

Mari Muurman

**KOLLINEARISUUSYHTÄLÖT SEKÄ SUORA
LINEAARIMUUNNOS ANALYYTTISESSÄ
FOTOGRAMMETRIASSA**

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Kimmo Vattulainen
Lokakuu 2023

TIIVISTELMÄ

Mari Muurman: Kollineaarisuusyhtälöt sekä suora lineaarimuunnos analyttisessä fotogrammetrias-
sa

Kandidaatintyö

Tampereen yliopisto

Tekniikka ja luonnontieteet, TkK

Lokakuu 2023

Tämän työn tarkoituksena on esitellä analyttisen fotogrammetrian perusmenetelmiä sekä niihin liittyviä matemaattisia peruskäsitteitä. Työssä esitellään perspektiiviprojektio, johon fotogrammetrian sovellukset pohjautuvat sekä matriisialgebraa, jota hyödynnetään laajalti fotogrammetrian perussovelluksissa. Työn tavoitteena on luoda selkeä käsitys analyttisen fotogrammetrian peruskäsitteistä sekä matematiikasta, johon se perustuu.

Työn aluksi keskitytään matemaattisiin peruskäsitteisiin, joita tarvitaan työssä myöhemmin sekä esitellään lukijalla termit ja koordinaatisto, jota tässä työssä käytetään. Alussa tutustutaan myös lineaarimuunnoksiin sekä rotaatiomatriisiin ja niiden matemaattisiin ominaisuuksiin.

Seuraavaksi käsitellään kollineaarisuusyhtälöitä, joiden avulla voidaan todeta perspektiiviprojektion ominausten toteutuvan. Yhtälöt johdetaan ja osoitetaan oikeiksi. Tämän jälkeen tutustutaan koplanariteettiehtoon, joka laajentaa kollineaarisuusyhtälöitä useamman kuvan tapaukseen. Osion lopuksi tutustutaan suoraan lineaarimuunnokseen.

Lopuksi tuodaan työssä esitellyt määritelmät yhteen ja lyhyesti pohditaan niiden eroja sekä tilanteita, joihin tietyt määritellyt yhtälöt soveltuvat parhaiten.

Avainsanat: fotogrammetria, perspektiiviprojektio, kollineaarisuusyhtälöt, koplanariteettiehto, lineaarimuunnos

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto	1
2.	Analyttisen fotogrammetrian peruskäsitteet	2
2.1	Perspektiiviprojektio	2
2.2	Koordinaatisto	3
2.3	Lineaari- ja affiniimuunnokset.	4
2.4	Rotaatiomatriisi	5
3.	Kollineaarisuusyhtälöt	8
4.	Koplanariteettiehto	11
5.	Suora lineaarimuunnos	13
6.	Yhteenveto	15
	Lähteet.	16

LYHENTEET JA MERKINNÄT

(X_C, Y_C, Z_C)	projisointikeskus
(x_0, y_0)	pääpiste
T	muunnosfunktio
X, Y, Z	kolmiulotteiset kohdekoordinaatit
κ	rotaatio z-akselin suhteen
\mathbb{R}	reaaliluvut
\mathbb{R}^m	m -ulotteinen reaalilukujen avaruus
\mathbf{R}	rotaatiomatriisi
\mathbf{u}, \mathbf{v}	vektorit
ω	rotaatio x-akselin suhteen
ϕ	rotaatio y-akselin suhteen
f	polttoväli
x, y	kaksiulotteiset kuvakoordinaatit

1. JOHDANTO

Fotogrammetrialla tarkoitetaan todenmukaisen informaation keruuta kolmiulotteisesta kohteesta ja sen ympäristöstä mittaamalla sekä tulkitsemalla siitä otettuja kaksiulotteisia kuvia. Havaintoja voidaan tehdä joko yksittäisistä kuvista tai useammasta, osittain päällekkäisestä kuvasta. Fotogrammetrian avulla pyritään näin selvittämään kohteen ja kuvan välinen tarkka geometrinen suhde kuvanottohetkellä. Kun tämä suhde on selvitetty, voidaan kohteesta tehdä havaintoja pelkästään siitä otettujen kuvien perusteella.

Kohteen ja kuvan geometrista suhdetta voidaan selvittää joko analogisesti tai analyyttisesti. Näistä kahdesta analyyttinen fotogrammetria on nykypäivänä korvaamassa analogiset ratkaisut. Analyyttisessä fotogrammetriassa tuntemattomia tekijöitä ratkaistaan matemaattisin menetelmin käyttäen apuna kuvista digitaalisesti saatua dataa. Tähän prosessiin kuuluu usein suurten kompleksisten yhtälöryhmien ratkaisu pienimmän neliösumman menetelmällä, jonka takia analyyttisen fotogrammetrian käsite tunnettiin jo ennen kuin sitä pystyttiin hyödyntämään sen vaatiman laskentatehon vuoksi. Tietokoneiden kehitys on kuitenkin mahdollistanut analyyttisten fotogrammetristen menetelmien kehityksen ja niiden hyödyntämisen monilla eri aloilla niin kaukokartoituksessa kuin peliteknologiassakin.

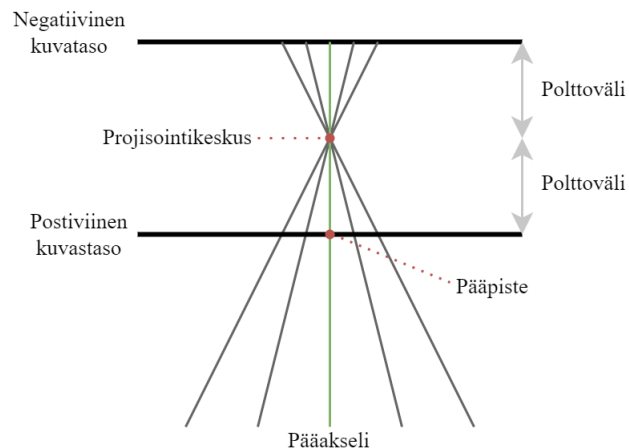
Tämän työn tarkoituksena on esitellä kolme eri menetelmää tuntemattomien muuttujien ratkaisemiseksi; kollineaarisuusyhtälöt, koplanariteettiyhtälö sekä suora lineaarimuunnos. Työssä käsitellään ensin muutamia fotogrammetriaan liittyviä peruskäsitteitä ja perustellaan niihin liittyvät matemaattiset määritelmät. Seuraavaksi esitellään kollineaarisuusyhtälöt, joihin fotogrammetria perustuu, jonka jälkeen laajennetaan yhtälöitä koplanariteettiyhtälöiksi, joita voidaan soveltaa useamman kohteesta otetun kuvan tapauksessa. Lopuksi esitellään vielä suora lineaarimuunnos, joka ottaa huomioon kuvissa mahdollisesti olevia tekniikasta johtuvia virheitä.

2. ANALYTTISEN FOTOGRAMMETRIAN PERUSKÄSITTEET

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti tähän työhön liittyviä analyttisen fotogrammetrian peruskäsitteitä. Luvussa esitellään perspektiiviprojektio, johon lähes kaikki fotogrammetrian perusmenetelmät pohjautuvat. Lisäksi perehdytään koordinaatistoon, jota tässä työssä käytetään. Luvussa käydään läpi myös lineaari- ja affiinimuunnosten sekä rotaatiomatriisien määritelmät sekä niiden perusominaisuuksia, joita tarvitaan myöhemmin kollineaarisuus- ja koplanariteettiyhtälöiden määrittelemisessä.

2.1 Perspektiiviprojektio

Yksi fotogrammetrian peruskäsitteistä, johon koko fotogrammetrian käsite pohjautuu, on perspektiiviprojektio. Perspektiiviprojektio ilmaisee, kuinka kolmiulotteiset kohteet projisoituvat eli kuvautuvat kaksiulotteiselle pinnalle. [9] Tästä kaksiulotteisesta pinnasta, joka kuvaa kolmiulotteista kohdetta, käytetään tästä eteenpäin termiä kuva.



Kuva 2.1. Perspektiiviprojektion termit.

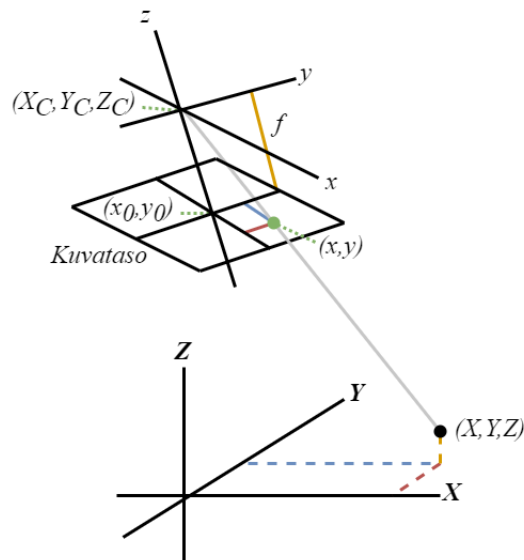
Perspektiiviprojektio havainnollistaa todellista kohdetta projisointikeskuksen avulla. Projisointikeskus on piste, jonka kautta kaikki valonsäteet kulkevat kohdepisteestä suoraa linjaa pitkin tarkkailu- eli kuvapisteeseen, joka voi olla esimerkiksi kameran linssi tai silmä. Projisointikeskuksen molemmin puolin sijaitsevat negatiivinen sekä positiivinen kuvataso saman etäisyyden, polttovälin, päässä. Kaikki kuvapisteen sijaitsevat negatiivisella kuvatasolla, joka havainnollistaa

todellisen kohteen nimensä mukaisesti negatiivisena eli alkuperäisen kohteen peilikuvana. Positiivinen kuvataso taas havainnollistaa kuvan oikein päin. Tästä eteenpäin kuvastasolla viitataan tähän positiiviseen kuvatasoon.

Suoraa, joka kulkee kohtisuorasti kuvatasoon nähden projisointikeskuksen kautta, kutsutaan pääakseliksi. Piste, jossa pääakseli leikkaa positiivisen kuvataason, on pääpiste. Nämä termit on havainnollistettu kuvassa 2.1. Yksi tärkeimmistä perspektiiviprojektion ominaisuuksista on suorien kuvautuminen suoriksi. Toisaalta yhdensuuntaiset suorat eivät välttämättä kuvaudu yhdensuuntaisina, vaan voivat kulkea kohti pakopistettä tai jopa leikata toisiaan. Näin kuvaan muotoutuu perspektiivi. [9]

2.2 Koordinaatisto

Esitellään seuraavaksi tässä työssä käytetyt koordinaatit ja muut merkinnät. Kuvasta 2.2 voidaan havaita, kuinka kolmiulotteisessa koordinaatistossa eli kohdekoordinaatistossa sijaitseva piste (X, Y, Z) , kuvatasossa oleva kuvapiste (x, y) ja projisointikeskus (X_c, Y_c, Z_c) sijaitsevat samalla suoralla, kuten perspektiiviprojektioiteorian mukaan kuuluukin olla.



Kuva 2.2. Projektio 3D-avaruudessa.

XYZ -koordinaatistolla viitataan kohdekoordinaatistoon ja xyz -koordinaatistolla kuvataason koordinaatistoon. Tällöin z -akseli kulkee perspektiiviprojektion pääakselia pitkin. Polttoväliä merkitään kirjaimella f ja pääpistettä merkinnällä (x_0, y_0) . Pääakseli, eli xyz -koordinaatiston z -akseli, kulkee tämän pisteen kautta. Usein käytännössä kuvataason xyz -koordinaatisto on kallistunut muutamia asteita suhteessa XYZ -koordinaatistoon [7]. Otetaan siis käyttöön myös merkinnät (ω, ϕ, κ) , jotka kuvaavat rotaatiota X -akselin, Y -akselin ja Z -akselin suhteen, samassa järjestyksessä. Kallistumaa voidaan kuvata myös rotaatiomatriiseilla, joita käsitellään tarkemmin luvussa 2.4.

Ulkoisella orientoinnilla kuvataan kameran sijaintia ja kulmaa kolmiulotteisessa ympäristössä. Ulkoisen orientoinnin parametreja ovat $(\omega, \phi, \kappa, X_c, Y_c, Z_c)$. Sisäinen orientointi taas kuvaa kameran sisäistä geometriaa. Sisäisen orientoinnin parametreja ovat (f, x_0, y_0) . Näiden parametrien avulla

pyritään löytämään geometrinen suhde kuva- ja kohdekoordinaateille. [2]

2.3 Lineaari- ja affiniimuunnokset

Tässä luvussa esitellään lineaari- ja affiniimuunnoksen määritelmät sekä osoitetaan, että jokainen lineaarimuunnos on affiniimuunnos. Määritellään ensin yleinen lineaarimuunnos.

Määritelmä 2.1. Olkoon $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ muunnosfunktio avaruudesta \mathbb{R}^n avaruuteen \mathbb{R}^m . Funktiota T kutsutaan lineaarimuunnokseksi, jos kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ja skalaarille $c \in \mathbb{R}$ pätee

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad (2.1)$$

$$T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}). \quad (2.2)$$

Yleinen lineaarimuunnos voidaan myös esittää matriisimuodossa, joka on hyödyllisempi muoto fotogrammetrian sovelluksissa.

Lause 2.2. Olkoon $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ muunnosfunktio. Matriisimuunnos $T : \mathbf{Ax}$ on lineaarimuunnos.

Todistus. Matriisimuunnoksen $T : \mathbf{Ax}$ tulee toteuttaa määritelmän 2.1 mukaiset kaksi ehtoa.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ T(c\mathbf{u}) &= \mathbf{A}(c\mathbf{u}) = c\mathbf{Au} = cT(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Molemmat ehdot täyttyvät, joten matriisimuunnos $T : \mathbf{Ax}$ on lineaarimuunnos. \square

Lineaarimuunnos muuntaa nollavektorin aina nollavektoriksi eli

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

Todellisuudessa fotogrammetriassa tehtävät muunnokset eivät aina tapahdu origon suhteen eivätkä siis näin ollen ole välttämättä lineaarisia. Täytyy siis määritellä myös affiniimuunnos. [3]

Määritelmä 2.3. Olkoon $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ muunnosfunktio. Funktiota $T : \mathbf{Ax} + \mathbf{t}$ kutsutaan affiniimuunnokseksi, missä matriisi \mathbf{A} on lineaarikuvaus, \mathbf{x} kuvattava vektori ja vektori \mathbf{t} kuvaa siirtymää origon suhteen.

Affiniimuunnoksessa nollavektori kuvautuu nollavektoriksi vain tapauksessa $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, jolloin se on lineaarikuvaus. Todeistetaan seuraavaksi, että jokainen lineaarimuunnos on näin ollen affiniimuunnos, mutta jokainen affiniimuunnos ei ole lineaarimuunnos.

Lause 2.4. Jokainen lineaarimuunnos on affiniimuunnos, mutta jokainen affiniimuunnos ei ole lineaarimuunnos.

Todistus. Olkoon $T : \mathbf{Ax} + \mathbf{t}$ affiniimuunnos. Kun valitaan $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ saadaan lineaarimuunnos \mathbf{Ax} . Jokainen lineaarimuunnos on siis affiniimuunnos, missä $\mathbf{t} = \mathbf{0}$.

Affiniimuunnos $T : \mathbf{Ax} + \mathbf{t}$ ei kuitenkaan välttämättä ole lineaarimuunnos, sillä se ei aina toteuta määritelmän 2.1 ehtoja. Esimerkiksi

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{t} = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} + \mathbf{t} \neq \mathbf{Au} + \mathbf{Av} + 2\mathbf{t} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}). \quad (2.5)$$

Näin ollen kyseinen muunnos ei toteuta lineaarimuunnoksen määritelmää, joten affiniimuunnos ei välttämättä ole lineaarimuunnos, vaikka lineaarimuunnos onkin aina affiniimuunnos. \square

Myös affiniimuunnoksessa suorat kuvautuvat suoriksi ja samansuuntaiset suorat kuvautuvat samansuuntaisina. [8]

2.4 Rotaatiomatriisi

Tässä kappaleessa esitellään työhön liittyvää matriisialgebraa sekä määritellään kollineaarisuusyhtälöissä tarvittava rotaatiomatriisi ja tutustutaan sen ominaisuuksiin. Ensinnäkin määritellään ortogonaalinen matriisi.

Määritelmä 2.5. Matriisi \mathbf{R} on ortogonaalinen matriisi, jos

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (2.6)$$

Ortogonaalisen matriisin transpoosi on siis sen käänteismatriisi. Tämän seurauksena ortogonaalisen matriisin determinantin itseisarvo on yksi.

Seuraus 2.6. Jos \mathbf{R} on ortogonaalinen matriisi, niin sen käänteismatriisi on yhtä kuin sen transpoosi. Tällöin myös sen determinantin itseisarvo on yksi.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (2.7)$$

$$\det(\mathbf{R}) = \pm 1 \quad (2.8)$$

Analyttisessä fotogrammetriassa käytetään kolmea toisistaan riippumatonta rotaatiokulmaa kuvaamaan kuvakoordinaatiston ja kohdekoordinaatiston välisiä rotaatioita. Näistä rotaatiokulmista voidaan muodostaa rotaatiomatriisi.

Määritelmä 2.7. Olkoon ω rotaatio x -akselin suhteen, ϕ rotaatio y -akselin suhteen ja κ rotaatio z -akselin suhteen. Rotaatiomatriisi kuvakoordinaatistosta kohdekoordinaatistoon määritellään

seuraavasti. [6]

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ 0 & \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\kappa) & -\sin(\kappa) & 0 \\ \sin(\kappa) & \cos(\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\kappa) & -\cos(\phi)\sin(\kappa) & \sin(\phi) \\ \cos(\omega)\sin(\kappa) + \sin(\omega)\sin(\phi)\cos(\kappa) & \cos(\omega)\cos(\kappa) + \sin(\omega)\sin(\phi)\sin(\kappa) & -\sin(\omega)\cos(\phi) \\ \sin(\omega)\sin(\kappa) - \cos(\omega)\sin(\phi)\cos(\kappa) & \sin(\omega)\cos(\kappa) + \cos(\omega)\sin(\phi)\sin(\kappa) & \cos(\omega)\cos(\phi) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Analyttisessä fotogrametriassa käytettävän rotaatiomatriisin tulee olla ortogonaalinen, joten todistetaan, että määritelmän 2.7 rotaatiomatriisilla on kyseinen ominaisuus.

Lause 2.8. Määritelmän 2.7 rotaatiomatriisi \mathbf{R} on ortogonaalinen.

Todistus. Rotaatiomatriisi \mathbf{R} on ortogonaalinen, jos $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$. Osoitetaan ensin, että $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T &= \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa (\mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa)^T \\
&= \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa (\mathbf{R}_\kappa)^T (\mathbf{R}_\phi)^T (\mathbf{R}_\omega)^T \\
&= \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi \mathbf{I} (\mathbf{R}_\phi)^T (\mathbf{R}_\omega)^T \\
&= \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi (\mathbf{R}_\phi)^T (\mathbf{R}_\omega)^T \\
&= \mathbf{R}_\omega (\mathbf{R}_\omega)^T \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Näytetään seuraavaksi, että myös $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} &= (\mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa)^T \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa \\
&= (\mathbf{R}_\kappa)^T (\mathbf{R}_\phi)^T (\mathbf{R}_\omega)^T \mathbf{R}_\omega \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa \\
&= (\mathbf{R}_\kappa)^T (\mathbf{R}_\phi)^T \mathbf{I} \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa \\
&= (\mathbf{R}_\kappa)^T (\mathbf{R}_\phi)^T \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\kappa \\
&= (\mathbf{R}_\kappa)^T \mathbf{R}_\kappa \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Rotaatiomatriisi \mathbf{R} on siis ortogonaalinen matriisi. □

Ortogonaalisia rotaatiomatriiseja voidaan yhdistellä kertomalla niitä keskenään ilman, että niiden ortogonaalisuus katoaa. [10]

Lause 2.9. *Jos kerrotaan kaksi samankokoista ortogonaalista matriisiä keskenään, saadaan tuloksena ortogonaalinen matriisi.*

Todistus. Olkoon \mathbf{A} ja \mathbf{B} ortogonaalisia rotaatiomatriiseja. Osoitetaan, että saatu tulo \mathbf{AB} on ortogonaalinen osoittamalla, että $(\mathbf{AB})^T (\mathbf{AB}) = (\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^T = \mathbf{I}$

$$(\mathbf{AB})^T (\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T \mathbf{IB} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^T = \mathbf{ABB}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{AIA}^T = \mathbf{AA}^T = \mathbf{I}$$

□

Näin ollen useampia rotaatiomatriiseja voidaan myös yhdistellä keskenään.

3. KOLLINEAARISUUSYHTÄLÖT

Luvussa 2.1 käsitellyn perspektiiviprojektion kuvaamiseen käytetään kollineaarisuusyhtälöitä. Kollineaarisuusyhtälöiden keskeinen tarkoitus on varmistaa, että projisointikeskus, kuvapiste sekä sitä vastaava kohdepiste sijaitsevat kaikki samalla suoralla perspektiiviprojektion määritelmän mukaisesti. [9]

Lause 3.1. *Kollineaarisuusyhtälöt kuvaavat muunnosta kohdekoordinaatistosta (X, Y, Z) sitä vastaaviin kuvakoordinaatteihin (x, y) sisäisen orientoinnin parametrien (x_0, y_0, f) sekä ulkoisen orientoinnin parametrien $(X_C, Y_C, Z_C, \omega, \phi, \kappa)$ funktioina seuraavasti*

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -f \frac{r_{11}(X - X_C) + r_{12}(Y - Y_C) + r_{13}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)} \\ y - y_0 &= -f \frac{r_{21}(X - X_C) + r_{22}(Y - Y_C) + r_{23}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Todistus. Kuvapisteen ja kohdepisteen koordinaatit ovat suhteessa toisiinsa ulkoisen sekä sisäisen orientoinnin parametrien avulla. Kun huomioon otetaan vain rotaatio ja jätetään muut parametrit huomioimatta, saadaan yhteys

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Kerrotaan yhtälöä molemmin puolin rotaatiomatriisin \mathbf{R} transpoosilla. Rotaatiomatriisi \mathbf{R} on ortogonaalinen, joten yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Yhtälöissä 3.2 ja 3.3 origoiden oletetaan olevan samoja. Käytännössä näin ei kuitenkaan ole, joten kohdekoordinaatistoon lisätään siirtymä, jolloin saadaan siirrettyä kohteen origo projisointikeskukseen. Kuva-avaruuden ja sitä vastaavan kohdeavaruuden pituudet ovat erisuuruisia, joten kerrotaan

yhtälöön myös tätä korjaava mittakaavakerroin k .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k\mathbf{R} \begin{bmatrix} X - X_C \\ Y - Y_C \\ Z - Z_C \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Pääpiste ei välttämättä kohdistu kuvan keskipisteeseen, joten vähennetään yhtälön vasemmalta puolelta pääpisteen koordinaatit x_0, y_0 . Käytännössä z -koordinaatti vastaa negatiivista polttoväliä, jolloin saadaan yhtälö seuraavaan muotoon.

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -f \end{bmatrix} = k\mathbf{R} \begin{bmatrix} X - X_C \\ Y - Y_C \\ Z - Z_C \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Rotaatiomatriisi voidaan kirjoittaa auki:

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -f \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_C \\ Y - Y_C \\ Z - Z_C \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Kertomalla oikean puolen matriisitulot auki saadaan matriisiyhtälön sijaan kolme skalaariyhtälöä.

$$\begin{aligned} x - x_0 &= k[r_{11}(X - X_C) + r_{12}(Y - Y_C) + r_{13}(Z - Z_C)] \\ y - y_0 &= k[r_{21}(X - X_C) + r_{22}(Y - Y_C) + r_{23}(Z - Z_C)] \\ -f &= k[r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jakamalla kaksi ensimmäistä yhtälöä kolmannelle, päästään eroon mittakaavakertoimesta.

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -f \frac{r_{11}(X - X_C) + r_{12}(Y - Y_C) + r_{13}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)} \\ y - y_0 &= -f \frac{r_{21}(X - X_C) + r_{22}(Y - Y_C) + r_{23}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Näin saatiin yhtälöt lauseen 3.1 muotoon.[5] □

Lauseen 3.1 yhtälöitä käytetään kuvakoordinaattien ratkaisemiseen, kun tunnetaan sisäisen sekä ulkoisen orientoinnin parametrit sekä kuvapisteitä vastaavat kohteen koordinaatit. Jos taas halutaan

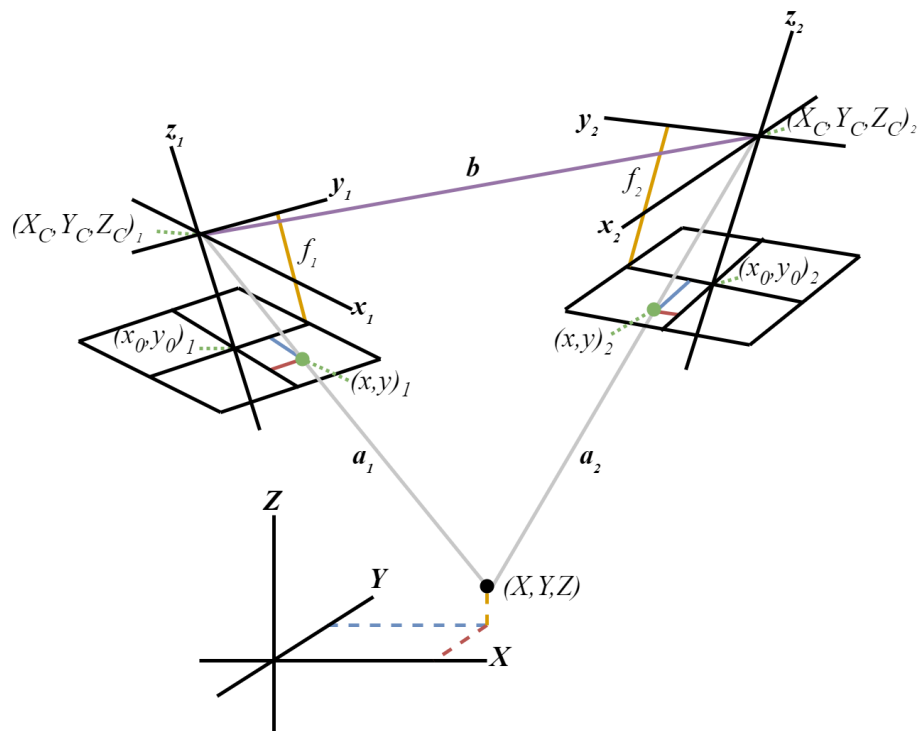
ratkaista kohteen koordinaatit, voidaan yhtälö 3.3 muokata samoin tavoin muotoon

$$\begin{aligned} X - X_C &= (Z - Z_C) \frac{r_{11}(x - x_0) + r_{21}(y - y_0) + r_{31}(-f)}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) + r_{33}(-f)} \\ Y - Y_C &= (Z - Z_C) \frac{r_{12}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) + r_{32}(-f)}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) + r_{33}(-f)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tässä tapauksessa sisäisen ja ulkoisen orientoinnin parametrit tulee olla tunnettuja kuin myös kuvakoordinaatit sekä yksi kohteen koordinaateista. Tällöin saadaan ratkaistuksi kaksi tuntematonta koordinaattia.

4. KOPLANARITEETTIEHTO

Jotta voitaisiin ratkaista koordinaatteja kollineaarisuusyhtälöstä, täytyy yksi koordinaateista olla tunnettu. Näin ei kuitenkaan aina ole. Näissä tapauksissa voidaan hyödyntää koplanariteettiehtoa, joka esittää kollineaarisuusehdon käyttämällä kahta eri kuvaa kohteesta. Koplanariteettiehdon mukaan mikä tahansa piste (X, Y, Z) kohdeavaruudessa sijaitsee samalla tasolla kahden kuvan projisointikeskuksien $(X_C, Y_C, Z_C)_1$ ja $(X_C, Y_C, Z_C)_2$ sekä kohdepistettä vastaavien kuvapisteen $(x, y)_1$ ja $(x, y)_2$ kanssa. Näin ollen koplanariteettiehto laajentaa kollineaarisuusehtoa kahdelle kuvalle.



Kuva 4.1. Koplanariteettiehdossa vektoreiden \mathbf{b} , \mathbf{a}_1 ja \mathbf{a}_2 on sijaittava samalla tasolla.

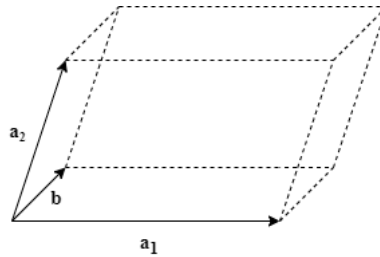
Lause 4.1. Olkoon \mathbf{b} kahden projisointikeskuksen $(X_C, Y_C, Z_C)_1$ ja $(X_C, Y_C, Z_C)_2$ välinen vektori sekä \mathbf{a}_1 ja \mathbf{a}_2 vastaavista tarkastelupisteistä lähtevät vektorit kohdeavaruudessa sijaitsevaan pisteeseen (X, Y, Z) . \mathbf{a}_1 sekä \mathbf{a}_2 kulkevat kohdepistettä vastaavien kuvakoordinaattien $(x, y)_1$ ja $(x, y)_2$ kautta kuvan 4.1 mukaisesti. Nyt koplanariteettiehto voidaan ilmaista matemaattisessa muodossa kolmen vektorin tulona

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = 0. \quad (4.1)$$

Todistus. Koplanariteettiytälössä esiintyvät vektorit voidaan kirjoittaa auki

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_X \\ b_Y \\ b_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C_2} - X_{C_1} \\ Y_{C_2} - Y_{C_1} \\ Z_{C_2} - Z_{C_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -f \end{bmatrix}_1, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -f \end{bmatrix}_2, \quad (4.2)$$

missä \mathbf{R} on rotaatiomatriisi. Nämä kolme vektoria sijaitsevat samalla tasolla, jos niiden määrittämän suunnikassärmiön tilavuus on nolla, mitä on havainnollistettu kuvassa 4.2.



Kuva 4.2. Skalaarikolmitulon määrittelemä suunnikassärmiön tilavuus

Suunnikassärmiön tilavuus lasketaan skalaarikolmitulona, mistä saadaan suoraan edellä määritelty koplanariteettiytälö 4.1. [4] □

Nyt Lause 4.1 voidaan kirjoittaa myös auki kirjoitettujen vektorien avulla matriisin determinanttina

$$F = \begin{vmatrix} b_X & b_Y & b_Z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

$$= b_X(y_1 z_2 - z_1 y_2) + b_Y(x_1 z_2 - z_1 x_2) + b_Z(x_1 y_2 - y_1 x_2) = 0.$$

Koplanariteettiytälöillä voidaan ratkaista kahden kuvan keskinäinen orientointi eli niiden sijainti ja kiertoero toisiinsa nähden. Kun kuvien keskinäinen orientointi on tiedossa, voidaan kuvakoordinaatteja muuttaa 3D-avaruuteen.

5. SUORA LINEAARIMUUNNOS

Analyttisessä fotogrammetriassa kuvakoordinaattien mittaukset suoritetaan usein niin kutsutuissa komparaattoreissa. Näin ollen koordinaattimuunnokset tapahtuvat kahdessa vaiheessa; komparaattorikoordinaattien muunnos kuvakoordinaateiksi sekä kuvakoordinaattien muunnos kohdeavaruuden koordinaateiksi. Suora lineaarimuunnos (Direct Linear Transformation, DLT) yhdistää nämä kaksi vaihetta yhdeksi ja kuvaa siis muunnosta komparaattorikoordinaatistosta kohdekoordinaatistoon lineaarisena funktiona. Tässä työssä kuitenkin oletetaan, että komparaattorikoordinaatit ja kuvakoordinaatit ovat samoja, eli niissä oleva mahdollinen virhe sivuutetaan ja käsitellään ideaalitulannetta. Suoran lineaarimuunnoksen yhtälöt voidaan johtaa kollineaarisuusyhtälöistä. [1] Jotta voidaan määrittellä suoran lineaarimuunnoksen yhtälöt, kirjoitetaan ensin kollineaarisuusyhtälöt muodossa

$$\begin{aligned}x - x_0 &= -c_x \frac{r_{11}(X - X_C) + r_{12}(Y - Y_C) + r_{13}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)} \\y - y_0 &= -c_y \frac{r_{21}(X - X_C) + r_{22}(Y - Y_C) + r_{23}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)} \\c_x &= f\lambda_x \\c_y &= f\lambda_y,\end{aligned}\tag{5.1}$$

missä polttoväli f on skaalattu erikseen x - ja y -suuntaan kertoimilla λ_x ja λ_y merkitsemään kuvasuhdetta, (x_0, y_0) ovat pääpisteen koordinaatit, (X, Y, Z) ovat pisteen koordinaatit kohdekoordinaatistossa, (X_C, Y_C, Z_C) ovat projisointikeskuksen koordinaatit kohdekoordinaatistossa sekä r_{ij} on rotaatiomatriisin \mathbf{R} alkio. Kunhan kamera ei sijaitse origossa, voidaan kollineaarisuusyhtälöt muuttaa suoran lineaarimuunnoksen yhtälöiksi määritelmän 5.1 mukaisesti.

Määritelmä 5.1. Olkoon (x, y) kuvakoordinaatteja, $L_1 \dots L_{11}$ muunnoskertoimia ja (X, Y, Z) kohdekoordinaatteja. Suoran lineaarimuunnoksen yhtälöt määritellään seuraavasti.

$$\begin{aligned}x &= \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\y &= \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1},\end{aligned}\tag{5.2}$$

missä

$$\begin{aligned}
 L &= -\frac{1}{(r_{31}X_C + r_{32}Y_C + r_{33}Z_C)} \\
 L_1 &= L(x_0r_{31} - c_xr_{11}) \\
 L_2 &= L(x_0r_{32} - c_xr_{12}) \\
 L_3 &= L(x_0r_{33} - c_xr_{13}) \\
 L_4 &= x_0 + Lc_x(r_{11}X_C + r_{12}Y_C + r_{13}Z_C) \\
 L_5 &= L(y_0r_{31} - c_yr_{21}) \\
 L_6 &= L(y_0r_{32} - c_yr_{22}) \\
 L_7 &= L(y_0r_{33} - c_yr_{23}) \\
 L_8 &= y_0 + Lc_y(r_{21}X_C + r_{22}Y_C + r_{23}Z_C) \\
 L_9 &= Lr_{31} \\
 L_{10} &= Lr_{32} \\
 L_{11} &= Lr_{33}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Suoralla lineaarimuunnoksella saadut tulokset ovat epätarkempia verrattuna kollineaarisuus- ja koplanaraattihetojen avulla laskettuihin arvoihin. Suora lineaarimuunnos on kuitenkin hyödyllinen esimerkiksi tilanteissa, joissa ei tunneta kaikkia vaadittavia parametreja kollineaarisuus- ja koplanariteettiehtoihin.

6. YHTEENVETO

Tässä työssä on esitelty kolme analyttisen fotogrammetrian peruskäsitettä; kollineaarisuusyhtälöt, koplanariteetti ehto sekä suora lineaarimuunnos sekä näihin tarvittavia matemaattisia perusteita. Työssä esiteltiin perspektiiviprojektio, joka on yksi perustavanlaatuisista teorioista, joihin fotogrammetria pohjautuu. Matemaattisessa taustassa esiteltiin myös lineaari- ja affiniimuunnoksen ominaisuuksia sekä niiden eroavaisuuksia. Osoitettiin, että jokainen lineaarimuunnos on affiniimuunnos, mutta jokainen affiniimuunnos ei ole lineaarimuunnos. Todettiin myös, että fotogrammetrian sovelluksissa käytettävä matriisimuunnos $T : \mathbf{Ax}$ on lineaarimuunnos. Lisäksi esiteltiin matriisialgebraa, jota tarvittiin fotogrammetriassa käytettävän rotaatiomatriisin määrittelyyn sekä tutustuttiin rotaatiomatriisin ominaisuuksiin. Todettiin, rotaatiomatriisin olevan ortogonaalinen matriisi, joka muodostuu kolmen matriisin tulosta missä matriisien alkiot ovat rotaatioita x -, y - ja z -akselin suhteen.

Kollineaarisuusyhtälöiden avulla voidaan varmistaa, että perspektiiviprojektion ominaisuudet toteutuvat ja projisointikeskus, kuvapiste sekä sitä vastaava kohdepiste sijaitsevat samalla suoralla. Kollineaarisuusyhtälöistä voidaan muodostaa kaksi eri versiota riippuen siitä halutaanko ratkaista kuvapisteiden vai todellisten kohdepisteiden koordinaatteja. Koplanariteettiehto laajentaa kollineaarisuusyhtälöitä tapaukseen, jossa käytetään kahta kuvaa samasta kohteesta. Suora lineaarimuunnos on johdettavissa kollineaarisuusyhtälöistä ja sitä voidaan hyödyntää tilanteissa, joihin kollineaarisuusyhtälöt eivät sovellu.

Työssä pohdittiin myös tilanteita, joihin kollineaarisuusyhtälöt, koplanariteettiehto sekä suora lineaarimuunnos sopivat parhaiten. Koplanariteettiehdolla saadaan tarkempia tuloksia kollineaarisuusyhtälöihin verrattuna sillä siinä voidaan hyödyntää useampaa kuvaa. Suoralla lineaarimuunnoksella ei saada tarkimpia tuloksia, mutta se taas soveltuu parhaiten tilanteisiin, jossa ei tunneta sisäisen tai ulkoisen orientoinnin parametreja eikä näin ollen voida hyödyntää koplanariteettiehtoa. [1]

LÄHTEET

- [1] K. L. A. El-Ashmawy. A comparison study between collinearity condition, Coplanarity condition, and direct linear transformation (DLT) method for camera exterior orientation parameters determination. *Geodesy and Cartography* 41.2 (2015), 66–73.
- [2] K. F. Blonquist. Development of a Mathematical Model for 3D Reconstruction of Target Objects by Photogrammetry (2008).
- [3] O. Faugeras. Stratification of three-dimensional vision: projective, affine, and metric representations (1994).
- [4] T. Luhmann et al. *Close-Range Photogrammetry and 3D Imaging*. De Gruyter, Inc., 2013.
- [5] E. M. Mikhail, J. S. Bethel ja J. C. McGlone. *Introduction to Modern Photogrammetry*. John Wiley Sons, Inc., 2001.
- [6] M. Morgan. Epipolar Resampling of Linear Array Scanner Scenes (2004).
- [7] C. C. Slama. *Manual of Photogrammetry*. American Society of Photogrammetry, 1980.
- [8] C. Solomon. *Fundamentals of digital image processing a practical approach with examples in Matlab*. 2nd ed. Hoboken, N.J: Wiley-Blackwell, 2011.
- [9] P. R. Wolf, B. A. Dewitt ja B. E. Wilkinson. *Elements of photogrammetry with applications in GIS*. 4. painos. McGraw-Hill Education, 2014.
- [10] W. Zhizhuo. Principles of photogrammetry (with remote sensing) (1990).