

Joni Pahkuri

**PURISTETUN SAUVAN NURJAHDUK-
KIVOIMAN LASKENTA ELEMENTTIME-
NETELMÄLLÄ**

Kandidaatintyö
Rakennetun ympäristön tiedekunta
Kesäkuu 2023

TIIVISTELMÄ

Joni Pahkuri: Puristetun sauvan nurjahdustukivoiman laskenta elementtimenetelmällä
(Calculation of the buckling brace force of a compressed rod using the finite element method)
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Rakennustekniikan tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2023

Nurjahdus on erityisesti hoikkien rakenteiden kestävyyttä tarkasteltaessa oleellinen ilmiö. Rakenteen nurjahduskestävyyttä voidaan parantaa nurjahdustuennalla. Nurjahdustuen tukireaktion eli nurjahdustukivoiman suuruus voidaan laskea yksinkertaisissa tapauksissa tarkasti analyyttisesti. Tukivoiman likiarvo voidaan myös laskea elementtimenetelmällä. Tässä työssä tutkitaan elementtimenetelmän soveltuvuutta puristetun sauvan nurjahdustukivoiman laskentaan. Tutkimus tehdään vertailemalla elementtimenetelmän ohjelmistolla laskettuja nurjahdustukivoiman arvoja analyyttisesti laskettuihin sekä normien arvoihin.

Työssä tutkitaan sauvarakenteita, jotka eivät ole ideaalisuoria, vaan niillä on tietyt alkukaarevuudet. Alkukaarevien, puristettujen sekä nivelellisesti päistään ja keskeltä jousella tuettujen sauvojen nurjahdustukivoima voidaan laskea analyyttisellä kaavalla. Alkukaarevuuden lisäksi kaavassa huomioidaan puristavan voiman suuruus, sauvan pituus, Eulerin nurjahduskuorma tukemattomalle sauvalle sekä jousen tukijäykkyys. Nurjahdustukivoiman suuruutta voidaan arvioida myös eurokoodien perusteella. Niissä annetaan tukivoimalle jokin laskukaava tai arvioidaan voiman suuruutta rakennustuotteen perusteella.

Nurjahdustukivoiman laskenta elementtimenetelmällä tehtiin Ansys-ohjelmistolla. Ohjelmistolla mallinnettiin kolme terässauvaa, joilla oli eri alkukaarevuudet. Mallinnuksessa sauvat tuettiin toisesta päästä nivelellä, toisesta rullatuella ja keskeltä jousella. Ohjelmistolla laskettiin jousen tukireaktion arvoja kullekin sauvalle useilla eri voiman ja jousen tukijäykkyyden arvoilla. Laskenta tehtiin sekä lineaarisesti että epälineaarisesti.

Tulosten perusteella nurjahdustukivoiman suhde puristavaan voimaan lähestyy tiettyjä arvoja sauvan alkukaarevuuden mukaan. Samoihin tuloksiin päästään sekä lineaarisella että epälineaarisella laskennalla kaikilla puristavan voiman arvoilla. Myös analyyttisen kaavan tulokset lähestyvät samoja arvoja tukijäykkyyden kasvaessa. Pienillä jäykkyyden arvoilla sekä analyyttisen kaavan että epälineaarisen Ansys-laskennan tulokset ovat epäjohdonmukaisia.

Tutkimuksen perusteella elementtimenetelmä on luotettava tapa laskea nurjahdustukivoiman arvo. Tämä voidaan päätellä analyyttisesti laskettujen arvojen ja elementtimenetelmän tulosten identtisuuden perusteella. Tulosten soveltaminen laajemmin vaatisi kuitenkin useampien erilaisten rakenteiden tutkimista.

Avainsanat: nurjahdus, nurjahdustukivoima, elementtimenetelmä, puristettu sauva

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck –ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO	1
2. NURJAHDUS	2
3. NURJAHDUSTUENTA	6
3.1 Tuen jäykkyys ja kestävyys	6
3.2 Nurjahdustukivoima	8
3.2.1 Analyttinen ratkaisu	8
3.2.2 Arvo normeissa	9
3.2.3 Ratkaisu elementtimenetelmällä	10
4. MALLINTAMINEN JA TULOKSET	11
4.1 Lineaarinen laskenta	12
4.2 Epälineaarinen laskenta	13
5. TULOSTEN ANALYSOINTI	17
5.1 Lineaaristen ja epälineaaristen tulosten erot	17
5.2 FEM-tulosten vertailu	18
5.2.1 Analyttisesti laskettuihin arvoihin	18
5.2.2 Normien arvoihin	19
5.3 Virhelähteet ja tulosten luotettavuus	20
6. YHTEENVETO	21
LÄHTEET	22
LIITE A: NURJAHDUSTUKIVOIMAN LASKENNAN TULOKSET	23

1. JOHDANTO

Nurjahdus tarkoittaa pituussuunnassa puristetun rakenteen tasapainon menetystä ja aiheuttaa usein merkittäviä siirtymiä puristavaa voimaa kohtisuorassa suunnassa. Ilmiön voi havaita esimerkiksi viivainta pituussuunnassa puristettaessa. Rakenteen nurjahduskestävyyttä voidaan kasvattaa estämällä rakenteen siirtymät nurjahdustuilla, joihin kohdistuvaa tukireaktiota kutsutaan nurjahdustukivoimaksi. Voiman suuruus voidaan laskea yksinkertaisissa tapauksissa tarkasti analyyttisesti, tai sitä voidaan arvioida esimerkiksi elementtimenetelmällä.

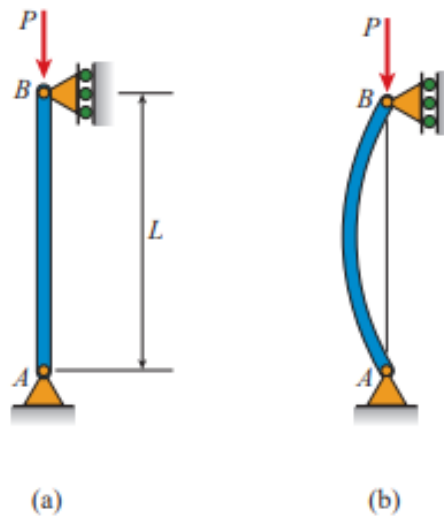
Tämän työn tavoitteena on tutkia, kuinka hyvin elementtimenetelmä soveltuu puristetun suoran sauvan nurjahdustukivoiman laskentaan. Aihetta on hyvä tutkia, sillä monet nykypäivän lujuuslaskennan ohjelmistoista perustuvat elementtimenetelmään ja aiheesta ei juuri löydy aikaisempia tutkimuksia.

Tutkimus suoritetaan vertailemalla elementtimenetelmän ohjelmistolla saatuja nurjahdustukivoiman arvoja analyyttisiin tuloksiin sekä normien arvoihin. Tutkittava rakenne on nurjahdustuettu, pituussuunnassa puristettu terässauva, joka mallinnetaan Ansys-ohjelmistolla. Laskenta tehdään usealla eri nurjahdustuen jäykkyydellä sekä puristavan voiman arvolla. Lisäksi laskenta toistetaan kolmella eri sauvalla, joilla on eri alkukaarevuudet.

Työn aluksi käsitellään nurjahdusta ja sen taustoja. Tämän jälkeen perehdytään nurjahdustuentaan ja nurjahdustukivoimaan sekä sen laskemiseen. Neljännessä luvussa esitellään Ansys-mallinnuksen taustat sekä ohjelmistolla saadut tulokset. Lopuksi ennen yhteenvetoa analysoidaan tulokset.

2. NURJAHDUS

Nurjahdus on erityisesti hoikille rakenteille tyypillinen ilmiö, jossa rakenteen kantavuus pettää taipuman takia kuvan 1 (b) mukaisesti (Gere & Goodno 2012, s. 524). Rakenne on hoikka, mikäli sen poikkileikkausmitat ovat huomattavasti pienempiä kuin sen pituus. Tällaisia rakenteita ovat usein esimerkiksi palkit ja pilarit.



Kuva 1. Puristetun sauvan nurjahdus (Gere & Goodno 2012, s. 524).

Nurjahduksen estämiseksi tulee varmistaa rakenteen tasapainon stabiilius eli tasapainon laatu. Tasapaino on stabiili, mikäli tasapainossa oleva rakennesysteemi palautuu tasapainotilaansa, kun sitä on häiritty esimerkiksi kuormittamalla. Stabiilin vastakohta on labiili, jolloin systeemi vahvistaa häiriön vaikutuksia senkin jälkeen, kun kuormitus on jo loppunut. Indifferentti on näiden rajatila, jolloin systeemi jää kuormituksen jälkeiseen tilaan. (Salmi & Pajunen 2010, s. 271-272)

Havainnollistavana esimerkkinä näistä kolmesta tasapainon laadusta toimii pallo kuopassa, tasaisella maalla ja mäen päällä kuvan 2 mukaisesti. Pallon ollessa kuopassa tasapaino on stabiili. Ulkoisen kuormituksen loputtua se palaa kuopan pohjalle alkuperäiseen tasapainoasemaansa. Labiilissa systeemissä mäen päällä olevaan palloon kohdistuva voima saa sen vierimään alas ja vieriminen jatkuu myös ulkoisen voiman vaikutuksen loputtua. Indifferentissä tasapainossa tasaisella maalla oleva pallo pysähtyy häiriön jälkeen. Pallon pysähdyspaikka on tällöin sen uusi tasapainoasema.

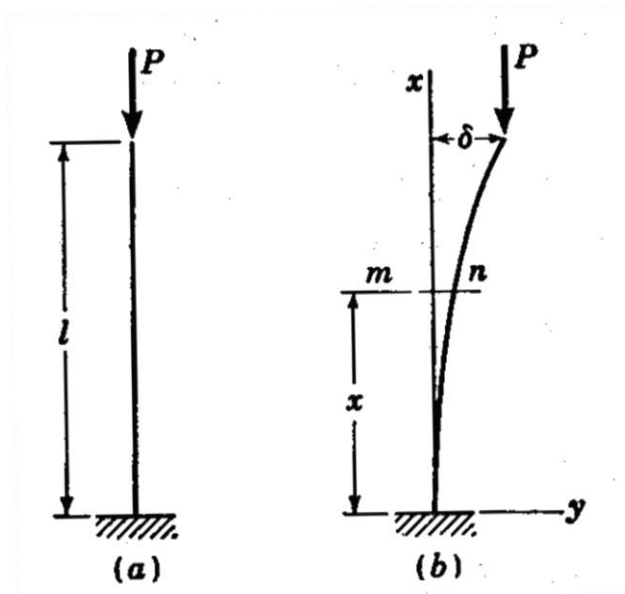


Kuva 2. Pallo stabiilissa, labiilissa ja indifferentissä tasapainossa (Gere & Goodno 2012, s. 527).

Aksiaalisesti kuormitetun sauvan tasapainotila muuttuu stabiilista indifferentiksi kuormituksen arvon ylittäessä tietyn rajan. Tällöin saavutetaan nurjahduskuormitus, ja sauva nurjahtaa. (Salmi & Pajunen 2010, s. 272)

Puristetun suoran sauvan nurjahduskuormitus voidaan laskea sveitsiläisen Leonhard Eulerin (1707–1783) johtamalla kaavalla, jossa kuormituksen suuruuteen vaikuttavat sauvan pituus, materiaali, poikkileikkauksen mitat sekä tuenta. Alla on esitetty kaavan johtaminen seuraten James Geren ja Stephen Timoshenkon teosta *Theory of Elastic Stability* (1963, s. 46–49).

Tutkitaan kuvan 3 mukaista kuormituksen taivuttamaa sauvaa.



Kuva 3. Puristettu sauva alkutilassa ja taipuneena (Timoshenko & Gere 1963, s. 47).

Taivutusmomentin yhtälö sauvalle voidaan esittää seuraavasti:

$$M(x) = -P(\delta - y) \quad (2.1)$$

jossa M on taivutusmomentti, P aksiaalisesti puristava voima, δ sauvan alkukaarevuus ja y sauvan taipuma. Tämän perusteella taivutusmomentin differentiaaliyhtälöksi saadaan

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y), \quad (2.2)$$

jossa E on materiaalin kimmokerroin ja I poikkileikkauksen jäyhyysmomentti. Käyttämällä merkintää

$$k^2 = \frac{P}{EI}, \quad (2.3)$$

edellinen yhtälö 2.2 voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \delta. \quad (2.4)$$

Matematiikasta tiedetään, että edeltävän yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = A \cos(kx) + B \sin(kx) + \delta, \quad (2.5)$$

jossa A ja B ovat reunaehtojen perusteella määritettäviä integrointivakioita. Sauvan alapään tuenta estää y -akselin suuntaiset siirtymät, jolloin saadaan seuraavat reunaehdot:

$$y = \frac{dy}{dx} = 0, \text{ kun } x = 0. \quad (2.6)$$

Ehdot toteutuvat, kun vakioiden A ja B arvot ovat seuraavat:

$$A = -\delta \quad (2.7)$$

ja

$$B = 0. \quad (2.8)$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön 2.5, se saadaan muotoon

$$y = \delta(1 - \cos(kx)). \quad (2.9)$$

Sauvan yläpää on vapaa, joten siellä toteutuu seuraava ehto:

$$y(L) = \delta, \quad (2.10)$$

jossa L on sauvan pituus. Ehto toteutuu, mikäli yhtälö

$$\delta \cos(kL) = 0 \quad (2.11)$$

toteutuu. Tällöin joko δ tai $\cos(kL)$ on nolla. Mikäli δ on nolla, myös taipuma on yhtälön 2.9 perusteella nolla, joten nurjahduksen kannalta tätä tapausta ei ole syytä tutkia. Termin $\cos(kL)$ tulee siis olla nolla. Tämä saavutetaan, kun tulo kL saa seuraavan arvon:

$$kL = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad (2.12)$$

jossa $n = 1, 2, 3 \dots$ Sijoitetaan yhtälöön muuttujan k arvo $\sqrt{P/EI}$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.13)$$

Voiman P ratkaisuksi saadaan

$$P = (4n^2 - 4n + 1) \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.14)$$

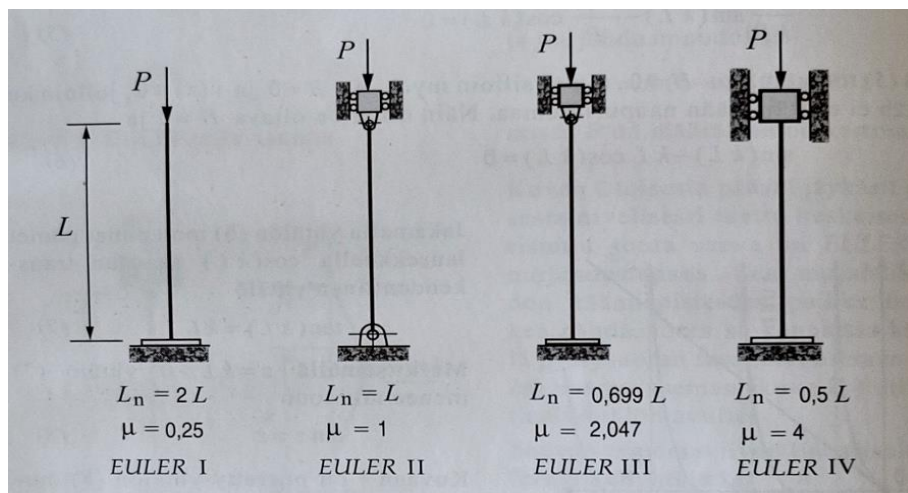
Sijoittamalla tähän muuttujan n arvo 1, saadaan alhaisin voima, jolla sauva nurjahtaa. Kaava saadaan tällöin muotoon

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}, \quad (2.15)$$

jossa P_{cr} on kriittinen kuormitus eli Eulerin nurjahduskuormitus. Tällä kaavalla voidaan laskea kuvan 3 mukaisesti tuetun sauvan nurjahduskuormitus. Symmetrian perusteella kaavasta voidaan johtaa nurjahduskuorman kaava myös päistään nivelellisesti tuetulle sauvalle. Mikäli kuvan 1 (b) sauva jaetaan pituus suunnassa kahteen osaan, molempien puolien huomataan vastaavan edeltävän esimerkin sauvaa. Tällöin yhtälössä 2.15 pituuden L tilalle voidaan sijoittaa $L/2$ jolloin se saadaan muotoon

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L_n^2}, \quad (2.16)$$

jossa L_n on sauvan nurjahduspituus. Tällä kaavalla voidaan laskea nurjahduskuorma sauvoille eri tuennoilla käyttämällä kuvan 4 mukaisia nurjahduspituuksia.



Kuva 4. Eulerin neljä nurjahdustapausta (Salmi & Pajunen 2010, s. 280).

3. NURJAHDUSTUENTA

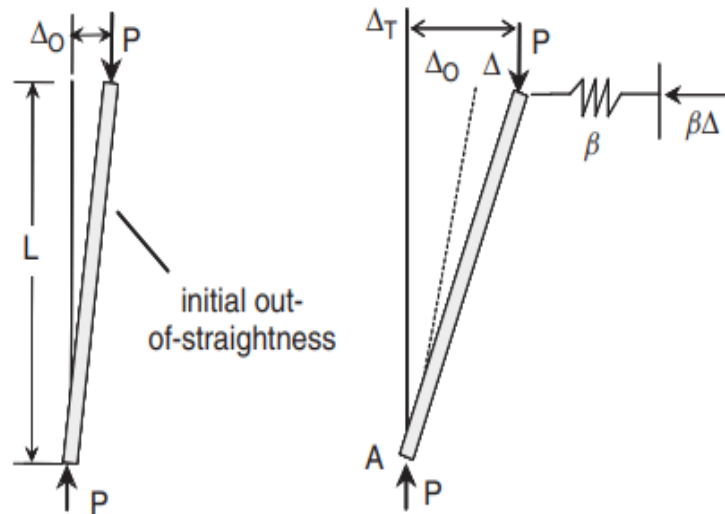
Rakenteen nurjahduskestävyyttä voidaan parantaa monin eri tavoin, kuten rakenteen nurjahduspituutta lyhentämällä. Tämä voidaan todeta Eulerin nurjahduskuorman kaavasta 2.16, jossa pienempi nurjahduspituus tarkoittaa suurempaa vaadittua nurjahduskuormaa. Tähän perustuu nurjahdustuenta. Rakenteen siirtymät estetään nurjahdukselle alttiiseen suuntaan.

3.1 Tuen jäykkyys ja kestävyys

Toimivan nurjahdustuen tulee olla tarpeeksi kestävä ja jäykkä. Kestävyys tarkoittaa tuen kykyä kestää rasisusta hajoamatta ja jäykkyys tuen kykyä kestää kuormitusta siirtymättä.

Elastisen nurjahdustuen jäykkyyden lisääminen kasvattaa nurjahdukseen vaadittavan kuorman suuruutta tiettyyn pisteeseen asti. Arvo, jonka jälkeen jäykkyyden lisääminen ei enää kasvata nurjahduskuormaa on $16 N_E/L$, jossa N_E on Eulerin nurjahduskuorma nurjahdustukemattomalle sauvalle ja L tuettavan rakenteen pituus. Tällä ja suuremmilla jäykkyyden arvoilla elastinen tuki vastaa täysin jäykkää tukea. (Timoshenko & Gere 1963, s. 70–73)

Johdetaan seuraavaksi kaavat nurjahdustuen jäykkyydelle ja kestävyydelle seuraten Ronald Ziemianin teosta *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures* (2010, s. 533). Ziemianin esittelemä kaavan johtaminen pohjautuu George Winterin (1907–1982) teokseen *Lateral Bracing of Columns and Beams* (1960 s. 811–812), mutta on selkeämpi.



Kuva 5. Yläpäästään jousella tuettu puristettu sauva (Ziemian 2010, s. 533).

Tarkastellaan kuvan 5 mukaista yläpäästään jousella tuettua sauvaa, jonka jäykkyys on β . Jousituki kuvastaa tässä tapauksessa nurjahdustukea. Otetaan sauvan alkukaarevuus huomioon. Momenttitasapainoyhtälö pisteen A suhteen on tällöin

$$\beta(\Delta_T - \Delta_0)L - P\Delta_T = 0, \quad (3.1)$$

jossa Δ on sauvan yläpään siirtymä, Δ_0 sauvan alkukaarevuus ja Δ_T näiden summa. P on sauvaa puristava voima. Yhtälöstä saadaan jäykkyyden ratkaisuksi

$$\beta = \frac{P\Delta_T}{(\Delta_T - \Delta_0)L}. \quad (3.2)$$

Mikäli sauva on ideaalisuora ($\Delta_0 = 0$), jäykkyyden kaava saadaan muotoon

$$\beta = \frac{P}{L}. \quad (3.3)$$

Nurjahdustuen vaadittu kestävyys vastaa tukireaktion $\beta\Delta$ arvoa. Tämä voidaan laskea, kun tiedetään tai arvioidaan siirtymän Δ ja alkukaarevuuden Δ_0 arvot. (Winter 1960, s. 812)

3.2 Nurjahdustukivoima

Nurjahdustuen tukireaktiota kutsutaan nurjahdustukivoimaksi. Tämän voiman suuruus on tärkeää tietää nurjahdustukia suunniteltaessa.

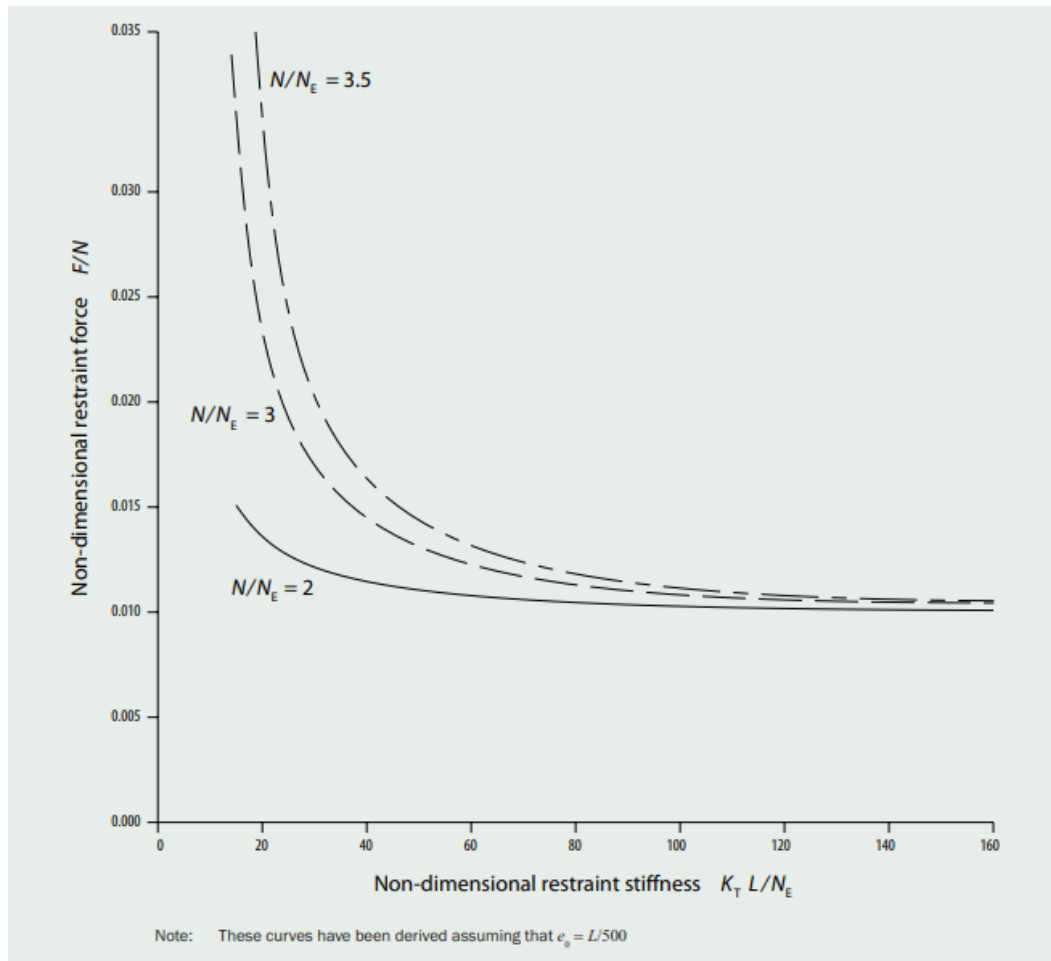
3.2.1 Analyyttinen ratkaisu

Edellisen luvun mukaisesti nurjahdustuen tukireaktion arvo saadaan tuen jäykkyyden ja siirtymän tulona. Todellisuudessa kuitenkin harvoin tiedetään rakenteen siirtymiä tietämättä siihen kohdistuvia rasituksia, joten nurjahdustukivoiman laskenta esimerkiksi sauvan normaalivoiman avulla on suoraviivaisempaa.

Seuraavalla kaavalla voidaan laskea nurjahdustukivoiman ja normaalivoiman suhde päistään nivelillä sekä keskeltä jousella tuetulle sauvalle, jolla on alkukaarevuus e_0 .

$$\frac{F}{N} = \frac{e_0/L}{\left(\frac{N_E}{N} - 1\right) \left(\frac{N}{K_T L} + \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{N}{N_E}}} \tan \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_E}} \right) - \frac{1}{4} \right)} \quad (3.4)$$

Kaavassa F on nurjahdustukivoima, N normaalivoima, L sauvan pituus, N_E Eulerin nurjahduskuorma keskeltä tukemattomalle sauvalle ja K_T jousituen jäykkyys. Kaava on johdettu useiden eri tutkimusten perusteella, joissa tutkittiin keskeltä elastisesti tuettuja kaarevia sauvoja. (Gardner 2011 s. 20)



Kuva 6. Nurjahdustukivoiman ja tukijäykkyyden suhde kaavalla 3.4 (Gardner 2011 s. 20).

Kuvassa 6 on kuvaaja piirrettynä kaavan 3.4 perusteella, jossa sauvan alkukaarevuuden e_0 suuruutena on käytetty arvoa $L/500$ teräseurokoodin (SFS-EN 1993-1-1 2005, s. 38) mukaisesti. Sekä tässä, että tulosluvun kuvaajissa on vaak akselin yksikkönä dimensioton jäykkyys, joka saadaan jakamalla tukijäykkyyden ja sauvan pituuden tulo Eulerin nurjahduskuormalla. Dimensiottoman jäykkyyden käyttö helpottaa tulosten vertailua erilaisten rakenteiden välillä. Kuvaajasta huomataan tukivoiman ja puristavan voiman suhteen lähestyvän 1 % arvoa, kun tukijäykkyys kasvaa.

3.2.2 Arvo normeissa

Eri materiaaleihin keskittyvissä suunnitteluohjeissa tukivoiman suuruudelle annetaan hieman toisistaan poikkeavia arvoja. Esimerkiksi puurakenteiden suunnittelun eurokoodissa (SFS-EN 1995-1-1 2014, s. 94–95) arvio on rakennustuotteen mukaan 1–2 % aksiaalisesti puristavasta voimasta.

Teräsrakenteiden suunnittelun eurokoodin (SFS-EN 1993-1-1 2005, s. 38) mukaan jäykistysjärjestelmien (esim. nurjahdustuki) sauvaan kohdistama kuorma voidaan laskea kaavalla

$$q_d = \sum N_{Ed} \frac{8(e_0 + \delta_q)}{L^2}, \quad (3.5)$$

jossa N_{Ed} on sauvaan kuormittava aksiaalinen normaalivoima, e_0 alkukaarevuus, δ_q tuen taipuma tasossaan ja L jänneväli. Tarkastellaan kuorman q_d suuruutta tapauksessa, jossa tuki on jäykkä, eli taipuma δ_q on nolla. Teräseurokoodin perusteella voidaan sauvan alkukaarevuuden arvona käyttää $L/500$. Tällöin nurjahdustukivoimaksi saadaan

$$q_d = \sum N_E \frac{8L}{500L^2}. \quad (3.6)$$

Sieventämällä ja muuttamalla jakautuneen kuorman arvo resultantiksi kertomalla jännevälillä L saadaan

$$R_{q_d} = \sum N_{Ed} \frac{8}{500}, \quad (3.7)$$

jolloin nurjahdustukeen kohdistuvan voimaresultantin suuruudeksi saadaan 1,6 % sauvaan aksiaalisesti puristavasta voimasta.

3.2.3 Ratkaisu elementtimenelmällä

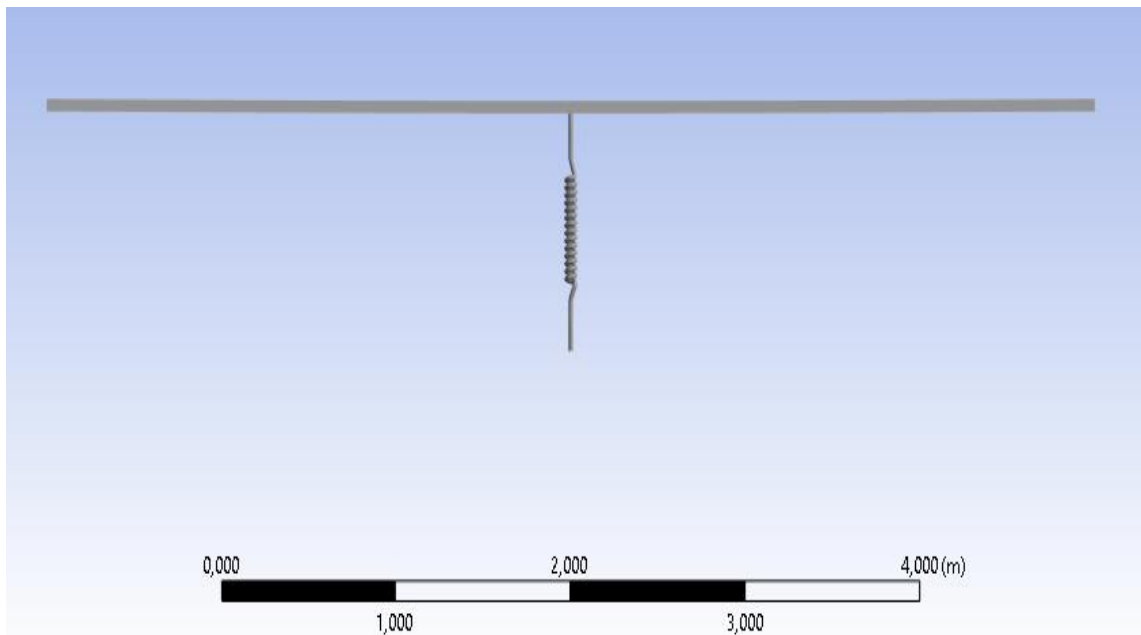
Elementtimenetelmä (Finite Element Method, FEM) on numeerinen analysointimenetelmä fysiikan ongelmille. Menetelmässä tarkasteltava määrittelyalue jaetaan elementteiksi kutsuttuihin osiin. Ratkaistavan ongelman funktiolle käytetään kunkin elementin alueella tavallisesti polynomimuotoista approksimaatiota. (Aalto s. 192) Rakennustekniikassa määrittelyalue on usein yksittäinen rakenne, kuten palkki, ja ratkaistavana voi olla esimerkiksi sen taipuma. Elementtimenetelmä on likimenetelmä, jonka tuloksen tarkkuus yleensä kasvaa elementtimäärän kasvaessa.

Nurjahdustukivoiman arvo voidaan laskea elementtimenelmällä sekä käsin että laskentaohjelmistojen avulla. Tässä työssä keskitytään laskentaan ohjelmistolla.

4. MALLINTAMINEN JA TULOKSET

Mallinnetaan toisesta päästään nivelellisesti, toisesta rullatuella ja keskeltä jousella tuettu sauva, joka on puristettu pituussunnassa. Lasketaan jousen tukivoiman suuruus eri jäykkyyden ja sauvan alkukaarevuuden arvoilla. Mallinnuksessa ja laskennassa käytetään muun muassa rakenteiden mekaniikan ongelmien mallintamiseen ja laskentaan soveltuvaa Ansys-ohjelmistoa, jonka laskenta perustuu elementtimenetelmään. Mallinnuksen tulokset esitellään tässä luvussa pääosin kuvaajien avulla, mutta tarkemmat numeroarvot ovat taulukoituna liitteissä.

Mallinnettava rakenne on kuvan 7 mukainen 6 m pitkä sauva, jonka neliönmuotoisen poikkileikkauksen sivun pituus on 50 mm. Materiaalina käytetään Ansyksen rakenneterästä. Tuet mallinnetaan ohjelmassa niin, että sauvan vasemman päänsiirtymät on estetty kaikkiin suuntiin ja oikeassa päässä vain pituussuuntainen siirtymä on sallittu. Lisäksi vasemmassa päässä kiertymä x-akselin (pituussuunnan) suhteen on estetty. Keskellä olevan jousen pituus on 1 m, ja se on tuettu alhaalta jäykästi. Puristava voima asetetaan vaikuttamaan sauvan oikean päänsiirtymän keskikohtaan.



Kuva 7. Mallinnettava terässauva. Kuvankaappaus Ansys-ohjelmistosta.

Mallinnuksessa tutkitaan kolmea sauvaa, joilla on eri alkukaarevuudet. Alkukaarevuus mallinnetaan sinimuotoisena. Valitaan sauvojen alkukaarevuuksien arvoiksi L/250, L/500 ja L/750. Näin saadaan tutkittua teräseurokoodin (SFS-EN 1993-1-1 2005, s. 38) mukaista kaarevuutta L/500 ja siitä poikkeavia arvoja.

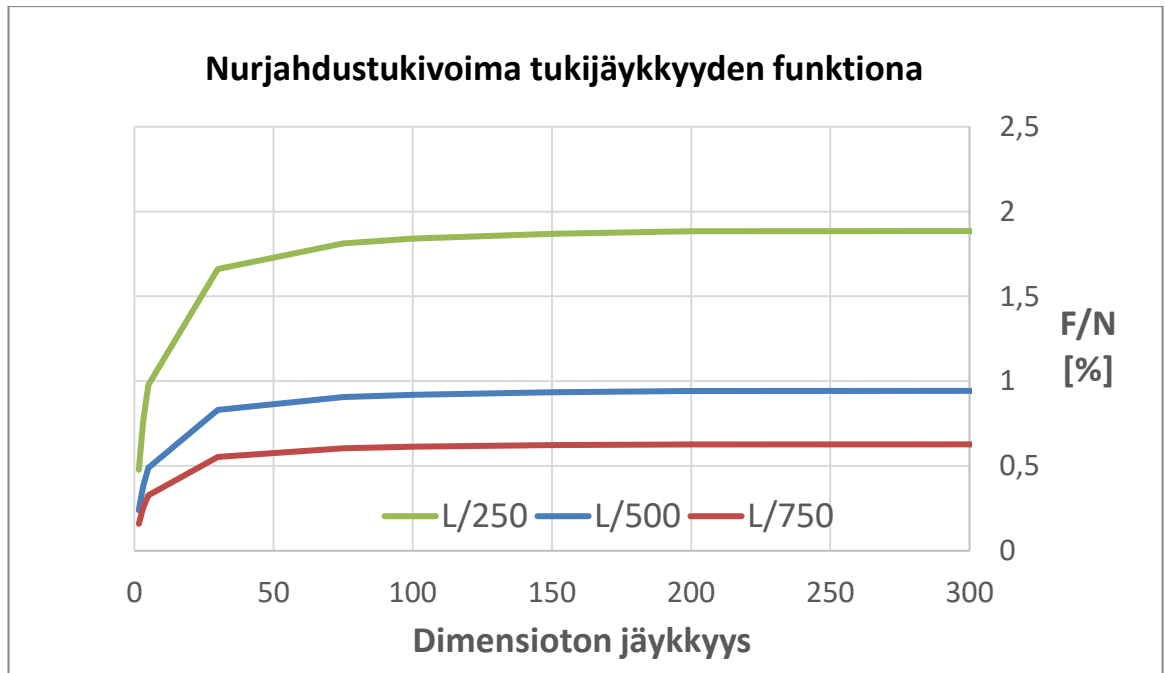
Jokaisen sauvan tapauksessa tutkitaan aksiaalisen puristavan voiman ja nurjahdustukivoiman suhdetta eri tukijäykkyyksillä. Laskennan jälkeen taulukoidaan sauvoja kuormittanut voima, tukijäykkyys sekä nurjahdustukivoima.

Laskenta suoritetaan sekä lineaarisesti että epälineaarisesti. Epälineaarinen laskenta huomioi rasitusten laskennassa rakenteen muodonmuutokset, jolloin saadaan usein tarkempia tuloksia. Laskennassa käytetään kvadraattisia interpolaatiofunktioita ja elementtikokoa 0,1 m.

Tulosten vertailun helpottamiseksi puristavan voiman arvoina käytetään Eulerin kaavan 2.16 mukaisen keskeltä tukemattoman sauvan nurjahduskuorman kerrannaisia kuvan 6 tapaan. Eulerin nurjahduskuorma N_E mallinnettavalle rakenteelle ilman tukea on 30 kN, kun teräksen kimmomoduuli on 210 GPa. Tukijäykkyyden alkuarvona käytetään 10 % teoreettisesta minimijäykkyydestä $16 N_E/L$ eli 8 kN/m. Jäykkyyden arvoa kasvatetaan niin pitkään, kun se selvästi vaikuttaa tuloksiin.

4.1 Lineaarinen laskenta

Linearisessa laskennassa kuormitukset ja rasitukset kasvavat samassa suhteessa, joten laskennassa riittää vain yksi puristavan voiman arvo. Kokeilun vuoksi yhdellä sauvalla ($L/500$) lineaarinen mallinnus kuitenkin tehdään usealla eri voiman arvolla. Nämä tulokset ovat nähtävissä liitteen A taulukossa 5. Taulukosta nähdään, että puristavan voiman suuruus ei muuta laskennan tuloksia. Muut lineaarisen laskennan tulokset ovat alla olevassa kuvaajassa, jossa on esitetty tukivoiman F osuus puristavasta voimasta N kullekin sauvalle jäykkyyden funktiona. Puristavan voiman suuruus on 3-kertainen Eulerin kaavan mukaiseen keskeltä tukemattoman sauvan nurjahduskuormaan.



Kuva 8. Lineaarisen laskennan tulokset puristavalla voimalla $3 N_E$.

Kuvaajasta huomataan, että tukivoiman arvo kasvaa aluksi kaikilla sauvoilla mutta alkaa lopulta lähestymään tiettyä arvoa.

4.2 Epälineaarinen laskenta

Nyt laskenta tehdään neljällä eri voiman arvolla. Alla on taulukoituna voimalla N_E eli 30 kN saadut tulokset.

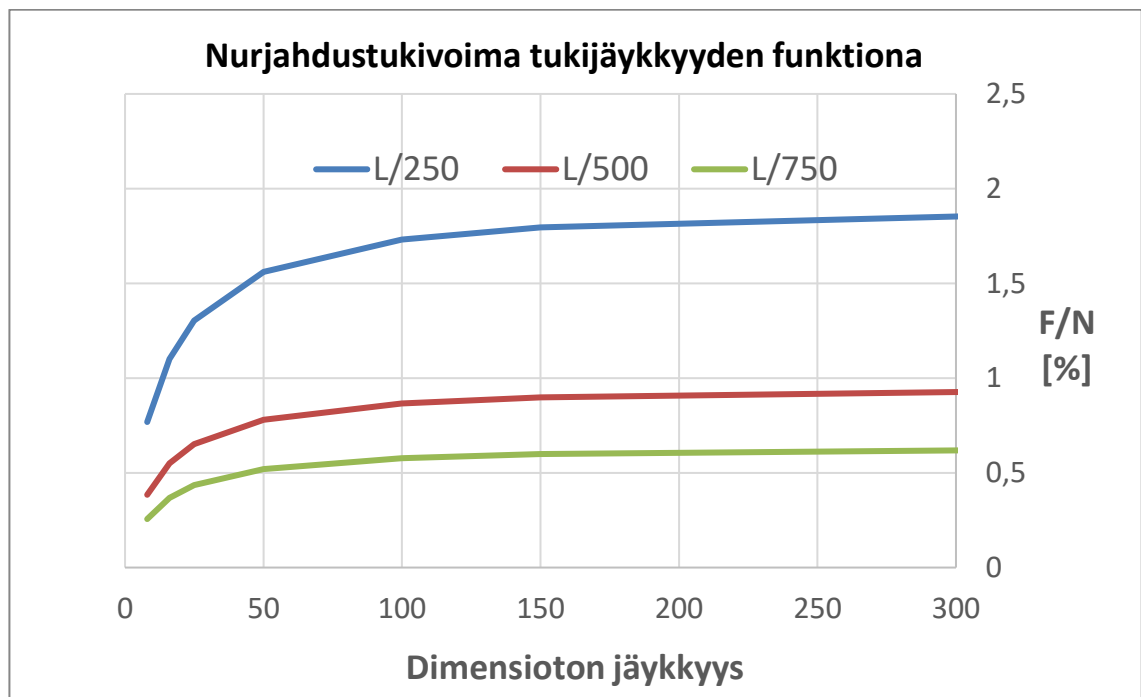
Taulukko 1. Epälineaarisen laskennan tulokset voimalla N_E .

Tukijäykkyys		F/N [%]		
[kN/m]	Dimensioton	$N/N_E = 1$		
		L/250	L/500	L/750
8	1,6	1,96	0,98	0,65
100	20	1,96	0,98	0,65
500	100	1,96	0,98	0,65
1000	200	1,96	0,98	0,65
20000	4000	1,96	0,98	0,65

Huomataan, että Eulerin nurjahduskuormalla tukivoiman osuus puristavasta voimasta säilyy vakiona tukijäykkyyden suhteen.

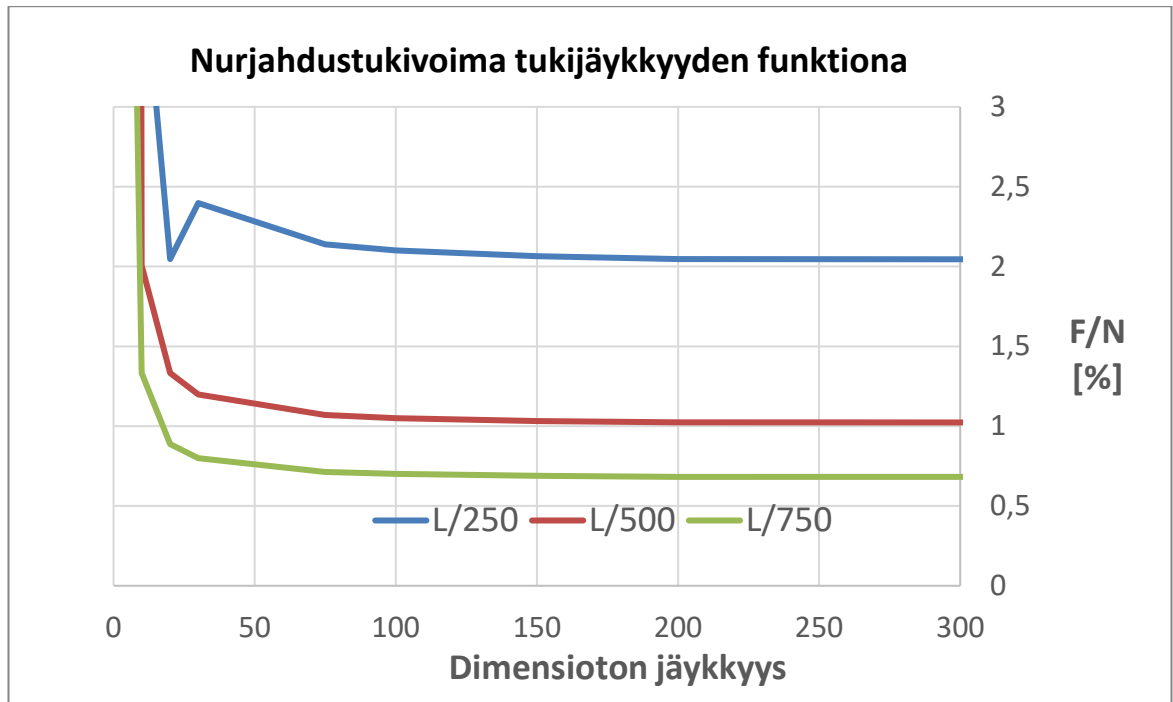
Muilla voiman arvoilla saadut tulokset on selkeämpi esittää kuvaajissa, joissa on lineaaristen tulosten tapaan esitetty tukivoiman osuus puristavasta voimasta kullekin sauvalle jäykkyyden funktiona. Epälineaarisen laskennan tuloksissa ilmeni pienillä tukijäykkyyden arvoilla hyvin epäjohdonmukaisia arvoja, jotka on jätetty selkeyden vuoksi pois kuvaajista. Kaikki arvot ovat nähtävissä liitteen A taulukoissa 6 ja 7. Syytä epäjohdonmukaisiin arvoihin käsitellään seuraavassa luvussa.

Ensimmäisessä kuvaajassa on tulokset voimalla $0,5 N_E$.



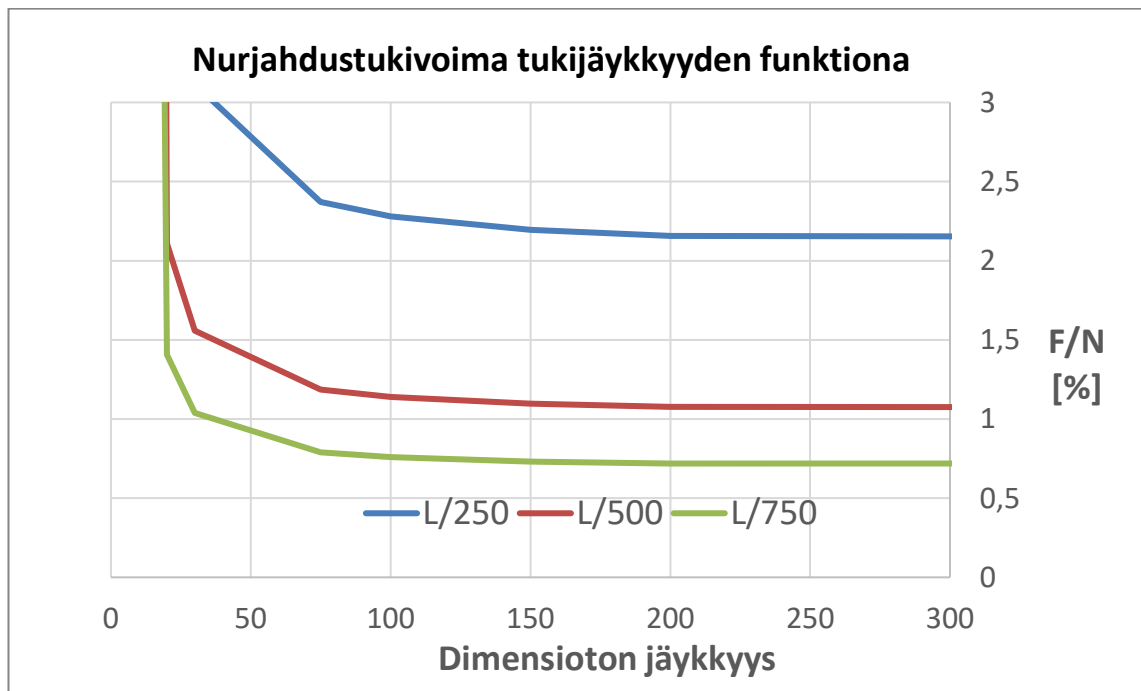
Kuva 6. Epälineaarisen laskennan tulokset puristavalla voimalla $0,5 N_E$.

Alla on kuvaaja voimalla $2 N_E$ saaduista tuloksista.



Kuva 7. Epälineaarisen laskennan tulokset puristavalla voimalla $2 N_E$.

Viimeisenä on kuvaaja tuloksista voimalla $3 N_E$.



Kuva 8. Epälineaarisen laskennan tulokset puristavalla voimalla $3 N_E$.

Lineaaristen tulosten tapaan myös epälineaaristen tulosten kuvaajista nähdään, että tukijäykkyyden kasvaessa tukivoima lähestyy tiettyä arvoa puristavan voiman suuruuden mukaan. Näiden keskiarvot neljän eri puristavan voiman suhteen alkukaarevuuksille L/250, L/500 ja L/750 ovat 2 %, 1 % ja 0,68 %.

5. TULOSTEN ANALYSOINTI

Sekä lineaarisen että epälineaarisen laskennan tuloksien kuvaajista nähdään, että nurjahdustukivoiman osuus puristavasta voimasta lähestyy jotakin tiettyä arvoa tukijäykkyyden kasvaessa. Myös alkukaarevuuden vaikutus tukivoimaan on selkeästi nähtävissä. Tämä oli oletettavaa, sillä kaarevuuden suuruus vaikuttaa puristavan voiman aiheuttamaan taivutusmomenttiin. Tulosten perusteella sauvan kaarevuuden ja nurjahdustukivoiman arvolla on lineaarinen yhteys. Tässä luvussa Ansys-ohjelmistolla saatuihin tuloksiin viitataan FEM-tuloksina.

5.1 Lineaaristen ja epälineaaristen tulosten erot

Molemmilla laskentavoilla tukivoiman suuruudet lähestyvät tukijäykkyyden kasvaessa lopulta samoja arvoja, mutta pienillä jäykkyyden arvoilla (0–50) tulokset eroavat selvästi. Lineaarisesti lasketut tukivoiman arvot (kuva 8) alkavat nolasta ja kasvavat jäykkyyden lisäyksen myötä, kun taas epälineaarisesti saatujen tulosten kuvaajien (kuvat 9, 10 ja 11) perusteella tukivoiman arvo laskee jäykkyyden funktiona. Poikkeuksena tähän on voimalla $0,5 N_E$ epälineaarisesti lasketut tulokset (kuva 9), joiden kuvaajat ovat lähes identtisiä lineaaristen tulosten kanssa. Näin pienellä voimalla sauvaan ei synny tarpeeksi suuria muodonmuutoksia, jotta niillä olisi vaikutusta tuloksiin.

Lineaarisesti lasketun tukivoiman arvon nousu jäykkyyden funktiona on johdonmukaista, sillä kuten luvussa 3 esiteltiin, nurjahdustuen tukireaktio voidaan laskea siirtymän ja tukijäykkyyden tulona, jolloin tukijäykkyyden kasvu kasvattaa myös tukireaktiota. Tämän perusteella voidaan myös selittää, miksi tulokset alkavat lopulta lähestyä tiettyä arvoa, vaikka tukijäykkyys kasvaa. Riittävän suurella jäykkyyden arvolla tukireaktion laskennan toinen tekijä eli siirtymä alkaa lähestyä nollaa, jolloin tulon arvo ei enää juurikaan kasva.

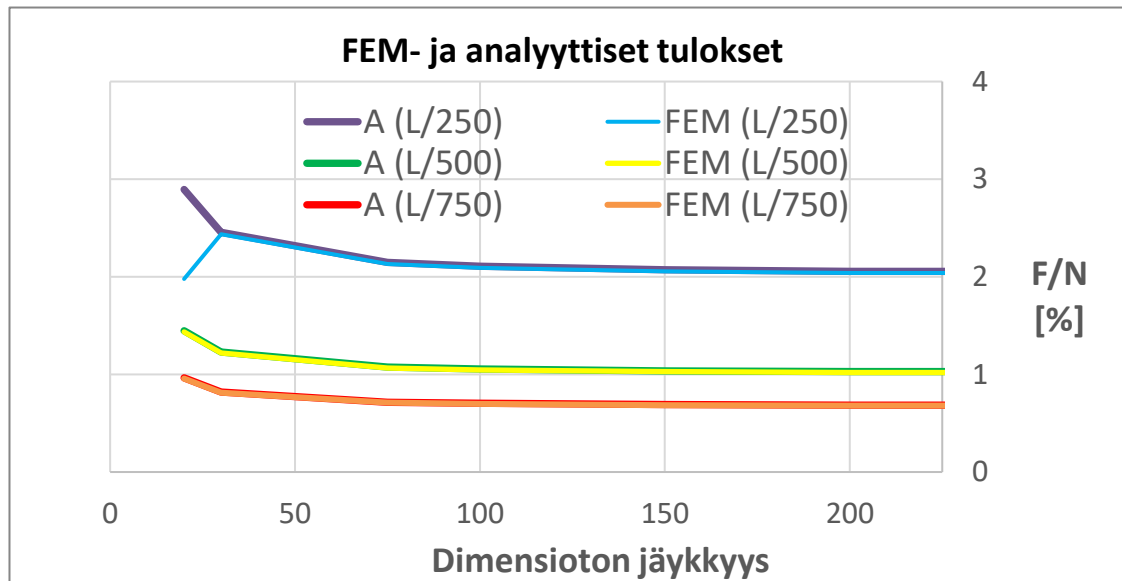
Epälineaaristen tulosten kuvaajien jyrkkä lasku pienillä jäykkyyden arvoilla selittyy sauvojen äärimmäisillä muodonmuutoksilla. Näitä ei tapahdu vielä voimalla $0,5 N_E$, mutta kun puristavaa voimaa kasvatetaan 2- tai 3-kertaiseksi Eulerin nurjahduskuormaan nähtynä, taipuma esimerkiksi mallinnuksen mukaisella 12 mm ($L/500$) kaarevalla sauvalla on jo useita metrejä. Näin suuret muodonmuutokset aiheuttavat häiriöitä tuloksiin, jolloin hyvin pienillä jäykkyyden arvoilla tukivoiman arvoksi voidaan saada esimerkiksi 59 % tai 199 % puristavasta voimasta, kuten liitteen A taulukosta 7 nähdään. Tällaiset muodonmuutokset eivät kuitenkaan oikeasti ole mahdollisia, sillä materiaali murtuisi.

Ongelma tulee esiin juuri epälinearisessa laskennassa, sillä kuten aiemmin mainittu, se huomioi rasiusten laskennassa rakenteen muodonmuutokset. Linearisella analyysillä rasiukset samoilla kuormituksilla ovat pienempiä. Rasiusten epälineaarinen kasvu selittää myös pienet erot, joita tukivoimien arvoissa esiintyy, kun puristavan voiman suuruus muuttuu.

5.2 FEM-tulosten vertailu

5.2.1 Analyytisesti laskettuihin arvoihin

Vertaillaan epälineaarisen laskennan tuloksia analyttisen kaavan 3.4 antamiin arvoihin. Vertailun helpottamiseksi kuvassa 12 on piirrettyä kuvaajat sekä Ansys-ohjelmistolla saaduista tuloksista että analyttisesti lasketuista arvoista. Kuvaajat on piirretty puristavien voimien $0,5 N_E$, $2 N_E$ ja $3 N_E$ aiheuttamien nurjahdustukivoimien keskiarvoista kullekin sauvalle. Tulokset voimalla N_E on jätetty kuvaajasta pois, sillä kyseisellä voiman arvolla laskiessa analyttisen kaavan nimittäjä saa arvon nolla ja mitään tuloksia ei voida laskea.



Kuva 12. Ansys-ohjelmiston (FEM) ja nurjahdustukivoiman analyttisen kaavan (A) antamat tulokset samassa kuvaajassa. Kuvaajat on piirretty eri puristavien voimien tulosten keskiarvoista.

Kuvaajista nähdään, että analyttisesti ja Ansys-ohjelmistolla lasketut tulokset ovat lähes identtiset, kun dimensioton tukijäykkyys ylittää arvon 20. Pieni ero ylimmissä kuvaajissa jäykkyydellä 20–30 johtuu todennäköisesti aiemmin esitellystä häiriöstä Ansys-ohjelman laskennassa pienillä tukijäykkyyksillä. Tulokset pienemmillä tukijäykkyyden arvoilla kuin

20 ovat jo hyvin erisuuruisia, kuten taulukosta 2 nähdään. Taulukossa on aiemmin mainittujen kolmen eri puristavan voiman tulosten keskiarvot L/500 kaarevalle sauvalle.

Taulukko 2. Eri puristavien voimien analyyttisten ja FEM-tulosten keskiarvot pienillä tukijäykkyyksillä.

Tukijäykkyys		F/N [%]	
[kN/m]	Dimensioton	Analyyttinen	FEM
8	1,6	-0,33	259,89
16	3,2	-1,11	46,63
25	5	-93,10	56,78
50	10	-15,91	22,16
100	20	1,73	1,72

Myös analyyttisen kaavan antamat tulokset ovat pienillä jäykkyyden arvoilla epäjohtonukaisia. Esimerkiksi nurjahdustukivoiman ja puristavan voiman suhde ei todellisuudessa voi olla negatiivinen. Negatiiviset arvot saattavat johtua esimerkiksi siitä, että analyyttisen kaavan mukaan jouseen aiheutuisi jostain syystä venymää pienillä jäykkyyden arvoilla.

5.2.2 Normien arvoihin

Mallinnettu rakenne oli terässauva, joten vertaillaan FEM-tuloksia teräseurokoodin (SFS-EN 1993-1-1 2005) antamiin arvoihin nurjahdustukivoimalle. Luvussa 3 esiteltiin kaava 3.4, jolla voidaan laskea tukivoiman arvo terässauvalle, jolla on alkukaarevuus e_0 . Alla olevassa taulukossa on tällä kaavalla lasketut tukivoiman arvot mallinnuksen sauvoille sekä vertailun vuoksi Ansys-ohjelmalla saadut tukivoiman likiarvot.

Taulukko 3. Teräseurokoodin laskukaavan (SFS-EN 1993-1-1 2005, s. 38) mukaiset nurjahdustukivoiman arvot ja FEM-tulokset.

Alkukaarevuus	F/N [%]	
	FEM	Eurokoodi
L/250	2	3,2
L/500	1	1,6
L/750	0,7	1,1

Eurokoodin laskukaavalla saadut arvot ovat huomattavasti suurempia. Tämä todennäköisesti johtuu eurokoodin arvoihin lisäystä varmuudesta. Normeissa rasitukset oletetaan yleensä suuremmiksi kuin ne oikeasti ovat. Eroja arvoissa selittää myös se, että teräseurokoodin tukivoimaa käsittelevässä kappaleessa (SFS-EN 1993-1-1 2005, s. 38) ei käsitellä mitään tiettyä tämän työn mallinnuksen kaltaista rakennetta, vaan jäykistysjärjestelmiä yleisesti. Eurokoodin laskukaava ei myöskään huomioi kaikkia nurjahdukseen vaikuttavia tekijöitä, kuten rakenteen poikkileikkausta tai tuentaa.

5.3 Virhelähteet ja tulosten luotettavuus

Mallinnuksen tulosten oikeellisuuteen vaikuttaa oleellisesti se, saadaanko rakenteen ominaisuudet, kuten sen mitat, materiaali ja tuenta mallinnettua halutulla tavalla. Virheitä on helppo tehdä, sillä Ansyksen kaltaisessa ohjelmistossa on lukemattomia eri asetuksia ja vaihtoehtoja esimerkiksi rakenteen tuille ja rasituksille. Lisäksi mallinnuksen tulosten kirjaamisessa on virheen mahdollisuus, sillä laskennassa täytyy kirjata ja muuttaa hyvin monia eri numeroarvoja. Myös tulosten vertailussa voi tulla virheellisiä johtopäätöksiä, mikäli ei varmisteta, että ohjelmistolla ja analyyttisellä kaavalla todella lasketaan samaa asiaa.

FEM-tuloksia vertailtaessa analyyttisiin arvoihin tulee varmistaa, että analyyttinen kaava soveltuu juuri tutkittavan kaltaiselle rakenteelle. Esimerkiksi työssä käytetty nurjahdustukivoiman analyyttinen kaava on tarkoitettu päistään nivelellisesti tuetulle sauvalle, jolloin sauvan molempien päiden siirtymät on täysin estetty. Mallinnuksessa kuitenkin sauvan toisen pään siirtymiä ei ollut estetty pituussunnassa. Tästä voi syntyä eroja arvoihin.

FEM-laskennan tuloksista saisi todennäköisesti tarkempia pienemmällä elementtikoolla. Vaikutus olisi kuitenkin luultavasti pieni, sillä jäykkyyden kasvattamisen vaikutus tukivoimaan oli jo nykyisellä elementtiverkon tiheydellä tietyn pisteen jälkeen hyvin vähäistä.

Tuloksia voidaan pitää luotettavina, sillä ne vastaavat lähes täysin analyyttisen ratkaisun arvoja ja ovat suuruusluokaltaan lähellä normien arvoja. Tutkimuksesta saisi kuitenkin kattavamman ja luotettavamman mallintamalla useampia rakenteita eri mitoilla, materiaaleilla ja tuennalla. Erityisesti useampia alkukaarevuuden arvoja olisi hyvä tutkia. Myös nurjahdustukien määrää voisi muuttaa ja mallinnuksen voisi tehdä kaksiuotteisena.

6. YHTEENVETO

Työn tavoitteena oli tutkia elementtimenetelmän soveltuvuutta nurjahdustukivoiman laskentaan puristetun sauvan tapauksessa. Tutkimus tehtiin vertailemalla elementtimenetelmää hyödyntävän ohjelmiston (Ansys) laskentatuloksia ja nurjahdustukivoiman analyttisellä kaavalla sekä normeista saatuja arvoja.

Nurjahdukseen liittyen perehdyttiin ilmiön taustoihin, nurjahdustuentaan ja nurjahdustukivoimaan. Teorialuvuissa esiteltiin myös kaava nurjahdustukivoiman analyttiseen laskentaan sekä käsiteltiin eurokoodien antamia arvoja nurjahdustukivoimalle.

Mallinnusosiossa nurjahdustukivoiman arvoja laskettiin Ansys-ohjelmalla kolmelle eri puristetulle terässauvalle, joilla oli eri alkukaarevuudet. Sauvat olivat tuettuna toisesta päästä nivelellä, toisesta rullatuella ja keskeltä jousella. Laskenta suoritettiin useilla erisuuruuksilla voimilla sekä eri jousen jäykkyyksillä.

Tuloksista tutkittiin tukijäykkyyden ja sauvan alkukaarevuuden vaikutusta nurjahdustukivoimaan. Huomattiin, että tukijäykkyyden kasvaessa nurjahdustukivoima lähestyi samoja arvoja sekä elementtimenetelmän ohjelmistolla että analyttisesti laskiessa. Molemmilla laskentatavoilla saatiin kuitenkin epäjohdonmukaisia tuloksia, mikäli tukijäykkyys oli pieni ja sauvaa puristava voima suuri (pois lukien Ansyksen lineaarisen laskennan tulokset). Teräseurokoodin perusteella tukivoimalle saatiin noin 60 % suurempia kuin arvoja elementtimenetelmällä tai analyttisesti laskettaessa. Lisäksi tulosten perusteella sauvan kaarevuuden ja nurjahdustukivoiman arvolla havaittiin lineaarinen yhteys.

Analyttisesti laskettujen arvojen ja elementtimenetelmän tulosten identtisuuden perusteella elementtimenetelmää voidaan pitää soveltuvana tapana laskea nurjahdustukivoiman arvo. Laskennassa tulee kuitenkin käyttää tarpeeksi suurta tukijäykkyyden arvoa. Tuloksia ei myöskään voi soveltaa kaikille rakenteille ilman lisätutkimuksia, sillä tässä työssä tutkittiin vain hyvin yksinkertaista rakennetta.

LÄHTEET

Aalto, J. Sauvarakenteiden kimmoiset menetelmät. Rak-54.111 Rakenteiden mekaniikka. Luentomoniste. Rakenteiden mekaniikan seura ry.

Gardner L. (2011). Stability of Steel Beams and Columns. SCI.

Gere, J. & Goodno, B. (2012). Mechanics of Materials, Brief Edition. Cengage Learning.1.

Salmi, T. & Pajunen, S. (2010). Lujuusoppi. Pressus. Tampere.

SFS-EN 1993-1-1 (2005). Eurokoodi 3: Teräsrakenteiden suunnittelu. Osa 1–1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt. Suomen standardisoimisliitto. Helsinki.

SFS-EN 1995-1-1 (2014). Eurokoodi 5: Puurakenteiden suunnittelu. Osa 1–1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt. Suomen standardisoimisliitto. Helsinki.

Timoshenko S. & Gere, J. (1963). Theory of Elastic Stability, International Student Edition. McGraw-Hill International Book Company.

Winter, G. (1960). Lateral Bracing of Columns and Beams. ASCE.

Ziemian, R. (2010). Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, Sixth Edition. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey.

LIITE A: NURJAHDUSTUKIVOIMAN LASKENNAN TULOKSET

Taulukko 4. Lineaarisen FEM-laskennan tulokset sauvoille, joiden alkukaarevuudet olivat L/250 ja L/750. Puristavan voiman suuruus oli $3 N_E$.

Tukijäykkyys		F/N [%]	
Dimensioton	[kN/m]	L/250	L/750
1,6	8	0,48	0,16
3,2	16	0,77	0,26
5	25	0,98	0,33
30	150	1,66	0,55
75	375	1,81	0,60
100	500	1,84	0,61
150	750	1,87	0,62
200	1000	1,88	0,63
4000	20000	1,93	0,64
40000	200000	1,93	0,64
400000	2000000	1,93	0,64

Taulukko 5. Lineaarisen FEM-laskennan tulokset L/500 kaarevalle sauvalle useilla puristavan voiman arvoilla.

Tukijäykkyys		F/N [%]			
Dimensioton	[kN/m]	$N/N_E = 0,5$	$N/N_E = 1$	$N/N_E = 2$	$N/N_E = 3$
1,6	8	0,24	0,24	0,24	0,24
3,2	16	0,38	0,38	0,38	0,38
5	25	0,49	0,49	0,49	0,49
30	150	0,83	0,83	0,83	0,83
75	375	0,91	0,91	0,91	0,91
100	500	0,92	0,92	0,92	0,92
150	750	0,93	0,93	0,93	0,93
200	1000	0,94	0,94	0,94	0,94

Taulukko 6. Epälineaarisen FEM-laskennan tulokset kaikille sauvoille puristavan voiman arvoilla $0,5 N_E$ ja N_E .

Tukijäykkyys [kN/m]		F/N [%]					
		$N/N_E = 0,5$			$N/N_E = 1$		
Dimensioton	[kN/m]	L/250	L/500	L/750	L/250	L/500	L/750
1,6	8	0,77	0,38	0,26	1,96	0,98	0,65
3,2	16	1,10	0,55	0,37	1,96	0,98	0,65
5	25	1,30	0,65	0,43	1,96	0,98	0,65
10	50	1,56	0,78	0,52	1,96	0,98	0,65
20	100	1,73	0,87	0,58	1,96	0,98	0,65
30	150	1,80	0,90	0,60	1,96	0,98	0,65
75	375	1,88	0,94	0,63	1,96	0,98	0,65
100	500	1,90	0,95	0,63	1,96	0,98	0,65
150	750	1,91	0,96	0,64	1,96	0,98	0,65
200	1000	1,92	0,96	0,64	1,96	0,98	0,65
4000	20000	1,94	0,97	0,65	1,96	0,98	0,65
40000	200000	1,94	0,97	0,65	1,96	0,98	0,65

Taulukko 7. Epälineaarisen FEM-laskennan tulokset kaikille sauvoille puristavan voiman arvoilla $2 N_E$ ja $3 N_E$.

Tukijäykkyys [kN/m]		F/N [%]					
		$N/N_E = 2$			$N/N_E = 3$		
Dimensioton	[kN/m]	L/250	L/500	L/750	L/250	L/500	L/750
1,6	8	7,97	198,68	34,46	12,81	321,10	13,78
3,2	16	3,49	1,71	8,42	42,46	91,56	0,30
5	25	31,60	59,12	133,74	0,74	54,45	2609,44
10	50	4,02	2,01	1,33	17,40	42,31	21,43
20	100	2,05	1,33	0,89	2,16	2,11	1,41
30	150	2,40	1,20	0,80	3,12	1,56	1,04
75	375	2,14	1,07	0,71	2,37	1,19	0,79
100	500	2,10	1,05	0,70	2,28	1,14	0,76
150	750	2,06	1,03	0,69	2,20	1,10	0,73
200	1000	2,05	1,02	0,68	2,16	1,08	0,72
4000	20000	1,99	1,00	0,69	2,05	1,02	0,73
40000	200000	1,99	1,00	0,68	2,05	1,02	0,72

Taulukko 8. Nurjahdustukivoiman arvot analyttisellä kaavalla 3.4 laskettuna puristavan voiman arvoilla $0,5 N_E$, $2 N_E$ ja $3 N_E$.

Tukijäykkyys [kN/m]		F/N [%]								
		$N/N_E = 0,5$			$N/N_E = 2$			$N/N_E = 3$		
Dimensioton	[kN/m]	L/250	L/500	L/750	L/250	L/500	L/750	L/250	L/500	L/750
1,6	8	0,77	0,39	0,26	-0,94	-0,47	-0,31	-0,38	-0,19	-0,13
3,2	16	1,11	0,55	0,37	-3,52	-1,76	-1,17	-0,93	-0,46	-0,31
5	25	1,31	0,66	0,44	-370,45	-185,22	-123,48	-1,94	-0,97	-0,65
10	50	1,57	0,79	0,52	4,04	2,02	1,35	-67,67	-33,83	-22,56
20	100	1,75	0,87	0,58	2,69	1,34	0,90	4,25	2,13	1,42
30	150	1,81	0,91	0,60	2,42	1,21	0,81	3,14	1,57	1,05
75	375	1,90	0,95	0,63	2,16	1,08	0,72	2,39	1,19	0,80
100	500	1,91	0,96	0,64	2,12	1,06	0,71	2,30	1,15	0,77
150	750	1,93	0,96	0,64	2,08	1,04	0,69	2,21	1,11	0,74
200	1000	1,94	0,97	0,65	2,06	1,03	0,69	2,17	1,09	0,72
4000	20000	1,96	0,98	0,65	2,01	1,01	0,67	2,07	1,03	0,69
40000	200000	1,96	0,98	0,65	2,01	1,01	0,67	2,06	1,03	0,69