

Tuomo Isomursu

# RIEMANN-STIELTJES-INTEGRAALI

Kandidaatintyö  
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta  
Tarkastaja: Prof. Janne Kauhanen  
Kesäkuu 2023

# TIIVISTELMÄ

Tuomo Isomursu: Riemann-Stieltjes-integraali  
Kandidaatintyö  
Tampereen yliopisto  
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK  
Kesäkuu 2023

---

Tämä työ käsittelee Riemann–Stieltjes-integraalia. Riemann–Stieltjes-integraalia voidaan pitää usein käytetyn Riemann-integraalin yleistyksenä, joka lisää integraaliin integraattorifunktion. Tätä integraattorifunktiota voidaan pitää eräänlaisena painofunktiona, joka määrää mitkä osat integraalista vaikuttavat enemmän integraalin arvoon. Työn tarkoituksena on esittää Riemann–Stieltjes-integraalille määritelmä, josta johdetaan sille joitain ominaisuuksia. Tämän lisäksi esitetään työssä esitetään integraalille graafinen tulkinta, sekä tapa laskea integraalin arvo yksinkertaisissa tapauksissa.

Ensin työssä käydään läpi joitain tarvittavia taustatietoja, joiden perusteella Riemann–Stieltjes-integraalin määritelmää voidaan lähteä kehittämään. Samalla käydään myös suppeasti läpi tavallisen Riemann-integraalin määritelmän ja graafinen esitys, joita voidaan vertailla myöhemmin esitettävään Riemann–Stieltjes-integraalin määritelmään ja graafiseen esitykseen.

Taustatietojen jälkeen aloitetaan pääaiheen käsittely määrittelemällä Riemann–Stieltjes-summa, jonka kautta voidaan määrittellä Riemann–Stieltjes-integraali. Tämän jälkeen voidaan Riemann–Stieltjes-integraalin määritelmästä johtaa joitakin perusominaisuuksia, jotka helpottavat integraalin käsittelyä ja laskemista.

Tämän jälkeen esitetään yksi Riemann–Stieltjes-integraalin graafinen tulkinta, jonka avulla voidaan havainnollistaa sitä, mitä Riemann–Stieltjes-integraalilla lasketaan ja miten integraattori- ja integrandifunktiot vaikuttavat integraalin arvoon.

Lopuksi katsotaan, miten joitain yksinkertaisia Riemann–Stieltjes-integraaleja voidaan käytännössä laskea. Työssä käsitellään integraalien laskua tapauksissa, joissa integraattorifunktio on askelfunktio, tai joissa integraattorifunktiolla on Riemann-integroituva derivaattafunktio. Näiden kahden tapauksen seurauksena voidaan myös tarkastella tapausta, jossa integraattorifunktio on paloittain jatkuva.

Avainsanat: integrointi, Riemann-Stieltjes, integraattori, integrandi

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

# SISÄLLYSLUETTELO

1.	Johdanto . . . . .	1
2.	Taustaa . . . . .	2
2.1	Jako . . . . .	2
2.2	Riemann-integraali. . . . .	3
2.3	Differentiaalilaskennan väliarvolause . . . . .	6
3.	Riemann-Stieltjes-integraali . . . . .	7
3.1	Määritelmä . . . . .	7
3.2	Ominaisuuksia . . . . .	8
3.3	Osittaisintegrointi . . . . .	11
3.4	Muuttujanvaihto. . . . .	12
3.5	Askelfunktio integraattorifunktiona. . . . .	13
4.	Graafinen esitys. . . . .	15
4.1	Monotoninen ja jatkuva $\alpha(x)$ . . . . .	15
4.2	Yleinen $\alpha(x)$ . . . . .	18
5.	Riemann-Stieltjes-integraalin laskeminen . . . . .	21
5.1	Jatkuva integraattorifunktio . . . . .	21
5.2	Askelfunktion suhteen integrointi . . . . .	22
5.3	Paloittain jatkuva integraattori. . . . .	23
6.	Yhteenveto . . . . .	25

# 1. JOHDANTO

Yleensä, kun halutaan laskea matemaattisesti jonkinlaista kertymää, käytetään apuna Riemann-integraalia. Riemann-integraali on hyvin tunnettu matemaattinen operaattori, jolle on monia sovelluskohteita. Riemann-integraalille löytyy useita laajennuksia, jotka mahdollistavat integroimisen tilanteissa, joissa tavallinen Riemann-integraali on liian suppea. Yksi tällaisista Riemann-integraalin laajennuksista on Riemann–Stieltjes-integraali.

Riemann–Stieltjes-integraali tuo tavalliseen Riemann-integraaliin lisäyksenä integraattorifunktion  $\alpha(x)$ , jonka suhteen integroitavana olevaa integrandifunktiota integroidaan. Tämän integraattorifunktion voidaan katsoa olevan eräänlainen painofunktio, jonka mukaan integrandifunktion arvoja painotetaan. Valitsemalla integraattorifunktio sopivasti, voidaan Riemann–Stieltjes-integraalia käyttää sovelluskohteisiin, joihin tavallinen Riemann-integraali ei riitä. Koska Riemann–Stieltjes-integraali on tavallisen Riemann-integraalin laajennus, voi sen avulla laskea myös tavallisia Riemann-integraaleja.

Tässä työssä käydään läpi Riemann–Stieltjes-integraalin määritelmä, josta johdetaan joitain Riemann–Stieltjes-integraalin perusominaisuuksia. Tämän jälkeen esitetään graafinen tulkinta Riemann–Stieltjes-integraalille, jonka jälkeen käydään läpi sitä, miten Riemann–Stieltjes-integraaleja käytännössä lasketaan.

## 2. TAUSTAA

### 2.1 Jako

**Määritelmä 2.1.** Reaalilukujoukkoa  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  kutsutaan välin  $[a, b]$  jaoksi, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $x_0 = a$
- $x_n = b$
- $x_i < x_j$  aina kun  $i < j$

Jaon  $P$  voidaan katsoa jakavan välin  $[a, b]$  pienempiin osaväleihin  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$  ja niin edelleen. Jaossa esiintyviä lukuja  $x_k$  kutsutaan jakopisteiksi. [1]

**Määritelmä 2.2.** Olkoon  $P$  välin  $[a, b]$  jako. Jakoa  $P'$  kutsutaan jaon  $P$  hienonnukseksi jos se on myös välin  $[a, b]$  jako ja jos jokainen jaon  $P$  jäsen on myös jaossa  $P'$ .

Jaon  $P$  hienonnus  $P'$  voidaan saada jaosta  $P$  lisäämällä jakoon  $P$  jakopisteitä. Jaon hienonnuksen voidaan katsoa jakavan jaon  $P$  luomia osavälejä  $[x_{k-1}, x_k]$  pienempiin osiin. Kun jako  $P'$  on jaon  $P$  hienonnus, voidaan merkitä  $P' \supseteq P$ . [1]

**Määritelmä 2.3.** Pisintä jaossa esiintyvää osaväliä kutsutaan jaon normiksi. Jaon  $P$  normi  $\|P\|$  voidaan esittää kaavalla

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

[4]

Jaon normi on yksi tapa kuvata jakopisteiden tiheyttä jakovälillä. Jaon hienonnuksen ja normin välille löytyykin seuraava yhteys:

**Lause 2.4.** Jos  $P \subseteq P'$ , niin  $\|P'\| \leq \|P\|$ .

*Todistus.* Olkoot  $P$  ja  $P'$  välin  $[a, b]$  jakoja siten, että  $P'$  on jaon  $P$  hienonnus. Merkitään pisintä jaon  $P'$  jakoväliä merkinnällä  $[x_{k-1}, x_k]$ . Koska tämä jakoväli on pisin, voidaan kirjoittaa  $\|P'\| = x_k - x_{k-1}$ .

Koska jako  $P'$  on jaon  $P$  hienonnus ja  $x_k$  sekä  $x_{k-1}$  ovat vierekkäisiä jakopisteitä jaossa  $P'$ , ei

jaossa  $P$  voi olla näiden jakopisteiden välissä jakopistettä. Tällöin jaossa  $P$  on olemassa jakoväli, jonka pituus on  $(x_k + c_1) - (x_{k-1} - c_2) = (x_k - x_{k-1}) + (c_1 + c_2) = \|P'\| + (c_1 + c_2)$ , missä  $c_1 \geq 0$  on pisteen  $x_k$  etäisyys lähimmästä sellaisesta pisteestä  $x_n$ , joka kuuluu jakoon  $P$  ja jolle on voimassa epäyhtälö  $x_k \leq x_n$  ja  $c_2 \geq 0$  on pisteen  $x_{k-1}$  etäisyys lähimmästä sellaisesta pisteestä  $x_{n-1}$ , joka kuuluu jakoon  $P$  ja jolle on voimassa epäyhtälö  $x_{k-1} \geq x_{n-1}$ . Tällöin

$$\|P'\| \leq x_n - x_{n-1} \leq \max_{1 \leq i \leq m} (x_i - x_{i-1}) = \|P\|.$$

Haluttu tulos on nyt saatu, joten väite on todistettu.  $\square$

Jakoa  $P$  hienonnettaessa jaon normi siis pysyy samana tai pienenee. Lausetta 2.4 ei kuitenkaan voi kirjoittaa toisin päin: vaikka jaon  $Q$  normi olisi pienempi kuin jaon  $P$  normi, ei jako  $Q$  silti ole välttämättä jaon  $P$  hienonnus.

## 2.2 Riemann-integraali

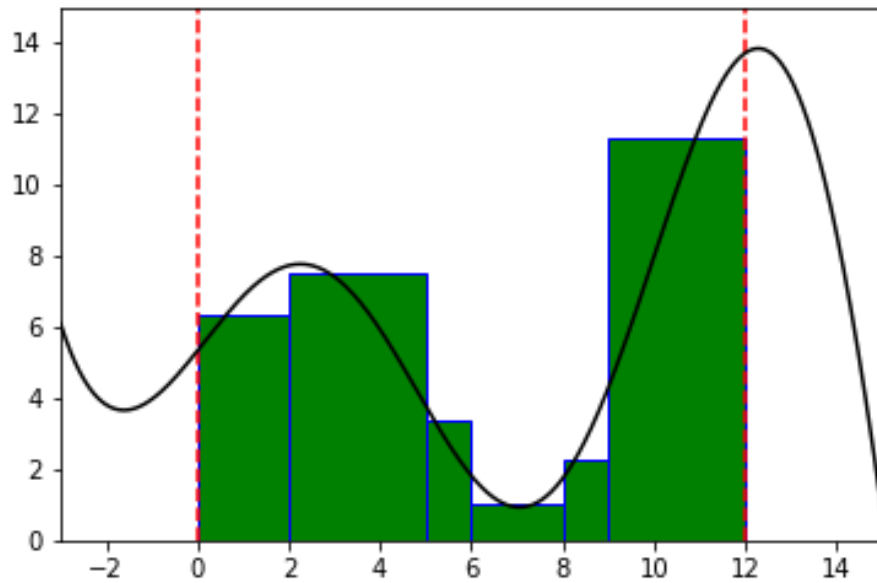
**Määritelmä 2.5.** Olkoon funktio  $f$  määritelty välillä  $[a, b]$  ja olkoon  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  välin  $[a, b]$  jako. Tällöin summaa

$$\sigma = \sum_{j=1}^n f(c_j)(x_j - x_{j-1}), \quad (2.1)$$

missä  $x_j \leq c_j \leq x_{j+1}$ , kutsutaan *Riemannin summaksi* jaon  $P$  yli. [4]

Riemannin summa ei ole yksikäsitteisesti määritelty, sillä jaon  $P$  jakoväleiltä valitut pisteet  $c_j$  voidaan valita mielivaltaisesti ja valitsemalla pisteet eri tavalla voidaan saada summalausekkeelle eri arvo. On myös huomionarvoista, että vaikka usein Riemannin summaan liittyvänä jakona käytetään tasavälistä jakoa, ei se kuitenkaan ole vaatimus vaan jakovälin leveys voi vaihdella.

Graafisesti Riemannin summan jäsenten voidaan ajatella olevan suorakulmioita, joiden leveys on jäsentä vastaavan jakovälin leveys ja joiden korkeus on funktion  $f$  arvo jakoväliltä mielivaltaisesti valitun pisteen  $c_j$  kohdalla. Riemannin summaa kokonaisuudessaan voidaan ajatella approksimaationa funktion ja x-akselin väliselle pinta-alalle välillä  $[a, b]$ , jos pinta-alan ajatellaan olevan negatiivinen funktion ollessa x-akselin alapuolella.



*Kuva 2.1. Riemannin summan graafinen esitys*

**Määritelmä 2.6.** Olkoon funktio  $f$  määritelty välillä  $[a, b]$ . Funktiota  $f$  kutsutaan *Riemann-integroituva*ksi, jos on olemassa luku  $L$  siten, että kaikilla  $\epsilon > 0$  on olemassa  $\delta > 0$ , joka toteuttaa ehdon

$$|\sigma - L| < \epsilon$$

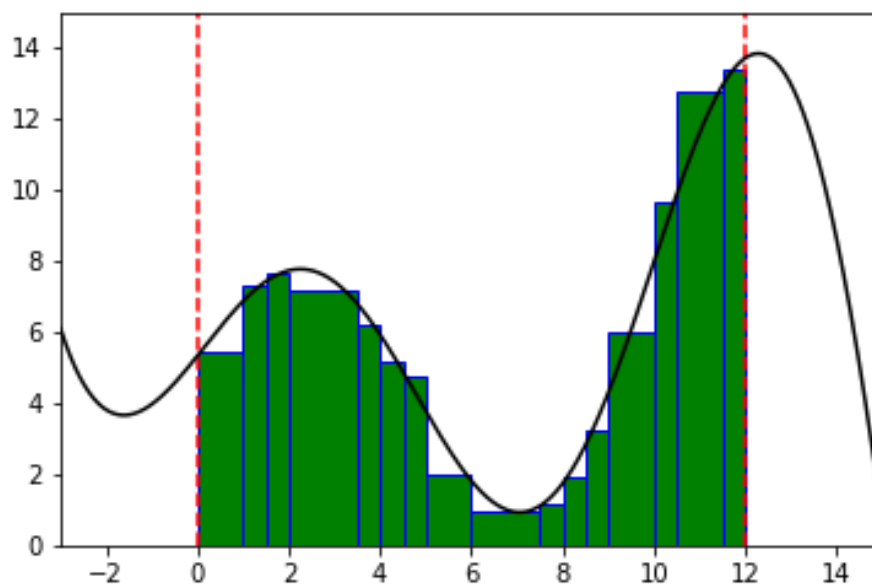
aina kun  $\sigma$  on Riemannin summa sellaisen välin  $[a, b]$  jaon suhteen, jonka normi  $\|P\| < \delta$ . Tällöin lukua  $L$  kutsutaan funktion  $f$  *Riemann-integraaliksi* välin  $[a, b]$  suhteen. Funktion  $f$  integraalille välin  $[a, b]$  yli käytetään yleisesti merkintää

$$\int_a^b f(x) dx = L.$$

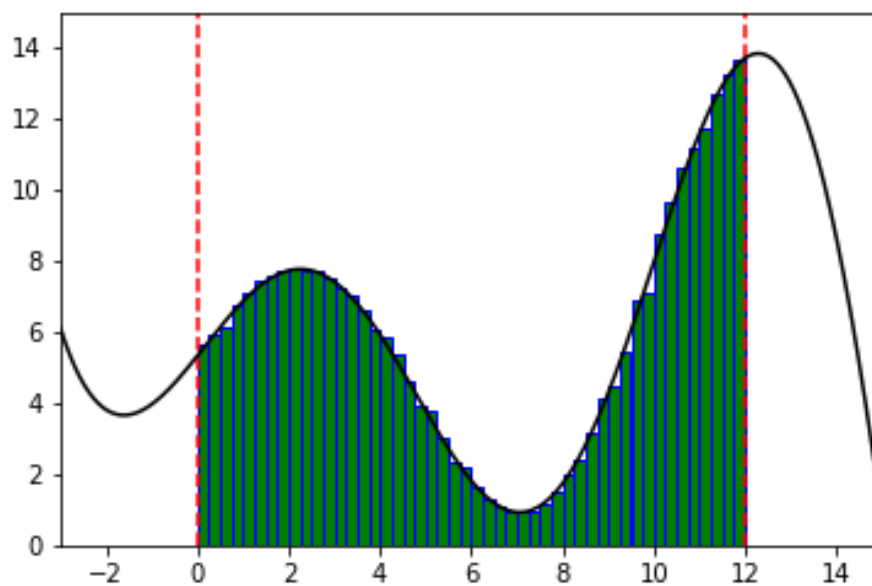
[4]

Riemann-integraalin määritelmässä esiintyvää lukua  $L$  voidaan pitää funktion ja x-akselin välisenä etumerkillä varustettuna pinta-alana välillä  $[a, b]$ .

Riemann-integraalin määritelmää voidaan ajatella jaon hienontamisena. Kun jakoa hienonnetaan, saadaan Riemannin summan arvo lähemmäksi ja lähemmäksi lukua  $L$ , jolloin myös graafisessa esityksessä olevat suorakulmiot vastaavat paremmin ja paremmin funktion ja x-akselin välistä pinta-alaa. Koska määritelmässä oleva  $\epsilon$  voi olla mielivaltaisen pieni, voidaan ajatella, että tarpeeksi jakoa hienontamalla voidaan saada Riemannin summan arvo mielivaltaisen lähelle funktion pinta-alaa.



**Kuva 2.2.** Kuvan 2.1 jaon hienonnuksen tuottama Riemannin summa



**Kuva 2.3.** Kun jakoa hienonnetaan tarpeeksi, alkaa Riemannin summa vastaamaan hyvin funktion pinta-alaa

**Lause 2.7.** Jos Riemann-integraali on olemassa, se on yksikäsitteinen. [4]

*Todistus.* Tehdään vastaoletus. Olkoot  $L_1$  ja  $L_2$  kaksi eri lukua  $L$ , jotka toteuttavat määritelmän 2.6 mukaisen ehdon. Koska  $L_1$  ja  $L_2$  ovat eri lukuja, voidaan kirjoittaa  $|L_1 - L_2| > 0$ . Valitaan  $\epsilon$

siten, että

$$\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{4}.$$

Voidaan siis kirjoittaa

$$|\sigma - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{4} \quad \text{ja} \quad |\sigma - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{4}.$$

Lisäämällä epäyhtälöt toisiinsa saadaan

$$\begin{aligned} |\sigma - L_1| + |\sigma - L_2| &< \frac{2|L_1 - L_2|}{4} \\ |(\sigma - L_2) - (\sigma - L_1)| &< \frac{|L_1 - L_2|}{2} \\ |L_1 - L_2| &< \frac{|L_1 - L_2|}{2} \\ 1 &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Saatiin aikaiseksi ristiriita, joten vastaoletus ei voi pitää paikkansa. Koska vastaoletus ei pidä paikkansa, on alkuperäisen väitteen oltava tosi.  $\square$

### 2.3 Differentiaalilaskennan väliarvolause

**Lause 2.8.** *Olkoot  $a$  ja  $b$  reaalilukuja siten, että  $a < b$  ja olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, joka on jatkuva välillä  $[a, b]$  ja derivoituva välillä  $(a, b)$ . Tällöin on olemassa sellainen luku  $x \in (a, b)$ , joka toteuttaa yhtälön  $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . [3]*

Lausetta 2.8 kutsutaan differentiaalilaskennan väliarvolauseeksi. Se on hyvin tunnettu lause, joka tulee usein vastaan analyysin yhteydessä.

### 3. RIEMANN-STIELTJES-INTEGRAALI

Nyt voidaan alkaa tutkimaan Riemann–Stieltjes-integraalia. Riemann–Stieltjes-integraali on määritelty eri lähteissä eri tavoin, joten kirjallisuutta tutkimalla löytää monia eri lähestymistapoja aiheeseen. Tämän kappaleen lähestymistapa Riemann–Stieltjes-integraaliin pohjautuu lähteeseen [1].

#### 3.1 Määritelmä

Ennen kuin voidaan määritellä Riemann–Stieltjes-integraali, on määriteltävä Riemann–Stieltjes-summa. Se määritellään seuraavanlaisesti:

**Määritelmä 3.1.** Olkoon  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  välin  $[a, b]$  jako ja olkoon  $t_k$  jokin välille  $[x_{k-1}, x_k]$  kuuluva piste. Olkoot  $f$  ja  $\alpha$  reaaliarvoisia funktioita, jotka ovat välillä  $[a, b]$  määriteltyjä ja rajoitettuja. Summaa, joka on muotoa

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta\alpha_k$$

kutsutaan funktion  $f$  *Riemann–Stieltjes-summaksi* funktion  $\alpha$  suhteen. [1]

Riemann–Stieltjes-summan määritelmä näyttää hyvin samanlaiselta Riemannin summan määritelmän kanssa. Ainoa ero Riemannin summan määritelmään on se, että Riemannin summassa kerrotaan funktion  $f$  arvoa pisteiden  $x_{k-1}$  ja  $x_k$  välisellä etäisyydellä reaaliakselilla, kun taas Riemann–Stieltjes-summan tapauksessa kerroin saadaan sijoittamalla nämä pisteet funktioon  $\alpha$  ja laskemalla saatujen lukujen välinen erotus.

Riemann–Stieltjes-summan määritelmää voidaan hyödyntää Riemann–Stieltjes-integraalin määrittelemiseen.

**Määritelmä 3.2.** Funktiota  $f$  kutsutaan *Riemann-integroituva*ksi funktion  $\alpha$  suhteen välillä  $[a, b]$ , jos on olemassa luku  $A$  jolla on seuraava ominaisuus:

Kaikille luvuille  $\epsilon$ , joille on voimassa epäyhtälö  $\epsilon > 0$ , löytyy vastaava välin  $[a, b]$  jako  $P_\epsilon$  siten, että jokainen jaon  $P_\epsilon$  hienonnus  $P$  ja jokainen pisteiden  $t_k$  valinta väleiltä  $[x_{k-1}, x_k]$  toteuttaa epäyhtälön  $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$ . Jos tällainen luku  $A$  löytyy, voidaan merkitä  $f \in R(\alpha)$  välillä  $[a, b]$ . [1]

Jos luku  $A$  on olemassa, sitä kutsutaan funktion  $f$  Riemann–Stieltjes-integraalin arvoksi funktion  $\alpha$  suhteen ja voidaan sanoa, että Riemann–Stieltjes-integraali on olemassa. Jos tällaista lukua  $A$  ei löydy, voidaan sanoa, että integraalia ei ole olemassa. Riemann–Stieltjes-integraalista käytetään merkintää  $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ . Jos integroimismuuttuja selviää kontekstista, voidaan käyttää lyhennettyä merkintää  $\int_a^b f d\alpha$ . Tässä merkinnässä funktiota  $f$  kutsutaan integrandiksi ja funktiota  $\alpha$  puolestaan kutsutaan integraattoriksi.

Riemann–Stieltjes-integraalin määritelmässä esiintyvä jako  $P_\epsilon$  riippuu yleensä muuttujasta  $\epsilon$ . Käytännössä määritelmää käytettäessä oletetaan yleensä, että  $\epsilon$  on annettu, jonka jälkeen valitaan  $P_\epsilon$  annetun muuttujan  $\epsilon$  mukaan. Koska määritelmän mukaisen epäyhtälön on oltava tosi kaikille nollassa suuremmille muuttujille  $\epsilon$ , ei muuttujalle  $\epsilon$  kuitenkaan anneta lukuarvoa.

Riemann–Stieltjes-integraalia voidaan pitää Riemann-integraalin yleistyksenä. Minkä tahansa Riemann-integraalin saa muutettua Riemann–Stieltjes-integraaliksi valitsemalla funktioksi  $\alpha$  funktion  $\alpha(x) = x$ . Tällöin määritelmän 3.1 mukaisen Riemann–Stieltjes-summan arvo on sama kuin tavallisen Riemann-summan, minkä seurauksena Riemann–Stieltjes-integraalin määritelmä ja tavallisen Riemann-integraalin määritelmä vastaavat toisiaan. Tavallista Riemann-integraalia voidaan siis pitää Riemann–Stieltjes-integraalin erikoistapauksena, jossa  $\alpha(x) = x$ . Huomioitavaa Riemann–Stieltjes-integraalissa on kuitenkin se, että toisin kuin Riemann-integraali, Riemann–Stieltjes-integraali ei yleisessä tapauksessa anna funktion ja  $x$ -akselin välistä pinta-alaa.

Riemann–Stieltjes-integraali on hyvin usein kirjallisuudessa määritelty määritelmän 2.6 tapaisesti. Näin määritellyn Riemann–Stieltjes-integraalin olemassaolo takaa myös määritelmän 3.2 mukaisen integraalin olemassaolon siten, että kummankin integraalin arvo on sama. Määritelmät eivät kuitenkaan ole täysin ekvivalentteja, sillä määritelmän 3.2 mukaisen integraalin olemassaolo ei takaa määritelmän 2.6 tapaisesti määritellyn integraalin olemassaoloa Riemann–Stieltjes-integraaleille. Määritelmät ovat kuitenkin ekvivalentteja tavalliselle Riemann-integraalille. [1]

## 3.2 Ominaisuuksia

Riemann–Stieltjes-integraalin ei voida olettaa toteuttavan kaikkia Riemann-integraalille tyypillisiä ominaisuuksia, vaan kaikki ominaisuudet on todistettava Riemann–Stieltjes-integraalille erikseen. Kuitenkin, koska Riemann-integraali on Riemann–Stieltjes-integraalin erikoistapaus, voidaan Riemann–Stieltjes-integraalin toteuttamien ominaisuuksien olettaa olevan myös Riemann-integraalin toteuttamia, jos funktio  $\alpha(x) = x$  toteuttaa lauseen yhteydessä mahdollisesti tehdyt oletukset integraattorin suhteen.

**Lause 3.3.** Jos  $f, g \in R(\alpha)$  välillä  $[a, b]$  ja  $c_1, c_2$  ovat vakiokertoimia, niin  $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$  ja

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) d\alpha = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b g d\alpha. \quad (3.1)$$

[1]

*Todistus.* Merkitään funktiota  $c_1 f + c_2 g$  kirjaimella  $h$ . Välin  $[a, b]$  jakoa  $P$  vastaava Riemann–

Stieltjes-summa on

$$S(P, h, \alpha) = \sum_{k=1}^n h(t_k) \Delta \alpha_k = c_1 \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^n g(t_k) \Delta \alpha_k = c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(P, g, \alpha).$$

Olkoon  $\epsilon > 0$ . Koska  $f$  ja  $g$  ovat Riemann–Stieltjes-integroituvia, voidaan valita jaot  $P'_\epsilon$  ja  $P''_\epsilon$  siten, että mikä tahansa jaon  $P'_\epsilon$  hienonnus  $P$  toteuttaa epäyhtälön  $|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon$  ja mikä tahansa jaon  $P''_\epsilon$  hienonnus  $P$  toteuttaa epäyhtälön  $|S(P, g, \alpha) - \int_a^b g d\alpha| < \epsilon$ . Valitaan jaoksi  $P_\epsilon$  jakojen  $P'_\epsilon$  ja  $P''_\epsilon$  yhdiste  $P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$ . Tällöin mikä tahansa jaon  $P_\epsilon$  hienonnus  $P$  toteuttaa epäyhtälön

$$\begin{aligned} & \left| S(P, h, \alpha) - (c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b g d\alpha) \right| \\ & \leq \left| c_1 S(P, f, \alpha) - (c_1 \int_a^b f d\alpha) \right| + \left| c_2 S(P, g, \alpha) - (c_2 \int_a^b g d\alpha) \right| \\ & = \left| c_1 (S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha) \right| + \left| c_2 (S(P, g, \alpha) - \int_a^b g d\alpha) \right| \\ & = |c_1| \left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| + |c_2| \left| S(P, g, \alpha) - \int_a^b g d\alpha \right| \\ & \leq |c_1| \epsilon + |c_2| \epsilon. \end{aligned}$$

Koska lauseke  $|c_1| \epsilon + |c_2| \epsilon$  voi olla mielivaltaisen pieni, on väite todistettu. [1] □

Voidaan siis sanoa, että Riemann–Stieltjes-integraali on integrandin suhteen lineaarinen. Integrandin lineaarisuudesta herääkin kysymys siitä, onko Riemann–Stieltjes-integraali mahdollisesti lineaarinen myös integraattorin suhteen.

**Lause 3.4.** Jos  $f \in R(\alpha)$  välillä  $[a, b]$ ,  $f \in R(\beta)$  välillä  $[a, b]$  ja  $c_1, c_2$  ovat vakiokertoimia, niin  $f \in R(c_1\alpha + c_2\beta)$  ja

$$\int_a^b f d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b f d\beta. \quad (3.2)$$

[1]

*Todistus.* Merkitään funktiota  $c_1\alpha + c_2\beta$  kirjaimella  $\gamma$ . Välin  $[a, b]$  jakoa  $P$  vastaava Riemann–Stieltjes-summa on

$$S(P, f, \gamma) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \gamma_k = c_1 \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \beta_k = c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(P, f, \beta).$$

Olkoon  $\epsilon > 0$ . Koska  $f$  on Riemann–Stieltjes-integroituva sekä funktion  $\alpha$  että funktion  $\beta$  suhteen, voidaan valita jaot  $P'_\epsilon$  ja  $P''_\epsilon$  siten, että mikä tahansa jaon  $P'_\epsilon$  hienonnus  $P$  toteuttaa epäyhtälön  $|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon$  ja mikä tahansa jaon  $P''_\epsilon$  hienonnus  $P$  toteuttaa epäyhtälön  $|S(P, f, \beta) - \int_a^b f d\beta| < \epsilon$ . Valitaan jaoksi  $P_\epsilon$  jakojen  $P'_\epsilon$  ja  $P''_\epsilon$  yhdiste  $P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$ . Tällöin mikä

tahansa jaon  $P_\epsilon$  hienonnus  $P$  toteuttaa epäyhtälön

$$\begin{aligned}
& \left| S(P, f, \gamma) - (c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b f d\beta) \right| \\
& \leq \left| c_1 S(P, f, \alpha) - (c_1 \int_a^b f d\alpha) \right| + \left| c_2 S(P, f, \beta) - (c_2 \int_a^b f d\beta) \right| \\
& = \left| c_1 (S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha) \right| + \left| c_2 (S(P, f, \beta) - \int_a^b f d\beta) \right| \\
& = |c_1| \left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| + |c_2| \left| S(P, f, \beta) - \int_a^b f d\beta \right| \\
& < |c_1| \epsilon + |c_2| \epsilon.
\end{aligned}$$

Koska lauseke  $|c_1| \epsilon + |c_2| \epsilon$  voi olla mielivaltaisen pieni, on väite todistettu.  $\square$

Lauseet 3.3 ja 3.4 yhdistämällä voidaan siis sanoa, että Riemann–Stieltjes-integraali on sekä integrandin, että integraattorin suhteen lineaarinen. Tämä tulos helpottaa huomattavasti Riemann–Stieltjes-integraalilla laskemista.

**Lause 3.5.** *Oletetaan, että  $b$  kuuluu välille  $[a, c]$ . Tällöin jos kaavan 3.3 vasemmanpuoleiset integraalit ovat olemassa, on oikeanpuoleinen integraali myös olemassa ja yhtälö*

$$\int_a^b f d\alpha + \int_b^c f d\alpha = \int_a^c f d\alpha \quad (3.3)$$

on voimassa. [1]

*Todistus.* Jos  $P$  on välin  $[a, c]$  jako, joka on määritelty siten, että  $b \in P$ , merkitään  $P' = P \cap [a, b]$  ja  $P'' = P \cap [b, c]$ . Tällöin jakoja  $P$ ,  $P'$  ja  $P''$  vastaavat Riemann–Stieltjes-summat voidaan yhdistää kaavalla

$$S(P, f, \alpha) = S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha).$$

Oletetaan, että integraalit  $\int_a^b$  ja  $\int_b^c$  ovat olemassa. Tällöin kun  $\epsilon > 0$ , löytyy sellainen välin  $[a, b]$  jako  $P'_\epsilon$  ja sellainen välin  $[b, c]$  jako  $P''_\epsilon$ , että

$$\begin{aligned}
\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| &< \frac{\epsilon}{2} \quad \text{kun } P' \text{ on jaon } P'_\epsilon \text{ hienonnus ja} \\
\left| S(P'', f, \alpha) - \int_b^c f d\alpha \right| &< \frac{\epsilon}{2} \quad \text{kun } P'' \text{ on jaon } P''_\epsilon \text{ hienonnus.}
\end{aligned}$$

Merkitään jakojen  $P'_\epsilon$  ja  $P''_\epsilon$  yhdistettä merkinnällä  $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$ . Tällöin  $P_\epsilon$  on välin  $[a, c]$  jako ja mikä tahansa sen hienonnus  $P$  toteuttaa lausekkeet  $P' \supseteq P'_\epsilon$  ja  $P'' \supseteq P''_\epsilon$ . Sijoittamalla saatuja

tuloksia saadaan seuraava epäyhtälö:

$$\begin{aligned}
 & \left| S(P, f, \alpha) - \left( \int_a^b f \, d\alpha + \int_b^c f \, d\alpha \right) \right| \\
 &= \left| S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha) - \left( \int_a^b f \, d\alpha + \int_b^c f \, d\alpha \right) \right| \\
 &= \left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha + S(P'', f, \alpha) - \int_b^c f \, d\alpha \right| \\
 &\leq \left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| + \left| S(P'', f, \alpha) - \int_b^c f \, d\alpha \right| \\
 &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
 \end{aligned}$$

Koska  $\epsilon > 0$  on mielivaltainen, on väite todistettu. [1] □

Voidaan siis sanoa, että integroimisvälin voi jakaa kahteen osaan ja integraalin arvo koko välillä on summa integraalin arvoista välin osissa. Jos lausetta 3.5 sovelletaan uudestaan osaväleihin, voidaan integraali jakaa mielivaltaiseen äärelliseen määrään osavälejä, jolloin kokonaisintegraalin arvo on integraalin osavälien arvojen summa.

### 3.3 Osittaisintegrointi

**Lause 3.6.** *Olkoon  $f \in R(\alpha)$  välillä  $[a, b]$ . Tällöin  $\alpha \in R(f)$  välillä  $[a, b]$  ja kaava 3.4 on voimassa. [1]*

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x) \, df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) \quad (3.4)$$

*Todistus.* Olkoon  $\epsilon > 0$ . Koska  $\int_a^b f \, d\alpha$  on olemassa, löytyy sellainen jako  $P_\epsilon$ , jonka jokaiselle hienonnukselle  $P'$  on voimassa epäyhtälö

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \epsilon.$$

Otetaan jokin mielivaltainen integraalia  $\int_a^b \alpha \, df$  vastaava Riemann–Stieltjes-summa, jossa esiintyvä jako  $P$  on jaon  $P_\epsilon$  hienonnus. Se voidaan kirjoittaa muodossa

$$S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) \Delta f_k = \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_{k-1}).$$

Merkitään nyt  $A = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$ . Tämä voidaan avata muotoon

$$A = \sum_{k=1}^n \Delta(f_k \alpha_k) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \alpha(x_k) - f(x_{k-1}) \alpha(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \alpha(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \alpha(x_{k-1}).$$

Kun otetaan kahden edellisen yhtälön erotus, saadaan

$$\begin{aligned}
 A - S(P, \alpha, f) &= \left( \sum_{k=1}^n f(x_k) \alpha(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \alpha(x_{k-1}) \right) - \left( \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_{k-1}) \right) \\
 &= \left( \sum_{k=1}^n f(x_k) \alpha(x_k) - \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_k) \right) - \left( \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \alpha(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_{k-1}) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n f(x_k) (\alpha(x_k) - \alpha(t_k)) + \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) (\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})).
 \end{aligned}$$

Nämä summat voidaan yhdistää yhdeksi summaksi muotoa  $S(P', f, \alpha)$ , missä  $P'$  on se välin  $[a, b]$  jako, joka saadaan yhdistämällä pisteet  $x_k$  ja  $t_k$ . Tällöin  $P'$  on jaon  $P$  hienonmus ja koska  $P \supseteq P_\epsilon$ , on  $P'$  myös jaon  $P_\epsilon$  hienonmus. Voidaan siis sijoittaa edellinen lauseke alkuperäiseen epäyhtälöön, josta saadaan

$$\begin{aligned}
 \left| A - S(P, \alpha, f) - \int_a^b f \, d\alpha \right| &< \epsilon. \\
 \left| S(P, \alpha, f) - A + \int_a^b f \, d\alpha \right| &< \epsilon. \\
 \left| S(P, \alpha, f) - (A - \int_a^b f \, d\alpha) \right| &< \epsilon.
 \end{aligned}$$

Ollaan siis osoitettu, että summan  $S(P, \alpha, f)$  voi saada määritelmän 3.2 mukaisesti mielivaltaisen lähelle lukua  $A - \int_a^b f \, d\alpha$ , joten integraali  $\int_a^b \alpha \, df$  on olemassa ja sen arvo on  $A - \int_a^b f \, d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f(x) \, d\alpha(x)$ , joten väite on todistettu. [1]  $\square$

Yhtälöä 3.4 kutsutaan osittaisintegroinnin kaavaksi. Se helpottaa huomattavasti integraalin laskemista tilanteissa, joissa alkuperäistä integraalia  $\int_a^b f(x) \, d\alpha(x)$  on vaikea laskea suoraan, mutta integraalin  $\int_a^b \alpha(x) \, df(x)$  saa laskettua helposti.

### 3.4 Muuttujanvaihto

**Lause 3.7.** *Olkoon  $f \in R(\alpha)$  välillä  $[a, b]$  ja olkoon  $g$  aidosti monotoninen jatkuva funktio, joka on määritelty välillä  $S = [c, d]$  siten, että  $a = g(c)$  ja  $b = g(d)$ . Olkoot  $h$  ja  $\beta$  yhdistettyjä funktioita*

$$h(x) = f(g(x)), \quad \beta(x) = \alpha(g(x)) \quad \text{jos } x \in S.$$

Tällöin  $h \in R(\beta)$  välillä  $S$  ja yhtälö  $\int_a^b f \, d\alpha = \int_c^d h \, d\beta$  on voimassa. Tämä yhtälö voidaan myös esittää muodossa

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t) \, d\alpha(t) = \int_c^d f[g(x)] \, d(\alpha[g(x)]). \quad (3.5)$$

[1]

*Todistus.* Oletetaan, että funktio  $g$  on aidosti kasvava välillä  $S$ . Tällöin funktiolle  $g$  löytyy jatkuva ja aidosti kasvava välillä  $[a, b]$  määritelty käänteisfunktio  $g^{-1}$  ja funktiot  $g$  ja  $g^{-1}$  ovat bijektioita. Nyt jokaiselle välin  $[c, d]$  jaolle  $P = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n\}$  löytyy täsmälleen yksi välin  $[a, b]$

jako  $P' = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  siten, että  $x_k = g(y_k)$ . Voidaan merkitä  $P' = g(P)$  ja  $P = g^{-1}(P')$ . Tämän lisäksi hienontamalla jakoa  $P$  voidaan saada vastaava jaon  $P'$  hienonnus ja toisin päin. Olkoon  $\epsilon > 0$ . Tällöin löytyy jako  $P'_\epsilon$  siten, että mille tahansa jaon  $P'_\epsilon$  hienonnukselle  $P'$  on voimassa epäyhtälö  $|S(P', f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon$ . Merkitään nyt jakoa  $P'_\epsilon$  vastaavaa välin  $[c, d]$  jakoa merkinnällä  $P_\epsilon$ . Olkoon  $P = \{y_0, \dots, y_n\}$  jokin mielivaltainen jaon  $P_\epsilon$  hienonnus. Tällöin jakoa  $P$  vastaava Riemannin summa on  $S(P, h, \beta) = \sum_{k=1}^n h(u_k) \Delta\beta_k$ . Merkitään  $t_k = g(u_k)$  ja  $x_k = g(y_k)$ . Tällöin jako  $P' = \{x_0, \dots, x_n\}$  on jaon  $P'_\epsilon$  hienonnus. Nyt jakoa  $P$  vastaava Riemannin summa saadaan muotoon.

$$\begin{aligned} S(P, h, \beta) &= \sum_{k=1}^n f(g(u_k)) [\alpha(g(y_k)) - \alpha(g(y_{k-1}))] \\ &= \sum_{k=1}^n f(t_k) [\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] \\ &= S(P', f, \alpha) \end{aligned}$$

Nyt voidaan siis merkitä  $|S(P, h, \beta) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon$ , joten alkuperäinen väite on todistettu. Todistus etenee samankaltaisesti, kun funktio  $g$  on aidosti vähenevä. [1]

Kaavaa 3.5 kutsutaan muuttujanvaihtokaavaksi. Se on hyvin samankaltainen tavallisen Riemann-integraalin muuttujanvaihtokaavan kanssa. Erona tavalliseen Riemann-integraalin kaavaan on kuitenkin se, että kuten osittaisintegroinnin tapauksessa, on kaavassa esiintyvä derivaatta korvattu integraattorifunktiolla. Muuttujanvaihto on hyödyllinen työkalu integraalien laskemiseen erityisesti tilanteissa, joissa muuttujanvaihdon tekemällä saa hankalasti integroitavat  $f$  ja  $\alpha$ -funktiot yksinkertaisempaan muotoon tai kun integroinnin saa tehtyä luonnollisemmin jossain toisessa koordinaatistossa.  $\square$

### 3.5 Askelfunktio integraattorifunktiona

Yksi tärkeä Riemann–Stieltjes-integraalin ominaisuus on sen käyttäytyminen integraattorifunktion  $\alpha$  epäjatkuvuuskohdissa. Tutkitaan ensin Riemann–Stieltjes-integraalin käyttäytymistä, kun funktio  $\alpha$  on askelfunktio.

**Lause 3.8.** *Olkoon  $a < b < c$  ja olkoon funktio  $\alpha(x)$  määritelty välillä  $[a, c]$  siten, että*

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha(a) & | & a \leq x < b \\ \alpha(x) &= \alpha(c) & | & b < x \leq c. \end{aligned}$$

*Olkoon funktio  $f$  on määritelty välillä  $[a, c]$  siten että ainakin toinen funktioista  $f$  ja  $\alpha$  on pisteessä  $b$  vasemmalta jatkuva ja ainakin toinen on pisteessä  $b$  oikealta jatkuva. Tällöin  $f \in R(\alpha)$  välillä  $[a, c]$  ja*

$$\int_a^c f d\alpha = f(b)(\alpha(b+) - \alpha(b-)), \quad (3.6)$$

*missä  $\alpha(b+)$  ja  $\alpha(b-)$  ovat funktion  $\alpha$  oikean- ja vasemmanpuoleiset raja-arvot pisteessä  $b$ . [1]*

*Todistus.* Olkoon piste  $b$  yksi Riemann–Stieltjes-summan jakopisteistä  $x_k$ . Tällöin jokaisen Riemann–Stieltjes-summan jäsenen arvo on nolla, poislukien ne kaksi jäsentä, joita vastaavan osavälin toinen päätepiste on piste  $b$ . Voidaan kirjoittaa

$$S(P, f, \alpha) = f(t_{k-1})(\alpha(b) - \alpha(b-)) + f(t_k)(\alpha(b+) - \alpha(b)).$$

Jos merkitään  $\Delta = S(P, f, \alpha) - f(b)(\alpha(b+) - \alpha(b-))$ , voidaan aiempi yhtälö kirjoittaa muotoon

$$\Delta = (f(t_{k-1}) - f(b))(\alpha(b) - \alpha(b-)) + (f(t_k) - f(b))(\alpha(b+) - \alpha(b)).$$

Ottamalla tästä yhtälöstä itseisarvot puolittain saadaan kolmioepäyhtälön avulla

$$|\Delta| \leq |f(t_{k-1}) - f(b)| |\alpha(b) - \alpha(b-)| + |f(t_k) - f(b)| |\alpha(b+) - \alpha(b)|.$$

Jos funktio  $f$  on jatkuva pisteessä  $b$  voidaan mille tahansa reaaliluvulle  $\epsilon > 0$  löytää sitä vastaava reaaliluku  $\delta > 0$  siten, että kun  $\|P\| < \delta$ , seuraavat epäyhtälöt toteutuvat:

$$|f(t_{k-1}) - f(b)| < \epsilon.$$

$$|f(t_k) - f(b)| < \epsilon.$$

Nyt aiempaa epäyhtälöä voidaan arvioida ylöspäin, jolloin se saadaan muotoon

$$|\Delta| \leq \epsilon |\alpha(b) - \alpha(b-)| + \epsilon |\alpha(b+) - \alpha(b)|. \quad (3.7)$$

Aiemmin oletettiin, että funktio  $f$  on jatkuva pisteessä  $b$ , mutta saatu epäyhtälö toteutuu, vaikka funktiolla olisikin epäjatkuvuuskohta pisteessä  $b$ . Jos funktio  $f$  on vasemmalta epäjatkuva pisteessä  $b$ , on voimassa yhtäsuuruus  $\alpha(b) = \alpha(b-)$ , jolloin  $|\Delta| \leq \epsilon |\alpha(b+) - \alpha(b)|$ . Jos taas funktio  $f$  on oikealta epäjatkuva pisteessä  $b$  on voimassa yhtäsuuruus  $\alpha(b) = \alpha(b+)$ , jolloin  $|\Delta| \leq \epsilon |\alpha(b) - \alpha(b-)|$ . Jos funktio  $f$  on sekä vasemmalta että oikealta epäjatkuva, saadaan puolestaan  $|\Delta| = 0$ . Epäyhtälö 3.7 on siis aina voimassa. Koska jakoa hienonnettaessa jaon normi pienenee, voidaan määritelmän 3.2 mukaiseksi jaoksi  $P_\epsilon$  valita mikä tahansa jako, jonka normille on voimassa  $\|P_\epsilon\| < \delta$ . Tällöin epäyhtälö 3.7 on voimassa tämän jaon kaikille hienonnuksille, joten alkuperäinen väite on todistettu. [1] □

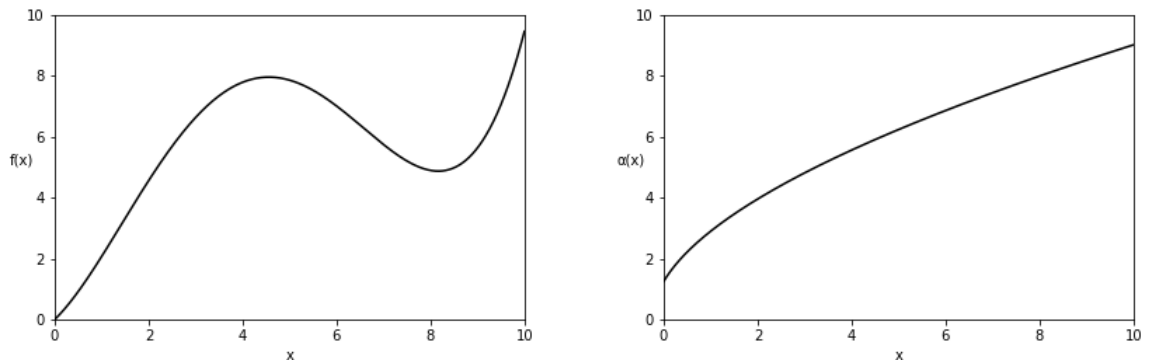
Riemann–Stieltjes-integraalin käyttäytyminen  $\alpha$ -funktion epäjatkuvuuskohdissa on hyvin keskeinen osa sen toiminnallisuutta. Tätä ominaisuutta hyödyntämällä voidaan muuttaa summalausekkeitä Riemann–Stieltjes-integraaleiksi, jolloin voidaan myös esimerkiksi yhdistää jatkuvia ja diskreettejä jakaumia yhdeksi integraalilausekkeeksi.

## 4. GRAAFINEN ESITYS

Kun Riemann–Stieltjes-integraali on määritelty, herää kysymys siitä, mitä Riemann–Stieltjes-integraalilla oikeastaan lasketaan. Kuten tavalliselle Riemann-integraalille, myös Riemann–Stieltjes-integraalille löytyy graafinen esitys, mutta se on tavallisen integraalin graafista esitystä monimutkaisempi. Tämän kappaleen lähestymistapa pohjautuu pitkälti lähteeseen [2].

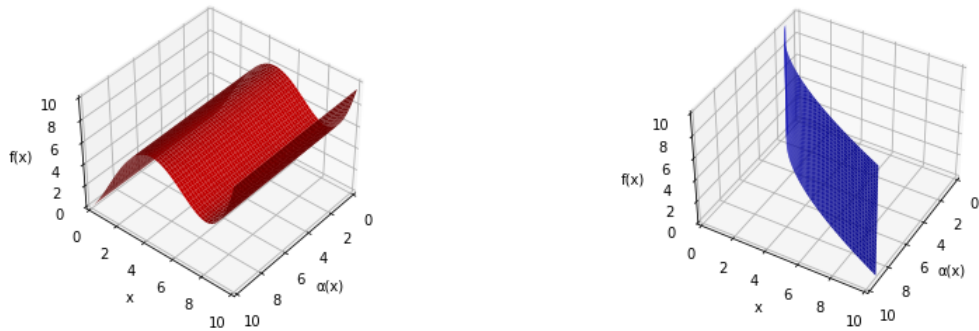
### 4.1 Monotoninen ja jatkuva $\alpha(x)$

Oletetaan ensin, että integraattorifunktio  $\alpha(x)$  on kasvava sekä jatkuva funktio integroimisvälillä ja  $f \in R(\alpha)$ . Funktiot  $f(x)$  ja  $\alpha(x)$  voidaan esittää kuvan 4.1 esimerkkifunktioiden tapaisesti kaksiulotteisissa koordinaatistoissa.



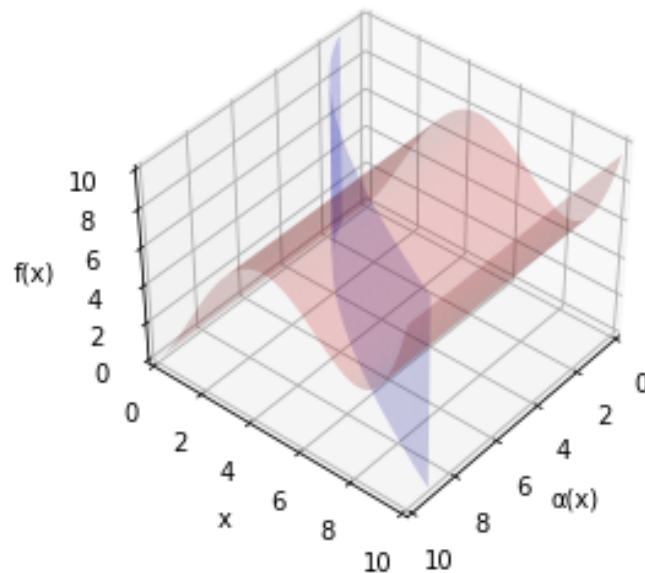
**Kuva 4.1.** Funktiot  $f(x)$  ja  $\alpha(x)$  esitettynä 2-ulotteisissa koordinaatistoissa

Nyt kuvan 4.1 koordinaatistot voidaan yhdistää yhdeksi kolmiulotteiseksi koordinaatistiksi. Koska funktiot  $f(x)$  ja  $\alpha(x)$  eivät ole toisistaan riippuvia, on funktio  $f(x)$  vakio koordinaatiston  $\alpha(x)$  suuntaan katsottuna ja toisin päin. Tällöin funktioista  $f(x)$  ja  $\alpha(x)$  saadaan koordinaatistoon kaksi pintaa, joiden voidaan katsoa olevan eri suuntiin käännettyjä.



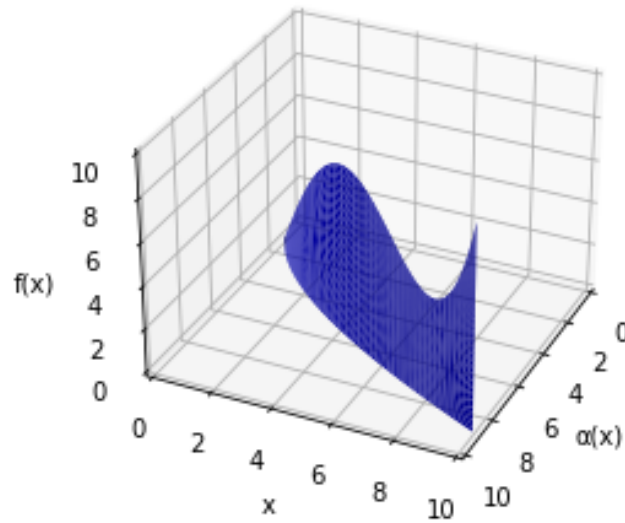
**Kuva 4.2.** Funktiot  $f(x)$  ja  $\alpha(x)$  esitettynä 3-ulotteisissa koordinaatistoissa

Integraattorifunktion ja integrandifunktion voi nyt yhdistää samaan koordinaatistoon, jolloin huomataan että ne leikkaavat toisensa.



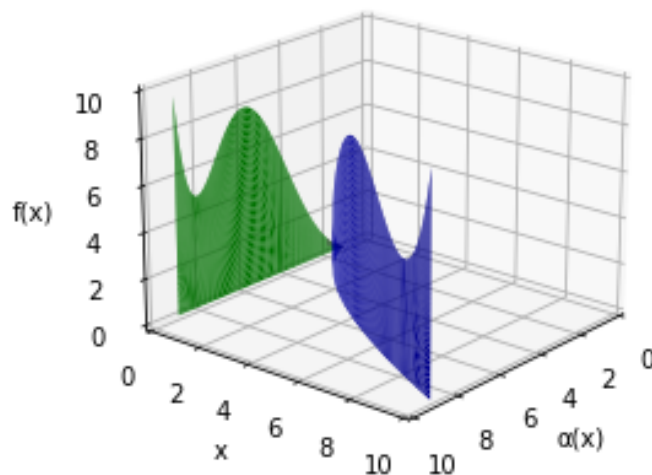
**Kuva 4.3.** Funktiot  $f(x)$  ja  $\alpha(x)$  esitettynä samassa koordinaatistossa

Nyt integraattorifunktiosta  $\alpha(x)$  jää osa integrandifunktion  $f(x)$  ja tason  $f(x) = 0$  väliin. Tämä osa  $\alpha$ -funktiosta muistuttaa hyvin paljon tavallisen Riemann-integraalin graafisen esityksen pinta-alaa, mutta kolmiulotteisena. Näin saatua pintaa kutsutaan usein aidaksi (fence). Aidan pinta-ala ei kuitenkaan ole vielä suoraan Riemann–Stieltjes-integraalin arvo.



**Kuva 4.4.** Funktiosta  $\alpha(x)$  funktion  $f(x)$  ja tason  $f(x) = 0$  väliin jäänyt osa.

Nyt kuvan 4.4 pinnasta on vielä otettava sen  $x$ -akselin suuntainen projektio, jonka seurauksena saadaan uusi pinta johonkin  $x = c$  tasoon. Tämän pinnan pinta-ala on Riemann–Stieltjes-integraalin arvo. Näin saatua projektiota kutsutaan myös joskus nimellä varjo (shadow).



**Kuva 4.5.** Aita ja sen  $x$ -akselin suuntainen projektio.

Kuvien esimerkistä saatu projektio on kokonaan tason  $f(x) = 0$  yläpuolella, mutta yleisessä ta-

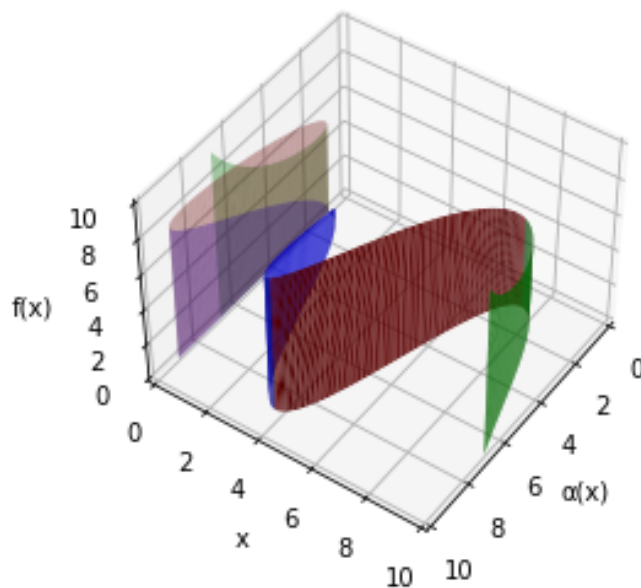
pauksessa saatu projektio saattaa olla osittain sen alapuolella. Samoin kuin tavallisen Riemann-integraalin tapauksessa, voidaan tämän nollatason alapuolelle jääneen osuuden katsoa olevan negatiivista pinta-alaa. Tällöin nollatason alapuolelle jäänyt pinta-ala vähennetään kokonaispinta-alasta sen sijaan, että se lisättäisiin siihen.

Jos integraalin aidasta otettaisiin  $x$ -akselin suuntaisen projektion sijaan sen  $\alpha(x)$ -akselin suuntainen projektio, olisi projektion pinta-ala tavallisen Riemann-integraalin pinta-ala [2]. Jos integraattorifunktio on  $\alpha(x) = x$ , ovat aitafunktion  $x$ -akselin ja  $\alpha$ -akselin suuntaiset projektiot symmetrian vuoksi yhtä suuret, jolloin Riemann–Stieltjes-integraalin arvo vastaa tavallisen Riemann-integraalin arvoa.

Aikaisemmin tehtiin oletus, että integraattorifunktio  $\alpha(x)$  on kasvava funktio. Jos  $\alpha(x)$  on sen sijaan vähenevä funktio, katsotaan siitä saadun aidan projektion tuottavan negatiivista pinta-alaa. Tällöin  $f(x) = 0$  tason alapuolelle jääneen pinta-alan voidaan katsoa olevan tuplanegatiivisuuden seurauksena positiivista. Voidaankin sanoa, että jos vähenevästä  $\alpha$ -funktioista saatu projektio on täysin sama, kuin jostain kasvavasta  $\alpha$ -funktioista saatu projektio, ovat näiden projektioiden tuottamien Riemann–Stieltjes-integraalien arvot itseisarvoltaan samat, mutta erimerkkiset.

## 4.2 Yleinen $\alpha(x)$

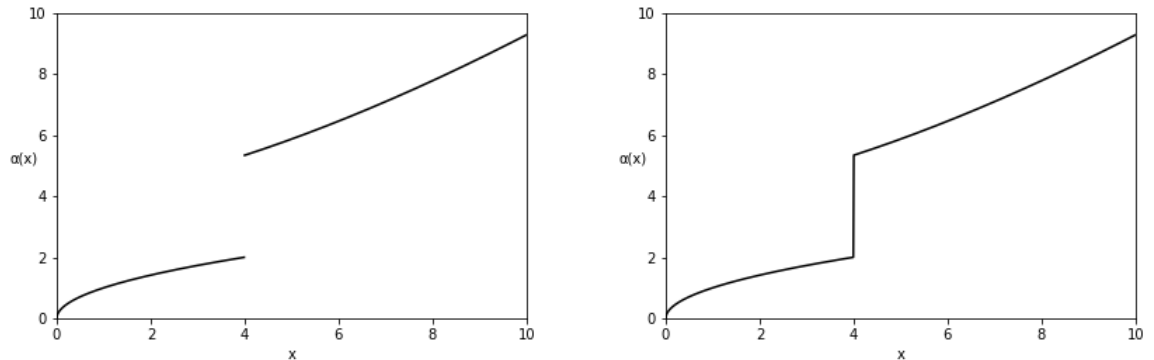
Olkoon  $\alpha(x)$  epämonotoninen jatkuva funktio ja olkoon  $f(x)$  jokin sellainen mielivaltainen funktio, että  $f \in R(\alpha)$ . Jos funktion  $\alpha(x)$  voi jakaa monotonisiin osiin, voidaan integroimisväli jakaa palasiin, joissa  $\alpha(x)$  on monotoninen. Tällöin integraalin arvo koko välillä on lauseen 3.5 mukaisesti osavälien integraalien summa. Graafisesti tämän arvon voidaan katsoa olevan näiden osavälien tuottamien projektioiden pinta-alojen summa.



*Kuva 4.6. Epämonotonisen funktion Riemann–Stieltjes-integraali*

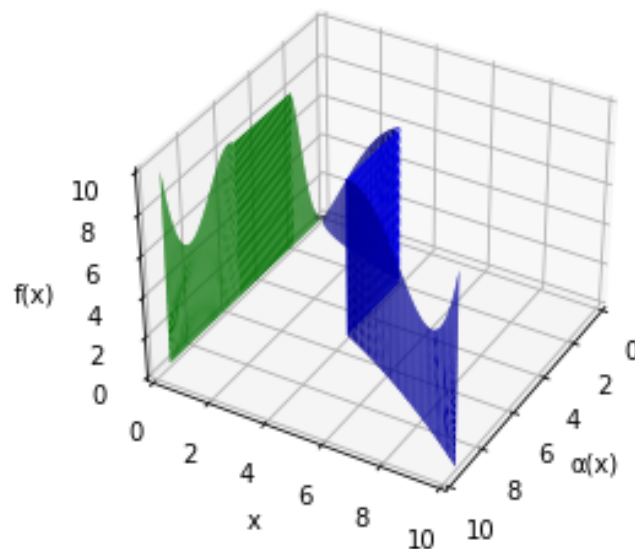
Kuvan 4.6 esimerkin Riemann–Stieltjes-integraalin arvo on siis sinisen projektion pinta-ala - punaisen projektion pinta-ala + vihreän projektion pinta-ala.

Olkoon  $\alpha(x)$  jokin funktio, jolla on epäjatkuvuuskohta pisteessä  $x_0$  ja olkoon  $f(x)$  jokin sellainen mielivaltainen funktio, että  $f \in R(\alpha)$ . Epäjatkuvien funktioiden kuvaajissa ei tavallisesti yhdistetä kuvaajaa epäjatkuvuuskohdassa, mutta Riemann–Stieltjes-integraalista tulee graafisesti järkevämpi, jos epäjatkuvuuskohtaan  $x_0$  lisätään  $\alpha(x)$ -akselin suuntainen jana, jonka päätepisteet ovat  $\alpha$ -funktion kummankinpuoleiset arvot epäjatkuvuuskohdassa.



**Kuva 4.7.** Funktion epäjatkuvuuskohtaan lisätään  $\alpha(x)$ -akselin suuntainen jana, joka yhdistää epäjatkuvuuskohtan pisteet

Kun epäjatkuvuuskohtan pisteet on yhdistetty janalla, voidaan saatu kuvaaja piirtää aiempien tapausten kaltaisesti kolmiulotteiseen koordinaatistoon, jolloin epäjatkuvuuskohtaan lisätyn janan muodostaman pinnan normaali on  $x$ -akselin suuntainen. Nyt jos  $\alpha$ -funktion muodostamalle pinnalle tehdään samat toimenpiteet kuin jatkuvan  $\alpha$ -funktion tapauksessa, saadaan aikaan projektiio.



**Kuva 4.8.** Epäjatkuvan funktion Riemann–Stieltjes-integraali

Kuvassa 4.8 esiintyvää projektiota tarkastaessa huomataan, että epäjatkuvuuskohta  $x_0$  muodostaa projektioon suorakulmion, jonka leveys on epäjatkuvuuskohdan kummankin puoleisten arvojen erotus toisistaan ja jonka korkeus on funktion  $f$  arvo pisteessä  $x_0$ . Tämä käy hyvin järkeen, sillä epäjatkuvuuskohtien aiheuttama lisäys Riemann–Stieltjes-integraalin arvoon on analyyttisesti laskettuna  $f(x_0)(\alpha(x_{0+}) - \alpha(x_{0-}))$ . Muuten projektio muodostuu samankaltaisesti, kuin jatkuvan funktion tapauksessa.

## 5. RIEMANN-STIELTJES-INTEGRAALIN LASKEMINEN

### 5.1 Jatkuva integraattorifunktio

**Lause 5.1.** *Olkoon  $f \in R(\alpha)$  välillä  $[a, b]$  ja olkoon funktiolla  $\alpha$  jatkuva derivaatta välillä  $[a, b]$ . Tällöin Riemannin integraali  $\int_a^b f(x)\alpha'(x) dx$  on olemassa ja*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

[1]

*Todistus.* Merkitään  $g(x) = f(x)\alpha'(x)$ . Funktiosta  $g$  voidaan muodostaa seuraava Riemannin summa

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^n g(t_k)\Delta(x_k) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\alpha'(t_k)\Delta(x_k).$$

Nyt voidaan valita sama jako  $P$  ja samat välien pisteet  $t_k$ , jolloin voidaan muodostaa seuraava Riemann–Stieltjes-summa:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta(\alpha_k).$$

Soveltamalla lausetta 2.8 saadaan  $\Delta\alpha_k = \alpha'(v_k)\Delta x_k$ , missä  $v_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Tällöin summalausekkeiden erotus saadaan muotoon

$$S(P, f, \alpha) - S(P, g) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k))\Delta x_k.$$

Koska  $f$  on rajoitettu, löytyy sellainen luku  $M > 0$ , jolle on voimassa  $|f(x)| \leq M$  välillä  $[a, b]$ . Funktion  $\alpha'(x)$  jatkuvuudesta välillä  $[a, b]$  seuraa, että se on myös tasaisesti jatkuva välillä  $[a, b]$ . Tällöin mille tahansa annetulle  $\epsilon > 0$  löytyy vastaava  $\delta$  siten, että jos  $0 \leq |x - y| < \delta$ , niin  $|\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\epsilon}{2M(b-a)}$ . Tutkitaan nyt jakoa  $P'_\epsilon$ , jonka normille on voimassa ehto  $\|P'_\epsilon\| < \delta$ . Nyt mikä tahansa jaon  $P'_\epsilon$  hienonnus  $P$  toteuttaa epäyhtälön  $|\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)| < \frac{\epsilon}{2M(b-a)}$ , jolloin voidaan kirjoittaa  $|S(P, f, \alpha) - S(P, g)| < \frac{\epsilon}{2}$ .

Koska funktio  $f \in R(\alpha)$ , on olemassa sellainen välin  $[a, b]$  jako  $P''_\epsilon$ , jonka jokainen hienonnus  $P$  toteuttaa epäyhtälön  $|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ .

Merkitään aiempien jakojen yhdistettä  $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$ . Nyt mille tahansa jaon  $P_\epsilon$  hienonnukselle on aiempien kahden epäyhtälön seurauksena voimassa epäyhtälö  $|S(P, g) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon$ . Tämä epäyhtälö on haluttua muotoa, joten lause on todistettu. [1] □

Lause 5.1 antaa hyvän keinon sellaisten Riemann–Stieltjes-integraalien laskemiselle, joiden integraattorifunktiolla  $\alpha$  on jatkuva derivaatta. Tällaisissa tapauksissa voidaan laskea integraattorifunktion derivaatta, jonka jälkeen Riemann–Stieltjes-integraalin arvo saadaan ottamalla integrandifunktion  $f$  ja integraattorifunktion derivaatan  $\alpha'(x)$  välinen tulo ja laskemalla tämän tulon tavallinen Riemann-integraali.

Lauseeseen 5.1 liittyy oletus siitä, että integraattorifunktiolla on jatkuva derivaatta halutulla välillä. Voidaan kuitenkin todistaa lauseen 5.1 yleistys, joka on voimassa aina kun integraattorifunktio  $\alpha$  on jatkuva ja sen derivaatta on Riemann-integroituva.

**Lause 5.2.** *Olkkoon  $f \in R(\alpha)$  välillä  $[a, b]$  ja olkkoon  $\alpha(x)$  sellainen funktio, joka on jatkuva välillä  $[a, b]$  ja jonka derivaattafunktio  $\alpha'(x)$  on Riemann-integroituva välillä  $[a, b]$ . Tällöin seuraavat integraalit ovat olemassa ja ovat yhtäsuuria:*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

[1]

*Todistus.* Todistus löytyy Apostolin kirjasta (lähde [1]) sivulta 163. □

Tämä lauseen 5.1 yleistys antaa keinon integraalin laskemiselle myös sellaisissa tilanteissa, joissa integraattorifunktiolla on yksittäisiä derivaattafunktion epäjatkuvuuspisteitä. Se on erittäin hyödyllinen etenkin Riemann–Stieltjes-integraalin laskemiseen paloittain määriteltyjen integraattorifunktioiden suhteen.

## 5.2 Askelfunktion suhteen integrointi

**Lause 5.3.** *Olkkoon  $f \in R(\alpha)$  välillä  $[a, b]$  ja olkkoon funktio  $\alpha$  askelfunktio, jolla on  $n < \infty$  hyppäyskohtaa välillä  $]a, b[$ . Olkkoot funktiot  $f$  ja  $\alpha$  määritelty siten, että jokaisessa välin  $[a, b]$  pisteessä ainakin toinen funktioista on oikealta jatkuva ja ainakin toinen vasemmalta jatkuva. Tällöin integraalin arvoksi saadaan*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)(\alpha(x_{k+}) - \alpha(x_{k-})) = \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta\alpha(x_k), \quad (5.1)$$

missä pisteet  $x_k$  ovat integraattorifunktion  $\alpha$  hyppäyskohtia ja  $\Delta\alpha(x_k)$  on hypyn suuruus.

*Todistus.* Jaetaan integroimisväli lauseen 3.5 mukaisesti osiin siten, että jokaisessa osavälissä on yksi funktion  $\alpha$  hyppäyskohta. Tällöin jokaisen osaintegraalin arvoksi saadaan lauseen 3.8 mukaisesti  $f(x_i)(\alpha(x_{i+}) - \alpha(x_{i-})) = f(x_i)\Delta\alpha(x_i)$ , missä  $x_i$  on kyseisellä osavälillä oleva  $\alpha$ -funktion hyppäyskohta. Lauseen 3.5 mukaisesti kokonaisintegraalin arvo on osaintegraalien summa, jolloin kokonaisintegraalin arvoksi saadaan

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta\alpha(x_k).$$

Tämä on haluttu lopputulos, joten väite on todistettu.  $\square$

Tätä tulosta voidaan pitää jatkona aiemmin todistetulle yhden askeleen askelfunktion tapaukselle. Sen seurauksena voidaan muuttaa summalauseke Riemann–Stieltjes-integraaliksi valitsemalla funktiot  $f(x)$  ja  $\alpha(x)$  sopivasti niin, että yhtälön 5.1 oikea puoli vastaa summalauseketta.

### 5.3 Paloittain jatkuva integraattori

**Lause 5.4.** *Olkoon  $f \in R(\alpha)$  välillä  $[a, b]$  ja olkoon funktio  $\alpha$  määritelty siten, että sillä on  $n < \infty$  epäjatkuvuuspistettä  $x_1, \dots, x_n$  välillä  $[a, b]$  ja olkoon funktiolla  $\alpha$  jatkuva ja Riemann-integroituva derivaattafunktio kaikilla sellaisilla välin  $[a, b]$  osaväleillä, jotka eivät sisällä epäjatkuvuuspisteitä. Olkoot funktiot  $f$  ja  $\alpha$  määritelty siten, että jokaisessa välin  $[a, b]$  pisteessä ainakin toinen funktioista on oikealta jatkuva ja ainakin toinen on vasemmalta jatkuva. Tällöin integraalin arvo on*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \alpha'(x) dx + \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta\alpha(x_k),$$

missä  $x_0 = a$  ja  $x_{n+1} = b$ .

*Todistus.* Olkoot funktiot  $f$  ja  $\alpha$  määritelty siten, että ne toteuttavat lauseen mukaiset alkuehdot integroimisvälillä  $[a, b]$ .

Lähdetään nyt muodostamaan funktiosta  $\alpha$  jatkuvaa funktiota. Tämä voidaan saada aikaiseksi lisäämällä jokaiseen funktion  $\alpha$  jatkuvaan osaväliin  $]x_i, x_{i+1}]$  sellainen vakio  $c_i$ , jonka seurauksena pisteen  $x_i$  vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot saadaan yhtäsuuriksi. Merkitään näin muodostettua funktiota merkinnällä  $\gamma_1$  ja lisättyjen vakioiden muodostamaa funktiota merkinnällä  $\gamma_2$ .

Tarkastellaan nyt funktion  $\gamma_2$  muodostavien vakioiden  $c_i$  arvoja. Ensimmäinen osaväli  $[x_0, x_1]$  on jo  $\alpha$ -funktiossa vasemmalta jatkuva, joten tälle välille lisätty vakio  $c_0 = 0$ .

Toiselle osavälille  $]x_1, x_2]$  lisätty vakio  $c_1$  puolestaan on epäjatkuvuuspisteessä  $x_1$  tapahtuvan hypyn suuruus, mutta erimerkkisenä.  $c_1 = -\Delta\alpha(x_1)$ . Tämän vakion lisäämisen seurauksena saatu funktio on nyt jatkuva pisteessä  $x_1$ .

Kolmannelle osavälille  $]x_2, x_3]$  lisätty vakio  $c_2$  saadaan samanlaisesti alkuperäisessä funktiossa olevan hypyn suuruudesta, mutta tämän lisäksi on vielä lisättävä toiseen osaväliin lisätty vakio, jolloin  $c_2 = c_1 - \Delta\alpha(x_2)$ . Nyt funktio on jatkuva myös pisteessä  $x_2$ .

Yleistetysti osavälille  $]x_i, x_{i+1}]$  lisätty vakio  $c_i$  saadaan kolmannen osavälin tapaisesti vähentämällä edelliselle osavälille lisätystä vakiosta pisteessä  $x_i$  olevan hyppäyskohdan suuruus. Lisätty vakio  $c_i$  on siis muotoa  $c_i = c_{i-1} - \Delta\alpha(x_i)$ .

Koska funktio  $\gamma_1$  saatiin lisäämällä funktioon  $\alpha$  funktio  $\gamma_2$ , voidaan kirjoittaa  $\gamma_1 = \alpha + \gamma_2$ . Tästä saadaan  $\alpha = \gamma_1 - \gamma_2$ .

Koska funktio  $\gamma_2$  on muodostettu jakamalla sen määrittelyjoukko osaväleihin, joissa funktion saama arvo on vakio, on se askelfunktio. Funktio  $\gamma_1$  puolestaan on jatkuva funktio.

Lähdetään nyt laskemaan Riemann–Stieltjes-integraalin arvoa. Koska funktion  $\alpha$  voi ilmoittaa

kahden funktion summana, voidaan kirjoittaa

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d(\gamma_1(x) - \gamma_2(x)).$$

Tämä voidaan lauseen 3.4 mukaisesti jakaa kahdeksi integraaliksi:

$$\int_a^b f(x) d(\gamma_1(x) - \gamma_2(x)) = \int_a^b f(x) d\gamma_1(x) + \int_a^b f(x) d(-\gamma_2(x)). \quad (5.2)$$

Koska lausekkeen 5.2 oikea puoli on Riemann–Stieltjes-integraali askelfunktion suhteen voidaan soveltaa kaavaa 5.3, jolloin:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) d(-\gamma_2(x)) &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta(-\gamma_2(x_k)) = \sum_{k=1}^n f(x_k) (-c_k - (-c_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n -f(x_k) ((c_{k-1} - \Delta\alpha(x_k)) - c_{k-1}) = \sum_{k=1}^n -f(x_k) (-\Delta\alpha(x_k)) \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta\alpha(x_k) \end{aligned}$$

Koska lausekkeen 5.2 vasen puoli on Riemann–Stieltjes-integraali jatkuvan funktion suhteen, voidaan soveltaa kaavaa 5.2, jolloin:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) d\gamma_1(x) &= \int_a^b f(x) \gamma_1'(x) dx = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \gamma_1'(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \frac{d(\alpha(x) + c_k)}{dx} dx = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \alpha'(x) dx \end{aligned}$$

Sijoittamalla edelliset tulokset lausekkeeseen 5.2 saadaan

$$\int_a^b f(x) d\gamma_1(x) + \int_a^b f(x) d(-\gamma_2(x)) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \alpha'(x) dx + \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta\alpha(x_k).$$

Tämä on haluttu lopputulos, joten väite on todistettu.  $\square$

Lause 5.4 antaa hyvän työkalun tavallisimpien Riemann–Stieltjes-integraalien laskemiseen. Sen avulla saadaan helposti laskettua sellaiset Riemann–Stieltjes-integraalit, jotka toteuttavat alkuehdot, jos osavälien Riemann-integraalit ovat helposti laskettavissa. Tämän lauseen tulos on myös hyvin intuitiivinen graafista esitystä tarkasteltaessa.

## 6. YHTEENVETO

Työssä käsiteltiin Riemann–Stieltjes-integraalia. Ensin työssä esiteltiin jaon määritelmä ja joitain sen ominaisuuksia. Tätä määritelmää tarvittiin sekä tavallisen Riemann-integraalin, että Riemann–Stieltjes-integraalin määrittelemiseen. Käytiin myös läpi Riemann-integraalin määritelmä ja graafinen esitys kaksiulotteisessa koordinaatistossa, joita voitiin myöhemmin vertailla Riemann–Stieltjes-integraaliin. Esiteltiin myös differentiaalilaskennan väliarvolause, jota tarvittiin myöhemmin erään tuloksen todistamiseksi.

Riemann–Stieltjes-summa on määritelty hyvin samankaltaisesti Riemann-summan kanssa. Riemann–Stieltjes-summan määritelmän avulla voidaan esittää Riemann–Stieltjes-integraalille määritelmä. Määritelmän avulla Riemann–Stieltjes-integraalille voidaan johtaa useita ominaisuuksia, kuten lineaarisuus sekä integraattorin, että integrandin suhteen, integroimisvälin jako osiin ja osittaisintegroinnin, sekä muuttujanvaihdon kaavat.

Samoin kuin tavalliselle Riemann-integraalille, on myös Riemann–Stieltjes-integraalille olemassa graafinen esitys. Toisin kuin Riemann-integraalin tapauksessa, vaatii Riemann–Stieltjes-integraalin graafinen esitys kuitenkin kolmiulotteisen koordinaatiston käyttämistä. Työssä esiteltiin Riemann–Stieltjes-integraalin graafinen esitys joissain yksinkertaisissa tapauksissa.

Työssä esiteltiin myös Riemann–Stieltjes-integraalien laskemista yksinkertaisimmissa tapauksissa. Ensin käsiteltiin tapausta, jossa integraattorifunktio on jatkuva ja sillä on jatkuva derivaattafunktio. Tämän jälkeen laajennettiin lause koskemaan myös tapauksia joissa integrattorifunktion derivaattafunktio on Riemann-integroituva, mutta ei välttämättä jatkuva. Esiteltiin myös laskukaava tapauksessa, jossa integraattorifunktio on askelfunktio. Lopuksi voitiin yhdistää jatkuvan ja askelfunktion tapaukset yhdeksi lauseeksi paloittain jatkuvalla integraattorifunktiolle.

## LÄHTEET

- [1] T. Apostol. *Mathematical analysis, second edition*. Pearson, 1973, s.140–149, s.163.
- [2] G. L. Bullock. A Geometric Interpretation of the Riemann-Stieltjes Integral. *The American mathematical monthly* 95.5 (1988), 448–455.
- [3] T. Tao. *Analysis I, third edition*. Springer, 2016.
- [4] W. F. Trench. *Introduction to real analysis*. 7. painos. Faculty Authored ja Edited Books & CDs, 2012.