Tampereen yliopisto

Lauri Lankila

MATRIISIEN OMINAISARVOT, OMINAISVEKTORIT JA DIAGONALISOINTI

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Elokuu 2023

Tiivistelmä

Lauri Lankila: Matriisien ominaisarvot, ominaisvektorit ja diagonalisointi
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Tutkinto-ohjelman nimi
Elokuu 2023

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä matriisien ominaisarvoja, ominaisvektoreita ja diagonalisointia. Ominaisarvoilla, ominaisvektoreilla, diagonalisoinilla ja matriiseilla on paljon käyttökohteita monilla eri tieteenaloilla, kuten koneoppimisessa. Tutkielmassa käsitellään lisäksi matriisien potensseja ja kolmiomatriiseja. Lisäksi tutustutaan algebralliseen kertalukuun ja geometriseen kertalukuun.

Tutkielman toisessa luvussa perehdytään matriisin ominaisarvoihin ja ominaisvektoreihin. Aluksi esitetään esimerkkejä ominaisarvoista ja ominaisvektoreista. Lisäksi niiden välinen yhteys selvennetään. Tämän jälkeen esitetään, miten löydetään karakteristinen yhtälö ominaisarvojen avulla. Karakteristisen yhtälön avulla löydetään ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit, josta annetaan esimerkki. Luvussa tutustutaan myös kolmiomatriisien ominaisarvojen löytämiseen. Tämä auttaa myöhemmin, kun etsitään kolmiomatriisin diagonalisoitua muotoa.

Kolmannessa luvussa esitetään diagonalisoinnin määritelmä. Lisäksi esitetään toimintaohje matriisien diagonalisoitiin ja annetaan esimerkki tästä. Diagonalisointi tehdään ominaisvektoreiden avulla. Ominaisvektoreista muodostetaan matriisi, joka yhdessä sen käänteismatriisin kanssa diagonalisoi halutun matriisin. Kappaleessa lisäksi katsotaan kolmiomatriisien diagonalisoituvuutta. Tätä tarkastellaan siksi, että kolmiomatriisien diagonalisointi on helpompaa, koska sen ominaisarvot ovat sen diagonaalialkiot.

Neljännessä luvussa käsitellään matriisien potensseja. Matriisin potenssit on helposti laskettavissa, koska riittää se, että korottaa matriisin diagonalisoidun muodon jokaista diagonaalialkiota haluttuun potenssiin ja kertoo sen ominaisvektoreista muodostetulla matriisilla ja sen käänteismatriisilla. Tästä annetaan esimerkki, jossa hyödynnetään kappaleessa kolme diagonalisoitua matriisia. Lopuksi tutustutaan algebralliseen kertalukuun ja geometriseen kertalukuun. Algebrallinen kertaluku löydetään vertaamalla karakteristista yhtälöä matriisin ominaisarvoihin. Geometrinen kertaluku puolestaan löydetään etsimällä ominaisarvon ominaisavaruuden dimensio.

Avainsanat: Ominaisarvo, ominaisvektori, matriisi, diagonalisointi

Sisällys

1 Johdanto

Ominaisarvot ja ominaisvektorit ovat konsepteja, jotka esiintyvät huomaamattomasti monilla aloilla. Niitä käytetään esimerkiksi koneoppimisessa ja viestijärjestelmien suunnittelussa. Ominaisarvot ja ominaisvektorit liittyvät voimakkaasti diagonalisointiin. Siksi onkin loogista, että näitä aiheita käsitellään yhdessä. Diagonalisointi puolestaan ykstinkertaistaa useita matriiseilla tehtäviä laskutoimituksia huomattavasti.

Tutkielman toisessa luvussa perehdytään ominaisvektoreihin ja ominaisarvoihin. Niiden välistä yhteyttä selitetään ja siitä annetaan esimerkkejä. Lisäksi annetaan keino sille, miten ominaisarvot ja ominaisvektorit ovat löydettävissä.

Kolmannessa luvussa siirrytään diagonalisointiin. Se esitetään ominaisarvojen ja ominaisvektorien kautta. Luvussa esitetään prosessi matriisien diagonalisoinille. Lisäksi otetaan katsaus kolmiomatriisien diagonalisointiin, jota pohjustetaan jo toisessa luvussa.

Neljännessä luvussa perehdytään matriisien potensseihin. Niiden laskeminen on aiheeseen liittyvää, koska diagonalisoitavissa olevien matriisien potenssien laskeminen on varsin yksinkertaista. Aiemmissa luvuissa esitettyjä menetelmiä hyödynnetään tässä osiossa. Luvun loppupuolella otetaan vielä nopea katsaus algebralliseen kertalukuun ja geometriseen kertalukuun.

Tutkielman lukijalta odotetaan lineaarialgebran osaamista. Neljännen luvun viimeisessä osiossa lukijalta vaaditaan matriiseihin liittyvien termien osaamista. Tutkielman lähteenä on käytetty Howard Antonin kirjaa Elementary Linear Algebra [1].

2 Ominaisvektorit ja ominaisarvot

Luvussa 2 esitetään ominaisvektorien ja ominaisarvojen määritelmät. Lisäksi esitellään niiden välistä yhteyttä ja sitä, miten voidaan löytää ominaisvektorit ominaisarvojen avulla. Luvun loppupuolella tutustutaan lyhyesti matriisien kääntyvyyteen.

2.1 Ominaisvektorit

Määritelmä 2.1. Olkoon matriisi A $n \times n$ -matriisi ja x reaalialkioinen n-rivinen ei-nollavektori. Silloin vektori x on matriisin A *ominaisvektori*, mikäli matriisin A ja vektorin x tulo Ax on sama kuin vektorin x skalaaritulo λx jonkin reaaliluvun λ kanssa, eli

$$Ax = \lambda x$$

Skalaaria λ kutsutaan tällöin matriisin A ominaisarvoksi.

Kaikkien ominaisarvoon λ liittyvien ominaisvektorien joukkoa sanotaan ominaisarvon λ ominaisavaruudeksi.

Seuraava esimerkki 2.1 havainnollistaa ominaisarvon ja ominaisvektorin yhteyttä toisiinsa.

Esimerkki 2.1. Tarkastellaan 2×2 -matriisin ominaisvektoria ja siihen liittyvää ominaisarvoa. Vektori $x = [2, 3]^T$ on matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisvektori ja vektoriin x liittyvä ominaisarvo on $\lambda = 2$, koska

$$Ax = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2x.$$

Lause 2.1. *Olkoon A $n \times n$ -matriisi. Silloin skalaari λ on sen* ominaisarvo *jos ja vain jos λ tyydyttää yhtälön* $\det(\lambda I - A) = 0$.

Todistus. Ks. [1, s. 292]. □

Lauseen 2.1 yhtälö on nimeltään matriisin A karakteristinen yhtälö.

Esimerkki 2.2. etsitään A matrsiisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot hyödyntämällä karakteristista yhtälöä. Etsitään ensin matriisin A karakteristinen polynomi. Nythän

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 5 \\ 0 & \lambda - 2 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 3)\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & \lambda - 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) + 5(-\lambda + 2) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda + 4.$$

Matriisin A ominaisarvojen tulee toteuttaa karakteristinen yhtälö $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$. Havaitaan, että $\lambda = 2$ toteuttaa yhtälön. Tällöin voimme jakaa yhtälön polynomilla $\lambda - 2$. Suoritamme jakolaskun jakokulmassa.

$$\begin{array}{r@{\,}r}
 & \lambda^2 - 4\lambda - 2 \\ \cline{2-2}
\lambda - 2) & \lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda + 4 \\
 & -\lambda^3 + 2\lambda^2 \\ \cline{2-2}
 & -4\lambda^2 + 6\lambda \\
 & 4\lambda^2 - 8\lambda \\ \cline{2-2}
 & -2\lambda + 4 \\
 & 2\lambda - 4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

Saamme osamääränä toisen asteen polynomin $\lambda^2 - 4\lambda - 2$. Polynomin nollakohdat ovat $\lambda = 2 + \sqrt{6}$ ja $\lambda = 2 - \sqrt{6}$, joten matriisin A ominaisarvot ovat

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{6}, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 2 + \sqrt{6}.$$

2.2 Kaksi ominaisarvoja koskevaa lausetta

Seuraavaksi esitämme kaksi neliömatriisien ominaisarvoihin liittyvää lausetta.

Lause 2.2. *Jos A on $n \times n$ -matriisi ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

1. *λ on matriisin A ominaisarvo.*

2. *λ on ratkaisu karakteristiselle yhtälölle* $\det(\lambda I - A) = 0$.

3. *Yhtälöryhmällä* $(\lambda I - A)x = 0$ *on epätriviaali ratkaisu, missä* $x \in \mathbb{R}^n$

4. *On olemassa ei-nollavektori* $x \in \mathbb{R}^n$*, joka tyydyttää yhtälön* $Ax = \lambda x$.

Todistus. Sivuutetaan. □

Lause 2.3. *Jos A on $n \times n$ -kolmiomatriisi, niin sen ominaisarvot ovat matriisin päädiagonaalin alkiot.*

Todistus. (vrt. [1, s. 294]) Todistetaan lause yläkolmiomatriiseille. Oletetaan, että A on $n \times n$ -yläkolmiomatriisi. Lauseen 2.2 kohtien 1 ja 2 mukaan λ on matriisin A ominaisarvo, jos se toteuttaa yhtälön $\det(\lambda I - A) = 0$. Ratkaistaan aluksi matriisin $(\lambda I - A)$ determinantti. Olkoon

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ 0 & \lambda - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Kun ratkaisemme determinanttia, voimme kehittää sitä aina ensimmäistä pystysaraketta pitkin. Tällöin ensimmäisen pystysarakkeen arvot ylintä alkiota lukuun ottamatta ovat nollia. Voimme toistaa tätä prosessia, kunnes jäljelle jää 1×1 -matriisi, jonka determinantti on alkio itse. Toisin sanoen,

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ 0 & \lambda - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a_{1,1}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{2,2} & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,n} \\ 0 & \lambda - a_{3,3} & \dots & -a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \dots = (\lambda - a_{1,1})(\lambda - a_{2,2}) \dots (\lambda - a_{n-1,n-1}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a_{1,1})(\lambda - a_{2,2}) \dots (\lambda - a_{n,n}) = 0. \end{aligned}$$

Voidaan havaita, että jokainen $a_{i,i}$, missä $i \in \{1, \dots, n\}$, toteuttaa saadun karakteristisen yhtälön tulon nollasäännön nojalla. □

2.3 Miten löytää matriisin ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit

Määritelmän 2.1 mukaan matriisin A ominaisarvoon λ liittyvät ominaisvektorit eivät ole nollavektoreita. Lisäksi lauseen 2.2 mukaan ominaisvektorit tyydyttävät yhtälön $(\lambda I - A)x = 0$ epätriviaalisti. Tästä syystä voimme löytää matriisin A ominaisarvoon λ liittyvät ominaisvektorit etsimällä ratkaisut tämän lineaarisen systeemin ratkaisuavaruudesta.

Esimerkki 2.3. Selvitetään matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja niihin liittyvät ominaisvektorit. Ratkaistaan ensin matriisin A ominaisarvot. Nyt

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Ratkaisemalla toisen asteen yhtälön saamme matriisin A ominaisarvoiksi

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 3.$$

Ratkaistaan nyt ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit. Lauseen 2.2 mukaan x on matriisin A ominaisvektori, jos ja vain jos se täyttää ehdon $(\lambda I - A)x = 0$. Ratkaistaan ensin ominaisarvoa $\lambda = -1$ vastaava ominaisvektori x. Oletetaan, että

$$(\lambda I - A)x = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Saatu yhtälö voidaan ratkaista yhtälöryhmänä

$$\begin{cases} 3x_2 - x_1 = 0 \\ -3x_2 + x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Koska voimme kirjoittaa vektorin x muotoon

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

voimme havaita, että vektori $x = [3, 1]^T$ on ominaisarvoa $\lambda = -1$ vastaava ominaisvektori. Ominaisarvoa $\lambda = 3$ vastaava ominaisvektori ratkaistaan vastaavasti. Oletetaan, että

$$(\lambda I - A)x = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan saatu yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 3x_2 + 3x_1 = 0 \\ x_2 + x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Koska voimme kirjoittaa vektorin x muotoon

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

voimme havaita, että vektori $x = [1, -1]^T$ on ominaisarvoa $\lambda = 3$ vastaava ominaisvektori. Täten matriisin A ominaisvektorit ovat

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2.4 Matriisin ominaisarvot ja kääntyvyys

Seuraava lause esittelee ominaisarvon ja kääntyvyyden yhteyttä. Kääntyvällä matriisilla tarkoitetaan sellaista $n \times n$ -matriisia A, jolle on olemassa sellainen $n \times n$ -matriisi B, että

$$AB = BA = I_n,$$

missä I_n on $n \times n$ -identiteettimatriisi. Voidaan sanoa, että B ja A ovat toistensa käänteismatriiseja.

Lause 2.4. *Neliömatriisi A on* kääntyvä *jos ja vain jos $\lambda = 0$ ei ole matriisin A ominaisarvo.*

Todistus. Ks. [1, s. 289]. □

Esimerkki 2.4. Käytetään esimerkin 2.3 matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esimerkissä 2.3 havaittiin matriisilla olevan ominaisarvot $\lambda = -1$ ja $\lambda = 3$. Lauseen 2.4 perusteella voidaan todeta, että matriisi A on kääntyvä. Lisäksi

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = BA.$$

Näin ollaan osoitettu, että A on kääntyvä, ja että

$$B = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

on sen käänteismatriisi.

3 Matriisin diagonalisointi

Luvussa 3 tutustutaan matriisien diagonalisointiin. Luvussa keskitytään neliömatriiseihin. Kappaleessa esitetään prosessi sille, miten matriisi diagonalisoidaan, ja annetaan tästä esimerkki. Lopussa esitellään kolmiomatriisin diagonalisointia esimerkein.

3.1 Diagonalisoituvuuden määritelmä

Määritelmä 3.1. Olkoot A ja B ovat neliömatriiseja. Silloin matriisi B on *similaarinen* matriisin A kanssa, jos on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P, että

$$B = PAP^{-1}.$$

Määritelmä 3.2. Neliömatriisin A sanotaan olevan *diagonalisoituva*, jos se on similaarinen diagonaalimatriisin kanssa, eli on olemassa kääntyvä matriisi P jolle PAP^{-1} on diagonaalinen. Tällöin P *diagonalisoi* matriisin A.

Lause 3.1. *Jos A on $n \times n$ matriisi, silloin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

1. *Matriisi A on diagonalisoituva.*
2. *Matriisilla A on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.*

Todistus. (vrt. [1, s. 307]) Oletetaan kohdan 1 mukaisesti, että matriisi A on diagonalisoituva. On siis olemassa kääntyvä matriisi P ja diagonaalimatriisi D, joilla $P^{-1}AP = D$. Tämä voidaan kirjoittaa muotoon $AP = PD$. Merkitään matriisia P sen pystysarakkeilla $p_1, \dots, p_n$. Tällöin $AP = A[p_1, \dots, p_n] = [Ap_1, \dots, Ap_n]$ ja

$$PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \dots & \lambda_n p_{n1} \end{bmatrix} = [\lambda_1 p_1 \dots \lambda_n p_n],$$

joten on oltava

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n.$$

Koska matriisi P on kääntyvä, niin se on lineaarisesti riippumaton. Lisäksi P on $n \times n$ matriisi. Tällöin matriisilla A on oltava n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Oletetaan, nyt kohdan 2 mukaisesti, että matriisilla A on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Muodostetaan ominaisvektoreista matriisi $P = [p_1, \dots, p_n]$, jonka vastaavat ominaisvektorit ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Oletetaan, että matriisi D on diagonaalimatriisi, jonka vastaavat diagonaalialkiot ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nyt

$$AP = A[p_1, \dots, p_n] = [Ap_1, \dots, Ap_n] = [\lambda_1 p_1, \dots, \lambda_n p_n] = PD.$$

Koska matriisi P on lineaarisestiriippumaton, se on myös kääntyvä. Yhtälö voidaan täten kirjoittaa muotoon

$$P^{-1}AP = D.$$

Koska matriisi D on diagonaalimatriisi, on matriisi A diagonalisoitu. □

3.2 Kuinka diagonalisoida matriisi

Seuraava kolmivaiheinen ohje kertoo, miten $n \times n$ -matriisi A diagonalisoidaan.

1. Varmistetaan, että matriisi A on diagonalisoituva. Etsitään matriisille A n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

2. Muodostetaan matriisi $P = [p_1, \dots, p_n]$, jossa vektorit $p_1, \dots, p_n$ ovat äsken havaitut.

3. Kerrotaan matriisia A vasemmalta puolelta matriisilla P ja oikealta puolelta matriisin P käänteismatriisilla. Näin saatu matriisi $P^(- 1)AP$ on diagonaalimatriisi.

Esimerkki 3.1. Diagonalisoidaan matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aluksi tutkitaan, onko A diagonalisoituva. Selvitetään tämä etsimällä matriisin A ominaisvektorit, ja varmistamalla, että niitä on oikea määrä, eli 3 lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Aloitamme prosessin muodostamalla matriisin A karakteristisen yhtälön, joka on

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -3 \\ 1 & \lambda - 4 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1 \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 2) + 6 = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0.$$

Kun ratkaistaan karakteristisen yhtälön nollakohdat, saadaan vastauksiksi ominaisarvot, joista lasketaan ominaisvektorit. Havaitaan, että $\lambda = -1$ toteuttaa yhtälön. Tällöin voimme jakaa yhtälön polynomilla $\lambda + 1$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r|l} & \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ \hline \lambda + 1 & \lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 8 \\ & -\lambda^3 - \lambda^2 \\ \hline & -6\lambda^2 + 2\lambda \\ & 6\lambda^2 + 6\lambda \\ \hline & 8\lambda + 8 \\ & -8\lambda - 8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Saamme osamääränä toisen asteen polynomin $\lambda^2 - 6\lambda + 8$. Polynomin nollakohdat ovat $\lambda = 2$ ja $\lambda = 4$. Matriisin ominaisarvot ovat siis

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 4.$$

Ratkaistaan tämän jälkeen ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit. Aloitetaan tapauksesta $\lambda = -1$. Oletetaan, että

$$(\lambda I - A)x = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmänä, jolloin

$$\begin{cases} -3x_3 - 2x_1 = 0 \\ -x_3 - 5x_2 + x_1 = 0 \\ -x_3 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3/2t \\ x_2 = -1/2t \\ x_3 = t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

Eräs ratkaisu on siis

$$p_1 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tämä on ensimmäinen kolmesta ominaisvektorista. Loput ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ratkaistaan vastaavasti. Jäljelle jäävät ominaisvektorit ovat

$$(\lambda = 2:) \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (\lambda = 4:) \qquad p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yhdistämällä saadut ominaisvektorit p_1, p_2, p_3 saadaan matriisi

$$P = \begin{bmatrix} -3/2 & 3 & 1 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

jonka avulla diagonalisoidaan matriisi A. Nyt siis

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2/15 & -4/15 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 & 3 & 1 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3.3 Kolmiomatriisien diagonalisoituvuus

Lauseen 2.3 mukaan kolmiomatriisin diagonaalialkiot ovat sen ominaisarvoja. Siksi Lauseen 3.1 perusteella kolmiomatriisi on diagonalisoituva, kun sen diagonaalialkiot ovat erisuuria.

Esimerkki 3.2. Diagonalisoidaan alakolmiomatriisi

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 9 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Koska A on alakolmiomatriisi, sen ominaisarvot ovat sen diagonaalialkiot $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ ja $\lambda_3 = -3$. Koska diagonaalialkiot ovat erisuuria, niin on matriisi A diagonalisoituva. Etsitään ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit. Tutkitaan ensin ominaisarvoa $\lambda = 5$. Oletetaan, että

$$(\lambda I - A)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan yhtälöryhmänä, jolloin

$$\begin{cases} 3x_2 - x_1 = 0 \\ 8x_3 + 4x_2 - 9x_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 24/23t \\ x_2 = 8/23t \\ x_3 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eräs ratkaisu on

$$p_1 = \begin{bmatrix} 24/23 \\ 8/23 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Samalla metodilla voidaan ratkaista loput ominaisvektorit, jotka ovat seuraavat:

$$(\lambda = 2 :) \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5/4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (\lambda = -3 :) \qquad p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yhdistämällä p_1, p_2, p_3 saadaan matriisi

$$P = \begin{bmatrix} 24/23 & 0 & 0 \\ 8/23 & -5/4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

joka diagonalisoi kolmiomatriisin. Nimittäin,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 23/24 & 0 & 0 \\ 4/15 & -8/10 & 0 \\ 49/40 & 8/10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 9 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24/23 & 0 & 0 \\ 8/23 & -5/4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

4 Matriisien potenssit ja kertaluvut

Tässä luvussa tutustutaan matriisien potensseihin. Luvussa esitetään prosesessi matriisien potenssien selvittämiseksi. Lopuksi tutustutaan algebrallisiin ja geometrisiin kertalukuihin.

4.1 Matriisin potenssin ominaisarvot ja ominaisvektorit

Lause 4.1. *Olkoon k positiivinen kokonaisluku, λ on matriisin A ominaisarvo ja x ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Tällöin λ^k on matriisin A^k ominaisarvo ja x on sitä vastaava ominaisvektori.*

Todistus. (vrt. [1, s. 307]). Määritelmän 2.1 mukaan $Ax = \lambda x$, joten

$$A^k x = A^{k-1}(Ax) = A^{k-1}(\lambda x) = \lambda(A^{k-1}x) = \ldots = \lambda^{k-1}(Ax) = \lambda^{k-1}(\lambda x) = \lambda^k x.$$

Tämän perusteella λ^k on matriisin A^k ominaisarvo ja x on sitä vastaava ominaisvektori. □

4.2 Matriisin potenssien laskeminen

Matriisin potenssin laskeminen matriiseille, jotka ovat diagonalisoituvia on yksinkertaista. Diagonalisoitu matriisi A on muotoa

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = D.$$

Seuraavasta yhtälöstä nähdään, mitä tapahtuu kun yhtälöä $P^{-1}AP$ korotetaan johonkin potenssiin $k \geq 2$.

$$\begin{aligned}
(P^{-1}AP)^k &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)^{k-1} = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)^{k-2} \\
&= (P^{-1}APP^{-1}AP)(P^{-1}AP)^{k-2} = (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP)^{-2} = \ldots \\
&= (P^{-1}A^{k-1}P)(P^{-1}AP) = (P^{-1}A^{k-1}PP^{-1}AP) = P^{-1}A^kP = D^k.
\end{aligned}$$

Tämän yhtälön avulla voidaan päätellä, mitä A^k on. Kun kerrotaan saadun yhtälön $P^{-1}A^kP = D^k$ molempia puolia matriisilla P vasemmalta ja matriisilla P^{-1} oikealta, niin saamme yhtälön $A^k = PD^kP^{-1}$. Tällöin havaitaan, että diagonalisoituvan matriisin potenssi lasketaan diagonaalimatriisin D potenssin avulla. Tämä on seurausta siitä, että diagonaalimatriisin potenssit saadaan korottamalla diagonaalialkiot haluttuun potenssiin.

Esimerkki 4.1. Hyödynnetään esimerkissä 3.1 diagonalisoitua matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan, mikä on matriisin A kolmas potenssi A^3. Esimerkissä ollaan valmiiksi selvitetty, mitä D, P, ja P^{-1} ovat. Koska tiedetään, että $A^k = PD^kP^{-1}$, niin potenssin selvittäminen on varsin suoraviivaista.

$$A^3 = PD^3P^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 & 3 & 1 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/15 & -4/15 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/4 & -4 & 352 \\ -9/4 & 12 & 224 \\ 1 & 40 & 256 \end{bmatrix}.$$

4.3 Matriisin geometrinen kertaluku ja algebraalinen kertaluku

Matriisin A karakteristisen yhtälön juuren λ kertalukua sanotaan ominaisarvon λ algebralliseksi kertaluvuksi. Siihen liittyvän ominaisavaruuden dimensiota sanotaan ominaisarvon λ geometriseksi kertaluvuksi.

Lähestytään aihetta esimerkin kautta.

Esimerkki 4.2. Lasketaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut. Koska kyseessä on yläkolmiomatriisi, niin sen ominaisarvot ovat sen diagonaalialkiot. Karasteristinen yhtälö on täten

$$(\lambda - 2)^2(\lambda + 1).$$

Tästä voidaan nähdä, että $\lambda - 2$ esiintyy karakteristisessa yhtälössä kahdesti, joten juuren $\lambda = 2$ algebrallinen kertaluku on kaksi. Lisäksi $\lambda + 1$ esiintyy kerran, joten juuren $\lambda = -1$ algebrallinen kertaluku on yksi. Selvitetään sitten geometriset kertaluvut.

Selvitetään se ensin ominaisarvolle $\lambda = 2$. Huomataan, että

$$(A - 2I)x = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vektorin x ratkaisut muodostavat ominaisavaruuden. Toisaalta, tämä ominaisavaruus on määritelmän mukaan matriisin $A - 2I$ nollaavaruus. Siksi nulliteetti kertoo meille ominaisavaruuden dimension, eli geometrisen kertaluvun. Huomataan, että

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in R.$$

Koska vektorilla x on yksi lineaarisesti riippumaton ratkaisu, niin juurta $\lambda = 2$ vastaava geometrinen kertaluku on 1. Menettelemällä samoin voidaan ratkaista $\lambda = -1$ vastaava geometrinen kertaluku. Nyt

$$(A - (-1I))x = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan yhtälöryhmänä, jolloin

$$\begin{cases} 3x_2 + 3x_1 = 0 \\ 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} t \in R.$$

Koska vektorilla x on yksi lineaarisesti riippumaton ratkaisu, niin juurta $\lambda = -1$ vastaava geometrinen kertaluku on myös 1.

Lause 4.2. *Olkoon A $n \times n$ matriisi, tällöin:*

1. *Jokaisen matriisin A ominaisarvon geometrinen kertaluku on pienempi tai yhtä suuri kuin algebrallinen kertaluku.*

2. *Matriisi A on diagonalisoituva jos ja vain jos matriisin A jokainen geometrinen kertaluku on yhtä suuri kuin niiden algebrallinen kertaluku.*

Todistus. Ks. [1, s. 310]. □

Lähteet

[1] Howard, A. *Elementary linear Algebra*. 11th edition. United States of America: Wiley, 2010.