Tampereen yliopisto

Riku Anttila

PERSISTENTIN HOMOLOGIAN MAYER-VIETORIS-SPEKTRAALIJONOT

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Lokakuu 2023

TIIVISTELMÄ

Riku Anttila: Persistentin homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonot
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan maisteriohjelma
Lokakuu 2023

Tämän pro gradu -tutkielman tavoitteena on todistaa persistentin homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonojen suppenemislause ja käsitellä peristenssimodulien laskennallisia menetelmiä sen verran, että kesyjen persistenssimodulien spektraalijonoja on mahdollista laskea käytännössä. Tutkielman alussa käsittelemme homologista algebraa mielivaltaisessa Abelin kategoriassa. Esittelemme spektraalijonot ja kaksoiskompleksit sekä käymme läpi näiden perusominaisuuksia.

Tutkielman toinen luku käsittelee yleisesti kesyjen persistenssimodulien teoriaa. Erityisesti tutustumme persistenssivektoreihin ja esittelemme, kuinka persistenssivektorien avulla on mahdollista kehittää perinteisiä lineaarialgebran työkaluja persistenssimoduleille.

Kolmannessa luvussa perehdymme persistenssimodulien laskennallisiin menetelmiin. Esittelemme algoritmit persistenssimodulien välisen morfismin kuvan ja ytimen sekä persistenssimodulien tekijämodulin viivakoodikantojen laskemiseen. Lisäksi osoitamme näiden algoritmien toimivuudet. Neljännessä luvussa tutustumme laajennusongelmaan, joka nousee luonnollisesti persistenssimodulien spektraalijonoista. Erityisesti esitämme laajennusongelman ratkaisun.

Viimeisessä luvussa siirrymme simpleksisen ja persistentin homologian pariin. Määrittelemme Mayer-Vietoris-spektraalijonot ja osoitamme näiden suppenemislauseet. Käsittelemme lyhyesti totaalipersistenssiä, ja lopuksi pohdimme Mayer-Vietoris-spektraalijonojen mahdollisia sovelluksia.

Avainsanat: spektraalijonot, persistentti homologia, persistenssimodulit, persistenssivektorit, Mayer-Vietoris-spektraalijonot, totaalipersistenssi

Sisältö

Johdanto

Topologinen data-analyysi on suhteellisen nuori ja kasvava matematiikan ala, jossa datasta kerätään tietoa tutkimalla sen muotoja arvioimalla dataa yksinkertaisella geometrisella objektilla, kuten simpleksisellä kompleksilla. Esimerkkejä tällaisista muodoista ovat yhtenäisyys/epäyhtenäisyys, reikä ja tyhjiö.

Datan muotojen laskeminen edellyttää lukuisia matriisioperaatioita. Datan kasvaessa luonnollisesti tarvittavien operaatioiden lukumäärä myös kasvaa. Näin ollen datan muotojen tehokas laskenta edellyttää tehokkaita algoritmeja. Perinteinen tapa laskennan nopeuttamiseksi on niin sanottu laskennan hajauttaminen. Hajautetussa laskennassa laskenta jaetaan useille itsenäisille tietokoneille, jotka tarvittaessa jakavat tietoa keskenään. Tällaisen laskennan mahdollistamiseksi tarvitaan algoritmeja, joiden laskentaa on mahdollista jakaa pienempiin osiin ja suorittaa niitä samanaikaisesti.

Persistentin homologian laskemista Mayer-Vietoris-spektraalijonojen avulla ehdotettiin ensimmäisen kerran artikkelissa [7]. Tämän menetelmän toteuttaminen käytännössä edellyttää tehokkaita algoritmeja persistenssimodulien välisten morfismien kuvien ja ytimien sekä persistenssimodulien tekijämodulien laskemiseen. Simpleksisten kuvausten indusoimille morfismeille tämän kaltaisia algoritmeja oli kehitetty artikkelissa [2]. Torras-Casas huomauttaa artikkelissaan [12], että vaikka alkuperäiset morfismit olisivat simpleksisten kuvausten indusoimia, tämä ei säily spektraalijonon suurilla sivunumeroilla. Näin ollen nousee tarve algoritmeille, joita voidaan soveltaa yleisiin persistenssimodulien välisiin morfismeihin. Artikkelin [7] lähestymistavassa on vielä yksi haaste, nimittäin Mayer-Vietoris-spektraalijonoista ei voida suoraan päätellä alkuperäistä persistenttiä homologiaa. Tästä ongelmasta nousee niin sanottu laajennusongelma. Persistentin homologian kontekstissa laajennusongelma mainittiin ensimmäisen kerran artikkelissa [3].

Torras-Casasin artikkeli [12] käsittelee persistentin homologian hajautettua laskentaa Mayer-Vietoris-spektraalijonoilla. Artikkelissa kehitetään persistenssimodulien laskennallisia menetelmiä ja esitetään laajennusongelman ratkaisu. Torras-Casas implementoi nämä laskennalliset menetelmät *PerMaViss*-algoritmiinsa [13].

Tämä pro gradu -tutkielma käsittelee Torras-Casasin lähestymistapaa persistentin homologian laskemiseen Mayer-Vietoris-spektraalijonoilla. Päälähteenä käytämme Torras-Casasin artikkelia [12]. Esitietoina homologisen algebran osalta lukijalle suosittelemme Weibelin kirjan [14] lukua 1. Simpleksistä homologiaa varten suosittelemme Munkresin kirjan [8] lukua 1 tai Lesnickin luentomonisteen [6] lukua 2. Kattavan johdannon spektraalijonoista lukija löytää Chowin artikkelista [1].

Tutkielman alussa esittelemme välttämättömät homologisen algebran käsitteet, kuten spektraalijonot ja kaksoiskompleksit sekä todistamme tarvittavat spektraalijonojen suppenemislauseet. Näitä tulemme tarvitsemaan viimeisessä luvussa Mayer-Vietoris-spektraalijonojen suppenemislauseiden todistuksissa.

Toisessa luvussa käsittelemme persistenssimodulien teoriaa. Aluksi käymme läpi peruskäsitteistöä, kuten intervallimoduleja ja kesyjä persistenssimoduleja, minkä jälkeen siirrymme persistenssivektorien pariin. Esittelemme analogiset lineaarialgebran käsitteet esimerkiksi kannalle ja lineaarikombinaatiolle.

Kolmannessa luvussa tutustumme persistenssimodulien laskennallisiin työkaluihin. Esittelemme algoritmit persistenssimodulien välisten morfismien kuvien ja ytimien sekä persistenssimodulien tekijämodulien laskemiseen. Neljännessä luvussa käsittelemme persistenssimodulien spektraalijonoja ja Torras-Casasin laajennusongelman ratkaisua.

Viimeisessä luvussa perehdymme Mayer-Vietoris-spektraalijonoihin. Aluksi käsittelemme simpleksistä homologiaa, jotta myöhemmin persistentin homologian käsittely olisi sujuvampaa. Esittelemme tarvittavat peruskäsitteet, kuten peitteen ja räjäytyskompleksin, minkä jälkeen osoitamme simpleksisen homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonon suppenemislauseen. Tämän jälkeen siirrymme persistenttiin homologiaan. Aluksi määrittelemme analogiset määritelmät simpleksisestä homologiasta, minkä jälkeen osoitamme tutkielman tärkeimmän lauseen eli persistentin homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonojen suppenemislauseen. Esittelemme totaalipersistenssin, joka voidaan suoraan laskea Mayer-Vietoris-spektraalijonosta ilman laajennusongelman ratkaisua. Erityisesti käsittelemme lyhyesti totaalipersistenssin yhteyttä Hausdorffin dimensioon. Tutkielman lopuksi pohdimme Mayer-Vietoris-spektraalijonojen sovelluksia laskennalliseen topologiaan ja geometriseen mittateoriaan.

Koko tutkielman ajan $\mathbb{F}$ merkitsee kuntaa ja $\mathbb{F}$-vektoriavaruuksien kategorialle käytetään merkintää $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$. Tämän alikategoriaa, joka koostuu äärellisulotteisista $\mathbb{F}$-vektoriavaruuksista ja niiden välisistä lineaarikuvauksista, merkitään $\mathbf{vect}_{\mathbb{F}}$.

1 Homologista algebraa

Tutkielman ensimmäisessä luvussa käsittelemme homologista algebraa mielivaltaisessa Abelin kategoriassa. Esittelemme spektraalijonojen ja kaksoiskompleksien perustulokset siltä osin, mitä tarvitsemme luvussa 5. Tämä luku perustuu pääosin Weibelin kirjan [14] lukuun 5 ja osittain Chowin artikkeliin [1].

1.1 Spektraalijonot

Läpi tämän luvun $\mathfrak{A}$ on kiinnitetty Abelin kategoria. Freydin-Mitchellin upotuslauseen nojalla Abelin kategoriaa $\mathfrak{A}$ voidaan käsitellä modulikategoriana (ks. [14, s. 25]).

Määritelmä 1.1. *Ketjukompleksi* koostuu perheestä kategorian $\mathfrak{A}$ objekteja $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ja perheestä morfismeja $\{d_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Näillä morfismeilla pätee

$$d_{n-1} \circ d_n = 0$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Morfismeja d_n kutsutaan *reunakuvauksiksi.* Käytetään merkintää $Z_n(C) = \ker(d_n)$, $B_n(C) = \mathrm{im}(d_{n+1})$ ja $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$. Objekteja $H_n(C)$ kutsutaan ketjukompleksin *homologioiksi.* Riippuen kategoriasta $\mathfrak{A}$ puhutaan myös *homologia-avaruuksista* tai *homologiamoduleista.* Huomautetaan vielä siitä, että yleensä puhutaan vain ketjukompleksista C ja käytetään myös merkintää $C_* = C$.

Määritelmä 1.2. Indeksistä $a \in \mathbb{Z}$ alkava *spektraalijono* koostuu

- perheestä kategorian $\mathfrak{A}$ objekteja $\{E^r_{pq}\}^{r\geq a}_{p,q\in\mathbb{Z}}$, jossa r saa arvokseen kokonaisluvut $r \geq a$,
- perheestä morfismeja $\{d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1}\}^{r\geq a}_{p,q\in\mathbb{Z}}$.

Näillä objekteilla ja morfismeilla pätee

(1) $d^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{pq} = 0$,

(2) $E^{r+1} \cong \ker(d^r_{pq})/\mathrm{im}(d^r_{p+r,q-r+1})$

kaikilla kokonaisluvuilla $p, q, r \in \mathbb{Z}$ ja $r \geq a$.

Edellä mainittuja morfismeja kutsutaan *reunakuvauksiksi* ja termin E^r_{pq} *kokonaisaste* on luku $n = p + q$. Lisäksi perhettä $\{E^r_{pq}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ sanotaan r:nneksi *sivuksi.* Huomautetaan vielä siitä, että yleensä puhumme vain spektraalijonosta $\{E^r_{pq}\}^{r\geq a}_{p,q\in\mathbb{Z}}$.

Määritelmän 1.2 kohdasta (2) seuraa, että spektraalijono määräytyy ensimmäisen sivun (a:nnen sivun) ja reunakuvauksien mukaan. Laskennallisesta näkökulmasta tämä tarkoittaa sitä, että spektraalijono voidaan määrittää laskemalla yksi sivu kerrallaan lähtien ensimmäiseltä sivulta. Tätä lähestymistapaa homologian laskemiseen on käsitelty Chowin artikkelissa [1].

Tässä tutkielmassa olemme kiinnostuneita objekteista, jotka pohjautuvat simpleksisiin komplekseihin. Koska simpleksiset kompleksit koostuvat äärellisestä datasta, näistä konstruoiduilla spektraalijonoilla on voimassa eräänlaisia äärellisyysehtoja. Näiden ehtojen vallitessa spektraalijonon suppenemisen käsite on helpompi määritellä.

Määritelmä 1.3. Spektraalijonoa $\{E^r_{pq}\}^{r\geq a}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ sanotaan *rajoitetuksi*, mikäli kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ perhe $\{E^a_{pq}\}_{p+q=n}$ sisältää vain äärellisen monta 0-objektista poikkeavaa termiä.

Huomautus. Jos $E^a_{pq} = 0$, niin $E^r_{pq} = 0$ kaikilla $r \geq a$. Lisäksi reunakuvauksen d^r_{pq} maaliobjektin kokonaisaste on $p + q - 1$ riippumatta sivunumerosta r. Tästä nähdään, että mikäli $\{E^r_{pq}\}^{r\geq a}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ on rajoitettu spektraalijono ja $n \in \mathbb{Z}$, on olemassa luku $M \geq a$ niin, että kaikilla $r \geq M$ ja $p + q = n$ pätee $E^r_{p-r,q+r-1}, E^r_{p+r,q-r+1} = 0$. Tällöin

$$E^{r+1}_{pq} = \ker(d^r_{pq})/\mathrm{im}(d^r_{p+r,q-r+1}) = E^r_{pq}.$$

Toistamalla tätä argumenttia saadaan

$$E^r_{pq} = E^{r+1}_{pq} = E^{r+2}_{pq} = \cdots$$

ja tällöin käytetään merkintää $E^\infty_{pq} = E^r_{pq}$. Huomaa, että M riippuu kokonaisasteesta n.

Määritelmä 1.4. Olkoot $\{E^r_{pq}\}^{r\geq a}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ rajoitettu spektraalijono ja $H_* = \{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ perhe kategorian $\mathfrak{A}$ objekteja. Sanotaan, että spektraalijono *suppenee* kohti perhettä H_*, mikäli kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ objektille H_n on olemassa äärellisen pituinen suodatus

$$0 = F_s H_n \subseteq F_{s+1} H_n \subseteq \cdots \subseteq F_t H_n = H_n$$

sekä isomorfismit $E^\infty_{pq} \cong F_p H_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q}$. Tällöin merkitään $E^a_{pq} \Rightarrow H_{p+q}$.

Spektraalijonon suppeneminen käytännössä tarkoittaa sitä, että perhe H_* voidaan jälleenrakentaa spektraalijonon termien avulla.

Lause 1.5. *Olkoot $\{E^r_{pq}\}^{r\geq a}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ rajoitettu spektraalijono ja $H_* = \{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ perhe kategorian $\mathfrak{A}$ objekteja niin, että $E^a_{pq} \Rightarrow H_{p+q}$. Oletetaan, että on olemassa $r \geq 2$, jolla $E^r_{pq} = 0$ kaikilla $q \neq 0$. Tällöin $H_p \cong E^r_{p0}$ kaikilla $p \in \mathbb{Z}$.*

Todistus (vrt. [14, s. 124]). Suppenemista vastaavassa objektin H_p suodatuksessa

$$F_p H_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q} \cong E^\infty_{pq} \cong \begin{cases} E^r_{p0}, & \text{jos } q = 0, \\ 0, & \text{jos } q \neq 0. \end{cases}$$

Tästä saadaan, että

$$F_p H_n = \begin{cases} E^r_{p0}, & \text{jos } n \geq p, \\ 0, & \text{jos } n < 0 \end{cases}$$

ja näin ollen

$$H_p = F_p H_p \cong F_p H_p/F_{p-1}H_p \cong E^r_{p0}.$$

□

1.2 Suodatuksen spektraalijono

Suodatuksen spektraalijonon konstruktio

Jokaisesta ketjukompleksin suodatuksesta voidaan konstruoida spektraalijono. Jos tämä suodatus toteuttaa riittävät äärellisyysehdot, sitä vastaava spektraalijono suppenee kohti alkuperäisen ketjukompleksin homologiaryhmää. Seuraavaksi esittelemme suodatuksen spektraalijonon konstruktion ja tässä seuraamme Weibelin kirjan [14] sivuja 131-136.

Kiinnitetään aluksi merkinnät. Olkoot C ketjukompleksi ja

$$\cdots \subseteq F_{p-1}C \subseteq F_pC \subseteq F_{p+1}C \subseteq \cdots \subseteq C$$

sen suodatus. Spektraalijonon sivun 0 termeiksi määritellään

$$E^0_{pq} = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}$$

kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$. Olkoot

$$A^r_{pq} = \{\, c \in F_pC_{p+q} \mid d(c) \in F_{p-r}C_{p+q-1} \,\} \subseteq F_pC_{p+q}$$

ja $\eta_{pq} : F_pC_{p+q} \to E^0_{pq}$ kanoninen projektio. Kaikilla $r \geq 0$ määritellään

$$Z^r_{pq} = \eta_{pq}(A^r_{pq}) \subseteq E^0_{pq}$$

ja

$$B^{r+1}_{pq} = \eta_{pq}(d(A^r_{p+r,q-r+1})).$$

Määritellään vielä $B^0_{pq} = 0$.

Spektraalijonon objekteiksi määritellään $E^r_{pq} = Z^r_{pq}/B^r_{pq}$ kaikilla $p, q, r \in \mathbb{Z}$ ja $r \geq 0$. Huomaa, että $A^0_{pq} = F_pC_{p+q}$, jolloin $\eta(A^0_{pq}) = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}$. Täten merkinnät tapauksessa $r = 0$ vastaavat toisiaan. Lisäksi tässä

$$0 = B^0_{pq} \subseteq B^1_{pq} \subseteq \cdots \subseteq B^r_{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z^r_{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z^1_{pq} \subseteq Z^0_{pq} = E^0_{pq}.$$

Jatkon kannalta on hyödyllistä ottaa käyttöön merkinnät $B^\infty_{pq} = \cup_{r=0}^\infty B^r$ ja $Z^\infty_{pq} = \cap_{r=0}^\infty Z^r_{pq}$.

Objektit on nyt määritelty. Spektraalijonon muodostamiseksi täytyy vielä löytää reunakuvaukset. Ne saadaan määrittelemällä morfismit $d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1}$, jotka ovat ketjukompleksin C reunakuvauksien indusoimia. Nämä ovat hyvin määriteltyjä, sillä $d(A^r_{pq}) \subseteq A^r_{p-r,q+r-1}$ ja

$$E^r_{pq} \cong \frac{A^r_{pq}}{d(A^{r-1}_{p+r-1,q-r+1}) + A^{r-1}_{p-1,q+1}}.$$

Lause 1.6. *Edellä esitetty konstruktio tuottaa spektraalijonon.*

Todistus (vrt. [14, s. 131-134]). Reunakuvaus d^r_{pq} voidaan hajottaa muotoon

$$d^r_{pr} : \frac{Z^r_{pq}}{B^r_{pq}} \to \frac{Z^r_{pq}}{Z^{r+1}_{pq}} \to \frac{B^{r+1}_{p-r,q+r-1}}{B^r_{p-r,q+r-1}} \to \frac{Z^{r+1}_{p-r,q+r-1}}{B^{r+1}_{p-r,q+r-1}},$$

missä ensimmäinen morfismi on projektio, keskimmäinen morfismi on reunakuvauksen d indusoima isomorfismi ja viimeinen morfismi on inkluusio. Täten

$$\mathrm{im}(d^r_{pq}) = B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1}$$

sekä

$$\ker(d^r_{pq}) = Z^{r+1}_{pq}/B^r_{pq}$$

ja lopulta saadaan isomorfismi

$$\frac{\ker(d^r_{pq})}{\mathrm{im}(d^r_{p+r,q-r+1})} = \frac{Z^{r+1}_{pq}/B^r_{pq}}{B^{r+1}_{pq}/B^r_{p,q}} \cong \frac{Z^{r+1}_{pq}}{B^{r+1}_{pq}} = E^{r+1}_{pq}.$$

□

Suodatuksen spektraalijonon suppeneminen

Lause 1.7. *Olkoot C ketjukompleksi,*

$$0 = F_0C \subseteq F_1C \subseteq \cdots \subseteq F_{n-1}C \subseteq F_nC = C$$

sen äärellisen pituinen suodatus ja $\{E^r_{pq}\}^{r\geq 0}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ tätä suodatusta vastaava spektraalijono. Tällöin $\{E^r_{pq}\}^{r\geq 0}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ on rajoitettu spektraalijono ja

$$E^0_{pq} \Rightarrow H_{p+q}(C).$$

Todistus (vrt. [14, s. 135-136]). Tässä todistuksessa käytetään samoja merkintöjä kuin tämän aliluvun alussa suodatuksen spektraalijonon konstruktiossa. Koska ketjukompleksin C suodatus on äärellisen pituinen, sitä vastaava spektraalijono on rajoitettu. Spektraalijonon suppenemisen osoittamiseksi tarvitaan objektien $H_{p+q}(C)$ suodatukset. Nämä saadaan määrittelemällä

$$F_pH_{p+q}(C) = \mathrm{im}(H_{p+q}(F_pC) \to H_{p+q}(C)).$$

Osoitetaan, että nämä suodatukset toteuttavat spektraalijonon suppenemisen ehdot. Merkitään $n = p + q$. Koska $F_pC_{p+q} = 0$ kaikilla $p \leq 0$, niin $A^r_{pq} = Z_{p+q}(F_pC)$ kaikilla $r \geq p$. Merkitään $A^\infty_{pq} = A^p_{pq}$. Tällöin

(1) $\eta_{pq}(A^\infty_{pq}) = Z^\infty_{pq}$,

(2) $Z_n(F_pC) \cap B_n(C) = d(\cup^\infty_{r=0} A^r_{p+r,q-r+1})$,

(3) $\eta_{pq}(\cup^\infty_{r=0} d(A^r_{p+r,q-r+1})) = B^\infty_{pq}$.

Hyödyntämällä kohtia (1)-(3) saadaan isomorfismi

$$
\begin{aligned}
& F_pH_{p+q}(C)/F_{p-1}H_{p+q}(C) \\
\cong\ & \frac{Z_n(F_pC)}{Z_n(F_pC)\cap B_n(C)} \Big/ \frac{Z_n(F_{p-1}C)+(Z_n(F_pC)\cap B_n(C))}{Z_n(F_pC)\cap B_n(C)} \\
\cong\ & \frac{Z_n(F_pC)}{Z_n(F_{p-1})+(Z_n(F_pC)\cap B_n(C))} \\
=\ & \frac{A^\infty_{pq}}{A^\infty_{p-1,q+1}+d(\cup_{r=0}^\infty A^r_{p+r,q-r+1})} \\
\cong\ & \frac{\eta_{pq}(A^\infty_{pq})}{\eta_{pq}(d(\cup_{r=0}^\infty A^r_{p+r,q-r+1}))} \\
=\ & Z^\infty_{pq}/B^\infty_{pq} \\
=\ & E^\infty_{pq}.
\end{aligned}
$$

Näin ollen $E^0_{pq} \Rightarrow H_{p+q}(C)$. □

Lause 1.7 on merkittävimpiä motivaatioita spektraalijonoille, nimittäin tämän lauseen avulla ketjukompleksin homologia voidaan jälleenrakentaa suodatuksesta vertailemalla suodatuksen termejä keskenään sopivalla tavalla. Tyypillisesti spektraalijonot tulevatkin suodatuksista. Tästä syystä tällä lauseella on merkittävä rooli myös homologisen algebran teoriassa.

1.3 Vektoriavaruuksien spektraalijonot

Sovellusten kannalta yksi tärkeimmistä tapauksista on $\mathfrak{A} = \mathbf{vect}_{\mathbb{F}}$ eli tapaus, jossa objektit ovat äärellisulotteisia $\mathbb{F}$-vektoriavaruuksia ja morfismit ovat lineaarikuvauksia. Yksi tärkeimpiä syitä kategorian $\mathbf{vect}_{\mathbb{F}}$ hyödyllisyyteen on vektoriavaruuksien dimensiolause, joka on myös hyödyllinen työkalu spektraalijonojen kanssa.

Lause 1.8. *Olkoon V_* perhe äärellisuloitteisia vektoriavaruuksia ja $\{E^r_{pq}\}^{r\geq a}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ rajoitettu spektraalijono, joka $E^a_{pq} \Rightarrow V_{p+q}$. Tällöin*

$$\dim(V_n) = \sum_{p+q=n} \dim(E^\infty_{pq})$$

ja erityisesti

$$V_n \cong \bigoplus_{p+q=n} E^\infty_{pq}.$$

Todistus (vrt. [1, s. 15-18]). Olkoon

$$0 = F_sV_n \subseteq F_{s+1}V_n \subseteq \cdots \subseteq F_{t-1}V_n \subseteq F_tV_n = V_n$$

spektraalijonon suppenemista vastaava vektoriavaruuden V_n suodatus. Nyt

$$E^\infty_{pq} \cong \begin{cases} F_pV_{p+q}/F_{p-1}V_{p+q}, & \text{jos } s < p \leq t, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Soveltamalla toistuvasti vektoriavaruuksien dimensiolausetta saadaan

$$\begin{aligned}
\dim(V_n) &= \dim(F_t V_n) \\
&= \dim(F_t V_n / F_{t-1} V_n) + \dim(F_{t-1} V) \\
&= \dim(F_t V_n / F_{t-1} V_n) + \dim(F_{t-1} V_n / F_{t-2} V_n) + \dim(F_{t-2} V) \\
&= \\
&\vdots \\
&= \sum_{p=s+1}^{t} \dim(F_p V_n / F_{p-1} V_n) \\
&= \sum_{p+q=n} E^{\infty}_{pq}.
\end{aligned}$$

□

Lause 1.8 käytännössä tarkoittaa sitä, että vektoriavaruudet V_* voidaan suoraan päätellä spektraalijonon termeistä $\{E^{\infty}_{pq}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$. Tämänkaltaista tulosta on hankala yleistää Abelin kategorioille, joilla ei ole dimensiolausetta vastaavaa työkalua käytettävissä. Tähän ongelmaan palaamme luvussa 4 kesyjen persistenssimodulien merkeissä.

Seuraavassa esimerkissä lasketaan spektraalijono, joka tulee simpleksisten kompleksien suodatuksesta. Merkinnät ja määritelmät löytyvät määritelmästä 5.1.

Esimerkki 1.9. Tarkastellaan simpleksisen kompleksin

$$K = \{\, [0], [1], [2], [0,1], [1,2], [0,2] \,\} \cong S^1$$

suodatusta $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$, missä

$$K_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos i} = 0, \\ \{\, [0], [1], [0,1] \,\}, & \text{jos i} = 1, \\ \{\, [0], [1], [2], [0,1], [1,2] \,\}, & \text{jos i} = 2, \\ K, & \text{jos i} = 3. \end{cases}$$

Tämä indusoi ketjukompleksin $C_*(K)$ suodatuksen

$$0 = C_*(K_0) \subseteq C_*(K_1) \subseteq C_*(K_2) \subseteq C_*(K_3) = C_*(K).$$

Olkoon $\{E^r_{pq}\}^{r \geq 0}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ tämän suodatuksen spektraalijono. Tässä esimerkissä lasketaan spektraalijonon termit E^r_{pq} kaikilla $p, q, r \in \mathbb{Z}$ ja $r \geq a$ iteroimalla sivujen suhteen. Huomautamme tässä kohtaa, että samaistamme termin E^r_{pq} alkiot sopivien avaruuden $C_{p+q}(K_p)$ edustajien kanssa. Lisäksi tässä esimerkissä, jos merkitsemme $E^r_{pq} = \langle v_0, \dots v_n \rangle$, niin $\{v_0, \dots, v_n\}$ on aina kanta.

Sivun 0 termeiksi $E^0_{pq} = C_{p+q}(K_p)/C_{p+q}(K_{p-1})$ saadaan

- $E^0_{1,-1} = C_0(K_1) = \langle [0], [1] \rangle$,

- $E^0_{1,0} = C_1(K_1) = \langle [0,1] \rangle$,
- $E^0_{2,-2} = C_0(K_2)/C_0(K_1) = \langle [2] \rangle$,
- $E^0_{2,-1} = C_1(K_2)/C_1(K_1) = \langle [1,2] \rangle$,
- $E^0_{3,-3} = C_0(K_3)/C_0(K_2) = 0$,
- $E^0_{3,-2} = C_1(K_3)/C_1(K_2) = \langle [0,2] \rangle$,
- $E^0_{p,q} = 0$ muilla $p, q \in \mathbb{Z}$.

Seuraavaksi lasketaan sivun 1 termit. Tässä

- $E^0_{1,-2} = 0$, jolloin $\ker(d^0_{1,-1}) = E^0_{1,-1}$,
- vastaavasti nähdään, että $\ker(d^0_{p,q}) = E^0_{p,q}$, kun $(p,q) = (2,-1), (3,-2)$,
- $0 \neq [1] - [0] = d^0_{1,0}([0,1]) \in E^0_{1,-1}$, jolloin $\ker(d^0_{1,0}) = 0$,
- $0 \neq [2] = [2] - [1] = d^0_{2,-1}([1,2]) \in E^0_{2,-2}$, jolloin $\ker(d^0_{2,-1}) = 0$.

Näin ollen tarkasteltavien termien indeksit ovat $(1,-1), (2,-2)$ ja $(3,-2)$. Nyt reunakuvausten kuviksi saadaan

- $\mathrm{im}(d^0_{1,0}) = \langle [1] - [0] \rangle \subseteq E^0_{1,-1}$,
- $\mathrm{im}(d^0_{2,-1}) = \langle [2] - [1] \rangle = \langle [2] \rangle \subseteq E^0_{2,-2}$,
- $\mathrm{im}(d^0_{3,-1}) = 0 \subseteq E^0_{3,-2}$.

Sivun 1 termeiksi siis saadaan

- $E^1_{1,-1} = \langle [0], [1] \rangle / \langle [1] - [0] \rangle = \langle [1] \rangle$,
- $E^1_{2,-2} = \langle [2] \rangle / \langle [2] \rangle = 0$,
- $E^1_{3,-2} = \langle [0,2] \rangle$.

Sivulla 1 jäljellä olevien nollasta poikkeavien termien indeksit ovat $(1,-1)$ ja $(3,-2)$. Havaitaan, että kuvauksen $d^r_{1,-1}$ maaliavaruus on nolla-avaruus kaikilla $r \geq 1$. Vastaavasti kuvauksen $d^r_{3,-2}0$ maaliavaruus on nolla-avaruus kaikilla $r > 2$ ja $r = 1$. Näin ollen $E^2_{pq} = E^1_{pq}$ ja $E^\infty_{pq} = E^3_{pq}$ kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$. Voidaan siis mennä suoraan sivulle 2 ja iterointi päättyy sivulle 3.

Tässä $d^2_{3,-2} : E^2_{3,-2} \to E^2_{1,-1}$ ja

$$0 = [2] - [0] = d^2_{3,-2}([0,2]) \in E^2_{1,-1}.$$

Siis $E^3_{1,-1} = E^2_{1,-1}$ ja $E^3_{3,-2} = E^2_{3,-2}$. Näin ollen lopullisiksi termeiksi saadaan

$$E^\infty_{pq} \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{kun } (p,q) \in \{(1,-1), (3,-2)\}, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja erityisesti

$$\bigoplus_{p+q=n} E^{\infty}_{pq} \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{kun } n \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Koska $K \cong S^1$, niin

$$H_n(K) \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{jos } n \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Voidaan siis todeta, että lause 1.8 pitää paikkansa tässä esimerkissä.

1.4 Kaksoiskompleksit

Määritelmä 1.10. *Kaksoiskompleksi* koostuu

- perheestä kategorian $\mathfrak{A}$ objekteja $D = \{D_{pq}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$,
- perheestä *vaakasuuntaisia reunakuvauksia* $\{d^h_{pq} : D_{pq} \to D_{p-1,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$,
- perheestä *pystysuuntaisia reunakuvauksia* $\{d^v_{pq} : D_{pq} \to D_{p,q-1}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$.

Näillä reunakuvauksilla on ominaisuudet

(1) $d^h_{p-1,q} \circ d^h_{pq} = 0$,

(2) $d^v_{p,q-1} \circ d^v_{pq} = 0$,

(3) $d^h_{p,q-1} \circ d^v_{pq} + d^v_{p-1,q} \circ d^h_{pq} = 0$

kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$. Tätä kaksoiskompleksia vastaava *totaalikompleksi* on ketjukompleksi $\mathrm{TC}(D)$, jolla

$$\mathrm{TC}(D)_n = \bigoplus_{p+q=n} D_{pq}$$

ja tämän reunakuvaukset ovat muotoa

$$d^{\mathrm{TC}}_n = \sum_{p+q=n} [d^h_{pq} + d^v_{p-1,q+1}].$$

Jos lisäksi on olemassa indeksit $m_1, m_2, M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$ niin, että kaikilla $(p,q) \notin [m_1, M_1] \times [m_2, M_2]$ pätee $D_{pq} = 0$, puhutaan *rajoitetusta kaksoiskompleksista.* Huomautetaan vielä siitä, että yleensä puhutaan vain kaksoiskompleksista D.

Huomautus. Kuvan 1.1 kaavio ei ole kommutoiva, sillä $d^v \circ d^h = -(d^h \circ d^v)$. Tällaista kaaviota kutsutaan *antikommutoivaksi.* Vaihtoehtoisesti voisimme määritellä kaksoiskompleksin olevan kommutoiva. Tämän syynä on määritelmien duaalisuus, nimittäin korvaamalla morfismit d^v_{pq} morfismeilla $(-1)^p d^v_{pq}$, tai vastaavasti korvaamalla morfismit d^h_{pq} morfismeilla $(-1)^q d^h_{pq}$, kommutoivasta kaaviosta tulee antikommutoiva ja päinvastoin. Eri määritelmillä kaksoiskompleksi ei oleellisesti muutu, sillä vaaka- ja pystysuuntaiset homologiat säilyvät. Määrittelemme kaksoiskompleksin olevan antikommutoiva, jotta totaalikompleksin reunakuvaus olisi helpompi ilmaista.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots & D_{p-1,q+1} \arrow[l] \arrow[d, "d^v"'] & D_{p,q+1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"] & D_{p+1,q+1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & D_{p-1,q} \arrow[l] \arrow[d, "d^v"'] & D_{pq} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"] & D_{p+1,q} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & D_{p-1,q-1} \arrow[l] \arrow[d] & D_{p,q-1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d] & D_{p+1,q-1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Kuva 1.1. Kaksoiskompleksi

Kaksoiskompleksin spektraalijonot

Kaksoiskompleksin totaalikompleksia vastaa kaksi luonnollista suodatusta. Ensimmäinen näistä saadaan konstruoitua suodattamalla sarakkeiden suhteen. Olkoon $\boldsymbol{D}$ kaksoiskompleksi ja määritellään kaksoiskompleksi, jolla

$$
{}^{I}\tau_{\leq n} D_{pq} = \begin{cases} D_{pq}, & \text{jos } p \leq n, \\ 0, & \text{jos } p > n \end{cases}
$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Tämän reunakuvaukset ovat kaksoiskompleksin $\boldsymbol{D}$ reunakuvausten indusoimia. Tässä siis kaikki n:nnen sarakkeen oikealla puolella olevat termit kaksoiskompleksissa $\boldsymbol{D}$ on korvattu 0-objektilla ja muut termit pysyvät samana. Näistä saadaan muodostettua kaksoiskompleksin $\boldsymbol{D}$ totaalikompleksin *ensimmäinen suodatus*. Määritellään

$$
{}^{I}F_n \operatorname{TC}(\boldsymbol{D}) = \operatorname{TC}({}^{I}\tau_{\leq n} D_{pq}).
$$

Koska

$$
\operatorname{TC}({}^{I}\tau_{\leq n} D_{pq})_m = \bigoplus_{\substack{p+q=m \\ p \leq n}} D_{pq},
$$

niin ${}^{I}F_n \operatorname{TC}(\boldsymbol{D}) \subseteq {}^{I}F_{n+1} \operatorname{TC}(\boldsymbol{D})$. Kyseessä siis todella on suodatus ja sitä vastaavaa spektraalijonoa sanotaan kaksoiskompleksin $\boldsymbol{D}$ *ensimmäiseksi spektraalijonoksi*. Tälle spektraalijonolle käytetään merkitään $\{{}^{I}E^r_{p,q}(\boldsymbol{D})\}^{r \geq 0}_{p,q \in \mathbb{Z}}$.

Vastaavasti *toinen suodatus* ja *toinen spektraalijono* saadaan suodattamalla rivien suhteen. Eli määritellään

$$
{}^{II}\tau_{\leq n} D_{pq} = \begin{cases} D_{pq}, & \text{jos } q \leq n, \\ 0, & \text{jos } q > n \end{cases}
$$

ja

$$
{}^{II}F_n \operatorname{TC}(\boldsymbol{D})_m = \operatorname{TC}({}^{II}\tau_{\leq n} D_{pq})_m = \bigoplus_{\substack{p+q=m \\ q \leq n}} D_{pq}.
$$

Kaksoiskompleksin D toinen spektraalijono on siis suodatusta ${}^{II}F_* \operatorname{TC}(D)$ vastaava spektraalijono ja tälle käytetään merkintää $\{{}^{II}E^r_{p,q}(D)\}^{r\geq 0}_{p,q\in\mathbb{Z}}$. Mikäli ei ole sekaantumisen vaaraa, merkitään yksinkertaisesti

$$^{I}E^r_{p,q}(D) = {}^{I}E^r_{p,q} \text{ ja } {}^{II}E^r_{p,q}(D) = {}^{II}E^r_{p,q}.$$

Lause 1.11. *Olkoon D kaksoiskompleksi. Tällöin*

$$^{I}E^r_{pq} = \begin{cases} D_{pq}, & \text{jos } r = 0, \\ H^v_q(D_{p*}), & \text{jos } r = 1, \\ H^h_p(H^v_q(D)), & \text{jos } r = 2 \end{cases}$$

ja

$$^{II}E^r_{pq} = \begin{cases} D_{qp}, & \text{jos } r = 0, \\ H^h_q(D_{*p}), & \text{jos } r = 1, \\ H^v_p(H^h_q(D)), & \text{jos } r = 2. \end{cases}$$

Tässä yläindekseillä v ja h erotetaan reunakuvausten d^v ja d^h määräämät homologiat. Erityisesti, jos D on rajoitettu kaksoiskompleksi, niin spektraalijonot $\{{}^{I}E^0_{pq}\}^{r\geq 0}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ ja $\{{}^{II}E^0_{pq}\}^{r\geq 0}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ ovat rajoitettuja ja

$$^{I}E^0_{pq},\ {}^{II}E^0_{pq} \Rightarrow H_{p+q}(\operatorname{TC}(D)).$$

Todistus (vrt. [14, s. 141-143]). Jos kaksoiskompleksi D on rajoitettu, niin sen totaalikompleksin suodatukset ${}^{I}F_* \operatorname{TC}(D)$ ja ${}^{II}F_* \operatorname{TC}(D)$ ovat äärellisen pituisia. Näin ollen lauseen 1.7 nojalla

$$^{I}E^0_{pq},\ {}^{II}E^0_{pq} \Rightarrow H_{p+q}(\operatorname{TC}(D)).$$

Tarkastellaan kaksoiskompleksin D ensimmäistä spektraalijonoa. Ensinnäkin

$$^{I}E^0_{pq} = {}^{I}F_p \operatorname{TC}(D)_{p+q}/{}^{I}F_{p-1} \operatorname{TC}(D)_{p+q} = D_{pq}$$

ja reunakuvaukset d^0 ovat kaksoiskompleksin D pystysuuntaiset reunakuvaukset d^v. Täten ${}^{I}E^1_{pq} = H^v_q(D_{p*})$. Reunakuvaukset $d^1 : H^v(D_{p*}) \to H^v(D_{p-1*})$ taas ovat vaakasuuntaisten reunakuvausten d^h indusoimia ja näin ollen

$$^{I}E^2_{pq} = H^h_p H^v_q(D).$$

Vastaavasti käsitellään toista spektraalijonoa. Tässä ${}^{II}E^0_{pq} = D_{qp}$ ja reunakuvaukset d^0 ovat vaakasuuntaiset reunakuvaukset d^h. Täten ${}^{II}E^1_{pq} = H^h_q(D_{*p})$. Reunakuvaukset $d^1 : H^h_q(D_{*p}) \to H^h_q(D_{*p-1})$ ovat pystysuuntaisten reunakuvausten d^v indusoimia ja näin ollen

$$^{II}E^2_{pq} = H^v_p H^h_q(D).$$

□

2 Persistenssimodulit

Topologisessa data-analyysissä ja erityisesti persistentissä homologiassa metrisiä avaruuksia tutkitaan tarkastelemalla homologioiden muutoksia avaruuden suodatuksessa. Tässä luvussa tutustumme persistenssimodulien käsitteeseen, joka on luonnollinen yleistys persistentille homologialle. Aluksi käsittelemme klassisempaa persistenssimodulien teoriaa, kuten intervallimoduleja ja kesyjä persistenssimoduleja. Sen jälkeen tutustumme persistenssivektoreihin, joiden avulla kehittämme lineaarialgebrasta tuttuja työkaluja persistenssimoduleille.

Tämä luku perustuu Torras-Casasin artikkelin [12] lukuihin 2 ja 3. Apuna on käytetty myös Lesnickin luentomonisteen [6] lukua 4.

2.1 Määritelmiä

Määritelmä 2.1. Funktoria $\mathbb{V} : (\mathbb{R}, \leq) \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ sanotaan *persistenssimoduliksi.* Toisin sanoen persistenssimoduli koostuu perheestä $\mathbb{F}$-vektoriavaruuksia $\{\mathbb{V}(r)\}_{r\in\mathbb{R}}$ sekä perheestä lineaarikuvauksia $\{\mathbb{V}(r \leq s) : \mathbb{V}(r) \to \mathbb{V}(s)\}_{r\leq s}$, joilla on ominaisuudet

(1) $\mathbb{V}(r \leq r) = \mathrm{id}_{\mathbb{V}(r)}$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$,

(2) $\mathbb{V}(r \leq s) \circ \mathbb{V}(l \leq r) = \mathbb{V}(l \leq s)$ kaikilla $l \leq r \leq s$.

Jos $\mathbb{W}$ on toinen persistenssimoduli, niin luonnollista muunnosta $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ sanotaan persistenssimodulien $\mathbb{V}$ ja $\mathbb{W}$ väliseksi *morfismiksi.* Eli persistenssimodulien välinen morfismi koostuu perheestä lineaarikuvauksia $\{f(r) : \mathbb{V}(r) \to \mathbb{W}(r)\}_{r\in\mathbb{R}}$, joilla kaavio

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}(r) \arrow[r, "\mathbb{V}(r\leq s)"] \arrow[d, "f(r)"'] & \mathbb{V}(s) \arrow[d, "f(s)"] \\ \mathbb{W}(r) \arrow[r, "\mathbb{W}(r\leq s)"'] & \mathbb{W}(s) \end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $r \leq s$. Persistenssimodulien välistä morfismia $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ sanotaan *isomorfismiksi*, mikäli lineaarikuvaus $f(r)$ on isomorfismi kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Vastaavaa terminologiaa käytetään *injektiivisyyden* ja *surjektiivisuuden* kanssa.

Esimerkki 2.2. Algebrallisessa topologiassa persistenssimoduleja esiintyy esimerkiksi silloin, kun topologista avaruutta X tutkitaan tarkastelemalla sen suodatusta $\{X_r\}_{r\in\mathbb{R}}$. Tämän suodatuksen jäsenten singulaariset homologia-avaruudet $\{H_n(X_r)\}_{r\in\mathbb{R}}$ ja inkluusioiden indusoimat lineaarikuvaukset $H_n(X_r) \to H_n(X_s)$ muodostavat persistenssimodulin.

Esimerkki 2.3. Sovelletussa topologisessa data-analyysissä tyypillisesti tarkastellaan äärellistä metristä avaruutta X, jonka informaatiosta muodostetaan simpleksisen kompleksin $K = P(X) \setminus \{\emptyset\}$ suodatus. Yksi suosituimpia menetelmiä sellaisen suodatuksen muodostamiseen on *Vietoris-Rips-kompleksien* muodostama suodatus eli suodatus $\{\mathrm{VR}(X, r)\}_{r\in\mathbb{R}}$, jolla

$$\mathrm{VR}(X, r) = \begin{cases} \{\, \sigma \subseteq X \mid d(x, y) \leq r \text{ kaikilla } x, y \in \sigma \,\}, & \text{jos } 0 \leq r \\ \emptyset, & \text{jos } r < 0. \end{cases}$$

Tämän suodatuksen jäsenten simpleksiset homologia-avaruudet ja inkluusioiden indusoimat lineaarikuvaukset muodostavat persistenssimodulin.

Koska persistenssimodulit ja niiden väliset morfismit muodostavat funktorikategorian $(\mathbb{R}, \leq) \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$, useat persistenssimodulien algebralliset käsitteet voidaan luonnollisesti määritellä kategorian $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ kautta.

Määritelmä 2.4. Olkoon $\{\mathbb{V}_i\}_{i\in I}$ perhe persistenssimoduleja. Tämän perheen *summa* on persistenssimoduli $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{V}_i$, jolla

$$(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{V}_i)(r) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{V}_i(r)$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja

$$(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{V}_i)(r \leq s)((v_i)_{i\in I}) = (\mathbb{V}_i(r \leq s)(v_i))_{i\in I}$$

kaikilla $r \leq s$.

Määritelmä 2.5. Persistenssimoduli $\mathbb{U}$ on persistenssimodulin $\mathbb{V}$ *alimoduli*, mikäli $\mathbb{U}(r) \subseteq \mathbb{V}(r)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\mathbb{U}(r \leq s) = \mathbb{V}(r \leq s)_{|\mathbb{U}(r)}$ kaikilla $r \leq s$. Tällöin merkitään $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$.

Määritelmä 2.6. Olkoon $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ persistenssimodulien välinen morfismi. Sen *ydin* on alimoduli $\ker(f) \subseteq \mathbb{V}$, jolla

$$\ker(f)(r) = \ker(f(r))$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Morfismin f *kuva* on alimoduli $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathbb{W}$, jolla

$$\mathrm{im}(f)(r) = \mathrm{im}(f(r))$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 2.7. Jos $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ ovat persistenssimoduleja, niin näitä vastaava *tekijämoduli* on persistenssimoduli $\mathbb{V}/\mathbb{U}$, jolla

$$(\mathbb{V}/\mathbb{U})(r) = \mathbb{V}(r)/\mathbb{U}(r)$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Lineaarikuvaus $(\mathbb{V}/\mathbb{V}')(r \leq s)$ on lineaarikuvauksen $\mathbb{V}(r \leq s)$ indusoima eli

$$(\mathbb{V}/\mathbb{U})(r \leq s)(v + \mathbb{U}(r)) = \mathbb{U}(r \leq s)(v) + \mathbb{U}(s)$$

kaikilla $r \leq s$.

2.2 Intervallimodulit ja kesyt persistenssimodulit

Sovelluksissa esiintyvät avaruudet ovat tyypillisesti äärellisiä ja näihin pohjautuvat persistenssimodulit toteuttavat eräitä äärellisyysehtoja. Tässä aliluvussa tutustumme kesyn persistenssimodulin käsitteeseen, joka on sovellusten kannalta realistinen äärellisyysehto persistenssimoduleille. Esittelemme kesyjen persistenssimodulien struktuurilauseen, joka mahdollistaa laskennallisten työkalujen kehittämisen kesyille persistenssimoduleille.

Määritelmä 2.8. Välin $I \subseteq \mathbb{R}$ *intervallimoduli* on persistenssimoduli $\mathbb{I}(I)$, jolla

$$\mathbb{I}(I)(r) = \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{jos } r \in I, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja

$$\mathbb{I}(I)(r \leq s) = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{F}}, & \text{jos } r, s \in I, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritelmä 2.9. Olkoon $\mathbb{V}$ persistenssimoduli. Jos $I \subseteq \mathbb{R}$ on väli ja $\mathbb{V}(a \leq b)$ on isomorfismi kaikilla $a, b \in I$ ja $a \leq b$, niin sanotaan, että $\mathbb{V}$ on *vakio* välillä I. Jos $a \in \mathbb{R}$ ja $\mathbb{V}$ on vakio jollain avoimella välillä $a \in I \subseteq \mathbb{R}$, niin a on persistenssimodulin $\mathbb{V}$ *säännöllinen piste*. Jos piste ei ole säännöllinen, sitä sanotaan *kriittiseksi pisteeksi*.

Määritelmä 2.10. Persistenssimodulia $\mathbb{V}$ sanotaan *kesyksi*, jos sillä on vain äärellisen monta kriittistä pistettä ja $\dim(\mathbb{V}(r)) < \infty$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$.

Kesyjen persistenssimodulien struktuurilause

Lause 2.11. *Olkoon $\mathbb{V}$ kesy persistenssimoduli. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen monijoukko välejä $\{I_i\}_{i=1}^n$ (eli jotkut välit saattavat esiintyä useamman kerran) sekä isomorfismi*

$$\mathbb{V} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{I}(I_i).$$

Todistus. Sivuutetaan (ks. [6, Lause 4.7]). □

Oletus 2.12. Persistentissä homologiassa homologialuokkien muutokset tapahtuvat kriittisissä pisteissä. Toisin sanoen, jos $r \in \mathbb{R}$ ja

$$A_r = \{\, s \in \mathbb{R} \mid r < s \text{ ja } \mathbb{V}(r \leq s) \text{ ei ole isomorfismi} \,\} \cup \{\infty\},$$

niin $\inf A_r = \min A_r$. Intervallimoduleista vain oikealta avoimien puoliavoimien välien intervallimoduleilla on edellä mainittu ominaisuus. Näin ollen, jotta kesyllä persistenssimodulilla olisi tämä ominaisuus, sitä vastaavien välien täytyy olla muotoa $[a, b)$. Tästä eteenpäin oletamme persistenssimodulin olevan aina kesy ja sitä vastaavien välien olevan oikealta avoimia puoliavoimia välejä. Lisäksi oletamme näiden välien olevan aina alhaalta rajoitettuja eli muotoa $[a, b)$, missä $-\infty < a < b \leq \infty$. Lopuksi otamme käyttöön merkinnän $\mathbb{I}(a, b) = \mathbb{I}([a, b))$.

Huomautus. Lauseen 2.11 nojalla on luonnollista samaistaa kesy persistenssimoduli välien monijoukkona. Lause 2.11 ei kuitenkaan takaa luonnollista yksikäsitteistä isomorfismia. Tarkastellaan persistenssimodulia $\mathbb{V} = \mathbb{I}(0,2) \oplus \mathbb{I}(1,3)$. Meillä on yksi isomorfismi $\mathrm{id}_{\mathbb{V}}$. Tämä ei kuitenkaan ole ainoa. Toinen isomorfismi $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ saadaan määrittelemällä

- $f(r) = 0$, jos $r < 0$ tai $3 \le r$,
- $f(r)(x, 0) = (x, 0)$, jos $0 \le r < 1$,
- $f(r)(x, y) = (x, 2y)$, jos $1 \le r < 2$,
- $f(r)(0, y) = (0, 2y)$, jos $2 \le r < 3$.

Lauseen 2.11 isomorfismi ei siis ole luonnollinen, mutta se on kuitenkin hyödyllinen työkalu laskennallisesta näkökulmasta. Tällaisen isomorfismin valinta vastaa lineaarialgebrassa kannan valitsemista vektoriavaruudelle.

Intervallimodulien ominaisuuksia

Lemma 2.13. *Olkoot $\mathbb{V}$ persistenssimoduli, $a \in \mathbb{R}$ ja $v \in \mathbb{V}(r)$. Jos $a < b < \infty$, niin on olemassa morfismi $\alpha : \mathbb{I}(a, b) \to \mathbb{V}$, jolla $\alpha(a)(1_{\mathbb{F}}) = v$ jos ja vain jos $\mathbb{V}(a \le b)(v) = 0$. Mikäli $b = \infty$, niin morfismi $\alpha : \mathbb{I}(a, b) \to \mathbb{V}$, jolla $\alpha(a)(1_{\mathbb{F}}) = v$ on aina olemassa.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että $b < \infty$. Jos $\alpha : \mathbb{I}(a, b) \to \mathbb{V}$ on morfismi, jolla $\alpha(a)(1_{\mathbb{F}}) = v$, niin

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(a \le b)(v) &= \mathbb{V}(a \le b)(\alpha(a)(1_{\mathbb{F}}))\\ &= \alpha(b)(\mathbb{I}(a, b)(a \le b)(1_{\mathbb{F}}))\\ &= \alpha(b)(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Täten $\mathbb{V}(a \le b)(v) = 0$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\mathbb{V}(a \le b)(v) = 0$. Olkoon $\alpha(a)$ se lineaarikuvaus, jonka määrittää ehto $\alpha(a)(1_{\mathbb{F}}) = v$. Määritellään pisteittäiset lineaarikuvaukset

$$\alpha(r) = \begin{cases} \mathbb{V}(a \le r) \circ \alpha(a) \circ (\mathbb{I}(a, b)(a \le r))^{-1}, & \text{kun } a \le r < b,\\ 0 & \text{muulloin.}\end{cases}$$

Osoitetaan, että tämä määrittää morfismin $\mathbb{I}(a, b) \to \mathbb{V}$. Olkoot $r, s \in \mathbb{R}$ ja oletetaan, että $r \le s$. Oletetaan ensin, että $b \le s$. Huomaa, että tällöin $\alpha(s) = 0$. Ensinnäkin, jos $r < a$ tai $b \le r$, niin

$$\alpha(s) \circ \mathbb{I}(r \le s) = 0 = \mathbb{V}(r \le s) \circ \alpha(r).$$

Jos taas $a \le r < b$, niin $\alpha(s) \circ \mathbb{I}(r \le s) = 0$ ja

$$(\mathbb{V}(r \le s) \circ \alpha(r))(1_{\mathbb{F}}) = \mathbb{V}(a \le s)(v) = \mathbb{V}(b \le s)(\mathbb{V}(a \le b)(v)) = 0. \tag{2.1}$$

Siis $\alpha(s) \circ \mathbb{I}(r \le s) = \mathbb{V}(r \le s) \circ \alpha(r)$.

Oletetaan sitten, että $s < b$. Jos $r < a$, niin

$$\alpha(s) \circ \mathbb{I}(r \le s) = 0 = \mathbb{V}(r \le s) \circ \alpha(r).$$

Enää siis riittää osoittaa tapaus, missä $a \le r \le s < b$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(\alpha(s) \circ \mathbb{I}(r \le s))(1_{\mathbb{F}}) &= \alpha(s)(1_{\mathbb{F}}) \\
&= (\mathbb{V}(a \le s) \circ \alpha(a))(1_{\mathbb{F}}) \\
&= (\mathbb{V}(a \le s))(v) \\
&= (\mathbb{V}(r \le s))(\mathbb{V}(a \le r)(\alpha(a)(1_{\mathbb{F}}))) \\
&= ((\mathbb{V}(r \le s)) \circ \alpha(r))(1_{\mathbb{F}}).
\end{aligned}$$

Näin ollen α on morfismi.

Oletetaan, että $b = \infty$. Tapauksessa $b < \infty$ ehtoa $\mathbb{V}(a \le b)(v) = 0$ tarvittiin vain yhtälön (2.1) osoittamiseksi. Täten vastaavasti voidaan osoittaa, että lineaarikuvaukset

$$\alpha(r) = \begin{cases} \mathbb{V}(a \le r) \circ \alpha(a) \circ (\mathbb{I}(a, b)(a \le r))^{-1}, & \text{jos } a \le r, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

määrittävät morfismin $\mathbb{I}(a, \infty) \to \mathbb{V}$. □

Edellisestä lemmasta motivoituneena otamme käyttöön merkinnän

$$\alpha[r] = \begin{cases} \alpha(r)(1_{\mathbb{F}}), & \text{jos } r \in [a, b), \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Seuraavia aputuloksia tulemme käyttämään aktiivisesti tutkielman aikana.

Lemma 2.14. *Olkoon $\alpha : \mathbb{I}(a, b) \to \mathbb{V}$ morfismi. Jos $a \le r \le s < \infty$, niin*

$$\alpha[s] = \mathbb{V}(r \le s)(\alpha[r]).$$

Todistus. Jos $s < b$, niin morfismin α luonnollisuudesta seuraa

$$\mathbb{V}(r \le s) \circ \alpha(r) = \alpha(s) \circ \mathbb{I}(a, b)(r \le s) = \alpha(s) \circ \mathrm{id}_{\mathbb{F}} = \alpha(s).$$

Täten

$$\mathbb{V}(r \le s)(\alpha[r]) = \mathbb{V}(r \le s)(\alpha(r)(1_{\mathbb{F}})) = \alpha(s)(1_{\mathbb{F}}) = \alpha[s].$$

Oletetaan sitten, että $b \le s$. Ensinnäkin, jos $b \le r$, niin

$$\alpha[s] = 0 = \mathbb{V}(r \le s)(0) = \mathbb{V}(r \le s)(\alpha[r]).$$

Toisaalta, jos $r < b$, niin $\mathbb{I}(a, b)(r \le s)(1_{\mathbb{F}}) = 0$ ja täten

$$\begin{aligned}
\alpha[s] &= 0 \\
&= (\alpha(s) \circ \mathbb{I}(a, b)(r \le s))(1_{\mathbb{F}}) \\
&= (\mathbb{V}(r \le s) \circ \alpha(r))(1_{\mathbb{F}}) \\
&= \mathbb{V}(r \le s)(\alpha[r]).
\end{aligned}$$

□

Lause 2.15. *Olkoon* $v \in \mathbb{V}(a)$*. Jos* $b < \infty$*, niin ehto* $\alpha[a] = v$ *määrittää morfismin* $\alpha : \mathbb{I}(a,b) \to \mathbb{V}$ *jos ja vain jos* $\mathbb{V}(a \le b)(v) = 0$*. Jos* $b = \infty$*, ehto* $\alpha[a] = v$ *aina määrittää morfismin* $\alpha : \mathbb{I}(a,b) \to \mathbb{V}$*. Kummassakin tapauksessa morfismilla* α *pätee*

$$\alpha[r] = \begin{cases} \mathbb{V}(a \le r)(v), & \text{jos } a \le r \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja erityisesti α *on yksikäsitteinen.*

Todistus. Väite seuraa lemmoista 2.13 ja 2.14. □

2.3 Persistenssivektorit

Seuraavaksi tutustumme yhteen tämän tutkielman keskeisimmistä käsitteistä eli persistenssivektorien käsitteeseen. Persistenssivektorien avulla pystymme määrittelemään perinteisestä lineaarialgebrasta tuttujen työkalujen analogiset määritelmät kesyille persistenssimoduleille.

Torras-Casas esitti persistenssivektorit ja niihin perustuvia laskennallisia algoritmeja artikkelissa [11]. Tämän tutkielman päälähteessä [12] määritelmät poikkeavat hiukan artikkelin [11] määritelmistä. Muun muassa artikkelissa [12] ei-triviaalin persistenssivektorin määritelmään kuuluu morfismin injektiivisyys. Määritelmien suhteen osittain seuraamme artikkelin [11] määritelmiä. Esimerkiksi hyväksymme persistenssivektorit, jotka eivät ole triviaaleja eivätkä injektiivisiä. Tällaisten persistenssivektorien korjaamista käsittelemme aliluvussa 2.5.

Määritelmä 2.16 (vrt. [11, s. 6-7],[12, s. 588])**.** Morfismia $\alpha : \mathbb{I}(a,b) \to \mathbb{V}$, sanotaan persistenssimodulin $\mathbb{V}$ *persistenssivektoriksi.* Persistenssivektori α on *triviaali*, mikäli α on nolla-morfismi. Persistenssivektorin α *väli* on $[a,b)$. Välin päätepisteille käytetään merkintää $\mathbb{b}(\alpha) = a$ ja $\mathbb{d}(\alpha) = b$. Persistenssimodulin $\mathbb{V}$ persistenssivektorien joukolle käytetään merkintää $\mathrm{PVect}(\mathbb{V})$. Jos $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ on morfismi, niin persistenssivektorille $f \circ \alpha : \mathbb{I}(a,b) \to \mathbb{W}$ käytetään merkintää $f(\alpha)$.

Algebrallisessa topologiassa esiintyvät persistenssimodulit kertovat avaruuden topologisten ominaisuuksien muutoksista skaalan muuttuessa. Persistenssivektori taas kertoo skaalan vaikutuksesta yksittäiseen topologiseen ominaisuuteen. Toisin sanoen persistenssivektori voidaan ajatella objektina, joka kertoo vektorin $\alpha[\mathbb{b}(\alpha)] \in \mathbb{V}(\mathbb{b}(\alpha))$ kehityksestä ajan kuluessa eteenpäin. Esimerkiksi persistentissä homologiassa persistenssivektorien avulla voidaan tarkastella yksittäisten homologialuokkien yhdistymistä ja kuolemista.

Määritelmä 2.17. Olkoot $\mathbb{V}$ persistenssimoduli ja $\alpha, \beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$. Sanotaan, että α ja β ovat *pisteittäin yhtäsuuret*, mikäli $\alpha[r] = \beta[r]$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Tällöin merkitään $\alpha \equiv \beta$.

Määritelmä 2.18. Olkoon $\mathbb{V}$ persistenssimoduli. Joukon PVect($\mathbb{V}$) *standardijärjestys* on järjestys $\leq_P$, jossa $\alpha \leq_P \beta$ täsmälleen silloin, kun $\mathbb{b}(\alpha) \leq \mathbb{b}(\beta)$. Mikäli ei ole sekaantumisen vaaraa, järjestykselle $\leq_P$ käytetään merkintää $\leq$.

Oletus 2.19. Ellei toisin mainita, niin kaikki persistenssivektorien perheet on järjestetty standardijärjestyksen mukaan. Toisin sanoen, jos $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ on perhe persistenssivektoreita, niin $\alpha_i \leq \alpha_j$ kaikilla $1 \leq i < j \leq n$.

Määritelmä 2.20. Jos $a \in \mathbb{R}$, niin funktiota

$$1_a(r) = \begin{cases} 1_{\mathbb{F}}, & \text{jos } a \leq r, \\ 0_{\mathbb{F}}, & \text{jos } r < a. \end{cases}$$

sanotaan *katkaisufunktioksi.* Jos $\alpha : \mathbb{I}(a', b) \to \mathbb{V}$ on persistenssivektori, jolla $a' \leq a < b$, niin $1_a\alpha : \mathbb{I}(a, b) \to \mathbb{V}$ on persistenssivektori, jonka määrittää ehto $1_a\alpha[a] = \alpha[a]$.

Määritelmä 2.21. Olkoon $\mathcal{B} = \{\alpha_i : \mathbb{I}(a_i, b_i) \to \mathbb{V}\}_{i=1}^n$ perhe persistenssimodulin $\mathbb{V}$ persistenssivektoreita. Tällöin merkitään

$$\mathcal{B}^r := \{\, \alpha_i \mid i \in \{1, \ldots, n\} \text{ ja } \alpha_i[r] \neq 0 \,\}$$

sekä $\mathcal{B}^r[s] = \{\alpha_i[s]\}_{\alpha_i \in \mathcal{B}^r}$. Persistenssivektorien perheen $\mathcal{B}$ *virittämä* alimoduli on se alimoduli $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$, jolla $\mathbb{U}(r) = \langle \mathcal{B}^r[r] \rangle$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Tällöin merkitään $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathbb{U}$. Sanotaan, että

(1) $\mathcal{B}$ *virittää* persistenssimodulin $\mathbb{V}$, mikäli $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathbb{V}$,

(2) $\mathcal{B}$ on *pisteittäin vapaa*, mikäli $\mathcal{B}^r[r]$ on lineaarisesti riippumaton kaikilla $r \in \mathbb{R}$,

(3) $\mathcal{B}$ on *vapaa*, mikäli se on pisteittäin vapaa ja jokainen $\alpha \in \mathcal{B}$ on injektiivinen morfismi,

(4) $\mathcal{B}$ on persistenssimodulin $\mathbb{V}$ *viivakoodikanta*, mikäli se on vapaa ja virittää persistenssimodulin $\mathbb{V}$.

Lause 2.22. *Olkoon $\mathcal{B} = \{\alpha_i : \mathbb{I}(a_i, b_i) \to \mathbb{V}\}_{i=1}^n$ perhe persistenssimodulin $\mathbb{V}$ persistenssivektoreita. Olkoon $f : \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{I}(a_i, b_i) \to \mathbb{V}$ perheen $\mathcal{B}$ indusoima morfismi. Tällöin*

(1) f on surjektiivinen jos ja vain jos $\mathcal{B}$ virittää persistenssimodulin $\mathbb{V}$,

(2) f on injektiivinen jos ja vain jos $\mathcal{B}$ on vapaa,

(3) f on isomorfismi jos ja vain jos $\mathcal{B}$ on persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta.

Todistus (vrt. [12, s. 587]). Riittää osoittaa ensimmäiset kaksi kohtaa. Ensimmäinen kohta seuraa siitä, että $\mathrm{im}(f)(r) = \mathrm{im}(f(r))$. Osoitetaan siis kohta (2). Oletetaan aluksi, että f on injektiivinen. Tällöin morfismin f rajoittuma alimoduliin $\mathbb{I}(a_i, b_i)$ on myös injektiivinen, joten jokainen $\alpha \in \mathcal{B}$ on injektiivinen morfismi. Koska f on pisteittäin injektiivinen, niin

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{B}^r} c_\alpha \alpha[r] = 0$$

täsmälleen silloin, kun $c_\alpha = 0$ kaikilla $\alpha \in \mathcal{B}^r$. Näin ollen $\mathcal{B}$ on vapaa.

Oletetaan seuraavaksi, että $\mathcal{B}$ on vapaa ja osoitetaan, että $f(r)$ on injektiivinen kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Olkoot $r \in \mathbb{R}$ ja $i_1, \ldots, i_m$ ne indeksit $i \in \{1, \ldots, n\}$, joilla $a_i \leq r < b_i$. Tällöin $\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{I}(a_i, b_i)\right)(r) = \mathbb{F}^m$. Olkoon $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$ vektoriavaruuden $\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{I}(a_i, b_i)\right)(r) = \mathbb{F}^m$ standardi kanta ja oletetaan, että

$$f(r)\left(\sum_{j=1}^m c_j x_{i_j}\right) = 0.$$

Nyt

$$0 = f(r)\left(\sum_{j=1}^m c_j x_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^m c_j f(r)(x_{i_j}) = \sum_{j=1}^m c_j \alpha_{i_j}[r].$$

Koska $\mathcal{B}$ on vapaa, niin $\alpha_{i_j}[r] \in \mathcal{B}^r[r]$ kaikilla $j \in \{1, \ldots, m\}$ (tämän toteamiseen ei riitä pisteittäinen vapaus). Toisaalta $\mathcal{B}^r[r]$ on lineaarisesti riippumaton perhe vektoreita. Näin ollen $c_j = 0$ kaikilla $j \in \{1, \ldots, m\}$ ja voidaan todeta, että $f(r)$ on injektiivinen. □

Lause 2.23. *Olkoot $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta, $\mathbb{W}$ toinen persistenssimoduli ja $I = \{\, i \in \{1, \ldots, n\} \mid \mathbb{d}(\alpha_i) < \infty \,\}$. Valitaan $x_i \in \mathbb{W}(\mathbb{b}(\alpha_i))$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin ehdot*

$$f(\mathbb{b}(\alpha_i))(\alpha_i[\mathbb{b}(\alpha_i)]) = x_i \tag{2.2}$$

määrittävät persistenssimodulien välisen morfismin $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ jos ja vain jos $\mathbb{W}(\mathbb{b}(\alpha_i) \leq \mathbb{d}(\alpha_i))(x_i) = 0$ kaikilla $i \in I$.

Todistus (vrt. [12, s. 590-591]). Väite seuraa lauseen 2.22 kohdasta (3), lauseesta 2.15 ja summan universaaliominaisuudesta. □

Määritelmä 2.24. Lauseessa 2.23 mainituille ehdoille (2.2) käytetään merkintää $f(\alpha_i) = \beta_i$, missä $\beta_i : \mathbb{I}(\mathbb{b}(\alpha_i), \mathbb{d}(\alpha_i)) \to \mathbb{W}$ on persistenssivektori, jonka määrittää ehto $\beta_i[\mathbb{b}(\alpha_i)] = x_i$.

2.4 Persistenssivektorien lineaarikombinaatiot

Seuraavaksi esittelemme persistenssivektorien summaoperaation $\boxplus$. Luonnollisesti summan $\boxplus$ kuuluu kunnioittaa pisteittäisiä summia. Toisin sanoen, jos

$\alpha, \beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ ja $\mathbb{b}(\alpha), \mathbb{b}(\beta) \leq r$, niin $(\alpha \boxplus \beta)[r] = \alpha[r] + \beta[r]$. Aluksi tarkastelemme persistenssivektorien pisteittäisiä summia, minkä jälkeen määrittelemme summaoperaation $\boxplus$ ja käsittelemme sen perusominaisuuksia. Tämä aliluku perustuu artikkelin [12] sivuihin 588-591.

Olkoot $\mathbb{V}$ persistenssimoduli ja $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ virittävä perhe. Valitaan mielivaltainen $\beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ ja merkitään $a = \mathbb{b}(\beta)$. Tällöin

$$\beta[a] = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}^a} c_\alpha \alpha[a]$$

sopivilla kertoimilla $c_\alpha \in \mathbb{F}$. Huomaa, että jos $\alpha_i[a] \neq 0$, niin $\mathbb{b}(\alpha_i) \leq a$. Täten lemman 2.14 nojalla

$$\begin{aligned}
\beta[r] &= \mathbb{V}(a \leq r)(\beta[a]) \\
&= \mathbb{V}(a \leq r)(\sum_{\alpha \in \mathcal{B}^a} c_\alpha \alpha[a]) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}^a} c_\alpha \mathbb{V}(a \leq r)(\alpha[a]) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}^a} c_\alpha \alpha[r].
\end{aligned}$$

kaikilla $a \leq r$. Samaa ei kuitenkaan voida todeta tapauksessa $r < a$, nimittäin on mahdollista, että $\alpha_i[a] \neq 0$ ja $\mathbb{b}(\alpha_i) < a$. Tällöin valitsemalla $\mathbb{b}(\alpha_i) < r < a$ nähdään, että $\beta[r] = 0$ ja $\alpha_i[r] \neq 0$. Tämä saadaan korjattua soveltamalla katkaisufuktiota 1_a, jolloin

$$\beta[r] = 1_a(r) \sum_{\alpha \in \mathcal{B}^a} c_\alpha \alpha[r]$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Huomaa, että $\beta[r]$ voidaan myös ilmaista muodossa

$$\beta[r] = 1_a(r) \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i[r],$$

kun asetamme $c_i = 0$ kaikilla $\alpha_i \notin \mathcal{B}^a$.

Lause 2.25. *Olkoot $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ virittävä perhe persistenssivektoreita, ja $\beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$. Tällöin on olemassa kertoimet $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, joilla*

(1) $c_i = 0$ kaikilla niillä $i \in \{1, \ldots, n\}$, joilla $\alpha_i[\mathbb{b}(\beta)] = 0$,

(2) kaikilla $r \in \mathbb{R}$

$$\beta[r] = 1_a(r) \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i[r].$$

Mikäli $\mathcal{B}$ on persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta, niin nämä kertoimet ovat yksikäsitteiset.

Määritelmä 2.26. Lauseen 2.25 kertoimia $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ sanotaan persistenssivektorin β *kertoimiksi* perheen $\mathcal{B}$ suhteen.

Huomautus. Olkoot $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ virittävä perhe persistenssivektoreita ja $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ persistenssivektorin β kertoimet perheen $\mathcal{B}$ suhteen. Tällöin, jos $c_i \neq 0$, niin $\mathbb{b}(\alpha_i) \leq \mathbb{b}(\beta) < \mathbb{d}(\alpha_i) \leq \mathbb{d}(\beta)$. Huomautetaan vielä siitä, että jos $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ ei ole viivakoodikanta, niin kertoimet $c_1, \ldots, c_n$ eivät välttämättä ole yksikäsitteiset.

Lause 2.25 vahvistaa ajatusta siitä, että operaation $\boxplus$ on määrä kunnioittaa pisteittäisiä summia. Ensimmäisenä tulisi mieleen asettaa pisteittäisille lineaarikuvauksille $(\alpha+\beta)(r) = \alpha(r)+\beta(r)$. Tässä kuitenkin tulee ongelma, nimittäin $\alpha : \mathbb{I}(a_1, b_1) \to \mathbb{V}$ ja $\beta : \mathbb{I}(a_2, b_2) \to \mathbb{V}$ eivät välttämättä ole saman välin persistenssivektoreita. Näin ollen summan määrittelemiseksi täytyy valita sopiva väli $[a, b)$. Muodollisesti voitaisiin merkitä $(\alpha + \beta)[r] = \alpha[r] + \beta[r]$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$, mutta tämä ei välttämättä määritä persistenssivektoria. Tarkastellaan esimerkkiä $\alpha : \mathbb{I}(0, 3) \to \mathbb{V}$ ja $\beta : \mathbb{I}(1, 4) \to \mathbb{V}$. Tällöin on mahdollista, että

$$(\alpha+\beta)[2] = \alpha[2]+\beta[2] \neq \alpha[2] = \mathbb{V}(0 \leq 2)((\alpha[2]+\beta[2])),$$

mikä on ristiriidassa lemman 2.14 kanssa. Ongelmaksi syntyy siis se, että persistenssivektorit voivat alkaa eri aikaan. Tämä saadaan korjattua katkaisemalla alkuosa pois.

Määritelmä 2.27 (vrt. [11, s. 6-7], [12, s. 588])**.** Olkoot $\mathbb{V}$ persistenssimoduli ja $\alpha, \beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$. Persistenssivektorien α ja β *summa* on persistenssivektori $\alpha \boxplus \beta : \mathbb{I}(b, d) \to \mathbb{V}$, missä $b = \max\{\mathbb{b}(\alpha), \mathbb{b}(\beta)\}, d = \max\{\mathbb{d}(\alpha), \mathbb{d}(\beta)\}$ ja $(\alpha \boxplus \beta)[r] = 1_b(r)(\alpha[r]+\beta[r])$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$.

Lause 2.28. *Persistenssivektorien summa on persistenssivektori. Lisäksi summa $\boxplus$ on vaihdannainen ja liitännäinen.*

Todistus (vrt. [12, s. 588-589]). Olkoot $\alpha, \beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ ja merkitään

$$d = \max\{\, \mathbb{d}(\alpha), \mathbb{d}(\beta) \,\}.$$

Jos $d < \infty$, niin $(\alpha \boxplus \beta)[d] = \alpha[d]+\beta[d] = 0$. Täten lauseen 2.15 nojalla $\alpha \boxplus \beta$ on persistenssivektori. Summan $\boxplus$ vaihdannaisuus ja liitännäisyys seuraa vektorien summan ja maksimifunktion vaihdannaisuudesta ja liitännäisyydestä. □

Huomautus. Persistenssivektorien joukko varustettuna summalla $\boxplus$ ei määritä vektoriavaruutta. Ongelmaksi tulee nolla-alkion valinta. Luonnollisesti sen tulisi olla triviaali persistenssivektori, mutta valinta edellyttää välin $[a, b)$ valintaa. Seuraavassa esimerkissä näemme, mitä luonnollisen nolla-alkion puute aiheuttaa.

Esimerkki 2.29. Oletetaan, että $\alpha : \mathbb{I}(0, 1) \to \mathbb{V}$ ja $\beta : \mathbb{I}(2, 3) \to \mathbb{V}$ ovat persistenssivektoreita. Nyt

$$(\alpha \boxplus \beta)[r] = 1_2(r)(\alpha[r]+\beta[r]) = \beta[r]$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Siis $\alpha \boxplus \beta = \beta$. Vektoriavaruudella tällainen olisi mahdollista vain silloin, kun $\alpha = 0$. Näin ollen persistenssivektoreita ja summaa $\boxplus$ ei voida käsitellä vektoriavaruutena.

Määritelmä 2.30. Olkoot $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ persistenssivektoreita ja $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ kertoimia, joista ainakin yksi on nollasta poikkeava. Näiden *lineaarikombinaatio* on persistenssivektori $\boxplus_{i=1}^n c_i\alpha_i : \mathbb{I}(b, d) \to \mathbb{V}$, missä $b = \max\{\, \mathbb{b}(\alpha_i) \mid c_i \neq 0 \,\}$, $d = \max\{\, \mathbb{d}(\alpha_i) \mid c_i \neq 0 \,\}$ ja

$$\left(\boxplus_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right)[r] := 1_b(r) \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i[r]$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$.

Luonnollisen nolla-alkion puutteen takia emme määrittele lineaarikombinaatiota, jossa kaikki kertoimet ovat nollia.

Huomautus. Olkoot $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ virittävä perhe persistenssivektoreita ja $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ ei-triviaalin persistenssivektorin $\beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ kertoimet perheen $\mathcal{B}$ suhteen. Tällöin

$$\beta \equiv 1_{\mathbb{b}(\beta)} \boxplus_{i=1}^{n} c_i\alpha_i,$$

mutta nämä eivät välttämättä ole yhtäsuuria persistenssivektoreina, nimittäin näiden välien loppupisteet saattavat poiketa toisistaan. Olkoot $\gamma \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ toinen ei-triviaali persistenssivektori ja $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{F}$ sen kertoimet perheen $\mathcal{B}$ suhteen. Jos $\mathbb{b}(\beta) \leq \mathbb{b}(\gamma)$, niin pisteittäinen yhtäsuuruus

$$\beta \boxplus \gamma \equiv 1_{\mathbb{b}(\gamma)} \boxplus_{i=1}^{n} (c_i + d_i)\alpha_i$$

pätee sillä oletuksella, että kertoimet $c_i + d_i \in \mathbb{F}$ eivät kaikki ole nollia. Huomautamme vielä siitä, että yleisesti

$$\left(\boxplus_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right) \boxplus \left(\boxplus_{i=1}^{n} d_i\alpha_i\right) \not\equiv \left(\boxplus_{i=1}^{n} [c_i + d_i]\alpha_i\right).$$

Esimerkiksi, jos $\beta = \alpha_1 \boxplus \alpha_2$ ja $\gamma = -\alpha_2$, missä $\alpha_1 : \mathbb{I}(0, 2) \to \mathbb{V}$ ja $\alpha_2 : \mathbb{I}(1, 2) \to \mathbb{V}$, niin

$$\beta \boxplus \gamma = 1_1\alpha_1 : \mathbb{I}(1, 2) \to \mathbb{V},$$

mutta

$$\boxplus_{i=1}^{2} [c_i + d_i]\alpha_i = \alpha_1 : \mathbb{I}(0, 2) \to \mathbb{V}.$$

Tällaista ongelmaa ei ilmene, kunhan pidämme huolta välien lähtöpisteistä.

2.5 Vapaat ja pisteittäin vapaat perheet

Vapaan ja pisteittäin vapaan persistenssivektorien perheen ero on se, että pisteittäin vapaa perhe voi sisältää triviaaleja persistenssivektoreita. Se voi myös sisältää persistenssivektoreita, joiden välit jatkuvat liian pitkälle. Esimerkiksi, jos $\mathbb{V} = \mathbb{I}(0,1)$ ja $\beta : \mathbb{I}(0,2) \to \mathbb{V}$, missä

$$\beta(r) = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{F}}, & \text{jos } r \in [0,1), \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

niin $\{\beta\}$ on pisteittäin vapaa ja virittää persistenssimodulin $\mathbb{V}$. Se ei kuitenkaan ole viivakoodikanta, sillä $\beta(1) : \mathbb{F} \to 0$ ei ole isomorfismi. Tämä saadaan korjattua poistamalla persistenssivektorin β välistä ylimääräinen osa pois. Toisin sanoen β indusoi injektiivisen persistenssivektorin $\beta' : \mathbb{I}(0,1) \to \mathbb{V}$, missä

$$\beta'(r) = \begin{cases} \beta(r), & \text{jos } r \in [0,1), \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritelmä 2.31. Ei-triviaalin persistenssivektorin $\beta : \mathbb{I}(a,b) \to \mathbb{V}$ *oleellinen loppupiste* on $e(\beta) = \inf(\{\, r \in [a,b] \mid r < \infty \text{ ja } \beta(r) = 0 \,\} \cup \{\infty\})$. Lisäksi persistenssivektoria $\mathrm{ess}(\beta) : \mathbb{I}(a, e(\beta)) \to \mathbb{V}$, missä

$$\mathrm{ess}(\beta)(r) = \begin{cases} \beta(r), & \text{kun } r \in [a, e(\beta)), \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

sanotaan persistenssivektorin β *oleelliseksi osaksi.* Jos $\mathcal{B}$ on perhe persistenssimodulin $\mathbb{V}$ persistenssivektoreita, niin merkitään

$$\mathrm{ess}(\mathcal{B}) = \{\, \mathrm{ess}(\beta) \mid \beta \in \mathcal{B} \text{ on ei-triviaali persistenssivektori} \,\}.$$

Lause 2.32. *Olkoot $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta, $\beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ ja $c_1, \ldots, c_n$ persistenssivektorin β kertoimet viivakoodikannan $\mathcal{B}$ suhteen. Tällöin $\mathrm{ess}(\beta)$ on injektiivinen persistenssivektori ja*

$$e(\beta) = \max\{\, \mathbb{d}(\alpha_i) \mid c_i \neq 0 \,\}.$$

Todistus. Tässä

$$\beta[r] = 1_{\mathbb{b}(\beta)}(r) \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i[r]$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että $\mathbb{b}(\beta) \leq r$. Tällöin $\beta[r] = 0$ täsmälleen silloin, kun $\alpha_i[r] = 0$ kaikilla niillä $i \in \{1, \ldots, n\}$, joilla $c_i \neq 0$. Näin ollen

$$e(\beta) = \max\{\, \mathbb{d}(\alpha_i) \mid c_i \neq 0 \,\}.$$

Lauseen 2.15 nojalla $\mathrm{ess}(\beta)$ on persistenssivektori ja tämän injektiivisyys seuraa siitä, että $\beta[r] \neq 0$ kaikilla $r \in [\mathbb{b}(\beta), e(\beta))$. □

Seuraus 2.33. *Jos $\mathcal{B}$ on pisteittäin vapaa perhe persistenssivektoreita ja se virittää persistenssimodulin $\mathbb{V}$, niin $\mathrm{ess}(\mathcal{B})$ on persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta.*

Todistus. Jos $\beta \in \mathcal{B}$ on ei-triviaali, niin $\mathrm{ess}(\beta)[r] = \beta[r]$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Täten $\langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathrm{ess}(\mathcal{B}) \rangle$ ja väite seuraa lauseesta 2.32. □

2.6 Eliminaatio-operaatio

Vektoriavaruuksien lineaarialgebrassa vektoriperhettä $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ voidaan yksinkertaistaa toistamalla operaatiota

$$v_k \leftarrow \sum_{i=1}^n c_i v_i,$$

missä $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ ja $c_k \neq 0$. Tämä operaatio siis korvaa perheen B vektorin v_k vektorilla $\sum_{i=1}^n c_i v_i$. Tässä aliluvussa tutustumme vastaavaan operaatioon persistenssivektoreilla.

Määritelmä 2.34. Olkoot $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ perhe persistenssivektoreita ja $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ kertoimia. Jos $k \in \{1, \ldots, n\}$, jolla $c_k \neq 0$, niin operaatiota, jossa perheen $\mathcal{B}$ jäsen α_k korvataan persistenssivektorilla $\boxplus_{j=1}^n c_j \alpha_j$ sanotaan persistenssivektorien *eliminaatio-operaatioksi.* Tälle operaatiolle käytetään merkintää

$$\alpha_k \leftarrow \boxplus_{i=1}^n c_i \alpha_i.$$

Koska persistenssivektorit eivät muodosta vektoriavaruutta, tällaisen operaation suhteen täytyy olla varovainen. Itse asiassa osoittautuu, että tällaista operaatiota ei voi mielivaltaisesti soveltaa.

Esimerkki 2.35. Olkoon $\mathcal{B} = \{\alpha_1 : \mathbb{I}(0,1) \to \mathbb{V}, \alpha_2 : \mathbb{I}(2,3) \to \mathbb{V}\}$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta. Tällöin $\alpha_1 \boxplus \alpha_2 = \alpha_2$ ja näin ollen eliminaation $\alpha_1 \leftarrow \alpha_1 \boxplus \alpha_2$ jälkeen $\mathcal{B} = \{\alpha_1 \boxplus \alpha_2 : \mathbb{I}(2,3) \to \mathbb{V}\ \alpha_2 : \mathbb{I}(2,3) \to \mathbb{V}\}$ ei ole vapaa eikä virittävä perhe.

Lauseissa 2.36 ja 2.37 esitämme ehtoja, joiden voimassa ollessa ainakin osittain vältymme esimerkin 2.35 kaltaiselta tilanteelta. Torras-Casasin artikkelin [12] proposition 3.17 todistuksessa hyödynnetään samankaltaisia argumentteja.

Lause 2.36. *Olkoot $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ virittävä perhe persistenssivektoreita ja $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ kertoimia, joista ainakin yksi on nollasta poikkeava. Valitaan sellainen $k \in \{1, \ldots, n\}$, että*

$$c_k \neq 0 \ \text{ ja } \mathbb{b}(\alpha_k) = \max\{\, \mathbb{b}(\alpha_i) \mid c_i \neq 0 \,\}. \tag{2.3}$$

Määritellään $\mathcal{B}' = \{\alpha_i'\}_{i=1}^n$, missä

$$\alpha_i' = \begin{cases} \alpha_i, & \text{jos } i \neq k, \\ \boxplus_{j=1}^n c_j \alpha_j, & \text{jos } i = k. \end{cases}$$

Tällöin $\mathcal{B}'$ virittää persistenssimodulin $\mathbb{V}$.

Todistus. Osoitetaan, että $\mathcal{B}''[r]$ virittää vektoriavaruuden $\mathbb{V}(r)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Jos $r < \mathbb{b}(\alpha_k)$, niin $\mathcal{B}'[r] = \mathcal{B}''[r]$. Jos taas $\mathbb{d}(\alpha_k) \leq r$, niin $\mathcal{B}'[r] \subseteq \mathcal{B}''[r]$. Täten $\mathbb{V}(r) = \langle \mathcal{B}'[r] \rangle$ kaikilla $r \notin [\mathbb{b}(\alpha_k), \mathbb{d}(\alpha_k))$. Oletetaan sitten, että $\mathbb{b}(\alpha_k) \leq r < \mathbb{d}(\alpha_k)$. Tällöin $\mathcal{B}''[r]$ saadaan tekemällä perinteinen lineaarialgebrasta tuttu operaatio

$$\alpha_k[r] \quad \leftarrow \sum_{\alpha_j[r] \in \mathcal{B}'[r]} c_j \alpha_j[r].$$

Koska tämä operaatio säilyttää virittämisen, väite on osoitettu. □

Huomautus. Koska persistenssivektorien perheet on järjestetty standardijärjestyksen mukaan, erikoistapaus lauseelle 2.36 on tapaus

$$k = \max\{\, i \in \{1, \ldots, n\} \mid c_i \neq 0 \,\}.$$

Toisaalta ehdosta (2.3) seuraa $\mathbb{b}(\alpha_i) = \mathbb{b}(\alpha'_i)$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja näin ollen $\mathcal{B}'$ on myös järjestetty standardijärjestyksen mukaan.

Lause 2.37. *Olkoot $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ vapaa perhe persistenssivektoreita ja $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ kertoimia, joista ainakin yksi on nollasta poikkeava. Valitaan sellainen $k \in \{1, \ldots, n\}$, että*

$$c_k \neq 0 \;\; \textit{ja} \;\; \mathbb{d}(\alpha_k) = \max\{\, \mathbb{d}(\alpha_i) \mid c_i \neq 0 \,\} \tag{2.4}$$

Määritellään $\mathcal{B}' = \{\alpha'_i\}_{i=1}^n$, missä

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i, & \textit{jos } i \neq k, \\ \boxplus_{j=1}^n c_j \alpha_j, & \textit{jos } i = k. \end{cases}$$

Tällöin $\mathcal{B}'$ on vapaa.

Todistus. Todetaan aluksi, että $\mathcal{B}'$ on perhe injektiivisiä persistenssivektoreita. Selvästi α'_i on injektiivinen, kun $i \neq k$. Merkitään $b = \max\{\, \mathbb{b}(\alpha_i) \mid c_i \neq 0 \,\}$ ja $d = \max\{\, \mathbb{d}(\alpha_i) \mid c_i \neq 0 \,\}$. Jos $r \in [b, d)$, niin $\alpha_k[r] \neq 0$. Nyt perheen $\mathcal{B}$ vapaudesta seuraa, että

$$\alpha'_k[r] = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i[r] \neq 0.$$

Täten α'_k on injektiivinen.

Osoitetaan sitten, että $\mathcal{B}'$ on pisteittäin vapaa. Toisin sanoen osoitetaan, että $\mathcal{B}''[r]$ on lineaarisesti riippumaton kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Jos $r < b$, niin $\mathcal{B}''[r] \subseteq \mathcal{B}'[r]$. Jos taas $d \leq r$, niin $\mathcal{B}''[r] = \mathcal{B}'[r]$. Täten näissä tapauksissa $\mathcal{B}''[r]$ on lineaarisesti riippumaton. Oletetaan vielä, että $r \in [b, d)$. Tällöin $\mathcal{B}''[r]$ saadaan tekemällä operaatio

$$\alpha_k[r] \quad \leftarrow \sum_{\alpha_j[r] \in \mathcal{B}'[r]} c_j \alpha_j[r].$$

Koska tämä operaatio säilyttää lineaarisen riippumattomuuden, $\mathcal{B}''[r]$ on lineaarisesti riippumaton ja väite on osoitettu. □

Esimerkissä 2.35 havaitsimme, että jos ehdot (2.3) ja (2.4) eivät ole voimassa, eliminaatio-operaatiossa saattaa hävitä informaatiota. Yleisemmin, jos $\mathcal{B}$ on persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta ja teemme eliminaatio-operaation, joka rikkoo ainakin toisen näistä ehdoista, $\mathcal{B}$ ei enää ole viivakoodikanta. Tämän näemme siitä, että korvaavan persistenssivektorin väli on eri kuin korvatun persistenssivektorin. Tämä tarkoittaa sitä, että jotta pystyisimme käyttämään eliminaatio-operaatiota riittävän joustavasti ja lisäksi eliminaatio-operaatio säilyttäisi aina kaiken informaation, meidän pitäisi pystyä järjestämään $\mathcal{B}$ samanaikaisesti sekä standardijärjestyksen että loppupisteiden määräämän järjestyksen mukaan. Tämä ei ole realistinen vaatimus, joten on järkevämpää odottaa, että eliminaatiossa saattaa hävitä informaatiota. Näin ollen jokainen eliminaatio-operaatio täytyy tehdä harkiten.

3 Laskennallisia menetelmiä

Tässä luvussa esittelemme algoritmit persistenssimodulien välisten morfismien kuvien ja ytimien sekä persistenssimodulien tekijämodulien viivakoodikantojen laskemiseen. Merkittävässä roolissa näissä algoritmeissa on luvussa 2 esitelty persistenssivektorien eliminaatio-operaatio. Algoritmit morfismin kuvan ja ytimen laskemiseen perustuvat Torras-Casasin kehittämiin *box_gauss_reduced*- ja *image_kernel*-algoritmeihin. Algoritmi tekijämodulin laskemiseen perustuu samanlaiseen ajatukseen kuin Torras-Casasin artikkelin [12] sivuilla 596-597 käsitelty algoritmi.

3.1 Eroja vektoriavaruuksien lineaarialgebraan

Perinteisessä lineaarialgebrassa lineaarikuvausten kuvien ja ytimien kannat saadaan kätevästi laskettua Gaussin eliminaatiolla. Tekijämodulien kanta taas saadaan laskettua laajentamalla aliavaruuden kanta koko avaruuden kannaksi. Persistenssimodulien tapauksessa tilanne ei ole näin yksinkertainen. Esimerkiksi luvun 2 lopussa pohdimme persistenssivektorien eliminaatio-operaatioon liittyviä haasteita, joita ei ilmene vektoriavaruuksien lineaarialgebrassa. Toinen merkittävä ero on alimodulien komplementtien puute. Toisin sanoen, jos $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$, niin välttämättä ei ole olemassa persistenssimodulia $\mathbb{W}$, jolla $\mathbb{U} \oplus \mathbb{W} \cong \mathbb{V}$. Komplementin olemassaolo helpottaisi huomattavasti tekijämodulin laskemista, nimittäin tällöin $\mathbb{V}/\mathbb{U} \cong \mathbb{W}$.

Esimerkki 3.1. Olkoon $\mathbb{V} = \mathbb{I}(0,2)$ ja $\mathbb{U} = \mathbb{I}(1,2) \subseteq \mathbb{V}$. Jotta $\mathbb{U} \oplus \mathbb{W} = \mathbb{V}$ pätisi edes pisteittäin, niin

$$\mathbb{W}(r) \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{jos } r \in [0,1), \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Toisaalta $\mathbb{W}(r \leq s) = \mathbb{V}(r \leq s)_{|\mathbb{W}(r)}$, jolloin $\mathbb{W} = \mathbb{I}(0,1)$. Mutta tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä lemman 2.13 nojalla ei ole olemassa ei-triviaalia morfismia $\mathbb{I}(0,1) \to \mathbb{I}(0,2)$. Täten alimodulilla $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ ei ole komplementtia.

3.2 Viivakoodikannan laskeminen virittävästä perheestä

Tässä aliluvussa esittelemme algoritmin, joka muuttaa persistenssimodulin virittävän perheen pisteittäin vapaaksi virittäväksi perheeksi. Algoritmin toimivuus perustuu johtavien komponenttien ominaisuuksiin, joita käsittelemme ennen varsinaista algoritmin esittelyä. Tämä algoritmi toimii samalla periaatteella kuin Torras-Casasin *box_gauss_reduced*-algoritmi (ks. [12, s. 594]).

Määritelmä 3.2. Olkoot $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta, $\beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ ei-triviaali persistenssivektori ja $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ persistenssivektorin β kertoimet viivakoodikannan $\mathcal{B}$ suhteen. Jos $d = \max\{\, \mathbb{d}(\alpha_i) \mid c_i \neq 0 \,\}$, niin persistenssivektorin β *johtava komponentti* viivakoodikannan $\mathcal{B}$ suhteen on se $\alpha_k \in \mathcal{B}$, jolla

$$k = \max\{\, i \in \{1, \dots, n\} \mid c_i \neq 0 \text{ ja } \mathbb{d}(\alpha_i) = d \,\}.$$

Toisin sanoen k on suurin luku joukossa $\{1, \dots, n\}$, jolla $\mathbb{d}(\alpha_i) \leq \mathbb{d}(\alpha_k)$ kaikilla indekseillä $i \in \{1, \dots, n\}$, joilla $c_i \neq 0$.

Lause 3.3. *Olkoot* $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ *persistenssimodulin* $\mathbb{V}$ *viivakoodikanta ja* $\mathcal{A} = \{\beta_j\}_{j=1}^n$ *perhe persistenssimodulin* $\mathbb{V}$ *ei-triviaaleja persistenssivektoreita, joilla on eri johtavat komponentit viivakoodikannan* $\mathcal{B}$ *suhteen. Tällöin* $\mathcal{A}$ *on pisteittäin vapaa perhe persistenssivektoreita.*

Todistus (vrt. [12, s. 593]). Olkoon $r \in \mathbb{R}$ ja osoitetaan, että vektorien perhe $\mathcal{A}^r[r]$ on lineaarisesti riippumaton. Riittää osoittaa, että jos $\emptyset \neq \{\beta_{j_l}\}_{l=1}^k \subseteq \mathcal{A}^r$ ja $0 \neq c_{j_l} \in \mathbb{F}$ kaikilla $l \in \{1, \dots, k\}$, niin

$$\sum_{l=1}^{k} c_{j_l}\beta_{j_l}[r] \neq 0. \tag{3.1}$$

Olkoot $\alpha_{p(j_l)}$ persistenssivektorin β_{j_l} johtava komponentti ja $d_{1,j_l}, \dots, d_{n,j_l} \in \mathbb{F}$ persistenssivektorin β_{j_l} kertoimet viivakoodikannan $\mathcal{B}$ suhteen kaikilla $l \in \{1, \dots, k\}$. Olkoon

$$j_s = \max\{\, j_l \in \{j_1, \dots, j_k\} \mid \mathbb{d}(\alpha_{p(j_l)}) = \max\{\mathbb{d}(\alpha_{j_1}), \dots, \mathbb{d}(\alpha_{j_k})\} \,\}.$$

Tällöin $d_{p(j_s),j_l} = 0$ kaikilla $j_l \neq j_s$ ja $d_{p(j_s),j_s} \neq 0$, nimittäin muulloin α_{j_s} olisi persistenssivektorin β_{j_l} johtava komponentti jollain $j_l \neq j_s$. Täten

$$\sum_{l=1}^{k} c_{j_l}\beta_{j_l}[r] = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i[r],$$

missä $b_{p(j_s)} = d_{p(j_s),j_s} \cdot c_{j_s} \neq 0$. Koska $\beta_{j_s}[r] \neq 0$, niin lauseen 2.32 nojalla

$$\mathbb{d}(\alpha_{p(j_s)}) = e(\beta_{j_s}) < r.$$

Näin ollen $\alpha_{p(j_s)}[r] \neq 0$ ja (3.1) pätee. □

Lemma 3.4. *Olkoot* $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ *persistenssimodulin* $\mathbb{V}$ *viivakoodikanta ja* $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ *niin, että* β_1 *on ei-triviaali ja* $\mathbb{b}(\beta_1) \leq \mathbb{b}(\beta_2)$. *Olkoot* $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ *persistenssivektorin* β_1 *kertoimet,* $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{F}$ *persistenssivektorin* β_2 *kertoimet ja* $\alpha_k \in \mathcal{B}$ *persistenssivektorin* β_1 *johtava komponentti viivakoodikannan* $\mathcal{B}$ *suhteen. Tällöin persistenssivektorin* $\beta = \beta_2 \boxplus (-d_k \cdot c_k^{-1}\beta_1)$ *termin* α_k *kerroin viivakoodikannan* $\mathcal{B}$ *suhteen on* 0.

Todistus (vrt. [12, s. 595]). Tässä $\mathbb{b}(\beta) = \mathbb{b}(\beta_2)$ ja

$$\begin{aligned}
\beta[\mathbb{b}(\beta)] &= \sum_{\alpha_i[\mathbb{b}[\beta]]\neq 0} (d_i - d_k \cdot c_k^{-1} \cdot c_i) \cdot \alpha_i[\mathbb{b}(\beta)] \\
&= \left(\sum_{\substack{i\neq k \\ \alpha_i[\mathbb{b}[\beta]]\neq 0}} (d_i - d_k \cdot c_k^{-1} \cdot c_i)\alpha_i[\mathbb{b}(\beta)] \right) + (d_k - d_k \cdot c_k^{-1} \cdot c_k) \cdot \alpha_k[\mathbb{b}(\beta)] \\
&= \sum_{\substack{i\neq k \\ \alpha_i[\mathbb{b}[\beta]]\neq 0}} (d_i - d_k \cdot c_k^{-1} \cdot c_i) \cdot \alpha_i[\mathbb{b}(\beta)]
\end{aligned}$$

Täten väite on osoitettu. □

Algoritmi 3.5. Algoritmi saa syötteekseen persistenssimodulin $\mathbb{V}$, sen viivakoodikannan $\mathcal{B} = \{\alpha_j\}_{j=1}^m$ sekä persistenssivektorien perheen $\mathcal{A} = \{\beta_i\}_{i=1}^n$. Aloitetaan algoritmi menemällä kohtaan (1).

(1) Aluksi asetetaan $k = 1$ ja siirrytään kohtaan (2).

(2) Jos $k = n$, niin palautetaan $\mathcal{A}$ ja päätetään algoritmi. Muulloin siirrytään kohtaan (3).

(3) Jos β_k on triviaali persistenssivektori, niin siirrytään kohtaan (5). Muulloin siirrytään kohtaan (4).

(4) Olkoot $\alpha_{p(k)}$ persistenssivektorin β_k johtava komponentti ja $c_{i1}, \ldots, c_{im} \in \mathbb{F}$ persistenssivektorin β_i kertoimet viivakoodikannan $\mathcal{B}$ suhteen kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tehdään eliminaatio-operaatio

$$\beta_i \leftarrow \beta_i \boxplus (-c_{i,p(k)} \cdot c_{k,p(k)}^{-1} \beta_k)$$

kaikilla $k < i \leq n$. Näiden jälkeen siirrytään kohtaan (5).

(5) Asetetaan $k \leftarrow k + 1$ ja palataan kohtaan (2).

Algoritmissa 3.5 on siis n kierrosta. Jos muuttuja k indikoi monennella kierroksella olemme, niin meillä on kaksi tapausta. Joko β_k on triviaali, jolloin ei tehdä mitään, tai se on ei-triviaali ja teemme sopivat eliminaatiot.

Lause 3.6. *Olkoot $\mathbb{V}, \mathcal{B} = \{\alpha_j\}_{i=1}^m$ ja $\mathcal{A} = \{\beta_i\}_{i=1}^n$ algoritmin 3.5 syötteet ja $\widetilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\beta}_i\}_{i=1}^n$ algoritmin palauttama lopputulos. Merkitään $\mathbb{U} = \langle \mathcal{A} \rangle$. Tällöin $\widetilde{\mathcal{A}}$ on pisteittäin vapaa persistenssimodulin $\mathbb{U}$ virittävä perhe persistenssivektoreita. Lisäksi on olemassa kertoimet $c_{ij} \in \mathbb{F}$, joilla $c_{ii} = 1_{\mathbb{F}}$ ja*

$$\tilde{\beta}_i \equiv \boxplus_{j=1}^{i} c_{ij}\beta_j$$

kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Todistus (vrt. [12, s. 594-595]). Koska perhe $\mathcal{A}$ on järjestetty standardijärjestyksen mukaan, niin lauseen 2.36 ja algoritmin 3.5 kohdan (4) nojalla $\widetilde{\mathcal{A}}$ virittää persistenssimodulin $\mathbb{U}$. Käyttämällä lemmaa 3.4 toistuvasti voidaan suoraviivaisella induktiolla osoittaa, että perheen $\widetilde{\mathcal{A}}$ ei-triviaaleilla persistenssivektoreilla on eri johtavat termit viivakoodikannan $\mathcal{B}$ suhteen. Täten lauseen 3.3 nojalla perheen $\widetilde{\mathcal{A}}$ ei-triviaalit persistenssivektorit muodostavat pisteittäin vapaan perheen. Väitteen pisteittäiset yhtäsuuruudet seuraavat algoritmin 3.5 kohdasta (4) ja standardijärjestyksestä. □

3.3 Morfismin kuvan ja ytimen laskeminen

Seuraavaksi käsittelemme Torras-Casasin *image_kernel*-algoritmia. Tämän toimivuuden osoittamiseksi käymme aluksi läpi aputuloksia.

Kiinnitetään persistenssimodulit $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ ja morfismi $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Viivakoodikannoille käytetään merkintää $\mathcal{B}^{\mathbb{V}} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ ja $\mathcal{B}^{\mathbb{W}} = \{\beta_j\}_{j=1}^m$. Nämä merkinnät säilyvät tämän aliluvun ajan.

Lemma 3.7. *On olemassa kertoimet $c_{ij} \in \mathbb{F}$, joilla $c_{ii} = 1_{\mathbb{F}}$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$ ja persistenssivektorien perhe*

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \left\{ c_{11} f(\alpha_1), (c_{22} f(\alpha_2)) \boxplus (c_{21} f(\alpha_1)), \dots, \bigboxplus_{i=1}^{n} c_{ni} f(\alpha_i) \right\},$$

on pisteittäin vapaa ja virittää kuvan $\operatorname{im}(f)$*.*

Todistus (vrt. [12, s. 594-595]). Annetaan algoritmille 3.5 syötteeksi $\mathbb{W}, \mathcal{B}^{\mathbb{W}}$ ja $\mathcal{A} = \{f(\alpha_i)\}_{i=1}^n$ ja olkoon $\mathcal{A}_0 = \{\gamma_i\}_{i=1}^n$ algoritmin palauttama lopputulos. Lauseen 3.6 nojalla $\mathcal{A}_0$ on pisteittäin vapaa, virittää kuvan $\operatorname{im}(f)$ ja on olemassa kertoimet $c_{ij} \in \mathbb{F}$, joilla $c_{ii} = 1_{\mathbb{F}}$ ja

$$\gamma_i \equiv \bigboxplus_{j=1}^{i} c_{ij} f(\alpha_j)$$

kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Näin ollen perhe

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \left\{ c_{11} f(\alpha_1), (c_{22} f(\alpha_2)) \boxplus (c_{21} f(\alpha_1)), \dots, \bigboxplus_{i=1}^{n} c_{ni} f(\alpha_i) \right\}$$

on pisteittäin vapaa ja virittää kuvan $\operatorname{im}(f)$. □

Seuraavaksi muodostetaan ytimen $\ker(f)$ virittävä perhe. Aloitetaan kiinnittämällä merkintöjä. Olkoot kertoimet $c_{ij} \in \mathbb{F}$ samat kuin lemmassa 3.7 ja tarkastellaan toista persistenssimodulin $\mathbb{V}$ virittävää perhettä

$$\widetilde{\mathcal{B}}^{\mathbb{V}} = \left\{ c_{11}\alpha_1, (c_{22}\alpha_2) \boxplus (c_{21}\alpha_1), \dots, \bigboxplus_{j=1}^{n} c_{nj}\alpha_j \right\} = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n\}.$$

Koska $\widetilde{\mathcal{B}}^{\mathbb{V}}$ saadaan toteuttamalla samat eliminaatio-operaatiot kuin algoritmissa 3.5, niin lauseen 2.36 nojalla $\widetilde{\mathcal{B}}^{\mathbb{V}}$ todella virittää persistenssimodulin $\mathbb{V}$. Olkoot $i_1, \ldots, i_k$ ne indeksit $i \in \{1, \ldots, n\}$, joilla $f(\tilde{\alpha}_i)$ on triviaali persistenssivektori ja $i_{k+1}, \ldots, i_n$ loput indeksit. Merkitään $d_{i_l} = e(f(\tilde{\alpha}_{i_l}))$ kaikilla $l \in \{k+1, \ldots, n\}$.

Lemma 3.8. *Olkoon*

$$\mathcal{K} = \{\tilde{\alpha}_{i_1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{i_k}\} \cup \{1_{d_{i_l}} \tilde{\alpha}_{i_l} \mid l \in \{k+1, \ldots, n\} \text{ ja } d_{i_j} < e(\tilde{\alpha}_{i_l})\}.$$

Annetaan algoritmille 3.5 syötteeksi $\mathbb{V}$, $\mathcal{B}^{\mathbb{V}}$ *ja* $\mathcal{K}$ *ja olkoon* $\widetilde{\mathcal{K}}$ *algoritmin palaauttama lopputulos. Tällöin* $\widetilde{\mathcal{K}}$ *on pisteittäin vapaa ja virittää ytimen* $\ker(f)$.

Todistus (vrt. [12, s. 594-595]). Riittää osoittaa, että $\mathcal{K}$ virittää ytimen $\ker(f)$. Olkoon $r \in \mathbb{R}$ ja osoitetaan, että

$$K_r = \{\tilde{\alpha}_{i_1}[r], \ldots, \tilde{\alpha}_{i_k}[r]\} \cup \{\tilde{\alpha}_{i_l}[r] \mid l \in \{k+1, \ldots, n\} \text{ ja } f(\tilde{\alpha}_{i_l})[r] = 0\}$$

virittää vektoriavaruuden $\ker(f)(r)$. Koska $K_r \subseteq \mathcal{K}^r[r] \cup \{0\}$, niin väite on tällöin osoitettu.

Merkitään

$$A_r = \{\, \tilde{\alpha}_{i_l}[r] \mid l \in \{k+1, \ldots, n\} \text{ ja } f(\tilde{\alpha}_{i_l})[r] \neq 0 \,\}.$$

Lemman 3.7 nojalla vektorien perhe $\{\, f(\tilde{\alpha}_{i_l})[r] \mid \tilde{\alpha}_{i_l}[r] \in A_r\}$ on vektoriavaruuden $\mathrm{im}(f)(r)$ kanta. Olkoon $x \in \ker(f)(r)$. Koska $\widetilde{B}^{\mathbb{V}}$ virittää persistenssimodulin $\mathbb{V}$, niin

$$x = \sum_{\tilde{\alpha}_{i_l}[r] \in K_r} c_{i_l} \tilde{\alpha}_{i_l}[r] + \sum_{\tilde{\alpha}_{i_l}[r] \in A_r} c_{i_l} \tilde{\alpha}_{i_l}[r]$$

sopivilla kertoimilla $c_{i_l} \in \mathbb{F}$. Tällöin

$$f(r)(x) = \sum_{\tilde{\alpha}_{i_l}[r] \in A_r} c_{i_l} f(\tilde{\alpha}_{i_l})[r] = 0.$$

Täten $c_{i_l} = 0$ kaikilla $l \in \{k+1, \ldots n\}$, joilla $\tilde{\alpha}_{i_l}[r] \in A_r$. Näin ollen

$$x = \sum_{\tilde{\alpha}_{i_l}[r] \in K_r} c_{i_l} \tilde{\alpha}_{i_l}[r] \in \langle K_r \rangle.$$

□

Algoritmi 3.9 (*image_kernel*)**.** Algoritmi saa syötteekseen persistenssimodulit $\mathbb{V}$ ja $\mathbb{W}$, näiden viivakoodikannat $\mathcal{B}^{\mathbb{V}}$ ja $\mathcal{B}^{\mathbb{W}}$ sekä morfismin $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Algoritmi laskee persistenssivektorien perheet $\widetilde{\mathcal{A}}$ ja $\widetilde{\mathcal{K}}$ samoin kuin lemmoissa 3.7 ja 3.8, minkä jälkeen palauttaa perheet $\mathrm{ess}(\widetilde{\mathcal{A}})$ ja $\mathrm{ess}(\widetilde{\mathcal{K}})$.

Lause 3.10. *Olkoot* $\mathbb{V}, \mathbb{W}, f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}, \mathcal{B}^{\mathbb{V}}$ *ja* $\mathcal{B}^{\mathbb{W}}$ *algoritmin 3.9 syötteet. Tällöin algoritmi palauttaa persistenssimodulien* $\mathrm{im}(f)$ *ja* $\ker(f)$ *viivakoodikannat.*

Todistus (vrt. [12, s. 595]). Väite seuraa lauseesta 3.6, seurauksesta 2.33 sekä lemmoista 3.7 ja 3.8. □

Esimerkki 3.11. Tässä esimerkissä $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Olkoot

$$\mathbb{V} = \mathbb{I}(3,9) \oplus \mathbb{I}(5,12) \oplus \mathbb{I}(6,10) \text{ ja } \mathbb{W} = \mathbb{I}(0,8) \oplus \mathbb{I}(2,10)$$

sekä $\mathcal{B}^{\mathbb{V}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ja $\mathcal{B}^{\mathbb{W}} = \{\beta_1, \beta_2\}$ viivakoodikantoja. Määritellään morfismi $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, jonka määrittävät ehdot

(1) $f(\alpha_1) = 1_3\beta_1$,

(2) $f(\alpha_2) = 1_5(\beta_1 \boxplus \beta_2)$,

(3) $f(\alpha_3) = 1_6(\beta_1 \boxplus (-\beta_2))$.

Tässä esimerkissä lasketaan morfismin f ytimen ja kuvan viivakoodikannat käyttämällä algoritmia 3.9.

Soveltamalla algoritmia 3.5 perheeseen $\mathcal{A} = \{f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3)\}$ saadaan perhe $\widetilde{\mathcal{A}} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, jonka jäsenet ovat

(1) $\gamma_1 = f(\alpha_1)$,

(2) $\gamma_2 = f(\alpha_2) \boxplus (-f(\alpha_1))$,

(3) $\gamma_3 = f(\alpha_3) \boxplus f(\alpha_2) \boxplus (-2 \cdot f(\alpha_1)) = 0$.

Tässä $\mathrm{ess}(\gamma_1) = 1_3\beta_1$ ja $\mathrm{ess}(\gamma_2) = 1_5\beta_2$ ja näin ollen kuvan $\mathrm{im}(f)$ viivakoodikannaksi saadaan $\mathrm{ess}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \{1_3\beta_1, 1_5\beta_2\}$.

Seuraavaksi lasketaan ytimen $\ker(f)$ viivakoodikanta. Tehdään aluksi vastaavat eliminaatio-operaatiot ja muodostetaan persistenssivektorien perhe

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{\alpha_1, \alpha_2 \boxplus (-\alpha_1), \alpha_3 \boxplus \alpha_2 \boxplus (-2 \cdot \alpha_1)\}.$$

Koska $e(\gamma_1) = 8$ ja $e(\gamma_2) = 10$, niin ytimen $\ker(f)$ virittäväksi perheeksi saadaan

$$\mathcal{K} = \{\alpha_3 \boxplus \alpha_2 \boxplus (-2 \cdot \alpha_1), 1_8\alpha_1, 1_{10}(\alpha_2 \boxplus (-\alpha_1))\}.$$

Soveltamalla algoritmia 3.5 perheeseen $\mathcal{K}$ saadaan lopulta viivakoodikannat

$$\mathrm{ess}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \{1_3 \cdot \beta_1, 1_5 \cdot \beta_2\}$$

ja

$$\mathrm{ess}(\widetilde{\mathcal{K}}) = \{\alpha_3 \boxplus \alpha_2 \boxplus (-2 \cdot \alpha_1), 1_8 \cdot \alpha_1, 1_{10} \cdot (-\alpha_3)\}.$$

3.4 Tekijämodulin laskeminen

Komplementin puute heijastuu vahvasti persistenssimodulien tekijämodulien laskemisen hankaluuteen. Käytännössä ainoa triviaali tapaus on se, kun molemmat persistenssimodulit $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ ovat syklisiä. Muut tapaukset ovat huomattavasti haastavampia, vaikka tietäisimme näiden viivakoodikannat. Nämä haasteet ilmenevät esimerkissä 3.13.

Tässä aliluvussa esittelemme algoritmin tekijämodulin $\mathbb{V}/\langle\beta\rangle$ viivakoodikannan laskemiseen. Osoitamme sen toimivuuden ja lopuksi esitämme, kuinka tätä algoritmia toistamalla saamme laskettua tekijämodulin viivakoodikannan yleisessä tapauksessa. Tämä algoritmi perustuu samanlaiseen ideaan kuin Torras-Casasin algoritmi tekijämodulin laskemiseen (ks. [12, s. 596-597]). Yhtenä erona mainitsemme sen, että tämän tutkielman algoritmin tekemät eliminaatio-operaatiot kunnioittavat standardijärjestystä.

Esimerkki 3.12. Olkoot $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ persistenssimoduleja sekä $\mathcal{B}^{\mathbb{U}} = \{\beta : \mathbb{I}(1,2) \to \mathbb{U}\}$ ja $\mathcal{B}^{\mathbb{V}} = \{\beta : \mathbb{I}(0,2) \to \mathbb{V}\}$ näiden viivakoodikantoja. Tällöin $\beta = 1_1(c\alpha)$, missä $c \neq 0$ ja näin ollen $\mathbb{V}/\mathbb{U} \cong \mathbb{I}(0,1)$.

Esimerkki 3.13. Tarkastellaan tilannetta, jossa $\mathcal{B}^{\mathbb{U}} = \{\beta : \mathbb{I}(2,4) \to \mathbb{U}\}$ ja $\mathcal{B}^{\mathbb{V}} = \{\alpha_1 : \mathbb{I}(0,4) \to \mathbb{V}, \alpha_2 : \mathbb{I}(1,3) \to \mathbb{V}\}$ ovat viivakoodikantoja. Merkitään $\beta = 1_2(c_1\alpha_1 \boxplus c_2\alpha_2)$. Todetaan seuraavaksi, että tekijämoduli $\mathbb{V}/\mathbb{U}$ riippuu kertoimesta $c_2 \in \mathbb{F}$. Päätepisteitä tarkastelemalla huomataan, että $c_1 \neq 0$.

(1) Jos $c_2 = 0$, niin $\beta = 1_2(c_1\alpha_1)$, missä $c_1 \neq 0$. Täten $\mathbb{V}/\mathbb{U} \cong \mathbb{I}(0,2) \oplus \mathbb{I}(1,3)$.

(2) Oletetaan sitten, että $c_2 \neq 0$. Osoitetaan, että $\mathbb{V}/\mathbb{U} \cong \mathbb{I}(0,3) \oplus \mathbb{I}(1,2)$. Olkoot $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ persistenssimodulin $\mathbb{I}(0,3) \oplus \mathbb{I}(1,2)$ viivakoodikanta ja $\pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}/\mathbb{U}$ projektio. Merkitään $\tilde{\alpha}_i = \pi(\alpha_i)$. Tarkastellaan morfismia $f : \mathbb{I}(0,3) \oplus \mathbb{I}(1,2) \to \mathbb{V}/\mathbb{U}$, jonka määrittävät ehdot $f(\gamma_1) = 1_0(c_1\tilde{\alpha}_1)$ ja $f(\gamma_2) = 1_1(c_1\tilde{\alpha}_1 \boxplus c_2\tilde{\alpha}_2)$. Tässä

$$f(\gamma_2)[2] = (c_1\tilde{\alpha}_1 \boxplus c_2\tilde{\alpha}_2)[2] = \pi(\beta)[2] = 0$$

ja

$$f(\gamma_1)[3] = c_1\tilde{\alpha}_1[3] = (c_1\tilde{\alpha}_1 \boxplus c_2\tilde{\alpha}_2)[3] = \pi(\beta)[3] = 0.$$

Täten lauseen 2.23 nojalla ehdot todella määrittävät morfismin f. Koska f on surjektiivinen, niin laskemalla pisteittäiset dimensiot nähdään, että f on isomorfismi. Vaihtoehtoisesti voidaan myös muodostaa lyhyt eksakti jono

$$0 \longrightarrow \langle\beta\rangle \longrightarrow \mathbb{V} \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{I}(0,3) \oplus \mathbb{I}(1,2) \longrightarrow 0,$$

missä

$$g(\alpha_1) = c_1^{-1}\gamma_1 \;\text{ ja }\; g(\alpha_2) = c_2^{-1}(\gamma_2 \boxplus -\gamma_1).$$

Huomaa, että tässä $g = f^{-1} \circ \pi$.

Karkeasti ottaen tekijämodulin $\mathbb{V}/\langle\beta\rangle$ viivakoodikanta saadaan lyhentämällä persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikannan välien pituuksia persistenssivektorin β välin pituudella. Esimerkin 3.13 ensimmäisessä tapauksessa vain toinen väli lyheni, kun taas jälkimmäisessä molemmat lyhenivät. Kuitenkin molemmissa tapauksissa viivakoodikannan välit lyhenivät yhteensä yhtä paljon.

Algoritmi 3.14. Algoritmi saa syötteeksi persistenssimodulin $\mathbb{V}$, sen viivakoodikannan $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ ja injektiivisen persistenssivektorin $\beta : \mathbb{I}(a, b) \to \mathbb{V}$. Olkoot $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ persistenssivektorin β kertoimet viivakoodikannan $\mathcal{B}$ suhteen ja $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$ ne indeksit $i \in \{1, \ldots, n\}$, joilla $c_i \neq 0$. Aloitetaan algoritmi menemällä kohtaan (1).

(1) Asetetaan $j = 1, M(1) = i_m$ ja $I_1 = \{i_1, \ldots, i_m\}$. Tämän jälkeen siirrytään kohtaan (2).

(2) Jos $\mathbb{d}(\alpha_{M(j)}) = \mathbb{d}(\beta)$, niin asetetaan $k = j$ ja palautetaan luku k, indeksijoukko $M = \{M(1), \ldots, M(k)\}$ ja indeksijoukot $I_1, \ldots, I_k$, minkä jälkeen päätetään algoritmi. Jos $\mathbb{d}(\alpha_{M(j)}) \neq \mathbb{d}(\beta)$, niin siirrytään kohtaan (3).

(3) Asetetaan
$$I_{j+1} = \{i_s \in I_1 \mid \mathbb{d}(\alpha_{M(j)}) < \mathbb{d}(\alpha_{i_s})\}$$
ja $M(j + 1) = \max I_{j+1}$. Tämän jälkeen asetetaan $j \leftarrow j + 1$ ja palataan kohtaan (2).

Tämän luvun loppuun asti $\mathcal{B} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ on persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta, $\beta \in \mathrm{PVect}(\mathbb{V})$ on injektiivinen persistenssivektori, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ ovat persistenssivektorin β kertoimet viivakoodikannan $\mathcal{B}$ suhteen ja $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$ ovat ne indeksit $i \in \{1, \ldots, n\}$, joilla $c_i \neq 0$. Projektiolle käytetään merkintää $\pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}/\langle\beta\rangle$.

Oletetaan, että algoritmi on kohdassa (2) ja $\mathbb{d}(\alpha_{M(j)}) < \mathbb{d}(\beta)$. Tällöin lauseen 2.32 nojalla $I_{j+1} \neq \emptyset$. Lisäksi nähdään, että $\mathbb{d}(\alpha_{M(j)}) < \mathbb{d}(\alpha_{M(j+1)})$ ja täten algoritmi päättyy viimeistään, kun $k = n$.

Annetaan algoritmille 3.14 syötteeksi $\mathbb{V}, \mathcal{B}$ ja β ja olkoot k, M ja $I_1, \ldots, I_k$ algoritmin palauttamat lopputulokset. Nämä merkinnät säilyvät luvun loppuun asti.

Seuraus 3.15. *Algoritmin palauttamilla lopputuloksilla pätee*
$$\mathbb{b}(\beta) < \mathbb{d}(\alpha_{M(1)}) < \cdots < \mathbb{d}(\alpha_{M(k)}) = \mathbb{d}(\beta) \leq \infty$$
ja $I_{M(1)} \supseteq \cdots \supseteq I_{M(k)}$.

Todistus. Seuraa algoritmin 3.14 kohdista (2)-(3). □

Merkitään
$$\tilde{b}_{M(j)} = \begin{cases} \mathbb{b}(\beta), & \text{jos } j = 1, \\ \mathbb{d}(\alpha_{M(j-1)}), & \text{jos } j \in \{2, \ldots, k\}. \end{cases}$$

Lause 3.16. *Olkoon $\mathbb{W}$ persistenssimoduli, jonka viivakoodikanta on $\mathcal{A} = \{\gamma_i\}_{i=1}^n$, jolla*

(1) $\mathbb{b}(\gamma_i) = \mathbb{b}(\alpha_i)$ *kaikilla* $i \in \{1, \ldots, n\}$*,*

(2) $\mathbb{d}(\gamma_i) = \mathbb{d}(\alpha_i)$ *kaikilla* $i \notin \{M(1), \ldots, M(k)\}$*,*

(3) $\mathbb{d}(\gamma_{M(j)}) = \tilde{b}_{M(j)}$ *kaikilla* $j \in \{1, \ldots, k\}$*.*

Tällöin $\mathbb{W} \cong \mathbb{V}/\langle\beta\rangle$*.*

Huomautus. Jos $\mathbb{b}(\beta) = \mathbb{b}(\alpha_{M(1)})$, niin $\mathbb{b}(\gamma_{M(1)}) = \mathbb{d}(\gamma_{M(1)})$. Käytännössä tässä tilanteessa $\gamma_{M(1)}$ vastaa triviaalia persistenssivektoria, mutta se ei silti ole tämän tutkielman määritelmän mukainen persistenssivektori. Tämä voidaan korjata jättämällä γ_1 perheestä $\mathcal{A}$. Todistukset tapauksissa $\mathbb{b}(\beta) = \mathbb{b}(\alpha_{M(1)})$ ja $\mathbb{b}(\alpha_{M(1)}) < \mathbb{b}(\beta)$ ovat käytännössä samat ja näin ollen yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että $\mathbb{b}(\alpha_{M(1)}) < \mathbb{b}(\beta)$.

Ennen lauseen 3.16 todistusta osoitetaan muutama aputulos.

Lemma 3.17. *Jos* $1 \leq j \leq k$*, niin*

$$\sum_{i \in I_j} c_i \alpha_i[\tilde{b}_{M(j)}] = \beta[\tilde{b}_{M(j)}].$$

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla luvun j suhteen. Perusaskel $j = 1$ seuraa siitä, että $I_1 = \{i_1, \ldots, i_m\}$. Oletetaan, että väite pätee luvulla $1 \leq j < k$. Merkitään $J = I_j \setminus I_{j+1}$. Seurauksen 3.15 nojalla $I_j = I_{j+1} \cup J$. Algoritmin 3.14 kohdasta (3) seuraa, että $\mathbb{d}(\alpha_i) \leq \mathbb{d}(\alpha_{M(j)}) = \tilde{b}_{M(j+1)}$ kaikilla $i \in J$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\beta[\tilde{b}_{M(j+1)}] &= \mathbb{V}(\tilde{b}_{M(j)} \leq \tilde{b}_{M(j+1)})(\beta[\tilde{b}_{M(j)}]) \\
&= \mathbb{V}(\tilde{b}_{M(j)} \leq \tilde{b}_{M(j+1)})\left(\sum_{i \in I_j} c_i \alpha_i[\tilde{b}_{M(j)}]\right) \\
&= \mathbb{V}(\tilde{b}_{M(j)} \leq \tilde{b}_{M(j+1)})\left(\sum_{i \in I_{j+1}} c_i \alpha_i[\tilde{b}_{M(j)}] + \sum_{i \in J} c_i \alpha_i[\tilde{b}_{M(j)}]\right) \\
&= \sum_{i \in I_{j+1}} c_i \alpha_i[\tilde{b}_{M(j+1)}] + \sum_{i \in J} c_i \alpha_i[\tilde{b}_{M(j+1)}] \\
&= \sum_{i \in I_{j+1}} c_i \alpha_i[\tilde{b}_{M(j+1)}].
\end{aligned}$$

Täten väite seuraa induktioperiaatteesta. □

Muodostetaan persistenssivektorit $\beta_1, \ldots, \beta_n$, missä

$$\beta_{M(j)} = \boxplus_{i \in I_j} c_i \alpha_i$$

kaikilla $j \in \{1, \ldots, k\}$ ja $\beta_i = \alpha_i$ kaikilla $i \notin M$. Määritellään $\tilde{\beta}_i = \pi(\beta_i)$ ja olkoon $\mathcal{B} = \{\tilde{\beta}_i\}_{i=1}^n$.

Lemma 3.18. *Perhe $\tilde{\mathcal{B}}$ virittää persistenssimodulin $\mathbb{V}/\langle\beta\rangle$.*

Todistus. Riittää osoittaa, että $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ virittää persistenssimodulin $\mathbb{V}$. Jos $1 \leq j < l \leq k$, niin $\mathbb{d}(\alpha_{M(j)}) < \mathbb{d}(\alpha_{M(l)})$ ja täten $M(j) \notin I_l$. Näin ollen $\tilde{\mathcal{B}}$ saadaan tekemällä järjestyksessä $j = 1, \ldots, k$ eliminaatio-operaatiot

$$\alpha_{M(j)} \leftarrow \boxplus_{i \in I_j} c_i \alpha_i.$$

Algoritmin 3.14 kohdan (3) nojalla

$$\mathbb{b}(\alpha_{M(j)}) = \max\{\, \mathbb{b}(\alpha_i) \mid i \in I_j \,\}$$

ja väite seuraa lauseesta 2.36. □

Lauseen 3.16 todistus. Olkoon $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}/\langle\beta\rangle$ morfismi, jonka määrittävät ehdot $f(\gamma_i) = \tilde{\beta}_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Lauseen 2.23 sekä lemmojen 3.17 ja 3.18 nojalla f on hyvin määritelty surjektiivinen morfismi. Osoitetaan tämän isomorfisuus laskemalla dimensiot. Toisin sanoen osoitetaan, että

$$\dim(\mathbb{W}(r)) = \dim((\mathbb{V}/\langle\beta\rangle)(r)) = \begin{cases} \dim(\mathbb{V}(r)) - 1, & \text{jos } r \in [\mathbb{b}(\beta), \mathbb{d}(\beta)), \\ \dim(\mathbb{V}(r)) & \text{muulloin} \end{cases}$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Huomaa, että jos $i \notin M$, niin $\mathbb{b}(\gamma_i) = \mathbb{b}(\alpha_i)$ ja $\mathbb{d}(\gamma_i) = \mathbb{d}(\alpha_i)$. Täten riittää tarkastella indeksejä $M(1), \ldots, M(k)$.

Jos $j \in \{1, \ldots, k\}$, niin

$$\mathbb{b}(\gamma_{M(j)}) = \mathbb{b}(\alpha_{M(j)}) \leq \mathbb{b}(\beta) \leq \mathbb{d}(\gamma_{M(j)}) \leq \mathbb{d}(\alpha_{M(j)}) \leq \mathbb{d}(\beta). \tag{3.2}$$

Tästä nähdään, että mikäli $r \notin [\mathbb{b}(\beta), \mathbb{d}(\beta))$, niin $\gamma_{M(j)}[r] = 0$ täsmälleen silloin, kun $\alpha_{M(j)}[r] = 0$. Siis kaikilla $r \notin [\mathbb{b}(\beta), \mathbb{d}(\beta))$ pätee

$$\dim(\mathbb{W}(r)) = \dim(\mathbb{V})(r) = \dim((\mathbb{V}/\langle\beta\rangle)).$$

Oletetaan, että $r \in [\mathbb{b}(\beta), \mathbb{d}(\beta))$ ja merkitään

$$N_r^1 = \#\{\, l \in \{1, \ldots, k\} \mid r \in [\mathbb{b}(\alpha_{M(l)}), \mathbb{d}(\alpha_{M(l)}) \,\}$$

sekä

$$N_r^2 = \#\{\, l \in \{1, \ldots, k\} \mid r \in [\mathbb{b}(\gamma_{M(l)}), \mathbb{d}(\gamma_{M(l)}) \,\}.$$

Enää riittää osoittaa, että

$$N_r^2 = N_r^1 - 1. \tag{3.3}$$

Tehdään välin $[\mathbb{b}(\beta), \mathbb{d}(\beta))$ ositus $r_0 < r_1 < \cdots < r_k$, missä

$$r_j = \begin{cases} \mathbb{b}(\beta), & \text{jos } j = 0, \\ \mathbb{d}(\alpha_{M(j)}), & \text{jos } 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

Koska $r_0 = \mathbb{b}(\beta) = \mathbb{d}(\gamma_{M(1)}) < \mathbb{d}(\gamma_{M(j)})$ kaikilla $1 < j \leq k$, niin kohdasta (3.2) seuraa, että $N^1_{r_0} = k$ ja $N^2_{r_0} = k - 1$. Oletetaan sitten, että $r \in [r_j, r_{j+1})$, missä $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Koska

$$\mathbb{d}(\alpha_{M(l)}) = r_l \text{ ja } \mathbb{d}(\gamma_{M(l)}) = r_{l-1}$$

kaikilla $l \in \{1, \dots, k\}$, niin $N^1_r = N^1_{r_0} - j$ ja $N^2_r = N^2_{r_0} - j$. Näin ollen (3.3) pätee ja voimme viimeinkin todeta, että f on isomorfismi. □

Seuraus 3.19. *Olkoot* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ *ja* $\mathbb{W}$ *kesyjä persistenssimoduleja, joilla on olemassa viivakoodikannat ja olkoon* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *morfismi. Tällöin* $\ker(f), \operatorname{im}(f)$ *ja* $\mathbb{V}/\mathbb{U}$ *ovat kesyjä persistenssimoduleja, joilla on olemassa viivakoodikannat.*

Seuraus 3.19 ei ole niin itsestäänselvä miltä kuulostaa. Toki on selvää, että kesyn persistenssimodulin ali- ja tekijämodulit ovat kesyjä persistenssimoduleja, mutta niiden ei tarvitse toteuttaa oletusta 2.12. Esimerkiksi $\mathbb{I}((0,1)) \subseteq \mathbb{I}(0,1)$.

Tekijämodulin laskeminen yleisessä tapauksessa

Olkoot $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ alimoduli ja $\mathcal{B}^{\mathbb{V}}$ ja $\mathcal{B}^{\mathbb{U}} = \{\beta_i\}_{i=1}^m$ viivakoodikantoja. Käyttämällä algoritmia 3.14 saadaan laskettua tekijämodulin $\mathbb{V}/\langle\beta_1\rangle$ viivakoodikanta $\mathcal{B}^{\mathbb{V}/\langle\beta_1\rangle}$. Toisaalta tekijämodulille $\mathbb{U}/\langle\beta_1\rangle$ on saadaan viivakoodikanta $\mathcal{B}^{\mathbb{U}/\langle\beta_1\rangle} = \{\pi(\beta_i)\}_{i=2}^m$. Näin ollen toistamalla algoritmia 3.14 yhteensä m kertaa, saadaan tekijämodulin $\mathbb{V}/\mathbb{U}$ viivakoodikanta.

Esimerkki 3.20. Olkoot

$$\mathbb{V} = \mathbb{I}(0,5) \oplus \mathbb{I}(2,8) \oplus \mathbb{I}(3,6)$$

ja $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ sen viivakoodikanta. Valitaan

$$\beta_1 = 1_4(\alpha_1 \boxplus \alpha_2 \boxplus \alpha_3) : \mathbb{I}(4,8) \to \mathbb{V} \text{ ja } \beta_2 = \alpha_1 \boxplus \alpha_3 : \mathbb{I}(3,6) \to \mathbb{V}.$$

Kanonisille projektioille käytetään merkintää $\pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}/\langle\beta_1\rangle$ ja $\nu : \mathbb{V}/\langle\beta_1\rangle \to \mathbb{V}/\langle\beta_1, \beta_2\rangle$. Lasketaan aluksi tekijämoduli $\mathbb{V}/\langle\beta_1\rangle$, jonka jälkeen lasketaan

$$(\mathbb{V}/\langle\beta_1\rangle)/\langle\pi(\beta_2)\rangle \cong \mathbb{V}/\langle\beta_1, \beta_2\rangle.$$

Soveltamalla algoritmia 3.14 saadaan

(1) $k = 2$,

(2) $M(1) = 3$ ja $M(2) = 2$,

(3) $I_1 = \{1, 2, 3\}$ ja $I_2 = \{1, 2\}$.

Täten tekijämodulin $\mathbb{V}/\langle\beta_1\rangle$ viivakoodikannaksi saadaan $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, jonka jäsenet ovat

- $\gamma_1 = \pi(\alpha_1) : \mathbb{I}(0,5) \to \mathbb{V}/\langle\beta_1\rangle$,

- $\gamma_2 = \pi(\alpha_1 \boxplus \alpha_2) : \mathbb{I}(2,6) \to \mathbb{V}/\langle \beta_1 \rangle$,
- $\gamma_3 = \pi(\alpha_1 \boxplus \alpha_2 \boxplus \alpha_3) : \mathbb{I}(3,4) \to \mathbb{V}/\langle \beta_1 \rangle$.

Nyt $\pi(\beta_2) = \gamma_1 \boxplus (-\gamma_2) \boxplus \gamma_3 : \mathbb{I}(3,6) \to \mathbb{V}/\langle \beta_1 \rangle$. Soveltamalla uudestaan algoritmia 3.14 saadaan

(1) $k = 2$,

(2) $M(1) = 3$ ja $M(2) = 2$,

(3) $I_1 = \{1, 2, 3\}$ ja $I_2 = \{1, 2\}$.

Huomaa, että tässä $\mathbb{b}(\gamma_3) = \mathbb{b}(\pi(\beta_2))$. Siis $\nu(\gamma_1 \boxplus (-\gamma_2) \boxplus \gamma_3) = 0$. Lopulliseksi viivakoodikannaksi saadaan $\{\delta_1, \delta_2\}$, missä

- $\delta_1 = \nu(\gamma_1) = \nu(\pi(\alpha_1)) : \mathbb{I}(0,5) \to \mathbb{V}/\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$,
- $\delta_2 = \nu(\gamma_1 \boxplus (-\gamma_2)) = \nu(\pi(-\alpha_2)) : \mathbb{I}(2,4) \to \mathbb{V}/\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$.

4 Laajennusongelma

Aliluvussa 1.3 esitimme, miten kategoriassa $\mathbf{vect}_{\mathbb{F}}$ ketjukompleksin suodatuksen spektraalijonojen termeistä E^{∞}_{pq} pystytään välittömästi päättelemään alkuperäiset homologia-avaruudet. Yhtä helpolla emme selviä persistenssimodulien tapauksessa, ja tästä haasteesta nousee niin sanottu laajennusongelma.

Tässä luvussa pääpainona on Torras-Casasin laajennusongelman ratkaisun käsitteleminen. Seuraamme artikkelin [12] lukua 5.

4.1 Persistenssimodulien spektraalijonot

Oletetaan, että meillä on kesyjen persistenssimodulien muodostama ketjukompleksi

$$\mathbb{V}_* : \qquad \cdots \xrightarrow{\partial_4} \mathbb{V}_3 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{V}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{V}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{V}_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Oletetaan lisäksi, että tunnemme tämän ketjukompleksin termien viivakoodikannat. Tällöin ketjukompleksin $\mathbb{V}_*$ homologiamodulit $\ker(\partial_n)/\mathrm{im}(\partial_{n+1})$ saadaan laskettua hyödyntämällä luvun 3 algoritmeja. Selkeyden vuoksi persistenssimodulien ketjukompleksien homologiamoduleille käytetään merkintää

$$\mathrm{PH}_n(\mathbb{V}_*) = \ker(\partial_n)/\mathrm{im}(\partial_{n+1}).$$

Luvussa 1 käsittelimme ketjukompleksien suodatuksien spektraalijonoja ja tutustuimme näiden suppenemistuloksiin. Seuraavaksi tarkastelemme näitä persistenssimoduleilla.

Olkoon $\mathbb{V}_*$ persistenssimodulien ketjukompleksi ja

$$0 = F_{-1}\mathbb{V}_* \subseteq F_1\mathbb{V}_* \subseteq \cdots \subseteq F_s\mathbb{V}_* = \mathbb{V}_* \tag{4.1}$$

sen suodatus. Ottamalla mallia aliluvusta 1.2 voidaan muodostaa suodatusta (4.1) vastaavan spektraalijonon $\{\mathbb{E}^r_{pq}\}^{r\geq 0}_{p,q\in\mathbb{Z}}$, joka

$$\mathbb{E}^0_{pq} \Rightarrow \mathrm{PH}_{p+q}(\mathbb{V}_*).$$

Suppenemista vastaavan homologiamodulin $\mathrm{PH}_n(\mathbb{V}_*)$ suodatuksen jäsenet ovat

$$F_k(\mathrm{PH}_n(\mathbb{V}_*)) = \mathrm{im}(\mathrm{PH}_n(F_k\mathbb{V}_*) \to \mathrm{PH}_n(\mathbb{V}_*)).$$

Siis

$$\mathbb{E}^{\infty}_{pq} \cong F_p(\mathrm{PH}_{p+q}(\mathbb{V}_*))/F_{p-1}(\mathrm{PH}_{p+q}(V_*)).$$

Huomaa, että suodatus (4.1) määrittää pisteittäiset suodatukset vektoriavaruuksien ketjukomplekseille $\mathbb{V}_*(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Toisin sanoen saadaan suodatus

$$0 = F_{-1}\mathbb{V}_*(t) \subseteq F_0\mathbb{V}_*(t) \subseteq \cdots \subseteq F_s\mathbb{V}_*(t) = \mathbb{V}_*(t).$$

Jos $\{E^r_{pq}\}^{r\geq 0}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ on yllä olevan suodatuksen määräämä spektraalijono, niin tällöin $E^r_{pq} = \mathbb{E}^r_{pq}(t)$ kaikilla $p, q, r \in \mathbb{Z}$ ja $r \geq 0$. Tämä seuraa siitä, että kuvat, ytimet sekä tekijämodulit määritellään pisteittäin. Täten lauseen 1.8 nojalla saadaan pisteittäiset isomorfismit

$$\left(\bigoplus_{k=1}^{s} \mathbb{E}^\infty_{k,n-k}\right)(t) \cong (\mathrm{PH}_n(\mathbb{V}_*))(t). \tag{4.2}$$

Pisteittäiset isomorfismit eivät aina indusoi persistenssimodulien välistä isomorfismia. Persistenssimodulin $\mathrm{PH}_n(\mathbb{V}_*)$ laskemista spektraalijonon termien $\mathbb{E}^\infty_{k,n-k}$ avulla sanotaan *laajennusongelmaksi.*

Esimerkki 4.1. Persistenssimodulit $\mathbb{I}(0,1) \oplus \mathbb{I}(1,2)$ ja $\mathbb{I}(0,2)$ ovat pisteittäin isomorfiset, mutta eivät isomorfiset persistenssimoduleina.

Lemma 4.2. *Termit $\mathbb{E}^\infty_{pq}$ ovat kesyjä persistenssimoduleja.*

Todistus. Koska suodatus (4.1) sisältää vain kesyjä persistenssimoduleja, niin seurauksen 3.19 nojalla termit $\mathbb{E}^\infty_{pq}$ ovat myös kesyjä. □

4.2 Laajennusongelman ratkaisu

Laajennusongelma palautuu ongelmaan, missä peristenssimoduleista $\mathbb{U}$ ja $\mathbb{V}/\mathbb{U}$ pyritään päättelemään persistenssimoduli $\mathbb{V}$. Komplementin puutteesta seuraa, että yleisesti tähän ei ole yksikäsitteistä ratkaisua. Näin ollen laajennusongelman ratkaisu edellyttää jotain lisätietoa. Seuraavaksi esittelemme Torras-Casasin laajennusongelman ratkaisun ja luvun lopussa pohdimme, mitkä olivat ratkaisevat lisätiedot laajennusongelman kannalta.

Merkitään $\mathbb{G}^k = \mathbb{E}^\infty_{k,n-k}$ ja olkoon $\mathcal{B}_k$ sen viivakoodikanta. Yksinkertaisuuden vuoksi merkitään $\mathrm{PH}_n(\mathbb{V}_*) = \mathbb{V}$. Ensinnäkin meillä on lyhyet eksaktit jonot

$$0 \longrightarrow F_{k-1}(\mathbb{V}) \xrightarrow{\ i_k\ } F_k(\mathbb{V}) \xrightarrow{\ q_k\ } \mathbb{G}^k \longrightarrow 0. \tag{4.3}$$

Valitaan aluksi $\beta : \mathbb{I}(a_\beta, b_\beta) \to \mathbb{G}^k \in \mathcal{B}_k$. Koska q_k on surjektiivinen, niin on olemassa vektori $v \in F_k(\mathbb{V})(a_\beta)$, jolla $q_k(a_\beta)(v) = \beta[a_\beta]$. Asetetaan persistenssivektori $\alpha_\beta : \mathbb{I}(a_\beta, c_\beta) \to F_k(\mathbb{V})$, jolla $\alpha_\beta[a_\beta] = v$. Tällöin $q(\alpha_\beta)[r] = \beta[r]$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Tehdään vastaava valinta kaikilla $\beta \in \mathcal{B}_k$ ja muodostetaan pisteittäiset lineaarikuvaukset $f_k(r) : \mathbb{G}^k(r) \to (F_k\mathbb{V})(r) \to \mathbb{V}(r)$, jonka määrittävät ehdot

$$\beta[r] \mapsto \alpha_\beta[r]$$

kaikilla $\beta[r] \in \mathcal{B}^r_k[r]$. Huomaa, että lineaarikuvaukset $f_k(r)$ eivät välttämättä muodosta morfismia. Näin tulee käymään, mikäli $b_\beta < c_\beta$ jollain $\beta \in \mathcal{B}_k$. Näillä lineaarikuvauksilla kuitenkin pätee $q(r) \circ g(r) = \mathrm{id}_{\mathbb{G}^k(r)}$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Täten saadaan pisteittäiset lineaarikuvaukset $f(r) : \mathbb{W}(r) \to \mathbb{V}(r)$, missä

$$\mathbb{W} = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathbb{G}^k(r).$$

Jonojen (4.3) eksaktisuudesta seuraa, että $f(r)$ on isomorfismi kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Merkitään persistenssimodulin $\mathbb{W}$ viivakoodikantaa

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{s} \mathcal{B}_k = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}.$$

Poikkeuksellisesti vastoin standardijärjestystä, järjestetään $\mathcal{B}$ niin, että

$$\mathbb{d}(\beta_1) \leq \cdots \leq \mathbb{d}(\beta_m). \tag{4.4}$$

Torras-Casasin ratkaisu perustuu seuraavaan ideaan: Muokataan persistenssimodulia $\mathbb{W}$ niin, että f määrittää persistenssimodulien välisen isomorfismin ja lasketaan muokatun persistenssimodulin viivakoodikanta.

Lemma 4.3. *Olkoon $\widetilde{\mathbb{W}}$ se persistenssimoduli, jolla $\widetilde{\mathbb{W}}(r) = \mathbb{W}(r)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja*

$$\widetilde{\mathbb{W}}(r \leq s) = (f(s))^{-1} \circ \mathbb{V}(r \leq s) \circ f(r)$$

kaikilla $r \leq s$. Tällöin $f : \widetilde{\mathbb{W}} \to \mathbb{V}$ on persistenssimodulien isomorfismi.

Todistus (vrt. [12, s. 609]). Ensinnäkin tässä

$$\widetilde{\mathbb{W}}(r \leq r) = (f(r))^{-1} \circ \mathbb{V}(r \leq r) \circ f(r) = (f(r))^{-1} \circ \mathrm{id}_{\mathbb{V}(r)} \circ f(r) = \mathrm{id}_{\widetilde{\mathbb{W}}(r)}$$

ja

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{W}}(s \leq t) \circ \widetilde{\mathbb{W}}(r \leq s) &= (f(t))^{-1} \circ \mathbb{V}(s \leq t) \circ f(s) \circ (f(s))^{-1} \circ \mathbb{V}(r \leq s) \circ f(r) \\
&= (f(t))^{-1} \circ \mathbb{V}(s \leq t) \circ \mathbb{V}(r \leq s) \circ f(r) \\
&= (f(t))^{-1} \circ \mathbb{V}(s \leq r) \circ f(r) \\
&= \widetilde{\mathbb{W}}(r \leq t).
\end{aligned}$$

Täten $\widetilde{\mathbb{W}}$ on persistenssimoduli. Lisäksi

$$f(s) \circ \widetilde{\mathbb{W}}(r \leq s) = f(s) \circ (f(s))^{-1} \circ \mathbb{V}(r \leq s) \circ f(r) = \mathbb{V}(r \leq s) \circ f(r)$$

ja näin ollen lineaarikuvaukset $f(r)$ määrittävät isomorfismin $f : \widetilde{\mathbb{W}} \to \mathbb{V}$. □

Tämän luvun loppuosan tavoitteena on muodostaa viivakoodikanta persistenssimodulille $\widetilde{\mathbb{W}}$.

Jokaiselle $\beta \in \mathcal{B}$ määritellään persistenssivektori $\tilde{\beta} : \mathbb{I}(\mathbb{b}(\beta), \infty) \to \widetilde{\mathbb{W}}$, jonka määrittää ehto $\tilde{\beta}[\mathbb{b}[\beta]] = \beta[\mathbb{b}(\beta)]$. Eli

$$\tilde{\beta}[r] = \begin{cases} 0, & \text{jos } r < \mathbb{b}(\beta), \\ \widetilde{\mathbb{W}}(\mathbb{b}(\beta) \leq r)(\beta[\mathbb{b}(\beta)]), & \text{jos } \mathbb{b}(\beta) \leq r. \end{cases}$$

Näiden persistenssivektorien muodostamalle perheelle käytetään merkintää

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{\, \tilde{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B} \,\}.$$

Lemma 4.4. *Persistenssivektorien perhe* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *virittää persistenssimodulin* $\widetilde{\mathbb{W}}$.

Todistus (vrt. [12, s. 609]). Olkoon $\beta \in \mathcal{B}$ ja $\mathbb{b}(\beta) \le r < \mathbb{d}(\beta)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}[r] &= \widetilde{\mathbb{W}}(\mathbb{b}(\beta) \le r)(\beta[\mathbb{b}(\beta)]) \\
&= ((f(r))^{-1} \circ \mathbb{V}(\mathbb{b}(\beta) \le r) \circ f(\mathbb{b}(\beta)))(\beta[\mathbb{b}(\beta)]) \\
&= (f(r))^{-1}(\mathbb{V}(\mathbb{b}(\beta) \le r)(\alpha_\beta[\mathbb{b}(\beta)])) \\
&= (f(r))^{-1}(\alpha_\beta[r]) \\
&= (f(r))^{-1}(f(\beta[r])) \\
&= \beta[r].
\end{aligned}$$

Näin ollen $\mathcal{B}^r[r] \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}^r[r]$ ja väite seuraa tästä. □

Tarkastellaan persistenssimodulia

$$\mathbb{A} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{I}(\mathbb{b}(\beta_i), \infty)$$

ja olkoon $\mathcal{B}_A = \{\alpha_i : \mathbb{I}(\mathbb{b}(\beta_i), \infty) \to \mathbb{A}\}_{i=1}^m$ sen viivakoodikanta. Määritellään surjektiivinen morfismi $F : \mathbb{A} \to \widetilde{\mathbb{W}}$, jonka määrittävät ehdot $F(\alpha_i) = \tilde{\beta}_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, m\}$. Olkoot $1, \ldots, l$ ne indeksit $i \in \{1, \ldots, m\}$, joilla $\mathbb{d}(\beta_i) < \infty$. Koska $\{\beta_i[r]\}_{i=1}^m$ virittää vektoriavaruuden $\widetilde{\mathbb{W}}[r]$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$, niin kohdasta (4.4) seuraa, että jokaiselle $1 \le i \le l$ on olemassa kertoimet $c_{ij} \in \mathbb{F}$, joilla

$$\tilde{\beta}_i[\mathbb{d}(\beta_i)] = \sum_{i<j} c_{ij}\beta_j[\mathbb{d}(\beta_i)] \tag{4.5}$$

ja $c_{ij} = 0$, jos $\beta_j[\mathbb{d}(\beta_i)] = 0$. Lemman 4.4 todistuksen nojalla $\tilde{\beta}_j[\mathbb{d}(\beta_i)] = \beta_j[\mathbb{d}(\beta_i)]$ kaikilla $i < j$, ja täten

$$\tilde{\beta}_i[\mathbb{d}(\beta_i)] = \sum_{i<j} c_{ij}\tilde{\beta}_j[\mathbb{d}(\beta_i)].$$

Nyt toistamalla eliminaatio-operaatiota perheeseen $\mathcal{B}_A$ saadaan muodostettua uusi perhe $\mathcal{K} = \{1_{\mathbb{d}(\beta_i)}\tilde{\alpha}_i\}_{i=1}^l$, missä $c_{ii} = -1_{\mathbb{F}}$ ja

$$\tilde{\alpha}_i = \boxplus_{i\le j} c_{ij}\alpha_j.$$

Huomaa, että jos $c_{ij} \ne 0$ ja $i < j$, niin $\beta_j[\mathbb{d}(\beta_i)] \ne 0$, jolloin $\mathbb{b}(\beta_j) < \mathbb{d}(\beta_i)$. Erityisesti $\mathbb{b}(\tilde{\alpha}_i) < \mathbb{d}(\beta_i)$.

Lemma 4.5. *Persistenssivektorien perhe* $\mathcal{K}$ *muodostaa ytimen* $\ker(F)$ *viivakoodikannan.*

Todistus (vrt. [12, s. 611-612]). Ensinnäkin

$$F(\tilde{\alpha}_i)[\mathbb{d}(\beta_i)] = -\tilde{\beta}_i[\mathbb{d}(\beta_i)] + \sum_{i<j} c_{ij}\tilde{\beta}_j[\mathbb{d}(\beta_i)] = 0,$$

kaikilla $i \in \{1, \ldots, l\}$ ja täten $\mathcal{K}$ on perhe ytimen $\ker(F)$ persistenssivektoreita. Koska $\mathcal{B}$ on vapaa, niin lauseen 2.37 nojalla samoin on $\mathcal{K}$. Täten väitteen osoittamiseksi riittää osoittaa, että dimensiot täsmäävät. Toisin sanoen osoitetaan, että

$$\dim(\ker(F)(r)) = \#\mathcal{K}^r[r] \tag{4.6}$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathrm{dom}(F(r))) \\
&= \#\{\, i \in \{1, \ldots, n\} \mid \mathbb{b}(\beta_i) \leq r \,\} \\
&= \#\{\, i \in \{1, \ldots, l\} \mid \mathbb{b}(\beta_i) \leq r \,\} + \#\{\, i \in \{l+1, \ldots, n\} \mid \mathbb{b}(\beta_i) \leq r \,\}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathbb{V}(r)) \\
&= \#\{\, i \in \{1, \ldots, n\} \mid \mathbb{b}(\beta_i) \leq r < \mathbb{d}(\beta_i) \,\} \\
&= \#\{\, i \in \{1, \ldots, l\} \mid \mathbb{b}(\beta_i) \leq r < \mathbb{d}(\beta_i) \,\} + \#\{\, i \in \{l+1, \ldots, n\} \mid \mathbb{b}(\beta_i) \leq r \,\}.
\end{aligned}$$

Hyödyntämällä vektoriavaruuksien dimensiolausetta saadaan

$$\begin{aligned}
&\dim(\ker(F)(r)) \\
&= \dim(\mathrm{dom}(F(r))) - \dim(\mathbb{V}(r)) \\
&= \#\{\, i \in \{1, \ldots, l\} \mid \mathbb{b}(\beta_i) \leq r \,\} - \#\{\, i \in \{1, \ldots, l\} \mid \mathbb{b}(\beta_i) \leq r < \mathbb{d}(\beta_i) \,\} \\
&= \#\{\, i \in \{1, \ldots, l\} \mid \mathbb{d}(\beta_i) \leq r \,\} \\
&= \#\mathcal{K}^r[r].
\end{aligned}$$

Näin ollen (4.6) pätee. □

Lause 4.6. *Jos $\mathbb{B} = \langle \mathcal{K} \rangle$, niin $\mathbb{V} \cong \mathbb{A}/\mathbb{B}$.*

Koska tunnemme persistenssimodulien $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ viivakoodikannat, lauseen 4.6 nojalla persistenssimodulin $\mathbb{V}$ viivakoodikanta saadaan laskettua soveltamalla algoritmia 3.14. Näin ollen tämä laajennusongelman ratkaisu lopulta tiivistyy siihen, että muodostimme persistenssimodulit $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ ja osoitimme isomorfismin $\mathbb{A}/\mathbb{B} \cong \mathbb{V}$.

Persistenssimodulin $\mathbb{A}$ muodostamiseen emme tarvinneet mitään lisätietoa, kun taas persistenssimodulin $\mathbb{B}$ konstruktio riippuu vain kertoimista c_{ij} yhtälöissä (4.5). Näissä yhtälöissä siis

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_i[\mathbb{d}(\beta_i)] &= \widetilde{\mathbb{W}}(\mathbb{b}(\beta_i) \leq \mathbb{d}(\beta_i))(\beta[\mathbb{b}(\beta_i)]) \\
&= (f(s))^{-1} \circ \mathbb{V}(r \leq s) \circ f(r))(\beta[\mathbb{b}(\beta_i)]) \\
&= \sum_{i<j} c_{ij}\beta_j[\mathbb{d}(\beta_i)].
\end{aligned}$$

Näin ollen kertoimien c_{ij} laskeminen edellyttää lineaarikuvausten $\mathbb{V}(r \leq s)$ ja $f(r)$ tuntemista. Lineaarikuvaukset $\mathbb{V}(r \leq s)$ ovat yleensä tunnettujen kuvausten indusoimia ja täten suurin haaste laskennallisesta näkökulmasta on kuvausten $f(r)$ muodostaminen. Tämän haasteen ratkaisemiseksi Torras-Casas hyödynsi kaksoiskompleksien ominaisuuksia ja implementoi nämä menetelmät *PerMaViss*-algoritmiinsa. Yksityiskohdat näistä menetelmistä löytyvät artikkelin [12] sivuilta 612-617.

5 Mayer-Vietoris-spektraalijonot

Tutkielman viimeisessä luvussa käsittelemme simpleksistä ja persistenttiä homologiaa. Simpleksistä homologiaa käsittelemme sen verran, että persistentin homologian ja erityisesti persistentin homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonojen käsittely olisi sujuvampaa. Osoitamme tämän tutkielman tärkeimmän lauseen eli persistentin homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonojen suppenemislauseen. Käsittelemme totaalipersistenssiä, joka voidaan päätellä suoraan Mayer-Vietoris-spektraalijonoista ilman laajennusongelman ratkaisua. Tutkielman lopussa pohdimme Mayer-Vietoris-spektraalijonojen mahdollisia sovelluksia.

Simpleksisen ja persistentin homologian käsittelyssä seuraamme Torras-Casasin artikkelin [12] sivuja 598-607.

5.1 Simpleksistä homologiaa

Merkintä $P(X)$ tarkoittaa joukon X potenssijoukkoa.

Määritelmä 5.1. Kärkijoukon $V = \{v_0, \ldots, v_n\}$ *simpleksinen kompleksi* on $K \subseteq P(V) \setminus \{\emptyset\}$, jolla on seuraava ominaisuus: Jos $\sigma \in K$ ja $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma$, niin $\tau \in K$. Jos $q \in \mathbb{N}$, niin merkitään

$$K_q = \{s \in K \mid \#s = q + 1\}.$$

Tunnetusti simpleksistä kompleksia K vastaa *ketjukompleksi*, jota merkitään $C_*(K)$. Tämän *reunakuvauksille* käytetään merkintää ∂_*. Ketjukompleksin $C_*(K)$ homologia-avaruuksia kutsutaan simpleksisen kompleksin K *simpleksisiksi homologioiksi*, joille käytetään merkintää $H_*(K)$. Huomautetaan vielä siitä, että yleensä puhutaan vain simpleksisestä kompleksista K.

Määritelmä 5.2. Kärkijoukon V *standardi simpleksi* on simpleksinen kompleksi $K = P(V) \setminus \{\emptyset\}$. Jos $m \in \mathbb{N}$, niin merkitään $\Delta^m = P(\{0, \ldots, m\}) \setminus \{\emptyset\}$.

Esimerkki 5.3. Esimerkkejä standardeista simplekseistä ovat

- Δ^0 = piste,
- Δ^1 = jana,
- Δ^2 = kolmio (sisäosa mukaanlukien),
- Δ^3 = tetraedri.

Lemma 5.4. *Jos $m \in \mathbb{N}$, niin ketjukompleksi*

$$\ldots \longrightarrow C_{p+1}(\Delta^m) \xrightarrow{\partial} C_p(\Delta^m) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_0(\Delta^m) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{F} \longrightarrow 0,$$

missä $\epsilon([i]) = 1_{\mathbb{F}}$ kaikilla $i \in \{0, \ldots, m\}$ on eksakti.

Todistus. Sivuutetaan (ks. [8, Lause 8.3]). □

Määritelmä 5.5. Simpleksisen kompleksin K *peite* on perhe $\{U_i\}_{i=0}^m$ simpleksisen kompleksin K alikomplekseja, joilla $\bigcup_{i=0}^m U_i = K$. Jos $\sigma \in \Delta^m$, niin merkitään

$$U_\sigma = \bigcap_{i \in \sigma} U_i.$$

Mikäli $s \in K$, niin merkitään

$$\Delta_s^{\mathcal{U}} = \{\, \emptyset \neq \sigma \subseteq \{0, \dots, m\} \mid s \in U_\sigma \,\}.$$

Huomautus. Jos $s \in K$, niin $\Delta_s^{\mathcal{U}}$ on standardi simpleksi, jonka kärjet ovat

$$\{\, i \in \{\, 0, \dots, m \,\} \mid s \in U_i, \}.$$

Mikäli $s' \in K$ on toinen simpleksi, niin haluamme erottaa simpleksiset kompleksit $\Delta_s^{\mathcal{U}}$ ja $\Delta_{s'}^{\mathcal{U}}$ toisistaan. Selkeyden vuoksi lisätään simpleksisen kompleksin $\Delta_s^{\mathcal{U}}$ simplekseihin alaindeksi s. Eli tällöin

$$\Delta_s^{\mathcal{U}} = \{\, \emptyset \neq \sigma_s \subseteq \{0, \dots, m\} \mid s \in U_\sigma \,\}.$$

Esimerkki 5.6. Olkoon $K = \{[a], [b], [c], [d], [a, b], [b, c][c, d][a, d]\}$. Tällöin $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\} = \{K \setminus \{[a, d]\}, K \setminus \{[b, c]\}\}$ on simpleksisen kompleksin K peite. Jos $s \in K$, niin

$$\Delta_s^{\mathcal{U}} = \begin{cases} \{[0]_s\}, & \text{jos } s = [b, c], \\ \{[1]_s\}, & \text{jos } s = [a, d], \\ \{[0]_s, [1]_s, [0, 1]_s\} & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Čechin ketjukompleksi

Määritelmä 5.7. Olkoon $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^m$ simpleksisen kompleksin K peite. Simpleksistä kompleksia

$$\bigcup_{s \in K_q} \Delta_s^{\mathcal{U}}$$

sanotaan $(q, \mathcal{U})$-*räjäytyskompleksiksi*. Sen muodostamaa ketjukompleksia

$$\check{C}_*(q, \mathcal{U}) = C_*(\bigcup_{s \in K_q} \Delta_s^{\mathcal{U}})$$

taas sanotaan $(q, \mathcal{U})$-*Čechin ketjukompleksiksi*. Tämän reunakuvauksille käytetään merkintää $d_{*q}^{\mathcal{U}}$.

Koska räjäytyskompleksi on erillinen yhdiste simpleksisiä komplekseja, sen ketjukompleksille saadaan esitysmuoto

$$\check{C}_*(q, \mathcal{U}) = C_*(\bigcup_{s \in K_q} \Delta_s^{\mathcal{U}}) \cong \bigoplus_{s \in K_q} C_*(\Delta_s^{\mathcal{U}}).$$

Huomautus. Tämän tutkielman räjäytyskompleksin määritelmä eroaa monista lähteistä. Esimerkiksi artikkelissa [7] räjäytyskompleksin muodostama ketjukompleksi on suoraan Čechin kaksoiskompleksin totaalikompleksi. Käytämme eri määritelmää, jotta Mayer-Vietoris-spektraalijonon konstruktio vastaisi Torras-Casasin artikkelissa esiteltyä konstruktiota.

Lause 5.8. *Olkoot $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^m$ simpleksisen kompleksin K peite ja*

$$\epsilon_q : \check{C}_0(q, \mathcal{U}) \to C_q(K)$$

lineaarikuvaus, jonka määrittävät ehdot $[i]_s \mapsto s$ kaikilla $s \in K_q$ sekä $[i]_s \in \Delta_s^{\mathcal{U}}$. Tällöin jono

$$\ldots \longrightarrow \check{C}_{p+1}(q, \mathcal{U}) \xrightarrow{d_q^{\mathcal{U}}} \check{C}_p(q, \mathcal{U}) \xrightarrow{d_q^{\mathcal{U}}} \ldots \xrightarrow{d_q^{\mathcal{U}}} \check{C}_0(q, \mathcal{U}) \xrightarrow{\epsilon} C_q(K) \longrightarrow 0$$

on eksakti.

Todistus (vrt. [12, s. 585]). Jos $s \in K_q$, niin $\Delta_s^{\mathcal{U}}$ on standardi simpleksi. Täten lemman 5.4 nojalla saadaan eksakti jono

$$\ldots \longrightarrow C_{p+1}(\Delta_s^{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\partial_s} C_p(\Delta_s^{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\partial_s} \ldots \xrightarrow{\partial_s} C_0(\Delta_s^{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\epsilon_s} \mathbb{F} \longrightarrow 0,$$

missä $\epsilon_s([i]_s) = 1_{\mathbb{F}}$ kaikilla niillä $i \in \{0, \ldots, m\}$, joilla $s \in U_i$. Koska räjäytyskompleksi on näiden standardien simpleksien erillinen yhdiste, saadaan isomorfismi

$$(\check{C}_*(q, \mathcal{U}) \xrightarrow{\epsilon_q} C_q(K) \longrightarrow 0) \cong \bigoplus_{s \in K_q} (C_*(\Delta_s^{\mathcal{U}}) \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow 0).$$

Näin ollen jono $\check{C}_*(q, \mathcal{U}) \xrightarrow{\epsilon_q} C_q(K) \to 0$ on eksaktien jonojen suorana summana eksakti. Koska $\epsilon_q([i]_s) = s$ kaikilla $s \in K_q$ ja $[i]_s \in \Delta_s^{\mathcal{U}}$, niin väite on osoitettu.

□

Lause 5.9. *Olkoon $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^m$ simpleksisen kompleksin K peite. Tällöin*

$$\check{C}_p(q, \mathcal{U}) \cong \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(U_\sigma).$$

kaikilla $p, q \in \mathbb{N}$. Tämän isomorfismin määrittävät ehdot $\sigma_s \mapsto s_\sigma$, missä s_σ vastaa suorassa summassa alkiota $s \in (U_\sigma)_q$.

Todistus (vrt. [12, s. 585]). Osoitetaan, että väitteessä mainitut ehdot määrittävät bijektion kantojen välillä. Olkoot $\sigma \in \Delta_p^m$ ja $s \in K_q$. Nyt

$$\begin{aligned}
& s_\sigma \text{ on oikean puolen kannan jäsen,} \\
\iff \quad & s \text{ on vektoriavaruuden } C_q(U_\sigma) \text{ kannan jäsen,} \\
\iff \quad & s \in U_\sigma, \\
\iff \quad & s \in U_i \text{ kaikilla } i \in \sigma, \\
\iff \quad & \sigma_s \in \Delta_s^{\mathcal{U}}, \\
\iff \quad & \sigma_s \text{ on vektoriavaruuden } \check{C}_p(q, \mathcal{U}) \text{ kannan jäsen.}
\end{aligned}$$

Näin ollen ehdot $s_\sigma \mapsto \sigma_s$ määrittävät isomorfismin. $\square$

Lauseen 5.9 nojalla Čechin ketjukompleksi voidaan esittää muodossa

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{\sigma\in\Delta_2^m} C_q(U_\sigma) \xrightarrow{\delta_{2q}} \bigoplus_{\sigma\in\Delta_1^m} C_q(U_\sigma) \xrightarrow{\delta_{1q}} \bigoplus_{\sigma\in\Delta_0^m} C_q(U_\sigma) \longrightarrow 0,$$

missä $\delta_{pq} = \psi_{p-1,q} \circ d_{pq}^{\mathcal{U}} \circ \psi_{pq}^{-1}$ ja ψ_{pq} on lauseen 5.9 isomorfismi.

Lemma 5.10. *Olkoot $p > 0$, $\sigma \in \Delta_p^m$ ja $s_\sigma \in C_q(U_\sigma)$. Merkitään*

$$\sigma_s = [i_0, \ldots, i_p]_s.$$

Tällöin

$$\delta_{pq}(s_\sigma) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k s_{[i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p]}.$$

Todistus (vrt. [12, s. 585]). Tässä

$$\begin{aligned}
\delta_{pq}(s_\sigma) &= (\psi_{p-1,q} \circ d_{pq}^{\mathcal{U}} \circ \psi_{pq}^{-1})(s_\sigma) \\
&= (\psi_{p-1,q} \circ d_{pq}^{\mathcal{U}})(\sigma_s) \\
&= \psi_{p-1,q}((\partial_p(\sigma))_s) \\
&= \psi_{p-1,q}((\partial_p([i_0, \ldots, i_p]))_s) \\
&= \psi_{p-1,q}\left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k [i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_p]_s\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k s_{[i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p]}
\end{aligned}$$

ja täten väite on osoitettu. $\square$

Reunakuvausten δ_{pq} lisäksi meillä on luonnolliset reunakuvaukset

$$\partial_{pq} : \bigoplus_{\sigma\in\Delta_p^m} C_q(U_\sigma) \to \bigoplus_{\sigma\in\Delta_p^m} C_{q-1}(U_\sigma).$$

Seuraus 5.11. *Kaikilla $p > 0$ ja $q > 0$ kaavio*

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\bigoplus_{\sigma\in\Delta_p^m} C_q(U_\sigma) & \xrightarrow{\delta_{pq}} & \displaystyle\bigoplus_{\sigma\in\Delta_{p-1}^m} C_q(U_\sigma) \\
{\scriptstyle \partial_{pq}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \partial_{p-1,q}} \\
\displaystyle\bigoplus_{\sigma\in\Delta_p^m} C_{q-1}(U_\sigma) & \xrightarrow[\delta_{p,q-1}]{} & \displaystyle\bigoplus_{\sigma\in\Delta_{p-1}^m} C_{q-1}(U_\sigma)
\end{array}$$

kommutoi eli $\partial_{p-1,q} \circ \delta_{pq} = \delta_{p,q-1} \circ \partial_{pq}$.

Todistus (vrt. [12, s. 585]). Merkitään $s = [j_0, \ldots, j_q]$ ja $\sigma_s = [i_0, \ldots, i_p]_s$. Nyt

$$\begin{aligned}
(\partial_{p-1,q} \circ \delta_{pq})(s_\sigma) &= \partial_{p-1,q}\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k s_{[i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p]}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \partial_{p-1,q}([j_0, \ldots, j_q]_{[i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p]}) \\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \sum_{t=0}^{q}(-1)^t [j_0, \ldots, \hat{j}_t, \ldots, j_q]_{[i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p]} \\
&= \sum_{t=0}^{q}(-1)^t \sum_{k=0}^{p}(-1)^k [j_0, \ldots, \hat{j}_t, \ldots, j_q]_{[i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p]} \\
&= \sum_{t=0}^{q}(-1)^t \delta_{p,q-1}([j_0, \ldots, \hat{j}_t, \ldots, j_q]_\sigma) \\
&= \delta_{p,q-1}\left(\sum_{t=0}^{q}(-1)^t [j_0, \ldots, \hat{j}_t, \ldots, j_q]_\sigma\right) \\
&= (\delta_{p,q-1} \circ \partial_{p-1,q})(s_\sigma).
\end{aligned}$$

Täten $\partial_{p-1,q} \circ \delta_{pq} = \delta_{p,q-1} \circ \partial_{pq}$ $\square$

Simpleksisen homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonot

Mayer-Vietoris-spektraalijonot mahdollistavat simpleksisen homologian laskemisen hyödyntämällä vain lokaalia homologista informaatiota. Tunnetumpi esimerkki tällaisesta työkalusta on algebrallisen topologian Mayer-Vietoris-jonot (ks. [8, s. 142]).

Määritelmä 5.12. Simpleksisen kompleksin K peitettä $\mathcal{U}$ vastaava *Čechin kaksoiskompleksi* on kaksoiskompleksi

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & \check{C}_{02}(\mathcal{U}) & \xleftarrow{d^h} & \check{C}_{12}(\mathcal{U}) & \xleftarrow{d^h} & \check{C}_{22}(\mathcal{U}) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & {\scriptstyle d^v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d^v} & & \downarrow{\scriptstyle d^v} & & \\
0 & \longleftarrow & \check{C}_{01}(\mathcal{U}) & \xleftarrow{d^h} & \check{C}_{11}(\mathcal{U}) & \xleftarrow{d^h} & \check{C}_{21}(\mathcal{U}) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & {\scriptstyle d^v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d^v} & & \downarrow{\scriptstyle d^v} & & \\
0 & \longleftarrow & \check{C}_{00}(\mathcal{U}) & \xleftarrow{d^h} & \check{C}_{10}(\mathcal{U}) & \xleftarrow{d^h} & \check{C}_{20}(\mathcal{U}) & \longleftarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & ,
\end{array}$$

jonka objektit ovat

$$\check{\mathrm{C}}_{pq}(\mathcal{U}) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(U_\sigma)$$

ja reunakuvaukset ovat $d^h_{pq} = (-1)^q \delta_{pq}$ sekä $d^v_{pq} = \partial_{pq}$. Tämän kaksoiskompleksin ensimmäistä spektraalijonoa sanotaan peitteen $\mathcal{U}$ *Mayer-Vietoris-spektraalijonoksi.* Tälle käytetään merkintää $\{{}^{\mathcal{U}}E^r_{pq}\}^{r \geq 0}_{p,q \in \mathbb{Z}}$.

Huomautus. Koska simpleksinen kompleksi koostuu äärellisen monesta simpleksistä ja peitteet sisältävät vain äärellisen monta jäsentä, Čechin kaksoiskompleksi on rajoitettu kaksoiskompleksi.

Lause 5.13. *Olkoon $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^m$ simpleksisen kompleksin K peite. Tällöin*

$$H_n(\mathrm{TC}(\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U}))) \cong H_n(K).$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus (vrt. [12, s. 606]). Olkoon $\{{}^{II}E^r_{pq}\}^{r \geq 0}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ kaksoiskompleksin $\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})$ toinen spektraalijono. Ensinnäkin kaksoiskompleksin $\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})$ sarakkeella $p = 0$ sen termit ovat muotoa

$$\check{\mathrm{C}}_{0q}(\mathcal{U}) = \bigoplus_{i=0}^{m} C_q(U_i)$$

kaikilla $q \in \mathbb{N}$. Olkoon $\epsilon_q : \check{\mathrm{C}}_{0q}(\mathcal{U}) \to C_q(K)$ inkluusioiden $C_q(U_i) \to C_q(K)$ indusoima lineaarikuvaus. Tällöin ϵ_q vastaa lauseessa 5.8 esitettyä lineaarikuvausta $\check{\mathrm{C}}_0(q, \mathcal{U}) \to C_q(K)$. Koska kaavio

$$\begin{tikzcd}
C_{q+1}(K) \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & \check{\mathrm{C}}_{0,q+1}(\mathcal{U}) \arrow[l, "\epsilon_{q+1}"'] \arrow[d, "\partial_{0,q+1}"] \\
C_q(K) & \check{\mathrm{C}}_{0q}(\mathcal{U}), \arrow[l, "\epsilon_q"]
\end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $q \in \mathbb{N}$, niin lauseen 5.8 nojalla ϵ_q indusoi isomorfismin

$${}^{II}E^1_{q0} \cong H^h_0(\check{\mathrm{C}}_{*q}(\mathcal{U})) \cong C_q(K)$$

kaikilla $q \in \mathbb{N}$. Edelleen tästä saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
C_{q+1}(K) \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & {}^{II}E^1_{q+1,0} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "d^1_{q+1,0}"] \\
C_q(K) & {}^{II}E^1_{q,0}, \arrow[l, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

joka indusoi isomorfismin

$${}^{II}E^2_{q0} \cong H^v_q(H^h_0(\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U}))) \cong H_q(K)$$

kaikilla $q \in \mathbb{N}$. Lauseiden 1.11 ja 5.8 nojalla

$$^{II}E^2_{pq} = \begin{cases} H_q(K), & \text{jos } q = 0 \text{ ja } p \geq 0, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja $^{II}E^0_{pq} \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{TC}(\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U})))$. Näin ollen lauseen 1.5 nojalla

$$H_n(\mathrm{TC}(\check{\mathrm{C}}(\mathcal{U}))) \cong H_n(K)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. □

Lause 5.14. *Olkoon* $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^m$ *simpleksisen kompleksin* K *peite. Tällöin*

$$^{\mathcal{U}}E^0_{pq} \Rightarrow H_{p+q}(K)$$

ja

$$\dim(H_n(K)) = \sum_{p+q=n} \dim(E^\infty_{pq}).$$

Todistus (vrt. [12, s. 606]). Peitteen $\mathcal{U}$ Mayer-Vietoris-spektraalijonon suppeneminen väitteen mukaisesti seuraa lauseista 1.11 ja 5.13. Näin ollen yhtälö

$$\dim(H_n(K)) = \sum_{p+q=n} \dim(E^\infty_{pq})$$

seuraa lauseesta 1.8. □

5.2 Persistentin homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonot

Tässä aliluvussa siirrymme persistenttiin homologiaan. Tulemme osoittamaan persistentin homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonon suppenemislauseen ottamalla mallia lauseen 5.14 todistuksesta.

Määritelmä 5.15. Simpleksisen kompleksin K *suodatus* on alikompleksien $\mathbb{K}(r) \subseteq K$ perhe $\mathbb{K} = \{\mathbb{K}(r)\}_{r \in \mathbb{R}}$ niin, että

(1) $\mathbb{K}(r) = \emptyset$ ja $\mathbb{K}(t) = K$ joillain $r, t \in \mathbb{R}$,

(2) jos $r \leq t$, niin $\mathbb{K}(r) \subseteq \mathbb{K}(t)$,

(3) jos $s \in K$, niin

$$r_s := \inf\{\, r \in \mathbb{R} \mid s \in \mathbb{K}(r)\,\} = \min\{\, r \in \mathbb{R} \mid s \in \mathbb{K}(r)\,\}.$$

Määritelmän kohta (3) ja ehto $\mathbb{K}(r) = \emptyset$ vastaavat oletusta 2.12. Huomautetaan siitä, että puhutaan myös pelkästä suodatuksesta $\mathbb{K}$. Otetaan vielä käyttöön merkintä $S(\mathbb{K}) = K$.

Määritelmä 5.16. Olkoot K simpleksinen kompleksi, $\mathbb{K}$ sen suodatus ja $\mathbb{U} = \{\mathbb{U}_i\}_{i=0}^m$ perhe simpleksisen kompleksin K alikompleksien suodatuksia. Perhettä $\mathbb{U}$ sanotaan suodatuksen $\mathbb{K}$ *peitteeksi*, mikäli kaikilla $r \in \mathbb{R}$ simpleksisten kompleksien perhe $\mathbb{U}(r) = \{\mathbb{U}_i(r)\}_{i=0}^m$ on simpleksisen kompleksin $\mathbb{K}(r)$ peite. Jos $\sigma \in \Delta^m$, niin $\mathbb{U}_\sigma$ on suodatus, jolla

$$\mathbb{U}_\sigma(r) = \bigcap_{i\in\sigma} \mathbb{U}_i(r)$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Mikäli $s \in K$, niin $\Delta_s^{\mathbb{U}}$ on suodatus, jolla

$$\Delta_s^{\mathbb{U}}(r) = \{\, \emptyset \neq \sigma \subseteq \{0, \dots, m\} \mid s \in \mathbb{U}_\sigma(r) \,\}$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 5.17. Olkoon $K = \{[a], [b], [c], [d], [a, b], [b, c][c, d][a, d]\}$. Tarkastellaan sen suodatusta

$$\mathbb{K}(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } r < 0, \\ \{\, [a], [b], [c], [d], [a, b], [c, d] \,\}, & \text{jos } 0 \leq r < 1, \\ \{\, [a], [b], [c], [d], [a, b], [b, d], [b, c] \,\}, & \text{jos } 1 \leq r < 2, \\ K, & \text{jos } 2 \leq r. \end{cases}$$

sekä suodatuksen $\mathbb{K}$ peitettä $\mathbb{U} = \{\mathbb{U}_0, \mathbb{U}_1\}$, jolla

$$\mathbb{U}_0(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } r < 0, \\ \{\, [a], [b], [a, b] \,\}, & \text{jos } 0 \leq r < 1, \\ \{\, [a], [b], [c], [a, b], [b, c] \,\}, & \text{jos } 1 \leq r \end{cases}$$

ja

$$\mathbb{U}_1(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } r < 0, \\ \{\, [c], [d], [c, d] \,\}, & \text{jos } 0 \leq r < 2, \\ \{\, [a], [c], [d], [c, d], [a, d] \,\}, & \text{jos } 2 \leq r. \end{cases}$$

Tällöin

$$\mathbb{U}_{[0,1]}(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } r < 2, \\ \{\, [a], [c] \,\}, & \text{jos } 2 \leq r \end{cases}$$

ja esimerkiksi

$$\Delta_{[a]}^{\mathbb{U}} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } r < 0, \\ \{\, [0] \,\}, & \text{jos } 0 \leq r < 2, \\ \{\, [0], [1], [0, 1] \,\}, & \text{jos } 2 < r. \end{cases}$$

Määritelmä 5.18. Simpleksisen kompleksin K suodatusta $\mathbb{K}$ vastaava *ketjukompleksi* on persistenssimodulien ketjukompleksi $C_*(\mathbb{K})$, jonka pisteittäiset vektoriavaruudet ovat

$$C_q(\mathbb{K})(r) = C_q(\mathbb{K}(r))$$

kaikilla $q \in \mathbb{N}$ ja $r \in \mathbb{R}$, sekä lineaarikuvaukset $C_q(\mathbb{K})(r \leq t)$ ovat inkluusioiden $\mathbb{K}(r) \subseteq \mathbb{K}(t)$ indusoimia kaikilla $q \in \mathbb{N}$ ja $r \leq t$. Tämän ketjukompleksin homologiamoduleita kutsutaan suodatuksen $\mathbb{K}$ *persistenteiksi homologioiksi* ja niille käytetään merkintää $\mathrm{PH}_q(\mathbb{K})$ kaikilla $q \in \mathbb{N}$.

Lemma 5.19. *Jos* $\mathbb{K}$ *on simpleksisen kompleksin* K *suodatus, niin*

$$C_q(\mathbb{K}) \cong \bigoplus_{s \in K_q} \mathbb{I}(r_s, \infty).$$

kaikilla $q \in \mathbb{N}$.

Todistus. Määritellään jokaiselle $s \in K_q$ persistenssivektori $\alpha_s : \mathbb{I}(r_s, \infty) \to C_q(\mathbb{K})$, jonka määrittää ehto $\alpha_s[r_s] = s \in C_q(\mathbb{K}(r_s))$. Koska $s \in \mathbb{K}(r)$ täsmälleen silloin, kun $r_s \leq r$, niin persistenssivektorien perhe $\{\alpha_s\}_{s \in K_q}$ indusoi isomorfismin $\bigoplus_{s \in K_q} \mathbb{I}(r_s, \infty) \to C_q(\mathbb{K})$. □

Edellisestä lemmasta motivoituneena samaistamme simpleksin $s \in K_q$ persistenssivektorin $\alpha_s : \mathbb{I}(r_s, \infty) \to C_q(\mathbb{K})$ kanssa.

Määritelmä 5.20. Olkoon $\mathbb{U}$ suodatuksen $\mathbb{K}$ peite. Tällöin ketjukompleksia

$$\check{\mathrm{C}}_*(q, \mathbb{U}) = \bigoplus_{s \in K_q} C_*(\Delta_s^{\mathbb{U}})$$

sanotaan $(q, \mathbb{U})$-*Čechin ketjukompleksiksi.* Tämän reunakuvauksille käytetään merkintää $d_{*q}^{\mathbb{U}}$.

Huomautus. Edellä määritelty Čechin ketjukompleksi on pisteittäin simpleksisen homologian Čechin ketjukompleksi, nimittäin kaikilla $r \in \mathbb{R}$ pätee

$$\check{\mathrm{C}}_*(q, \mathbb{U})(r) = \check{\mathrm{C}}_*(q, \mathbb{U}(r)).$$

Lemma 5.21. *Olkoon* $\mathbb{U}$ *suodatuksen* $\mathbb{K}$ *peite. Tällöin on olemassa morfismi* $\epsilon_q : \check{\mathrm{C}}_0(q, \mathbb{U}) \to C_q(\mathbb{K})$, *jolla jono*

$$\ldots \longrightarrow \check{\mathrm{C}}_{p+1}(q, \mathbb{U}) \xrightarrow{d_q^{\mathbb{U}}} \check{\mathrm{C}}_p(q,) \xrightarrow{d_q^{\mathbb{U}}} \ldots \xrightarrow{d_q^{\mathbb{U}}} \check{\mathrm{C}}_0(q, \mathbb{U}) \xrightarrow{\epsilon_q} C_q(\mathbb{K}) \longrightarrow 0$$

on eksakti.

Todistus. Jos $s \in K_q$, niin $\Delta_s^{\mathbb{U}} = \emptyset$ täsmälleen silloin, kun $s \notin \mathbb{U}_i(r)$ millään $i \in \{0, \ldots, m\}$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $s \notin \mathbb{K}(r)$. Täten, jos $I \subseteq \{0, \ldots, m\}$ on niiden indeksien $i \in \{0, \ldots, m\}$ muodostama joukko, joilla $s \in S(\mathbb{U}_i)$, niin

$$C_0(\Delta_s^{\mathbb{U}}) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{I}(r_{[i]_s}, \infty),$$

ja $r_s \leq r_{[i]_s}$ kaikilla $i \in I$. Tässä siis

$$r_{[i]_s} = \min\{\, r \in \mathbb{R} \mid [i]_s \in \Delta_s^{\mathbb{U}}(r) \,\} = \min\{\, r \in \mathbb{R} \mid s \in \mathbb{U}_i(r) \,\}.$$

Ehdot $[i]_s[r_{[i]_s}] \mapsto 1_{\mathbb{F}}$ määrittävät morfismin $\epsilon_s : C_0(\Delta_s^{\mathbb{U}}) \to \mathbb{I}(r_s, \infty)$ ja lauseen 5.8 nojalla jono

$$\ldots \longrightarrow C_{p+1}(\Delta_s^{\mathbb{U}}) \xrightarrow{\partial_s} C_p(\Delta_s^{\mathbb{U}}) \xrightarrow{\partial_s} \ldots \xrightarrow{\partial_s} C_0(\Delta_s^{\mathbb{U}}) \xrightarrow{\epsilon_s} \mathbb{I}(r_s, \infty) \longrightarrow 0$$

on eksakti. Näsitä saadaan eksakti jono

$$(\check{C}_*(q, \mathbb{U}) \xrightarrow{\epsilon_q} C_q(\mathbb{K}) \longrightarrow 0) \cong \bigoplus_{s \in K_q} (C_*(\Delta_s^{\mathbb{U}}) \longrightarrow \mathbb{I}(r_s, \infty) \longrightarrow 0).$$

□

Lemma 5.22. *Olkoot* $\mathbb{U}$ *suodatuksen* $\mathbb{K}$ *peite ja* $p, q \in \mathbb{N}$. *Tällöin*

$$\check{C}_p(q, \mathbb{U}) \cong \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(\mathbb{U}_\sigma).$$

Todistus. Lauseen 5.9 nojalla saadaan pisteittäiset isomorfismit

$$\check{C}_p(q, \mathbb{U})(r) \cong \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(\mathbb{U}_\sigma)(r)$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Koska

$$r_{s_\sigma} = \min\{\, r \in \mathbb{R} \mid s_\sigma \in \mathbb{U}_\sigma \,\} = \min\{\, r \in \mathbb{R} \mid \sigma_s \in \Delta_s^{\mathbb{U}} \,\} = r_{\sigma_s}$$

kaikilla $s \in S(\mathbb{U}_\sigma)$, niin nämä pisteittäiset isomorfismit määrittävät persistenssimodulien välisen morfismin $\check{C}_p(q, \mathbb{U}) \to \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(\mathbb{U}_\sigma)$. Näin ollen

$$\check{C}_p(q, \mathbb{U}) \cong \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(\mathbb{U}_\sigma).$$

□

Merkitään lemman 5.22 isomorfismia $\psi_{pq} : \check{C}_p(q, \mathbb{U}) \to \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(\mathbb{U}_\sigma)$. Määritellään reunakuvaukset

$$\delta_{pq} = \psi_{p-1,q} \circ d_{pq}^{\mathbb{U}} \circ \psi_{pq}^{-1} : \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(\mathbb{U}_\sigma) \to \bigoplus_{\sigma \in \Delta_{p-1}^m} C_q(\mathbb{U}_\sigma).$$

Näiden lisäksi meillä on luonnolliset reunakuvaukset

$$\partial_{pq} : \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(\mathbb{U}_\sigma) \to \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_{q-1}(\mathbb{U}_\sigma).$$

Lemma 5.23. *Kaikilla* $p, q > 0$ *pätee* $\partial_{p-1,q} \circ \delta_{pq} = \delta_{p,q-1} \circ \partial_{pq}$.

Todistus. Koska suodatuksen peitteen Čechin ketjukompleksi on pisteittäin simpleksisen homologian peitteen Čechin ketjukompleksi, niin seurauksen 5.11 nojalla

$$\partial_{p-1,q}(r) \circ \delta_{pq}(r) = \delta_{p,q-1}(r) \circ \partial_{pq}(r)$$

kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Näin ollen $\partial_{p-1,q} \circ \delta_{pq} = \delta_{p,q-1} \circ \partial_{pq}$. □

Määritelmä 5.24. Olkoon $\mathbb{K}$ simpleksisen kompleksin K suodatus ja $\mathbb{U}$ sen peite. Peitettä $\mathbb{U}$ vastaava *Čechin kaksoiskompleksi* on persistenssimodulien kaksoiskompleksi $\check{\mathrm{C}}(\mathbb{U})$, jonka objektit ovat

$$\check{\mathrm{C}}_{pq}(\mathbb{U}) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta_p^m} C_q(\mathbb{U}_\sigma)$$

ja reunakuvaukset ovat $d_{pq}^h = (-1)^q \delta_{pq}$ sekä $d_{pq}^v = \partial_{pq}$. Tämän kaksoiskompleksin määräämää ensimmäistä spektraalijonoa sanotaan peitteen $\mathbb{U}$ *persistentin homologian Mayer-Vietoris-spektraalijonoksi* ja tälle käytetään merkintää $\{{}^{\mathbb{U}}\mathbb{E}_{pq}^r\}_{p,q\in\mathbb{Z}}^{r\geq 0}$. Mikäli ei ole sekaantumisen vaaraa, puhutaan peitteen $\mathbb{U}$ Mayer-Vietoris-spektraalijonosta.

Lause 5.25. *Olkoon $\mathbb{U}$ suodatuksen $\mathbb{K}$ peite. Tällöin peitteen $\mathbb{U}$ Mayer-Vietoris-spektraalijono suppenee kohti suodatuksen $\mathbb{K}$ persistenttejä homologiamoduleja, eli*

$${}^{\mathbb{U}}\mathbb{E}_{pq}^0 \Rightarrow \mathrm{PH}_{p+q}(\mathbb{K}).$$

Todistus (vrt. [12, s. 606-607]). Kaksoiskompleksin $\check{\mathrm{C}}(\mathbb{U})$ sarakkeen $p = 0$ termit ovat muotoa

$$\check{\mathrm{C}}_{0q}(\mathbb{U}) = \bigoplus_{i=0}^{m} C_q(\mathbb{U}_i).$$

Jos ϵ_q on inkluusioiden $C_q(\mathbb{U}_i) \to C_q(\mathbb{K})$ indusoima morfismi, niin ϵ_q vastaa lemmassa 5.21 esitettyä morfismia $\check{\mathrm{C}}_0(q, \mathbb{U}) \to C_q(\mathbb{K})$. Lisäksi kaavio

$$\begin{tikzcd}
C_{q+1}(\mathbb{K}) \arrow[d, "\partial_{n+1}"'] & \check{\mathrm{C}}_{0,q+1}(\mathbb{U}) \arrow[l, "\epsilon_{q+1}"'] \arrow[d, "\partial_{0,q+1}"] \\
C_n(\mathbb{K}) & \check{\mathrm{C}}_{0q}(\mathbb{U}) \arrow[l, "\epsilon_q"]
\end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $q \in \mathbb{N}$. Nyt ottamalla mallia lauseen 5.13 todistuksesta voidaan osoittaa isomorfismi

$$\mathrm{PH}_n(\mathrm{TC}(\check{\mathrm{C}}(\mathbb{U}))) \cong \mathrm{PH}_n(\mathbb{K}).$$

Näin ollen lauseen 1.11 nojalla

$${}^{\mathbb{U}}\mathbb{E}_{pq}^r \Rightarrow \mathrm{PH}_{p+q}(\mathbb{K}).$$

□

Esimerkki 5.26. Olkoon $K = \{[a], [b], [c], [a,b], [b,c]\}$ ja tarkastellaan tämän suodatusta

$$\mathbb{K}(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } r < 0, \\ \{[a], [b], [c], [a,b]\}, & \text{jos } 0 \leq r < 1, \\ K, & \text{jos } 1 \leq r. \end{cases}$$

Tässä esimerkissä ensin lasketaan suodatuksen $\mathbb{K}$ persistentit homologiamodulit, minkä jälkeen lasketaan suodatuksen $\mathbb{K}$ peitteen Mayer-Vietoris-spektraalijono. Huomautetaan siitä, että tässä tulemme samaistamaan tekijämodulien persistenssivektorit sopivien edustajien kanssa. Lisäksi tässä esimerkissä, jos merkitsemme $\mathbb{E}^r_{pq} = \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$, niin $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$ on aina viivakoodikanta.

Lasketaan aluksi suodatuksen $\mathbb{K}$ persistentit homologiat suoraan määritelmän mukaan. Samaistetaan simpleksi $s \in K_q$ sitä vastaavana persistenssivektorina $s : \mathbb{I}(r_s, \infty) \to C_q(\mathbb{K})$. Selkeyden vuoksi merkitään $\alpha = (\alpha, \mathbb{b}(\alpha), \mathbb{d}(\alpha))$ kaikilla persistenssivektoreilla α. Tässä suodatuksen $\mathbb{K}$ ketjukompleksi on siis muotoa

$$0 \longrightarrow C_1(\mathbb{K}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{K}) \longrightarrow 0$$

ja sen termien viivakoodikannoiksi saadaan

$$C_0(\mathbb{K}) = \langle ([a], 0, \infty), ([b], 0, \infty), ([c], 0, \infty) \rangle$$

ja

$$C_1(\mathbb{K}) = \langle ([a, b], 0, \infty), ([b, c], 1, \infty) \rangle.$$

Selvästi $\ker(\partial_1) = 0$, jolloin $\mathrm{PH}_1(\mathbb{K}) = 0$. Lasketaan $\mathrm{PH}_0(\mathbb{K})$. Kuvalle $\mathrm{im}(\partial_1)$ saadaan viivakoodikanta

$$\mathrm{im}(\partial_1) = \langle (-[a] \boxplus [b], 0, \infty), 1_1(-[c] \boxplus [b], 1, \infty) \rangle.$$

Soveltamalla algoritmia 3.14 saadaan tekijämodulille $\mathrm{PH}_0(\mathbb{K})$ viivakoodikanta

$$\mathrm{PH}_0(\mathbb{K}) = \langle ([b], 0, \infty), ([c], 0, 1) \rangle.$$

Seuraavaksi lasketaan suodatuksen $\mathbb{K}$ peitteen Mayer-Vietoris-spektraalijono. Olkoon $\mathbb{U} = \{\mathbb{U}_0, \mathbb{U}_1\}$, jolla

$$\mathbb{U}_0(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } r < 0, \\ \{\, [a], [b], [a, b] \,\}, & \text{jos } 0 \leq r \end{cases}$$

ja

$$\mathbb{U}_1(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } r < 0, \\ \{\, [b], [c] \,\}, & \text{jos } 0 \leq r < 1, \\ \{\, [b], [c], [b, c] \,\}, & \text{jos } 1 \leq r. \end{cases}$$

Tällöin

$$\mathbb{U}_{[0,1]}(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } r < 0, \\ \{\, [b] \,\}, & \text{jos } 0 \leq r. \end{cases}$$

Tämän peitteen Čechin kaksoiskompleksi on muotoa

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
0 & \check{C}_{01}(\mathbb{U}) \arrow[l] \arrow[d, "d^v"'] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
0 & \check{C}_{00}(\mathbb{U}) \arrow[l] \arrow[d] & \check{C}_{10}(\mathbb{U}) \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 & ,
\end{tikzcd}$$

Sen termeillä on viivakoodikannat

- $\check{C}_{00}(\mathbb{U}) = \langle([a]_{[0]}, 0, \infty), ([b]_{[0]}, 0, \infty), ([b]_{[1]}, 0, \infty), [c]_{[1]}, 0, \infty)\rangle$,
- $\check{C}_{01}(\mathbb{U}) = \langle([a, b]_{[0]}, 0, \infty), ([b, c]_{[1]}, 1, \infty)\rangle$,
- $\check{C}_{10}(\mathbb{U}) = \langle([b]_{[0,1]}, 0, \infty)\rangle$.

Suodattamalla sarakkeiden suhteen saadaan totaalikompleksin suodatus

$$0 = F_{-1}\mathbb{T} \subseteq F_0\mathbb{T} \subseteq F_1\mathbb{T} = \mathbb{T},$$

jonka termeillä on viivakoodikannat

- $F_0\mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_0 = \langle([a]_{[0]}, 0, \infty), ([b]_{[0]}, 0, \infty), ([b]_{[1]}, 0, \infty), [c]_{[1]}, 0, \infty)\rangle$,
- $F_0\mathbb{T}_1 = \langle([a, b]_{[0]}, 0, \infty), ([b, c]_{[1]}, 1, \infty)\rangle$,
- $F_1\mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_0 = \langle([a]_{[0]}, 0, \infty), ([b]_{[0]}, 0, \infty), ([b]_{[1]}, 0, \infty), [c]_{[1]}, 0, \infty)\rangle$,
- $F_1\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_1 = \langle([a, b]_{[0]}, 0, \infty), ([b, c]_{[1]}, 1, \infty), ([b]_{[0,1]}, 0, \infty)\rangle$.

Tästä suodatuksesta tulee peitteen $\mathbb{U}$ Mayer-Vietoris-spektraalijono. Sivun 0 termeiksi saadaan

- $\mathbb{E}^0_{00} = F_0\mathbb{T}_0$,
- $\mathbb{E}^0_{01} = F_0\mathbb{T}_1$,
- $\mathbb{E}^0_{10} = F_1\mathbb{T}_1/F_0\mathbb{T}_1 = \langle([b]_{[0,1]}, 0, \infty)\rangle$,
- $\mathbb{E}^0_{1,-1} = F_1\mathbb{T}_0/F_0\mathbb{T}_0 = 0$.

Reunakuvauksen d^0_{01} kuvan viivakoodikannaksi saadaan

$$\mathrm{im}(d^0_{01}) = \langle(-a_{[0]} \boxplus b_{[0]}, 0, \infty), (1_1(-[b]_{[1]} \boxplus [c]_{[1]}), 1, \infty)\rangle.$$

Täten sivun 1 termeiksi saadaan

- $\mathbb{E}^1_{00} = \mathbb{E}^0_{00}/\mathrm{im}(d^0_{01}) = \langle([b]_{[0]}, 0, \infty), ([b]_{[1]}, 0, \infty), ([c]_{[1]}, 0, 1)\rangle$,
- $\mathbb{E}^1_{01} = \ker(d^0_{01}) = 0$,
- $\mathbb{E}^1_{10} = \mathbb{E}^0_{10}$.

Reunakuvauksen d^1_{10} kuvan viivakoodikannaksi saadaan

$$\mathrm{im}(d^1_{01}) = \langle(-[b]_{[0]} \boxplus [b]_{[1]}, 0, \infty)\rangle.$$

Siis sivun 2 termeiksi saadaan

- $\mathbb{E}^2_{00} = \mathbb{E}^1_{00}/\mathrm{im}(d^1_{10}) = \langle([b]_{[0]}, 0, \infty), ([c]_{[1]}, 0, 1)\rangle$,
- $\mathbb{E}^2_{10} = \ker(d^1_{10}) = 0$.

Täten

$$\mathbb{E}^\infty_{pq} = \mathbb{E}^2_{pq} \cong \begin{cases} \mathbb{I}(0,\infty) \oplus \mathbb{I}(0,1), & \text{jos } (p,q) = (0,0), \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä esimerkissä ei syntynyt laajennusongelmaa, sillä

$$\mathrm{PH}_n(\mathbb{K}) \cong \bigoplus_{p+q=n} \mathbb{E}^\infty_{pq},$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Torras-Casasin artikkelin [12] sivulla 607 on esitetty esimerkki Mayer-Vietoris-spektraalijonosta, jossa syntyy laajennusongelma.

5.3 Totaalipersistenssi

Totaalipersistenssi on persistenssimodulin kvantitatiivinen arvo, jonka laskeminen ei vaadi laajennusongelman ratkaisua. Tämä toki tarkoittaa sitä, että totaalipersistenssi antaa saman arvon hyvin erilaisille persistenssimoduleille. Tästä huolimatta osoittautuu, että persistentin homologian totaalipersistenssi sisältää mielenkiintoista informaatiota alkuperäisestä avaruudesta. Totaalipersistenssin perusominaisuuksia on käsitelty artikkelissa [5] ja sen yhteyttä Hausdorffin dimensioon on käsitelty artikkelissa [10].

Määritelmä 5.27. Persistenssimodulia $\mathbb{V}$ vastaava *tiheysfunktio* on funktio

$$\rho_{\mathbb{V}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r \mapsto \dim(\mathbb{V}(r)).$$

Persistenssimodulin *totaalipersistenssi* on luku

$$\mathrm{Tot}(\mathbb{V}) := \int_{\mathbb{R}} \rho_{\mathbb{V}}.$$

Lause 5.28. *Jos* $\mathbb{U}$ *ja* $\mathbb{W}$ *ovat persistenssimoduleja, niin* $\rho_{\mathbb{U}\oplus\mathbb{W}} = \rho_{\mathbb{U}} + \rho_{\mathbb{W}}$ *ja* $\mathrm{Tot}(\mathbb{U}\oplus\mathbb{W}) = \mathrm{Tot}(\mathbb{U}) + \mathrm{Tot}(\mathbb{W})$. *Erityisesti, jos* $\mathbb{V} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{I}(a_i, b_i)$ *ja* $b_i < \infty$ *kaikilla* $i \in \{1, \dots, n\}$, *niin*

$$\mathrm{Tot}(\mathbb{V}) = \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| .$$

Todistus. Jos $\mathbb{U}$ ja $\mathbb{W}$ ovat persistenssimoduleja, niin

$$\rho_{\mathbb{U}\oplus\mathbb{W}}(r) = \dim((\mathbb{U}\oplus\mathbb{W})(r)) = \dim(\mathbb{U}(r)) + \dim(\mathbb{W}(r)) = \rho_{\mathbb{U}}(r) + \rho_{\mathbb{V}}(r).$$

Siis $\rho_{\mathbb{U}\oplus\mathbb{V}} = \rho_{\mathbb{U}} + \rho_{\mathbb{V}}$ ja erityisesti

$$\mathrm{Tot}(\mathbb{U}\oplus\mathbb{V}) = \mathrm{Tot}(\mathbb{U}) + \mathrm{Tot}(\mathbb{V}).$$

Nähdään myös, että jos $a < b < \infty$, niin $\mathrm{Tot}(\mathbb{I}(a,b)) = |b - a|$. Näin ollen

$$\mathrm{Tot}(\mathbb{V}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tot}(\mathbb{I}(a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| .$$

□

Koska tiheysfunktio ja totaalipersistenssi riippuvat vain pisteittäisistä dimensioista, totaalipersistenssi saadaan laskettua suoraan spektraalijonoista ilman laajennusongelman ratkaisua.

Lause 5.29. *Jos persistenssimodulit* $\mathbb{V}$ *ja* $\mathbb{W}$ *ovat pisteittäin isomorfiset, niin niillä on samat tiheysfunktiot ja* $\mathrm{Tot}(\mathbb{V}) = \mathrm{Tot}(\mathbb{W})$. *Erityisesti, jos* $\mathbb{E}^0_{pq} \Rightarrow \mathrm{PH}_{p+q}(\mathbb{V}_*)$, *niin*

$$\mathrm{Tot}(\mathbb{V}_n) = \sum_{p+q=n} \mathrm{Tot}(\mathbb{E}^{\infty}_{pq}).$$

Todistus. Lauseen ensimmäinen osa seuraa suoraan määritelmästä ja näin ollen jälkimmäinen osa seuraa pisteittäisistä isomorfismeista (4.2) sekä lauseesta 5.28. □

Huomautus. Artikkelissa [5] on määritelty p-totaalipersistenssi välien monijoukolle $\{[a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ lukuna

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i|^p$$

ja artikkeleissa [10] ja [4] käytetään samaa arvoa. Vastaavasti määrittelemme persistenssimodulin $\mathbb{V} \cong \bigoplus_{I=1}^{n} \mathbb{I}(a_i, b_i)$ *p-totaalipersistenssin* yllä olevana lukuna ja käytämme sille merkintää $\mathrm{Tot}_p(\mathbb{V})$.

On suoraviivaista nähdä, että $\mathrm{Tot}_p(\mathbb{U}\oplus\mathbb{W}) = \mathrm{Tot}_p(\mathbb{U}) + \mathrm{Tot}_p(\mathbb{V})$, mutta p-totaalipersistenssi ei säily pisteittäisissä isomorfismeissa. Esimerkiksi, jos $\mathbb{V} = \mathbb{I}(0,2)$ ja $\mathbb{U} = \mathbb{I}(0,1) \oplus \mathbb{I}(1,2)$, niin

$$\mathrm{Tot}_2(\mathbb{V}) = 4 \neq 2 = \mathrm{Tot}_2(\mathbb{U}).$$

Näin ollen tämän tutkielman ja erityisesti laajennusongelman näkökulmasta tapaus $p = 1$ on oleellisin.

Persistentin homologian yhteyksiä metristen avaruuksien geometriaan ja erityisesti niiden dimensioihin on havaittu lukuisten empiiristen kokeiden sekä teoreettisten tulosten kautta. Esimerkiksi Robins tutki väitöskirjassaan [9] dynaamisten systeemien attraktorien ja itsesimilaaristen fraktaalien geometristen ominaisuuksien yhteyttä persistentteihin Bettin lukuihin.

Yksi motivaatio totaalipersistenssille on sen yhteys Hausdorffin dimensioon. Schweinhart artikkeli [10] käsittelee metrisen mitta-avaruuden satunnaisotoksen Vietoris-Rips- ja Čech-kompleksien suodatuksien redusoidun persistentin homologian totaalipersistenssin yhteyttä avaruuden Hausdorffin dimensioon. Tässä $\widetilde{\mathrm{PH}}$ tarkoittaa redusoitua persistenttiä homologiaa.

Lause 5.30 ([10, lause 3]). *Olkoot (X, d, μ) kompakti ja d-Ahlfors-säännöllinen metrinen mitta-avaruus ja $d > p$. Olkoon $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ riippumaton otos mitasta μ ja merkitään $\mathbb{K}_n = \mathrm{VR}(X_n)$. Tällöin on olemassa luvusta n sekä otoksesta X_n riippumaton luku $C > 1$ niin, että*

$$\frac{1}{C} \cdot n^{\frac{d-p}{d}} \leq \mathrm{Tot}_p(\widetilde{\mathrm{PH}}_0(\mathbb{K}_n)) \leq C \cdot n^{\frac{d-p}{d}}$$

suurella todennäköisyydellä, kun $n \to \infty$. Tällöin erityisesti

$$\frac{\log(\mathrm{Tot}_p(\widetilde{\mathrm{PH}}_0(\mathbb{K}_n)))}{\log(n)} \approx \frac{d-p}{d},$$

suurella todennäköisyydellä, kun $n \to \infty$.

Lauseen 5.30 nojalla Hausdorffin dimensio kontrolloi totaalipersistenssin kasvua. Tämä motivoi tutkimaan avaruuden dimensioita persistentin homologian avulla. Artikkelissa [10] on määritelty metrisen mitta-avaruuden (X, d, μ) *i-persistentin homologian dimensio* parametreilla $p > 0$ ja $i \in \mathbb{N}$ lukuna

$$\dim_{\mathrm{PH}_i}((X, d, \mu)) = \frac{p}{1-c},$$

missä

$$c = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\mathbb{E}(\mathrm{Tot}(\mathrm{PH}_i(\mathbb{K}_n))))}{\log(n)},$$

$\mathbb{K}_n = \mathrm{VR}(X_n)$ ja $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ on riippumaton satunnaisotos mitasta μ.

Luonnollinen kysymys nyt on se, että pystyykö lauseessa 5.30 esitetyn kaltaista estimaattia todistamaan i-persistentille homologialle, kun $i > 0$. Yleisesti vastaus tähän on kielteinen.

Esimerkki 5.31. Olkoon $X = [0, 1]$ varustettuna euklidisella etäisyydellä. Tällöin $\mathrm{Tot}_{0.5}(\widetilde{\mathrm{PH}}_1(\mathrm{VR}(X_0))) = 0$ kaikilla äärellisillä osajoukoilla $X_0 \subseteq X$.

Todistus. Olkoon $r > 0$ ja oletetaan, että

$$z = c_0[x_0, x_1] + c_1[x_1, x_2] + \cdots + c_{n-1}[x_{n-1}, x_n] + c_n[x_n, x_0] \in C_1(\mathrm{VR}(X_0)(r))$$

on sykli. Tässä siis $d(x_0, x_1), d(x_1, x_2), \dots, d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_0) \leq r$. Tällöin

$$\max\{\, d(x_i, x_j) \mid 0 \leq i \leq j \leq n\} \leq r.$$

Tämä seuraa siitä, että jos $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, niin $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$. Näin ollen $P(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathrm{VR}(X_0)(r)$ ja voidaan todeta, että $\widetilde{H}_1(\mathrm{VR}(X_0)(r)) = 0$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ eli $\widetilde{\mathrm{PH}}_1(\mathrm{VR}(X_0)) = 0$. □

Schweinhart osoitti artikkelissaan [10] lauseen 5.30 kaltaiset estimaatit i-persistentin homologian tapauksessa, mutta tämä edellyttää avaruudelta X tiettyjä ominaisuuksia ja näiden tarkistaminen ei yleisesti ole helppoa (ks. [10, s. 7-12]).

Artikkelissa [4] Jaquette ja Schweinhart tekivät empiirisen kokeen, jossa he vertailivat avaruuksien i-persistentin homologian dimensioita ($i \in \{1, 2\}$) muihin dimensioihin. Vertailun kohteena oli esimerkiksi itsesimilaarien fraktaalien, kuten Mengerin kuution sekä eräiden dynaamisten systeemien attraktorien laatikkodimensio. Tulokset olivat vaihtelevia, mutta riittävän hyviä vakuuttamaan, että i-persistentti homologia ($i > 0$) on hyödyllinen työkalu fraktaalien tutkimiseen.

5.4 Mayer-Vietoris-spektraalijonojen sovelluksia

Tutkielman viimeisenä asiana pohdimme Mayer-Vietoris-spektraalijonojen sovelluksia. Tarkastelemme aluksi simpleksisen homologian tapausta. Lause 5.14 käytännössä tarkoittaa sitä, että simpleksisen kompleksin K homologiat saadaan jälleenrakennettua sen peitteen $\mathcal{U}$ jäsenten homologioista spektraalijonojen kautta. Merkittävää tässä on muun muassa se, että simpleksinen homologia voidaan aina päätellä lokaalin homologisen informaation avulla.

Luonnollisesti ideaali tilanne olisi se, että homologiat $H_n(K)$ saataisiin suoraan pääteltyä peitteen $\mathcal{U}$ jäsenten homologioista. Yleisesti tämä ei ole mahdollista, sillä meidän täytyy ottaa huomioon, miten perheen $\mathcal{U}$ jäsenet leikkaavat keskenään. Laskennan hajauttamisen maksimoimiseksi tarvitaan peite, jonka jäsenten leikkausten homologiat ovat mahdollisimman yksinkertaisia tai jopa triviaaleja.

Simpleksisen homologian tapauksessa termien ${}^{\mathcal{U}}E^{\infty}_{pq}$ laskeminen riittää varsinaisen homologian laskemiseen. Persistentin homologian tapauksessa tarina jatkuu laajennusongelmaan, mikä tietysti edellyttää lisää laskentaa. Tämä motivoi tutkimaan sellaista informaatiota, joka ei vaadi laajennusongelman ratkaisua. Esimerkiksi totaalipersistenssi on tällainen. Erityisesti lauseella 5.29 on mahdollisesti teoreettisia seuraksia, esimerkiksi lauseen 5.30 näkökulmasta. Näin ollen korostamme lopuksi persistentin homologian ja erityisesti Mayer-Vietoris-spektraalijonon mahdollisia sovelluksia geometriseen mittateoriaan.

Lähteet

[1] Chow, T.Y. *You could have invented spectral sequences. Notices of the American Mathematical Society, 53:15–19, 2006.*

[2] Cohen-Steiner, D., Edelsbrunner, H., Harer, J. ja Morozov, D. *Persistent homology for kernels, images, and cokernels. Proceedings of the 2009 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, s. 1011-1020, 2009.

[3] Govc, D. ja Skraba, P. *An approximate nerve theorem. Foundations of Computational Mathematics, 18(5): s. 1245-1297, 2018.*

[4] Jaquette, J. ja Schweinhart, B. *Fractal dimension estimation with persistent homology: A comparative study. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 84:105163, 2020.*

[5] Kusano, G., Fukumizu, K. ja Hiraoka, Y. *Kernel method for persistence diagrams via kernel embedding and weight factor. Journal of Machine Learning Research, 18(189): s. 1-41, 2018.*

[6] Lesnick, M. *Notes on multiparameter persistence*, 2023. Saatavilla: https://www.albany.edu/~ML644186/840_2022/Math840_Notes_22.pdf.

[7] Lipsky, D., Skraba, P. ja Vejdemo-Johansson, M. *A spectral sequence for parallelized persistence*. arXiv:1112.1245 [cs.CG], 2011.

[8] Munkres, J.R. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley, 1984. ISBN 0-201-04586-9.

[9] Robins, V. *Computational topology at multiple resolutions: Foundations and applications to fractals and dynamics*. PhD thesis, University of Colorado Boulder, 2000.

[10] Schweinhart, B. *Fractal dimension and the persistent homology of random geometric complexes. Advances in Mathematics, 372:107291, 2020.*

[11] Torras Casas, Á. *Distributing persistent homology via spectral sequences.* arXiv:1907.05228 [math.AT], 2020.

[12] Torras-Casas, Á. *Distributing persistent homology via spectral sequences. Discrete & Computational Geometry, 2023.*

[13] Torras Casas, Á. *PerMaViss: Persistence Mayer Vietoris spectral sequence*, 2020. Saatavilla: https://doi.org/10.5281/zenodo.3613870.

[14] Weibel, C.A. *An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38*. Cambridge University Press, 1994. ISBN 0-521-55987-1.