Tampereen yliopisto

Pirjetta Turunen

LIEN ALGEBRA MATEMATIIKAN KIELENTÄMISEN KEINOIN

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Yliopistonlehtori Terhi Kaarakka
Kesäkuu 2023

TIIVISTELMÄ

Pirjetta Turunen: Lien algebra matematiikan kielentämisen keinoin
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Kesäkuu 2023

Tässä opinnäytetyössä tutkitaan matematiikan kielentämisen merkitystä ja sen yhteyttä matemaattiseen osaamiseen. Työssä keskitytään erityisesti matemaattisen rakenteen Lien algebran kielentämiseen ja tutkitaan, miten kirjallinen kielentäminen voi syventää ymmärrystä tästä abstraktista aiheesta. Työssä esitellään erilaisia kirjallisen kielentämisen tehtävätyyppejä ja ratkaisumalleja, joita käytetään lopuksi Lien algebran kontekstissa hahmotettaessa tätä matemaattisesti haastavaa ja abstraktia aihetta.

Opinnäytetyössä tehty kirjallisuusselvitys osoittaa, että matematiikan kielentäminen tarjoaa tehokkaita työkaluja opiskelijoiden ajatteluprosessin jäsentämiseen ja matemaattisen ilmaisun selkeyttämiseen. [7] Lisäksi kirjallinen kielentäminen auttaa oppilaita lähestymään abstrakteja matemaattisia käsitteitä konkreettisella tavalla, mikä edistää oppimista ja ymmärrystä. [10]

Opinnäytetyössä esitellään norjalaisen matemaatikon Sophus Lien kehittämät matemaattiset rakenteet Lien ryhmä ja Lien algebra. Työssä käydään läpi myös algebran perusteita, jotta voidaan ymmärtää näiden matemaattisten rakenteiden ominaisuuksia ja yhteyksiä laajemmin algebran kontekstissa. Työn lopussa Lien algebran hahmottamisen tueksi on esitelty neljä kielentämistehtävää ja ratkaisumallia, jotka mukailevat kirjalliseen kielentämiseen liittyvää teoriaa.

Jatkuvia ryhmiä kuvaavat Lien ryhmät ovat yhdistelmä monelta matematiikan alalta. Lien ryhmä onkin tärkeä työkalu tutkittaessa jatkuvia symmetrioita. [12] Lien ryhmää voidaan kuvata Lien algebran avulla, joka on vektorikenttä. Erityisen hyödyllisen Lien algebrasta tekee se, että sen avulla Lien ryhmän geometriset ominaisuudet voidaan palauttaa algebrallisiin ominaisuuksiin. [14] Tässä työssä syvennytään Lien ryhmän ja Lien algebran määritelmiin sekä niitä kuvaaviin esimerkkeihin.

Tämä opinnäytetyö tarjoaa tietoa matematiikan kielentämisestä ja sen pedagogisista hyödyistä opetuksessa. Opinnäytetyön havaintoja voidaan käyttää esimerkiksi kehitettäessä opetusmenetelmiä, jotka tukevat opiskelijoiden matemaattista ajattelua ja kielentämistaitoja.

Avainsanat: matematiikan kielentäminen, kirjallinen kielentäminen, matemaattinen osaaminen, algebra, Lien ryhmä, Lien algebra

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

ALKUSANAT

Idea matematiikan kielentämiseen liittyvästä kandidaatintutkielmasta lähti "Kohti matematiikan opettajuutta" -kurssilta. Kurssilla esiteltiin matematiikan kielentämisen käsite ja halusin päästä syventymään aiheeseen vielä tarkemmin. Tässä työssä sain yhdistettyä kielentämisen itselleni mielekkääseen matematiikan aihealueeseen, algebraan. Lien algebra on hyvin abstrakti ja algebraa soveltava matemaattinen rakenne, joka tarjoaa mielenkiintoisen katsauksen siitä, kuinka abstraktia matematiikkaa voidaan soveltaa esimerkiksi modernissa fysiikassa.

Haluan ensisijaisesti kiittää työni ohjaajaa Terhi Kaarakkaa, joka kokosi kielentämisen ja algebran aiheideoistani mielenkiintoisen aiheen tutkielmalleni. Terhin kanssa yhteistyö oli sujuvaa ja välipalautuksista saatu palaute tsemppasi aina eteenpäin tutkielman kanssa.

Lisäksi haluan kiittää ystäviäni, joiden kanssa olemme saaneet jakaa haasteet sekä onnistumiset opinnoissamme. Heiltä saatu tuki on ollut korvaamatonta myös tämän työn edistymisen kannalta. Suuret kiitokset myös sovelletun matematiikan kandidaatintyöseminaarin kotoisalle ilmapiirille sekä huikeille esitelmille, jotka saavat edelleenkin hymyn huulille.

Tampereella, 21. kesäkuuta 2023

Pirjetta Turunen

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

a^{-1}	käänteisalkio
$\times$	laskutoimitus
e	neutraalialkio
PISA	kansainvälinen koulutuksen ja oppimisen tutkimusohjelma (engl. Programme for International Student Assessment)
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
$\mathbb{R}^3$	kolmiulotteinen reaalinen avaruus
$\mathbb{R}^m$	m -ulotteinen reaalinen avaruus
$\mathbb{R}^n$	n -ulotteinen reaalinen avaruus
λ	skalaari
$SL(n, \mathbb{R})$	erityinen lineaarinen matriisiryhmä (engl. special linear group)
$sl(n, \mathbb{R})$	matriisiryhmää $SL(n, \mathbb{R})$ vastaava tangenttiavaruus
$f \circ g$	yhdistetty funktio

1. JOHDANTO

Matematiikka on abstrakti ja looginen tiede, jota käytetään monilla eri tieteenaloilla sekä käytännön sovelluksissa. Matemaattisen tiedon ilmaiseminen ja käsittely on olennainen osa matematiikan oppimista sekä siihen liittyvää tutkimusta. Matematiikan kielentäminen, eli matemaattisen ajattelun ja tiedon välittäminen kielellisten ilmaisujen avulla [4], on tärkeä osa matematiikan oppimista.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan matematiikan kielentämisen merkitystä sekä käytäntöjä, erityisesti kirjallisen kielentämisen näkökulmasta. Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, millaisia tehtävätyyppejä ja ratkaisumalleja voidaan hyödyntää matematiikan kielentämisessä. Tavoitteena on myös perehtyä matemaattisen osaamisen ja kielentämisen välisiin yhteyksiin. Lisäksi tutkielmassa käytetään matematiikan kielentämistä apuna matemaattisen rakenteen Lien algebran hahmottamisessa.

Toisessa luvussa käsitellään matematiikan kielentämistä yleisesti ja tarkastellaan matemaattisen ajattelun kielentämisen keinoja. Tarkastellaan lisäksi matematiikan kielentämisen merkitystä matemaattisen osaamisen kehittymisessä. Luvun lopussa tutustutaan erilaisiin kielentämisen tehtävätyyppeihin sekä ratkaisumalleihin, joiden avulla voidaan ratkaista tehtäviä kirjallista kielentämistä hyödyntäen.

Kolmannessa luvussa esitellään johdantoa algebraan ja algebrallisiin rakenteisiin. Esitietovaatimuksena tässä tutkielmassa on yliopistotasoinen algebran johdantokurssi. Algebra on matematiikan haara, joka tutkii laskutoimituksia ja niihin liittyviä lainalaisuuksia. [6] Joukkojen ja niihin liittyvien laskutoimituksien perusteella abstraktissa algebrassa voidaan määritellä algebrallisia rakenteita, joista tyypillinen esimerkki on ryhmä. [13] Yksi algebran sovelluksista on Lien algebra, jonka avulla voidaan mallintaa Lien ryhmää eli jatkuvaa monistoa. [2]

Lien ryhmää ja Lien algebraa käsitellään neljännessä luvussa. Ne ovat 1800 -luvulla kehitettyjä algebran sovelluksia, joita voidaan soveltaa esimerkiksi modernissa fysiikassa jatkuvien symmetrioiden tutkimiseen. [12] Jotta voimme ymmärtää näitä matemaattisia rakenteita paremmin, viidennessä luvussa Lien algebran käsitteen hahmottamiseen käytetään apuna matematiikan kielentämistä. Tutkielmassa esitellään neljä Lien algebraan liittyvää tehtävä- ja ratkaisuesimerkkiä, jotka mukailevat luvussa kaksi esiteltyjä matematiikan kielentämisen tehtävätyyppejä ja ratkaisumalleja.

Lopuksi esitetään yhteenveto tutkielman keskeisistä havainnoista sekä pohditaan matematiikan kielentämisen merkitystä matemaattisen osaamisen kehittämisessä. Tämä tutkielma tarjoaa katsauksen matematiikan kielentämiseen sekä Lien matemaattisiin rakenteisiin. Lähteiden luettelo on esitetty tutkielman lopussa.

2. MATEMATIIKAN KIELENTÄMINEN

"Miten ajattelit?" on tärkeä kysymys, kun opiskellaan matematiikkaa. Kun opiskelijat kertovat toisilleen, miten he ovat päässeet tiettyyn ratkaisuun tehtävässä tai miten he ymmärtävät matemaattisen käsitteen, samalla he prosessoivat matemaattista ajatteluaan. Ajatuksiaan kertomalla opiskelijoilla on mahdollisuus oppia toisiltaan sekä opettaja saa arvokasta tietoa opiskelijoiden ajatteluprosessista. [9]

Tällaista matemaattista ajattelua ja sen ilmaisemista kirjallisesti tai suullisesti luonnollista kieltä käyttäen kutsutaan matematiikan kielentämiseksi. Matematiikan kielentämisen avulla pyritään kehittämään matemaattista ajattelua ja sitä kautta monipuolista matemaattista osaamista. [10] Kielentäminen tuo työkaluja tarkastella matemaattista ongelmaa tai käsitettä opiskelijalle luontevalla tavalla. Kielentämistä voidaan hyödyntää esimerkiksi lähestyttäessä uutta ja haastavaa asiaa, joka vaatii monipuolista matemaattista osaamista.

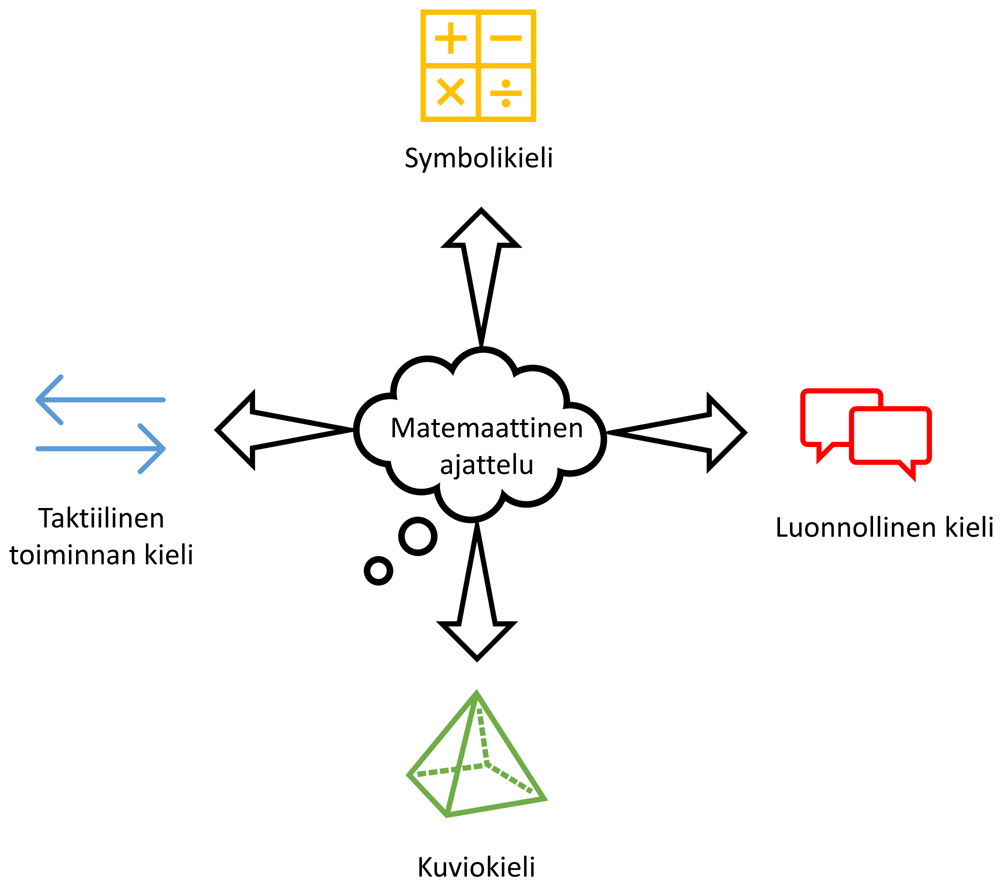
2.1 Matemaattisen ajattelun kielentäminen

Matematiikan opiskelu voi olla haastavaa monille opiskelijoille, sillä perinteinen matemaattinen symbolikieli ja sen tarkat notaatiot voivat tuntua vierailta ja vaikeaselkoisilta. [15] Symbolikielen haasteiden vuoksi onkin perusteltua ilmaista matemaattista ajattelua myös muilla tavoilla kuin pelkästään symbolikieltä käyttäen. Tämän vuoksi matematiikan kielentäminen on tärkeä käsite, joka mahdollistaa matemaattisen ajattelun ilmaisemisen symbolikielen lisäksi suullisesti ja kirjallisesti luonnollisella kielellä sekä kuvioiden tai toiminnan avulla. [10]

Matematiikan kielentäminen tarjoaa keinoja jäsentää ja selkeyttää opiskelijan omaa ajatteluprosessia sekä monipuolistaa opiskelijan matemaattista ilmaisua. Kielentämisen avulla opiskelija pystyy kuvaamaan ja esittämään matemaattista ajatteluaan ymmärrettävällä ja konkreettisella tavalla. Tämä auttaa opiskelijaa ymmärtämään ja omaksumaan matematiikkaa paremmin sekä tekee opiskelijan ajattelun näkyvämmäksi muille. [7]

Matematiikan kielentäminen voi koostua eri kielimuodoista, kuten matematiikan symbolikielestä, luonnollisesta kielestä ja kuviokielestä. Kuviokieli on erityisen tärkeää geometrian tehtävien ratkaisuissa, missä opiskelijat hyödyntävät visuaalista hahmottamista tehtävien ratkaisemisessa. On tärkeää huomata, että matemaattisen kielentämisen tapoja voi olla monia, ja ne voivat vaihdella paljon yksilöiden ja eri kulttuurien välillä. [7]

Näiden kolmen kielimuodon lisäksi on myös taktiilinen toiminnan kieli, joka on toimivaa erityisesti varhaiskasvatuksessa. [9] Lapsille matematiikkaan tutustuminen toiminnallisen kielentämisen avulla voi olla hyvä tapa tuoda matematiikkaa lähelle lasten luontaista liikkumista, ajattelua ja olemista. Toiminnan avulla voidaan kielentää ja hahmottaa esimerkiksi lukuja, lukumääriä ja aritmetiikkaa. Kouluikäisille lapsille ja nuorille toiminnallinen kielentäminen voi konkretisoida haastavia käsitteitä esimerkiksi pantomiimin kautta. Matematiikan eri kielimuotoja on havainnollistettu kuvassa 2.1.



Kuva 2.1. *Matemaattista ajattelua voidaan ilmaista matematiikan symbolikielellä, luonnollisella kielellä, kuviokielellä sekä taktiilisella toiminnan kielellä [9]*

Tässä tutkielmassa keskitytään matematiikan kielentämiseen kirjallisessa työskentelyssä, jolla tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista kirjoittamalla. Kirjallinen kielentäminen voi näkyä esimerkiksi tehtävien ratkaisuissa, kun opiskelija kirjoittaa selityksiä ja perusteluja ratkaisujen taustalla olevasta ajattelusta. Kirjoittamisen avulla matemaattista ajattelua voidaan selkeyttää, jäsentää ja syventää. Se auttaa myös opiskelijaa reflektoimaan omaa ajatteluaan sekä kehittämään argumentointitaitojaan. [7]

Matematiikan kielentäminen kirjallisesti edistää opiskelijaa monin tavoin. Kirjoittamisen avulla opiskelija näyttää ratkaisun vaiheet ja niihin on helpompi palata tarvittaessa uudelleen. Kirjoitusprosessi pakottaa opiskelijan pohtimaan ratkaisua syvällisemmin, joka voi edelleen kehittää matemaattista ajattelua. Kirjoittaminen voi myös parantaa opiskelijan asenteita matematiikkaa kohtaan sekä auttaa opettajaa arvioimaan oppimista. [7]

Yhteenvetona voidaan todeta, että matematiikan kielentäminen on tärkeä osa matematiikan oppimista ja matemaattisen ajattelun kehittymistä. Se selkeyttää ajattelua, kehittää ymmärrystä, edistää kommunikaatiota ja helpottaa arviointia. Kielentämisen avulla pyritään kehittämään opiskelijan matemaattista osaamista, jota tutkielmassa käsitellään seuraavaksi. Matemaattisen osaamisen ulottuvuuksia tarkastelemalla voidaan ymmärtää, miksi kielentäminen on tärkeä osa matematiikan monipuolista oppimista.

2.2 Matemaattinen osaaminen

Matematiikan kielentämisen avulla pyritään kehittämään opiskelijoiden matemaattista osaamista. Jotta voidaan hahmottaa, miten matematiikkaa voisi kielentää mahdollisimman tarkoituksenmukaisesti, perehdytään seuraavaksi matemaattisen osaamisen ulottuvuuksiin.

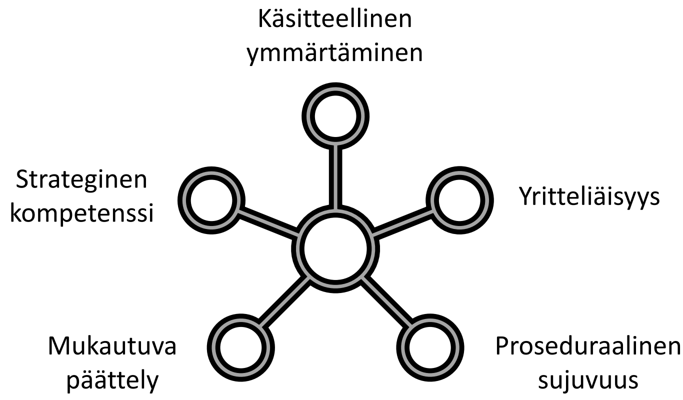
Matemaattinen osaaminen on matematiikan hallintaa monipuolisesti. [8] Matemaattinen osaaminen voidaan jakaa viiteen osatekijään [4], jotka on listattu alle ja joita pohditaan myöhemmin laajemmin.

1. **Käsitteellinen ymmärtäminen** *(conceptual understanding)*: matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen.
2. **Proseduraalinen sujuvuus** *(procedural fluency)*: taito suorittaa matemaattisia laskutoimituksia ja menetelmiä joustavasti, täsmällisesti ja tehokkaasti.
3. **Strateginen kompetenssi** *(strategic competence)*: kyky muodostaa, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.
4. **Mukautuva päättely** *(adaptive reasoning)*: kyky loogiseen ajatteluun, pohdintaan, selittämiseen ja perustelemiseen.
5. **Yritteliäisyys** *(productive disposition)*: luontainen taipumus nähdä matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana. Yritteliäisyyteen liittyy usko omaan ahkeruuteen ja tehokkuuteen. [4]

Nämä viisi matemaattisen osaamisen osa-aluetta ovat riippuvaisia toisistaan kuvan 2.2 mukaisesti, ja ne yhdessä muodostavat mahdollisuuden matemaattisen osaamisen kehittymiselle. Matemaattista osaamista ei voida siis kehittää keskittymällä pelkästään yhteen tai kahteen näistä osa-alueista. [8]

Käsitteellisesti ymmärtävät opiskelijat osaavat yhdistellä matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä soveltaa niitä tarkoituksenmukaisissa tilanteissa. He ymmärtävät, millaisissa konteksteissa matemaattiset käsitteet ovat käyttökelpoisia ja osaavat yhdistää uusia käsitteitä osaksi jo aiemmin opittua. Käsitteellinen ymmärrys tukee niiden muistamista, koska opitut käsitteet ja menetelmät ovat yhteydessä toisiinsa. Tällöin ne ovat helpommin muistettavissa ja palautettavissa mieleen, kun ne unohtuvat. [4] Jos opiskelija ymmärtää menetelmän, hän todennäköisesti ei muista sitä väärin. Usein opiskelijan käsitteellistä ymmärtämistä testataan käsitteiden sanallistamisen ja esittämisen kautta. Opiskelijat kuitenkin usein ymmärtävät käsitteitä ennen kuin kykenevät verbaalisesti ilmaisemaan niitä. [8]

Proseduraalisella sujuvuudella tarkoitetaan proseduurien eli matemaattisten menetelmien tun-



Kuva 2.2. *Matemaattiseen osaamiseen liittyy viisi piirrettä, jotka ovat riippuvaisia toisistaan [4]*

temista ja taitoa ymmärtää, missä tilanteissa ja miten niitä voi käyttää tarkoituksenmukaisesti. Proseduraalisesti sujuva opiskelija osaa käyttää proseduureja joustavasti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti. [4] Proseduurien hallinta on yhteydessä käsitteelliseen ymmärtämiseen, koska esimerkiksi rationaalilukujen käsitteellinen ymmärtäminen ei ole mahdollista ilman niihin liittyvien proseduurien ja menetelmien hallitsemista. [8]

Strategisella kompetenssilla tarkoitetaan kykyä muotoilla matemaattisia ongelmia sekä esittää ja ratkaista niitä. Ongelman ratkaisumenetelmä ei ole siis opiskelijalle etukäteen selvä ja opiskelijan on hallittava useita ongelman ratkaisumalleja ja -strategioita ratkaistakseen tehtävän. [4] Strategista kompetenssia tarvitaan, kun on epäselvää, millainen ongelma tarkalleen ottaen on kyseessä. Tällöin tarvitaan taitoa ja kokemusta muotoilla ongelma niin, että sen ratkaisemiseen voidaan käyttää matematiikkaa. [8]

Mukautuva päättely tarkoittaa kykyä ajatella loogisesti erilaisten käsitteiden ja tilanteiden välisistä suhteista. Matematiikassa mukautuva päättely on kuin liima, joka pitää kaiken koossa ja se on oppimista ohjaava perusta. Jos opiskelija kykenee mukautuvaan päättelyyn, hän pystyy osoittamaan riittävät perustelut omille valinnoilleen ja ratkaisuilleen. Matematiikassa toimintaa voidaan perustella esimerkiksi todistamisen avulla. Jotta opiskelija kykenee mukautuvaan päättelyyn, opiskelijalla täytyy olla käsiteltävään aiheeseen liittyvä riittävä tietopohja. Tietopohjan lisäksi käsiteltävän tehtävän tulee olla ymmärrettävä ja motivoiva sekä tehtävän kontekstin täytyy olla tuttu. Mukautuvaa päättelyä tarvitaan, jotta voidaan perustella valitun strategian oikeellisuus kyseisessä tehtävässä tai ongelmassa. [4] [8]

Yritteliäisyydellä tarkoitetaan taipumusta nähdä matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja kannattavana. Lisäksi yritteliäs opiskelija uskoo, että jatkuva työ matematiikan eteen on kannattavaa. Jos opiskelija taitaa hyvin neljä edellistä piirrettä, hänen täytyy tämän lisäksi uskoa matematiikan olevan ymmärrettävää ja käyttökelpoista. [4] Yritteliäisyyteen kuuluu myös hyvä matemaattinen itsevarmuus, jolloin opiskelijalla on positiivinen kuva itsestään matematiikan osaajana. Opiskelijan uskomukset ja asenteet omaa oppimistaan kohtaan vaikuttavat metakognition kautta opiskelijan suorituksiin. [8]

Nämä matemaattisen osaamisen osatekijät auttavat hahmottamaan matemaattisen osaamisen laaja-alaisuutta sekä taitoja, joita arvioidaan esimerkiksi kansainvälisissä PISA-tutkimuksissa. [8] Viidestä ulottuvuudesta voidaan nähdä, että matemaattisen osaamisen kehittyminen vaatii laajaa matemaattisen ajattelun kehittämistä. Matematiikka vaatii osaajaltaan taitoa ymmärtää ja yhdistellä pieniä rakennuspalikoita osaksi isompaa kokonaisuutta. Tämän lisäksi tarvitaan yritteliäisyyttä sekä kykyä loogiseen päättelyn ja perustelemiseen. Matematiikan kielentämisen avulla voidaan monipuolisesti kehittää näitä matemaattisen osaamisen ulottuvuuksia, eikä osaaminen rajoitu ainoastaan esimerkiksi symbolien ja kaavojen kirjoittamiseen.

2.3 Kirjallisen kielentämisen tehtävätyypit

Matematiikan kirjallisen kielentämisen tehtävät tarjoavat uudenlaisia näkökulmia ja keinoja tuoda kielentämistä osaksi matematiikan oppimista. Tehtävien avulla voidaan tukea matemaattisen ajattelun ja osaamisen kehittymistä perinteisien tehtävätyypien ohella. Juuso Linnusmäki on esitellyt diplomityössään [16] seitsemän erilaista kirjallisen kielentämisen tehtävätyyppiä, jotka on listattu alle.

1. **Koodinvaihto** eli koodaus on yleisimmin käytetty tehtävätyyppi, joka tarkoittaa siirtymistä matematiikan eri kielimuotojen välillä. Opiskelijan odotetaan pystyvän ilmaisemaan matemaattisia käsitteitä ja ajatuksia symbolikielen lisäksi myös luonnollisella kielellä ja kuviokielellä, tai päinvastoin.
2. **Täydennystehtävässä** opiskelijoille annetaan puutteellinen ratkaisu, josta heidän tulee täydentää puuttuvat osat.
3. **Virheenetsintätehtävässä** opiskelijoiden tehtävänä on etsiä ja korjata virheitä tai puutteita matemaattisessa esityksessä.
4. **Ratkaisusta tehtävä** -tehtävätyyppi edellyttää, että opiskelijoiden tulee laatia tehtävän ratkaisun perusteella sopiva tehtävänanto annetulle ratkaisulle.
5. **Ratkaisun argumentointi** -tehtävässä opiskelijoiden on perusteltava matemaattista esitystä hyödyntäen eri kieli- ja ilmaisumuotoja.
6. **Tiedonseulontatehtävässä** opiskelijoiden tulee tarkastella tehtävänantoa ja etsiä siitä olennainen tieto ratkaisua varten.
7. **Omin sanoin selitys** -tehtävätyypissä opiskelijat selittävät jonkin asian omin sanoin käyttämättä matemaattisia symboleita. [16]

Linnusmäen tutkielmassa havaittiin myös uusia kielentämistehtävätyyppejä, kuten *matematiikan konkretisointi* -tehtävätyyppi, jossa siirrytään abstraktin ja konkreettisen tason välillä. Lisäksi *ratkaisun järjestäminen* -tehtävätyyppi, jossa opiskelijoiden tulee järjestää ratkaisun eri vaiheet oikeaan järjestykseen. [16]

On kuitenkin huomattava, että usein kielentämistehtävissä eri tehtävätyypit voivat sulautua toisiinsa ja sisältää osia useista eri tehtävätyypeistä. [16] Voisi olla tehokasta esimerkiksi tuoda joitain kielentämistehtävien piirteitä osaksi perinteisiä tehtävätyyppejä, jolloin tarjotaan opiskelijalle mahdollisuus kehittää matemaattista ajattelua erilaisista näkökulmista. Lisäksi tehtävätyyppien moninaisuus voi antaa opiskelijalle mahdollisuuden löytää itselleen luontaisen tavan lähestyä matematiikkaa ja kehittää matemaattista osaamistaan.

2.4 Kirjallisen kielentämisen ratkaisumallit

Monipuolinen kirjoittaminen ja matematiikan kirjallinen kielentäminen matemaattisten tehtävien ratkaisuissa edistää matematiikan oppimista. Kirjoittaminen edistää matemaattista ymmärrystä ja parantaa opiskelijoiden asenteita matematiikkaa kohtaan. Lisäksi kirjoittaminen tuo opiskelijan ajattelun näkyvämmäksi ja sitä kautta helpottaa opettajan arviointityötä. Kun opiskelija kirjoittaa ratkaisujaan, kirjoitusprosessi jättää näkyviin ratkaisun eri vaiheet, joita voi tarvittaessa muuttaa ja niihin voi palata myöhemmin uudelleen. Kirjoittaminen vaatii opiskelijaa pohtimaan ratkaisua syvällisemmin kuin pelkästään puhuttu ratkaisu, ja kirjoitusprosessi selkeyttää ja kehittää opiskelijan matemaattista ajattelua. [7]

Kirjoittamisprosessi matemaattisten ongelmien ratkaisussa on samankaltainen kuin itse ratkaisuprosessi. Molemmissa pyritään selkeään ongelman määrittelyyn ja sen ratkaisemiseen. Kun opiskelija kirjoittaa ratkaisujaan matematiikan kielen lisäksi luonnollisella kielellä, hän tekee sen itselleen luontevalla tavalla, ja ratkaisusta tulee tekijänsä näköinen. Tämä voi muuttaa opiskelijan kuvaa matematiikasta positiivisemmaksi ja vahvistaa opiskelijan uskoa itseensä matematiikan osaajana. [7]

Kirjoittaminen voi olla opiskelijalle haastava tehtävä, mutta opiskelijan luonnollisen kielen käyttö ongelman pohdinnassa ja ratkaisujen hahmottamisessa voi auttaa häntä jäsentämään ajatteluaan sekä itselleen että muille opiskelijoille. Opettajan kannalta kirjallisten perusteluiden arviointi on helpompaa, kun ratkaisussa on esitetty perusteluja muullakin tavoin kuin vain matemaattisina lausekkeina. Peruskoulun oppimateriaali painottaa usein matematiikan symbolikielen käyttöä, mutta joillekin oppijoille voi olla luontevampaa käyttää myös luonnollista kieltä ja kuvia ratkaisujen esittämisessä. [7]

Uudenlaisien tehtävätyyppien lisäksi kirjallista kielentämistä voidaan tuoda osaksi matematiikkan oppimista myös perinteisien tehtävätyyppien ratkaisumallien kautta. Jorma Joutsenlahti on tutkimusartikkelissaan [7] esitellyt neljä erilaista kirjallisen kielentämisen ratkaisumallia, joiden avulla opiskelija voi kielentää omaa ajatteluaan osana tehtävän ratkaisua. Joutsenlahti on jäsentänyt ja nimennyt nämä ratkaisumallit *standardi*-, *kertomus*-, *tiekartta*- ja *päiväkirja* -malleiksi. Näiden mallien avulla opiskelijat voivat ilmaista ratkaisujaan monipuolisesti ja voivat valita itselleen luontaisen tyylin kirjoittaa ratkaisuja. [7]

Standardi -malli on yleisesti käytetty lähestymistapa peruskoulun oppikirjoissa, erityisesti aritmetiikan tehtävissä, joissa painotetaan pelkästään matematiikan symbolikielen käyttöä. Tässä mallissa ratkaisijaa ohjataan käyttämään vain yhtä esittämistapaa, joka koostuu lausekkeista, laskuista ja lopuksi vastauksesta yksikköineen. Ratkaisija pyrkii toistamaan tätä samaa rakennetta jokaisessa tehtävässä, ja hänen oma ymmärtämisprosessinsa sekä ratkaisun esittäminen ymmärrettävästi muille jäävät ilman tukea. [7] *Standardi* -mallia käytettäessä matemaattiset symbolit ja lausekkeet ovat keskeisessä roolissa. Matematiikan osaamisen ulottuvuuksia tarkasteltaessa tässä mallissa proseduraalinen sujuvuus kehittyy, mutta muut neljä ulottuvuutta jäävät pienemmälle osalle.

Kertomus -mallissa ratkaisun eteneminen ja perusteet kuvataan vaiheittain sanallisesti ja/tai kuvioilla. Tässä mallissa korostetaan selkeää ja ymmärrettävää kuvailua siitä, mitä ja miksi seuraavaksi tehtävän ratkaisussa tapahtuu. Lisäksi käytetyt merkinnät selitetään sanallisesti tai esitetään kuvioiden avulla. Ratkaisussa käytetään kuvassa 2.1 esiintyviä eri kieliä jäsentämään ja tukemaan ratkaisuprosessia. Tavoitteena on tehdä ratkaisu lukijalle mahdollisimman ymmärrettäväksi ja helppolukuiseksi, jotta lukija voi vakuuttua siitä, että ratkaisija on ymmärtänyt kaikki ratkaisun vaiheet. Toisaalta tämä malli helpottaa myös lukijaa havaitsemaan mahdolliset puutteet ratkaisussa. [7]

Tiekartta -mallissa ratkaisuprosessi käydään ensin läpi kokonaan sanoin ja kuvioin. Tämä auttaa lukijaa hahmottamaan ratkaisun "punaisen langan" eli sen keskeisen idean ja tarvittavat perustelut. Ratkaisu esitetään aluksi luonnollisen kielen ja kuvien avulla, minkä jälkeen siirrytään matematiikan kieleen. Toisin sanoen *tiekartta* -mallin ensimmäisessä vaiheessa käytetään selittävää kieltä ja kuvioita, mikä mahdollistaa ratkaisuprosessin hahmottamisen ennen matemaattisten lausekkeiden ja laskutoimitusten esittämistä, joka vastaa *standardi* -mallia. *Tiekartta* -mallissa näkyväksi tulee se ajatustyö, joka *standardi* -mallissa jää piiloon ja täytyy jäljittää matemaattisista lausekkeista ja laskutoimituksista. [7]

Päiväkirja -mallissa ratkaisu esitetään sanallisesti tai kuvioin silloin, kun ratkaisija kohtaa ongelmia ratkaisuprosessissa. Pääosin ratkaisussa noudatetaan kuitenkin *standardi* -mallia, ongelmakohdat lukuunottamatta. Tässä mallissa ratkaisija jäsentää ja selkeyttää omaa matemaattista ajatteluaan kirjoittamalla ja/tai piirtämällä, lähinnä itselleen eikä niinkään lukijalle. *Päiväkirja* -mallin tarkoituksena on usein selventää omia ajatuksiaan ja parantaa ymmärrystään kirjoitusprosessin aikana. [7]

Nämä neljä kirjallisen kielentämisen ratkaisumallia havainnollistavat sitä, millaisilla erilaisilla tavoilla matemaattista ajattelua voidaan tuoda näkyväksi tehtävien ratkaisuissa. Näistä neljästä mallista *kertomus*-, *tiekartta*- ja *päiväkirja* -ratkaisumallit tukevat monipuolisesti matemaattisen osaamisen osa-alueita. Kirjoittamisprosessi matematiikan eri kielillä tukee matematiikan oppimista ja antaa opiskelijalle työkaluja matemaattisten ongelmien hahmottamiseen.

3. JOHDATUS ALGEBRAAN

Tässä luvussa esitellään johdantoa algebraan sekä algebrallisiin rakenteisiin. Myöhemmin tutkielmassa käsitellään matemaattisia rakenteita Lien ryhmää ja Lien algebraa, joten tämä luku on rakennettu tukien niiden teoriaa. Jotta voimme ymmärtään Lien matemaattisia rakenteita, käydään ensin läpi niihin liittyvän algebran pohjatietoa. Tässä luvussa kehitetään matemaattisen osaamisen ulottuvuuksista käsitteellistä ymmärtämistä, jolloin uusi tieto Lien ryhmästä ja Lien algebrasta on hyvä yhdistää osaksi aiemmin opittua.

3.1 Algebra yleisesti

Algebra tutkii laskutoimituksia ja niihin liittyviä lainalaisuuksia. Algebra ei ole riippuvainen luvuista, vaan alkioita merkitään usein kirjaimilla. Ensimmäinen askel algebraan tapahtuu usein peruskoulussa "kirjainlaskennan" kautta. Kun luvut korvataan kirjaimilla, voidaan lausekkeet ja laskutoimitukset irrottaa asianyhteydestä. Tällöin voidaan keskittyä matemaattisiin lainalaisuuksiin riippumatta lukujen arvoista. Kertolaskulle on esimerkiksi voimassa lainalaisuus $xy = yx$ millä tahansa luvuilla x ja y. [6]

Algebrassa tällainen yleistäminen luvuista kirjaimiin voidaan viedä vieläkin pidemmälle. Lukujen lisäksi myös monille muille matemaattisille olioille voidaan määritellä laskutoimituksia. Funktioille voidaan esimerkiksi määritellä "kertolasku", joka tunnetaan yleisemmin yhdistettynä funktiona $f \circ g$. Tällä yhdistetyllä funktiolla on joitain yhteisiä piirteitä lukujen kertolaskun kanssa, mutta esimerkiksi funktioiden tulo $f \circ g$ ei ole yleensä sama kuin $g \circ f$. [6]

Abstraktissa algebrassa tutkitaan yleisesti laskutoimituksia ja niiden ominaisuuksia. Laskutoimituksia luokitellaan niiden ominaisuuksien perusteella riippumatta siitä, lasketaanko luvuilla, funktioilla tai jollain muulla. [6] Tällaisesta yleistämisestä on hyötyä opittujen sääntöjen soveltamisessa. Kun ymmärretään käsitteet ja proseduurit laskutoimitusten taustalla, voidaan soveltaa matemaattisen osaamisen strategista kompetenssia. Sen avulla voidaan muodostaa, esittää ja ratkaista uudenlaisia ja ennalta-arvaamattomia matemaattisia ongelmia. Yksi tällainen sovellus on Sophus Lien kehittämä Lien ryhmä ja siihen liittyvä Lien algebra.

3.2 Algebrallisia rakenteita

Tässä kappaleessa määritellään keskeisiä algebrallisia rakenteita ja käsitteitä, jotka liittyvät Lien ryhmään ja Lien algebraan. Lien ryhmä pohjautuu algebralliseen perusrakenteeseen, jota kutsutaan ryhmäksi. Algebrallinen rakenne syntyy, kun joukkoon liitetään yksi tai useampi laskutoimitus

[6]. Ryhmän lisäksi tällaisia algebrallisia rakenteita ovat esimerkiksi rengas ja *kunta*, johon Lien algebraan liittyvä vektoriavaruus on määritelty.

Määritelmä 3.1. [13] *Ryhmä* on epätyhjä joukko G varustettuna suljetulla laskutoimituksella $G \times G \to G$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) Laskutoimitus $\times$ on liitännäinen, jolloin $(ab)c = a(bc)$ kaikille $a, b, c \in G$.

(ii) Joukossa G on neutraalialkio e laskutoimitukselle $\times$. Neutraalialkiolle e on voimassa $ae = ea = a$ kaikilla $a \in G$.

(iii) Jokaiselle joukon G alkiolle a on käänteisalkio a^{-1}. Käänteisalkioille on voimassa ehto $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Määritellään lisäksi Lien ryhmään liittyvät käsitteet *sileä kuvaus* sekä *monisto*. Kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on sileä, mikäli kuvauksella on kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat. Toisin sanoen kuvaus on sileä, jos sen jokaisen kertaluvun derivaatat ovat jatkuvia. Monisto taas on jatkuva avaruus, joka näyttää lokaalisti euklidiselta eli reaalikertoimiselta avaruudelta $\mathbb{R}^n$. Esimerkiksi käyrät ovat yksiulotteisia monistoja ja pinnat kaksiulotteisia monistoja. [2]

Lien algebran määritelmässä esitellään Lien sulkeet, jotka täyttävät bilineaarisuuden ehdot. Määritelmässä 3.2 listataan bilineaarisen muodon ehdot.

Määritelmä 3.2. [5] Olkoon L vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on K. Tällöin kuvausta $B : L \times L \to K$ kutsutaan *bilineaariseksi muodoksi*, jos kaikille vektoriavaruuden L vektoreille x, y, z ja skalaareilla λ täyttyy seuraavat ehdot:

$$
\begin{aligned}
B(x + y, z) &= B(x, z) + B(y, z)\\
B(\lambda x, y) &= \lambda B(x, y)\\
B(x, y + z) &= B(x, y) + B(x, z)\\
B(x, \lambda y) &= \lambda B(x, y).
\end{aligned}
$$

Bilineaarinen muoto on siis vektorikentässä määritelty lineaarinen operaatio, joka operoi vektorikentän kahta vektoria ja palauttaa yhden vektorin näiden kahden vektorin perusteella. Bilineaarinen muoto voi olla esimerkiksi skalaaritulo, joka on kahden vektorin pistetulo, tai ristitulo, joka tuottaa uuden vektorin kahden vektorin risteytymispisteen perusteella. [5] Lien sulkeiden tapauksessa bilineaarisuus siis tarkoittaa, että Lien sulkeet operoivat kahta vektorikentän alkiota ja palauttavat yhden alkion. Lien sulkeiden bilineaarisuus on tärkeä työkalu Lien algebran tutkimisessa ja sen avulla voidaan analysoida Lien algebran ominaisuuksia ja rakennetta.

Tämän luvun tarkoituksena on antaa johdantoa algebraan ja esitellä algebrallisia rakenteita, jotka liittyvät Lien ryhmään ja Lien algebraan. Algebran perusteiden käsitteellinen ymmärtäminen toimii pohjana myöhemmin käsiteltäville Lien matemaattisille rakenteille. Perusteiden hallitseminen kehittää matemaattista osaamista, joka mahdollistaa uuden tiedon yhdistämisen aiemmin opittuun.

4. LIEN RYHMÄ JA LIEN ALGEBRA

Marius Sophus Lie (17. joulukuuta 1842 – 18. helmikuuta 1899) oli norjalainen matemaatikko, joka tunnetaan jatkuvien ryhmien teorian perustajana. Hänen tutkimuksensa johtivat yhteen 1900-luvun matematiikan tärkeimmistä haaroista, Lien ryhmien ja Lien algebrojen teoriaan. Nämä Sophus Lien mukaan nimetyt matemaattiset rakenteet sivuavat monien nykyaikaisen matematiikan ja matemaattisen fysiikan aloja. Matematiikassa Lie oli kiinnostunut alun perin geometriasta ja tämä kiinnostus säilyi hänen koko elämänsä ajan. [18] [17]

4.1 Lien ryhmän määritelmä

Lien ryhmät ovat jatkuvia ryhmiä, jotka muodostuvat vektoriavaruuden lineaarikuvauksista. Niissä yhdistyy ryhmäteorian, lineaarialgebran, differentoituvien pintojen ja monistojen teoriat. Koska Lien ryhmät ovat jatkuvia ja differentoituvia, niillä on tärkeä merkitys esimerkiksi modernin fysiikan perustana. Lien ryhmät ovat tärkeä työkalu tutkittaessa jatkuvaa symmetriaa ja niiden avulla fysiikassa voidaan kuvata luonnossa esiintyviä säännönmukaisuuksia ja symmetrioita. [12] Määritellään seuraavaksi Sophus Lien teorian mukainen *Lien ryhmä.*

Määritelmä 4.1. [11] Reaalinen *Lien ryhmä* on joukko G, jolla on kaksi rakennetta: G on ryhmä ja G on monisto. Ryhmän ja moniston rakenteet mahdollistavat sen, että Lien ryhmässä kertolaskun kuvaus $G \times G \to G$ sekä inversio- eli käänteiskuvaus $G \to G$ ovat sileitä kuvauksia.

Lien ryhmien morfismi eli struktuurin säilyttävä kuvaus on siis sileä kuvaus, joka säilyttää ryhmäoperaation, jolle on voimassa $f(gh) = f(g)f(h)$, sekä $f(e) = e$, missä e on joukon G neutraalialkio.

Määritelmässä 4.1 määriteltiin reaaliset Lien ryhmät. Reaalisten Lien ryhmien lisäksi voidaan määritellä myös kompleksiset Lien ryhmät, mutta ne jätetään kuitenkin usein huomioimatta, kuten tässäkin työssä. Reaalisia Lien ryhmiä voidaan kutsua myös yksinkertaisiksi Lien ryhmiksi, jollei haluta korostaa eroa kompleksisiin Lien ryhmiin. [11]

Yksinkertainen esimerkki Lien ryhmästä on euklidisen avaruuden eli reaalikertoimisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ isomorfinen ryhmä E_3, jonka laskutoimituksena on vektorien yhteenlasku. Isomorfinen ryhmä tarkoittaa algebrallisten laskutoimituksien ja relaatioiden kannalta samanlaista ryhmää. Ryhmällä E_3 on ryhmän rakenteen ominaisuudet ja lisäksi Lien ryhmien kannalta ratkaisevasti E_3 on myös topologia, eli sen kuvaus on jatkuva. Euklidinen geometria eli tavallinen tason tai avaruuden geometria tutkii $\mathbb{R}^3$ osajoukkojen ominaisuuksia, jolloin ryhmien E_3 tunteminen on euklidisen geometrian kannalta tärkeää. Yleisesti ottaen Lien ryhmät ovatkin geometrian perustyökaluja. [1]

Tyypillisiä Lien ryhmiä ovat myös matriisiryhmät, joissa laskutoimituksena on matriisien kertolasku. Lien matriisiryhmistä hyvä esimerkki on erityinen lineaarinen ryhmä (engl. special linear group) $SL(n)$, joka on määritelty $n \times n$ matriiseille reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$. Ryhmässä $SL(n)$ on määritelty ehto, jonka mukaan kaikkien matriisien determinantti on 1. [1]

4.2 Lien algebran määritelmä

Lien ryhmään liittyy läheisesti algebrallinen rakenne *Lien algebra*. Lien algebra on vektoriavaruus, jossa on määritelty bilineaarisuuden ehdot täyttävät *Lien sulkeet*. Lien ryhmän geometriset ominaisuudet voidaan palauttaa algebrallisiin ominaisuuksiin Lien algebran avulla, mikä tekee siitä erityisen hyödyllisen. [14] Lien algebraa voidaan ajatella rakenteena, joka kuvaa Lien ryhmän lähellä olevia ominaisuuksia ja tarjoaa tapoja analysoida ja tutkia Lien ryhmiä.

Määritelmä 4.2. [2] Olkoon F algebralliselta rakenteeltaan kunta. Lien algebra kunnassa F on vektorikenttä L, jonka kuvausta kutsutaan *Lien sulkeeksi*. *Lien sulkeet* on bilineaarinen kuvaus

$$L \times L \to L, \qquad (x, y) \mapsto [x, y], \tag{4.1}$$

joka täyttää seuraavat ehdot:

$$[x, x] = 0 \qquad x \in L \tag{4.2}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \qquad x, y, z \in L. \tag{4.3}$$

Lien sulkeita $[x, y]$ kutsutaan usein *kommutaattoriksi* muuttujille x ja y. Ehtoa (4.3) kutsutaan *Jacobin identiteetiksi*. [2] Ryhmässä kommutaattori on alkio, joka kuvaa kahden muun alkion välistä vaihdannaisuutta. Jos alkioilla ei ole vaihdannaisuutta, niiden kommutaattori on neutraalialkio. Kommutaattorit ovat hyödyllisiä työkaluja epävaihdannaisia ryhmiä tutkittaessa, sillä ne auttavat ymmärtämään ryhmän rakennetta ja alkioiden välisiä suhteita. [5] Tässä tapauksessa kommutaattorilla viitataan Lien ryhmän rakenteeseen, jonka tutkimiseen Lien algebraa käytetään.

Lause 4.3. *Liitännäinen algebra, missä kertolasku noudattaa Lien sulkeiden ehtoja, on Lien algebra. [2]*

Todistus. [2] Koska Lien sulkeet on bilineaarinen kuvaus, tällöin Määritelmän 3.2 mukaan

$$[x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]. \tag{4.4}$$

Lisäksi ehdon 4.2 mukaan, kaikille $x, y \in L$, on voimassa

$$[x, x] = 0, \qquad [y, y] = 0, \qquad [x + y, x + y] = 0. \tag{4.5}$$

Tästä seuraa, että

$$[x,y] = -[y,x] \qquad \text{kaikille } x,y \in L. \tag{4.6}$$

Yhtälöstä 4.6 huomataan, että Lien sulkeet on antikommutatiivinen, eli se ei ole vaihdannainen operaatio.

Lien sulkeille voidaan määritellä ehto $[x,y] = xy - yx$. Liitännäisistä algebroista saadaan Lien algebroja, kun määritellään algebran kertolasku uudelleen Lien sulkeiden avulla. Tällöin Lien sulkeiden mukaan liitännäisille algebroille voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}[x,[y,z]] &= x(yz - zy) - (yz - zy)x \\ &= xyz - xzy - yzx + zyx.\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}&[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] \\ &= xyz - xzy - yzx + zyx \\ &\quad + yzx - yxz - zxy + xzy \\ &\quad + zxy - zyx - xyz + yxz \\ &= 0,\end{aligned}$$

mikä toteuttaa Jacobin identiteetin ehdon 4.3. Näin ollen liitännäisestä algebrasta saadaan Lien algebra, kun määritellään siihen Lien sulkeiden ehdot.

□

Tyypillinen esimerkki Lien algebrasta on tangenttiavaruus $sl(n,\mathbb{R})$, joka kuvaa kappaleessa 4.1 esiteltyä Lien ryhmää $SL(n,\mathbb{R})$. Lien algebran $sl(n,\mathbb{R})$ virittävät $n \times n$ matriisit, joiden jälki on 0. Toisin sanoen matriisien diagonaalialkoiden summa on 0. Lien algebralle $sl(2)$ voidaan määritellä kolme alkeismatriisia

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

joille on voimassa matriisien kertolaskun ja Lien sulkeiden perusteella notaatiot

$$[f,h] = fh - hf = 2f, \qquad [h,e] = 2e, \qquad [e,f] = h.$$

Nämä alkeismatriisit virittävät Lien algebran vekroriavaruuden, jonka avulla voidaan kuvata Lien ryhmää $SL(2, \mathbb{R})$. [3] Lien algebran Määritelmää 4.2, Lien algebraan liittyvää Lausetta 4.3 ja siihen liittyvää todistusta käsitellään seuraavassa kappaleessa matematiikan kielentämisen avulla.

5. LIEN ALGEBRA KIRJALLISEN KIELENTÄMISEN AVULLA

Tässä luvussa yhdistetään tutkielmassa aiemmin käsitellyt aiheet matematiikan kielentäminen ja Lien algebra. Lien algebra on hyvin abstrakti matematiikan ja algebran sovellus, joten käytetään kielentämistä apuna sen hahmottamiseen. Uuden matemaattisen käsitteen ymmärtäminen vaatii usein asian tarkastelua monesta eri näkökulmasta. Tässä luvussa haemme uusia näkökulmia käyttämällä luvussa kaksi esitettyjä matematiikan kirjallisen kielentämisen tehtävätyyppejä sekä ratkaisumalleja. Kielentämisen avulla voimme harjoitella Lien algebran käsitteellistä ymmärtämistä sekä harjoitella esimerkiksi Lien sulkeiden käytön proseduraalista sujuvuutta. Tässä luvussa esitellään neljä erilaista matematiikan kielentämisen tehtävä- ja ratkaisuesimerkkiä, jotka tukevat Lien algebran teorian oppimista.

5.1 Lien algebran määritelmän kielentäminen

Lien algebran Määritelmä 4.2 on esitetty sekä symbolikieltä että luonnollista kieltä käyttäen. Luodaan kielentämistehtävä, jossa tehtävänä on kertoa Lien algebran määritelmä luonnollisen kielen avulla. Käytetään tehtävänannossa luvussa kaksi esitellyistä kielentämisen tehtävätyypeistä *koodinvaihto*- ja *omin sanoin selitys* -tehtävätyyppejä.

1. **Kielentämistehtävä**: Kirjoita Lien algebran Määritelmä 4.2 omin sanoin luonnollisella kielellä. Käännä myös matemaattiset symbolit luonnolliselle kielelle.

   Kirjallisen kielentämisen ratkaisumalleista tähän tehtävään voisi sopia parhaiten *kertomus* -malli, jotta määritelmä voidaan kielentää selkeästi vaiheittain luonnolliselle kielelle.

   Tehtävän esimerkkiratkaisu:

   Kerrotaan Lien algebran määritelmä omin sanoin ilman matemaattisia symboleja.

   (a) "Olkoon F algebralliselta rakenteeltaan kunta."

   Matemaattinen joukko F toteuttaa kaikki kunnalle määritellyt ehdot ja laskutoimitukset. Kunta on algebrallinen rakenne, jossa voidaan määritellä vektorikenttiä, ja sen vuoksi se on tässä tapauksessa hyvä valinta matemaattiselle joukolle.

   (b) "Lien algebra kunnassa F on vektorikenttä L, jonka kuvausta kutsutaan *Lien sulkeeksi*."

   Lien algebra on vektorikenttä, jota voidaan merkitä symbolilla L. Vektorikenttä L on nyt määritelty kunnassa F, jolloin se toteuttaa kaikki kunnalle määritellyt ominaisuudet. Lien algebran vektorikentän kuvausta kutsutaan *Lien sulkeeksi*, joka määritellään seuraavaksi.

(c) "*Lien sulkeet* on bilineaarinen kuvaus $L \times L \to L, \qquad (x, y) \mapsto [x, y]$,"

Lien sulkeet on matemaattinen kuvaus $[x, y] = xy - yx$, joka täyttää bilineaarisen kuvauksen ehdot. Bilineaarisuuden mukaan Lien sulkeet operoivat kahta alkiota vektorikentästä L ja palauttavat yhden alkion. Bilineaarisen kuvauksen ehtojen lisäksi Lien sulkeiden kuvaus on suljettu, koska vektorikentän L bilineaarinen tulo kuvaa sen takaisin vektorikenttään L.

(d) "joka täyttää seuraavat ehdot: $[x, x] = 0, \qquad x \in L$"

Lien sulkeille on määritelty tiettyjä ehtoja. Lien sulkeet täyttävät esimerkiksi ehdon, jonka mukaan vektorikentän L kahdelle samalle alkiolle Lien sulkeiden operaatio kuvautuu nollaksi. Tämä ehto toteuttaa myös Lien sulkeiden kuvauksen $[x, y] = xy - yx$, joka tässä tapauksessa saisi muodon $[x, x] = xx - xx = 0$.

(e) "ja $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \qquad x, y, z \in L$."

Lien sulkeille on myös määritelty Jacobin identiteetiksi nimetty ehto, jonka mukaan kolmen muuttujan x, y, z välisten Lien sulkeiden summa on 0. Tämä ehto voidaan osoittaa todeksi, kun sijoitetaan Lien sulkeiden lauseke $[x, y] = xy - yx$ kahdesti Jacobin identiteetin lausekkeen komponentteihin ja sievennetään lauseketta. Esimerkiksi ensimmäinen komponentti $[x, [y, z]]$ sievenisi muotoon $[x, [y, z]] = [x, yz - zy] = x(yz - zy) - (yz - zy)x$. Kun sulut kerrotaan auki, saadaan tulokseksi neljän termin lauseke $xyz - xzy - yzx + zyx$. Kun tämä operaatio toistetaan kaikille kolmelle komponentille, termit kumoavat toisensa ja lopputulokseksi saadaan 0.

5.2 Lien sulkeiden todistuksen kielentäminen

Lien algebraan liittyvän Lauseen 4.3 todistuksen tulokset on esitetty suoraviivaisesti ilman yksityiskohtaisia välivaiheita. Sovelletaan kirjallisen kielentämisen *ratkaisun argumentointi* -tehtävätyyppiä osoitettaessa tehtävän ratkaisu matemaattisesti todeksi.

2. **Kielentämistehtävä**: Lauseen 4.3 mukaan liitännäisistä algebroista voidaan saada Lien algebroja, kun määritellään algebran kertolasku uudelleen Lien sulkeiden avulla. Lien sulkeiden laskutoimitukselle voidaan määritellä ehto $[x, y] = xy - yx$. Osoita tämän ehdon avulla, että Lien sulkeiden Jacobin identiteetin ehto 4.3
($[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \qquad x, y, z \in L$) toteutuu. Kirjoita laskun välivaiheet näkyviin symbolikieltä sekä luonnollista kieltä käyttäen.

   Kirjallisen kielentämisen ratkaisumalleista tähän tehtävään voisi sopia parhaiten *tiekartta* -malli, jossa lukijalle ensin hahmottuu tehtävän kulun "punainen lanka" ja sen jälkeen käydään läpi tehtävän ratkaisu symbolikielellä.

   Tehtävän esimerkkiratkaisu:

   Osoitetaan, että Jacobin identiteetin ehto $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

$x, y, z \in L$ toteutuu. Kirjoitetaan ensin tehtävän kulku vaihe vaiheelta läpi, ja siirrytään sitten symbolikieleen ja matemaattisiin laskuihin.

Tehtävän kulku:

(a) Ratkaistaan Jacobin identiteetti hyödyntäen Lien sulkeita $[x, y] = xy - yx$.

(b) Sijoitetaan Lien sulkeiden lausekkeeseen Jacobin identiteetin ensimmäinen komponentti $[x, [y, z]]$.

(c) Toistetaan sijoitus toiselle komponentille $[y, [z, x]]$.

(d) Toistetaan sijoitus viimeiselle komponentille $[z, [x, y]]$.

(e) Lasketaan yhteen näiden kolmen lausekkeen summa.

(f) Sievennetään lauseke.

(g) Tarkistetaan, että tulokseksi saatiin 0. Tällöin ollaan osoitettu, että Jacobin identiteetti toteutuu.

Tehtävän kulku matemaattisesti:

(a) Lien sulkeille on voimassa: $[x, y] = xy - yx$.

(b) Ensimmäiselle komponentille: $[x, [y, z]] = [x, yz - zy] = x(yz - zy) - (yz - zy)x$.

(c) Toiselle komponentille: $[y, [z, x]] = [y, zx - xz] = y(zx - xz) - (zx - xz)y$.

(d) Kolmannelle komponentille: $[z, [x, y]] = [z, xy - yx] = z(xy - yx) - (xy - yx)z$.

(e) Kolmen komponentin summa:

$$\begin{aligned}
&[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\
&= [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] \\
&= x(yz - zy) - (yz - zy)x \\
&\quad + y(zx - xz) - (zx - xz)y \\
&\quad + z(xy - yx) - (xy - yx)z.
\end{aligned}$$

(f) Kerrotaan sulut auki:

$$\begin{aligned}
&= xyz - xzy - yzx + zyx \\
&\quad + yzx - yxz - zxy + xzy \\
&\quad + zxy - zyx - xyz + yxz.
\end{aligned}$$

(g) Termit kumoavat toisensa, joten tulokseksi saadaan 0 ja Jacobin identiteetin ehto toteutuu.

Tehtävän ratkaiseminen voi olla opiskelijalle haastavaa varsinkin, jos aihe on uusi ja siihen liittyvät matemaattinen osaaminen ei ole vielä riittävällä tasolla. Vaikka opiskelija ymmärtäisikin aiheen ja siihen liittyvät käsitteet, niiden verbaalinen ilmaisu onnistuu usein vasta ymmärryksen jälkeen. [8]
2. Kielentämistehtävä voidaan esittää myös erilaisessa muodossa, jossa vaatimustasoa on laskettu ja

näkökulmaa hieman muutettu. Tehtävänannossa käytetään matematiikan kirjallisen kielentämisen *ratkaisun järjestäminen* -tehtävätyyppiä. Opiskelijalle sopiva vaatimustaso kehittää opiskelijan yritteliäisyyttä ja matemaattista itsevarmuutta, jotka tukevat matemaattisen osaamisen kehittymisen kokonaisuutta.

3. **Kielentämistehtävä**: Liitännäisistä algebroista voidaan saada Lien algebroja, kun määritellään algebran kertolasku uudelleen Lien sulkeiden avulla, joille voidaan määritellä ehto $[x, y] = xy - yx$. Tehtävänannossa esitetyn ratkaisun osissa on osoitettu Lien sulkeiden avulla, että Jacobin identiteetin ehto 4.3 ($[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \qquad x, y, z \in L$) toteutuu. Järjestä ratkaisun osat oikeaan järjestykseen.

   (a) Sievennetään lauseketta:

$$\begin{aligned} &= xyz - xzy - yzx + zyx \\ &\quad + yzx - yxz - zxy + xzy \\ &\quad + zxy - zyx - xyz + yxz. \end{aligned}$$

   (b) Toistetaan sijoitus seuraavalle komponentille
   $[y, [z, x]] = [y, zx - xz] = y(zx - xz) - (zx - xz)y.$

   (c) Termit kumoutuvat, joten tulokseksi saadaan 0 ja Jacobin identiteetin ehto toteutuu.

   (d) Toistetaan sijoitus viimeiselle komponentille
   $[z, [x, y]] = [z, xy - yx] = z(xy - yx) - (xy - yx)z.$

   (e) Ratkaistaan Jacobin identiteetti hyödyntäen Lien sulkeita $[x, y] = xy - yx$.

   (f) Lasketaan yhteen näiden kolmen lausekkeen summa.

$$\begin{aligned} &[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\ &= [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] \\ &= x(yz - zy) - (yz - zy)x \\ &\quad + y(zx - xz) - (zx - xz)y \\ &\quad + z(xy - yx) - (xy - yx)z. \end{aligned}$$

   (g) Sijoitetaan Lien sulkeiden lausekkeeseen Jacobin identiteetin ensimmäinen komponentti
   $[x, [y, z]] = [x, yz - zy] = x(yz - zy) - (yz - zy)x.$

   Tehtävän esimerkkiratkaisu:

   Ratkaisun oikea järjestys on seuraava:

   (e) Ratkaistaan Jacobin identiteetti hyödyntäen Lien sulkeita $[x, y] = xy - yx$.

   (g) Sijoitetaan Lien sulkeiden lausekkeeseen Jacobin identiteetin ensimmäinen komponentti
   $[x, [y, z]] = [x, yz - zy] = x(yz - zy) - (yz - zy)x.$

(b) Toistetaan sijoitus seuraavalle komponentille
$[y, [z, x]] = [y, zx - xz] = y(zx - xz) - (zx - xz)y.$

(d) Toistetaan sijoitus viimeiselle komponentille
$[z, [x, y]] = [z, xy - yx] = z(xy - yx) - (xy - yx)z.$

(f) Lasketaan yhteen näiden kolmen lausekkeen summa.

$$\begin{aligned}
&[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\
&= [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] \\
&= x(yz - zy) - (yz - zy)x \\
&\quad + y(zx - xz) - (zx - xz)y \\
&\quad + z(xy - yx) - (xy - yx)z.
\end{aligned}$$

(a) Sievennetään lauseketta:

$$\begin{aligned}
&= xyz - xzy - yzx + zyx \\
&\quad + yzx - yxz - zxy + xzy \\
&\quad + zxy - zyx - xyz + yxz.
\end{aligned}$$

(c) Termit kumoutuvat, joten tulokseksi saadaan 0 ja Jacobin identiteetin ehto toteutuu.

5.3 Lien algebran esimerkin kielentäminen

Kappaleessa 4.2 esiteltiin esimerkkinä Lien algebrasta vektoriavaruus $sl(2)$. Täydennetään esimerkkiä kirjallisen kielentämisen avulla ja osoitetaan, että vektoriavaruuden alkiot täyttävät Lien algebran Määritelmän 4.2 ehdon 4.3. Sovelletaan kirjallisen kielentämisen *ratkaisun täydentäminen* -tehtävätyyppiä ja osoitetaan, että Lien algebran vektoriavaruus $sl(2)$ täyttää Jacobin identiteetin ehdon.

4. **Kielentämistehtävä**: Lien algebralle $sl(2)$ vektorikentässä L voidaan määritellä kolme alkeismatriisia

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

joille on voimassa matriisien kertolaskun ja Lien sulkeiden perusteella notaatiot

$$[f, h] = fh - hf = 2f, \qquad [h, e] = 2e, \qquad [e, f] = h.$$

Notaatioiden avulla voidaan osoittaa, että Jacobin identiteetin ehto $[e, [f, h]] + [f, [h, e]] + [h, [e, f]] = 0$ on voimassa alkeismatriiseille $e, f, h \in L$. Täydennä osoituksen puuttuvat välivaiheet **(1.)**-**(5.)**.

Osoitetaan Lien sulkeiden avulla, että Lien algebran $sl(2)$ alkeismatriisit toteuttavat Jacobin identiteetin ehdon.

Jacobin identiteetin ensimmäiselle komponentille

$$\begin{aligned} [e,[f,h]] &= [e,2f] = e\cdot 2f - 2f\cdot e \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \textbf{(1.)} &= \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jacobin identiteetin toiselle komponentille

$$\begin{aligned} [f,[h,e]] &= [f,2e] = f\cdot 2e - 2e\cdot f \\ \textbf{(2.)} &= \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \\ \textbf{(3.)} &= \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jacobin identiteetin kolmannelle komponentille

$$\begin{aligned} [h,[e,f]] &= [h,h] \\ \textbf{(4.)} &= \qquad . \end{aligned}$$

Lasketaan komponentit yhteen

$$\textbf{(5.)} \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \qquad .$$

Tarkistetaan, että lopputulokseksi saadaan 0. Tällöin ollaan osoitettu, että Jacobin identiteetin ehto toteutuu.

Tehtävän esimerkkiratkaisu:

Tehtävän ratkaisuun on täydennetty puuttuvat välivaiheet.

Jacobin identiteetin ensimmäiselle komponentille

$$
\begin{aligned}
[e,[f,h]] &= [e,2f] = e\cdot 2f - 2f\cdot e \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\textbf{(1.)} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jacobin identiteetin toiselle komponentille

$$
\begin{aligned}
[f,[h,e]] &= [f,2e] = f\cdot 2e - 2e\cdot f \\
\textbf{(2.)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\textbf{(3.)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jacobin identiteetin kolmannelle komponentille

$$
\begin{aligned}
[h,[e,f]] &= [h,h] \\
\textbf{(4.)} &= 0.
\end{aligned}
$$

Lien algebran Määritelmän 4.2 mukaisesti Lien sulkeiden operaatio kahdelle samalle alkiolle kuvautuu nollaksi.

Lasketaan komponentit yhteen

$$
\textbf{(5.)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.
$$

Tarkistetaan, että lopputulokseksi saadaan 0. Tällöin ollaan osoitettu, että Jacobin identiteetin ehto toteutuu.

Nämä neljä esimerkkitehtävää ja -ratkaisua perustuvat matematiikan kielentämisen teoriaan, joka esiteltiin toisessa luvussa. Tehtävien tavoitteena on hahmottaa matematiikan kielentämisen ja Lien algebran teoriaa sekä löytää keinoja saada Lien algebran käsite lähemmäs lukijaa.

6. YHTEENVETO

Matematiikan kielentäminen tarjoaa opiskelijoille tehokkaita työkaluja oman ajatteluprosessin jäsentämiseen ja selkeyttämiseen. Se myös rikastuttaa matemaattista ilmaisua mahdollistaen opiskelijoille matemaattisen ajattelun kuvaamisen ja esittämisen ymmärrettävällä ja konkreettisella tavalla. Kielentämisen avulla matematiikka saa selkeämmän muodon ja tulee helpommin lähestyttäväksi opiskelijoille, mikä edistää heidän oppimistaan ja ymmärrystään. [7] Tämän opinnäytetyön tavoitteena on ollut esitellä lukijalle matematiikan kielentämisen käsite sekä sen yhteys matemaattisen osaamisen kehittymiseen. Työssä on esitelty lisäksi Lien matemaattiset rakenteet ja niiden määritelmät esimerkkeineen.

Lien ryhmä ja Lien algebra yhdistävät monta eri matematiikan alaa yhdeksi, joten niiden syvällinen ymmärtäminen vaatii laajaa matemaattista osaamista. Tässä työssä tavoitteena on ollut johdatella lukija algebran perusteiden kautta Lien ryhmän ja Lien algebran aiheisiin, jotta lukijan on helpompi rakentaa käsitteellinen ymmärtäminen jo aiemmin opittujen perusteiden päälle. Jatkuvat ja differentioituvat Lien ryhmät ja niiden algebrallisia ominaisuuksia kuvaavat Lien algebrat ovat tärkeitä matematiikan sovelluksia. Niiden avulla voidaan mallintaa erilaisia symmetriota ja säännönmukaisuuksia. [12]

Tässä opinnäytetyössä on syvennetty Lien algebran käsitteen ymmärrystä matematiikan kirjallisen kielentämisen avulla. Tutkielman lopuksi on esitelty neljä kielentämistehtävää Lien algebraan liittyen, jotka mukailevat kirjallisen kielentämisen tehtävätyyppejä. Näiden kielentämistehtävien ratkaisuissa on sovellettu kirjallisen kielentämisen ratkaisumalleja, jotka tuovat opiskelijalle työkaluja kehittää matemaattista ymmärrystään luonnollisen kielen avulla.

Tässä opinnäytetyössä on keskitytty erityisesti Lien algebran kielentämiseen ja on tutkittu, millä keinoin matematiikan kirjallinen kielentäminen voi auttaa hahmottamaan tällaista abstraktia aihetta. Yhteenvetona voidaan todeta, että matematiikan kielentäminen edistää oppimista ja ymmärrystä sekä tarjoaa opiskelijoille konkreettisen tavan lähestyä abstrakteja matemaattisia käsitteitä. Opinnäytetyön havainnot tukevat aiempia tutkimuksia matematiikan kielentämisen tärkeydestä opetuksessa. Tässä työssä matematiikan kielentäminen ja sen yhdistäminen Lien algebraan avaavat lukijalle, millaisia pedagogisia käytänteitä matematiikan opetuksessa voidaan hyödyntää.

LÄHTEET

[1] R. Carter, G. Segal ja I. Macdonald. *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge University Press, 1995.

[2] K. Erdmann ja W. J. Mark. *Introduction to Lie Algebras*. Springer, 2006.

[3] P. Etingof. *Lectures and problems in representation theory*. Clay Mathematics Institute Research Academy. 2005.

[4] B. Findell, J. Swafford ja J. Kilpatrick. *Adding It up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, D.C, 2001.

[5] J. Häsä. *Algebra II, Matematiikan ja tilastotieteen laitos*. Helsingin yliopisto. 2010. URL: `https://www.cs.helsinki.fi/u/jhasa/kurssit/algebraII.html`.

[6] J. Häsä ja R. Johanna. *Johdatus abstraktiin algebraan*. Gaudeamus Helsinki University Press, 2012.

[7] J. Joutsenlahti. Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa, Matematiikka ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009*. Toim. M. Asikainen, P. Hirvonen ja K. Sormunen. Joensuun yliopisto. Joensuu, 2010.

[8] J. Joutsenlahti. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä: 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. Väitöskirja. Acta Universitatis Tamperensis 1061. Tampere, 2005.

[9] J. Joutsenlahti ja P. Perkkilä. *Matemaattisen ajattelun kielentäminen ymmärtävän oppimisen perustana*. Dimensio. 2022. URL: `https://dimensiolehti.fi/matemaattisen-ajattelun-kielentaminen-ymmartavan-oppimisen-perustana/`.

[10] J. Joutsenlahti ja K. Rättyä. Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. *Rajaton tulevaisuus, Kohti kokonaisvaltaista oppimista, Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014*. Toim. M. Kauppinen, M. Rautiainen ja M. Tarnanen. Suomen ainedidaktinen tutkimusseura. Jyväskylä, 2015.

[11] A. Jr. Kirillov. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge University Press, 2008.

[12] L. Kahanpää. *Algebra II*. Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, matematiikan laitos, 1991.

[13] A. W. Knapp. *Basic Algebra*. Birkhäuser, 2006.

[14] I. Korhonen. *Ryhma SO(3) ja sen lineaariset redusoitumattomat esitykset*. Pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä, 2014.

[15] C. Lee. *Language for Learning Mathematics: Assessment for Learning in Practice*. Maidenhead, 2006.

[16] J. Linnusmäki. *Matematiikan perusopintojen kehittäminen matematiikan kielentämisen avulla*. Diplomityö. Tampereen teknillinen yliopisto. Tampere, 2015.

[17] *Sophus Lie, Norwegian mathematician*. 14. helmikuuta 2023. URL: `https://www.britannica.com/biography/Sophus-Lie` (viitattu 05. 06. 2023).

[18] *Sophus Lie, the mathematician*. URL: https://math.mit.edu/~helgason/sophus-lie.pdf (viitattu 05. 06. 2023).