3.2 on esitetty joukon $X = \{x, y, z\}$ potenssijoukko $P(X)$.



Kuva 3.2. Joukon $X = \{x, y, z\}$ potenssijoukko $P(X)$.

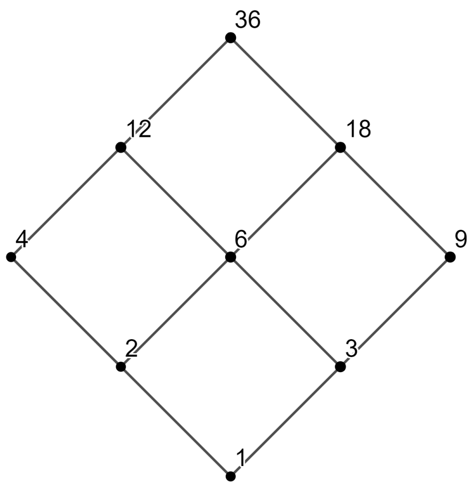
Esimerkki 3.4. Jaollisuusposet $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ on hila, jossa $x \vee y$ on pienin yhteinen monikerta ja $x \wedge y$ on suurin yhteinen tekijä. Kuvassa 2.2 esitetty jaollisuusposet $\mathbb{N}_{12}$ ei ole hila, sillä esimerkiksi osajoukolla $\{8, 12\}$ ei ole supremumia.

Määritelmä 3.2. Olkoon L hila ja A sen epätyhjä osajoukko. Jos kaikilla $x, y \in A$ pätee, että $x \vee y \in A$ ja $x \wedge y \in A$, niin osajoukko A on hilan L *alihila*.

Esimerkki 3.5. Jakajaposet T_n on hila, jossa $x \vee y$ on pienin yhteinen monikerta ja $x \wedge y$ on suurin yhteinen tekijä. Kuvassa 3.3 on esitetty hila T_{36}. Osajoukko $A = \{2, 4, 18, 36\}$ on hilan L alihila. Osajoukko $B = \{2, 3, 12, 18\}$ ei ole alihila, sillä esimerkiksi $2 \wedge 3 \notin B$ tai $12 \vee 18 \notin B$.

3.2 Hilan ominaisuuksia

Lause 3.1. *Olkoon L hila. Tällöin kaikilla $x, y \in L$ pätee, että*



Kuva 3.3. Jakajaposet T_{36}.

1. *$x \vee y = y$, jos ja vain jos $x \leq_L y$,*

2. *$x \wedge y = x$, jos ja vain jos $x \leq_L y$,*

3. *$x \wedge y = x$, jos ja vain jos $x \vee y = y$.*

Todistus (vrt. [5, s. 251]).

1. Oletetaan ensin, että $x \vee y = y$. Tällöin $x \leq_L x \vee y = y$, eli $x \leq_L y$.

   Oletetaan sitten, että $x \leq_L y$. Tällöin y on joukon $\{x, y\}$ yläraja ja supremumin määritelmän perusteella $x \vee y \leq_L y$. Toisaalta $x \vee y$ on joukon $\{x, y\}$ yläraja, joten $y \leq_L x \vee y$. Näin ollen järjestysrelaation antisymmetrisyyden nojalla $x \vee y = y$.

2. Oletetaan, että $x \wedge y = x$. Tällöin $x = x \wedge y \leq_L y$, eli $x \leq_L y$.

   Oletetaan sitten, että $x \leq_L y$. Tällön x joukon $\{x, y\}$ alaraja ja infimumin määritelmän perusteella $x \leq_L x \wedge y$. Toisaalta $x \wedge y$ on joukon $\{x, y\}$ alaraja, joten $x \wedge y \leq_L x$. Näin ollen $x \wedge y = x$.

3. Todistus seuraa kohdista 1. ja 2.

□

Lause 3.2. *Olkoon L hila. Tällöin kaikilla $x, y, z \in L$ pätee, että*

1. *(Idempotenttisuus)*

   (a) *$x \vee x = x$,*

   (b) *$x \wedge x = x$,*

2. *(Kommutatiivisuus)*

(a) $x \vee y = y \vee x$,

(b) $x \wedge y = y \wedge x$,

3. *(Assosiatiivisuus)*

(a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

4. *(Absorptio-ominaisuus)*

(a) $x \vee (x \wedge y) = x$,

(b) $x \wedge (x \vee y) = x$.

Todistus (vrt. [4, s. 241]). 1. Alkoiden x ja x supremum on joukon $\{x\}$ pienin yläraja. Näin ollen $x \vee x = x$. Vastaavasti alkioiden x ja x infimum on joukon $\{x\}$ suurin alaraja, joten $x \wedge x = x$.

2. Määritelmän mukaan $x \vee y$ on joukon $\{x, y\}$ pienin yläraja ja $y \vee x$ on joukon $\{y, x\}$ pienin yläraja. Joukko $\{y, x\}$ on sama kuin joukko $\{x, y\}$, joten $x \vee y = y \vee x$.

   Vastaavasti $x \wedge y$ on joukon $\{x, y\}$ suurin alaraja ja $y \wedge x$ on joukon $\{y, x\}$ suurin alaraja, joten $x \wedge y = y \wedge x$.

3. Osoitetaan ensin, että $x \vee (y \vee z)$ on joukon $\{x, y, z\}$ pienin yläraja. Olkoon $r = y \vee z$. Tällöin
$$x \leq_L x \vee r = x \vee (y \vee z).$$
   Lisäksi
$$y \leq_L y \vee z = r \leq_L x \vee r = x \vee (y \vee z)$$
   ja
$$z \leq_L y \vee z = r \leq_L x \vee r = x \vee (y \vee z),$$
   joten $x \vee (y \vee z)$ on joukon $\{x, y, z\}$ yläraja. Olkoon s jokin toinen joukon $\{x, y, z\}$ yläraja. Tällöin ylärajan määritelmän mukaan $y \leq_L s$ ja $z \leq_L s$, jolloin s on myös joukon $\{y, z\}$ yläraja. Koska $r = y \vee z$ on joukon $\{y, z\}$ pienin yläraja, niin
$$r \leq_L s.$$
   Lisäksi $x \leq_L s$, joten s on myös joukon $\{x, r\}$ yläraja. Koska $x \vee r$ on joukon $\{x, r\}$ pienin yläraja, niin
$$x \vee (y \vee z) = x \vee r \leq_L s,$$
   eli $x \vee (y \vee z)$ on joukon $\{x, y, z\}$ pienin yläraja.

   Osoitetaan seuraavaksi vastaavalla tavalla, että $(x \vee y) \vee z$ on myös joukon $\{x, y, z\}$ pienin yläraja. Olkoon $d = x \vee y$. Tällöin
$$z \leq_L d \vee z = (x \vee y) \vee z.$$

Lisäksi

$$x \leq_L x \vee y = d \leq_L d \vee z = (x \vee y) \vee z$$

ja

$$y \leq_L x \vee y = d \leq_L d \vee z = (x \vee y) \vee z,$$

joten $(x \vee y) \vee z$ on joukon $\{x, y, z\}$ yläraja. Olkoon h jokin toinen joukon $\{x, y, z\}$ yläraja. Tällöin ylärajan määritelmän mukaan $x \leq_L h$ ja $y \leq_L h$, jolloin h on myös joukon $\{x, y\}$ yläraja. Koska $d = x \vee y$ on joukon $\{x, y\}$ pienin yläraja, niin

$$d \leq_L h.$$

Lisäksi $z \leq_L h$, joten h on myös joukon $\{d, z\}$ yläraja. Koska $d \vee z$ on joukon $\{d, z\}$ pienin yläraja, niin

$$(x \vee y) \vee z = d \vee z \leq_L h.$$

Näin ollen $(x \vee y) \vee z$ on myös joukon $\{x, y, z\}$ pienin yläraja, eli $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. Vastaavasti voidaan todistaa, että $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

4. Olkoon $d = x \wedge y$. Tällöin $x \leq_L x \vee d$. Toisaalta $d = x \wedge y \leq_L x$, joten $x \vee d \leq_L x$. Näin ollen $x \vee (x \wedge y) = x$. Vastaavasti voidaan todistaa, että $x \wedge (x \vee y) = x$.

□

Lause 3.3. *Olkoon L hila, jolla pienin alkio 0_L ja suurin alkio 1_L. Tällöin kaikilla $x \in L$ pätee, että*

1. (a) $x \vee 1_L = 1_L$,

   (b) $x \wedge 1_L = x$,

2. (a) $x \wedge 0_L = 0_L$,

   (b) $x \vee 0_L = x$.

Todistus. Todistetaan väitteet käyttämällä lausetta 3.1.

1. Koska $x \leq_L 1_L$, niin $x \vee 1_L = 1_L$ ja $x \wedge 1_L = x$.

2. Koska $0_L \leq_L x$, niin $x \wedge 0_L = 0_L$ ja $x \vee 0_L = x$.

□

Lause 3.4. *Olkoon L hila, ja olkoot $x, y, z \in L$. Jos $y \leq_L z$, niin*

1. $x \wedge y \leq_L x \wedge z$,

2. $x \vee y \leq_L x \vee z$.

Todistus (vrt. [1, s. 9]). Oletetaan, että $y \leq_L z$. Tällöin

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (x \wedge x) \wedge (y \wedge z) \\ &= ((x \wedge x) \wedge y) \wedge z \\ &= ((x \wedge y)) \wedge x) \wedge z \\ &= (x \wedge y) \wedge (x \wedge z), \end{aligned}$$

josta saadaan $x \wedge y \leq_L x \wedge z$. Vastaavasti

$$\begin{aligned} x \vee z &= (x \vee x) \vee (y \vee z) \\ &= ((x \vee x) \vee y) \vee z \\ &= ((x \vee y) \vee x) \vee z \\ &= (x \vee y) \vee (x \vee z), \end{aligned}$$

josta saadaan $x \vee y \leq_L x \vee z$. □

Lause 3.5. *Olkoon L hila. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y, z \in L$ on seuraavat ominaisuudet:*

1. *$x \leq_L z$ ja $y \leq_L z$, jos ja vain jos $x \vee y \leq_L z$.*
2. *$z \leq_L x$ ja $z \leq_L y$, jos ja vain jos $z \leq_L x \wedge y$.*

Todistus. Todistetaan väitteet käyttämällä lausetta 3.4. Oletetaan, että $x \leq_L z$ ja $y \leq_L z$. Tällöin

$$x \vee y \leq_L x \vee z = z.$$

Oletetaan sitten, että $z \leq_L x$ ja $z \leq_L y$. Tällöin

$$z = z \wedge y \leq_L x \wedge y.$$

□

Lause 3.6. *Olkoon L hila, ja olkoot $x, y, z \in L$. Jos $x \leq_L z$, niin*

$$x \vee (y \wedge z) \leq_L (x \vee y) \wedge z.$$

Todistus (vrt. [1, s. 9]). Oletetaan, että $x \leq_L z$. Lisäksi $x \leq_L x \vee y$, joten

$$x \leq_L (x \vee y) \wedge z.$$

Vastaavasti $y \wedge z \leq_L y \leq_L x \vee y$ ja $y \wedge z \leq_L z$, joten

$$y \wedge z \leq_L (x \vee y) \wedge z.$$

Näin ollen $x \vee (y \wedge z) \leq_L (x \vee y) \wedge z$. □

Lause 3.7. *Olkoon L hila. Tällöin kaikilla $x, y, z \in L$ pätee, että*

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq_L x \wedge (y \vee z).$$

Todistus (vrt. [1, s. 9]). Koska $x \wedge y \leq_L x$ ja $x \wedge y \leq_L y \leq_L y \vee z$, niin

$$x \wedge y \leq_L x \wedge (y \vee z).$$

Vastaavasti koska $x \wedge z \leq_L x$ ja $x \wedge z \leq_L z \leq_L y \vee z$, niin

$$x \wedge z \leq_L x \wedge (y \vee z).$$

Näin ollen $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq_L x \wedge (y \vee z)$. □

Määritelmä 3.3. Olkoon L hila. Hilan L epätyhjä osajoukko I on *ideaali*, jos kaikilla $x, y \in I$ pätee, että

1. $x \in I,\ y \leq_L x \Rightarrow y \in I$, eli $\downarrow x \subseteq I$
2. $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$.

Ideaali I on *aito ideaali*, jos $I \neq L$. Kaikkien ideaalien joukkoa hilassa L merkitään symbolilla $I(L)$.

Esimerkki 3.6. Olkoon L hila ja $x \in L$. Tällöin pääalajoukko

$$\downarrow x = \{y \in L \mid y \leq_L x\}$$

on hilan L ideaali.

Tarkastellaan kahden hilan L ideaalin I ja J leikkausta. Olkoon $i \in I$ ja $j \in J$. Leikkaus $I \cap J$ ei ole tyhjä joukko, sillä $i \in I$ ja $j \in J$, joten $i \wedge j \in I \cap J$. Tällöin leikkaus $I \cap J$ on hilan L ideaali. Ideaalien leikkausta tarvitaan joukon $I(L)$ kahden alkion osajoukon suurimman alarajan määrittelemiseen.

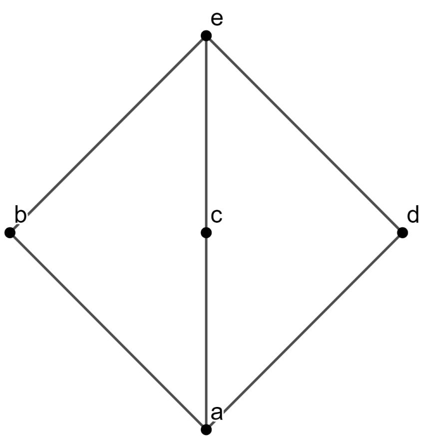
Määritelmä 3.4. Olkoot $I, J \in I(L)$. Joukko $I(L)$ on hila, jossa infimum on leikkaus ja supremum on määritelty seuraavasti:

$$I \vee J = \{x \in L \mid x \leq_L i \vee j \text{ joillakin } i \in I, j \in J\}.$$

Määritelmä 3.5. Olkoon L hila.

1. Hilan L aito ideaali M on *maksimaalinen ideaali*, jos kaikilla ideaaleilla I pätee, että
$$M \subseteq I \subseteq L \Rightarrow I = M \text{ tai } I = L.$$
2. Hilan L aito ideaali I on *alkuideaali*, jos kaikilla $x, y \in I$ pätee, että
$$x \wedge y \in I \Rightarrow x \in I \text{ tai } y \in I.$$

Esimerkki 3.7. Kuvassa 3.4 esitetyn hilan ideaalit $I_1 = \{a, b\}, I_2 = \{a, c\}$ ja $I_3 = \{a, d\}$ ovat maksimaalisia, mutta eivät jaottomia. Esimerkiksi ideaali I_2 ei ole jaoton, koska $b \wedge d \in I_2$, mutta $b, d \notin I_2$.



Kuva 3.4. Esimerkki hilasta, jonka maksimaaliset ideaalit eivät ole jaottomia.

4 Hilaluokkia

Tässä tutkielman luvussa määritellään modulaarinen hila, distributiivinen hila ja komplementoitu hila, sekä tarkastellaan näiden ominaisuuksia. Lopuksi tutustutaan lyhyesti Boolen hilaan eli hilaan, joka distributiivinen ja komplementoitu. Luvun sisältö perustuu erityisesti Tero Harjun luentomonisteeseen *Ordered Sets* [2] sekä Steven Romanin kirjaan *Lattices and Ordered sets* [7].

4.1 Modulaarinen ja distributiivinen hila

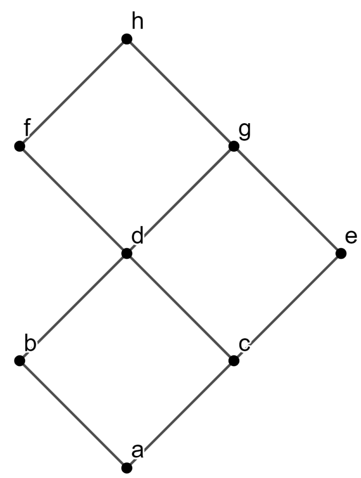
Määritelmä 4.1. Hilaa L kutsutaan *modulaariseksi hilaksi*, jos se täyttää *modulaarisuuslain*: Kaikilla $x, y, z \in L$ pätee, että

$$x \leq_L z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Määritelmä 4.2. Hilaa L kutsutaan *distributiiviseksi hilaksi*, jos se täyttää *distributiivisuuslait*: Kaikilla $x, y, z \in L$ pätee, että

1. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
2. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Esimerkki 4.1. Kuvassa 4.1 esitetty hila on distributiivinen ja modulaarinen.



Kuva 4.1. Esimerkki hilasta, joka on distributiivinen ja modulaarinen.

Lause 4.1. *Jos toinen distributiivisuuslaki on voimassa kaikilla hilan L alkioilla, niin myös toinen distributiivisuuslaki on voimassa.*

Todistus (vrt. [4, s. 243]). Oletetaan, että ensimmäinen distributiivisuuslaki on voimassa. Tällöin

$$\begin{aligned}
x \vee (y \wedge z) &= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \\
&= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\
&= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) \\
&= x \vee (z \wedge (x \vee y)) \\
&= x \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&= (x \vee y) \wedge (x \vee z).
\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että toinen distributiivisuuslaki on voimassa. Tällöin

$$\begin{aligned}
x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge (x \vee z)) \wedge (y \vee z) \\
&= x \wedge ((x \vee z) \wedge (y \vee z)) \\
&= x \wedge ((z \vee x) \wedge (z \vee y)) \\
&= x \wedge (z \vee (x \wedge y)) \\
&= x \wedge ((x \wedge y) \vee z) \\
&= ((x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z) \\
&= (x \wedge y) \vee (x \wedge z).
\end{aligned}$$

□

Lause 4.2. *Jokainen distributiivinen hila on modulaarinen hila.*

Todistus (vrt. [6, s. 36]). Olkoon L distributiivinen hila, ja olkoot $x, y, z \in L$. Oletetaan, että $x \leq_L z$. Tällöin

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Näin ollen hila L on modulaarinen. □

Modulaarisuudesta ei seuraa distributiivisuutta. Seuraaavassa esimerkissä nähdään, että jos hila on modulaarinen, se ei välttämättä ole distributiivinen.

Esimerkki 4.2. Kuvassa 4.2 on esitetty hila N_5, jota kutsutaan *viisikulmioksi* eli *pentagoniksi*, ja hila M_3, jota kutsutaan *timantiksi*. Viisikulmio N_5 ei ole distributiivinen, sillä

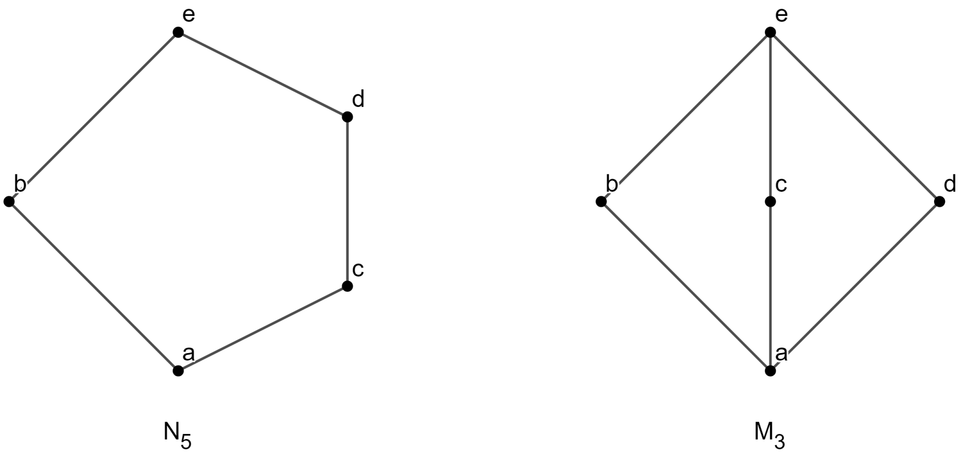
$$d \wedge (b \vee c) = d \neq c = (d \wedge b) \vee (d \wedge c).$$

Viisikulmio N_5 ei ole myöskään modulaarinen, sillä $c \leq_L d$, mutta

$$c \vee (b \wedge d) = c \neq d = (c \vee b) \wedge d.$$

Timantti M_3 on modulaarinen, mutta se ei ole distributiivinen, sillä

$$b \wedge (c \vee d) = b \neq a = (b \wedge c) \vee (b \wedge d).$$



Kuva 4.2. Viisikulmio N_5 ja timantti M_3.

Lause 4.3. *Hila L on modulaarinen, jos ja vain jos siinä ei ole alihilana viisikulmiota* N_5.

Todistus (vrt. [2, s. 52]). Oletetaan, että hilassa L on alihilana viisikulmio N_5. Koska viisikulmio N_5 ei täytä modulaarisuuslakia ja hila L sisältää samat alkiot, niin myöskään hila L ei täytä modulaarisuulakia.

Oletetaan sitten, että hila L ei ole modulaarinen. Olkoot $x, y, x \in L$ ja $x \leq z$. Tällöin lauseen 3.6 perusteella

$$x \vee (y \wedge z) <_L (x \vee y) \wedge z.$$

Merkitään

$$\begin{aligned} m &= x \vee (y \wedge z), \\ n &= (x \vee y) \wedge z. \end{aligned}$$

Tällöin oletuksen perusteella $m <_L n$. Näin ollen

$$\begin{aligned} y \vee m &= y \vee (x \vee (y \wedge z)) \\ &= y \vee ((y \wedge z) \vee x) \\ &= (y \vee (y \wedge z)) \vee x \\ &= y \vee x \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} y \wedge n &= y \wedge ((x \vee y) \wedge z) \\ &= (y \wedge (x \vee y) \wedge z) \\ &= y \wedge z. \end{aligned}$$

Koska $y \vee x \geq_L z \wedge (y \vee x) = n$, niin

$$y \vee x \geq_L y \vee n \geq_L y \vee m = y \vee x,$$

ja tällöin $y \vee x = y \vee n = y \vee m$.

Vastaavasti koska $y \wedge z \leq_L x \vee (y \wedge z) = m$, niin

$$y \wedge z \leq_L y \wedge m \leq_L y \wedge n = y \wedge z,$$

ja tällöin $y \wedge z = y \wedge m = y \wedge n$.

Näin ollen hilassa L on alihilana viisikulmio N_5. Alihilana oleva viisikulmio N_5 on esitetty kuvassa 4.3. □

Lause 4.4. *Hila L on distributiivinen, jos ja vain jos siinä ei ole alihilana timanttia M_3 tai viisikulmiota N_5.*

Todistus (vrt. [7, s. 99]). Oletetaan, että hilassa L on alihilana timantti M_3 tai viisikulmio N_5. Koska timantti M_3 ja viisikulmio N_5 eivät täytä distributiivisuuslakeja ja hila L sisältää samat alkiot, niin myöskään hila L ei täytä distributiivisuuslakeja.

Oletetaan sitten, että hila L ei ole distributiivinen tai modulaarinen. Tällöin lauseen 4.3 perusteella hilassa L on alihilana viisikulmio N_5.

Oletetaan, että hila L on modulaarinen, muttei distributiivinen. Tällöin lauseen 3.7 perusteella kaikilla $x, y, z \in L$ pätee, että

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) <_L x \wedge (y \vee z).$$

Merkitään

$$\begin{aligned} m &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \\ n &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z), \\ a &= (x \wedge n) \vee m, \\ b &= (y \wedge n) \vee m, \\ c &= (z \wedge n) \vee m. \end{aligned}$$

Osoitetaan ensin, että $m <_L n$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} x \wedge n &= x \wedge [(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)] \\ &= [x \wedge (x \vee y)] \wedge [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] \\ &= x \wedge [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] \\ &= [x \wedge (x \vee z)] \wedge (y \vee z) \\ &= x \wedge (y \vee z), \end{aligned}$$

ja modulaarisuuslakia käyttämällä saadaan, että

$$\begin{aligned} x \wedge m &= x \wedge [(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \\ &= [(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \wedge x \\ &= [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \vee [(y \wedge z) \wedge x] \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

Oletuksen perusteella $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) <_L x \wedge (y \vee z)$, joten $m < n$.

Tällöin

$$a = (x \wedge n) \vee m \leq_L (x \wedge n) \vee n = n.$$

Lisäksi

$$m \leq_L (x \wedge n) \vee m = a,$$

eli $m \leq_L a \leq_L n$. Vastaavalla tavalla saadaan $m \leq_L b \leq_L n$ ja $m \leq_L c \leq_L n$.

Osoitetaan lopuksi, että $a \wedge b = m$. Modulaarisuuslakia käyttämällä saadaan, että

$$\begin{aligned}
a \wedge b &= [(x \wedge n) \vee m] \wedge [(y \wedge n) \vee m] \\
&= [m \vee (x \wedge n)] \wedge [m \vee (y \wedge n)] \\
&= m \vee [(x \wedge n) \wedge (m \vee (y \wedge n))] \\
&= m \vee [(x \wedge n) \wedge ((m \vee y) \wedge n)] \\
&= m \vee [(x \wedge n) \wedge (n \wedge (m \vee y))] \\
&= m \vee [((x \wedge n) \wedge n) \wedge (y \vee m)] \\
&= m \vee [(x \wedge (n \wedge n)) \wedge (y \vee m)] \\
&= m \vee [(x \wedge n) \wedge (y \vee m)].
\end{aligned}$$

Koska $x \wedge n = x \wedge (y \vee z)$ ja

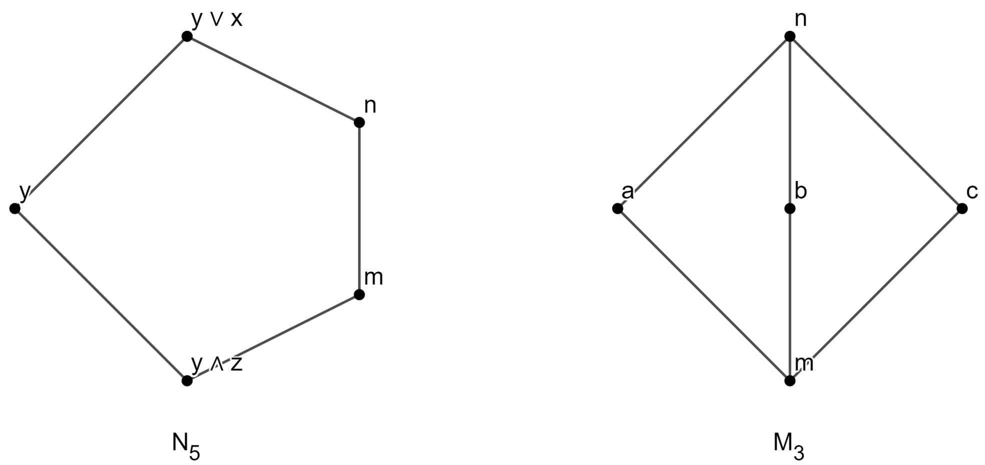
$$\begin{aligned}
y \vee m &= y \vee [(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \\
&= [y \vee (x \wedge y)] \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \\
&= y \vee [(y \wedge z) \vee (x \wedge z)] \\
&= [y \vee (y \wedge z)] \vee (x \wedge z) \\
&= y \vee (x \wedge z),
\end{aligned}$$

niin saadaan jälleen modulaarisuuslakia käyttämällä, että

$$\begin{aligned}
a \wedge b &= m \vee [(x \wedge n) \wedge (y \vee m)] \\
&= m \vee [(x \wedge (y \vee z)) \wedge (y \vee (x \wedge z))] \\
&= m \vee [x \wedge ((y \vee z) \wedge (y \vee (x \wedge z)))] \\
&= m \vee [x \wedge ((y \vee (x \wedge z)) \wedge (y \vee z))] \\
&= m \vee [x \wedge (y \vee ((x \wedge z) \wedge (y \vee z))))] \\
&= m \vee [x \wedge (y \vee (x \wedge (z \wedge (y \vee z)))] \\
&= m \vee [x \wedge (y \vee (x \wedge z))] \\
&= m \vee [((x \wedge z) \vee y) \wedge x] \\
&= m \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge x)] \\
&= m \vee [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \\
&= [(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \vee [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \\
&= [(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \\
&= m.
\end{aligned}$$

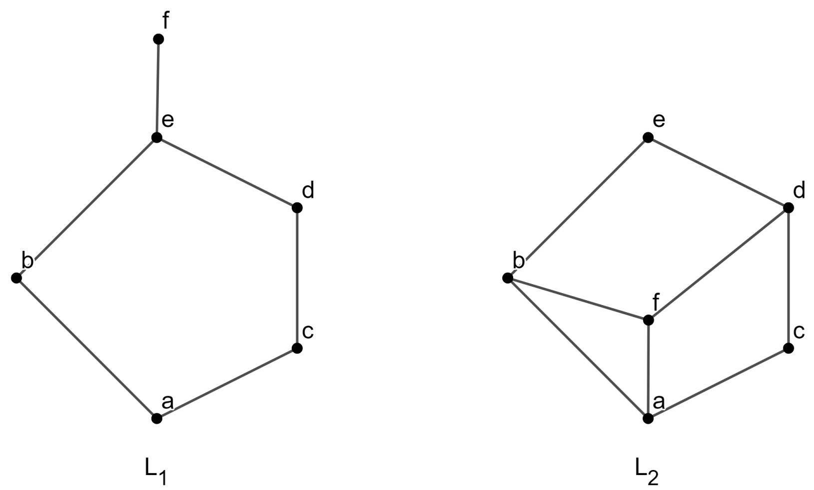
Vastaavalla tavalla saadaan $a \wedge c = m$, $b \wedge c = m$, $a \vee b = n$, $a \vee c = n$ ja $b \vee c = n$.

Näin ollen hilassa L on alihilana timantti M_3. Alihilana oleva timantti M_3 on esitetty kuvassa 4.3. □



Kuva 4.3. Lauseiden 4.3 ja 4.4 todistuksissa osoitetut alihilat N_5 ja M_3.

Esimerkki 4.3. Kuvassa 4.4 on esitetty hilat L_1 ja L_2. Hilassa L_1 on alihilana viisikulmio N_5, joten se ei ole modulaarinen tai distributiivinen. Hila L_2 sen sijaan on distributiivinen hila, jossa on viisikulmio N_5 osajoukkona, mutta ei alihilana.



Kuva 4.4. Hilat L_1 ja L_2. Hilassa L_1 alihilana viisikulmio N_5 ja hilassa L_2 on osajoukkona viisikulmio N_5.

Lause 4.5. *Distributiivisessa hilassa kaikki maksimaaliset ideaalit ovat jaottomia.*

Todistus (vrt. [7, s. 121]). Olkoon L distributiivinen hila, jolla on maksimaalinen ideaali M. Oletetaan, että $x \wedge y \in M$, mutta $x \notin M$. Tällöin $\downarrow x \vee M = L$, joten $y \leq_L x \vee m$ jollakin $m \in M$. Näin ollen

$$y = y \wedge (x \vee m) = (y \wedge x) \vee (y \wedge m).$$

Oletuksen perusteella $y \wedge x \in M$, ja ideaalin määritelmän perusteella $y \wedge m \in M$. Näin ollen $y \in M$ eli M on jaoton ideaali. $\square$

4.2 Komplementoitu hila

Määritelmä 4.3. Olkoon L hila, jolla on pienin alkio 0_L ja suurin alkio 1_L. Alkiolla $x \in L$ on *komplementti* $\bar{x} \in L$, jos

$$x \wedge \bar{x} = 0_L \text{ ja } x \vee \bar{x} = 1_L.$$

Määritelmä 4.4. Olkoon L hila.

1. Hila L on *komplementoitu*, jos jokaisella sen alkiolla on komplementti.

2. Hila L on *yksikäsitteisesti komplementoitu*, jos jokaisella sen alkiolla on yksikäsitteinen komplementti.

Huomautus. Jos alkiolla x on komplementti $\bar{x}$, niin x on alkion $\bar{x}$ komplementti.

Esimerkki 4.4. Kuvassa 4.2 esitetty timantti M_3 on komplementoitu hila. Timantti M_3 ei ole yksikäsitteisesti komplementoitu, koska esimerkiksi alkiolla c on komplementit b ja d.

Määritelmä 4.5. Olkoot $u \leq_L v$ hilan L alkioita, ja olkoon $a \in [u, v]$. Alkion a *suhteellinen komplementti* välin $[u, v]$ suhteen on alkion a komplementti osahilassa $[u, v]$, eli alkio $x \in [u, v]$, jolla pätee

$$x \wedge a = u \text{ ja } x \vee a = v.$$

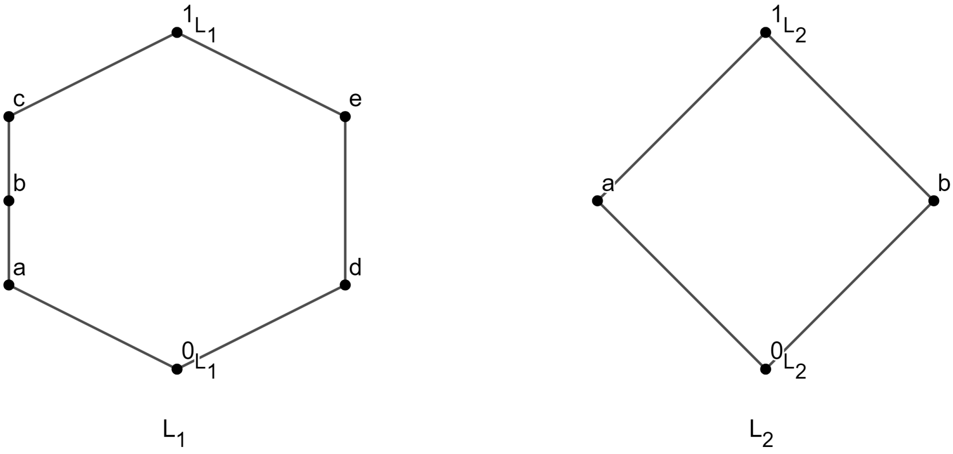
Kaikkien alkion a suhteellisten komplementtien joukkoa välin $[u, v]$ suhteen merkitään symbolilla $a_{[u,v]}$.

Määritelmä 4.6. Olkoon L hila.

1. Hila L on *suhteellisesti komplementoitu*, jos jokainen suljettu väli $[u, v]_L$ on komplementoitu.

2. Hila L on *yksikäsitteisesti suhteellisesti komplementoitu*, jos jokainen suljettu väli $[u, v]_L$ on yksikäsitteisesti komplementoitu.

Huomautus. Komplementoitu hila ei välttämättä ole suhteellisesti komplementoitu.



Kuva 4.5. Hilat L_1 ja L_2. Hila L_1 on komplementoitu ja hila L_2 on suhteellisesti komplementoitu.

Esimerkki 4.5. Kuvassa 4.5 esitetty hila L_1 on komplementoitu, mutta ei suhteellisesti komplementoitu, sillä väli $[a, c]_{L_1}$ ei ole komplementoitu. Samassa kuvassa esitetty hila L_2 on suhteellisesti komplementoitu.

Lause 4.6. *Olkoon L distributiivinen hila, jolla on pienin alkio 0_L ja suurin alkio 1_L. Tällöin jokaisella hilan L alkiolla voi olla enintään yksi komplementti.*

Todistus (vrt. [2, s. 68]). Olkoot $x, y, z \in L$. Oletetaan, että alkiot y ja z ovat molemmat alkion x komplementteja. Tällöin

$$\begin{aligned} y &= y \wedge 1_L \\ &= y \wedge (x \vee z), \end{aligned}$$

ja koska hila L on distributiivinen, niin

$$\begin{aligned} y \wedge (x \vee z) &= (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \\ &= 0_L \vee (y \wedge z) \\ &= y \wedge z, \end{aligned}$$

eli $y \leq_L z$. Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned} z &= z \wedge 1_L \\ &= z \wedge (x \vee y) \\ &= (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\ &= 0_L \vee (z \wedge y) \\ &= z \wedge y, \end{aligned}$$

eli $z \leq_L y$, ja näin ollen järjestysrelaation antisymmetrisyyden perusteella $y = z$. □

Lause 4.7. *Olkoon L modulaarinen hila, jolla on pienin alkio 0_L ja suurin alkio 1_L. Jos alkiolla $x \in L$ on komplementti $\bar{x}$, niin alkiolla x on myös suhteellinen komplementti x_r jokaisen välin $[a, b]$, joka sisältää alkion x, suhteen. Suhteellinen komplementti x_r saadaan projisoimalla $\bar{x}$ välille $[a, b]$ seuraavasti:*

$$x_r = (\bar{x} \vee a) \wedge b = (\bar{x} \wedge b) \vee a.$$

Todistus (vrt. [7, s. 84]). Osoitetaan, että alkio $x_r = (\bar{x} \vee a) \wedge b$ toteuttaa suhteellisen komplementin määritelmän välin $[a, b]$ suhteen. Koska hila L on modulaarinen ja $x \leq_L b$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
x_r \vee x &= [(\bar{x} \vee a) \wedge b] \vee x \\
&= x \vee [(\bar{x} \vee a) \wedge b] \\
&= [x \vee (\bar{x} \vee a)] \wedge b \\
&= [(x \vee \bar{x}) \vee a] \wedge b \\
&= (1_L \vee a) \wedge b \\
&= 1_L \wedge b \\
&= b.
\end{aligned}$$

Koska $x \leq_L b$ ja $a \leq_L x$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
x_r \wedge x &= [(\bar{x} \vee a) \wedge b] \wedge x \\
&= [\bar{x} \vee (a \wedge b)] \wedge x \\
&= (\bar{x} \vee a) \wedge x \\
&= a \vee (\bar{x} \wedge x) \\
&= a \vee 0_L \\
&= a.
\end{aligned}$$

Näin ollen $x_r = (\bar{x} \vee a) \wedge b$. Lisäksi koska $a \leq_L b$, niin

$$\begin{aligned}
x_r &= (\bar{x} \vee a) \wedge b \\
&= (\bar{x} \wedge b) \vee a.
\end{aligned}$$

□

4.3 Boolen hila

Määritelmä 4.7. Hilaa B kutsutaan *Boolen hilaksi*, jos se on distributiivinen ja komplementoitu.

Esimerkki 4.6. Kuvassa 3.2 esitetty potenssijoukko on Boolen hila.

Lause 4.8. *Olkoon B Boolen hila, ja olkoot $x, y \in B$. Tällöin seuraavat tulokset ovat voimassa:*

1. *$x \vee 1_B = 1_B$ ja $x \wedge 0_B = 0_B$,*

2. *$\overline{\overline{x}} = x$,*

3. *$\overline{0}_B = 1_B$ ja $\overline{1}_B = 0_B$,*

4. *(de Morganin lait)*
$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$
ja
$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y},$$

5. *(Järjestys ja komplementit)*
$$x \leq_B y \Leftrightarrow x \wedge \overline{y} = 0_B \Leftrightarrow \overline{x} \vee y = 1_B.$$

Todistus (vrt. [7, s. 129],[3, s. 408]).

1. Boolen hila on komplementoitu, joten sillä on pienin alkio 0_L ja suurin alkio 1_L. Näin ollen lause 3.3 on voimassa.

2. Komplementin määritelmän mukaan
$$\overline{x} \wedge x = 0_B \text{ ja } \overline{x} \vee x = 1_B,$$
joten
$$\overline{\overline{x}} = x.$$

3. Osoitetaan, että komplementin määritelmä toteutuu, eli
$$0_B \wedge 1_B = 1_B \wedge 0_B = 0_B$$
ja
$$0_B \vee 1_B = 1_B \vee 0_B = 1_B.$$
Näin ollen $\overline{0}_B = 1_B$ ja $\overline{1}_B = 0_B$.

4. Osoitetaan, että komplementin määritelmä toteutuu, eli
$$\begin{aligned}
(x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) &= x \vee (y \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})) \\
&= x \vee ((y \vee \overline{x}) \wedge (y \vee \overline{y})) \\
&= x \vee ((y \vee \overline{x}) \wedge 1_B) \\
&= x \vee (y \vee \overline{x}) \\
&= x \vee (\overline{x} \vee y) \\
&= (x \vee \overline{x}) \vee y \\
&= 1_B \vee y \\
&= 1_B
\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) &= (x \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y})) \vee (y \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y})) \\
&= ((x \wedge \overline{x}) \wedge \overline{y}) \vee ((y \wedge \overline{y}) \wedge \overline{x}) \\
&= (0_B \wedge \overline{y}) \vee (0_B \wedge \overline{x}) \\
&= 0_B \vee 0_B \\
&= 0_B.
\end{aligned}
$$

Näin ollen $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

5. Jos $x \leq_B y$, niin $x \wedge \overline{y} \leq_B y$ ja $x \wedge \overline{y} \leq_B \overline{y}$. Näin ollen $x \wedge \overline{y} = 0_B$.

   Jos $x \wedge \overline{y} = 0_B$, niin

$$
\begin{aligned}
y &= y \vee 0_B \\
&= y \vee (x \wedge \overline{y}) \\
&= (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) \\
&= (y \vee x) \wedge 1_B \\
&= y \vee x,
\end{aligned}
$$

   ja näin ollen $x \leq_B y$.

   Vastaavasti jos $x \leq_B y$, niin $x \leq_B \overline{x} \vee y$ ja $\overline{x} \leq_B \overline{x} \vee y$. Näin ollen $\overline{x} \vee y = 1_B$.

   Jos $\overline{x} \vee y = 1_B$, niin

$$
\begin{aligned}
x &= x \wedge 1_B \\
&= x \wedge (\overline{x} \vee y) \\
&= (x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y) \\
&= 0_B \vee (x \wedge y) \\
&= x \wedge y,
\end{aligned}
$$

   ja näin ollen $x \leq_B y$.

□

Lause 4.9. *Olkoon B Boolen hila ja I hilan B aito ideaali. Tällöin seuraavat kohdat ovat keskenään ekvivalentteja:*

1. *Ideaali I on maksimaalinen.*

2. *Ideaali I on jaoton.*

3. *Kaikilla $x \in B$ pätee, että*

$$x \in I \text{ ja } \overline{x} \notin I$$

   tai

$$\overline{x} \in I \text{ ja } x \notin I.$$

Todistus (vrt. [7, s. 130]). Aikaisemmin on jo osoitettu, että distributiivisessa hilassa kaikki maksimaaliset ideaalit ovat jaottomia.

Jos ideaali I on jaoton, niin $x \wedge \overline{x} \in I$. Tällöin $x \in I$ tai $\overline{x} \in I$. Jos molemmat alkiot x ja $\overline{x}$ kuuluvat ideaaliin I, niin $x \vee \overline{x} = 1_B \in I$, mistä seuraa ristiriita, koska ideaali I on aito.

Olkoon J hilan B ideaali. Jos 3. kohta on voimassa ja $I \subset J$, niin kaikilla $x \in J \setminus I$ pätee, että $\overline{x} \in I$. Tällöin $1_B = x \vee \overline{x} \in J$. Näin ollen $J = L$ eli ideaali I on maksimaalinen. □

5 Boolen algebra

Tässä tutkielman viimeisessä luvussa tarkastellaan Boolen algebraa ja Booolen rengasta. Määritelmien lisäksi esitetään lyhyesti joitain näiden ominaisuuksia. Luvun lopussa osoitetaan, kuinka Boolen algebra muodostaa Boolen renkaan, ja toisin päin eli kuinka Boolen renkaasta voidaan konstruoida Boolen algebra. Luvun sisältö perustuu erityisesti Steven Romanin kirjaan *Lattices and Ordered sets* [7] sekä Thomas W. Hungerfordin kirjaan *Abstract Algebra, An Introduction* [3].

5.1 Boolen algebra

Määritelmässä 3.1 määriteltiin hila myös algebrallisesti epätyhjänä joukkona, jonka kaksi operaatiota $\wedge$ ja $\vee$ toteuttavat tietyt vaatimukset. Boolen hila voidaan myös määritellä algebrallisesti joukkona ja sen operaatioina, jolloin tavallisesti puhutaan *Boolen algebrasta*.

Määritelmä 5.1. *Boolen algebra* on epätyhjä joukko B, jonka operaatiot $\wedge$, $\vee$, $\bar{}$ ja vakiot 0_B, 1_B toteuttavat seuraavat ehdot:

1. Operaatiot $\wedge$ ja $\vee$ toteuttavat idempotenssi-, kommutatiivisuus-, assosiatiivisuus- ja absorptiolait.
2. Operaatiot $\wedge$ ja $\vee$ toteuttavat distributiivisuuslait.
3. Alkio 0_B on neutraalialkio supremumin suhteen ja alkio 1_B on neuraalialkio infimumin suhteen, eli

   $$x \vee 0_B = x \text{ ja } x \wedge 1_B = x$$

   kaikilla $x \in B$.
4. Operaatio $\bar{}$ toteuttaa komplementin määritelmän:

   $$x \vee \overline{x} = 1_B \text{ ja } x \wedge \overline{x} = 0_B$$

   kaikilla $x \in B$.

Näin ollen Boolen algebra $(B, \wedge, \vee, \bar{}, 0_B, 1_B)$ on Boolen hila, ja jokainen Boolen hila on Boolen algebra.

Lause 5.1. *Olkoon B Boolen algebra. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in B$ pätee, että*

$$(\overline{(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)}) = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}).$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
\overline{((x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y))} &= \overline{(x \wedge \overline{y})} \wedge \overline{(\overline{x} \wedge y)} \\
&= (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \\
&= ((\overline{x} \vee y) \wedge x) \vee ((\overline{x} \vee y) \wedge \overline{y}) \\
&= ((x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y)) \vee ((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{y})) \\
&= 0_B \vee (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee 0_B \\
&= (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}).
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 5.2. Boolen algebran B epätyhjä osajoukko A on *Boolen alialgebra*, jos kaikilla alkioilla $x, y \in A$ pätee, että $x \wedge y \in A$, $x \vee y \in A$ ja $\overline{x} \in A$.

5.2 Boolen rengas

Määritelmä 5.3. *Rengas* on epätyhjä joukko, jonka binääriset operaatiot $+$ ja $\cdot$ toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $x + y = y + x$, kaikilla $x, y \in R$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$, kaikilla $x, y, z \in R$.
3. On olemassa nolla-alkio $0 \in R$ siten, että $x + 0 = x$ kaikilla $x \in R$.
4. On olemassa ykkösalkio $1 \in R$ siten, että $1x = x1 = x$ kaikilla $x \in R$.
5. Kaikilla $x \in R$ on olemassa alkio $-x \in R$ siten, että $x + (-x) = 0$.
6. $(xy)z = x(yz)$ kaikilla $x, y, z \in R$.
7. Kaikilla $x, y, z \in R$
   $$x(y + z) = xy + xz$$
   ja
   $$(x + y)z = xz + yz.$$

Jos kaikilla $x, y \in R$ pätee, että $xy = yx$, niin rengas on *kommutatiivinen*.

Määritelmä 5.4. Rengas $(R, +, \cdot, 0, 1)$ on *Boolen rengas*, jos jokainen renkaan R alkio on idempotentti, eli
$$x^2 = x$$
kaikilla $x \in R$.

Lause 5.2. *Boolen rengas on kommutatiivinen ja* $2x = 0$ *kaikilla* $x \in R$.

Todistus (vrt. [3, s. 60]). Olkoot $x, y \in R$. Tällöin

$$\begin{aligned} x + x &= (x+x)^2 = (x+x)(x+x) \\ &= x(x+x) + x(x+x) = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 \\ &= x + x + x + x. \end{aligned}$$

Kun lisätään $-(x+x)$ molemmille puolille, saadaan

$$0 = x + x = 2x.$$

Koska $x + x = 0$, niin $x = -x$. Näin ollen

$$\begin{aligned} x + y &= (x+y)^2 = (x+y)(x+y) \\ &= x(x+y) + y(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 \\ &= x + xy + yx + y. \end{aligned}$$

Kun lisätään $-(x+y)$ molemmille puolille, saadaan

$$\begin{aligned} &0 = xy + yx \\ \Leftrightarrow\ &xy = -yx \\ \Leftrightarrow\ &xy = yx. \end{aligned}$$

Eli Boolen rengas on kommutatiivinen. □

Lause 5.3. *Olkoon $(R, +, \cdot, 0, 1)$ Boolen rengas. Määritetään operaatiot $\wedge$, $\vee$ ja $\bar{\ }$ joukossa R seuraavasti:*

$$\begin{aligned} r \wedge s &= rs, \\ r \vee s &= r + s + rs, \\ \bar{r} &= 1_R + r. \end{aligned}$$

Tällöin $(R, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1)$ on Boolen algera.

Todistus (vrt. [7, s. 132]). Osoitetaan, että määritelmässä 5.1 esitetyt ominaisuudet ovat voimassa. Olkoot $x, y, z \in R$.

1. Operaatiot $\wedge$ ja $\vee$ toteuttavat selvästi idempotenssi- ja kommutatiivisuuslait. Koska

$$\begin{aligned} x \wedge (y \wedge z) &= x \wedge yz \\ &= xyz \\ &= xy \wedge z \\ &= (x \wedge y) \wedge z \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
x \vee (y \vee z) &= x \vee (y + z + yz)\\
&= x + y + z + yz + x(y + z + yz)\\
&= x + y + z + xy + xz + yz + xyz\\
&= x + y + xy + z + (x + y + xy)z\\
&= (x + y + xy) \vee z\\
&= (x \vee y) \vee z,
\end{aligned}$$

niin operaatiot $\wedge$ ja $\vee$ ovat assosiatiivisia. Lisäksi

$$\begin{aligned}
x \wedge (x \vee y) &= x \wedge (x + y + xy)\\
&= x(x + y + xy)\\
&= x^2 + xy + x^2y\\
&= x
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
x \vee (x \wedge y) &= x \vee (xy)\\
&= x + xy + x(xy)\\
&= x + xy + x^2y\\
&= x,
\end{aligned}$$

eli operaatiot $\wedge$ ja $\vee$ toteuttavat absorptiolait.

2. Distributiivisuuslait ovat voimassa, sillä

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= xy \vee xz\\
&= xy + xz + x^2yz\\
&= xy + xz + xyz\\
&= x \wedge (y + z + yz)\\
&= x \wedge (y \vee z)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= (x + y + xy) \wedge (x + z + xz)\\
&= (x + y + xy)(x + z + xz)\\
&= x^2 + xz + x^2z + xy + yz + xyz + x^2y + xyz + x^2yz\\
&= x + yz + xyz\\
&= x \vee (yz)\\
&= x \vee (y \wedge z).
\end{aligned}$$

3. Alkio 0 on neutraalialkio supremumin suhteen, sillä

$$x \vee 0 = x + 0 + x0 = x,$$

ja alkio 1 on neutraalialkio infimumin suhteen, sillä

$$x \wedge 1 = x1 = x.$$

4. Koska

$$\begin{aligned} x \vee \overline{x} &= x \vee (1 + x) \\ &= x + 1 + x + x + x^2 \\ &= 2x + 2x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x \wedge \overline{x} &= x \wedge (1 + x) \\ &= x1 + x^2 \\ &= 2x \\ &= 0, \end{aligned}$$

niin operaatio $\bar{}$ toteuttaa komplementin määritelmän.

Näin ollen $(R, \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1)$ on Boolen algera. □

Lause 5.4. *Olkoon* $(B, \wedge, \vee, \bar{}, 0_B, 1_B)$ *Boolen algebra. Määritellään operaatiot* rs *ja* $r + s$ *joukossa* B *seuraavasti:*

$$\begin{aligned} rs &= r \wedge s, \\ r + s &= (r \vee s) \wedge (\overline{r} \vee \overline{s}) = (r \wedge \overline{s}) \vee (\overline{r} \wedge s). \end{aligned}$$

Tällöin $(B, +, \cdot, 0_B, 1_B)$ *on Boolen rengas.*

Todistus (vrt. [3, s. 410]). Osoitetaan, että määritelmissä 5.3 ja 5.4 esitetyt ehdot ovat voimassa. Olkoot $x, y, z \in B$.

1. Operaatio + on kommutatiivinen, sillä

$$\begin{aligned} x + y &= (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ &= (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \\ &= (y \wedge \overline{x}) \vee (\overline{y} \wedge x) \\ &= y + x. \end{aligned}$$

2. Koska

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z &= [((x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)) \wedge \overline{z}] \vee [(\overline{(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)}) \wedge z] \\
&= [((x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)) \wedge \overline{z}] \vee [((x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})) \wedge z] \\
&= [((x \wedge \overline{y}) \wedge \overline{z}) \vee ((\overline{x} \wedge y) \wedge \overline{z})] \vee [((x \wedge y) \wedge z) \vee ((\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge z)] \\
&= (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \\
&= (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \\
&= [(x \wedge (y \wedge z)) \vee (x \wedge (\overline{y} \wedge \overline{z}))] \vee [(\overline{x} \wedge (y \wedge \overline{z})) \vee (\overline{x} \wedge (\overline{y} \wedge z))] \\
&= [x \wedge ((y \wedge z) \vee (\overline{y} \wedge \overline{z}))] \vee [\overline{x} \wedge ((y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{y} \wedge z))] \\
&= [x \wedge (\overline{(y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{y} \wedge z)})] \vee [\overline{x} \wedge ((y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{y} \wedge z))] \\
&= x + (y+z),
\end{aligned}
$$

niin operaatio + on assosiatiivinen.

3. Alkio 0_B toteuttaa nolla-alkion määritelmän, sillä

$$
\begin{aligned}
x + 0_B &= (x \wedge \overline{0_B}) \vee (\overline{x} \wedge 0_B) \\
&= (x \wedge 1_B) \vee 0_B \\
&= x \vee 0_B \\
&= x.
\end{aligned}
$$

4. Alkio 1_B toteuttaa ykkösalkion määritelmän, sillä

$$
\begin{aligned}
1_B x &= 1_B \wedge x \\
&= x \\
&= x \wedge 1_B \\
&= x 1_B.
\end{aligned}
$$

5. Jokaisen alkion $x \in B$ vasta-alkio on alkio x itse, sillä

$$
\begin{aligned}
x + x &= (x \wedge \overline{x}) \vee (\overline{x} \wedge x) \\
&= 0_B \vee 0_B \\
&= 0_B.
\end{aligned}
$$

6. Koska

$$
\begin{aligned}
(xy)z &= (x \wedge y) \wedge z \\
&= x \wedge (y \wedge z) \\
&= x(yz),
\end{aligned}
$$

niin operaatio $\cdot$ on assosiatiivinen.

7. Distributiivisuuslait ovat voimassa, sillä

$$\begin{aligned} xy + xz &= [(x \wedge y) \wedge (\overline{x \wedge z})] \vee [(\overline{x \wedge y}) \wedge (x \wedge z)] \\ &= [(x \wedge y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{z})] \vee [(\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \wedge z)] \\ &= [((x \wedge y) \wedge \overline{x}) \vee ((x \wedge y) \wedge \overline{z})] \vee [(\overline{x} \wedge (x \wedge z)) \vee (\overline{y} \wedge (x \wedge z))] \\ &= ((x \wedge \overline{x}) \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge \overline{z})) \vee ((\overline{x} \wedge x) \wedge z) \vee (\overline{y} \wedge (x \wedge z)) \\ &= (0_B \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge \overline{z})) \vee (0_B \wedge z) \vee (x \wedge (\overline{y} \wedge z)) \\ &= 0_B \vee (x \wedge (y \wedge \overline{z})) \vee 0_B \vee (x \wedge (\overline{y} \wedge z)) \\ &= [x \wedge (y \wedge \overline{z})] \vee [x \wedge (\overline{y} \wedge z)] \\ &= x \wedge [(y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{y} \wedge z)] \\ &= x(y + z) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} xz + yz &= [(x \wedge z) \wedge (\overline{y \wedge z})] \vee [(\overline{x \wedge z}) \wedge (y \wedge z)] \\ &= [(x \wedge z) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z})] \vee [(\overline{x} \vee \overline{z}) \wedge (y \wedge z)] \\ &= [((x \wedge z) \wedge \overline{y}) \vee ((x \wedge z) \wedge \overline{z})] \vee [(\overline{x} \wedge (y \wedge z)) \vee (\overline{z} \wedge (y \wedge z))] \\ &= ((x \wedge \overline{y}) \wedge z) \vee (x \wedge (z \wedge \overline{z})) \vee ((\overline{x} \wedge y) \wedge z) \vee ((\overline{z} \wedge z) \wedge y) \\ &= ((x \wedge \overline{y}) \wedge z) \vee (x \wedge 0_B) \vee ((\overline{x} \wedge y) \wedge z) \vee (0_B \wedge y) \\ &= ((x \wedge \overline{y}) \wedge z) \vee 0_B \vee ((\overline{x} \wedge y) \wedge z) \vee 0_B \\ &= [(x \wedge \overline{y}) \wedge z] \vee [(\overline{x} \wedge y) \wedge z] \\ &= [(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)] \wedge z \\ &= (x + y)z. \end{aligned}$$

8. Jokainen alkio $x \in B$ on idempotentti, sillä

$$x \cdot x = x \wedge x = x.$$

Näin ollen $(B, +, \cdot, 0_B, 1_B)$ on Boolen rengas. $\square$

Lähteet

[1] Birkhoff, G. *Lattice Theory*, Third Edition, Second Printing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1973.

[2] Harju, T. *Lecture Notes in Ordered Sets*, University of Turku, 2006 (2012).

[3] Hungerford, T. W. *Abstract Algebra, An Introduction*, Cleveland State University, Saunders College Publishing.

[4] Judson T. W. *Abstract Algebra, Theory and Applications*, Annual Edition, Stephen F. Austin State University, 2020.

[5] Kolman B. ; Busby R. C. ; Ross S. *Discrete Mathematical Structures*, Third Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

[6] Malik D. S. ; Mordeson J. N. ; Sen M. K. *Fundamental oh Abstract Algebra*,The McGraw-Hill Companies, 1997.

[7] Roman, S. *Lattices and Ordered Sets*, Springer, New York, 2008.