Tampereen yliopisto

Oona Ylä-Mikkola

DISKREETTIÄ MORSE-TEORIAA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Marraskuu 2023

Tiivistelmä

Oona Ylä-Mikkola: Diskreettiä Morse-teoriaa
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Marraskuu 2023

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä diskreettiä Morse-teoriaa, joka on kombinatorinen sovitus klassisesta Morse-teoriasta. Diskreetin Morse-teorian tärkeimmät lauseet esitetään parhaiten CW-kompleksien avulla, joten tämän tutkielman teoria pohjautuu näihin komplekseihin. Jotta päästään käsiksi diskreettiin Morse-teoriaan, käsitellään ensin liitosavaruuksia ja esitellään CW-kompleksit sekä romahtamisen käsite. Lisäksi käydään läpi homologiaa CW-komplekseille, jonka yhteydessä määritellään muun muassa solumainen ketjukompleksi. Tutkielman alussa käsitellään vielä tensorituloa sekä esitellään Eulerin karakteristika ja Bettin luku.

Diskreetin Morse-teorian käsittely aloitetaan esittelemällä diskreetti Morse-funktio sekä kriittinen solu, joille todistetaan tärkeimpiä tuloksia. Diskreetteihin Morse-funktioihin liittyen esitellään gradienttivektorikenttä sekä Hasse-kaavio. Yksi diskreetin Morse-teorian keskeisimmistä lauseista on romahduslause, joka esitetään ja todistetaan Hasse-kaavioiden jälkeen. Lisäksi esitetään vielä Morse-epäyhtälöt ja käsitellään diskreetin Morse-funktion kehittämistä. Yksi Morse-teorian tärkeimmistä ongelmista on nimittäin löytää Morse-funktio, jonka kriittisten solujen määrä on pienin mahdollinen. Tällaisen funktion löytämiseksi esitetään lause koskien kriittisten solujen poistamista.

Tutkielman loppupuolella käsitellään uudestaan gradienttivektorikenttiä ja määritellään diskreetti gradienttivirtaus. Lisäksi esitellään Morse-kompleksin käsite ja todistetaan, että CW-kompleksiin K liittyvän Morse-kompleksin C_*^Φ homologia on sama kuin CW-kompleksin K homologia. Viimeisenä esitellään välttelevyys, jossa on kyse Morse-teorian soveltamisesta tietojenkäsittelyyn.

Avainsanat: diskreetti Morse-teoria, Morse-funktio, CW-kompleksi, Morse-kompleksi, gradienttivektorikenttä

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan diskreettiä Morse-teoriaa CW-komplekseille ja todistetaan siihen liittyviä tuloksia.

Luvussa 2 esitellään tutkielman kannalta oleellisia esitietoja. Osa esitiedoista on esitetty lyhyesti, sillä esitietoja tarvitaan monesta eri asiasta. Alussa käsitellään vektoriavaruudet ja Abelin ryhmä, jonka jälkeen tarkastellaan liitosavaruuksia. Sitten esitellään CW-kompleksi sekä tarkastellaan CW-kompleksin romahtamista. Soluhomologian yhteydessä määritellään muun muassa käsitteet solumainen ketjukompleksi ja solumaiset homologiaryhmät. Lisäksi käsitellään tensorituloa sekä määritellään Eulerin karakteristika ja Bettin luku.

Luvussa 3 käsitellään diskreetin Morse-teorian perusasioita ja todistetaan tärkeimpiä lauseita. Aluksi esitetään käsitteet diskreetti Morse-funktio ja kriittinen solu sekä todistetaan niin sanottu poikkeus-lemma, jota hyödynnetään myöhemmin esitettävissä todistuksissa. Näiden jälkeen esitellään lyhyesti Forman-ekvivalenssi, joka kertoo diskreettien Morse-funktioiden vastaavuudesta. Alaluvussa 3.3 määritellään gradienttivektorikenttä, diskreetti vektorikenttä sekä gradienttipolku. Lisäksi todistetaan, että diskreetit Morse-funktiot ovat Forman-ekvivalentteja, jos ja vain jos ne indusoivat saman gradienttivektorikentän. Alaluvussa 3.4 esitellään Hasse-kaavio ja todistetaan siihen liittyviä tuloksia. Seuraavassa alaluvussa todistetaan romahduslause, joka on yksi Morse-teorian keskeisimmistä lauseista. Alaluvussa 3.6 todistetaan heikot diskreetit Morse-epäyhtälöt sekä vahva diskreetti Morse-epäyhtälö. Näiden jälkeen käsitellään diskreetin Morse-funktion kehittämistä. Yksi Morse-teorian tärkeimmistä ongelmista on nimittäin löytää Morse-funktio, jonka kriittisten solujen määrä on pienin mahdollinen. Tällaisen funktion löytämiseksi esitetään lause koskien kriittisten solujen poistamista.

Luvussa 4 käsitellään ensin gradienttivektorikenttiä suunnattujen solujen kuvauksena ja määritellään gradienttivirtaus. Gradienttivektorikentälle ja siihen liittyvälle virtaukselle esitetään ja todistetaan tärkeimpiä ominaisuuksia. Alaluvussa 4.2 määritellään Morse-kompleksi ja todistetaan, että CW-kompleksiin K liittyvän Morse-kompleksin C_*^Φ homologia on sama kuin CW-kompleksin K homologia. Seuraavassa alaluvussa näytetään, että Morse-kompleksi voidaan esittää kriittisten solujen avulla. Viimeisessä alaluvussa esitellään välttelevyys, jossa on kyse Morse-teorian soveltamisesta tietojenkäsittelyyn.

Lukijalta edellytetään algebran ja topologian perusasioiden tuntemusta. Tutkielman päälähteinä käytetään Robin Formanin ja Nicholas A. Scovillen teoksia [7] ja [17].

2 Esitietoja

2.1 Vektoriavaruudet

Tämän aliluvun lähteinä käytetään teoksia [9] ja [18].

Määritelmä 2.1. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia, joiden kerroinkuntana on $\mathbb{F}$. Funktio $f : V \to W$ on *lineaarikuvaus*, jos kaikille $v, u \in V$ ja kaikille $a \in \mathbb{F}$ pätee

(i) $f(v + u) = f(v) + f(u)$,

(ii) $f(av) = af(v)$.

Määritelmä 2.2. Olkoon $f : V \to W$ lineaarikuvaus. Funktion f *ydin* on

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

Ytimen dimensiota kutsutaan funktion f *nulliteetiksi* ja sitä merkitään $\mathrm{null}(f)$. Funktion f *kuva* on

$$\mathrm{Im}(f) = \{w \in W \mid \exists v \in V, \text{ jolle } f(v) = w\}.$$

Kuvan dimensiota kutsutaan funktion f *asteeksi* ja sitä merkitään $\mathrm{rank}(f)$.

Lause 2.3 (aste-nulliteetti lause)**.** *Olkoot V ja W vektoriavaruuksia, joiden kerroinkuntana on* $\mathbb{F}$ *ja olkoon* $f : V \to W$ *lineaarikuvaus. Oletetaan, että* $\dim V < \infty$. *Tällöin*

$$rank(f) + null(f) = dim(V).$$

Todistus (ks. [9, s. 70]). □

2.2 Abelin ryhmä

Tämän aliluvun lähteinä käytetään teoksia [4], [18] ja [12].

Määritelmä 2.4. Epätyhjä joukko G, jossa on määritelty laskutoimitus $\circ$ on *Abelin ryhmä*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) Kaikilla $x, y \in G$, $x \circ y \in G$.

(2) Kaikilla $x, y, z \in G$, $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.

(3) On olemassa neutraalialkio $e \in G$, jolle $x \circ e = e \circ x = x$, kaikilla $x \in G$.

(4) Jokaisella $x \in G$ on olemassa käänteisalkio $y \in G$, jolle $x \circ y = y \circ x = e$.

(5) Kaikilla $x, y \in G$, $x \circ y = y \circ x$.

Määritelmä 2.5. Olkoon G Abelin ryhmä ja olkoon $\{e_i\}_{i\in I}$ Abelin ryhmän G osajoukko. Tämä joukko on Abelin ryhmän G *kanta*, jos se on epätyhjä ja jokaisella $x \in G$ on yksikäsitteinen esitys lineaarikombinaationa

$$x = \sum x_i e_i,$$

missä $x_i \in \mathbb{Z}$ ja lähes kaikilla indekseillä i pätee $x_i = 0$.

Määritelmä 2.6. Abelin ryhmä on *vapaa*, jos sillä on kanta.

Määritelmä 2.7. Vapaan Abelin ryhmän G *sisätulo* on funktio $f : G \times G \to \mathbb{Z}$, jota merkitään $\langle , \rangle$, ja jolle pätevät seuraavat ominaisuudet:

(1) Kaikilla $a, b \in G$, $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$.

(2) Kaikilla $a, b \in G$ ja $z \in \mathbb{Z}$, $\langle za, b\rangle = z\langle a, b\rangle = \langle a, zb\rangle$.

(3) Kaikilla $a, b, c \in G$, $\langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b + c\rangle$ ja $\langle a, b + c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle$.

(4) Jokaisella $a \in G$, $\langle a, a\rangle \geqslant 0$ sekä $\langle 0, a\rangle = 0$ ja $\langle a, 0\rangle = 0$.

Määritelmä 2.8. Olkoon $(G, \langle , \rangle)$ vapaa Abelin ryhmä ja olkoon H ryhmän G aliryhmä. Aliryhmän H *ortogonaalinen komplementti* $H^\perp$ ryhmässä G on

$$H^\perp = \{a \in G \mid \langle a, b\rangle = 0 \text{ jokaisella } b \in H\}.$$

2.3 Liitosavaruuksista

Tässä aliluvussa esitellään liitosavaruus, sekä siihen liittyvä liimauslause. Lisäksi määritellään tarpeellisia käsitteitä. Luvun tiedot pohjautuvat Brownin ja Rotmanin teoksiin [3] ja [15].

Merkitään topologisten avaruuksien B ja X erillistä yhdistettä $B \sqcup X$.

Määritelmä 2.9. Olkoot X ja B topologisia avaruuksia. Olkoon $A \subset X$ aliavaruus ja $f : A \to B$ jatkuva kuvaus. Avaruus, joka saadaan 'liimaamalla' X avaruuteen B funktiolla f on $(B \sqcup X)/\sim$, missä $\sim$ on avaruuden $B \sqcup X$ ekvivalenssirelaatio, joka saadaan, kun samastetaan a ja $f(a)$ kaikilla $a \in A$. Avaruutta $B \sqcup_f X$ kutsutaan *liitosavaruudeksi* ja kuvausta f *liitoskuvaukseksi*.

Määritellään seuraavaksi käsitteitä, joita tarvitaan seuraavaksi esitettävään lauseeseen. Olkoon X topologinen avaruus ja A avaruuden X aliavaruus. Tällöin sanotaan, että (X, A) on *topologinen pari*.

Määritelmä 2.10. Topologisella parilla (X, A) on *homotopian laajennusominaisuus* avaruuden Y suhteen, jos jokaiselle jatkuvalle kuvaukselle $f : X \times \{0\} \to Y$ ja jokaiselle jatkuvalle kuvaukselle $G : A \times \mathbb{I} \to Y$, missä $G(a, 0) = f(a, 0)$, jokaiselle $a \in A$ ja missä $\mathbb{I}$ on yksikköväli $[0, 1]$, on olemassa jatkuva kuvaus $F : X \times \mathbb{I} \to Y$, joka saa seuraavan kaavion kommutoimaan:

$$
\begin{tikzcd}
X \times \mathbb{I} \arrow[ddrr, "F"] & & \\
\cup & & \\
X \times \{0\} \cup A \times \mathbb{I} \arrow[rr, "f \cup G"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

Inkluusiota $i : A \hookrightarrow X$ kutsutaan *kofibraatioksi*, jos parilla (X, A) on homotopian laajennusominaisuus jokaisen avaruuden Y suhteen.

Määritelmä 2.11. *Kategoria* $\mathscr{C}$ koostuu kolmesta asiasta; *objektien* luokasta, $\operatorname{obj}\mathscr{C}$; *morfismien* joukoista $\operatorname{Hom}(A, B)$, yksi jokaista paria $A, B \in \operatorname{obj}\mathscr{C}$ kohden; *yhdistelmästä* $\operatorname{Hom}(A, B) \times \operatorname{Hom}(B, C) \to \operatorname{Hom}(A, C)$, jota merkitään $(f, g) \mapsto g \circ f$ jokaista objektia $A, B, C \in \operatorname{obj}\mathscr{C}$ kohti. Näille pätee

(i) Morfismien joukot $\operatorname{Hom}(A, B)$ ovat pareittain erillisiä.

(ii) Yhdistelmä on liitännäinen silloin, kun se on määritelty.

(iii) Jokaiselle $A \in \operatorname{obj}\mathscr{C}$ on olemassa *identiteetti* $\mathrm{id}_A \in \operatorname{Hom}(A, A)$, jolle $\mathrm{id}_A \circ f = f$ jokaisella $f \in \operatorname{Hom}(B, A)$, ja kaikilla $B \in \operatorname{obj}\mathscr{C}$ ja $g \circ \mathrm{id}_A = g$ jokaisella $g \in \operatorname{Hom}(A, C)$, ja kaikilla $C \in \operatorname{obj}\mathscr{C}$.

Esimerkki 2.12. Esimerkki kategoriasta on Abelin ryhmien kategoria Ab, jonka objekteja ovat Abelin ryhmät ja jonka morfismeja ovat ryhmähomomorfismit.

Määritelmä 2.13. Jos $\mathscr{A}$ ja $\mathscr{C}$ ovat kategorioita, niin *funktori* $T : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ on funktio, jolle pätee:

(i) Jos $A \in \operatorname{obj}\mathscr{A}$, niin $TA \in \operatorname{obj}\mathscr{C}$.

(ii) Jos $f : A \to A'$ on morfismi kategoriassa $\mathscr{A}$, niin $Tf : TA \to TA'$ on morfismi kategoriassa $\mathscr{C}$.

(iii) Jos f ja g ovat morfismeja kategoriassa $\mathscr{A}$, missä $g \circ f$ on määritelty, niin

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf).$$

(iv) $T(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{TA}$ kaikilla $A \in \operatorname{obj}\mathscr{A}$.

Määritelmä 2.14. Olkoot B, A_1, A_2 kategorian $\mathscr{C}$ objekteja ja olkoot f_1, f_2 morfismeja:

$$
(\delta) : \quad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & A_1 \\
A_2 &
\end{tikzcd}
$$

Kaavion (δ) *ratkaisu* on sellainen objekti C ja morfismit g_1, g_2, että seuraava kaavio kommutoi:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & A_1 \arrow[d, "g_1"] \\
A_2 \arrow[r, "g_2"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Kaavion (δ) *pusku* on sellainen ratkaisu (C, g_1, g_2), että mille tahansa muulle ratkaisulle (D, h_1, h_2) on olemassa yksikäsitteinen morfismi $\varphi : C \to D$, joka saa seuraavan kaavion kommutoimaan:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & A_1 \arrow[d, "g_1"'] \arrow[dr, "h_1"] & \\
A_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[drr, "h_2"'] & C \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
& & D
\end{tikzcd}
$$

Lause 2.15 (Liimauslause liitosavaruuksille)**.** *Olkoot i ja j suljettuja kofibraatioita ja kuvan 2.1 kommutoivan kaavion etummainen ja takimmainen neliö puskuja, jotka määrittävät avaruudet Q ja R liitosavaruuksiksi*

$$Q = B \sqcup_f X \text{ ja } R = D \sqcup_g Y.$$

Oletetaan, että φ^0, φ^1 ja φ^2 ovat homotopiaekvivalensseja. Tällöin kuvaus

$$\varphi : B \sqcup_f X \to D \sqcup_g Y$$

kuvausten φ^0, φ^1 ja φ^2 avulla määriteltynä on homotopiaekvivalenssi.

Todistus (ks. [3, s. 296]). □

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi^0"] \arrow[dd, "i"'] & & B \arrow[dr, "\varphi^2"] \arrow[dd, "\bar{\imath}"] & \\
& C \arrow[rr, "g"] \arrow[dd, "j"'] & & D \arrow[dd, "\bar{\jmath}"] \\
X \arrow[rr, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\varphi^1"'] & & Q \arrow[dr, "\varphi"] & \\
& Y \arrow[rr, "\bar{g}"'] & & R
\end{tikzcd}
$$

Kuva 2.1. Kommutoiva kaavio, missä i ja j ovat suljettujen aliavaruuksien inkluusioita.

2.4 CW-kompleksit

Diskreetin Morse-teorian tärkeimmät lauseet esitetään parhaiten CW-kompleksien avulla, joten seuraavaksi esitellään perusasioita näistä komplekseista. CW-kompleksit rakentuvat soluista ja niiden perusoperaatio on solun liittäminen. Tämän aliluvun tiedot pohjautuvat Rotmanin ja Formanin teoksiin [15] ja [7]. Kattavan esityksen tästä aiheesta löytää lähteestä [14].

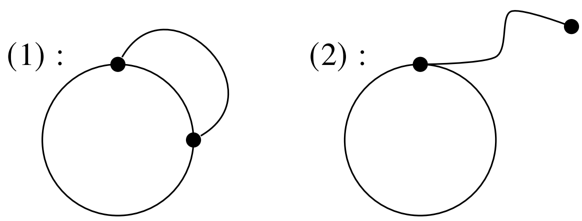
Olkoon D^n suljettu yksikkökuula n-ulotteisessa Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^n$, toisin sanoen $D^n = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| \leqslant 1\}$. Kuulan D^n reuna on $(n-1)$-ulotteinen yksikköpallo $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\| = 1\}$.

Määritelmä 2.16. *Suljettu n-solu e* on topologinen avaruus, joka on homeomorfinen suljetun kuulan D^n kanssa. Jos $f : D^n \to e$ on homeomorfismi, sanotaan kuvaa $f(D^n - S^{n-1})$ *avoimeksi n-soluksi* ja kuvaa $f(S^{n-1})$ avoimen solun $f(D^n - S^{n-1})$ *reunaksi*.

Tässä tutkielmassa solulla tarkoitetaan avointa solua, ellei toisin mainita. Avointa n-solua voidaan merkitä $\alpha^{(n)}$ tai lyhyemmin α. Solun α reunaa merkitään $\dot{\alpha}$.

Määritelmä 2.17. Olkoon Y Hausdorffin avaruus ja olkoon $f : S^{n-1} \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin $D^n \sqcup_f Y$ on avaruus, joka saadaan avaruudesta Y *liittämällä n-solu* funktiolla f. Kuvausta f kutsutaan *liitoskuvaukseksi*.

Esimerkki 2.18. Olkoon X ympyrä. Kuvassa 2.2 vasemmalla nähdään eräs mahdollinen ratkaisu, kun ympyrään X liitetään 1-solu. Oikeanpuoleisessa kuvassa puolestaan ei ole kyse 1-solun liittämisestä, koska 1-solun koko reunaa ei ole "liimattu"avaruuteen X.



Kuva 2.2. (1): 1-solu liitettynä ympyrään. (2) 1-solu, jota ei ole liitetty ympyrään.

Olkoot (X, A) ja (Y, B) topologisia pareja. Jatkuva kuvaus $g : (X, A) \to (Y, B)$ tarkoittaa jatkuvaa kuvausta $g : X \to Y$, jolle $g(A) \subset B$.

Määritelmä 2.19. Jatkuva kuvaus $g : (X, A) \to (Y, B)$ on *relatiivinen homeomorfismi*, jos sen rajoittuma $g \mid (X - A) : X - A \to Y - B$ on homeomorfismi.

Määritelmä 2.20. Olkoon X joukko, joka on peitetty osajoukoilla A_j, missä j kuuluu johonkin indeksijoukkoon J, toisin sanoen $X = \bigcup_{j \in J} A_j$. Oletetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) jokainen A_j on topologinen avaruus;

(2) kaikille $j, k \in J$, joukkojen A_j ja A_k topologiat ovat samat leikkauksessa $A_j \cap A_k$;

(3) kaikille $j, k \in J$, leikkaus $A_j \cap A_k$ on suljettu joukoissa A_j ja A_k.

Tällöin joukon X *heikko topologia* joukkojen A_j, $j \in J$, avulla määriteltynä on se topologia, jonka suljetut joukot ovat ne osajoukot $F \subset X$, joille $F \cap A_j$ on suljettu joukossa A_j jokaiselle $j \in J$.

Määritelmä 2.21. Olkoon topologinen avaruus X erillinen yhdiste soluja: $X = \bigcup\{\alpha : \alpha \in E\}$. Jokaiselle $k \geqslant 0$, avaruuden X *k-ranka* X^k on

$$X^k = \bigcup\{\alpha \in E : \dim(\alpha) \leqslant k\}.$$

Tietysti $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$ ja $X = \bigcup_{k \geqslant 0} X^k$.

Määritelmä 2.22. *CW-kompleksi* on järjestetty kolmikko (X, E, Φ), missä X on Hausdorffin avaruus, E on joukko soluja avaruudessa X ja $\Phi = \{\Phi_\alpha : \alpha \in E\}$ on joukko kuvauksia, joille pätee

(1) $X = \bigcup\{\alpha : \alpha \in E\}$ (erillinen yhdiste);

(2) jokaiselle k-solulle $\alpha \in E$, kuvaus $\Phi_\alpha : (D^k, S^{k-1}) \to (\alpha \cup X^{k-1}, X^{k-1})$ on relatiivinen homeomorfismi;

(3) jos $\alpha \in E$, niin sulkeuma $\bar{\alpha}$ sisältyy joukon E solujen äärelliseen yhdisteeseen;

(4) avaruudella X on kokoelman $\{\bar{\alpha} : \alpha \in E\}$ määräämä heikko topologia.

Jos (X, E, Φ) on CW-kompleksi, niin silloin avaruutta X kutsutaan CW-avaruudeksi, paria (E, Φ) kutsutaan avaruuden X CW-hajotelmaksi ja kuvausta $\Phi_\alpha \in \Phi$ kutsutaan solun α karakteristiseksi kuvaukseksi. Lyhyemmin voidaan sanoa, että X on CW-kompleksi. Suoraan määritelmästä 2.22 seuraa, että simpleksiset kompleksit ovat CW-komplekseja.

Määritelmä 2.23. CW-kompleksi (X, E, Φ) on *äärellinen*, jos E on äärellinen joukko.

Jos (X, E, Φ) on äärellinen CW-kompleksi, niin määritelmän 2.22 ehto (3) on tarpeeton. Tässä työssä oletetaan, että CW-kompleksit ovat äärellisiä ellein toisin mainita.

Määritelmä 2.24. CW-kompleksi (X, E, Φ) on *säännöllinen*, jos kaikki liitoskuvausten rajoittumat $\Phi_\alpha| : S^{k-1} \to \Phi_\alpha(S^{k-1})$ ovat homeomorfismeja.

Olkoon K CW-kompleksi. Merkinnällä $\alpha^{(p)}$ tarkoitetaan, että α on solu, jonka dimensio on p. Solujen välistä suhdetta merkitään $\beta > \alpha$ (tai $\alpha < \beta$), jos $\alpha \neq \beta$ ja $\alpha \subset \bar{\beta}$, missä $\bar{\beta}$ on solun β sulkeuma. Sanotaan lisäksi, että α on solun β sivu tai, että β on solun α ko-sivu. Solun β sivu α on vapaa, jos se ei ole minkään muun solun sivu. Merkitään $\beta \geqslant \alpha$, jos $\beta = \alpha$ tai $\beta > \alpha$. Lukua $\dim(\beta) - \dim(\alpha)$ kutsutaan solun α *kodimensioksi* solussa β. Jos α on CW-kompleksin K solu, voidaan merkitä $\alpha \in K$.

Seuraavassa määritelmässä merkinnällä $\Phi_{\lambda*}$ tarkoitetaan kuvauksen Φ_λ indusoimaa homomorfismia. Lisäksi merkinnöillä $H_n(X^n, X^{n-1})$ ja $H_n(D^n, S^{n-1})$ tarkoitetaan singulaarisia homologiaryhmiä. Singulaarista homologiaa on esitelty Hatcherin kirjan [10] luvussa 2 sekä Rotmanin kirjan [15] luvussa 4.

Määritelmä 2.25. Olkoon K CW-kompleksi. Jos $\Phi_\lambda : D^n \to \alpha_\lambda^n \subset K$ on kompleksin K n-solun α_λ^n karakteristinen kuvaus, niin

$$\Phi_{\lambda*}(H_n(D^n, S^{n-1})) \cong H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

ja ryhmän $\Phi_{\lambda*}(H_n(D^n, S^{n-1})) \subset H_n(K^n, K^{n-1})$ virittäjän valintaa kutsutaan solun α_λ^n *suunnaksi*.

Määritelmä 2.26. *Suunnattu solu* on solu, jolle on annettu suunta. Jos solu α on suunnattu, niin merkinnällä $-\alpha$ tarkoitetaan samaa solua, jonka suunta on vastakkainen.

Olkoon $\alpha^{(p)}$ solun $\beta^{(p+1)}$sivu. Olkoon K äärellinen CW-kompleksi ja olkoon B suljettu kuula, jonka dimensio on $p+1$. Olkoon $h : B \to K$ jatkuva kuvaus, joka kuvaa kuulan B sisäosan homeomorfisesti solulle β.

Määritelmä 2.27. Solu $\alpha^{(p)}$ on solun $\beta^{(p+1)}$ *säännöllinen sivu*, jos

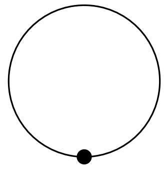
(i) kuvaus $h : h^{-1}(\alpha) \to \alpha$ on homeomorfismi,

(ii) alkukuva $\overline{h^{-1}(\alpha)}$ on suljettu p-kuula.

Muuten sanotaan, että α on solun β *epäsäännöllinen sivu*.

Jos K on säännöllinen CW-kompleksi, esimerkiksi jos K on simpleksinen kompleksi tai monitahokas, niin kaikki sivut ovat säännöllisiä.

Esimerkki 2.28. Kuvassa 2.3 on esimerkki CW-kompleksista, joka ei ole säännöllinen. Tämä CW-kompleksi muodostuu yhdestä 0-solusta ja yhdestä 1-solusta. 1-solun molemmat päätepisteet on siis liimattu samaan 0-soluun.



Kuva 2.3. Ei-säännöllinen CW-kompleksi.

Seuraavaksi esitetään CW-kompleksin ominaisuuksia, joita tarvitaan myöhemmin esitettävissä todistuksissa.

Lause 2.29. *Olkoot $\beta^{(p+1)} > \alpha^{(p)} > \gamma^{(p-1)}$. Tällöin yksi seuraavista on voimassa:*

(i) Solu α on solun β epäsäännöllinen sivu.

(ii) Solu γ on solun α epäsäännöllinen sivu.

(iii) On olemassa p-solu $\tilde{\alpha} \neq \alpha$, jolle

$$\beta > \tilde{\alpha} > \gamma.$$

Todistus (ks. [7, s. 98]). □

Lause 2.30. *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi, ja olkoon $\beta^{(p+r)} > \gamma^{(p-1)}$ joillekin p ja $r \geqslant 1$. Tällöin on olemassa sellaiset $p + r - 1$-solut α ja $\tilde{\alpha}$, että $\alpha \neq \tilde{\alpha}$ ja*

$$\beta > \alpha > \gamma, \; \beta > \tilde{\alpha} > \gamma.$$

Todistus (ks. [7, s. 100]). □

2.5 Romahtaminen

Tässä aliluvussa tarkastellaan CW-kompleksien romahtamista. Luvun tiedot pohjautuvat yhdistelmään lähteistä [7], [5] ja [17].

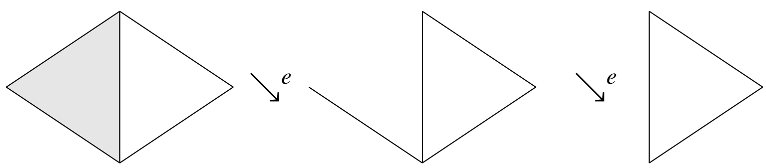
Määritelmä 2.31. Olkoon K CW-kompleksi ja olkoot $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ kompleksin K soluja, joille pätee:

(i) Solu α on solun β säännöllinen sivu.

(ii) Solu α ei ole minkään muun solun sivu.

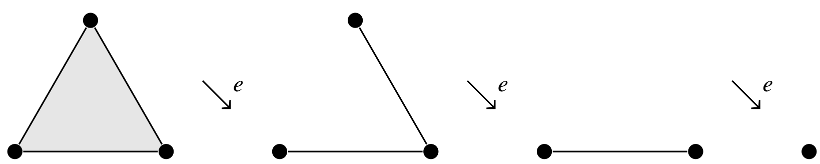
Olkoon $L = K - (\alpha \cup \beta)$. Sanotaan, että kompleksi L saadaan kompleksista K *yksinkertaisella romahtamisella*, ja sitä merkitään $K \searrow^{e} L$. Solujen α ja β paria kutsutaan *vapaaksi pariksi*.

Määritelmä 2.32. Sanotaan, että CW-kompleksi K romahtaa CW-kompleksiin L tai, että CW-kompleksi L laajentuu CW-kompleksiin K, jos kompleksi L voidaan muodostaa kompleksista K jonolla yksinkertaisia romahduksia. Tätä merkitään $K \searrow L$ tai $L \nearrow K$. Komplekseilla K ja L on sama *yksinkertainen homotopiatyyppi*, jos on olemassa jono CW-komplekseja $K = K_1, K_2, \ldots, K_n = L$, joille pätee $K_i \searrow K_{i+1}$ tai $K_i \nearrow K_{i+1}$ jokaisella $1 \leqslant i \leqslant n$. Tätä merkitään $K \sim L$.



Kuva 2.4. Yksinkertaisia romahduksia.

Jos avaruuksilla on sama yksinkertainen homotopiatyyppi, niin niillä on sama homotopiatyyppi.



Kuva 2.5. Simpleksinen kompleksi, joka romahtaa yhteen omista kärjistään.

Määritelmä 2.33. CW-kompleksi K on *romahtava*, jos on olemassa jono yksinkertaisia romahduksia

$$K = K_0 \searrow K_1 \searrow \cdots \searrow K_{n-1} \searrow K_n = \{v\}.$$

Siis CW-kompleksi K on romahtava, jos se romahtaa johonkin omista 0-soluistaan.

2.6 Soluhomologia

Soluhomologian avulla voidaan laskea CW-kompleksien homologiaryhmiä. Ennen kuin määritellään soluhomologia, esitetään muutamia ominaisuuksia. Merkinnöillä $H_k(X^n, X^{n-1})$ ja $H_k(X^n)$ tarkoitetaan singulaarisia homologiaryhmiä. Tämän aliluvun päälähteenä käytetään Hatcherin teosta [10].

Lause 2.34. *Olkoon X CW-kompleksi. Tällöin:*

(1) Ryhmä $H_k(X^n, X^{n-1})$ on triviaali, kun $k \neq n$. Kun $k = n$, niin $H_k(X^n, X^{n-1})$ on vapaa Abelin ryhmä, jonka kannan alkioiden ja kompleksin X n-solujen välillä on bijektiivinen vastaavuus.

(2) Ryhmä $H_k(X^n) = 0$, kun $k > n$. Jos kompleksi X on äärellisulotteinen, niin $H_k(X) = 0$, kun $k > dimX$.

(3) Inkluusio $X^n \hookrightarrow X$ indusoi isomorfismin $H_k(X^n) \to H_k(X)$, kun $k < n$ ja surjektion, kun $k = n$.

Todistus (ks. [10, s. 137]). □

Olkoon X CW-kompleksi. Edellisen lauseen nojalla voidaan muodostaa seuraava kaavio, missä vinot jonot ovat osia parien (X^{n+1}, X^n), (X^n, X^{n-1}) ja (X^{n-1}, X^{n-2}) pitkistä eksakteista homologiajonoista.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & 0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X) \arrow[urr] & & & & \\
 & & & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr, "j_n"] & & & & & \\
\cdots \arrow[rr] & & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\partial_n"'] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[rr] & & \cdots \\
 & & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "j_{n-1}"] & & & \\
 & & & & 0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Kuva 2.6. Kaavio.

Kaaviossa homomorfismit d_{n+1} ja d_n määritellään yhdisteinä $j_n\partial_{n+1}$ ja $j_{n-1}\partial_n$, jotka ovat reunaoperaatioiden ∂_{n+1} ja ∂_n "relativisaatioita". Nyt d_nd_{n+1} on seuraava yhdiste:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) &\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X^n) \xrightarrow{j_n} H_n(X^n, X^{n-1}) \\ &\xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}). \end{aligned}$$

Yhdiste $d_nd_{n+1} = 0$, koska keskimmäiset kaksi nuolta ovat vierekkäisiä parin (X^n, X^{n-1}) pitkässä eksaktissa homologiajonossa. Näin ollen kaavion vaakasuora rivi on ketjukompleksi.

Määritelmä 2.35. Olkoon X CW-kompleksi. Kompleksin X *solumainen n:s ketjuryhmä* on

$$C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}).$$

Ryhmä $C_n(X)$ on vapaa Abelin ryhmä, jonka kannan muodostavat kompleksin X n-solut [15, Theorem 8.39].

Määritelmä 2.36. Olkoon X CW-kompleksi. Kompleksin X *solumainen ketjukompleksi* on

$$\cdots \to H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \to \dots$$

Solumaiselle ketjukompleksille käytetään merkintää (C, d).

Yllä määritellyn solumaisen ketjukompleksin homologiaryhmiä kutsutaan kompleksin X *soluhomologiaryhmiksi* ja niitä merkitään $H_n^{CW}(X)$.

Määritelmä 2.37. Olkoot (C, d) ja (C', d') solumaisia ketjukomplekseja. *Ketjukuvaus* $f : (C, d) \to (C', d')$ on jono sellaisia homomorfismeja $\{f_n : C_n \to C'_n\}$, että seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \Big\downarrow f_{n+1} & & \Big\downarrow f_n & & \Big\downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Siis $d'_nf_n = f_{n-1}d_n$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$.

Lause 2.38. *Olkoon X CW-kompleksi. Tällöin $H_n^{CW}(X) \cong H_n(X)$.*

Todistus (ks. [10, s. 140]). Kaavion 2.6 nojalla $H_n(X)$ voidaan samaistaa tekijäryhmän $H_n(X^n)/\mathrm{Im}\,\partial_{n+1}$ kanssa. Koska j_n on injektio, niin se kuvaa ryhmän $\mathrm{Im}\,\partial_{n+1}$ isomorfisesti ryhmälle $\mathrm{Im}(j_n\partial_{n+1}) = \mathrm{Im}\,d_{n+1}$ ja ryhmän $H_n(X^n)$ isomorfisesti ryhmälle $\mathrm{Im}\,j_n = \mathrm{Ker}\,\partial_n$. Koska j_{n-1} on injektio, niin $\mathrm{Ker}\,\partial_n = \mathrm{Ker}\,d_n$. Näin ollen j_n indusoi isomorfismin $H_n(x^n)/\mathrm{Im}\,\partial_{n+1} \cong \mathrm{Ker}\,d_n/\mathrm{Im}\,d_{n+1}$. $\square$

Lauseen 2.38 nojalla siis CW-kompleksin soluhomologiaryhmät vastaavat singulaarisia homologiaryhmiä. Lauseen 2.38 välittömiä seurauksia ovat seuraavat:

(i) Ryhmä $H_n(X) = 0$, jos X on CW-kompleksi, jolla ei ole yhtään n-solua.

(ii) Jos X on CW-kompleksi, jolla on k n-solua, niin ryhmällä $H_n(X)$ on korkeintaan k virittäjää. Koska $H_n(X^n, X^{n-1})$ on vapaa Abelin ryhmä, jolla on k virittäjää, niin aliryhmällä $\operatorname{Ker} d_n$ on korkeintaan k virittäjää ja sama pätee myös ryhmälle $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$.

(iii) Jos X on CW-kompleksi, jonka mitkään kaksi solua eivät ole vierekkäistä dimensiota, niin $H_n(X)$ on vapaa Abelin ryhmä, jonka kannan ja kompleksin X n-solujen välillä on bijektiivinen vastaavuus. Nimittäin solumaiset reunakuvaukset d_n ovat tässä tapauksessa automaattisesti nollia.

Seuraavaksi määritellään kuvauksen $f : S^n \to S^n$ aste ja näytetään, kuinka solumaiset reunakuvaukset d_n voidaan laskea.

Määritelmä 2.39. Olkoon $n > 0$ ja olkoon $f : S^n \to S^n$ jatkuva kuvaus. Indusoitu kuvaus $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ on homomorfismi äärettömältä sykliseltä ryhmältä itselleen, joten sen tulee olla muotoa $f_*(\alpha) = d\alpha$, jollakin $d \in \mathbb{Z}$, joka riippuu vain kuvauksesta f. Tätä lukua kutsutaan kuvauksen f *asteeksi* ja sitä merkitään $\deg f$.

Kuvaus $S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1} \to S^{n-1}_\beta$ saadaan liittämällä solu e^n_α aliavaruuteen X^{n-1} liitoskuvauksella $S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1}$ ja sitten romahduttamalla $X^{n-1} - e^{n-1}_\beta$ pisteeksi tekijäkuvauksella $X^{n-1} \to X^{n-1}/(X^{n-1} - e^{n-1}_\beta)$, missä tekijäavaruus on homeomorfinen $(n-1)$-ulotteisen pallon kanssa, jota merkitään S^{n-1}_β.

Lause 2.40. *Olkoon X CW-kompleksi, ja olkoon $\{e^n_\alpha\}_\alpha$ kompleksin X n-solujen joukko. Tällöin*

$$d_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta,$$

missä $d_{\alpha\beta}$ on kuvauksen $S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1} \to S^{n-1}_\beta$ aste.

Todistus (ks. [10, s. 140]). □

Tästä eteenpäin soluhomologiaryhmää $H^{CW}_n(X)$ merkitään $H_n(X)$.

2.7 Tensoritulo

Tässä aliluvussa käsitellään tensorituloa ja siihen liittyviä ominaisuuksia. Luvun lähteenä käytetään Rotmanin teosta [15].

Määritelmä 2.41. Olkoot A ja B Abelin ryhmiä. Ryhmien A ja B *tensoritulo*, jota merkitään $A \otimes B$, on Abelin ryhmä, jolla on seuraavanlainen esitys:

Virittäjät: $A \times B$, eli kaikki järjestetyt parit (a, b).

Relaatiot: $(a + a', b) = (a, b) + (a', b)$ ja $(a, b + b') = (a, b) + (a, b')$ kaikilla $a, a' \in A$ ja kaikilla $b, b' \in B$.

Jos F on vapaa Abelin ryhmä, jolla on kanta $A \times B$ ja jos N on Abelin ryhmän F kaikkien relaatioiden virittämä aliryhmä, niin $A \otimes B = F/N$. Sivuluokkaa $(a, b) + N$ merkitään $a \otimes b$. Siis tensoritulon tyypillisen alkion esitys on muotoa $\sum m_i(a_i \otimes b_i)$, missä $m_i \in \mathbb{Z}$.

Määritelmä 2.42. Olkoot A, B ja G Abelin ryhmiä. *Bilineaarinen funktio* $\varphi : A \times B \to G$ on funktio, jolle pätee

$$\varphi(a + a', b) = \varphi(a, b) + \varphi(a', b)$$

ja

$$\varphi(a, b + b') = \varphi(a, b) + \varphi(a, b')$$

kaikilla $a, a' \in A$ ja kaikilla $b, b' \in B$.

Lause 2.43. *(i) Olkoot A ja B Abelin ryhmiä. Olkoon G mikä tahansa Abelin ryhmä ja olkoon $\varphi : A \times B \to G$ mikä tahansa bilineaarinen kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $f : A \otimes B \to G$, joka saa seuraavan kaavion kommutoimaan:*

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \otimes B \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Kaaviossa v on luonnollinen kuvaus $(a, b) \mapsto a \otimes b$.

(ii) $A \otimes B$ on ainoa ryhmä, jolla on tämä ominaisuus. Siis, jos T on Abelin ryhmä ja $\eta : A \times B \to T$ on sellainen bilineaarinen kuvaus, että kaaviolla

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & T \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

on yksikäsitteinen "täydentyminen" f, niin $T \cong A \otimes B$.

Todistus (ks. [15, s. 254]). (i) Nyt $A \otimes B = F/N$, missä F on vapaa Abelin ryhmä, jolla on kanta $A \times B$ ja missä N on Abelin ryhmän F aliryhmä, joka on varustettu tietyillä relaatioilla. Tarkastellaan seuraavaa kaaviota:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] & F/N = A \otimes B \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Määritellään $\tilde{\varphi} : F \to G$ laajentamalla lineaarisesti. Aliryhmän N relaatiot ovat sellaisia, että $N \subset \operatorname{Ker} \tilde{\varphi}$, joten $\tilde{\varphi}$ indusoi homomorfismin $f : F/N \to G$, missä $f : (a, b) + N \mapsto \tilde{\varphi}(a, b) = \varphi(a, b)$. Toisin sanoen $f(a \otimes b) = \varphi(a, b)$ jokaisella $(a, b) \in A \times B$. Tällainen homomorfismi f on yksikäsitteinen, sillä kaikkien tensoritulojen $a \otimes b$ joukko virittää ryhmän $A \otimes B$.

(ii) Tarkastellaan seuraavaa kaaviota:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "\eta"'] & & A \otimes B \arrow[dl, shift right, "f"'] \\
& T \arrow[ur, shift right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Oletuksen nojalla on olemassa homomorfismit $f : A \otimes B \to T$ ja $g : T \to A \otimes B$, joille $fv = \eta$ ja $g\eta = v$. Tarkastellaan sitten kaaviota

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v"'] & & A \otimes B \arrow[dl, dashed] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

Nyt gf ja identtinen kuvaus täydentävät kaavion, joten täydentymisen yksikäsitteisyyden nojalla $gf = \mathrm{id}$. Vastaavanlainen kaavio osoittaa, että $fg = \mathrm{id}_T$, joten f ja g ovat isomorfismeja.

□

Lause 2.44. *Olkoot $f : A \to A'$ ja $g : B \to B'$ homomorfismeja.*

(i) On olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $A \otimes B \to A' \otimes B'$, jota merkitään $f \otimes g$, jolle $a \otimes b \mapsto fa \otimes gb$ jokaisella $a \in A$ ja jokaisella $b \in B$.

(ii) Jos $f'A' \to A''$ ja $g' : B' \to B''$ ovat homomorfismeja, niin

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

Todistus (ks. [15, s. 255]). (i) Funktio $\varphi : A \times B \to A' \otimes B'$, jolle $\varphi(a, b) = fa \otimes gb$ on selvästi bilineaarinen. Lauseen 2.43 kohdan (i) nojalla on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $A \otimes B \to A' \otimes B'$, jolle $a \otimes b \mapsto \varphi(a, b) = fa \otimes gb$.

(ii) Molemmat kuvaukset $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$ ja $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ täydentävät seuraavan kaavion

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \otimes B \arrow[dl, dashed] \\
& A'' \otimes B'' &
\end{tikzcd}$$

missä $\varphi(a, b) = f'(f(a)) \otimes g'(g(b))$.

$\square$

Seuraus 2.45. *Olkoon A Abelin ryhmä. On olemassa funktori $T = T_A : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$, jolle $T(B) = A \otimes B$ ja $T(f) = id_A \otimes f$.*

Todistus (ks. [15, s. 255]). Lauseen 2.44 kohdan (ii) nojalla

$$(\mathrm{id}_A \otimes f') \circ (\mathrm{id}_A \otimes f) = \mathrm{id}_A \otimes f'f.$$

Lauseen 2.43 kohdan (i) nojalla $\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{A \otimes B}$. $\square$

Funktoria T_A merkitään usein $A \otimes \_\_$. Jos A ja B ovat Abelin ryhmiä ja $f, g : A \to B$ ovat homomorfismeja, niin myös $f + g : A \to B$ on homomorfismi.

Määritelmä 2.46. Funktori $F : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ on *additiivinen*, jos kaikille Abelin ryhmille A ja B ja kaikille homomorfismeille $f, g : A \to B$ pätee

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Esimerkki 2.47. Osoitetaan, että tensoritulofunktori $T_A : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$, $B \mapsto A \otimes B$ on additiivinen. Olkoot B ja C Abelin ryhmiä ja olkoot $f, g : B \to C$ homomorfismeja. Tällöin

$$T_A(f) : A \otimes B \to A \otimes C,\ T_A(f) = \mathrm{id}_A \otimes f,$$

$$T_A(g) : A \otimes B \to A \otimes C,\ T_A(f) = \mathrm{id}_A \otimes g$$

ja

$$T_A(f + g) : A \otimes B \to A \otimes C,\ T_A(f + g) = \mathrm{id}_A \otimes (f + g).$$

Olkoon $a \otimes b \in A \otimes B$. Tällöin

$$\begin{aligned}
T_A(f + g)(a \otimes b) &= (\mathrm{id}_A \otimes (f + g))(a \otimes b) \\
&= (\mathrm{id}_A(a)) \otimes ((f + g)(b)) \\
&= a \otimes (f(b) + g(b)) \\
&= a \otimes f(b) + a \otimes g(b) \\
&= (\mathrm{id}_A \otimes f)(a \otimes b) + (\mathrm{id}_A \otimes g)(a \otimes b) \\
&= T_A(f)(a \otimes b) + T_A(g)(a \otimes b) \\
&= (T_A(f) + T_A(g))(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Koska alkiot $a \otimes b$, missä $a \in A$ ja $b \in B$, virittävät tulon $A \otimes B$, niin

$$T_A(f + g) = T_A(f) + T_A(g).$$

Siis T_A on additiivinen.

Jos (C_*, ∂) on ketjukompleksi, niin samoin on $(C_* \otimes G, \partial \otimes \mathrm{id}_G)$ millä tahansa Abelin ryhmällä G. Nimittäin minkä tahansa kahden peräkkäisen kuvauksen yhdistelmä kompleksissa

$$\cdots \to C_{n+1} \otimes G \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes \mathrm{id}} C_n \otimes G \xrightarrow{\partial_n \otimes \mathrm{id}} C_{n-1} \otimes G \to \ldots$$

on nolla. Tämä seuraa lauseen 2.44 kohdasta (ii) ja siitä, että $\_\otimes G$ on additiivinen.

Määritelmä 2.48. Olkoon (X, A) topologinen pari ja olkoon G Abelin ryhmä. Jos $(S_*(X, A), \partial)$ on parin (X, A) singulaarinen ketjukompleksi, niin seuraava kompleksi on singulaarinen kompleksi *kertoimilla G*

$$\cdots \to S_{n+1}(X, A) \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes \mathrm{id}} S_n(X, A) \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes \mathrm{id}} S_{n-1}(X, A) \otimes G \to \ldots .$$

Parin (X, A) n:s *homologiaryhmä kertoimilla G* on

$$H_n(X, A; G) = \mathrm{Ker}(\partial_n \otimes \mathrm{id})/\mathrm{Im}(\partial_{n+1} \otimes \mathrm{id}).$$

Seuraavat kaksi määritelmää ovat peräisin lähteestä [16].

Määritelmä 2.49. Olkoon G ryhmä. Ryhmän G *torsioaliryhmä* on

$$tG = \{x \in G \mid nx = 0 \text{ jollakin } 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}.$$

Jos G ei ole Abelin ryhmä, niin tG ei välttämättä ole aliryhmä.

Määritelmä 2.50. Ryhmä G on *torsioryhmä*, jos $tG = G$. Ryhmä G on *torsiovapaa*, jos $tG = 0$.

Apulause 2.51. Olkoon G Abelin ryhmä. Kuvaus $\mathbb{Z} \otimes G \to G$, jolle $n \otimes g \mapsto ng$, on isomorfismi.

Todistus. Olkoon $f : \mathbb{Z} \times G \to G$, jolle $(n, g) \mapsto ng$. Olkoot $z, z' \in \mathbb{Z}$ ja $g, g' \in G$. Tällöin

$$f(z + z', g) = (z + z')g = zg + z'g = f(z, g) + f(z', g)$$

ja

$$f(z, g + g') = z(g + g') = zg + zg' = f(z, g) + f(z, g'),$$

joten f on bilineaarinen. Nyt lauseen 2.43 kohdan (i) nojalla on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $\tilde{f} : \mathbb{Z} \otimes G \to G$, joka saa seuraavan kaavion kommutoimaan:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \times G \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{Z} \otimes G \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

missä $v : \mathbb{Z} \times G \to \mathbb{Z} \otimes G$, jolle $(n, g) \mapsto n \otimes g$. Tällöin

$$\tilde{f}(n \otimes g) = f(n, g) = ng,$$

toisin sanoen $\tilde{f}$ on kuvaus $\mathbb{Z} \otimes G \to G$. Olkoon $g \in G$. Tällöin $\tilde{f}(1 \otimes g) = g$. Siis $\tilde{f}$ on surjektio. Nyt mikä tahansa ryhmän $\mathbb{Z} \otimes G$ alkio on muotoa $\sum n_i \otimes g_i$ (äärellinen summa), missä

$$\sum n_i \otimes g_i = \sum 1 \otimes n_i g_i = 1 \otimes \left(\sum n_i g_i \right).$$

Näin ollen ryhmän $\mathbb{Z} \otimes G$ mikä tahansa alkio on muotoa $1 \otimes g$. Oletetaan sitten, että $\tilde{f}(n \otimes g) = ng = 0$. Tällöin $n \otimes g = 1 \otimes ng = 1 \otimes 0 = 0$. Siis $\tilde{f}$ on injektio ja edelleen isomorfismi. □

Esimerkki 2.52 (vrt. [15, s. 258])**.** Tarkastellaan lyhyttä eksaktia jonoa

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{p} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

missä i on inkluusio ja p on tekijähomomorfismi. Olkoon G torsioryhmä. Apulauseen 2.51 nojalla $\mathbb{Z} \otimes G \cong G$. Osoitetaan, että $\mathbb{Q} \otimes G = 0$. Olkoon $g \in G$ ja $q \in \mathbb{Q}$. Tällöin on olemassa sellainen $m > 0$, että $mg = 0$. Näin ollen $q \otimes g = m(q/m) \otimes g = (q/m) \otimes mg = 0$. Koska tämä pätee kaikille virittäjille $q \otimes g$, niin $\mathbb{Q} \otimes G = 0$.

Näin ollen ei voi olla olemassa injektiota $\mathbb{Z} \otimes G \to \mathbb{Q} \otimes G$, joten $i \otimes \mathrm{id} : \mathbb{Z} \otimes G \to \mathbb{Q} \otimes G$ ei ole injektiivinen.

Määritelmä 2.53. Valitaan jokaiselle Abelin ryhmälle A eksakti jono

$$0 \to R \overset{i}{\hookrightarrow} F \to A \to 0,$$

missä F on vapaa Abelin ryhmä. Jokaiselle Abelin ryhmälle B määritellään

$$\mathrm{Tor}(A, B) = \mathrm{Ker}(i \otimes \mathrm{id}_B).$$

Jokaiselle Abelin ryhmälle B, $\mathrm{Tor}(\ ,B) : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ on additiivinen funktori, jolle pätee seuraava ominaisuus:

Jos A on torsiovapaa, niin $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$.

Lisää Tor-funktorin ominaisuuksia voi lukea lähteestä [15, s. 260]. Seuraavassa lauseessa merkinnällä cls z tarkoitetaan n-silmukan z homologialuokkaa.

Lause 2.54 (Universaali kerroinlause)**.** *(i) Jokaiselle avaruudelle X ja Abelin ryhmälle G on olemassa eksakti jono kaikilla $n \geqslant 0$:*

$$0 \to H_n(X) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(X; G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G) \to 0,$$

missä $\alpha : (cls\ z) \otimes g \mapsto cls(z \otimes g)$.

(ii) Tämä jono halkeaa seuraavasti:

$$H_n(X; G) \cong H_n(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G).$$

Todistus (ks. [15, s. 261]). □

2.8 Eulerin karakteristika ja Bettin luku

Tässä aliluvussa esitellään Eulerin karakteristika ja Bettin luku. Lisäksi esitetään lause, joka kertoo Bettin luvun suhteesta Eulerin karakteristikaan. Tätä lausetta ja sitä seuraavia apulauseita tullaan myöhemmin käyttämään Morse-epäyhtälöiden yhteydessä. Tämän aliluvun lähteinä käytetään teoksia [17] ja [15]. Tässä luvussa olevat asiat on todistettu Scovillen kirjassa [17] simpleksisille komplekseille.

Määritelmä 2.55. Olkoon K n-dimensioinen CW-kompleksi. Merkitään kompleksin K i-solujen lukumäärää c_i:llä. Kompleksin K *Eulerin karakteristika* on

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i(K).$$

Määritetään Bettin lukua varten $\dim H_i(K;\mathbb{Z}_2)$.

$$\begin{aligned}\dim H_i(K;\mathbb{Z}_2) &= \dim Z_i(K;\mathbb{Z}_2) - \dim B_i(K;\mathbb{Z}_2)\\ &= \dim \operatorname{Ker} \partial_i - \dim \operatorname{Im} \partial_{i+1}\\ &= \operatorname{null}(\partial_i) - \operatorname{rank}(\partial_{i+1}).\end{aligned}$$

Yllä olevassa kaavassa ∂ on ketjukompleksin $C \otimes \mathbb{Z}_2$ reunakuvaus $d \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$, missä (C, d) on CW-kompleksin K solumainen ketjukompleksi. Siis $H_i(K;\mathbb{Z}_2)$ on ketjukompleksin $(C \otimes \mathbb{Z}_2, d \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2})$ i:s homologiaryhmä. Merkintä $Z_i(K;\mathbb{Z}_2)$ tarkoittaa ketjukompleksin $(C \otimes \mathbb{Z}_2, d \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2})$ i-silmukoiden ryhmää ja $B_i(K;\mathbb{Z}_2)$ tarkoittaa saman ketjukompleksin i-reunojen ryhmää [15, s. 256].

Määritelmä 2.56. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi. Kompleksin K i:s $\mathbb{Z}_2$-*Bettin luku* on

$$b_i(K) = \dim H_i(K;\mathbb{Z}_2).$$

Tässä työssä Bettin luvuilla tarkoitetaan aina $\mathbb{Z}_2$-Bettin lukuja.

Lause 2.57. *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja* $\dim(K) = n$. *Tällöin*

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i.$$

Todistus (ks. [17, s. 95]). □

Apulause 2.58. Olkoot K ja L säännöllisiä CW-komplekseja. Oletetaan, että $K \sim L$. Tällöin $b_i(K) = b_i(L)$ jokaiselle kokonaisluvulle $i \geqslant 0$.

Apulause 2.59. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi. Jos K on romahtava, niin $b_i(K) = 0$ jokaisella $i \geqslant 1$ ja $b_0(K) = 1$.

Apulause 2.60. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja olkoon $\alpha^{(p)} \in K$, $p \geqslant 1$, kompleksin K solu, jonka sulkeuma ei sisälly minkään toisen solun sulkeumaan. Jos $K' := K - \{\alpha\}$ on säännöllinen CW-kompleksi, niin toinen seuraavista ehdoista on voimassa

(1) $b_p(K) = b_p(K') + 1$ ja $b_{p-1}(K) = b_{p-1}(K')$.

(2) $b_{p-1}(K) + 1 = b_{p-1}(K')$ ja $b_p(K) = b_p(K')$.

Edelleen $b_i(K) = b_i(K')$ jokaiselle $i \neq p, p-1$.

Todistus (ks. [17, s. 98]). □

3 Diskreettiä Morse-teoriaa

Tässä luvussa käsitellään diskreetin Morse-teorian perusasioita ja todistetaan tärkeimpiä lauseita.

3.1 Diskreetti Morse-funktio

Ensin määritellään diskreetti Morse-funktio sekä kriittinen solu. Tämän luvun päälähteenä käytetään Formanin teosta [7].

Määritelmä 3.1. Olkoon K CW-kompleksi. Funktio $f : K \to \mathbb{R}$ on *diskreetti Morse-funktio*, jos jokaiselle $\alpha^{(p)} \in K$ pätee

(1) Jos α on solun $\beta^{(p+1)}$ epäsäännöllinen sivu, niin $f(\beta) > f(\alpha)$. Lisäksi

$$\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leqslant f(\alpha)\} \leqslant 1.$$

(2) Jos $\gamma^{(p-1)}$ on solun α epäsäännöllinen sivu, niin $f(\gamma) < f(\alpha)$. Lisäksi

$$\#\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geqslant f(\alpha)\} \leqslant 1.$$

Määritelmä 3.1 siis kertoo, että korkeampiulotteisille soluille asetetaan suurempi arvo ja matalampiulotteisille soluille asetetaan pienempi arvo siten, että sallitaan korkeintaan yksi ”poikkeus” jokaista solua kohti.

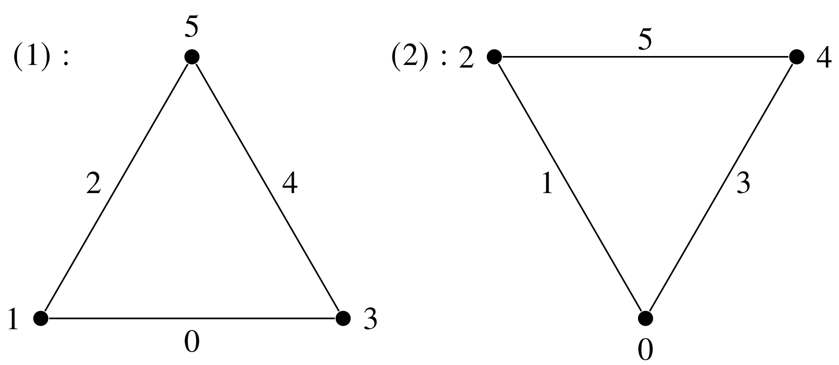
Määritelmä 3.2. Solu $\alpha^{(p)}$ on *kriittinen* diskreetin Morse-funktion f suhteen, jos

(1) $\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leqslant f(\alpha)\} = 0.$

(2) $\#\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geqslant f(\alpha)\} = 0.$

Jos α on kriittinen solu, niin lukua $f(\alpha) \in \mathbb{R}$ kutsutaan *kriittiseksi arvoksi*.

Toisin sanoen, kriittisiä soluja ovat ne solut, jotka eivät salli yhtään ”poikkeusta”. Seuraavaksi havainnollistetaan yllä esitettyjä määritelmiä esimerkin avulla.



Kuva 3.1. (1) ei ole Morse-funktio ja (2) on Morse-funktio.

Esimerkki 3.3. Kuvassa 3.1 funktiot on ilmaistu siten, että jokaisen simpleksin viereen kirjoitettu numero vastaa funktion arvoa kyseisessä simpleksissä. Tarkastellaan ensin funktiota (1). Särmä $f^{-1}(0)$ ei toteuta ehtoa (2), koska sillä on 2 matalampaa dimensiota olevaa "naapuria", joille funktion f arvot ovat korkeampia. Lisäksi kärki $f^{-1}(5)$ ei toteuta ehtoa (1), koska sillä on 2 korkeampaa dimensiota olevaa "naapuria", joille funktion f arvot ovat matalampia. Siis funktio (1) ei ole Morse-funktio. Sen sijaan funktio (2) on Morse-funktio.

Määritetään sitten funktion (2) kriittiset simpleksit. Kärki $f^{-1}(0)$ on kriittinen, koska sillä on kaksi korkeampaa dimensiota olevaa "naapuria", joille funktion f arvot ovat korkeampia. Siis kärki $f^{-1}(0)$ toteuttaa määritelmän 3.2 ehdon (1). Lisäksi särmä $f^{-1}(5)$ on kriittinen, koska sillä on kaksi matalampaaa dimensiota olevaa "naapuria", joille funktion f arvot ovat matalampia. Siis särmä $f^{-1}(5)$ toteuttaa määritelmän 3.2 ehdon (2). Näiden lisäksi muita kriittisiä simpleksejä ei ole.

Seuraava apulause, josta voidaan käyttää myös nimeä *poikkeuslemma*, on avainasemassa monissa diskreetin Morse-teorian osissa. Tätä apulausetta tullaan hyödyntämään myöhemmin esitettävissä todistuksissa.

Apulause 3.4. Olkoon K CW-kompleksi ja olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Tällöin $\alpha^{(p)} \in K$ on ei-kriittinen solu, jos ja vain jos toinen seuraavista ehdoista on voimassa:

(1) On olemassa sellainen $\beta^{(p+1)} > \alpha$, että $f(\beta) \leqslant f(\alpha)$.

(2) On olemassa sellainen $\gamma^{(p-1)} < \alpha$, että $f(\gamma) \geqslant f(\alpha)$.

Todistus (ks. [7, s. 103]). Olkoon $p \geqslant 1$. Oletetaan ensin, että ehto 1 on voimassa. Tällöin solun α tulee olla solun β säännöllinen sivu. Edelleen määritelmän 3.1 kohdan (1) nojalla, jos $\tilde{\alpha} \neq \alpha$ on joku muu solun β p-sivu, niin tulee olla $f(\tilde{\alpha}) < f(\beta)$. Siis $f(\tilde{\alpha}) < f(\alpha)$.

Oletetaan sitten, että myös ehto 2 on voimassa. Tällöin γ on solun α säännöllinen sivu. Lauseen 2.29 nojalla on olemassa p-solu $\tilde{\alpha} \neq \alpha$, jolle $\beta > \tilde{\alpha} > \gamma$. Määritelmän 3.1 ehdon (2) nojalla ei voi päteä, että olisi $f(\gamma) \geqslant f(\alpha)$ ja $f(\gamma) \geqslant f(\tilde{\alpha})$. Siis $f(\gamma) < f(\tilde{\alpha})$. Yhdistämällä saadaan

$$f(\alpha) \leqslant f(\gamma) < f(\tilde{\alpha}) < f(\beta) \leqslant f(\alpha),$$

mikä on ristiriita. □

Apulauseen 3.4 avulla voidaan esittää seuraava tulos.

Lause 3.5. *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Tällöin funktiolla f on ainakin yksi kriittinen 0-solu.*

Todistus (vrt. [13, s. 30]). Olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Oletetaan vastoin väitettä, että funktiolla f ei ole yhtään kriittistä solua. Jos CW-kompleksilla K olisi vain yksi 0-solu, niin tämä solu olisi kriittinen. Siis on olemassa ainakin kaksi 0-solua, α ja β, sekä näiden solujen välinen 1-solu, γ, koska muutoin α ja β olisivat kriittisiä. Kahden 0-solun välinen 1-solu tarkoittaa siis 1-solua, joka on liimattu näihin kahteen 0-soluun. Koska α on ei-kriittinen, voidaan olettaa, että $f(\alpha) \geqslant f(\gamma)$. Koska f on Morse-funktio, niin $f(\gamma) > f(\beta)$. Nyt, jos β ei ole minkään muun 1-solun sivu, niin β on kriittinen. Jos β on jonkun muun 1-solun sivu, niin toistetaan tätä menetelmää. Tällöin funktion f arvo jokaisessa uudessa 1-solussa on korkeintaan yhtä suuri kuin edellisessä 0-solussa ja toisaalta sen arvo jokaisessa uudessa 0-solussa on pienempi kuin edeltävässä 1-solussa. Koska CW-kompleksi on äärellinen, päättyy prosessi lopulta. Jos viimeinen 0-solu liitettäisiin siten, että sen kummatkin päätepisteet (0-soluja) ovat jo mukana, niin tällöin 1-solulla olisi kaksi poikkeusta, mikä on mahdotonta. Niinpä viimeinen 1-solu täytyy liittää siten, että sen toinen päätepiste (0-solu) on sen vapaa sivu. Tällöin tämä vapaa sivu on kriittinen 0-solu. □

Diskreetin Morse-funktion erikoistapaus on sellainen, jossa jokaiselle kriittiselle solulle asetetaan erillinen arvo.

Määritelmä 3.6. Olkoon K CW-kompleksi. Diskreetti Morse-funktio $f : K \to \mathbb{R}$ on *erinomainen*, jos funktion f rajoittuma kriittisten solujen joukkoon on injektio.

3.2 Forman-ekvivalenssi

Tarkastellaan seuraavaksi Morse-funktioiden vastaavuutta pohjautuen Scovillen teokseen [17]. Esimerkiksi, jos lisätään 0.01 kaikkiin minkä tahansa Morse-funktion arvoihin, niin teknisesti ottaen saadaan aikaiseksi eri funktio mutta käytännössä tämä funktio ei ole erilainen. Tarvitaan siis maininta diskreettien Morse-funktioiden vastaavuudesta.

Määritelmä 3.7. Olkoon K CW-kompleksi. Olkoot $f : K \to \mathbb{R}$ ja $g : K \to \mathbb{R}$ diskreettejä Morse-funktioita, ja olkoot $\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}$ CW-kompleksin K soluja. Sanotaan, että f ja g ovat *Forman-ekvivalentteja*, jos jokaista solujen paria $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ kohti pätee

$$f(\alpha) < f(\beta), \text{jos ja vain jos } g(\alpha) < g(\beta).$$

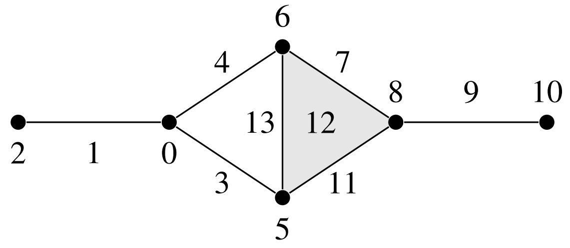
Seuraavaksi esitetään tulos, joka liittää tavallisen diskreetin Morse-funktion erinomaiseen diskreettiin Morse-funktioon. Tähän käytetään edellä esitettyä määritelmää Forman-ekvivalenssista.

Apulause 3.8. Olkoon K CW-kompleksi ja olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Tällöin on olemassa erinomainen diskreetti Morse-funktio $g : K \to \mathbb{R}$, joka on Forman-ekvivalentti funktion f kanssa.

Todistus (vrt. [17, s. 55]). Olkoot α_1 ja α_2 äärellisen CW-kompleksin K kriittisiä soluja, joille $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$. Jos tällaisia soluja ei ole olemassa, niin f on erinomainen, ja ei ole mitään osoitettavaa. Voidaan siis olettaa, että tällaiset solut ovat olemassa. Määritellään nyt $g : K \to \mathbb{R}$ asettamalla $g(\alpha) = f(\alpha)$ kaikille $\alpha \neq \alpha_1$ ja $g(\alpha_1) = f(\alpha_1) + \epsilon$, missä $\epsilon > 0$ ja $f(\alpha_1) + \epsilon$ on pienempi kuin funktion f pienin arvo, joka on suurempi kuin $f(\alpha_1)$. Tällöin $g(\alpha_1) \neq g(\alpha_2)$ ja g ja f ovat Forman-ekvivalentteja. Jos f ei kuvaa mitään muita kahta solua samalle arvolle, niin todistus on valmis. Muuten toistetaan menetelmää mille tahansa kahdelle solulle, jotka g kuvaa samalle arvolle. Koska funktiolla f on äärellinen määrä kriittisiä arvoja, niin saadaan muodostettua erinomainen diskreetti Morse-funktio, joka on Forman-ekvivalentti funktion f kanssa. □

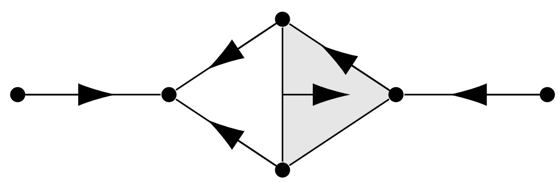
3.3 Gradienttivektorikentät

Tässä aliluvussa esitellään gradienttivektorikenttä. Johdatteluna aiheeseen esitetään ensin esimerkki. Lähteinä käytetään Formanin ja Scovillen teoksia [8] ja [17].



Kuva 3.2. Diskreetti Morse-funktio.

Esimerkki 3.9. Tarkastellaan kuvan 3.2 diskreettiä Morse-funktiota. Ei-kriittiset simpleksit esiintyvät pareittain. Esimerkiksi $f^{-1}(1)$ ei ole kriittinen, koska sillä on alempaa dimensiota oleva "naapuri", $f^{-1}(2)$, jolle funktion f arvo on korkeampi. Samoin kärki $f^{-1}(2)$ ei ole kriittinen, koska sillä on korkeampaa dimensiota oleva "naapuri", $f^{-1}(1)$, jolle funktion f arvo on matalampi. Merkitään tätä paria piirtämällä nuoli kärjestä $f^{-1}(2)$ osoittamaan särmää $f^{-1}(1)$. Menetellään samoin kaikkien loppujen ei-kriittisten simpleksien kanssa ja saadaan kuvan 3.3 kaltainen tulos.



Kuva 3.3. Kuvan 3.2 Morse-funktion gradientti vektorikenttä.

Esimerkin 3.9 menetelmää voidaan käyttää mihin tahansa säännölliseen CW-kompleksiin, jolla on diskreetti Morse-funktio. Nuolet piirretään siis seuraavalla tavalla: jos $\alpha^{(p)}$ on ei-kriittinen solu, jolle $\beta^{(p+1)} > \alpha$ ja $f(\beta) \leqslant f(\alpha)$, niin piirretään nuoli solusta α soluun β. Kuvan 3.2 Morse-funktiolla on yksi kriittinen kärki, $f^{-1}(0)$, ja yksi kriittinen särmä, $f^{-1}(11)$.

Apulauseesta 3.4 seuraa, että CW-kompleksin jokaiselle solulle α pätee täsmälleen yksi seuraavista:

(i) Solu α on täsmälleen yhden nuolen häntä.

(ii) Solu α on täsmälleen yhden nuolen pää.

(iii) Solu α ei ole nuolen pää eikä häntä.

Lisäksi solu on kriittinen, jos ja vain jos se ei ole minkään nuolen pää eikä häntä. Nämä nuolet kuvaavat Morse-funktion diskreetin gradienttivektorikentän. Seuraavaksi annetaan täsmällinen määritelmä gradienttivektorikentälle.

Määritelmä 3.10. Olkoon f säännöllisen CW-kompleksin K Morse-funktio. *Indusoitu gradienttivektorikenttä* V_f, tai yksinkertaisemmin V, määritellään seuraavasti:

$$V_f := \{(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}) : \alpha < \beta, f(\beta) \leqslant f(\alpha)\}.$$

Jos $(\alpha, \beta) \in V_f$, niin paria (α, β) kusutaan vektoriksi tai nuoleksi. Alkio α on *häntä* ja alkio β on *pää*.

Diskreetin Morse-funktion määritelmän 3.1 mukaan jokainen solu kuuluu korkeintaan yhteen vektorikentän V pariin. Tästä päästään seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 3.11. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi. Kompleksin K *diskreetti vektorikenttä* V on kokoelma pareja $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)})$, missä $\alpha < \beta$, ja jokainen kompleksin K solu kuuluu korkeintaan yhteen vektorikentän V pariin.

Diskreetin Morse-funktion määritelmästä 3.1 seuraa, että jokainen gradienttivektorikenttä on diskreetti vektorikenttä. Käänteinen väite ei ole aina voimassa. Myöhemmin tullaan huomaamaan, että diskreetti vektorikenttä ei ole gradienttivektorikenttä, jos vektorikentässä on ”suljettu polku”.

Määritelmä 3.12. Olkoon V säännöllisen CW-kompleksin K diskreetti vektorikenttä. *Gradienttipolku* tai *V-polku* on jono γ kompleksin K soluja

$$\gamma = \left(\beta_{-1}^{(p+1)},\right) \alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(p+1)}, \alpha_k^{(p)},$$

jolle pätee:

- Pari $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \in V$ jokaisella $0 \leqslant i \leqslant k-1$.
- Kaikille $0 \leqslant i \leqslant k-1, \beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}$.

Jos $k \neq 0$, niin gradienttipolkua kutsutaan *epätriviaaliksi*. Huomioidaan, että viimeisen solun $\alpha_k^{(p)}$ ei tarvitse kuulua mihinkään diskreetin vektorikentän V pariin. Gradienttipolkua kutsutaan *maksimaaliseksi*, jos se ei kokonaisuudessaan sisälly mihinkään toiseen gradienttipolkuun.

Jos V on gradienttivektorikenttä, niin $\beta_{-1}^{(p+1)}$ on kriittinen ja $\alpha_0^{(p)}$ ei-kriittinen. Gradienttipolku γ voidaan merkitä myös jättämällä $(p+1)$-solut pois:

$$\gamma = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k.$$

Tätä tapaa käytetään myöhemmin, kun määritellään gradienttipolulle kerrannaisuus.

Määritelmä 3.13. Gradienttipolku, joka alkaa solusta $\alpha_0^{(p)}$ on *suljettu*, jos $\alpha_k^{(p)} = \alpha_0^{(p)}$.

Lause 3.14. *Olkoon V diskreetin Morse-funktion f gradienttivektorikenttä. Tällöin solujen jono*

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(p+1)}, \alpha_k^{(p)}$$

on gradienttipolku, jos ja vain jos $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ jokaisella $i = 0, 1, \ldots, k-1$ ja

$$f(\alpha_0) \geqslant f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geqslant f(\beta_1) > \cdots \geqslant f(\beta_{k-1}) > f(\alpha_k).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(p+1)}, \alpha_k^{(p)}$ on gradienttipolku. Tällöin määritelmän 3.12 nojalla kaikille $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}$ ja pari $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \in V$ jokaisella $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Koska $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \in V$, niin $f(\alpha_i) \geqslant f(\beta_i)$. Koska jokainen solu kuuluu korkeintaan yhteen gradienttivektorikentän V pariin, niin $(\alpha_{i+1}^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \notin V$, jolloin $f(\alpha_{i+1}) < f(\beta_i)$. Näin ollen saadaan

$$f(\alpha_0) \geqslant f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geqslant f(\beta_1) > \cdots \geqslant f(\beta_{k-1}) > f(\alpha_k).$$

Oletetaan sitten, että $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ jokaisella $i = 0, 1, \ldots, k-1$ ja

$$f(\alpha_0) \geqslant f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geqslant f(\beta_1) > \cdots \geqslant f(\beta_{k-1}) > f(\alpha_k).$$

Koska jokaisella $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $f(\alpha_i) \geqslant f(\beta_i)$, niin pari $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \in V$. Edelleen, koska $f(\alpha_{i+1}) < f(\beta_i)$, niin $(\alpha_{i+1}^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \notin V$. Siis jokainen solu kuuluu korkeintaan yhteen gradienttivektorikentän V pariin. Näin gradienttipolun määritelmän ehdot toteutuvat, joten

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(p+1)}, \alpha_k^{(p)}$$

on gradienttipolku. □

Edellinen lause siis kertoo, että diskreetin Morse-funktion f gradienttipolkuja ovat ne "jatkuvat" solujen jonot, joille funktion f arvot ovat laskevia. Seuraava apulause kertoo gradienttipolun ominaisuuksista, joita tarvitaan myöhemmin esitettävässä todistuksessa.

Apulause 3.15. Olkoon V diskreetin Morse-funktion f gradienttivektorikenttä. Jos $\gamma_1 = \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, \alpha_r$ ja $\gamma_2 = \alpha_r, \beta_r, \alpha_{r+1}, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_{r+s-1}, \alpha_{r+s}$ ovat kaksi jonoa p- ja $p+1$-soluja, niin

$$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_r, \beta_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \beta_{r+s-1}, \alpha_{r+s}$$

on gradienttipolku, jos ja vain jos γ_1 ja γ_2 ovat molemmat gradienttipolkuja.

Todistus. Olkoot $\gamma_1 = \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, \alpha_r$ ja
$\gamma_2 = \alpha_r, \beta_r, \alpha_{r+1}, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_{r+s-1}, \alpha_{r+s}$ kaksi jonoa p- ja $p+1$-soluja. Oletetaan ensin, että $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \beta_{r+s-1}, \alpha_{r+s}$ on gradienttipolku. Tällöin lauseen 3.14 nojalla

$$f(\alpha_0) \geqslant f(\beta_0) > f(\alpha_1) > \cdots \geqslant f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}) > \cdots \geqslant f(\beta_{r+s-1}) > f(\alpha_{r+s})$$

ja $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ jokaisella $i = 0, 1, \ldots, r + s - 1$. Kun tarkastellaan osajonoja γ_1 ja γ_2, huomataan, että ne toteuttavat myös lauseen 3.14 ehdot.

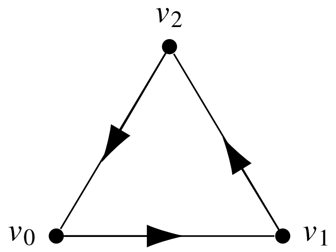
Oletetaan sitten, että γ_1 ja γ_2 ovat molemmat gradienttipolkuja. Tällöin lauseen 3.14 nojalla

$$f(\alpha_0) \geqslant f(\beta_0) > f(\alpha_1) > \cdots \geqslant f(\beta_{r-1}) > f(\alpha_r)$$

ja $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ jokaisella $i = 0, 1, \ldots, r - 1$ sekä

$$f(\alpha_r) \geqslant f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}) > \cdots \geqslant f(\beta_{r+s-1}) > f(\alpha_{r+s})$$

ja $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ jokaisella $i = r, r+1, \ldots, r+s-1$. Kun kuljetaan ensin polku γ_1 ja sitten polku γ_2, huomataan, että saatu polku toteuttaa lauseen 3.14 ehdot, joten jono $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_r \alpha_{r+1}, \ldots, \beta_{r+s-1}, \alpha_{r+s}$ on gradienttipolku. □



Kuva 3.4. Diskreetti vektorikenttä, joka ei ole gradienttivektorikenttä.

Lause 3.16. *Diskreetti vektorikenttä V on diskreetin Morse-funktion gradienttivektorikenttä, jos ja vain jos diskreetti vektorikenttä V ei sisällä yhtään epätriviaalia suljettua gradienttipolkua.*

Lauseen 3.16 todistus esitetään Hasse-kaavioiden yhteydessä seuraavassa aliluvussa.

Esimerkki 3.17. Tarkastellaan kuvan 3.4 diskreettiä vektorikenttää ja merkitään sitä V:llä. Kuten kuvasta huomataan, niin V sisältää suljetun polun. Tällöin se ei voi olla Morse-funktion f indusoima gradienttivektorikenttä. Muuten saataisiin seuraava epäyhtälö

$$f(v_0) \geqslant f(v_0v_1) > f(v_1) \geqslant f(v_1v_2) > f(v_2) \geqslant f(v_2v_0) > f(v_0),$$

mikä on ristiriita.

Seuraavaksi esitetään gradienttivektorikentän yhteys Forman-ekvivalenssiin.

Lause 3.18. *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi. Olkoot $f : K \to \mathbb{R}$ ja $g : K \to \mathbb{R}$ diskreettejä Morse-funktioita. Tällöin f ja g ovat Forman-ekvivalentteja, jos ja vain jos f ja g indusoivat saman gradienttivektorikentän.*

Todistus (ks. [17, s. 62]). Oletetaan ensin, että f ja g ovat Forman-ekvivalentteja. Tällöin määritelmän 3.7 nojalla jokaista solujen paria $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ kohti pätee $f(\alpha) < f(\beta)$, jos ja vain jos $g(\alpha) < g(\beta)$. Siis $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$, jos ja vain jos $g(\alpha) \geqslant g(\beta)$, joten $(\alpha, \beta) \in V_f$, jos ja vain jos $(\alpha, \beta) \in V_g$.

Oletetaan sitten, että f ja g indusoivat saman gradienttivektorikentän kompleksissa K. Siis $V_f = V_g = V$. Apulauseen 3.4 nojalla mikä tahansa kompleksin K solu on joko kriittinen tai kuuluu täsmälleen yhteen vektorikentän V pariin. Oletetaan, että $\alpha^{(p)} \leqslant \beta^{(p+1)}$. Osoitetaan, että $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$, jos ja vain jos $g(\alpha) \geqslant g(\beta)$. Tarkastellaan eri tapauksia:

(1) Olkoon $(\alpha, \beta) \in V$. Tällöin $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$ ja $g(\alpha) \geqslant g(\beta)$.

(2) Oletetaan, että α ei kuulu mihinkään vektorikentän V pariin mutta β kuuluu. Koska α ei kuulu mihinkään vektorikentän V pariin, niin se on kriittinen molemmille funktioille. Siis $f(\alpha) < f(\beta)$ ja $g(\alpha) < g(\beta)$. Samaan tulokseen päädytään, jos valitaan, että α kuuluu johonkin vektorikentän V pariin mutta β ei kuulu mihinkään vektorikentän V pariin.

(3) Oletetaan, että α ja β kuuluvat vektorikentän V eri pareihin. Tällöin $f(\alpha) < f(\beta)$ ja $g(\alpha) < g(\beta)$.

(4) Oletetaan vielä, että kumpikaan soluista α ja β ei kuulu mihinkään vektorikentän V pariin. Tällöin ne ovat molemmat kriittisiä, joten $f(\alpha) < f(\beta)$ ja $g(\alpha) < g(\beta)$.

Kaikissa tapauksissa päädyttiin siis tulokseen, että $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$, jos ja vain jos $g(\alpha) \geqslant g(\beta)$. □

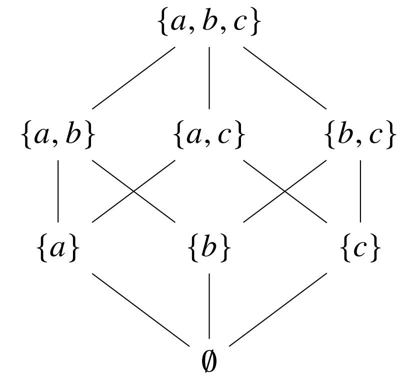
3.4 Hasse-kaavio

Hasse-kaavio on graafinen esitys osittain järjestetyistä joukoista. Sen avulla voidaan yksinkertaisessa muodossa ilmaista visuaalisesti joukon relaatiot. Lähteinä käytetään teoksia [17] ja [13]. Lähteissä tämän luvun asiat tehdään simpleksisille komplekseille.

Määritelmä 3.19. *Osittain järjestetty joukko* on joukko P, johon on liitetty relaatio, joka on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen. Relaatiota merkitään yleensä $\leqslant$.

CW-kompleksi on osittain järjestetty joukko, missä relaatio $\leqslant$ määritellään kuten sivulla 10.

Esimerkki 3.20. (ks. [17, s. 64]) Olkoon X äärellinen joukko. Joukon X potenssijoukko $\mathcal{P}(X)$ on osittain järjestetty joukko. Joukon relaatioita voidaan visualisoida. Olkoon $X = \{a, b, c\}$. Kirjoitetaan ylös kaikki joukon $\mathcal{P}(X)$ alkiot ja piirretään osajoukkojen A ja B välille viiva, jos $A \subset B$ ja joukossa B on yksi alkio enemmän kuin joukossa A, tai $B \subset A$ ja joukossa A on yksi alkio enemmän kuin joukossa B siten, että samaa mahtavuutta olevat joukot ovat samalla rivillä. Saadaan seuraavanlainen tulos:



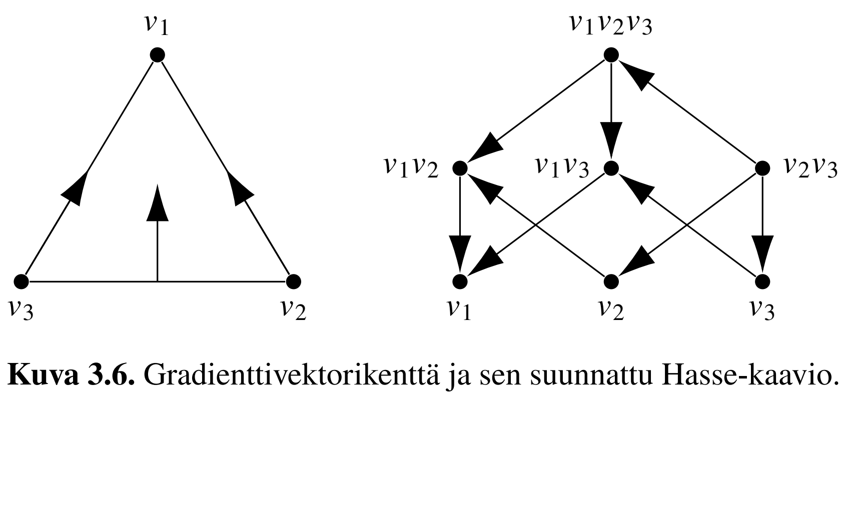
Kuva 3.5. Hasse-kaavio.

Yllä olevaa kuvaa kutsutaan Hasse-kaavioksi. Annetaan seuraavaksi määritelmä.

Määritelmä 3.21. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi. Kompleksin K *Hasse-kaavio*, jota merkitään $\mathcal{H}_K$, on sellainen 1-dimensioinen CW-kompleksi, että on olemassa yksi yhteen vastaavuus kaavion $\mathcal{H}_K$ solmujen ja kompleksin K solujen välillä. *Solmulla* tarkoitetaan Hasse-kaavion pistettä. Jos α on kompleksin K solu, niin vastaava solmu $\alpha \in \mathcal{H}_K$. Lisäksi kahden solmun $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_K$ välillä on särmä, jos ja vain jos α on solun β 1-kodimensioinen sivu tai β on solun α 1-kodimensioinen sivu. Kaavio $\mathcal{H}(i)$ on kaavion $\mathcal{H}_K$ alikaavio, johon kuuluvat kaikki kaavion $\mathcal{H}_K$ solmut, joita vastaavat kompleksin K i-solut. Hasse-kaavion $\mathcal{H}_K$ *solmujoukkoa* merkitään $[v_n]$.

Määritelmä 3.22. Hasse-kaavion $\mathcal{H}$ nuoli *osoittaa ylöspäin*, jos se on suunnattu kaavion $\mathcal{H}(i)$ solmusta kaavion $\mathcal{H}(i+1)$ solmuun. Toisaalta nuoli *osoittaa alaspäin*, jos se on suunnattu kaavion $\mathcal{H}(i+1)$ solmusta kaavion $\mathcal{H}(i)$ solmuun.

Määritelmä 3.23. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja olkoon $V_K = V$ kompleksin K diskreetti vektorikenttä. Vektorikentän V *indusoima suunnattu Hasse-kaavio*, $\mathcal{H}_V$, on kompleksin K Hasse-kaavio $\mathcal{H}_K$, jossa jokaisessa kaavion $\mathcal{H}_V$ särmässä on nuoli. Nuoli osoittaa ylöspäin, jos ja vain jos särmän kaksi solmua ovat järjestetty pari vektorikentässä V. Jos tarkastellaan Hasse-kaaviota 1-dimensioisena CW-kompleksina, niin suunnatun Hasse-kaavion $\mathcal{H}_V$ epätriviaalia suljettua gradienttipolkua kutsutaan *suunnatuksi silmukaksi*.



Kuva 3.6. Gradienttivektorikenttä ja sen suunnattu Hasse-kaavio.

Apulause 3.24. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja olkoon V kompleksin K diskreetti vektorikenttä. Jos vektorikentän V indusoima Hasse-kaavio sisältää suunnatun silmukan, niin suunnattu silmukka sisältyy täsmälleen kahdelle tasolle.

Todistus (ks. [13, s. 36]). Oletetaan, että vektorikentän V indusoima Hasse-kaavio sisältää suunnatun silmukan. Yhdellä tasolla olevaa suunnattua silmukkaa ei ole olemassa, koska ei voi olla olemassa yhtään relaatiota kahden samaa dimensiota olevan solun välillä.

Oletetaan, että on olemassa suunnattu silmukka, joka ulottuu useammalle kuin kahdelle tasolle. Tällöin saadaan jossain kohtaa kaksi peräkkäistä ylöspäin osoittavaa nuolta, toisin sanoen, tulee olla olemassa solut $\alpha^{(p-1)}, \beta^{(p)}$ ja $\gamma^{(p+1)}$, joille $(\alpha, \beta) \in V$ ja $(\beta, \gamma) \in V$. Tämä ei ole mahdollista diskreetin vektorikentän V määritelmän 3.11 nojalla, koska β kuuluu kahteen eri pariin. Näin ollen voi olla olemassa ainoastaan suunnattuja silmukoita, jotka kuuluvat täsmälleen kahdelle tasolle. □

Lause 3.25. *Olkoot K säännöllinen CW-kompleksi, $V_k = V$ kompleksin K diskreetti vektorikenttä ja $\mathcal{H}_V$ vastaava suunnattu Hasse-kaavio. Tällöin ei ole olemassa epätriviaaleja suljettuja V-polkuja, jos ja vain jos suunnatussa Hasse-kaaviossa $\mathcal{H}_V$ ei ole olemassa suunnattuja silmukoita.*

Todistus (vrt. [17, s. 68]). Oletetaan ensin, että suunnatussa Hasse-kaaviossa $\mathcal{H}_V$ ei ole olemassa suunnattuja silmukoita. Oletetaan vastoin väitettä, että V sisältää suljetun V-polun

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \ldots, \beta_k^{(p+1)}, \alpha_{k+1}^{(p)} = \alpha_0^{(p)}.$$

Aloitetaan solmusta $\alpha_0^{(p)} \in \mathcal{H}_V$. Tällöin on olemassa ylöspäin osoittava nuoli solmuun $\beta_0^{(p+1)}$, koska $(\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}) \in V$. Nuoli solmusta $\beta_0^{(p+1)}$ solmuun $\alpha_1^{(p)}$ osoittaa alaspäin, koska $\beta_0^{(p+1)} > \alpha_1^{(p)}$ ja $(\alpha_1^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}) \notin V$, sillä $\beta_0^{(p+1)}$ ei voi kuulua kahteen eri pariin. Jatkamalla tällä tavoin huomataan suunnattu polku, joka alkaa solmusta $\alpha_0^{(p)}$ ja päättyy samaan solmuun. Siis saatiin suunnattu silmukka, mikä on ristiriidassa alun oletuksen kanssa.

Oletetaan sitten, että ei ole olemassa epätriviaaleja suljettuja V-polkuja. Oletetaan vastoin väitettä, että suunnatussa Hasse-kaaviossa $\mathcal{H}_V$ on olemassa suunnattu silmukka. Tällöin apulauseen 3.24 nojalla tämä suunnattu silmukka sisältyy täsmälleen kahdelle tasolle. Siis suunnattu silmukka on vuorotteleva jono ylöspäin ja alaspäin osoittavia nuolia, sillä suunnatun Hasse-kaavion $\mathcal{H}_V$ samalla tasolla ei voi olla olemassa särmää. Nyt silmukan jokainen ylöspäin osoittava nuoli, siis jokainen pari $(\alpha_i^{(p)}, \beta^{(p+1)})$, on vektorikentän V alkio. Jokainen alaspäin osoittava nuoli toteuttaa ehdon $\beta^{(p+1)} > \alpha_i^{(p)}$. Näin ollen suunnattu silmukka on myös suljettu V-polku kompleksissa K. Siis päädyttiin ristiriitaan. □

Esitetään seuraavaksi apulause, jota tarvitaan lauseen 3.16 todistamiseksi. Tämän apulauseen yleinen versio löytyy lähteestä [2].

Apulause 3.26. Olkoon $[v_n]$ suunnatun Hasse-kaavion $\mathcal{H}$ solmujoukko. Tällöin on olemassa sellainen kuvaus $f : [v_n] \to \mathbb{R}$, että $f(v_i) > f(v_j)$, kun on olemassa nuoli solmusta v_i solmuun v_j, jos ja vain jos $\mathcal{H}$ ei sisällä yhtään suunnattua silmukkaa.

Todistus (vrt. [13, s. 37]). Oletetaan ensin, että on olemassa sellainen kuvaus $f : [v_n] \to \mathbb{R}$, että $f(v_i) > f(v_j)$, kun on olemassa nuoli solmusta v_i solmuun v_j. Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa suunnattu silmukka

$$v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} = v_{i_0}.$$

Tällöin $f(v_{i_0}) > f(v_{i_1}) > \cdots > f(v_{i_k}) = f(v_{i_0})$, mikä on ristiriita.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{H}$ ei sisällä yhtään suunnattua silmukkaa. Muodostetaan Hasse-kaavion $\mathcal{H}$ solmuista jono $w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n$, missä jokainen solmu esiintyy täsmälleen kerran. Valitaan ensin solmu v_i, johon ei mene yhtään nuolta. Tälläinen solmu voidaan valita, koska jokaisella silmukattomalla suunnatulla graafilla on olemassa solmu, johon ei mene yhtään särmää (ks. [13, s.13]). Olkoon $w_1 = v_i$ ja poistetaan Hasse-kaaviosta $\mathcal{H}$ solmu v_i sekä siitä lähtevät nuolet. Jäljelle jäävässä graafissa ei ole yhtään suunnattua silmukkaa, koska solmuja ja nuolia poistamalla ei voi muodostua uusia silmukoita. Toistetaan tätä kunnes ei ole enää yhtään solmua jäljellä. Oletetaan, että on olemassa nuoli solmusta w_i solmuun w_j. Jos $i > j$, niin w_j tuli valituksi ja poistetuksi ennen solmua w_i. Solmuun w_j ei kuitenkaan mennyt nuolta silloin kun se valittiin. Päädyttiin ristiriitaan, joten täytyy olla $i < j$. Määritellään $f(v_i) = n - k$, missä $w_k = v_i$ ja saadaan funktio, jolla on halutut ominaisuudet. □

Todistetaan seuraavaksi lause 3.16.

Todistus (ks. [13, s. 38]). Oletetaan ensin, että diskreetti vektorikenttä V on diskreetin Morse-funktion gradienttivektorikenttä. Tällöin vektorikenttä V ei voi sisältää yhtään epätriviaalia suljettua gradienttipolkua esimerkissä 3.17 olevan argumentin perusteella.

Oletetaan sitten, että diskreetti vektorikenttä V ei sisällä yhtään epätriviaalia suljettua gradienttipolkua. Tällöin lauseen 3.25 nojalla $\mathcal{H}_V$ ei sisällä suunnattua silmukkaa. Olkoot α ja β Hasse-kaavion $\mathcal{H}_V$ solmuja. Apulauseen 3.26 nojalla on olemassa sellainen kuvaus $f : K \to \mathbb{R}$, että $f(\alpha) > f(\beta)$, kun on olemassa nuoli solmusta α solmuun β. Funktio f on diskreetti Morse-funktio. Tämä seuraa siitä, että mille tahansa parille $(\alpha, \beta) \in V$, kumpikaan solu ei voi olla missään muussa parissa. Olkoon V_f kuvauksen f indusoima gradienttivektorikenttä. Jos $(\alpha, \beta) \in V$, niin $\alpha < \beta$ ja $f(\alpha) > f(\beta)$, joten $V \subseteq V_f$. Jos $(\alpha, \beta) \in V_f$, niin $\alpha < \beta$ ja kumpikaan soluista ei ole missään muussa parissa, joten $V_f \subseteq V$. Näin ollen $V = V_f$. □

3.5 Romahduslause

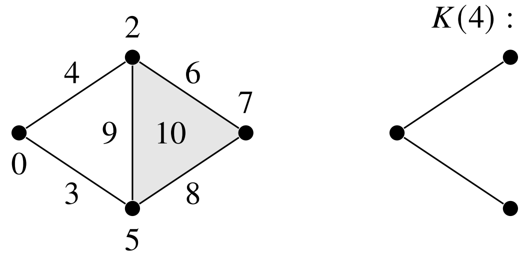
Romahduslause on yksi diskreetin Morse-teorian keskeisistä lauseista. Ennen kuin esitetään ja todistetaan tämä lause, esitellään alikompleksit ja romahduslauseen todistuksessa tarpeellinen apulause. Tämän luvun tiedot pohjautuvat Formanin teokseen [7].

Määritelmä 3.27. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Jokaiselle $c \in \mathbb{R}$ määritellään

$$K(c) = \bigcup_{\substack{\alpha \in K \\ f(\alpha) \leqslant c}} \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} \beta.$$

Siis kompleksiin $K(c)$ kuuluvat kaikki solut $\alpha \in K$, joille $f(\alpha) \leqslant c$, sekä lisäksi kaikki solun α sivut. Erityisesti $K(c)$ on kompleksin K *alikompleksi*.

Esimerkki 3.28. Olkoon K simpleksinen kompleksi, jonka Morse-funktio f on annettu kuvassa 3.7. Kuvassa oikealla on esitettynä kompleksin K alikompleksi $K(4)$. Alikompleksiin kuuluvat siis kaikki simpleksit, joiden arvo on korkeintaan 4. Lisäksi simpleksi $f^{-1}(5)$ kuuluu alikompleksiin, koska se on simpleksin $f^{-1}(3)$ sivu.



Kuva 3.7. Kompleksin K diskreetti Morse-funktio ja alikompleksi $K(4)$.

Apulause 3.29. Olkoon α säännöllisen CW-kompleksin K p-solu ja olkoon $\beta > \alpha$. Olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Tällöin on olemassa $(p+1)$-solu $\tilde{\beta}$, jolle $\alpha < \tilde{\beta} \leqslant \beta$ ja

$$f(\tilde{\beta}) \leqslant f(\beta).$$

Todistus (ks. [7, s. 104]). Koska $\beta > \alpha$, niin $\dim \beta > \dim \alpha$. Jos $\dim \beta = p + 1$, voidaan asettaa $\tilde{\beta} = \beta$. Oletetaan, että $\dim \beta = p + r$, missä $r > 1$. Tällöin lauseen 2.30 nojalla voidaan löytää kaksi $(p + r - 1)$-solua γ_1 ja γ_2, joille $\beta > \gamma_1 > \alpha$ ja $\beta > \gamma_2 > \alpha$. Määritelmän 3.1 ehdon (2) nojalla joko $f(\gamma_1) < f(\beta)$ tai $f(\gamma_2) < f(\beta)$. Molemmissa tapauksissa väite seuraa induktiolla. □

Lause 3.30 (Romahduslause)**.** *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio ja olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Jos funktiolla f ei ole kriittisiä arvoja välillä $[a, b]$, niin*

$$K(b) \searrow K(a).$$

Todistus (ks. [7, s. 104]). Huomataan, että jos ehdosta $\beta^{(p+1)} > \alpha^{(p)}$ seuraa $f(\beta) \leqslant f(\alpha)$, niin funktiota f voidaan hieman muuttaa korvaamalla $f(\beta)$ arvolla $f(\beta) - \epsilon$ tai $f(\alpha)$ arvolla $f(\alpha) + \epsilon$, missä $\epsilon \geqslant 0$ on riittävän pieni, jotta sillä on samat kriittiset solut kuin ennen muutosta. Jos solulle $\alpha^{(p)}$ pätee $f(\beta^{(p+1)}) \neq f(\alpha) \neq f(\gamma^{(p-1)})$ kaikilla $\beta^{(p+1)} > \alpha > \gamma^{(p-1)}$, niin funktiota f voidaan hieman muuttaa korvaamalla $f(\alpha)$ arvolla $f(\alpha) \pm \epsilon$, missä $\epsilon \geqslant 0$ on riittävän pieni, jolloin kriittiset solut pysyvät samoina. Yhdistämällä näitä operaatioita funktiota f voidaan hieman muuttaa muuttamatta komplekseja $K(b)$ ja $K(a)$ siten, että $f : K \to \mathbb{R}$ on injektiivinen.

Jos $f^{-1}([a, b]) = \emptyset$, niin $K(a) = K(b)$, joten ei ole mitään todistettavaa. Muussa tapauksessa voidaan jakaa $[a, b]$ pienempiin väleihin, jolloin voidaan olettaa, että on olemassa täsmälleen yksi ei-kriittinen solu α, jolle $f(\alpha) \in [a, b]$. Muuttamalla funktiota f hiukan kuten yllä, voidaan olettaa, että $f(\alpha) > a$. Apulauseen 3.4 nojalla täsmälleen yksi seuraavista ehdoista on voimassa:

$$\text{On olemassa sellainen } \beta^{(p+1)} > \alpha, \text{ että } f(\beta) \leqslant f(\alpha). \tag{1}$$

$$\text{On olemassa sellainen } \gamma^{(p-1)} < \alpha, \text{ että } f(\gamma) \geqslant f(\alpha). \tag{2}$$

Jos ehto 1 on voimassa, niin tulee olla $f(\beta) < a$, koska f on injektio. Siis $\beta \in K(a)$. Koska $\alpha < \beta$, niin $\alpha \in K(a)$. Tällöin $K(a) = K(b)$, joten ei ole mitään todistettavaa.

Oletetaan sitten, että ehto 2 on voimassa. Tällöin ehto 1 ei voi olla voimassa, joten jokaiselle $\beta^{(p+1)} > \alpha$ pätee $f(\beta) > f(\alpha)$. Funktiolla f ei ole kriittisiä arvoja välillä $[a, b]$ ja toisaalta α on ainoa ei-kriittinen solu, jonka arvo on välillä $[a, b]$. Niinpä α on ainoa solu, jonka arvo on välillä $[a, b]$. Siis täytyy olla $f(\beta) > b$, koska $f(\beta) > f(\alpha)$. Apulauseen 3.29 nojalla jokaiselle $\beta > \alpha$, $f(\beta) > b$. Näin ollen $\alpha \cap K(a) = \emptyset$. Oletuksen nojalla on olemassa $\gamma^{(p-1)} < \alpha$, jolle $f(\gamma) > f(\alpha)$. Siis $f(\gamma) > b$. Jos $\tilde{\gamma}^{(p-1)} \neq \gamma$ on mikä tahansa solun α $(p-1)$-sivu, niin määritelmän 3.1 ehdon (2) nojalla tulee olla $f(\tilde{\gamma}) < f(\alpha)$, jolloin $f(\tilde{\gamma}) < a$. Siis $\tilde{\gamma}$ ja kaikki sen sivut kuuluvat kompleksiin $K(a)$.

Olkoon $\tilde{\alpha}^{(p)} \neq \alpha$ mikä tahansa kompleksin K p-solu, jolle $\tilde{\alpha} > \gamma$. Tällöin määritelmän 3.1 ehdon (1) nojalla $f(\tilde{\alpha}) > f(\gamma) > b$. Apulauseen 3.29 nojalla, jos $\tilde{\alpha}$ on mikä tahansa solu (mitä tahansa dimensiota), jolle $\tilde{\alpha} > \gamma$, niin $f(\tilde{\alpha}) > b$, joten $\gamma \cap K(a) = \emptyset$. Näin ollen $K(b) = K(a) \cup \alpha \cup \gamma$, missä γ on solun α vapaa sivu. Siis

$$K(b) \searrow K(a).$$

□

Lause 3.31. *Olkoon $\alpha^{(p)}$ säännöllisen CW-kompleksin K kriittinen solu, jolle $f(\alpha) \in [a, b]$ ja $f^{-1}([a, b])$ ei sisällä muita kriittisiä soluja. Tällöin $K(b)$ on homotopiaekvivalentti kompleksin*

$$K(a) \bigcup_{\dot{e}^p} e^p$$

kanssa, missä e^p on p-dimensioinen solu, jonka reuna on $\dot{e}^p$.

Todistus (vrt. [7, s. 106]). Kuten lauseen 3.30 todistuksessa, voidaan olettaa, että f on injektiivinen. Edelleen voidaan olettaa, että $f(\alpha) \notin \{a, b\}$. Näin ollen voidaan löytää reaaliluvut a' ja b', joille $a < a' < b' < b$ ja $\{\alpha\} = f^{-1}([a', b'])$. Lauseen 3.30 nojalla $K(b) \searrow K(b')$ ja $K(a') \searrow K(a)$, joten $K(b)$ ja $K(b')$ ovat homotopiaekvivalentteja, ja samoin $K(a)$ ja $K(a')$ ovat homotopiaekvivalentteja. Edelleen $K(b')$ on homeomorfinen liitosavaruuden $K(a') \bigcup_{\dot{e}^p} e^p$ kanssa. Kun halutaan osoittaa, että $K(b)$ ja $K(a) \bigcup_{\dot{e}^p} e^p$ ovat homotopiaekvivalentteja, riittää osoittaa, että $K(a') \bigcup_{\dot{e}^p} e^p$ ja $K(a) \bigcup_{\dot{e}^p} e^p$ ovat homotopiaekvivalentteja.

Olkoon $g : S^{p-1} \to K(a')$ liitosavaruuden $K(a') \bigcup_{\dot{e}^p} e^p$ liitoskuvaus. Olkoon $h : K(a') \to K(a)$ romahduttamalla saatu homotopiaekvivalenssi, kuten lauseessa 3.30. Tällöin $h \circ g : S^{p-1} \to K(a)$ on liitoskuvaus. Kuvaus h indusoi kuvauksen

$$\tilde{h} : K(a') \bigcup_{\dot{e}^p} e^p \to K(a) \bigcup_{\dot{e}^p} e^p$$

liitosavaruuksien välille. Siis $K(a') \bigcup_{\dot{e}^p} e^p = K(a') \sqcup_g e^p$ ja $K(a) \bigcup_{\dot{e}^p} e^p = K(a) \sqcup_{h\circ g} e^p$. Saadaan seuraava kommutoiva kaavio:

$$
\begin{tikzcd}
S^{p-1} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] \arrow[dd, "i"'] & & K(a') \arrow[dr, "h"] \arrow[dd] & \\
& S^{p-1} \arrow[rr, "h \circ g"] \arrow[dd, "i"] & & K(a) \arrow[dd] \\
e^p \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & K(a') \sqcup_g e^p \arrow[dr, "\tilde{h}"] & \\
& e^p \arrow[rr] & & K(a) \sqcup_{h\circ g} e^p
\end{tikzcd}
$$

Koska inkluusio $i : S^{p-1} \hookrightarrow e^p$ on suljettu kofibraatio, ja koska $\mathrm{id} : S^{p-1} \to S^{p-1}$ ja $\mathrm{id} : e^p \to e^p$ ovat homeomorfismeja ja $h : K(a') \to K(a)$ on homotopiaekvivalenssi, seuraa lauseesta 2.15, että indusoitu kuvaus $\tilde{h}$ on homotopiaekvivalenssi. □

Edellisessä lauseessa liitoskuvaus g on homeomorfismi pallolta S^{p-1} solun e^p reunalle $\dot{e}^p$, koska CW-kompleksi K on säännöllinen. Koska kuvaus h on homotopiaekvivalenssi, eikä siis yleensä homeomorfismi, ei liitoskuvauksen $h \circ g$ tarvitse olle homeomorfismi solun reunalle. Niinpä kompleksin $K(a) \bigcup_{\dot{e}^p} e^p$ ei tarvitse olla säännöllinen.

Esitetään seuraavaksi yksi diskreetin Morse-teorian keskeisimmistä lauseista.

Lause 3.32. *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi. Olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio ja olkoon m_p kompleksin K kriittisten p-solujen määrä. Tällöin K on homotopiaekvivalentti sellaisen CW-kompleksin kanssa, jossa on täsmälleen m_p p-solua.*

Todistus. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Kuten lauseen 3.30 todistuksessa, voidaan olettaa, että f on injektiivinen. Merkitään $a = \min(f)$ ja $b = \max(f)$. Tällöin $K = K(b)$. Jotta saadaan $K(b)$, aloitetaan pienimmästä alikompleksista $K(a)$ ja laajennetaan sitä. Kun kohdataan säännöllisiä soluja, niin lauseen 3.30 nojalla kompleksin homotopiatyyppi ei muutu. Kun taas kohdataan kriittinen p-solu, niin lauseen 3.31 nojalla kompleksiin tulee liittää p-solu. Koska kompleksin K kriittisten p-solujen määrä on m_p, niin p-soluja liitetään täsmälleen m_p kappaletta. Siis K on homotopiaekvivalentti sellaisen CW-kompleksin kanssa, jossa on täsmälleen m_p p-solua. □

Tämä lause kertoo kriittisten solujen tärkeydestä diskreetissä Morse-teoriassa. Nimittäin mitä vähemmän kriittisiä soluja on, niin sitä pienemmälle kompleksille voidaan todistaa homotopiaekvivalenssi.

3.6 Morse-epäyhtälöt

Kompleksin Bettin lukujen ja saman kompleksin diskreetin Morse-funktion kriittisten solujen määrän välillä on vahva yhteys. Tämä huomataan heikkojen diskreettien Morse-epäyhtälöiden yhteydessä seuraavassa lauseessa. Tämän aliluvun lähteinä käytetään teoksia [17] ja [13].

Lause 3.33 (Heikot diskreetit Morse-epäyhtälöt)**.** *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Merkitään m_p:llä dimensiota p olevien kriittisten solujen määrää. Olkoon $b_p = \dim H_p(K; \mathbb{Z}_2)$ kompleksin K p:s Bettin luku. Tällöin*

(1) Jokaiselle $p = 0, 1, 2, \dots, n = \dim(K)$ pätee

$$b_p \leqslant m_p.$$

(2) Kompleksin K Eulerin karakteristika on $\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i$.

Todistus (vrt. [17, s. 102] ja [13, s. 43]). (2) Apulauseen 3.8 nojalla voidaan olettaa, että funktio f on erinomainen. Oletuksen mukaan kompleksilla K on m_i kriittistä i-solua. Merkitään d_i:llä niiden ei-kriittisten i-solujen lukumäärää, jotka muodostavat gradienttivektorin $(i+1)$-solun kanssa. Lisäksi palautetaan mieleen, että c_i on i-solujen kokonaismäärä kompleksissa K. Jokaiselle dimensiolle i pätee

$$c_i = m_i + d_{i,-} + d_{i,+},$$

missä $d_{i,-}$ on sellaisten ei-kriittisten i-solujen määrä, jotka muodostavat gradienttivektorin ei-kriittisen $(i-1)$-solun kanssa ja $d_{i,+}$ on sellaisten ei-kriittisten i-solujen määrä, jotka muodostavat gradienttivektorin ei-kriittisen $(i+1)$-solun kanssa. Kun $i = 0$, niin $d_{0,-} = 0$, koska ei ole olemassa alempaa dimensiota. Samoin, kun $i = n$, niin $d_{n,+} = 0$, koska ei ole olemassa korkeampaa dimensiota. Kun $1 \leqslant i \leqslant n-1$, niin $d_{i,+} = d_{i+1,-}$ gradienttivektorin määritelmän nojalla, joka muotoillaan pareina ei-kriittisiä soluja. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_{i,-} + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_{i,+} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i + d_{0,-} - (d_{1,-} - d_{0,+}) + (d_{2,-} - d_{1,+}) - \dots \\
&\quad + (-1)^n (d_{n,-} - d_{n-1,+}) + (-1)^n d_{n,+} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i = \chi(K)$. □

Lauseen 3.33 kohta (1) todistetaan myöhemmin. Seuraavaksi esitetään kaksi apulausetta, joita tarvitaan vahvan diskreetin Morse-epäyhtälön todistamiseen.

Apulause 3.34. Jos topologisilla avaruuksilla X ja Y on sama homotopiatyyppi, niin $H_n(X) \cong H_n(Y)$ jokaiselle $n \geqslant 0$, missä isomorfismi on indusoitu millä tahansa homotopiaekvivalenssilla $X \to Y$.

Todistus (ks. [15, s. 79]). □

Apulauseesta 3.34 seuraa myös, että $H_n(X; \mathbb{Z}_2) \cong H_n(Y; \mathbb{Z}_2)$ kaikilla $n \geqslant 0$, jos topologisilla avaruuksilla X ja Y on sama homotopiatyyppi.

Apulause 3.35. Olkoon K CW-kompleksi. Tällöin jokaiselle $p = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ pätee

$$b_p - b_{p-1} + b_{p-2} - \cdots + (-1)^p b_0 \leqslant c_p - c_{p-1} + c_{p-2} - \cdots + (-1)^p c_0,$$

missä b_i on kompleksin K i:s Bettin luku ja c_i on kompleksin K i-solujen lukumäärä.

Todistus (vrt. [13, s. 45]). Olkoon ∂ CW-kompleksin K ryhmällä $\mathbb{Z}_2$ tensoroidun solumaisen ketjukompleksin reunakuvaus. Todistus on puhdasta algebraa:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} b_i &= \mathrm{null}(\partial_p) - \mathrm{rank}(\partial_{p+1}) - \mathrm{null}(\partial_{p-1}) + \mathrm{rank}(\partial_p) \\
&\quad + \mathrm{null}(\partial_{p-2}) - \mathrm{rank}(\partial_{p-1}) - \cdots + (-1)^p (\mathrm{null}(\partial_0) - \mathrm{rank}(\partial_1)) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} (\mathrm{null}(\partial_i) + \mathrm{rank}(\partial_i)) - \mathrm{rank}(\partial_{p+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} c_i - \mathrm{rank}(\partial_{p+1}) \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} c_i,
\end{aligned}$$

missä toinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $\mathrm{rank}(\partial_0) = 0$ ja viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että $\mathrm{rank}(\partial_{p+1}) \geqslant 0$. □

Lause 3.36 (Vahva diskreetti Morse-epäyhtälö)**.** *Olkoon K säännöllinen n-ulotteinen CW-kompleksi ja olkoon $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Tällöin jokaiselle $p = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ pätee*

$$b_p - b_{p-1} + \cdots + (-1)^p b_0 \leqslant m_p - m_{p-1} + \cdots + (-1)^p m_0.$$

Todistus (ks. [17, s. 103]). Lauseen 3.32 nojalla on olemassa CW-kompleksi X, jonka p-soluilla on bijektiivinen vastaavuus funktion f kriittisille p-soluille, ja joka on homotopiaekvivalentti CW-kompleksin K kanssa. Apulauseiden 3.34 ja 3.35 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
b_p(K) - b_{p-1}(K) + \cdots + (-1)^p b_0(K) &= b_p(X) - b_{p-1}(X) + \cdots + (-1)^p b_0(X) \\
&\leqslant c_p(X) - c_{p-1}(X) + c_{p-2}(X) - \cdots + (-1)^p c_0(X) \\
&= m_p(K) - m_{p-1}(K) + \cdots + (-1)^p m_0(K).
\end{aligned}$$

□

Todistetaan seuraavaksi lauseen 3.33 kohta (1) käyttäen edellä esitettyä vahvaa Morse-epäyhtälöä, ja havaitaan, että todistus on varsin yksinkertainen.

Todistus. (1) Olkoon $p \geqslant 0$. Lauseen 3.36 nojalla

$$b_p - b_{p-1} + \cdots + (-1)^p b_0 \leqslant m_p - m_{p-1} + \cdots + (-1)^p m_0,$$

joten

$$b_p - \left(b_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} b_0\right) \leqslant m_p - \left(m_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} m_0\right),$$

mistä seuraa, että

$$b_p \leqslant m_p - \left(m_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} m_0\right) + \left(b_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} b_0\right).$$

Koska

$$b_{p-1} - b_{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1} b_0 \leqslant m_{p-1} - m_{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1} m_0,$$

niin

$$-\left(m_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} m_0\right) + \left(b_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} b_0\right) \leqslant 0.$$

Siis

$$b_p \leqslant m_p.$$

□

Itse asiassa lause 3.5 seuraa lauseen 3.33 kohdasta (1). Nimittäin lauseen 3.33 kohdan (1) perusteella funktion f kriittisten 0-solujen määrälle m_0 pätee $m_0 \geqslant b_0$. Koska $b_0 \geqslant 1$, niin funktiolla f on vähintään yksi kriittinen 0-solu.

Kun tarkastellaan lauseen 3.33 kohtaa (1), on aiheellista kysyä, milloin yhtäsuuruus saavutetaan. Tällöin on kyse *täydellisestä diskreetistä Morse-funktiosta*. Jotta päästään tämän määritelmään, määritellään ensin diskreetti Morse-vektori.

Määritelmä 3.37. Olkoon K n-dimensioinen säännöllinen CW-kompleksi ja olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio, jolla on m_i^f (tai yksinkertaisemmin m_i) dimensiota i olevaa kriittistä solua. Tällöin funktion f *diskreetti Morse-vektori* on

$$\vec{f} := (m_0^f, m_1^f, \ldots, m_n^f).$$

Diskreetti Morse-vektori $\vec{f}$ on *optimaalinen*, jos mille tahansa muulle diskreetille Morse-funktiolle $g : K \to \mathbb{R}$ pätee $\sum_{i=0}^n m_i^f \leqslant \sum_{i=0}^n m_i^g$.

Määritelmä 3.38. Diskreetin Morse-funktion $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-vektori on *täydellinen*, jos $\vec{f} = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$, missä b_i on n-ulotteisen säännöllisen CW-kompleksin K i:s Bettin luku.

Apulause 3.39. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi. Olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio, jolla on täsmälleen yksi kriittinen solu. Tällöin K on romahtava.

Todistus. Oletetaan, että diskreetillä Morse-funktiolla f on täsmälleen yksi kriittinen solu. Lauseen 3.5 perusteella funktiolla f on ainakin yksi kriittinen 0-solu p. Koska oletuksen mukaan funktiolla f on täsmälleen yksi kriittinen solu, niin tämä solu on 0-solu p. Funktio f saa minimiarvon tässä solussa, eikä saa samaa arvoa missään muualla. Olkoon minimiarvo a. Koska kompleksilla K ei ole muita kriittisiä soluja, seuraa romahduslauseesta 3.30, että koko kompleksi K romahtaa kriittiselle 0-solulle p. Siis K on romahtava. □

Seuraava lause osoittaa, että kaikki säännölliset CW-kompleksit eivät salli täydellistä diskreettiä Morse-vektoria.

Lause 3.40. *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi, jolle $b_0(K) = 1$ ja $b_i(K) = 0$ jokaisella $i > 0$. Jos K ei ole romahtava, niin sillä ei ole täydellistä diskreettiä Morse-vektoria.*

Todistus (vrt. [17, s. 116]). Oletetaan, että K ei ole romahtava ja oletetaan vastoin väitettä, että sillä on täydellinen diskreetti Morse-vektori $\vec{f}$. Tällöin määritelmän 3.38 nojalla $\vec{f} = (1, 0, \ldots, 0)$. Koska K ei ole romahtava, niin apulauseen 3.39 nojalla kompleksin K millä tahansa diskreetillä Morse-funktiolla on ainakin kaksi kriittistä solua. Siis kompleksilla K ei voi olla täydellistä diskreettiä Morse-vektoria. □

Ayalan artikkelissa [1] mainitaan esimerkkejä lauseen 3.40 kaltaisista komplekseista.

3.7 Diskreetin Morse-funktion kehittäminen

Yksi Morse-teorian tärkeimmistä ongelmista on löytää diskreetti Morse-funktio, jonka kriittisten solujen määrä on pienin mahdollinen. Yksi menetelmä tällaisen funktion löytämiseksi on *kriittisten solujen supistaminen*. Tämä menetelmä sallii annetun gradienttivektorikentän laajentamisen suuremmaksi. Jotta näin voidaan tehdä, esitetään ensin, kuinka diskreetti Morse-funktio voidaan muuntaa toiseksi diskreetiksi Morse-funktioksi homotopian avulla. Tämän aliluvun päälähteenä käytetään Scovillen teosta [17].

Määritelmä 3.41. Diskreettiä Morse-funktiota f sanotaan *litteäksi*, jos $f(\alpha) = f(\beta)$ aina kun (α, β) on funktion f indusoima säännöllinen pari.

Säännöllisellä parilla tarkoitetaan solujen paria, missä molemmat solut ovat ei-kriittisiä.

Apulause 3.42. Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi ja olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Jos on olemassa solut $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+2)}$, joille $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$, niin kumpikaan soluista α ja β ei voi olla kriittinen.

Todistus (vrt. [13, s. 50]). Oletetaan, että on olemassa solut $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+2)}$, joille $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$. Koska $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+2)}$, niin on olemassa solu $\eta^{(p+1)}$, jolle $\alpha < \eta < \beta$. Oletetaan ensin, että α on kriittinen. Jos myös β on kriittinen, niin määritelmän 3.2 nojalla $f(\alpha) < f(\eta) < f(\beta)$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Samoin, jos β on kriittinen, niin α ei voi olla kriittinen. Siis α ja β eivät molemmat voi olla kriittisiä.

Oletetaan sitten, että α ei ole kriittinen. Jos myöskään β ei ole kriittinen, niin väite pätee. Oletetaan siis, että β on kriittinen. Lauseen 2.30 perusteella kompleksissa K on $(p+1)$-solut η ja $\tilde{\eta}$, missä $\eta \neq \tilde{\eta}$, joille pätee

$$\alpha < \eta < \beta \text{ ja } \alpha < \tilde{\eta} < \beta.$$

Koska β on kriittinen ja solulla α voi olla vain yksi poikkeus, täytyy olla

$$f(\alpha) < f(\eta) < f(\beta) \text{ tai } f(\alpha) < f(\tilde{\eta}) < f(\beta).$$

Kummassakin tapauksessa päädytään ristiriitaan oletuksen $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$ kanssa. Niinpä solu β ei voi olla kriittinen. Samalla tavalla nähdään, että jos β ei ole kriittinen, niin myöskään α ei voi olla kriittinen. Niinpä kumpikaan soluista α ja β ei voi olla kriittinen. □

Seuraava lause kertoo, että minkä tahansa diskreetin Morse-funktion voi muuntaa litteäksi. Lisäksi tämä litteä Morse-funktio on Forman-ekvivalentti alkuperäisen Morse-funktion kanssa.

Lause 3.43. *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi. Olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio ja olkoon V_f indusoitu gradienttivektorikenttä. Tällöin on olemassa sellainen litteä diskreetti Morse-funktio $g : K \to \mathbb{R}$, että f ja g ovat Forman-ekvivalentteja.*

Todistus (vrt. [17, s. 106]). Olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio. Määritellään funktion f *tasoittuminen* seuraavasti

$$g(\alpha) := \begin{cases} f(\beta), & \text{jos } (\alpha,\beta) \in V_f \text{ jollakin } \beta, \\ f(\alpha), & \text{muuten.} \end{cases}$$

Jos α on kriittinen, niin $g(\alpha) = f(\alpha)$. Jos taas α on ei-kriittinen, niin $(\alpha,\beta) \in V_f$ jollakin β tai $(\delta,\alpha) \in V_f$ jollakin δ. Jos $(\alpha,\beta) \in V_f$, niin $g(\alpha) = f(\beta) \leqslant f(\alpha)$. Jos $(\delta,\alpha) \in V_f$, niin $g(\alpha) = f(\alpha)$. Siis kummassakin tapauksessa $f(\alpha) \geqslant g(\alpha)$. Jokaiselle $\alpha \in K$ pätee siis $g(\alpha) \leqslant f(\alpha)$.

Olkoon c funktion f kriittinen arvo. Tällöin on olemassa p-solu $\beta \in K$, jolle $f(\beta) = c$ ja jokaiselle $\alpha^{(p-1)} < \beta < \eta^{(p+1)}$ pätee $f(\alpha) < f(\beta) < f(\eta)$. Koska β on kriittinen, niin $g(\beta) = f(\beta) > f(\alpha) \geqslant g(\alpha)$. Halutaan osoittaa, että kompleksin K solu on kriittinen funktion f suhteen, jos ja vain jos se on kriittinen funktion g suhteen. Osoitetaan siis, että β on kriittinen myös funktion g suhteen. Riittää osoittaa, että $g(\beta) < g(\eta)$. Oletetaan ensin, että η ei ole vektorin häntä vektorikentässä V_f. Tällöin $g(\eta) = f(\eta) > f(\beta) = g(\beta)$. Oletetaan sitten, että η on jonkin vektorin häntä vektorikentässä V_f. Tällöin on olemassa solu $\gamma^{(p+2)} > \eta$, jolle $f(\eta) \geqslant f(\gamma)$.Tehdään vastaoletus, että $g(\beta) \geqslant g(\eta)$. Tällöin $\beta < \eta < \gamma$ ja

$$f(\beta) = g(\beta) \geqslant g(\eta) = f(\gamma).$$

Apulauseesta 3.42 seuraa nyt, että β ei voi olla kriittinen funktion f suhteen. Päädyttiin ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä ja $g(\beta) < g(\eta)$. Niinpä on osoitettu, että funktion f kriittiset solut ovat myös funktion g kriittisiä soluja.

Oletetaan sitten, että $\beta^{(p)}$ on funktion f ei-kriittinen solu. Tällöin $(\alpha,\beta) \in V_f$ tai $(\beta,\eta) \in V_f$ jollain solulla $\alpha^{(p-1)}$ tai $\eta^{(p+1)}$. Jos $(\alpha,\beta) \in V_f$, niin $g(\alpha) = f(\beta) \geqslant g(\beta)$. Jos $(\beta,\eta) \in V_f$, niin $g(\beta) = f(\eta) \geqslant g(\eta)$. Niinpä β on ei-kriittinen myös funktion g suhteen. Tästä seuraa, että $V_f = V_g$. Edelleen lauseen 3.18 nojalla f ja g ovat Forman-ekvivalentteja.

Jos $(\alpha,\beta) \in V_g = V_f$, niin $g(\alpha) = f(\beta) = g(\beta)$. Niinpä g on litteä Morse-funktio. □

Seuraavassa lauseessa ja esimerkissä käytetään merkintää $V_f \cap V_g$, jolla tarkoitetaan gradienttivektorikenttien V_f ja V_g leikkausta.

Lause 3.44. *Olkoon K säännöllinen CW-kompleksi. Olkoot $f, g : K \to \mathbb{R}$ litteitä diskreettejä Morse-funktioita. Määritellään*

$$h_t(\alpha) := (1-t)f(\alpha) + tg(\alpha)$$

jokaiselle $\alpha \in K$ ja $t \in [0,1]$. Tällöin h_t on kompleksin K diskreetti Morse-funktio jokaisella $t \in [0,1]$. Edelleen jokaiselle $t \in (0,1)$ pätee $V_{h_t} = V_f \cap V_g$. Kaikki diskreetit Morse-funktiot h_t ovat keskenään Forman-ekvivalentteja.

Todistus (vrt. [17, s. 108] ja [13, s. 52]). Voidaan olettaa, että $f, g : K \to \mathbb{R}^{>0}$, missä $\mathbb{R}^{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Osoitetaan ensin, että h_t on diskreetti Morse-funktio. Olkoon $\alpha^{(p)} \in K$. Määritelmän 3.1 nojalla pätee

$$\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leqslant f(\alpha)\} \leqslant 1 \text{ ja } \#\{\eta^{(p-1)} < \alpha \mid f(\eta) \geqslant f(\alpha)\} \leqslant 1$$

sekä

$$\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid g(\beta) \leqslant g(\alpha)\} \leqslant 1 \text{ ja } \#\{\eta^{(p-1)} < \alpha \mid g(\eta) \geqslant g(\alpha)\} \leqslant 1.$$

Koska f ja g ovat molemmat litteitä, niin määritelmän 3.1 perusteella yhtäsuuruudet savutetaan, kun kyseessä on poikkeus. Jos tämä poikkeus tapahtuu molemmille funktiolle f ja g samassa $(p-1)$-solussa η_0, missä $\eta_0 < \alpha$, niin

$$\begin{aligned} h_t(\eta_0) &= (1-t)f(\eta_0) + tg(\eta_0) \\ &= (1-t)f(\alpha) + tg(\alpha) \\ &= h_t(\alpha), \end{aligned}$$

ja muut poikkeukset dimensiolle $(p-1)$ eivät ole mahdollisia. Jos poikkeus tapahtuu funktiolle f $(p-1)$-solussa η_1 ja funktiolle g $(p-1)$-solussa η_2, missä $\eta_1 \neq \eta_2$, $\eta_1 < \alpha$ ja $\eta_2 < \alpha$, niin poikkeukset ovat mahdollisia funktiolle h_t soluissa η_1 ja η_2. Mutta nyt

$$\begin{aligned} h_t(\eta_1) &= (1-t)f(\eta_1) + tg(\eta_1) \\ &< (1-t)f(\alpha) + tg(\alpha) \\ &= h_t(\alpha), \end{aligned}$$

koska $g(\eta_1) < g(\alpha)$. Samoin

$$\begin{aligned} h_t(\eta_2) &= (1-t)f(\eta_2) + tg(\eta_2) \\ &< (1-t)f(\alpha) + tg(\alpha) \\ &= h_t(\alpha), \end{aligned}$$

koska $f(\eta_2) < f(\alpha)$. Näin ollen funktiolla h_t ei ole tässä tapauksessa yhtään poikkeusta. Lisäksi funktiolla h_t ei ole poikkeuksia, jos funktiolla f ja g ei myöskään ole. Yllä esitetyllä tavalla voidaan menetellä myös $(p+1)$-soluille. Näin ollen h_t on diskreetti Morse-funktio ja edelleen myös litteä.

Osoitetaan seuraavaksi, että $V_{h_t} = V_f \cap V_g$ jokaiselle $t \in (0,1)$. Olkoon $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}) \in V_{h_t}$. Tällöin $h_t(\alpha) = h_t(\beta)$, koska h_t on litteä. Koska myös f ja g

ovat litteitä, niin $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ ja $g(\alpha) \leqslant g(\beta)$. Oletetaan vastoin väitettä, että joko $f(\alpha) < f(\beta)$ tai $g(\alpha) < g(\beta)$. Tällöin

$$\begin{aligned} h_t(\alpha) &= (1-t)f(\alpha) + tg(\alpha) \\ &< (1-t)f(\beta) + tg(\beta) \\ &= h_t(\beta), \end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Siis $f(\alpha) = f(\beta)$ ja $g(\alpha) = g(\beta)$, joten $(\alpha, \beta) \in V_f$ ja $(\alpha, \beta) \in V_g$.

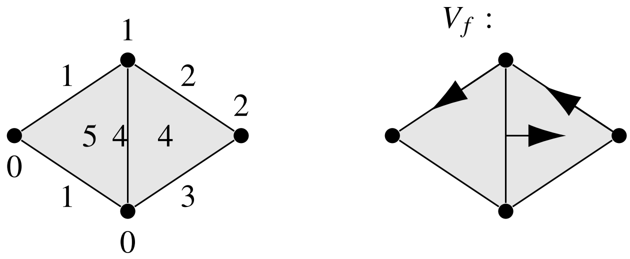
Osoitetaan vielä, että jos $(\alpha, \beta) \in V_f \cap V_g$, niin $(\alpha, \beta) \in V_{h_t}$. Koska $(\alpha, \beta) \in V_f \cap V_g$ ja molemmat funktiot f ja g ovat litteitä, niin $f(\alpha) = f(\beta)$ ja $g(\alpha) = g(\beta)$. Näin ollen

$$\begin{aligned} h_t(\alpha) &= (1-t)f(\alpha) + tg(\alpha) \\ &= (1-t)f(\beta) + tg(\beta) \\ &= h_t(\beta). \end{aligned}$$

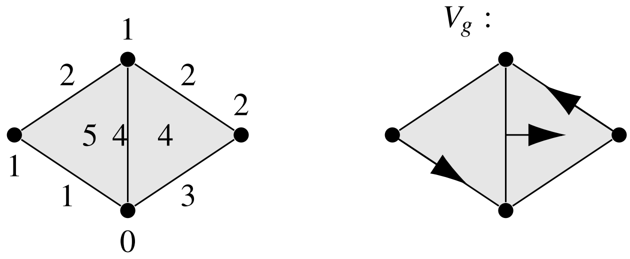
Siis $(\alpha, \beta) \in V_{h_t}$ ja $V_{h_t} = V_f \cap V_g$. Edelleen lauseen 3.18 nojalla kaikki funktiot h_t ovat Forman-ekvivalentteja. $\square$

Havainnollistetaan seuraavaksi lausetta 3.44 esimerkin avulla.

Esimerkki 3.45. Olkoon $f : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio sekä V_f vastaava indusoitu gradienttivektorikenttä, kuten alla.



Olkoon lisäksi $g : K \to \mathbb{R}$ diskreetti Morse-funktio sekä V_g vastaava indusoitu gradienttivektorikenttä, kuten alla.



Olkoon lisäksi $h_t = (1-t)f + tg$, missä $t \in (0, 1)$. Lauseen 3.44 nojalla tiedetään, että h_t on kompleksin K diskreetti Morse-funktio jokaisella t. Kun tarkastellaan funktioita f ja g, huomataan, että ne eroavat toisistaan kahdessa eri simpleksissä.

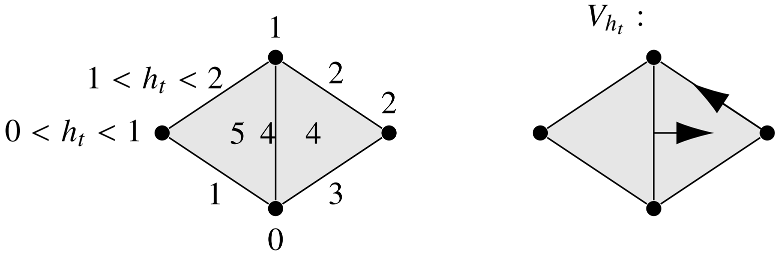
Merkitään näistä 0-simpleksiä α:lla ja 1-simpleksiä β:lla. Lasketaan $h_t(\alpha)$ ja $h_t(\beta)$. Kun $t = 0$, niin

$$\begin{aligned} h_t(\alpha) &= (1-0)f(\alpha) + 0 \cdot g(\alpha) = 0, \\ h_t(\beta) &= (1-0)f(\beta) + 0 \cdot g(\beta) = 1. \end{aligned}$$

Kun $t = 1$, niin

$$\begin{aligned} h_t(\alpha) &= (1-1)f(\alpha) + 1 \cdot g(\alpha) = 1, \\ h_t(\beta) &= (1-1)f(\beta) + 1 \cdot g(\beta) = 2. \end{aligned}$$

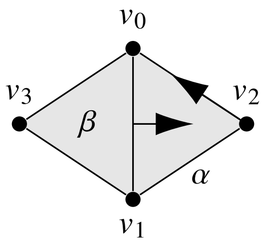
Näin ollen saadaan muodostettua diskreetti Morse-funktio h_t ja sitä vastaava indusoitu gradienttivektorikenttä V_{h_t}, kuten alla.



Tuloksesta huomataan, että h_t indusoi samana gradienttivektorikentän kuin $V_f \cap V_g$.

Jatketaan esimerkissä saadun gradienttivektorikentän V_{h_t} tarkastelua seuraavassa esimerkissä, joka on johdatteluna kriittisten solujen poistamista käsittelevälle lauseelle 3.47.

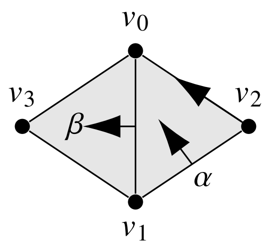
Esimerkki 3.46. Tarkastellaan esimerkin 3.45 gradienttivektorikenttää V_{h_t} seuraavin merkinnöin:



Nyt on olemassa polku

$$\beta, v_0v_1, v_0v_1v_2, \alpha,$$

missä α ja β ovat molemmat kriittisiä. Nämä kriittiset simpleksit saadaan poistettua, kun "käännetään" polun nuolet toisinpäin. Polun nuolilla tarkoitetaan kaikkia nuolia, jotka sisältyvät polkuun. Nyt polkuun $\beta, v_0v_1, v_0v_1v_2, \alpha$ sisältyy yksi nuoli, joka pää on $v_0v_1v_2$ ja häntä on v_0v_1. Tämä nuoli käännetään, jolloin saadaan nuoli, jonka pää on $v_0v_1v_3$ ja häntä on v_0v_1. Sitten lisätään vielä yksi nuoli, jonka pää on $v_0v_1v_2$ ja häntä on v_1v_2, joilloin saadaan seuraava gradienttivektorikenttä:



Nyt polku on

$$\alpha, v_0v_1v_2, v_0v_1, \beta,$$

missä α ja β eivät enää ole kriittisiä.

Seuraavassa lauseessa merkinnällä $V - \gamma$ tarkoitetaan, että gradienttivektorikentästä V on poistettu polku γ. Gradienttipolun poistamisella tarkoitetaan, että vektorikentästä poistetaan kaikki polun sisältämät solujen parit.

Lause 3.47 (Kriittisten solujen poistaminen)**.** *Olkoon V säännöllisen CW-kompleksin K diskreetin Morse-funktion gradienttivektorikenttä. Oletetaan, että $\alpha^{(p)} = \alpha$ ja $\beta^{(p+1)} = \beta$ ovat kompleksin K kriittisiä soluja, ja oletetaan, että on olemassa yksikäsitteinen V-polku*

$$\gamma \coloneqq [\gamma_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \gamma_1^{(p)}, \dots, \gamma_{n-1}^{(p)}, \beta_{n-1}^{(p+1)}, \gamma_n = \alpha],$$

missä $\gamma_0^{(p)} < \beta$. Määritellään $\bar{V}$ seuraavasti:

(1) $\bar{V} - \gamma = V - \gamma$.

(2) $(\gamma_0, \beta) \in \bar{V}$.

(3) $(\gamma_{i+1}, \beta_i) \in \bar{V}$ *jokaiselle* $i = 0, \dots, n-1$.

Tällöin $\bar{V}$ on gradienttivektorikenttä ja edelleen on olemassa yksikäsitteinen $\bar{V}$-polku solusta α soluun γ_0.

Todistus (vrt. [17, s. 111]). Ensiksi havaitaan, että gradienttivektorikentän V kriittiset solut ovat ne vektorikentän $\bar{V}$ kriittiset solut, jotka ovat eri kuin α ja β. Nyt $\bar{V}$ on diskreetti vektorikenttä. Lauseen 3.16 nojalla riittää osoittaa, että $\bar{V}$ ei sisällä yhtään suljettua $\bar{V}$-polkua. Kohdan (1) perusteella $\bar{V}$ ja V eroavat ainoastaan V-polussa γ. Lisäksi $\bar{V} - \gamma$ ei voi sisältää yhtään suljettua $\bar{V}$-polkua, koska muuten se olisi suljettu V-polku myös vektorikentässä V. Nimittäin lauseen 3.16 nojalla V ei voi sisältää suljettua V-polkua. Näin ollen, jos vektorikentässä $\bar{V}$ on suljettu $\bar{V}$-polku, niin polun tulee sisältää pätkä $\gamma_i, \delta_0, \dots, \delta_r, \gamma_j$, missä kaikilla $0 \leqslant k \leqslant r$, $\delta_k \notin \gamma$. Koska $(\gamma_{i-1}, \beta_{i-1}) \in V$ ja $(\gamma_i, \beta_{i-1}) \in \bar{V}$, saadaan, että

$$\gamma_0, \beta_0, \dots, \beta_{i-1}, \gamma_i, \delta_0, \dots, \delta_r, \gamma_j, \beta_j, \dots, \beta_{n-1}, \gamma_n$$

on V-polku solusta γ_0 soluun α. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että γ on yksikäsitteinen.

Osoitetaan sitten, että polku $\gamma_n, \beta_{n-1}, \ldots, \gamma_0$ on yksikäsitteinen $\bar{V}$-polku solusta $\alpha = \gamma_n$ soluun γ_0. Oletetaan, että on olemassa olemassa toinen samanlainen $\bar{V}$-polku. Tällöin sen tulee sisältää muotoa $\gamma_i, \epsilon_0, \ldots, \epsilon_l, \gamma_j$ oleva pätkä, jolle kaikilla $0 \leqslant k \leqslant l$, $\epsilon_k \notin \gamma$ ja $i < j$. Nimittäin muuten

$$\gamma_j, \beta_j, \ldots, \epsilon_0, \ldots, \epsilon_l, \gamma_i, \beta_i, \ldots, \beta_{j-1}, \gamma_j$$

olisi suljettu $\bar{V}$-polku. Nyt

$$\epsilon_0, \ldots, \epsilon_l, \gamma_j, \beta_j, \gamma_{j+1}, \ldots, \beta_{i-1}, \gamma_i, \epsilon_0$$

on suljettu V-polku, mikä on ristiriita. Siis $\bar{V}$-polku solujen α ja γ_0 välillä on yksikäsitteinen. $\square$

4 Lisää diskreettiä Morse-teoriaa

4.1 Gradienttivektorikentät uudestaan

Tämän luvun päälähteenä käytetään Formanin teosta [7]. Gradienttivektorikenttä voidaan ajatella myös suunnattujen solujen kuvauksena. Kiinnitetään seuraavaksi CW-kompleksi K ja sen 0-solujen joukko K_0. Ensimmäiseksi määritellään uudestaan gradienttivektorikenttä V_f ja sitten siihen liittyvä virtaus Φ_f. Oletetaan lisäksi, että myös Morse-funktio f on kiinnitetty, joten voidaan yksikertaisemmin kirjoittaa V ja Φ. Tarkastellaan kompleksin K 0-soluja. Olkoon $v \in K_0$. Jos v on kriittinen, niin $V(v) = 0$. Jos v ei ole kriittinen, niin on olemassa yksikäsitteinen solu $e > v$, jolle $f(e) \leqslant f(v)$. Arvon $V(v)$ ajatellaan olevan diskreetti tangenttivektori, joka lähtee solusta v. Yleisemmin, jos $\beta^{(p+1)} > \alpha^{(p)}$ ja $f(\beta) \leqslant f(\alpha)$, niin asetetaan $V(\alpha) = \pm\beta$, missä etumerkki valitaan siten, että $\langle \alpha, \partial V(\alpha)\rangle = -1$, missä ∂ on tavallinen reunaoperaatio $\partial : C_p(K, \mathbb{Z}) \to C_{p-1}(K, \mathbb{Z})$ ja $\langle , \rangle$ on sunnattujen ketjujen sisätulo.

Määritellään seuraavaksi suunnattu ketju.

Määritelmä 4.1. Olkoon K' CW-kompleksin K suunnattujen p-solujen joukko. Kompleksin K *(suunnattu) p-ketju* on kuvaus $c : K' \to \mathbb{Z}$, jolle pätee

(1) $c(\alpha) = -c(\alpha')$, jos α ja α' ovat saman solun vastakkaisia suuntia.

(2) $c(\alpha) = 0$ kaikilla paitsi äärellisen monella suunnatulla p-solulla α.

Suunnatut p-ketjut muodostavat vapaan Abelin ryhmän $C_p(K, \mathbb{Z})$, jonka kannan muodostavat p-solut. CW-kompleksin K solut muodostavat ortonormaalin kannan ketjuryhmän C_* sisätulolle $\langle , \rangle$. Sisätuloa käyttämällä voidaan kirjoittaa

$$\partial\alpha = \sum_{v^{(p-1)} < \alpha} \langle \partial\alpha, v\rangle v.$$

Jos v on solun α säännöllinen sivu, niin $\langle \partial\alpha, v\rangle = \pm 1$. Yleisemmin $\langle \partial\alpha, v\rangle \in \mathbb{Z}$. Annetaan seuraavaksi gradienttivektorikentän V määritelmä korkeampi-asteisille soluille.

Määritelmä 4.2. Olkoon α CW-kompleksin K p-solu. Määritellään gradienttivektorikenttä V asettamalla

$$V(\alpha) = \begin{cases} -\langle \partial\beta, \alpha\rangle\beta, & \text{jos on olemassa } \beta^{(p+1)} > \alpha, \text{ jolle } f(\beta) \leqslant f(\alpha), \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Määritelmässä 4.2 on huomioitava se, että solun α tulee olla solun β säännöllinen sivu, joten $\langle \partial\beta, \alpha\rangle = \pm 1$. Nimittäin tulee olla $V(\alpha) = \pm\beta$. Nyt V voidaan laajentaa lineaarisesti kuvaukseksi

$$V : C_p(K, \mathbb{Z}) \to C_{p+1}(K, \mathbb{Z}),$$

missä jokaiselle p, $C_p(K, \mathbb{Z})$ on kompleksin K p:s ketjuryhmä.

Määritellään seuraavaksi diskreetti gradienttivirtaus.

Määritelmä 4.3. Jokaista suunnattua sivua α kohti *diskreetti gradienttivirtaus* Φ määritellään

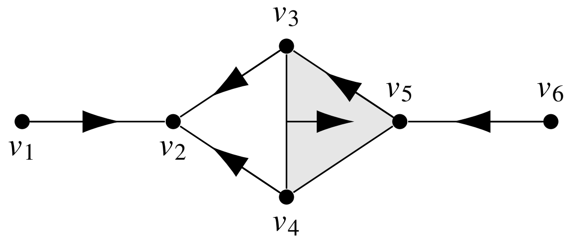
$$\Phi(\alpha) = \alpha + \partial V(\alpha) + V(\partial\alpha)$$

tai lyhyemmin

$$\Phi = 1 + \partial V + V\partial.$$

Tarkastellaan sitten, kuinka diskreetti virtaus Φ määritellään CW-kompleksin K 0-soluille. Jos v on kriittinen, eli $V(v) = 0$, niin $\Phi(v) = v$. Jos v ei ole kriittinen ja $V(v) = \pm e$, missä $e > v$ on 1-solu, niin tällöin 0-solun v pitäisi virrata solun e "toiseen päähän", eli $\Phi(v) = v + \partial(V(v))$.

Esimerkki 4.4. Tarkastellaan esimerkin 3.9 gradienttivektorikenttää ja merkitään kärkiä $v_1, \ldots v_6$.



Kuva 4.1. Esimerkin 3.9 Morse-funktion gradienttivektorikenttä.

Käytetään $\mathbb{Z}_2$-kertoimia ja määritellään reunaoperaatio seuraavasti:

$$\partial_i(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ jos } i = 0, \\ \sum_{0 \leqslant j \leqslant i} \alpha_0\alpha_1 \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \alpha_i, \text{ muuten,} \end{cases}$$

missä $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i$ ovat simpleksin α kärkiä ja missä $\hat{\alpha}_j$ tarkoittaa, että poistetaan α_j. Lisäksi gradienttivektorikenttä määritellään ei-suunnatuille simplekseille seuraavasti:

$$V(\alpha) = \begin{cases} \beta, \text{ jos on olemassa } \beta > \alpha, \text{jolle } f(\beta) \leqslant f(\alpha), \\ 0, \text{ muuten.} \end{cases}$$

Lasketaan gradienttivirtaukset muutamalle simpleksille:

$$\begin{aligned} \Phi(v_3v_4) &= v_3v_4 + \partial V(v_3v_4) + V(\partial(v_3v_4)) \\ &= v_3v_4 + \partial(v_3v_4v_5) + V(v_3 + v_4) \\ &= v_3v_4 + v_3v_4 + v_3v_5 + v_4v_5 + v_3v_2 + v_4v_2 \\ &= v_3v_5 + v_4v_5 + v_3v_2 + v_4v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(v_4v_5) &= v_4v_5 + \partial V(v_4v_5) + V(\partial(v_4v_5)) \\ &= v_4v_5 + \partial(0) + V(v_4 + v_5) \\ &= v_4v_5 + 0 + v_4v_2 + v_5v_3 \\ &= v_4v_5 + v_4v_2 + v_5v_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi(v_4v_2) &= v_4v_2 + \partial V(v_4v_2) + V(\partial(v_4v_2)) \\
&= v_4v_2 + \partial(0) + V(v_4 + v_2) \\
&= v_4v_2 + 0 + v_4v_2 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Seuraavaksi esitetään gradienttivektorikentän V ja siihen liittyvän virtauksen Φ tärkeimpiä ominaisuuksia.

Lause 4.5. *Olkoon V CW-kompleksin K jonkin diskreetin Morse-funktion gradienttivektorikenttä. Tällöin*

(1) $V \circ V = 0$.

(2) Jos α on suunnattu p-solu, niin

$$\#\{v^{(p-1)} \mid V(v) = \pm\alpha\} \leqslant 1.$$

(3) Jos α on suunnattu p-solu, niin α on kriittinen, jos ja vain jos

$$\alpha \notin \mathrm{Im}(V) \textit{ ja } V(\alpha) = 0.$$

Todistus (ks. [7, s. 116]). (1) Jos $V(v^{(p-1)}) = \pm\alpha^{(p)}$, niin $v < \alpha$ ja $f(\alpha) \leqslant f(v)$. Apulauseen 3.4 nojalla ei ole olemassa solua $\beta^{(p+1)} > \alpha$, jolle pätisi $f(\beta) \leqslant f(\alpha)$. Siis $V(\alpha) = 0$, joten $V \circ V = 0$.

(2) Oletetaan, että α on suunnattu p-solu. Jos $V(v^{(p-1)}) = \pm\alpha^{(p)}$, niin $v < \alpha$ ja $f(\alpha) \leqslant f(v)$. Määritelmän 3.1 kohdan (1) nojalla v on yksikäsitteinen.

(3) Oletetaan, että α on kompleksin K suunnattu p-solu. Määritelmän 3.2 nojalla solu α on kriittinen, jos

(i) $\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leqslant f(\alpha)\} = 0$ ja

(ii) $\#\{v^{(p-1)} < \alpha \mid f(v) \geqslant f(\alpha)\} = 0$.

Nämä ehdot ovat yhtäpitäviä seuraavien ehtojen kanssa:

(i) Ei ole olemassa solua $\beta^{(p+1)}$, jolle $V(\alpha) = \pm\beta$ ja

(ii) Ei ole olemassa solua $v^{(p-1)} < \alpha$, jolle $V(v) = \pm\alpha$,

siis

(i) $V(\alpha) = 0$ ja

(ii) $\alpha \notin \mathrm{Im}(V)$.

□

Lause 4.6. *Olkoon $\varPhi$ CW-kompleksin K gradienttivirtaus. Olkoot $\alpha_1, \ldots \alpha_r$, $r \in \mathbb{N}$, kompleksin K p-soluja, joilla on valittu suunta. Merkitään*

$$\varPhi(\alpha_i) = \sum_j a_{ij}\alpha_j,$$

missä $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Tällöin

(1) $\varPhi\partial = \partial\varPhi$.

(2) Jokaiselle i, $a_{ii} = 0$ tai $a_{ii} = 1$, ja $a_{ii} = 1$, jos ja vain jos α_i on kriittinen.

(3) Jos $i \neq j$, niin $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Jos $i \neq j$ ja $a_{ij} \neq 0$, niin $f(\alpha_j) < f(\alpha_i)$.

Todistus (ks. [7, s. 117]). (1) Koska $\varPhi = 1 + \partial V + V\partial$, saadaan

$$\varPhi\partial = (1 + \partial V + V\partial)\partial = \partial + \partial V\partial + V\partial^2 \overset{\partial^2=0}{=} \partial + \partial V\partial$$

$$\partial\varPhi = \partial(1 + \partial V + V\partial) = \partial + \partial^2 V + \partial V\partial \overset{\partial^2=0}{=} \partial + \partial V\partial.$$

Siis $\varPhi\partial = \partial\varPhi$.

Todistetaan sitten kohdat (2) ja (3) samanaikaisesti. Lauseen 4.5 kohdan (3) nojalla jokaiselle solulle $\alpha^{(p)}$ pätee täsmälleen yksi seuraavista:

(i) α on kriittinen.

(ii) $\pm\alpha \in \mathrm{Im}(V)$.

(iii) $V(\alpha) \neq 0$.

Tarkastellaan tapaukset erikseen.

(i) Jos α on kriittinen, niin $V(\alpha) = 0$, joten

$$\varPhi(\alpha) = \alpha + V(\partial\alpha) = \alpha + \sum_{v^{(p-1)}<\alpha} \langle\partial\alpha, v\rangle V(v).$$

Koska α on kriittinen, niin jokaiselle $v^{(p-1)} < \alpha$ pätee $f(v) < f(\alpha)$. Jokaiselle tällaiselle v, joko $V(v) = 0$ tai $V(v) = \tilde{\alpha}^{(p)}$, missä $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(v) < f(\alpha)$. Siis

$$\varPhi(\alpha) = \alpha + \sum a_{\tilde{\alpha}}\tilde{\alpha},$$

missä $f(\tilde{\alpha}) < f(\alpha)$, jos $a_{\tilde{\alpha}} \neq 0$.

(ii) Oletetaan, että $\pm\alpha \in \mathrm{Im}(V) \subseteq \mathrm{Ker}(V)$. Tällöin

$$\varPhi(\alpha) = \alpha + V(\partial\alpha) = \alpha + \sum_{v^{(p-1)}<\alpha} \langle\partial\alpha, v\rangle V(v).$$

Lauseen 4.5 kohdan (2) nojalla on olemassa täsmälleen yksi $(p-1)$-sivu $\tilde{v} < \alpha$, jolle $V(\tilde{v}) = \pm\alpha$ ja $\langle\partial\alpha, \tilde{v}\rangle V(\tilde{v}) = -\alpha$. Edelleen, jos $\tilde{v} \neq v < \alpha$, niin $V(v) = 0$ tai $V(v) = \tilde{\alpha}$, missä $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(v) < f(\alpha)$. Näin ollen

$$\varPhi(\alpha) = \sum a_{\tilde{\alpha}}\tilde{\alpha},$$

missä $f(\tilde{\alpha}) < f(\alpha)$, jos $a_{\tilde{\alpha}} \neq 0$.

(iii) Oletetaan, että $V(\alpha) = -\langle \partial\beta, \alpha\rangle\beta \neq 0$. Tällöin α on solun β säännöllinen sivu, joten $\langle \partial\beta, \alpha\rangle = \pm 1$. Edelleen

$$\Phi(\alpha) = \alpha + V(\partial\alpha) + \partial(V(\alpha)).$$

Koska $V(\alpha) \neq 0$, pätee $\pm\alpha \notin \mathrm{Im}(V)$. Siis jokaiselle $v^{(p-1)} < \alpha$ joko $V(v) = 0$ tai $V(v) = \pm\tilde{\alpha}$, missä $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(v) < f(\alpha)$. Koska

$$V(\partial\alpha) = \sum_{v^{(p-1} < \alpha} \langle \partial\alpha, v\rangle V(v),$$

voidaan kirjoittaa

$$V(\partial\alpha) = \sum b_{\tilde{\alpha}}\tilde{\alpha},$$

missä $f(\tilde{\alpha}) < f(\alpha)$, jos $b_{\tilde{\alpha}} \neq 0$. Edelleen

$$\partial(V(\alpha)) = -\langle \partial\beta, \alpha\rangle\partial\beta = -\langle \partial\beta, \alpha\rangle^2\alpha + \sum c_{\tilde{\alpha}}\tilde{\alpha} = -\alpha + \sum c_{\tilde{\alpha}}\tilde{\alpha},$$

missä $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\beta) < f(\alpha)$, jos $c_{\tilde{\alpha}} \neq 0$.

□

4.2 Morse-kompleksi

Tämän aliluvun päälähteinä käytetään teoksia [7] ja [13]. Merkinnällä $C_p^{\Phi}(K, \mathbb{Z})$ tarkoitetaan CW-kompleksin K Φ-invariantteja p-ketjuja, toisin sanoen

$$C_p^{\Phi}(K, \mathbb{Z}) = \{c \in C_p(K, \mathbb{Z}) \mid \Phi(c) = c\}.$$

Lauseen 4.6 kohdan (1) nojalla $\Phi\partial = \partial\Phi$, joten reunaoperaatio ∂ kuvaa Φ-invariantit p-ketjut Φ-invarianteille $(p-1)$-ketjuille. Näin ollen saadaan muodostettua määritelmä Morse-kompleksille.

Määritelmä 4.7. Olkoon K n-ulotteinen CW-kompleksi ja olkoot $C_p^{\Phi}(K, \mathbb{Z})$ kompleksin K Φ-invariantit p-ketjut. Seuraavaa kompleksia kutsutaan *Morse-kompleksiksi*

$$C_*^{\Phi} : 0 \to C_n^{\Phi}(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^{\Phi}(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0^{\Phi}(K, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Tämän kappaleen tarkoituksena on todistaa, että Morse-kompleksin C_*^{Φ} homologia on sama, kuin CW-kompleksin K homologia.

Apulause 4.8. Olkoot K CW-kompleksi ja V kompleksin K gradienttivektorikenttä. Olkoon α kompleksin K solu. Kiinnitetään $c = V(\partial\alpha)$. Jos α on kriittinen, niin

$$\Phi^m(\alpha) = \alpha + c + \Phi(c) + \cdots + \Phi^{m-1}(c).$$

Todistus (vrt. [13, s. 67]). Todistetaan lause induktiolla luvun m suhteen. Olkoon $m = 1$. Koska α on kriittinen, niin lauseen 4.5 kohdan (3) nojalla $V(\alpha) = 0$. Saadaan

$$\Phi(\alpha) = \alpha + \partial(V(\alpha)) + V(\partial\alpha) = \alpha + 0 + c = \alpha + c.$$

Olkoon sitten $m \geqslant 1$ ja oletetaan, että $\Phi^m(\alpha) = \alpha + c + \Phi(c) + \cdots + \Phi^{m-1}(c)$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned}\Phi^{m+1}(\alpha) &= \Phi(\Phi^m(\alpha)) \\ &= \Phi(\alpha + c + \Phi(c) + \cdots + \Phi^{m-1}(c)) \\ &= \Phi(\alpha) + \Phi(c) + \cdots + \Phi^m(c).\end{aligned}$$

Koska $\Phi(\alpha) = \alpha + c$, saadaan

$$\Phi^{m+1}(\alpha) = \alpha + c + \Phi(c) + \cdots + \Phi^m(c).$$

□

Seuraavia tuloksia varten asetetaan $c \in C_p^{\Phi}(K, \mathbb{Z})$,

$$c = \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \alpha,$$

missä K_p on kompleksin K p-solujen joukko.

Määritelmä 4.9. Olkoon $c \in C_p^{\Phi}(K, \mathbb{Z})$. Sanotaan, että $\alpha^* \in C_p^{\Phi}(K, \mathbb{Z})$ on ketjun c *maksimoija*, jos $f(\alpha^*) \geqslant f(\alpha)$ kaikilla $\alpha \in C_p^{\Phi}(K, \mathbb{Z})$, missä $a_\alpha \neq 0$.

Apulause 4.10. Olkoon $c \in C_p^{\Phi}(K, \mathbb{Z})$ ja olkoon α^* mikä tahansa joukon $\{f(\alpha) \mid a_\alpha \neq 0\}$ maksimoija. Siis $f(\alpha^*) \geqslant f(\alpha)$ kaikilla $\alpha \in C_p^{\Phi}(K, \mathbb{Z})$, missä $a_\alpha \neq 0$. Erityisesti oletetaan, että $a_{\alpha^*} \neq 0$. Tällöin α^* on funktion f kriittinen solu.

Todistus (vrt. [7, s. 120]). Koska c on Φ-invariantti, niin

$$c = \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \alpha = \Phi(c) = \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \Phi(\alpha).$$

Tällöin

$$a_{\alpha^*} = \langle c, \alpha^* \rangle = \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \langle \Phi(\alpha), \alpha^* \rangle.$$

Olkoon $\alpha \in K_p$, $\alpha \neq \alpha^*$, sellainen, että $a_\alpha \neq 0$. Termi $\Phi(\alpha)$ on lineaarikombinaatio p-soluista. Koska $f(\alpha^*) \geqslant f(\alpha)$, seuraa lauseen 4.6 kohdasta (3), että solun α^* kerroin tässä lineaarikombinaatiossa on nolla. Siis $\langle \Phi(\alpha), \alpha^* \rangle = 0$. Näin ollen

$$0 \neq a_{\alpha^*} = \langle c, \alpha^* \rangle = \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \langle \Phi(\alpha), \alpha^* \rangle = a_{\alpha^*} \langle \Phi(\alpha^*), \alpha^* \rangle,$$

mistä seuraa, että $\langle \Phi(\alpha^*), \alpha^* \rangle \neq 0$.

Termi $\Phi(\alpha^*)$ on myös p-solujen lineaarikombinaatio. Koska $\langle \Phi(\alpha^*), \alpha^* \rangle \neq 0$, täytyy solun α^* kertoimen tässä lineaarikombinaatiossa poiketa nollasta. Lauseen 4.6 kohdasta (2) seuraa nyt, että kertoimen tulee olla yksi ja että α^* on kriittinen solu. □

Lause 4.11. *Olkoon K äärellinen CW-kompleksi. On olemassa sellainen N että, $\Phi^M = \Phi^N$ kaikilla $M \geqslant N$.*

Todistus (vrt. [7, s. 120] ja [17, s. 196]). Olkoon K äärellinen CW-kompleksi ja olkoon K' kompleksin K kaikkien solujen joukko. Osoitetaan, että riittävän suurelle N

$$\Phi^M(\alpha) = \Phi^N(\alpha), \text{ kaikilla } M \geqslant N, \text{ ja kaikilla } \alpha \in K'.$$

Todistetaan väite induktiolla luvun $r = \#\{\tilde{\alpha} \in K' \mid f(\tilde{\alpha}) < f(\alpha)\}$ suhteen. Olkoon ensin $r = 0$. p-solun α kuva $\Phi(\alpha)$ on lineaarikombinaatio p-soluista α'. Jos solun $\alpha' \neq \alpha$ kerroin lineaarikombinaatiossa $\Phi(\alpha)$ ei ole nolla, niin lauseen 4.6 nojalla $f(\alpha') < f(\alpha)$. Koska $r = 0$, täytyy solun α' kertoimen olla nolla. Siis $\Phi(\alpha) = \alpha$ tai $\Phi(\alpha) = 0$. Kummassakin tapauksessa $\Phi^N(\alpha) = \Phi^M(\alpha)$ kaikilla $M, N \geqslant 1$.

Tehdään induktio-oletus ja oletetaan, että väite pätee, kun $r = n$. Oletetaan, että $r = \#\{\tilde{\alpha} \in K' \mid f(\tilde{\alpha}) < f(\alpha)\} = n + 1$. Oletetaan ensin, että α ei ole kriittinen. Tällöin lauseen 4.6 nojalla

$$\Phi(\alpha) = \sum_{f(\tilde{\alpha})<f(\alpha)} a_{\tilde{\alpha}}\tilde{\alpha}.$$

Induktio-oletuksen nojalla on olemassa $\tilde{N}$, jolle $\Phi^{\tilde{N}}(\tilde{\alpha})$ on Φ-invariantti, kun $f(\tilde{\alpha}) < f(\alpha)$. Näin ollen $\Phi^{\tilde{N}+1}(\alpha)$ on Φ-invariantti.

Oletetaan sitten, että α on kriittinen ja olkoon $c = V(\partial\alpha)$. Tällöin apulauseen 4.8 nojalla

$$\Phi^m(\alpha) = \alpha + c + \Phi(c) + \cdots + \Phi^{m-1}(c).$$

Nyt $\Phi^N(\alpha)$ on invariantti, jos ja vain jos $\Phi^N(c) = 0$. Kuten huomattiin lauseen 4.6 todistuksessa, c on lineaarikombinaatio p-soluista $\tilde{\alpha}$, joille $f(\tilde{\alpha}) < f(\alpha)$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa $\tilde{N}$, jolle $\Phi^{\tilde{N}}(\tilde{\alpha})$ on Φ-invariantti.

Huomataan, että $c \in \mathrm{Im}(V)$ ja $\mathrm{Im}(V)$ on Φ-invariantti, koska lauseen 4.5 kohdan (1) nojalla

$$\Phi V = (1 + \partial V + V\partial)V = V(1 + \partial V).$$

Koska $c \in \mathrm{Im}(V)$, niin myös $\Phi^{\tilde{N}}(c) \in \mathrm{Im}(V)$. Merkitään $\Phi^{\tilde{N}}(c) = w$, missä $w = \sum_\beta a_\beta\beta$. Tällöin

$$\Phi^{\tilde{N}+1}(c) = \Phi(w) = \sum_\beta a_\beta\Phi(\beta).$$

Lauseen 4.5 kohdan (3) nojalla $a_\beta = 0$, jos β on kriittinen. Edelleen apulauseen 4.10 nojalla mikä tahansa joukon $A = \{f(\beta) \mid a_\beta \neq 0\}$ maksimoija on kriittinen. Mutta jos β on joukon A on maksimoija, niin silloin β on kriittinen ja $a_\beta \neq 0$, mikä on ristiriita. Siis $A = \emptyset$, jolloin $a_\beta = 0$ jokaisella β. Näin ollen $\Phi^{\tilde{N}+1}(c) = 0$, joten $\Phi^{\tilde{N}+1}(\alpha)$ on Φ-invariantti. □

Lauseen 4.11 nojalla on olemassa riittävän suuri N, että jokaiselle ketjulle c,

$$\Phi^N(c) = \Phi^{N+1}(c) = \Phi^{N+2}(c) = \dots.$$

Määritellään $\Phi^\infty(c) = \Phi^N(c)$. Tällöin jokaiselle $p \geqslant 0$ on kuvaukset

$$\Phi^\infty : C_p(K, \mathbb{Z}) \to C_p^\Phi(K, \mathbb{Z})$$

$$i : C_p^\Phi(K, \mathbb{Z}) \hookrightarrow C_p(K, \mathbb{Z}),$$

missä i on luonnollinen inkluusio. Nyt $\Phi^\infty \circ i = \mathrm{id}_{C_p^\Phi(K,\mathbb{Z})}$. Lauseen 4.6 perusteella $\Phi\partial = \partial\Phi$, joten Φ on ketjukuvaus. Selvästi myös i on ketjukuvaus.

Olkoot C ja C' ketjukomplekseja ja olkoon $f : C \to C'$ ketjukuvaus. Ketjukuvaus f indusoi homologiaryhmien välille homomorfismin $f_* : H_*(C) \to H_*(C')$, jolle $f_*([z]) = [f(z)]$. Tässä $[z]$ merkitsee syklin z homologialuokkaa.

Apulause 4.12. Olkoot $f : C \to C'$ ja $g : C' \to C''$ ketjukuvauksia. Tällöin indusoiduille homomorfismeille homologiaryhmien välillä pätee

(i) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(ii) Jos $\mathrm{id}_C : C \to C$ on identiteettikuvaus, niin $(\mathrm{id}_C)_* = \mathrm{id}_{H_*(C)}$.

Todistus (ks. [13, s. 69]). Olkoon z ketjukompleksin C sykli. Indusoidun homomorfismin määritelmästä seuraa, että

$$\begin{aligned}(g \circ f)_*([z]) &= [(g \circ f)(z)] \\ &= [g(f(z))] \\ &= g_*([f(z)]) \\ &= g_*(f_*([z])) \\ &= (g_* \circ f_*)([z])\end{aligned}$$

ja

$$(\mathrm{id}_C)_*([z]) = [\mathrm{id}_C(z)] = [z] = \mathrm{id}_{H_*(C)}([z]).$$

□

Lause 4.13. *Olkoon K äärellinen CW-kompleksi. Olkoon C_*^Φ määritelmän 4.7 mukainen Morse-kompleksi. Tällöin jokaiselle $p \geqslant 0$,*

$$H_p(C_*^\Phi) \cong H_p(K;\mathbb{Z}).$$

Todistus (vrt. [7, s. 122]). Tarkastellaan seuraavaa kommutoivaa kaaviota:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_p(K,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\Phi^\infty"'] & C_{p-1}(K,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\Phi^\infty"'] & \cdots \arrow[r, "\partial"] & C_0(K,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\Phi^\infty"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_p^\Phi(K,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, shift right, "i"'] & C_{p-1}^\Phi(K,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, shift right, "i"'] & \cdots \arrow[r, "\partial"] & C_0^\Phi(K,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "i"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Olkoot

$$\begin{aligned}\Phi_*^\infty &: H_*(K;\mathbb{Z}) \to H_*(C_*^\Phi) \\ i_* &: H_*(C_*^\Phi) \to H_*(K;\mathbb{Z})\end{aligned}$$

homologiaryhmien välille indusoidut homomorfismit. Tavoitteena on todistaa, että i_* ja Φ_*^∞ ovat isomorfismeja, itse asiassa toistensa käänteiskuvauksia. Koska $\Phi^\infty \circ i = \mathrm{id}$, niin apulauseen 4.12 nojalla

$$\Phi_*^\infty \circ i_* = (\Phi^\infty \circ i)_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id} : H_*(C_*^\Phi) \to H_*(C_*^\Phi).$$

Jotta nähdään, että $i_* \circ \Phi_*^\infty = \mathrm{id}_*$, niin tulee löytää sellaiset homomorfismit

$$L : C_*(K,\mathbb{Z}) \to C_{*+1}(K,\mathbb{Z}),$$

että

$$\mathrm{id} - i \circ \Phi^\infty = \partial L + L\partial.$$

Tällöin L on ketjuhomotopia ketjukuvauksien id ja $i \circ \Phi^\infty$ välillä. Niinpä

$$i_* \circ \Phi_*^\infty = (i \circ \Phi^\infty)_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id} : H_*(K;\mathbb{Z}) \to H_*(K;\mathbb{Z}).$$

Koska i on ketjujen inkluusio ja $\Phi^\infty = \Phi^N$ jollakin riittävän suurella N, niin

$$\begin{aligned}
\mathrm{id} - i \circ \Phi^\infty &= \mathrm{id} - \Phi^N \\
&= (\mathrm{id} - \Phi)(1 + \Phi + \cdots + \Phi^{N-1}) \\
&= (-\partial V - V\partial)(1 + \Phi + \cdots + \Phi^{N-1}) \\
&= \partial[-V(1 + \Phi + \cdots + \Phi^{N-1})] + [-V\partial(1 + \Phi + \cdots + \Phi^{N-1})] \\
&= \partial[-V(1 + \Phi + \cdots + \Phi^{N-1})] + [-V(1 + \Phi + \cdots + \Phi^{N-1})]\partial,
\end{aligned}$$

koska lauseen 4.6 perusteella $\partial\Phi = \Phi\partial$. Valitaan siis $L = -V(1+\Phi+\cdots+\Phi^{N-1})$. □

4.3 Morse-kompleksi ja kriittiset pisteet

Tässä luvussa näytetään, että Morse-kompleksi voidaan esittää kriittisten solujen avulla. Lähteenä käytetään Formanin teosta [7].

Tarkastellaan CW-kompleksia K ja merkitään $\mathscr{M}_p$:llä kriittisten p-solujen virittämää ryhmän $C_p(K,\mathbb{Z})$ aliryhmää jokaiselle p, toisin sanoen

$$\mathscr{M}_p = \left\{ \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \alpha \mid a_\alpha \in \mathbb{Z} \text{ ja jos } a_\alpha \neq 0, \alpha \text{ on kriittinen} \right\}.$$

Summassa $\sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \alpha$ vain äärellisen moni kerroin voi poiketa nollasta. Merkinnällä $\mathscr{M}_*$ tarkoitetaan aliryhmää $\mathscr{M}_p$ millä tahansa indeksillä p ja merkinnällä $\mathscr{M}_p^\perp$ tarkoitetaan aliryhmän $\mathscr{M}_p$ ortogonaalista komplementtia ryhmässä $C_p(K,\mathbb{Z})$. Kun rajoitetaan aliluvussa 4.2 määriteltyä kuvausta Φ^∞, saadaan kuvaus

$$\Phi^\infty : \mathscr{M}_p \to C_p^\Phi(K,\mathbb{Z}).$$

Kiinnitetään suunta jokaiselle p-solulle α.

Apulause 4.14. Olkoon α kriittinen p-solu. Jos $\tilde{\alpha} \neq \alpha$ on kriittinen, niin

$$\langle \Phi^\infty(\alpha), \tilde{\alpha} \rangle = 0.$$

Todistus (vrt. [7, s. 123]). Lauseen 4.11 todistuksen perusteella

$$\Phi^\infty(\alpha) = \alpha + c + \Phi(c) + \cdots + \Phi^{N-1}(c),$$

jollakin $N \in \mathbb{Z}_+$, missä $c = V(\partial\alpha) \in \mathrm{Im}(V) \subset C_p(K, \mathbb{Z})$. Saman lauseen todistuksessa osoitetaan, että $\mathrm{Im}(V)$ on Φ-invariantti. Niinpä $\Phi^m(c) \in \mathrm{Im}(V)$ kaikilla $1 \leqslant m \leqslant N - 1$. Tästä seuraa, että

$$c' = c + \Phi(c) + \cdots + \Phi^{N-1}(c) \in \mathrm{Im}(V).$$

Niinpä voidaan kirjoittaa

$$\Phi^\infty(\alpha) = \alpha + c',$$

missä $c' \in \mathrm{Im}(V)$. Homomorfismin V määritelmästä seuraa, että sen kuvan $\mathrm{Im}(V)$ virittävät jotkut ei-kriittiset p-solut. Tästä seuraa, että $\mathrm{Im}(V) \perp \mathscr{M}_p$, joten $\mathrm{Im}(V) \subset \mathscr{M}_p^\perp$. Niinpä

$$\begin{aligned}
\langle \Phi^\infty(\alpha), \tilde{\alpha} \rangle &= \langle \alpha + c', \tilde{\alpha} \rangle \\
&= \langle \alpha, \tilde{\alpha} \rangle + \langle c', \tilde{\alpha} \rangle \\
&= 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Lause 4.15. *Kuvaus $\Phi^\infty : \mathscr{M}_p \to C_p^\Phi(K, \mathbb{Z})$ on isomorfismi.*

Todistus (vrt. [7, s. 123]). Osoitetaan, että Φ^∞ on sekä surjektiivinen, että injektiivinen. Olkoon $c \in C_p^\Phi(K, \mathbb{Z})$ ja olkoon

$$\tilde{c} = \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle c, \alpha \rangle \alpha \in \mathscr{M}_p.$$

Osoitetaan, että $\Phi^\infty(\tilde{c}) = c$. Olkoon α' kriittinen p-solu. Tällöin

$$\begin{aligned}
\langle \Phi^\infty(\tilde{c}), \alpha' \rangle &= \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle \langle c, \alpha \rangle \Phi^\infty(\alpha), \alpha' \rangle \\
&= \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle c, \alpha \rangle \langle \Phi^\infty(\alpha), \alpha' \rangle \\
&= \langle c, \alpha' \rangle \langle \Phi^\infty(\alpha'), \alpha' \rangle,
\end{aligned}$$

koska apulauseen 4.14 perusteella $\langle \Phi^\infty(\alpha), \alpha' \rangle = 0$ kaikilla kriittisillä p-soluilla $\alpha \neq \alpha'$. Kuten lauseen 4.11 todistuksessa,

$$\Phi^\infty(\alpha') = \Phi^N(\alpha') = \alpha' + b + \Phi(b) + \cdots + \Phi^{N-1}(b)$$

riittävän suurella $N \in \mathbb{N}$. Tässä $b = V\partial(\alpha') \in \mathrm{Im}(V)$. Lauseen 4.11 todistuksessa todettiin, että $\mathrm{Im}(V)$ on Φ-invariantti. Edelleen $\mathrm{Im}(V) \subset \mathscr{M}_p^\perp$. Niinpä

$$\begin{aligned}
\langle \Phi^\infty(\alpha'), \alpha' \rangle &= \langle \alpha' + b + \Phi(b) + \cdots + \Phi^{N-1}(b), \alpha' \rangle \\
&= \langle \alpha', \alpha' \rangle \\
&= 1,
\end{aligned}$$

missä $b + \Phi(b) + \cdots + \Phi^{N-1}(b) \in \mathscr{M}_p^\perp$. Siis

$$\langle \Phi^\infty(\tilde{c}), \alpha' \rangle = \langle c, \alpha' \rangle \langle \Phi^\infty(\alpha'), \alpha' \rangle = \langle c, \alpha' \rangle$$

kaikilla kriittisillä p-soluilla α'. Näin ollen

$$\langle \Phi^\infty(\tilde{c}) - c, \alpha' \rangle = 0$$

kaikilla kriittisillä p-soluilla α'. Kirjoitetaan

$$\Phi^\infty(\tilde{c}) - c = \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \alpha.$$

Tässä $a_\alpha = 0$ kaikilla kriittisillä p-soluilla α. Olkoon $\alpha^* \in K_p$ joukon $\{f(\alpha) \mid a_\alpha \neq 0\}$ maksimoija. Apulauseen 4.10 perusteella α^* on kriittinen. Tästä seuraa, että $a_\alpha = 0$ kaikilla $\alpha \in K_p$. Niinpä $\Phi^\infty(\tilde{c}) - c = 0$, joten $\Phi^\infty(\tilde{c}) = c$. Siis Φ^∞ on surjektio.

Osoitetaan vielä, että Φ^∞ on injektio. Olkoon $c \in \mathscr{M}_p$. Oletetaan, että $\Phi^\infty(c) = 0$. Kirjoitetaan

$$c = \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle c, \alpha \rangle \alpha,$$

jolloin

$$\Phi^\infty(c) = \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle c, \alpha \rangle \Phi^\infty(\alpha).$$

Olkoon α kriittinen p-solu. Kirjoitetaan taas

$$\Phi^\infty(\alpha) = \alpha + b_\alpha,$$

missä $b_\alpha = V\partial(\alpha) + \Phi(V\partial(\alpha)) + \cdots + \Phi^{N-1}(V\partial(\alpha))$. Tällöin $b_\alpha \in \mathscr{M}_p^\perp$. Olkoon α' kriittinen p-solu. Saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= \langle 0, \alpha' \rangle \\
&= \langle \Phi^\infty(c), \alpha' \rangle \\
&= \langle \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle c, \alpha \rangle \Phi^\infty(\alpha), \alpha' \rangle \\
&= \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle c, \alpha \rangle \langle \Phi^\infty(\alpha), \alpha' \rangle \\
&= \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle c, \alpha \rangle \langle \alpha + b_\alpha, \alpha' \rangle \\
&= \langle c, \alpha' \rangle,
\end{aligned}$$

koska $\langle \alpha + b_\alpha, \alpha' \rangle = \langle \alpha, \alpha' \rangle + \langle b_\alpha, \alpha' \rangle$, missä $\langle b_\alpha, \alpha' \rangle = 0$ ja $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ saa arvon 1, jos $\alpha = \alpha'$ ja arvon 0, jos $\alpha \neq \alpha'$. Siis kaikille kriittisille p-soluille α' pätee $\langle c, \alpha' \rangle = 0$. Tällöin

$$c = \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle c, \alpha \rangle \alpha = 0.$$

Näin ollen Φ^∞ on injektio. □

Lauseen 4.15 ja lauseen 4.6 kohdan (1) mukaan Morse-kompleksi

$$C_*^\Phi : 0 \to C_n^\Phi(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^\Phi(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_0^\Phi(K, \mathbb{Z}) \to 0.$$

on isomorfinen kompleksin

$$\mathcal{M}: 0 \to \mathcal{M}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}} \mathcal{M}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}} \ldots \xrightarrow{\tilde{\partial}} \mathcal{M}_0 \to 0$$

kanssa. Lauseen 4.15 todistuksesta nähdään, että homomorfismin $\Phi^\infty : \mathcal{M}_p \to C_p^\Phi(K, \mathbb{Z})$ käänteishomomorfismi on projektion

$$\Pi_{\mathcal{M}} : C_p(K, \mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_p,$$
$$c = \sum_{\alpha} \langle c, \alpha\rangle \alpha \mapsto \sum_{\alpha \text{ kriittinen}} \langle c, \alpha\rangle \alpha,$$

rajoittuma ryhmään $C_p^\Phi(K, \mathbb{Z})$. Merkitään tätä rajoittumaa

$$\Pi_{\mathcal{M}} \mid \ : C_p^\Phi(K, \mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_p.$$

Kompleksin $\mathcal{M}$ reunakuvaus $\tilde{\partial}$ määritellään niin, että seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_n \arrow[r, "\tilde{\partial}"] \arrow[d, "\Phi^\infty"] & \mathcal{M}_{n-1} \arrow[r, "\tilde{\partial}"] \arrow[d, "\Phi^\infty"] & \cdots \arrow[r, "\tilde{\partial}"] & \mathcal{M}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^\infty"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & C_n^\Phi(K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}^\Phi(K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] & \cdots \arrow[r, "\partial"] & C_0^\Phi(K, \mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Siis $\tilde{\partial} = (\Pi_{\mathcal{M}} \mid)\partial\Phi^\infty$. Kaavion kommutoinnista seuraa, että $\tilde{\partial}\tilde{\partial} = 0$. Näin ollen $H_*(\mathcal{M}) \cong H_*(C_*^\Phi)$. Ketjulle $c \in \mathcal{M}_p$ ja kriittiselle $(p-1)$-solulle α pätee

$$\langle \partial\Phi^\infty c, \alpha\rangle = \langle \Phi^\infty \tilde{\partial} c, \alpha\rangle.$$

Palautetaan mieleen gradienttipolun määritelmä 3.12 ja määritellään polulle kerrannaisuus.

Määritelmä 4.16. Olkoon $\gamma = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ dimensiota p oleva gradienttipolku. Polun γ *kerrannaisuus* määritellään

$$m(\gamma) = \prod_{\substack{i=0 \\ V(\alpha_i)\neq 0}}^{r-1} \langle \partial V(\alpha_i), \alpha_i\rangle \langle \partial V(\alpha_i), \alpha_{i+1}\rangle.$$

Apulause 4.17. Olkoot $\gamma_0 = \alpha_0, \ldots, \alpha_r$ ja $\gamma_1 = \alpha_r, \ldots, \alpha_{r+s}$ gradienttipolkuja. Tällöin

$$m(\gamma_1)m(\gamma_0) = m(\gamma_1 \circ \gamma_0),$$

missä $\gamma_1 \circ \gamma_0 = \alpha_0, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_{r+s}$.

Todistus. Nyt

$$\begin{aligned}
m(\gamma_1 \circ \gamma_2) &= \prod_{\substack{i=0 \\ V(\alpha_i)\neq 0}}^{r+s-1} \langle \partial V(\alpha_i), \alpha_i\rangle \langle \partial V(\alpha_i), \alpha_{i+1}\rangle \\
&= \prod_{\substack{i=0 \\ V(\alpha_i)\neq 0}}^{r-1} \langle \partial V(\alpha_i), \alpha_i\rangle \langle \partial V(\alpha_i), \alpha_{i+1}\rangle \prod_{\substack{i=r \\ V(\alpha_i)\neq 0}}^{r+s-1} \langle \partial V(\alpha_i), \alpha_i\rangle \langle \partial V(\alpha_i), \alpha_{i+1}\rangle \\
&= m(\gamma_1)m(\gamma_2).
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 4.18. *Redusoitu gradienttivirtaus* $\tilde{\Phi} : C_p(K, \mathbb{Z}) \to C_p(K, \mathbb{Z})$ on

$$\tilde{\Phi} = 1 + \partial V.$$

Huomioitavaa on se, että $\tilde{\Phi}$ ei toteuta diskreetin gradienttivirtauksen Φ ominaisuuksia, jotka on listattu lauseessa 4.6.

Aiemmin todistettiin, että on olemassa $N > 0$, jolle pätee $\Phi^M = \Phi^N$ kaikilla $M \geqslant N$, ja merkittiin $\Phi^\infty = \Phi^N$. Otetaan nyt käyttöön merkintä $\tilde{\Phi}^\infty = \tilde{\Phi}^N$.

Apulause 4.19. Mille tahansa kriittisille soluille $\beta^{(p+1)}$ ja $\alpha^{(p)}$ pätee

$$\langle \tilde{\partial}\beta, \alpha \rangle = \langle \tilde{\Phi}^\infty \partial\beta, \alpha \rangle.$$

Todistus (vrt. [7, s. 127]). Kriittisille soluille $\beta^{(p+1)}$ ja $\alpha^{(p)}$ pätee

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\partial}\beta, \alpha \rangle &= \langle \Pi_{\mathscr{M}} \mid \partial\Phi^\infty\beta, \alpha \rangle \\ &= \langle \Pi_{\mathscr{M}} \mid \Phi^\infty\partial\beta, \alpha \rangle \\ &= \langle \Phi^\infty\partial\beta, \alpha \rangle, \end{aligned}$$

koska $\Pi_{\mathscr{M}} \mid$ on projektio kriittisten p-solujen muodostamalle ryhmälle $\mathscr{M}_p$. Kun halutaan osoittaa, että

$$\langle \tilde{\partial}\beta, \alpha \rangle = \langle \tilde{\Phi}^\infty \partial\beta, \alpha \rangle,$$

riittää todistaa, että jokaiselle $r \geqslant 1$ pätee

$$\langle \tilde{\Phi}^r \partial\beta, \alpha \rangle = \langle \Phi^r \partial\beta, \alpha \rangle.$$

Tämä seuraa havainnosta, että jokaiselle ketjulle c ja jokaiselle $r \geqslant 1$,

$$\Phi^r(c) - \tilde{\Phi}^r(c) \in \operatorname{Im}(V) \subseteq \mathscr{M}_*^\perp.$$

Todistetaan yllä oleva havainto induktiolla luvun r suhteen. Kun $r = 1$, niin ei ole mitään todistettavaa. Oletetaan, että väite pätee indeksillä $r - 1$ ja osoitetaan, että se pätee myös indeksillä r. Tällöin induktio-oletuksen nojalla jollekin ketjulle $\tilde{c}$,

$$\begin{aligned} \Phi^r(c) &= \Phi\left(\Phi^{r-1}(c)\right) = \Phi\left(\tilde{\Phi}^{r-1}(c) + V(\tilde{c})\right) \\ &= (\tilde{\Phi} + V\partial)\left(\tilde{\Phi}^{r-1}(c) + V(\tilde{c})\right) \\ &= \tilde{\Phi}^r(c) + \tilde{\Phi}\left(V(\tilde{c})\right) + V\partial\tilde{\Phi}^{r-1}(c) + V\partial V(\tilde{c}) \\ &= \tilde{\Phi}^r(c) + V\left(\tilde{c} + \partial\tilde{\Phi}^{r-1}(c) + \partial V(\tilde{c})\right), \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa lauseen 4.5 kohdan (1) nojalla siitä, että
$\tilde{\Phi}V = V + \partial V^2 = V$. □

Määritelmä 4.20. Olkoon $\gamma = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ gradienttipolku. Gradienttipolun γ *pituus* $|\gamma| = r$.

Kun α ja $\tilde{\alpha}$ ovat p-soluja, niin merkinnällä $\Gamma_r(\alpha, \tilde{\alpha})$ tarkoitetaan kaikkia gradienttipolkuja solusta α soluun $\tilde{\alpha}$, joiden pituus on r.

Apulause 4.21. Olkoon K_p CW-kompleksin K p-solujen joukko. Mille tahansa $\alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)} \in K_p$,

$$\langle \tilde{\Phi}\alpha_1, \alpha_2 \rangle = \sum_{\gamma \in \Gamma_1(\alpha_1, \alpha_2)} m(\gamma).$$

Todistus (vrt. [7, s. 127]). Gradienttipolun määritelmän 3.12 perusteella $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ja $V(\alpha_1) \neq 0$. Siis $V(\alpha_1) = \pm e$, missä solun e etumerkki on valittu siten, että $\langle \partial V(\alpha_1), \alpha_1 \rangle = -1$. Koska $\alpha_1 \neq \alpha_2$, niin

$$\langle \tilde{\Phi}\alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + \langle \partial V(\alpha_1), \alpha_2 \rangle = \langle \partial V(\alpha_1), \alpha_2 \rangle.$$

Jos α_2 ei ole gradienttivektorikentän $V(\alpha_1)$ sivu, niin $\langle \tilde{\Phi}\alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$. Edelleen tässä tapauksessa ei ole olemassa gradienttipolkua solusta α_1 soluun α_2, jonka pituus olisi yksi, joten

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_1(\alpha_1, \alpha_2)} m(\gamma) = 0.$$

Jos α_2 on gradienttivektorikentän $V(\alpha_1)$ sivu, niin on olemassa täsmälleen yksi gradienttipolku solusta α_1 soluun α_2, jonka pituus on 1, nimittäin $\gamma = \alpha_1, \alpha_2$. Tällöin

$$m(\gamma) = -\langle \alpha_1, \partial V(\alpha_1) \rangle \langle \partial V(\alpha_1), \alpha_2 \rangle = \langle \partial V(\alpha_1), \alpha_2 \rangle = \langle \tilde{\Phi}\alpha_1, \alpha_2 \rangle,$$

kuten haluttiin. □

Lause 4.22. *Mille tahansa kriittisille soluille $\beta^{(p+1)}$ ja $\alpha^{(p)}$,*

$$\langle \tilde{\partial}\beta, \alpha \rangle = \sum_{\tilde{\alpha}^{(p)} < \beta} \langle \partial\beta, \tilde{\alpha} \rangle \sum_{\gamma \in \Gamma_N(\tilde{\alpha}, \alpha)} m(\gamma)$$

riittävän suurella N.

Todistus (vrt. [7, s. 128]). Apulauseen 4.19 nojalla $\langle \tilde{\partial}\beta, \alpha \rangle = \langle \tilde{\Phi}^N \partial\beta, \alpha \rangle$ riittävän suurella N. Koska

$$\partial\beta = \sum_{\tilde{\alpha}^{(p)} < \beta} \langle \partial\beta, \tilde{\alpha} \rangle \tilde{\alpha},$$

niin saadaan

$$\langle \tilde{\partial}\beta, \alpha \rangle = \sum_{\tilde{\alpha}^{(p)} < \beta} \langle \partial\beta, \tilde{\alpha} \rangle \langle \tilde{\Phi}^N \tilde{\alpha}, \alpha \rangle$$

riittävän suurella N. Osoitetaan seuraavaksi induktiolla, että jokaisella $r \geqslant 0$,

$$\langle \tilde{\Phi}^r \tilde{\alpha}, \alpha \rangle = \sum_{\gamma \in \Gamma_r(\tilde{\alpha}, \alpha)} m(\gamma).$$

Tapaus $r = 0$ on triviaali ja tapaus $r = 1$ on apulause 4.21. Olkoon $r > 1$. Tällöin

$$\langle \tilde{\Phi}^r \tilde{\alpha}, \alpha \rangle = \langle \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}^{r-1}\tilde{\alpha}), \alpha \rangle.$$

Koska $\tilde{\Phi}^{r-1}\tilde{\alpha} = \sum_{\alpha'^{(p)}} \langle \tilde{\Phi}^{r-1}\tilde{\alpha}, \alpha' \rangle \alpha'$, saadaan

$$\langle \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}^{r-1}\tilde{\alpha}), \alpha \rangle = \sum_{\alpha'^{(p)}} \langle \tilde{\Phi}^{r-1}\tilde{\alpha}, \alpha' \rangle \langle \tilde{\Phi}\alpha', \alpha \rangle.$$

Induktio-oletuksesta seuraa, että

$$\sum_{\alpha'^{(p)}} \langle \tilde{\Phi}^{r-1}\tilde{\alpha}, \alpha' \rangle \langle \tilde{\Phi}\alpha', \alpha \rangle = \sum_{\alpha'} \sum_{\gamma \in \Gamma_{r-1}(\tilde{\alpha}, \alpha')} m(\gamma) \langle \tilde{\Phi}\alpha', \alpha \rangle.$$

Apulauseesta 4.21 seuraa, että

$$\sum_{\alpha'} \sum_{\gamma \in \Gamma_{r-1}(\tilde{\alpha}, \alpha')} m(\gamma) \langle \tilde{\Phi}\alpha', \alpha \rangle = \sum_{\alpha'} \sum_{\gamma \in \Gamma_{r-1}(\tilde{\alpha}, \alpha')} m(\gamma) \sum_{\gamma' \in \Gamma_1(\alpha', \alpha)} m(\gamma').$$

Edelleen apulauseiden 3.15 ja 4.17 nojalla

$$\sum_{\alpha'} \sum_{\gamma \in \Gamma_{r-1}(\tilde{\alpha}, \alpha')} m(\gamma) \sum_{\gamma' \in \Gamma_1(\alpha', \alpha)} m(\gamma') = \sum_{\gamma \in \Gamma_r(\tilde{\alpha}, \alpha')} m(\gamma).$$

□

4.4 Välttelevyys

Välttelevyydessä on kyse diskreetin Morse-teorian soveltamisesta tietojenkäsittelyyn. Ongelma, jota käsitellään on topologinen versio tietojenkäsittelyn etsimisongelmasta. Kattavamman esityksen aiheesta löytää lähteestä [6]. Tämän aliluvun lähteinä käytetään teoksia [8], [17] ja [11]. Muista luvuista poiketen tässä luvussa tarkastellaan simpleksisiä komplekseja.

Tarkastellaan kahden pelaajan peliä, jossa pelaajia kutsutaan *piileskelijäksi* ja *etsijäksi*. Olkoon S n-simpleksi, jolla on kärjet $v_0, v_1, \ldots, v_n$ ja olkoon M simpleksin S alikompleksi, jonka piileskelijä ja etsijä tuntevat. Olkoon α simpleksin S sivu, jonka ainostaan piileskelijä tietää. Etsijä saa esittää kysymyksiä, jotka ovat muotoa "Onko kärki v_i sivussa α?". Etsijän tavoitteena on määrittää, onko α alikompleksissa M, käyttämällä mahdollisimman vähän kysymyksiä.

Etsijä saa käyttää aikaisempien kysymyksien vastauksia valitessaan, mistä kärjestä kysyy seuraavaksi. Etsijä käyttää algoritmia, perustuen aikaisempiin vastauksiin, esittäessään seuraavaa kysymystä. Tällaista algoritmia kutsutaan päätöspuualgoritmiksi. Jokaista päätöspuualgoritmia A kohti kysymysten määrää, jota etsijä käyttää ennen kuin on saanut määritettyä, onko α kompleksissa M, merkitään $Q(\alpha, A, M)$.

Määritelmä 4.23. Olkoon S n-simpleksi ja olkoon M simpleksin S alikompleksi. Kompleksin M *kompleksisuus* $c(M)$ määritellään

$$c(M) = \min_{A} \max_{\alpha} Q(\alpha, A, M).$$

Kompleksin M sanotaan olevan *välttelevä*, jos $c(M) = n + 1$. Muuten M on *ei-välttelevä*. Sivua α, jolle $Q(\alpha, A, M) = n + 1$ kutsutaan *välttelijäksi*.

Siis määritelmä sanoo, että M on välttelevä, jos jokaista päätöspuualgoritmia A kohti on sellainen simpleksin S sivu α, että etsijän täytyy kysyä $n + 1$ kysymystä määrittääkseen, onko α kompleksissa M. Koska kompleksi M on äärellinen, niin päätöspuualgoritmeja on vain äärellinen määrä. Huomioitavaa on se, että eri päätöspuualgoritmeilla voi olla eri välttelijät.

Lähteessä [11] on osoitettu olennainen suhde alikompleksin välttelevyyden ja topologian välille.

Lause 4.24. *Jos alikompleksi M ei ole välttelevä, niin se on romahtava.*

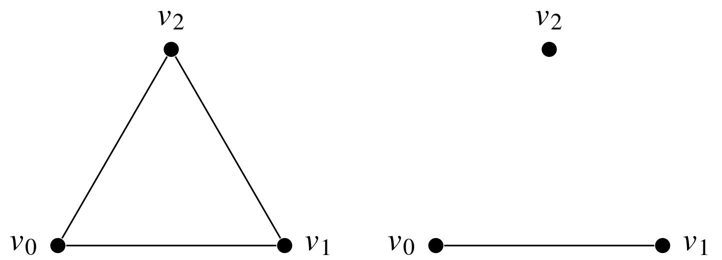
Todistus (ks. [11, s. 300]). □

Seuraus 4.25. *Jos alikompleksi M ei ole välttelevä, niin M on kutistuva.*

Kutistuvalla kompleksilla tarkoitetaan kompleksia, jolla on sama homotopiatyyppi kuin pisteellä.

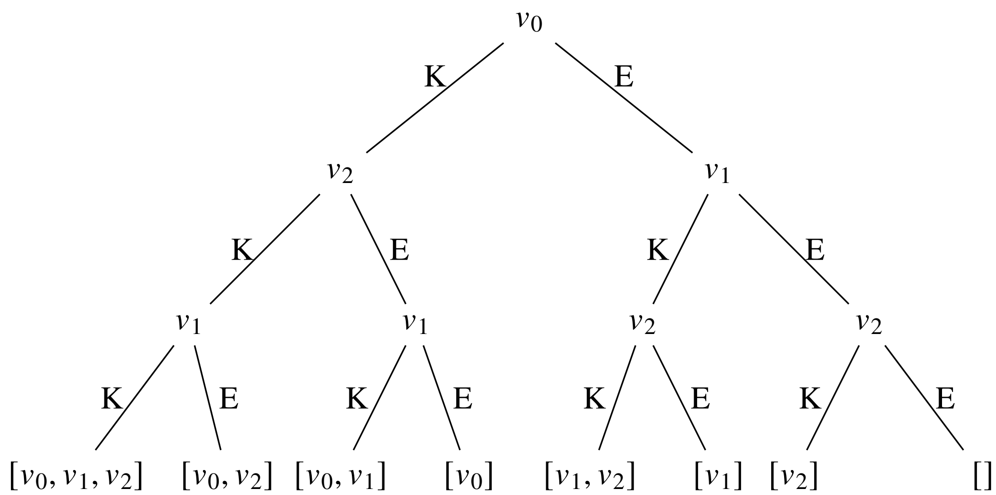
Lause 4.26. *Jos $\tilde{H}_*(M) \neq 0$, missä $\tilde{H}_*(M)$ on kompleksin M redusoitu homologia, niin M on välttelevä.*

Todistus. Olkoon $\tilde{H}_*(M) \neq 0$. Oletetaan vastoin väitettä, että kompleksi M ei ole välttelevä. Tällöin seurauksen 4.25 nojalla M on kutistuva. Koska M on kutistuva, niin $\tilde{H}_*(M) = 0$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Siis M on välttelevä. □



Kuva 4.2. 2-simpleksi ja sen välttelevä alikompleksi.

Esimerkki 4.27. Olkoon S kuvan 4.2 2-simpleksi ja olkoon K kuvassa oleva simpleksin S alikompleksi, joka siis koostuu särmästä v_0v_1 ja kärjestä v_2. Yksi mahdollinen päätöspuualgoritmi nähdään kuvassa 4.3. Algoritmissa K merkitsee vastausta *kyllä* ja E vastausta *ei*.



Kuva 4.3. Päätöspuualgoritmi, jonka viimeisellä rivillä olevat sivut kuvaavat simpleksin S sivua α, jonka ainoastaan piileskelijä tietää.

Olkoon α simpleksin S sivu, jonka ainostaan piileskelijä tietää. Etsijä saa esittää kysymyksiä, jotka ovat muotoa ”Onko kärki v_i sivussa α?”. Etsijän tavoitteena on määrittää, onko α alikompleksissa K, käyttämällä mahdollisimman vähän kysymyksiä. Kun tarkastellaan algoritmia havaitaan, että välttelijöitä ovat $\alpha = [v_1, v_2]$ ja $\alpha = [v_1]$. Nimittäin näissä tilanteissa etsijän tulee esittää kaikki kolme kysymystä selvittääkseen kuuluuko α alikompleksiin K. Jos siis $\alpha = [v_1, v_2]$, niin etsijä kysyy ensin "Onko kärki v_0 sivussa α?" ja saa vastaukseksi "Ei". Sitten etsijä esittää kysymyksen "Onko kärki v_1 sivussa α?" ja saa vastaukseksi "Kyllä". Nyt etsijä ei voi vielä tietää, kuuluuko α alikompleksiin K, koska jos vastaus viimeiseen kysymykseen on "Ei", niin $\alpha \in K$ ja jos taas vastaus on "Kyllä", niin $\alpha \notin K$. Siis etsijä esittää vielä viimeisen kysymyksen "Onko kärki v_2 sivussa α?" ja saa vastaukseksi "Kyllä". Toisaalta piileskelijä olisi voinut yhtä hyvin antaa vastaukseksi "Ei" tähän viimeiseen kysymykseen ja tässä tapauksessa välttelijä olisi ollut $\alpha = [v_1]$. Siis välttelijät esiintyvät pareittain.

Jos $\alpha = [v_0, v_2]$, niin tällöin kysymysten "Onko kärki v_0 sivussa α?" ja "Onko kärki v_2 sivussa α?" jälkeen etsijän ei enää tarvitse esittää kysymystä. Etsijä tietää jo tässä vaiheessa, että $\alpha \notin K$. Jos nimittäin $\alpha = [v_0, v_1, v_2]$, niin $\alpha \notin K$ ja jos $\alpha = [v_0, v_2]$, niin $\alpha \notin K$.

Jotta saataisiin kaikki esimerkin 4.27 välttelijät selville, tulisi käydä läpi kaikki päätöspuualgoritmit eli tässä tapauksessa vielä kaksi muuta algoritmia.

Välttelijät esiintyvät pareittain. Kun etsijä kysyy kysymyksen $n + 1$, hän yrittää saada selville, onko kyseessa simpleksi α_1 vai α_2, missä $\alpha_1 < \alpha_2$.

Lause 4.28. *Olkoon S n-simpleksi ja olkoon M välttelevä simpleksin S alikompleksi. Parille $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ välttelijöitä, missä $\alpha_1 < \alpha_2$, pätee*

(1) $\dim(\alpha_2) = \dim(\alpha_1) + 1$,

(2) $\alpha_1 \in M$, $\alpha_2 \notin M$.

Todistus. Olkoon S n-simpleksi ja olkoon M välttelevä simpleksin S alikompleksi. Olkoon $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ pari välttelijöitä, missä $\alpha_1 < \alpha_2$.

(1) Koska $\alpha_1 < \alpha_2$ ja α_1 ja α_2 eroavat vain simpleksissä v, niin täytyy olla $\dim(\alpha_2) = \dim(\alpha_1) + 1$.

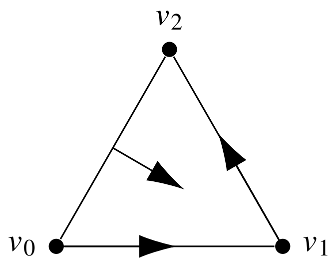
(2) Oletetaan vastoin väitettä, että $\alpha_1 \in M$ ja $\alpha_2 \in M$. Tällöin etsijän ei tarvitse esittää kysymystä $n + 1$, koska hän tietää edellisen kysymyksen kohdalla, että sekä $\alpha_1 \in M$ että $\alpha_2 \in M$. Siis α_1 ja α_2 eivät ole välttelijöitä, mikä on ristiriita. Samaan tulokseen päädytään, jos oletetaan, että $\alpha_1 \notin M$ ja $\alpha_2 \notin M$. Siis täytyy olla $\alpha_1 \in M$ ja $\alpha_2 \notin M$ tai $\alpha_1 \notin M$ ja $\alpha_2 \in M$. Kun etsijä kysyy viimeisen kysymyksen, selviää, kuuluuko α alikompleksiin M vai ei. Edellisten kysymysten aikana on selvitetty, että jokin simpleksi kuuluu alikompleksiin M mutta, jos tähän simpleksiin lisätään vielä yksi kärki, niin se ei enää kuulu alikompleksiin M. Siis täytyy olla $\alpha_1 \in M$ ja $\alpha_2 \notin M$.

□

Välttelevyyden yhteys Morse-teoriaan saadaan, kun havaitaan, että päätöspuualgoritmi indusoi diskreetin vektorikentän. Esimerkiksi kuvan 4.3 päätöspuualgoritmi indusoi vektorikentän

$$V = \{\{\emptyset < [v_2]\}, \{[v_1] < [v_1, v_2]\}, \{[v_0] < [v_0, v_1]\}, \{[v_0, v_2] < [v_0, v_1, v_2]\}\}.$$

Siis V koostuu simpleksin S sivujen pareista, jotka havaitaan päätöspuualgoritmilla vasta viimeisessä kysymyksessä. Jotta saataisiin aito diskreetti vektorikenttä, pari $\{\emptyset < [v_2]\}$ tulee poistaa vektorikentästä V, koska alkuperäinen määritelmä ei salli paria, jossa esiintyy tyhjä joukko.



Kuva 4.4. Kuvan 4.3 arvausalgoritmin indusoima vektorikenttä.

Määritelmä 4.29. Simpleksisen kompleksin K järjestys $\leqslant$ on *lineaarijärjestys*, jos kaikilla $\alpha, \beta, \gamma \in K$ pätee

(1) $\alpha \leqslant \alpha$.

(2) Jos $\alpha \leqslant \beta$ ja $\beta \leqslant \gamma$, niin $\alpha \leqslant \gamma$.

(3) Jos $\alpha \leqslant \beta$ ja $\beta \leqslant \alpha$, niin $\alpha = \beta$.

(4) $\alpha \leqslant \beta$ tai $\beta \leqslant \alpha$.

Apulause 4.30. Olkoon S n-simpleksi ja olkoon V diskreetti vektorikenttä. Oletetaan, että simpleksin S sivuilla on sellainen lineaarijärjestys $\prec$, että jos $\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \ldots$ on V-polku, niin $\alpha_0 \succ \beta_0 \succ \alpha_1 \succ \beta_1 \succ \ldots$. Tällöin V ei sisällä yhtään suljettua V-polkua.

Todistus. Oletetaan, että simpleksin S sivuilla on sellainen lineaarijärjestys $\succ$, että jos $\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \ldots$ on V-polku, niin $\alpha_0 \succ \beta_0 \succ \alpha_1 \succ \beta_1 \succ \ldots$. Oletetaan vastoin väitettä, että diskreetti vektorikenttä V sisältää suljetun V-polun, joka alkaa simpleksistä α_i ja päättyy samaan simpleksiin. Koska simpleksin S sivuilla on totaalinen järjestys, niin tällöin $\alpha_i \succ \alpha_i$, mikä on mahdotonta. Siis diskreetti vektorikenttä V ei sisällä yhtään suljettua V-polkua. □

Lause 4.31. *Olkoon A päätöspuualgoritmi. Tällöin n-simpleksin S vektorikenttä $V = V_A$ on gradienttivektorikenttä.*

Todistus (vrt. [17, s. 159]). Lauseen 3.16 nojalla riittää osoittaa, että V on diskreetti vektorikenttä, joka ei sisällä yhtään suljettua V-polkua. Vektorikenttä V on diskreetti, koska jokainen polku päätöspuualgoritmissa vastaa yksikäsitteistä simpleksiä.

Osoitetaan sitten, että V ei sisällä yhtään suljettua V-polkua. Apulauseen 4.30 nojalla riittää osoittaa, että on olemassa simpleksin S simpleksien lineaarijärjestys $\succ$, jolle pätee $\alpha_0 \succ \beta_0 \succ \alpha_1 \succ \beta_1 \succ \ldots$, jos $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots$ on V-polku. Liitetään jokaiseen simpleksiin $\alpha^{(p)}$ $p+1$:n alkion jono $n(\alpha) := (n_0(\alpha), n_1(\alpha), \ldots, n_p(\alpha))$, missä $n_i(\alpha)$:t ovat sellaisten kysymysten numeroita, joihin on vastattu ”Kyllä” ja $1 \leqslant n_0(\alpha) < \cdots < n_p(\alpha) \leqslant n+1$. Mille tahansa kahdelle simpleksille $\alpha^{(p)}$ ja $\beta^{(q)}$

määritellään $\alpha \succ \beta$, jos on olemassa sellainen $k \leqslant \min\{p, q\}$, että $n_k(\alpha) < n_k(\beta)$ ja $n_i(\alpha) = n_i(\beta)$ jokaisella $i < k$. Jos tällaista k:ta ei ole olemassa ja $q > p$, niin $n_i(\alpha) = n_i(\beta)$ jokaisella $0 \leqslant i \leqslant p$, joten asetetaan $\alpha \succ \beta$.

Osoitetaan, että edellä määritelty järjestys $\succ$ on transitiivinen. Olkoot $\alpha^{(p)}$, $\alpha'^{(q)}$ ja $\alpha''^{(r)}$ simpleksejä. Olkoot $\alpha \succ \alpha'$ ja $\alpha' \succ \alpha''$. Oletetaan ensin, että on olemassa sellainen $k \leqslant \min\{p, q\}$ että $n_k(\alpha) < n_k(\alpha')$ ja $n_i(\alpha) = n_i(\alpha')$ jokaisella $i < k$ sekä sellainen $k' \leqslant \min\{q, r\}$, että $n_{k'}(\alpha') < n_{k'}(\alpha'')$ ja $n_i(\alpha') = n_i(\alpha'')$ jokaisella $i < k'$. Jos $k < k'$, niin $n_k(\alpha') = n_k(\alpha'')$, jolloin $n_k(\alpha) < n_k(\alpha'')$. Edelleen $n_i(\alpha) = n_i(\alpha'')$ jokaisella $i < k$. Siis $\alpha \succ \alpha''$. Vastaavaan tulokseen päädytään, jos $k \geqslant k'$. Oletetaan sitten, että on olemassa sellainen $k \leqslant \min\{p, q\}$ että $n_k(\alpha) < n_k(\alpha')$ ja $n_i(\alpha) = n_i(\alpha')$ jokaisella $i < k$ ja että $n_i(\alpha') = n_i(\alpha'')$ jokaisella $0 \leqslant i \leqslant q$, missä $r > q$. Koska $k \leqslant \min\{p, q\}$, niin $k \leqslant q$. Tällöin $n_k(\alpha) < n_k(\alpha') = n_k(\alpha'')$ ja $n_i(\alpha) = n_i(\alpha') = n_i(\alpha'')$ jokaisella $i < k$. Siis $\alpha \succ \alpha''$. Vastaavaan tulokseen päädytään, jos on olemassa tällainen k' mutta ei k:ta. Jos tällaisia k ja k' ei ole olemassa ja $q > p$ sekä $r > q$, niin $n_i(\alpha) = n_i(\alpha')$ jokaisella $0 \leqslant i \leqslant p$ ja $n_i(\alpha') = n_i(\alpha'')$ jokaisella $0 \leqslant i \leqslant q$. Siis $n_i(\alpha) = n_i(\alpha'')$ jokaisella $0 \leqslant i \leqslant p$. Saadaan $\alpha \succ \alpha''$, joten järjestys $\succ$ on transitiivinen.

Osoitetaan sitten, että V-polut säilyttävät edellä määritellyn järjestyksen. Oletetaan, että $\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}$ on V-polun osa. Osoitetaan, että $\alpha_0^{(p)} \succ \beta_0^{(p+1)} \succ \alpha_1^{(p)}$. Koska $(\alpha_0, \beta_0) \in V$, niin $\alpha_0 \neq \alpha_1$ ja $\alpha_1 \subseteq \beta_0$. Nyt α_0 ja β_0 eroavat toisistaan vain yhdessä kärjessä, ero, joka määritellään vasta päätöspuun viimeisellä rivillä. Näin ollen järjestyksen määritelmän perusteella $n_i(\alpha) = n_i(\beta)$ jokaisella $1 \leqslant i \leqslant p$ ja $n_{p+1}(\beta) = n + 1$. Lisäksi $n_{p+1}(\alpha_0)$ ei ole määritelty. Näin ollen $\alpha \succ \beta$.

Jäljelle jää osoittaa, että $\beta_0^{(p+1)} \succ \alpha_1^{(p)}$. Merkitään $\beta_0 = u_0 u_1 \ldots u_p u_{p+1}$, missä $u_0, \ldots, u_{p+1}$ ovat simpleksin β_0 kärjet. Jos $\sigma = \alpha_0$ tai $\sigma = \beta_0$, niin kysymys numero $n_i(\beta_0)$ on ”Onko u_i sivussa σ?” Koska $\alpha_1 \subseteq \beta_0$, niin on olemassa sellainen k, että $\alpha_1 = u_0 u_1 \ldots u_{k-1} u_{k+1} \ldots u_{p+1}$. Nyt ensimmäiset $n_k(\beta_0) - 1$ kysymystä koskevat simpleksejä $u_0, \ldots, u_{k-1}$ sekä kärkiä, jotka eivät kuulu simpleksiin β_0, mikä tarkoittaa, että ne eivät kuulu myöskään simplekseihin α_0 ja α_1. Näin ollen ensimmäiset $n_k(\beta_0) - 1$ vastausta tulevat olemaan samat riippumatta siitä onko $\sigma = \alpha_0, \alpha_1$ tai β_0. Näin ollen, jos $\sigma = \alpha_0, \alpha_1$ tai β_0, niin kysymys numero $n_k(\beta_0)$ on ”Onko u_k sivussa σ?” Jos $\sigma = \beta_0$, niin vastaus on ”kyllä”. Jos $\sigma = \alpha_1$, niin vastaus on ”ei”. Näin ollen seuraava jonon arvo sivulle α_1 tulee olemaan suurempi kuin arvo, joka asetettiin vastauksessa $n_k(\beta_0)$. Siis $n_i(\alpha_1) = n_i(\beta_0)$ jokaisella $i < k$ ja $n_k(\alpha_1) > n_k(\beta_0)$. Näin ollen $\beta_0 \succ \alpha_1$. □

Seuraavaksi esitetään lauseen 4.31 avulla tämän aliluvun päätulos.

Lause 4.32. *Olkoon A päätöspuualgoritmi ja olkoon k algoritmin A välttelijäparien lukumäärä. Jos $\emptyset$ ei ole algoritmin A välttelijä, niin on olemassa algoritmin A välttelijät $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^k$, jotka kuuluvat alikompleksiin M ja välttelijät $\alpha_2^1, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_2^k$, jotka eivät kuulu alikompleksiin M. Lisäksi on olemassa jono simpleksin S alikomplekseja*

$$v = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{k-1} \subseteq M_k \subseteq M = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_k \subseteq S,$$

missä kärki $v \in M$ ei ole algoritmin A vältteliјä. Alikomplekseille pätee

$$
\begin{aligned}
v &\nearrow M_1 - \alpha_1^1 \\
M_1 &\nearrow M_2 - \alpha_1^2 \\
M_2 &\nearrow M_3 - \alpha_1^3 \\
&\vdots \\
M_{k-1} &\nearrow M_k - \alpha_1^k \\
M_k &\nearrow M = S_0 \\
S_0 &\nearrow S_1 - \alpha_2^1 \\
&\vdots \\
S_{k-1} &\nearrow S_k - \alpha_2^k \\
S_k &\nearrow S.
\end{aligned}
$$

Jos $\emptyset$ on algoritmin A välttelijä, niin lause on voimassa, jos $\alpha_1^1 = \emptyset$ ja $M_0 = M_1 = \emptyset$. Tällöin pitää olettaa, että $M_2 = \alpha_1^2$.

Todistus (ks. [17, s. 164]). Oletetaan ensin, että $\emptyset$ ei ole algoritmin A välttelijä. Todistuksessa simpleksille S tullaan muodostamaan diskreetti Morse-funktio, jonka kriittisiä sivuja ovat algoritmin A välttelijät ja lisäksi indusoitu gradienttivektorikenttä $V_A = V$, josta on poistettu välttelijäparit. Olkoon $W \subseteq V$ joukko pareja $(\alpha, \beta) \in V$, joille $\alpha, \beta \in M$ tai $\alpha, \beta \notin M$. Lauseen 4.31 nojalla W on simpleksin S gradienttivektorikenttä. Määritetään seuraavaksi vektorikentän W kriittiset simpleksit eli sellaiset simpleksin S simpleksit, joilla ei ole paria vektorikentässä W. Pari (α, β) vektorikentän V simpleksejä ei kuulu vektorikenttään W, jos ja vain jos $\alpha \in M$ ja $\beta \notin M$ tai $\alpha \notin M$ ja $\beta \in M$. Siis α ja β ovat kriittisiä vektorikentässä W. Näin ollen kaikki algoritmin A välttelijät ovat vektorikentän W kriittisiä simpleksejä. Edelleen kärki v, jonka parina on $\emptyset$, on myös kriittinen.Tämä kärki sekä algoritmin A välttelijät muodostavat kaikki vektorikentän W kriittiset simpleksit. Jäljelle jää varmistaa, että lauseessa annettujen laajennusten järjestys on voimassa.

Olkoon $f : S \to \mathbb{R}$ mikä tahansa diskreetti Morse-funktio, jolla on indusoitu gradienttivektorikenttä W. Jos $\alpha^{(p)} \in M$ ja $\gamma^{(p+1)} \notin M$, missä $\alpha < \gamma$, niin $(\alpha, \gamma) \notin W$. Tällöin $f(\gamma) > f(\alpha)$. Määritellään

$$
\begin{aligned}
a &:= \sup_{\alpha \in \mathrm{M}} f(\alpha), \\
b &:= \inf_{\alpha \notin \mathrm{M}} f(\alpha), \\
c &:= 1 + a - b \\
d &:= \inf_{\alpha \in \mathrm{S}} f(\alpha).
\end{aligned}
$$

Olkoon $g : S \to \mathbb{R}$, jolle

$$
g(\alpha) := \begin{cases} f(\alpha), \text{ jos } \alpha \in M - v, \\ f(\alpha) + c, \text{ jos } \alpha \notin M, \\ d - 1, \text{ jos } \alpha = v. \end{cases}
$$

Jokaiselle $\alpha \in M$ ja $\beta \notin M$ pätee

$$g(\beta) = f(\beta)+c \geqslant \inf_{\beta' \notin \mathrm{M}} f(\beta')+c = b+1+a-b = 1+a > a = \sup_{\alpha' \in \mathrm{M}} f(\alpha') \geqslant f(\alpha) = g(\alpha).$$

Jos $\alpha = v$, pätee

$$f(\alpha) \geqslant \inf_{\alpha \in \mathrm{S}} f(\alpha) - 1 = d - 1 = g(\alpha).$$

Jokaiselle parille $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ pätee $g(\beta) > g(\alpha)$, jos ja vain jos $f(\beta) > f(\alpha)$. Siis g on diskreetti Morse-funktio, jolla on samat kriittiset simpleksit kuin funktiolla f.

Tapaus, jossa $\emptyset$ on algoritmin A välttelijä, todistetaan vastaavasti. □

Määritelmä 4.33. Olkoon $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_1 < \alpha_2$, välttelijäpari. Arvoa $p = \dim(\alpha_1)$ kutsutaan välttelijäparin $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ *indeksiksi*.

Seuraava lause seuraa suoraan heikoista diskreeteistä Morse-epäyhtälöistä 3.33.

Lause 4.34. *Olkoon S n-simpleksi ja olkoon M välttelevä simpleksin S alikompleksi. Olkoon A päätöspuualgoritmi ja olkoon $e_p(A)$ algoritmin A niiden välttelijäparien lukumäärä, joiden indeksi on p. Tällöin jokaiselle $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, pätee $e_p(A) \geqslant b_p(M)$, missä $b_p(M)$ on kompleksin M p:s Bettin luku.*

Todistus. Lauseen 4.32 todistuksen nojalla välttelijäparien lukumäärä on suurempi tai yhtä suuri kuin kriittisten simpleksien lukumäärä. Edelleen lauseen 3.33 kohdan (1) nojalla $b_p \leqslant m_p$, jokaisella $p = 0, 1, \ldots, n$. Saadaan

$$e_p(A) \geqslant m_p(M) \geqslant b_p(M).$$

□

Lauseesta 4.34 seuraa tulos päätöspuualgoritmin välttelijäparien lukumäärälle:

Seuraus 4.35. *Olkoon S n-simpleksi ja olkoon M välttelevä simpleksin S alikompleksi. Jokaiselle päätöspuualgoritmille A*

$$\#\{A\text{:n välttelijäparit}\} \geqslant \sum_{p=0}^{n} b_p.$$

Lähteet

[1] Ayala R., Fernández-Ternero D. ja Vilches J.A. *Perfect discrete Morse functions on 2-complexes*, Pattern Recognition Letters 33, no. 11, pp. 1495-1500, 2012.

[2] Bang-Jensen J. ja Gutin G. *Digraphs. Theory, algorithms and applications*, 2nd edition, Lontoo, Springer, 2009.

[3] Brown R. *Topology and Groupoids: A Geometric Account of General Tpology, Homotopy Types and the Fundamental Groupoid*, 2006.

[4] Cameron P. J. *Introduction to Algebra*, 2nd edition, Oxford University Press, 2008.

[5] Cohen M. *A Course in Simple Homotopy Theory*, Berlin, New York, Springer, 1973.

[6] Forman R. *Morse Theory and Evasiveness*, Combinatorica 20, 2000, pp.498-504.

[7] Forman R. *Morse Theory for Cell Complexes*, Advances in Mathematics 134, 1998, pp. 90-145.

[8] Forman R. *A User's Guide to Discrete Morse Theory*, Séminare Lotharingien de Combinatoire 48, 2002, Article B48c.

[9] Friedberg S., Insel A. ja Spence L. *Linear Algebra*, 4th edition, Pearson Education, 2014.

[10] Hatcher A. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[11] Kahn J., Saks M. ja Sturtevant D. *A Topological Approach to Evasiveness*, Combinatorica 4, 1984, 297-306.

[12] Lang S. *Algebra*, New York, Springer, 2002.

[13] Lu L. *An Exposition of Discrete Morse Theory and Applications*, A Thesis in The Department of Mathematics and Statistics, Montreal, Canada, 2021.

[14] Lundell A. ja Weingram S. *The Topology of CW Complexes*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.

[15] Rotman J.J. *An Introduction to Algebraic Topology*, Vol. 119, New York, Springer, 1988.

[16] Rotman J.J. *An Introduction to the Theory of Groups*, 4th edition, Springer, 1995.

[17] Scoville N. A. *Discrete Morse Theory*, Vol. 90, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2019.

[18] Smith L. *Linear Algebra*, 3rd edition, New York, Springer, 1998.