Tampereen yliopisto

Johanna Huovinen

MATEMATIIKAN KIELENTÄMINEN YLIOPISTOSSA

Ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoiden matemaattisten keskustelujen analysointia

Pro gradu -tutkielma
Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kesäkuu 2023

TIIVISTELMÄ

Johanna Huovinen: Matematiikan kielentäminen yliopistossa
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan maisteriohjelma
Kesäkuu 2023

Tämä tutkimus käsittelee ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoiden matemaattista kielentämistä matemaattisen keskustelun aikana. Tarkastelun kohteena on neljä opiskelijoiden muodostamaa pienryhmää, joista kaksi on käänteisen opetuksen ryhmiä ja kaksi perinteisen luentototeutuksen ryhmiä. Tarkoituksena on tutkia, millaista matematiikan osaamista opiskelijoiden keskusteluista on löydettävissä, ja kuinka opiskelijat kielentävät matematiikkaa. Lisäksi mielenkiinnon kohteena on kahden eri opetusmenetelmän ryhmien erot matematiikan kielentämisessä ja työskentelytavoissa.

Luentototeutuksessa opetus on opettajajohtoista, ja opiskelijoiden välinen vuorovaikutus jää usein vähäiseksi. Luentototeutuksessa opettaminen tapahtuu luennoimalla, ja opiskelijat tekevät viikkoharjoituksia itsenäisesti. Käänteisessä oppimisessa perusidea on siirtää oppimista oppilaskeskeisempään suuntaan. Opetuksen aikana ei pidetä perinteisiä luentoja, vaan opettaja tarjoaa opiskelijoille mahdollisuuden opiskella erilaisia oppimisympäristöjä hyödyntäen luokkahuoneen ulkopuolella. Luokkahuoneessa tapahtuva oppiminen on yhteisöllistä jo hankitun tiedon soveltamista, ja opettaja toimii oppimisen ohjaajana ja tukena.

Tutkimuksen aineisto kerättiin lukuvuonna 2020–2021. Tutkimukseen liittyvä keskustelutehtävä oli osa tekniikan opiskelijoiden ensimmäisen matematiikan kurssin suoritusta. Keskustelutehtävään kuului kaksi erillistä matematiikan tehtävää, joihin tuli vastata ryhmässä keskustellen. Opiskelijat taltioivat itse keskustelunsa Teams-alustalla. Taltioidut keskustelut toimivat aineistona tutkimuksen laadulliselle analyysille. Aineisto analysoitiin sekä teorialähtöisesti että sisältölähtöisesti. Teorialähtöinen analyysi keskittyi matemaattisen osaamisen osa-alueiden etsimiseen ja sisältölähtöinen aineiston analyysi matematiikan kielentämisen keinojen löytämiseen litteroidusta aineistosta.

Tulosten mukaan opiskelijoiden keskusteluista oli löydettävissä monipuolisesti matemaattisen osaamisen piirteitä. Lisäksi opiskelijat käyttivät useita kielentämisen strategioita matemaattisessa keskustelussaan. Lisäksi kahden opetusmenetelmän ryhmien välillä oli havaittavissa eroja kielentämisen strategioissa. Tulosten perusteella keskustelutehtävät ovat hyvä tapa kehittää matemaattisen osaamisen osa-alueiden hallintaa. Tutkimusta kielentämisen parissa kannattaisi jatkaa suuremmalla otoksella määrällisin tutkimusmenetelmin.

Avainsanat: kielentäminen, ryhmätyöskentely, käänteinen oppiminen, käänteinen opettaminen, matematiikan osaaminen

ALKUSANAT

Tämän pro gradu -tutkielman kirjoittaminen alkoi tammikuussa 2023, ja eteni kohti valmista kevään aikana. Graduprosessi oli mielenkiintoinen, stressaava ja opettavainen. Tahdon kiittää kaikkia, jotka tukivat ja auttoivat minua graduprojektissani. Erityisesti tahdon kiittää ohjaajiani Jani Hirvosta ja Marja Kankaanrintaa, jotka ohjauksellaan motivoivat minua kirjoittamaan työtä eteenpäin. Tahdon myös kiittää ihania ystäviäni ja perheenjäseniäni, jotka kannustivat minua graduprosessin aikana ja myös läpilukivat tekstiäni.

Tampereella, 5. kesäkuuta 2023

Johanna Huovinen

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO

Viime vuosina käänteinen opettaminen on noussut vahvaksi opetusmetodiksi perinteisen opettajajohtoisen opetuksen rinnalle. Käänteisessä opetuksessa teoriaan perehdytään luokkahuoneen ulkopuolella, ja hankittua tietoa sovelletaan luokkahuoneessa opettajan ohjauksessa. [31] Käänteistä opetusmenetelmää hyödynnettiin myös Tampereen yliopiston Hervannan kampuksen matematiikan kurssien toteutuksilla lukuvuonna 2020–2021. Hyviä oppimistuloksia on havaittu myös kielentämisharjoituksia hyödyntämällä. Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan matematiikan ilmaisemista luonnollisella kielellä joko kirjallisesti tai suullisesti [17]. Esimerkiksi kielentämisharjoitusten vieminen korkeakoulujen matematiikan kursseille on tuottanut hyviä oppimistuloksia niin Suomessa kuin ulkomaillakin. [36] [26] Tässä tutkimuksessa ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijat ratkaisevat ryhmissä kahta keskustelutehtävää sekä suullisesti että kirjallisesti.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on tutkia, kuinka ensimmäisen vuoden insinööriopiskelijat kielentävät matematiikkaa pienryhmissä. Lisäksi kiinnostuksen kohteena on, mitä matemaattisen osaamisen piirteitä opiskelijoiden keskusteluista on löydettävissä. Kilpatrick, Swafford ja Findell [19] esittävät matemaattisen osaamisen koostuvan viidestä toisiinsa punoutuvasta osa-alueesta: käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, mukautuva kompetenssi ja yritteliäisys.

Tutkimuksessa tarkastelun kohteena ovat opiskelijoiden Teams-keskustelujen videotallenteet. Tallenteilla opiskelijat keskustelevat heille annetuista kahdesta tehtävästä. Aineisto kerättiin lukuvuonna 2020–2021 Tampereen yliopiston Hervannan kampuksella Insinöörimatematiikan perusteet -kurssin kahdella rinnakkaisella toteutuskerralla. Tutkimuksen otos koostui neljästä keskustelutehtäviä tehneen opiskelijaryhmän videotallenteesta. Aineiston analysointia varten videotallenteissa käyty keskustelu litteroitiin. Aineistoa tutkittiin teorialähtöisen sekä aineistolähtöisen sisällönanalyysin keinoin vastaten kahteen erilliseen tutkimuskysymykseen.

Luvussa 2 esitellään tämän tutkimuksen kannalta tärkeää teoriaa ja aikaisempia tutkimuksia tutkittavasta aiheesta. Teoriaosuus pitää sisällään kuvauksen käänteisestä oppimisesta ja opettamisesta, ryhmässä oppimisesta, matematiikan kielestä ja kielentämisestä sekä matemaattisesta osaamisesta. Luvussa 3 esitellään tutkimuksen matemaattinen osuus. Opiskelijoiden kummassakin keskustelutehtävässä esiintyy hyperbolisia funktioita, joten tämän tutkimuksen matemaattisessa osuudessa esitellään hyperbolisten funktioiden ominaisuuksia ja hyperbolista geometriaa tarkemmin.

Luvussa 4 esitellään tutkimusongelmat sekä tutkimuksen taustaa ja tutkimusprosessia, kuten opintojaksojen käytänteitä, tutkimusaineistoa, aineiston analyysin menetelmiä ja tutkimustuloksia. Luvussa 5 esitellään tutkimuksen tuloksia. Tulokset esitellään luotettavuuden parantamiseksi keskusteluotteita hyödyntäen. Luku 6 sisältää tutkimuksen luotettavuustarkastelun. Luvussa 7 pohditaan tutkimuksen tuloksia ja luvussa 8 esitellään tutkimustuloksista esiin nousseet johtopäätökset ja esitellään jatkotutkimusehdotus.

2. TEOREETTINEN VIITEKEHYS

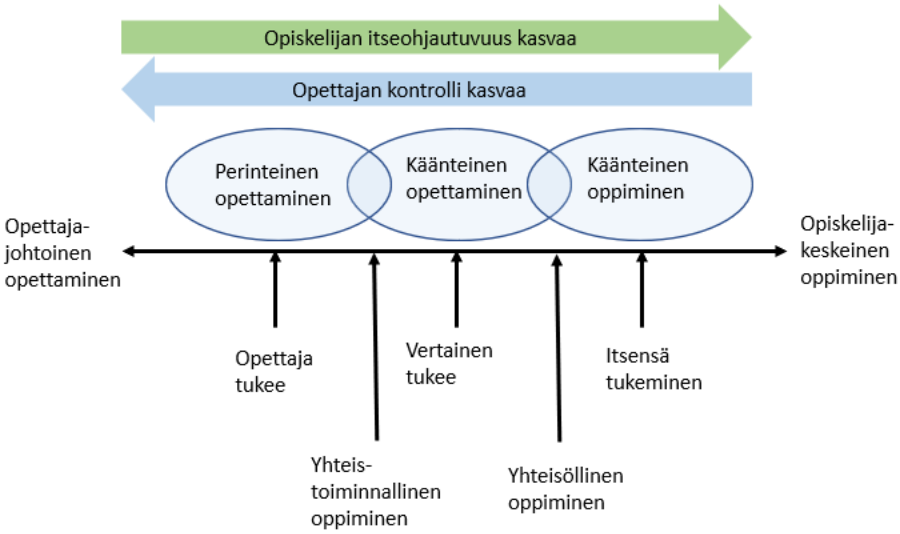
2.1 Käänteinen oppiminen ja opettaminen

Prince määrittää tutkimuksessaan [25] aktiivisen oppimisen käsitteen tarkoittamaan kaikkia sellaisia opetusmenetelmiä, joilla saadaan opiskelijat sitoutumaan oppimisprosessiin. Käytännössä aktiivinen oppiminen viittaa niihin aktiviteetteihin, joita toteutetaan luokkahuoneessa. Aktiivisen oppimisen peruselementteinä voidaan pitää opiskelijan aktiivisuutta ja sitoutumista oppimiseen. [25] Käänteinen opetus on opetusmetodi, jolla aktiivista oppimista voidaan toteuttaa [3] [31].

Nykyaikaisilla korkeakoulujen matematiikan kursseilla luennoiminen on edelleen hallitseva opetustekniikka [3]. Siinä luennoitsija esittelee aiheita luentosalin etuosassa ja vastaa toisinaan opiskelijoiden kysymyksiin. Kun luennot on pidetty, opiskelijat tekevät itsenäisesti luentoihin liittyvät kotitehtävät. Opiskelijoiden ohjaamiseen tai auttamiseen tehtävien teossa ei jää aikaa. Jos opiskelija kohtaa ongelmia kotitehtävissä, on hänen kysyttävä apua tehtävien ratkaisemiseen luentosalin ulkopuolelta. [5] Lisäksi perinteisessä opetuksessa opiskelijoilla on harvoin mahdollisuuksia harjoittaa matemaattisista ongelmista puhumista matematiikan kielellä [31].

Käänteisessä opetuksessa opettaja esittelee perusmääritelmiä, esimerkkejä ja todistuksia opiskelijoille videoissa tai kirjallisessa kurssimateriaalissa. Videoihin ja materiaaliin tutustutaan ennen yhteiselle oppitunnille osallistumista. Käsite käänteinen opetus tarkoittaa käytännössä sitä, että teoriaan tutustutaan kotona, ja tehtäviä tehdään yhdessä oppitunneilla opettajan avustamana. [31] Tämän seurauksena oppitunneilla on mahdollista opiskella aktiivisen oppimisen keinoin, esimerkiksi keskustelemalla ryhmissä. [3] [9] Käänteisessä opettamisessa on kyse opetuksen teknisestä muutoksesta, jonka avulla opettajan on mahdollista kehittää oppimiskulttuuria. Yhteistä aikaa opiskelijoiden kanssa ei käytetä tiedon siirtämiseen, vaan sen soveltamiseen. [31] Opettajalla on oppitunneilla opettamisen sijaan aikaa keskittyä oppimisen kannalta merkitykselliseen opettajan ja opiskelijan väliseen vuorovaikutukseen. Käänteisessä opetuksessa opiskelija on itse vastuussa materiaalien läpi käymisestä oppituntien ulkopuolella. Tavoitteena on yrittää hankkia perustavaa tietoa läpi käytävästä aiheesta ennen oppituntia ja sitten soveltaa sitä aktiivisesti oppitunnilla. Käänteisen opetuksen etuna pidetään sitä, että opiskelijan on mahdollista opiskella kurssin sisältöä omalla ajallaan milloin tahansa, ja missä tahansa. [4]

Käsitteillä käänteinen oppiminen ja käänteinen opettaminen Toivolan ym. [31] mukaan tarkoitetaan eri asioita. Käänteisessä oppimisessa opettaja ohjaa opiskelijaa omaehtoiseen ja oma-aloitteelliseen oppimiseen sekä tukee opiskelijan valinnanvapautta pedagogisessa mielessä. Oppimisessa korostetaan oppilaslähtöistä oppimista, jossa opiskelijoiden on tarkoitus oppia yhdessä. Matematiikan tyyppisissä, luonteeltaan kumulatiivisissa opinnoissa ei voi edetä, ellei hallitse opittavaa asiaa [32]. Käänteisessä oppimisessa oppimista tarkastellaan yksittäisen opiskelijan tarpeiden mukaan. Opiskelijoiden on mahdollista opiskella omaan tahtiin omalla tasollaan, ja opettajan tehtävänä on mahdollistaa eriyttäminen siten, että opiskelijoille on tarjolla kaikentasoista materiaalia. [31] Kuvassa 2.1 on havainnollistettu perinteisen ja käänteisen opettamisen sekä käänteisen oppimisen välistä yhteyttä, sekä opettajan ja opiskelijan roolia oppimisessa ja opettamisessa.



Kuva 2.1. *Toivolan ja Silfverbergin [32] kuvaus perinteisen opetuksen, käänteisen opettamisen ja käänteisen oppimisen eroista.*

Käänteinen opetusmalli sopii erityisen hyvin korkeakouluihin. Kurssimateriaalin läpikäyminen itsenäisesti varsinaisten oppituntien ulkopuolella mahdollistaa opiskelijoiden kehittää kriittistä ajattelutaitoaan, luovuuttaan, kommunikaatiokykyjään ja yhteistyötaitojaan varsinaisilla oppitunneilla. Käänteisen opetuksen mallia voisi erityisesti viedä osaksi suuria luentototeutuksellisia kursseja, joissa opiskelijoiden välinen vuorovaikutus jää vähäiseksi. [4] Fung ym. tekemän kirjallisuuskatsauksen [9] mukaan parempaan akateemiseen menestykseen johtavassa käänteisessä opetuksessa on aina mukana keskustelua, opettajan antamaa palautetta sekä vertaisoppimista ryhmässä.

2.2 Ryhmässä oppiminen

Sopivan työskentelymuodon valinta opetettavalle ryhmälle on monen tekijän summa. Opettajan on otettava huomioon, minkälaista oppimista halutaan edistää, minkä tapaisista tehtävistä on kysymys, millaisia opiskelijat ovat ja millaisia valmiuksia heillä on. [10] Onnistuneen ryhmätyöskentelyn aikaansaaminen saattaa olla haastavaa, sillä se vaatii ryhmän yksimielistä sitoutumista tiettyihin työskentelytapoihin ja päämääriin. Tällöin ryhmän yksittäisen jäsenen mielipiteet ja tiedot saattavat jäädä vähemmälle huomiolle kuin olisi hänen kannaltaan suotavaa. Ryhmätyöskentelyssä yksittäisen jäsenen onnistuminen koetaan koko ryhmän onnistumisena. [10]

Woodin [37] mukaan ryhmätyöskentely kehittää opiskelijoiden matemaattisen keskustelun taitoja, ja vaikuttaa positiivisesti oppimistuloksiin. Keskustelemalla ja esittämällä kysymyksiä toisilleen ryhmän jäsenet pääsevät nopeammin ja selvemmin sisälle tehtävään ja myös sen ratkaisuideaan [10]. Matematiikan oppimisessa ryhmätyöskentelyllä on olennainen rooli opiskelijoiden kyvyssä kysyä rakentavia kysymyksiä ja antaa rakentavaa kritiikkiä. [30] Haapasalo [10] kirjoittaa, että etenkin ongelmanratkaisutehtävissä ryhmätyöskentely on suositeltavaa. Ryhmätyöskentely kehittää opiskelijan itsekunnioitusta ja itseluottamusta, parantaa asenteita vertaisiaan ja erilaisia oppijoita kohtaan. Onnistuessaan ryhmässä työskenteleminen antaa monipuolisten ja erilaisten lähestymistapojen avulla heikoimmillekin opiskelijoille mahdollisuuksia oppimiseen. [10]

Toivola ym. [31] erottaa yhteisöllisen oppimisen (collaborative learning) ja yhteistoiminnallisen oppimisen (co-operative learning) selkeästi toisistaan. Yhteistoiminnallisessa oppimisessa opiskelijat pyrkivät yhteiseen tuotokseen, ja toiminta saa usein alkunsa esimerkiksi opettajan antamasta velvoitteesta. Työ tai tehtävä jaetaan pienempiin osatehtäviin, jonka jokainen ryhmän jäsen ratkaisee itsenäisesti. Lopuksi yksittäiset ratkaisut kootaan yhdeksi kokonaisuudeksi, jotta kaikki oppisivat tehtävän sisällön. [31] Jos ryhmän tavoitteena on ainoastaan tuottaa jotakin ennalta sovittua, niin yleensä kyvykkäimmät jäsenet kärsivät joutuessaan motivoimaan ja kannustamaan muita. Ryhmän jokaisen jäsenen tulisi osallistua toimintaan, eikä jäädä vain niin sanotuksi hiljaiseksi ajattelijaksi. Ryhmä tarvitsee sekä ajattelijoita että tekijöitä, mutta rooleja olisi hyvä välillä vaihtaa. [10]

Yhteisöllisen oppimisen toimintakulttuuri sopii erityisesti käänteiseen oppimiseen. Yhteisöllisessä oppimisessa ryhmän jäsenet pohtivat, jakavat tietoa ja työskentelevät, käsittelevät samaa ongelmaa yhdessä ryhmissään ja oppivat toisiltaan. [30] Toivola ym. [31] painottavat, että yhteisöllisessä oppimisessa opiskelijat oppivat tai pyrkivät oppimaan jotakin yhdessä. Kyse ei ole yksittäisen tehtävän tekemisestä tai yhteisen tuotoksen tekemisestä, vaan kyvystä oppia ohjaamaan omaa oppimista. Keskusteleminen muiden kanssa mahdollistaa muilta oppimisen sekä omien ajattelutapojen kyseenalaistamisen ja johtaa siten syvempään ymmärrykseen [31].

D'Souzan mukaan yhteisöllisellä oppimisella on lukuisia hyviä puolia korkeakouluopinnoissa. Yhteisöllinen oppiminen kehittää korkeamman tason ajattelutaitoja ja auttaa opiskelijaa selventämään ajatuksiaan keskustelun kautta, kehittää kommunikaatiotaitoja, edistää opiskelijoiden metakognitiota sekä luo aktiivisen, osallistuvan, tutkivan oppimisen ympäristön. Lisäksi yhteisöllinen oppiminen edistää oppimistavoitetta suoritustavoitteen sijaan, parantaa itsejohtamistaitoja ja edistää opiskelijoiden ongelmanratkaisutekniikoiden esittämistä toisilleen. [6]

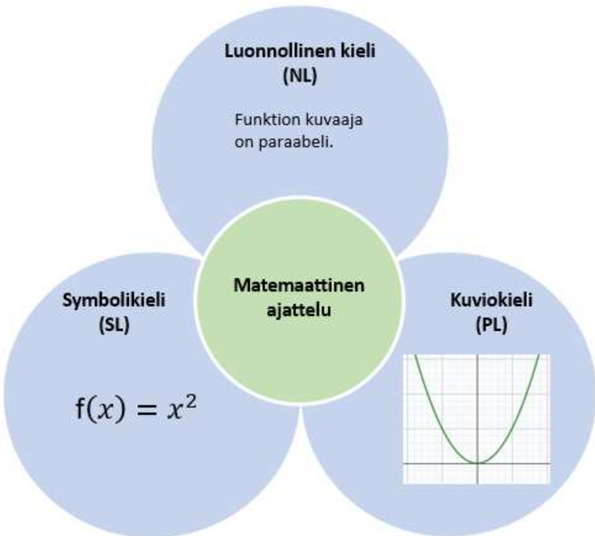
D'Souza toteaa artikkelissaan [6], että opiskelemalla matematiikkaa pienryhmissä voidaan vähentää opiskelijoiden matematiikka-ahdistusta ja mahdollisia kilpailuasetelmia. Lisäksi ryhmässä työskenteleminen auttaa kaikkia ryhmän jäseniä oppimaan käsitteitä ja ongelmanratkaisustrategioita, parantamaan itseluottamusta ja voittamaan virheiden tekemisen pelon [30]. Bernero mainitsee myös tutkimuksessaan [2], että opiskelijat, joille matematiikka oli vaikeaa, kokivat stressiä ja rasitusta yksilötyöskentelyn aikana sekä lannistuivat matematiikan tehtäviä ratkoessaan, mutta kehittyivät sekä akateemisesti että sosiaalisesti ryhmätyöskentelyn aikana lisääntyneen itsevarmuuden ansiosta. Myös Haapasalon [10] mukaan ryhmätyöskentelyssä ryhmän jäsenten henkilökohtaiset suorituspaineet ja stressi yleensä vähenevät. Webb ja Mastergeorge kertovat artikkelissaan [35], kuinka opiskelijat voivat oppia toisiltaan monin tavoin. Opiskelijat esimerkiksi antavat apua toisilleen ja vastaanottavat sitä, jakavat tietoa, rakentavat toistensa ideoita, tunnistavat ja ratkaistevat ristiriitoja oman ja muiden opiskelijoiden näkökulmien välillä. Lisäksi opiskelijat sisäistävät esiin tulevat ongelmanratkaisuprosessit ja strategiat ryhmätyön aikana. [35] Toimivassa ryhmässä jäsenten kyvyt yhdistyvät, jolloin suoritus nopeutuu, ja työskentelyn tuloksen oikeellisuus vahvistuu [10].

Ryhmätyöskentelyn hyvien puolien lisäksi Sofroniou [30] toteaa siinä olevan myös huonoja puolia, esimerkiksi ryhmän matemaattisesti heikommat jäsenet voivat joskus jättää tehtävien ratkaisemisen muille ja vaikuttaa negatiivisesti ryhmän oppimiseen. Tällöin myös matemaattisesti taitavammat opiskelijat saattavat panostaa ryhmän tehtäviin vähemmän välttääkseen tekemästä kaikkea ryhmälle kuuluvaa työtä. [30] Ryhmän keskusteluun enemmän osallistuvilla opiskelijoilla on paremmat mahdollisuudet käsiteltävän asian oppimiseen kuin keskusteluun osallistumattomilla opiskelijoilla [8].

2.3 Matematiikan kieli ja kielentäminen

Tutkimusten mukaan opiskelijoiden on vaikea ymmärtää matematiikan kieltä sekä perinteisellä tyylillä ilmaistua matemaattista diskurssia, mikä on este matematiikan oppimiselle. Esimerkiksi matematiikan oppikirjoissa sekä opettajien puheessa esiintyvä matematiikan kieli on hyvin erityyppistä kuin opiskelijoiden yleinen, arkinen kielenkäyttö. [21]. On kuitenkin huomioitava, että matematiikassa käytetään myös paljon jokapäiväisessä kielenkäytössä esiintyviä sanoja [33]. Tossavaisen [33] mukaan matematiikassa on oma sanavarastonsa, johon liittyy joukko vakiintuneita, vain sille tyypillisiä kielellisiä rakenteita. Leen [21] mukaan matematiikassa on oma kielirekisteri, joka koostuu symboleista, erityisestä sanastosta, tarkoista lausekkeista ja kieliopillisista rakenteista. Rekisteri on kehittynyt, jotta diskurssi kehittyneistä ja haastavista matemaattisista ideoista ja prosesseista on mahdollista. [21]

Matematiikan kielen voi ymmärtää varsin moniulotteiseksi. Matematiikkaa ei tulisi ajatella ainoastaan kielenä, sillä myös symbolinen ilmaisu on vahva osa matematiikan kielentämistä. [22] Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen keinoin yleensä suullisesti tai kirjallisesti. Matemaattisen ajattelun kielentäminen mahdollistaa opiskelijan ajatteluprosessin seuraamisen ja sen kehittämisen. [17] Joutsenlahti ja Rättyä [16] määrittelevät, että matematiikan kieli koostuu sekä symbolikielestä (symbolic language, SL), että luonnollisesta kielestä (natural language, NL). Lisäksi matematiikan kolmantena kielenä voidaan pitää kuviokieltä (pictorial language, PL). [16] [22] Luonnollisella kielellä tarkoitetaan puhuttua tai kirjoitettua kieltä, kuten opiskelijan äidinkieltä. Symbolikielellä tarkoitetaan erilaisia matematiikan symboleja. Kuviokieli taas on kuvin tai kuvioin ilmaistu tehtävä tai tehtävän ratkaisu. [16] Matematiikan symboli- ja kuviokieltä voidaan pitää poikkeuksellisina luonnolliseen kieleen verrattuna, sillä matematiikan symboli- ja kuviokieltä voi ymmärtää yli kielirajojen. Matematiikan käsitteille voidaan kuitenkin luoda merkityksiä käyttäen luonnollista kieltä. [24] Kuvassa 2.2 on kuvattu matemaattisen ajattelun ilmaisua kolmen matematiikan kielen avulla.



Kuva 2.2. *Matemaattisen ajattelun ilmaisemisessa käytettävät kielet. (Sovellettu Joutsenlahti ja Alfaro [36])*

Kielten opetuksessa tavoitteena on oppia sellainen kielitaito, jota opiskelija voi itsenäisesti käyttää ja kehittää. Päästäkseen tähän tavoitteeseen opiskelijan on opittava kielelle ominainen sanavarasto ja lauseiden rakentamisen perussäännöt. Lisäksi opiskelijan tulee perehtyä siihen kulttuuriin, jossa kyseistä kieltä käytetään. Nämä asiat tulisi huomioida myös matematiikan opetuksessa, jos ajatellaan, että matematiikka on oma kielensä. [33] Myös Lee [21] vertaa matematiikan opiskelua vieraan kielen opiskeluun. Hänen mukaansa opiskelijan on opittava matematiikan kieli osatakseen ilmaista ideansa ja käyttääkseen matemaattisia käsitteitä ymmärrettävästi ja oikein korkeakoulutasolla. Aktiivinen kielitaito matematiikassa näyttäytyy opiskelijan kykynä ilmaista matemaattista ajatteluaan suullisesti tai kirjallisesti. [31]

Opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittäminen edellyttää matematiikan merkkien, symbolien ja termien oppimista. Tämä onnistuu parhaiten ongelmatilanteissa, joissa opiskelijoilla on mahdollisuus lukea, kirjoittaa ja keskustella ideoistaan, jolloin kielen käytöstä matematiikassa tulee luonnollista. [29] Tossavaisen [34] mukaan on tärkeää kiinnittää huomiota matematiikan kielen käyttöön esimerkiksi yliopistomatematiikassa, sillä korkeamman matematiikan opetuksen haasteet eivät liity yksittäisten käsitteiden omaksumiseen, vaan huomattavasti laajemman käsitteellisen informaation uudelleen jäsentämiseen ja täydentämiseen. Korkeamman matematiikan oppiminen on oleellisesti opiskelijan jo olemassa olevan konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon kielellistä työstämistä. [34] Esimerkiksi analyysin oppiminen edellyttää, että opiskelija pystyy liikkumaan joustavasti niin havainnollisten mielikuviensa tasolla sekä varsinaisen matematiikan kielen tasolla ja näiden välillä. [33]

Opiskelijoiden suurimmat vaikeudet matematiikan oppimisessa liittyvät Tossavaisen mukaan yleensä oman ajattelun kielentämiseen matematiikan kielelle ja päinvastoin, eivät niinkään varsinaisen matemaattisen ongelman ratkaisemiseen. [34] Uudet opeteltavat käsitteet jäävät usein opiskelijoille epäselviksi, kun opettaja kertoo ne tai ne luetaan suoraan kirjasta. Opiskelijoiden keskustellessa käsityksistään ja perustellessa niitä, he voivat samalla testata omaa ymmärrystään ja saada palautetta muilta opiskelijoilta. [31] Ennen kuin opiskelija kertoo suullisesti matematiikan tehtävän ratkaisunsa, on hänen ensin jäsennettävä omaa ajatteluaan itselleen. Jäsentämisen jälkeen opiskelja muotoilee sanottavansa muille kuulijoille ymmärrettäviksi kokonaisuuksiksi. Kielentäminen auttaa jäsentämään opiskelijan ajattelua ja tukee matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä syvällisemmin. [17] Opiskelijoiden keskustelujen aikana heidän omat subjektiiviset käsityksensä opittavasta aiheesta vähitellen muodostuvat objektiivisemmiksi. Hiljalleen käsite löytää paikkansa opiskelijan tietorakenteessa. [31] Opiskelijan ajatellessa pohtimaansa ääneen lausuttu ja jäsennetty kieli selventävät omaa ajattelua [14]. Toivolan ym. [31] mukaan ihmisen ymmärrys jostakin asiasta liittyy kiinteästi hänen ainutkertaisiin kokemuksiinsa, minkä takia puhuminen on käytännönläheinen tapa rakentaa ja testata omaa ymmärrystä.

Perinteisesti yliopistomatematiikassa tehtävien ratkaisut esitetään vain matematiikan symbolikielen avulla [18]. Monipuolinen kielien (2.2) käyttö matematiikan oppitunneilla kehittää opiskelijoita esittämään matemaattista ajatteluaan vertaisilleen ja selvittämään matemaattisia ongelmia keskustelun ja puheen avulla. Lisäksi kielentämisen avulla opiskelija pystyy jakamaan ajatuksiaan muille opiskelijoille. [14] [17] Opiskelijan kuunnellessa toisen opiskelijan kielennystä matematiikan tehtävästä voivat muut ryhmän jäsenet miettiä, ovatko he ratkaisseet tehtävän samalla tavalla kuin esittäjä. Jos opiskelijoiden ratkaisut poikkeavat toisistaan, saavat eri tavoilla tehtävän ratkaisseet uusia tapoja ymmärtää tehtävän ja näin laajentavat käsitystään erilaisista ongelmanratkaisutavoista. Lisäksi ryhmän jäsenet voivat kysyä esittäjältä tarkentavia kysymyksiä, arvioida ratkaisujen oikeellisuutta ja antaa kommentteja erilaisista ratkaisutavoista. Ratkaisun esittäjä voi palautteen ansiosta perustella ratkaisuaan tarkemmin. [14]

Kielentämistehtävällä tarkoitetaan sellaisia tehtävätyyppejä, joissa opiskelija hyödyntää kielentämistä vastauksessaan [18]. Joutsenlahden ja Alfaron tekemän tutkimuksen [36] mukaan kirjallisten kielentämistehtävien teettäminen yliopisto-opiskelijoilla matematiikan kursseilla edistää matematiikan oppimisen kannalta olennaisia taitoja ja on tehokas väline opiskelijoiden ajattelun tarkkailuun sekä virhekäsitysten ja tiedon puutteiden tunnistamiseen.

Sarikka [28] esittää diplomityössään seitsemän erilaista kielentämistehtävätyyppiä, joita ovat koodaus, täydennys, virheen etsintä, ratkaisusta tehtävä, ratkaisun argumentointi, tiedonseulonta ja omin sanoin selvitys. Koodaustehtävällä tarkoitetaan tehtävää, jossa matematiikkaa tulee joko kääntää luonnollisesta kielestä matematiikan kieleen tai matematiikan kielestä luonnolliseen kieleen. Täydennystehtävässä opiskelijalle annetaan puutteellinen ratkaisu, joka opiskelijan tulee täydentää eli antaa esimerkiksi puuttuvia perusteluja, selityksiä tai välivaiheita. Virheen etsintä -tehtävässä opiskelijalle annetaan valmis ratkaisu, josta tulee löytää virheet ja korjata ne. Ratkaisusta tehtävä -tehtävätyyppi tarkoittaa nimensä mukaisesti sitä, että valmiiksi ratkaistusta tehtävästä tulee keksiä tehtävänanto. Ratkaisun argumentoinnilla tarkoitetaan tehtävätyyppiä, jossa pyydetään perustelemaan tehtävän kannalta kiinnostavia asioita. Esimerkiksi derivaattaa käsittelevän tehtävän yhteydessä voitaisiin kysyä, mitä derivoituvuus tarkoittaa. Tiedonseulontatehtävässä opiskelijalle on annettu liikaa tietoa, ja opiskelijan tulee itse poimia tehtävässä tarvittavat tiedot sen ratkaisemiseksi. Viimeisenä listatulla tehtävätyypillä, omin sanoin selvityksellä, tarkoitetaan sellaista tehtävää, jossa opiskelija joko suullisesti tai kirjallisesti selvittää jonkin asian ilman matematiikan symbolikieltä. [28]

Suhonen ja Rinneheimo [26] tutkivat korkeakouluopiskelijoiden konseptuaalista matematiikan ymmärtämistä kielentämistehtävien avulla. Tutkimuksessa teetetyt kielentämisharjoitukset mahdollistivat monenlaisia tapoja kehittää opiskelijoiden matemaattista ajattelua. Erilaisten matemaattisten käsitteiden ilmaisumenetelmien käyttäminen antoi opiskelijoille paljon selkeämmän yleiskäsityksen käsiteltävästä matematiikan aiheesta. Tämä auttoi erityisesti niitä opiskelijoita, joilla on vaikeuksia matematiikan kanssa. [26]

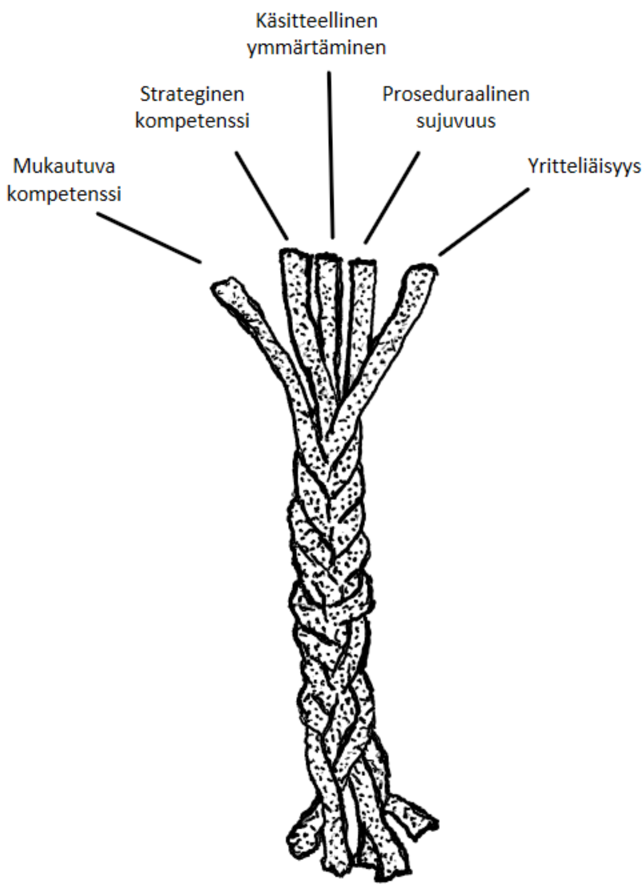
2.4 Matemaattinen osaaminen

Matemaattisella osaamisella (mathematical proficiency) tarkoitetaan matematiikan monipuolista hallintaa. Kilpatrick, Swafford ja Findell [19, s. 116] määrittelevät yksilön matemaattisen osaamisen koostuvan viidestä eri osa-alueesta:

1. Käsitteellinen ymmärtäminen (conseptual understanding)

2. Proseduraalinen sujuvuus (prosedural fluency)
3. Strateginen kompetenssi (strategic competence)
4. Mukautuva kompetenssi (adaptive reasoning)
5. Yritteliäisyys (productive disposition).

Nämä osaamisen osa-alueet eivät ole toisistaan erillisiä, vaan ne punoutuvat toisiinsa muodostaen matemaattisen osaamisen kokonaisuuden. [19, s. 116] Kuvassa 2.3 matematiikan osaamisen viisi osa-aluetta on kuvattu viitenä nauhana, jotka punoutuvat toisiinsa muodostaen vahvan köyden eli matemaattisen osaamisen kokonaisuuden.



Kuva 2.3. *Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin kuvaus oppimisen viiden osa-alueen punoutumisesta toisiinsa [19, s. 117].*

Käsitteellisellä ymmärryksellä tarkoitetaan matemaattisten käsitteiden, relaatioiden ja operaatioiden ymmärtämistä. Opiskelijan on ymmärrettävä, missä kontekstissa matemaattista käsitettä käytetään ja miten eri käsitteet kytkeytyvät toisiinsa. [19, s. 118] Opiskelijat, joilla on kehittynyt käsitteellinen ymmärrys käsiteltävästä aiheesta, tietävät siitä enemmän kuin vain yksittäisiä faktoja ja metodeja. Jos opiskelija on ymmärtänyt matemaattisen käsitteen, on epätodennäköistä, että hän tulevaisuudessa muistaisi ja käyttäisi sitä väärin.

Lisäksi opiskelijat ymmärtävät, miksi kyseinen matemaattinen idea on tärkeä, ja mihin sitä voidaan soveltaa. He ovat järjestäneet tietonsa yhtenäiseksi kokonaisuudeksi, joka mahdollistaa uusien asioiden oppimisen yhdistämällä ne jo ennestään opittuun. He myös osaavat esittää matemaattisia ideoitaan ja ajatuksiaan useilla eri tavoilla, kuten suullisesti, kirjallisesti ja kuvioin. [19, s.119] Opiskelijat ymmärtävät yleensä käsitteitä jo ennen kuin kykenevät ilmaisemaan ymmärtämänsä käsitteen suullisesti [15, s. 97]. Kun opiskelijat ovat hankkineet käsitteellistä ymmärrystä jollakin matematiikan alueella, he näkevät käsitteiden ja menettelytapojen väliset yhteydet ja osaavat perustella, miksi jotkut asiat ovat seurauksia toisista. [19, s.119]

Käsitteellinen ymmärtäminen on yhteydessä proseduraaliseen sujuvuuteen, jolla kuvataan kykyä käyttää ja soveltaa ratkaisumenetelmiä erilaisissa tilanteissa järkevästi, joustavasti ja tarkoituksenmukaisesti. Proseduraalista sujuvuutta tarvitaan erityisesti käsitteellisen ymmärtämisen tukemiseksi. Proseduurien käytön voi tiivistää laskutoimitusten, kuten summien, erotusten, tulojen tai osamäärien osaamiseksi. Lisäksi tähän kuuluvat menetelmät, joissa käytetään laskimia ja tietokoneita laskemisen apuna. Laskemisen tehokkuutta ja huolellisuutta voi parantaa harjoittelemalla. Ilman riittävää proseduraalista sujuvuutta opiskelijoilla on vaikeuksia syventää ymmärrystään matemaattisista ideoista tai ratkaista matemaattisia ongelmia. [19, s. 121] [15, s. 97]

Strategisella kompetenssilla tarkoitetaan kykyä muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Opiskelijan on hallittava useita erilaisia ongelmanratkaisustrategioita sekä osattava muotoilla annetun tehtävän ongelma sen ratkaisemisen kannalta järkevään ja ymmärrettävään muotoon. [19, s. 124] Opiskelija, jolla on vahvat strategisen kompetenssin taidot, osaa soveltaa tehtävässä tarvittavia tietoja ja taitoja. Hän osaa myös keksiä ratkaisustrategioita tehtäviin käyttämällä matemaattisia proseduureja ja käsitteitä tarkoituksenmukaisesti. [15, s. 98]. Esittääkseen matemaattisen ongelman tarkasti opiskelijoiden on ensin ymmärrettävä tehtävässä esitetty tilanne sekä sen keskeiset piirteet. Heidän on sitten luotava ongelmasta matemaattinen esitys, josta ilmenee tehtävän ydinelementit, ja jättää huomiotta tehtävässä mahdollisesti esitetyt epäolennaiset piirteet. Oppiakseen hyväksi ongelmanratkaisijaksi opiskelijan on opittava havaitsemaan matemaattisia yhteyksiä ja suunnittelemaan tarvittaessa uusia ratkaisumenetelmiä. Tälläinen joustavuus kehittyy laajentamalla tietoa, jota tarvitaan ongelmatehtävien ratkaisemiseen rutiiniongelmien sijaan. [19, s. 124–126]

Mukautuvalla kompetenssilla tarkoitetaan kykyä käyttää loogista päättelyä. Mukautuva päättely vaatii kolmen ehdon toteutumista onnistuakseen. Opiskelijalla tulee olla käsiteltävästä aiheesta riittävä tietopohja, aihetta käsittelevän tehtävän on oltava ymmärrettävä ja motivoiva sekä tehtävän kontekstin on oltava tuttu ja miellyttävä. [15, s. 98] Yksi mukautuvan kompetenssin tärkeä ilmentymä on kyky perustella valintojaan ja toimiaan asianmukaisesti. Esimerkiksi matemaattisten todistusten tuottaminen on yksi oman toiminnan perustelun muoto. Mukautuva kompetenssi ilmenee selvimmin ongelmanratkaisussa, jossa opiskelijat käyttävät strategista kompetenssiaan muotoillessaan ratkaisuja ongelmiin. Mukautuva kompetenssi on välttämätöntä, jotta opiskelijat voivat arvioida valitsemansa strategian oikeutusta. Ymmärtääkseen juuri oppimaansa opiskelijat tarvitsevat kokemusta sen selittämisessä ja perustelemisessa monien erilaisten matemaattisten ongelmien ja esimerkkien kautta. [19, s. 129-130]

Mukautuva kompetenssi on yhteydessä muihin matemaattisen osaamisen osa-alueisiin, varsinkin ongelmaratkaisutehtäviä tehtäessä. Opiskelijat hyödyntävät strategista kompetenssiaan ongelman muotoilussa ja esittämisessä käyttämällä omaan päättelyynsä perustuvia lähestymistapoja. Mukautuvaa kompetenssia opiskelijoiden on taas käytettävä silloin, kun he määrittävät ehdotetun strategian pätevyyden. [19, s. 130]

Yritteliäisyydellä tarkoitetaan matematiikan kokemista arvokkaana, mielekkäänä ja käyttökelpoisena. Yritteliäisyys pitää sisällään myös uskon omiin matemaattisiin kykyihin ja ahkeruuden merkityksen ymmärtämisen omien kykyjen kehittämisessä. Opiskelija todennäköisesti uskoo matematiikan olevan käyttökelpoista ja ymmärrettävää, jos hänellä on edellä esitetyt neljä piirrettä hyvin kehittyneinä. Yritteliäisyyttä on mahdollista ylläpitää ja kehittää tarjoamalla opiskelijoille toistuvia tilaisuuksia ymmärtää matematiikkaa ja kokea onnistumisen ilo. [19, s. 131] [15, s. 98]

Käsitteellisen ymmärryksen kautta opiskelija siis osaa tuottaa vertauskuvia ja esitystapoja, jotka voivat toimia mukautuvan kompetenssin lähteenä. Mukautuvan kompetenssin keinoja opiskelijat käyttävät määrittääkseen, onko ratkaisu annettuun tehtävään tai ongelmaan perusteltavissa. Valittu ratkaisustrategia edellyttää laskenta- tai esitysmenetelmien sujuvaa käyttöä, mutta mukautuvaa kompetenssia tulisi käyttää myös sopivan menettelytavan löytämiseksi käsiteltävään ongelmaan. Ratkaisusuunnitelmaa toteuttaessaan opiskelijat käyttävät strategista kompetenssiaan seuratakseen edistymistään kohti tehtävän ratkaisua ja luodakseen vaihtoehtoisia suunnitelmia, jos nykyinen suunnitelma vaikuttaa tehottomalta tai väärältä. Tämän kaltainen lähestymistapa riippuu opiskelijan yritteliäisyydestä sekä ongelman ratketessa tai tehtävän onnistuessa vahvistaa sitä. [19, s. 131]

3. HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tässä tutkimuksessa opiskelijoiden tehtävänä oli keskustella kahdesta matematiikan tehtävästä, joissa esiintyi hyperbolisia funktioita. Tässä luvussa esitellään hyperbolisia funktioita, hyperbolista trigonometriaa ja hyperbolista geometriaa tarkemmin.

3.1 Hyperboliset funktiot

Hyperboliset funktiot määritellään eksponenttifunktioiden e^x ja e^{-x} avulla [23, s. 171]. *Hyperbolinen sini, kosini ja tangentti* määritellään seuraavasti:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (vrt. [11, s. 108])

Hyperbolinen sini ja tangentti ovat parittomia funktioita, sillä

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = -\sinh x,$$

samoin

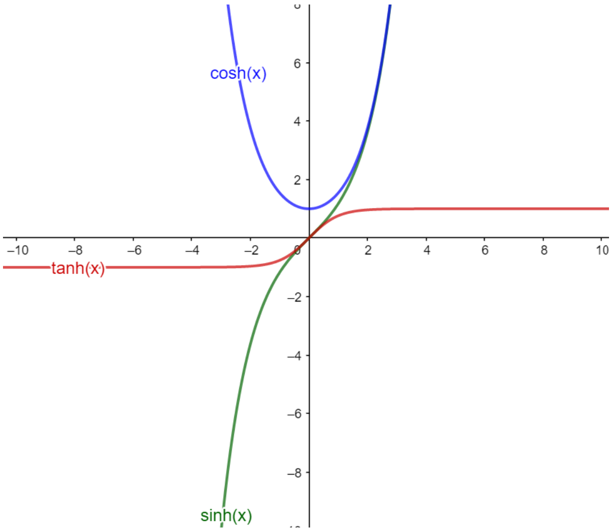
$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}\right) = -\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x.$$

Hyperbolinen kosini on parillinen funktio, sillä

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x.$$

(vrt. [11, s. 110–111])

Kuvassa 3.1 on esitetty hyperbolisen sinin, kosinin ja tangentin kuvaajat.



Kuva 3.1. *Hyperbolisen sinin, kosinin ja tangentin kuvaajat.*

Hyperboliset funktiot $\sinh x$ ja $\tanh x$ ovat parittomia ja aidosti kasvavia bijektioita

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\tanh : \mathbb{R} \to \left]-1, 1\right[$$

ja hyperbolinen kosini on parillinen funktio, joka määrittelee kaksi bijektiota

$$\cosh : \left[0, \infty\right[\to \left[1, \infty\right[$$

ja

$$\cosh : \left]-\infty, 0\right] \to \left[1, \infty\right[.$$

Hyperbolisilla funktiolla on käänteisfunktiot, ns. *areafunktiot*, jotka ovat hyperbolisten funktioiden bijektiivisten rajoittumien käänteisfunktioita. *Hyperbolisen sinin, kosinin ja tangentin käänteisfunktiot* määritellään seuraavasti:

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Hyperbolinen kosini muodostaa kaksi käänteisfunktiota. Bijektion

$$\cosh : \left[0, \infty\right[\to \left[1, \infty\right[$$

käänteisfunktio on

$$\cosh^{-1} : [1, \infty[\to [0, \infty[, \quad \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Vastaavasti bijektion

$$\cosh :]{-\infty}, 0] \to [1, \infty[$$

käänteisfunktio on muotoa

$$\cosh^{-1} : [1, \infty[\to [-\infty, 0[, \quad \cosh^{-1} x = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

(vrt. [11, s. 111])

Lasketaan esimerkiksi hyperbolisen kosinin käänteisfunktion kaava.

Esimerkki 3.1. [1, s. 185] Ratkaistaan $\cosh a = \frac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right) = x$. Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin saadaan

$$e^a + e^{-a} = 2x.$$

Vähennetään yhtälöstä puolittain $2x$ ja kerrotaan yhtälö puolittain termillä e^a, jolloin saadaan yhtälö muotoon

$$\left(e^a\right)^2 - 2e^a x + 1 = 0.$$

Ratkaistaan muuttuja a toisen asteen ratkaisukaavalla, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} e^a &= \frac{-\left(-2x\right) \pm \sqrt{\left(-2x\right)^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \\ &= x \pm \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Kun otetaan yhtälöstä molemmin puolin luonnollinen logaritmi, yhtälö saadaan muotoon

$$\ln e^a = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

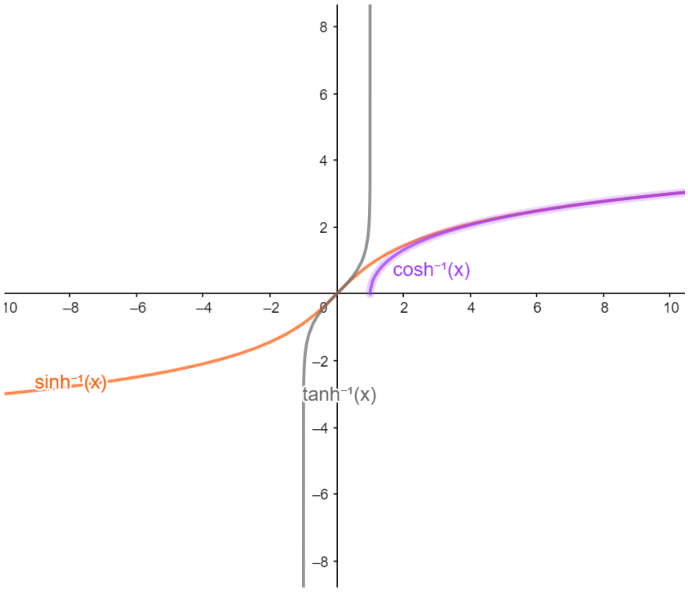
Siis hyperbolisen kosinin käänteisfunktion lausekkeeksi saadaan joko

$$a = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

tai

$$
\begin{aligned}
a &= \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{x + \sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{x^2 - (x^2-1)}{x + \sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{-1} \\
&= -\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).
\end{aligned}
$$

Kuvassa 3.2 on esitetty *hyperbolisen sinin, kosinin ja tangentin* käänteisfunktioiden kuvaajat.



Kuva 3.2. *Hyperbolisen sinin, kosinin ja tangentin käänteisfunktioiden kuvaajat.*

Esimerkki 3.2. Hyperbolisille funktioille on voimassa monia samantapaisia kaavoja kuin trigonometrisille funktioille, kuten

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$
2. $2\cosh x \sinh x = \sinh 2x,$
3. $\sinh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2},$
4. $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2}.$

Todistukset jokaiselle yhtälöille on esitetty alla. Esitetään ensin todistus yhtälölle 1. Kun sijoitetaan yhtälön vasemman puolen hyperbolisen sinin ja kosinin määritelmiin x, saadaan sieventämällä tulokseksi luku 1.

$$
\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{2^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(vrt. [11, s. 109])

Yhtälö 2 todistetaan seuraavasti hyödyntämällä hyperbolisen sinin ja kosinin määritelmää:

$$
\begin{aligned}
2\cosh x \sinh x &= 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= \left(e^x + e^{-x}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{2x} - 1 + 1 - e^{-2x}}{2} \\
&= \sinh 2x.
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla hyperbolisen sinin määritelmään termi x ja korottamalla lauseke toiseen potenssiin, saadaan todistettua yhtälö 3.

$$
\begin{aligned}
\sinh^2 x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Yhtälö 4 todistetaan samalla tavalla kuin yhtälö 3. Erona on, että yhtälön 4 tapauksessa todistamisessa käytetään hyperbolisen kosinin määritelmää.

$$\begin{aligned}\cosh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(vrt. [1, s. 181 – 182])

3.2 Hyperbolinen trigonometria

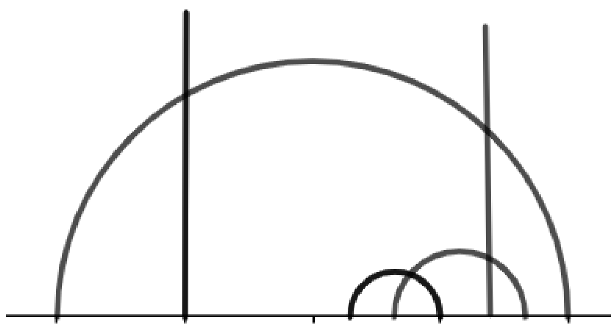
Hyperbolista tasoa on mahdollista kuvata monilla erilaisilla tavoilla, joita kutsutaan *malleiksi*. Yksi näistä malleista on *puolitason malli*.

Määritelmä 3.3. [1, s. 1] Ylempi puolitaso $\mathbb{H}$ on sellaisten kompleksilukujen joukko, joiden imaginaariosa on positiivinen: $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.

Puolitason mallissa on olemassa kaksi näennäisesti erityyppistä *hyperbolista suoraa*. Toinen suora muodostuu kohtisuorana x-akselille ja toinen euklidisena puoliympyränä, jonka keskipiste sijaitsee x-akselilla.

Määritelmä 3.4. Reaaliakselia vastaan kohtisuorassa olevia ylemmän puolitason puolisuoria ja puoliympyröitä kutsutaan *hyperbolisiksi suoriksi*.

Kuvassa 3.3 on esitetty esimerkkejä erilaisista hyperbolisista suorista puolitasossa $\mathbb{H}$ [1, s. 2].



Kuva 3.3. *Hyperbolisia suoria puolitasossa* $\mathbb{H}$.

Määritelmä 3.5. Jatkuvaa kuvausta $\delta : [a,b] \to \mathbb{C}$ kutsutaan *poluksi kompleksitasossa* (vrt. [1, s. 73]).

Seuraavaksi määritellään polun hyperbolinen pituus ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$.

Määritelmä 3.6. [1, s. 86] Olkoon $\delta : [a,b] \to \mathbb{H}$ ylemmän puolitason polku. *Hyperbolinen pituus* polulle δ on

$$L_{\mathbb{H}}(\delta) = \int_\delta \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} |dz| = \int_a^b \frac{|\delta'(t)|}{\operatorname{Im}(\delta(t))} dt.$$

Esimerkki 3.7. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\delta : [0,1] \to \mathbb{H}, \quad \delta(t) = t + i(t^n + 1)$$

polku. Hyperbolinen pituus polulle saadaan seuraavasti:
Koska

$$|\delta'(t)| = \left|1 + int^{n-1}\right| = \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}}$$

ja

$$\operatorname{Im}(\delta(t)) = t^n + 1,$$

saadaan polun δ hyperboliseksi pituudeksi

$$L_{\mathbb{H}}(\delta) = \int_\delta \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} |dz| = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}}}{1 + t^n} dt.$$

Valitaan nyt $n = 1$. Tällöin saadaan

$$L_{\mathbb{H}}(\delta) = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{1+t} dt = \sqrt{2} \ln 2.$$

(vrt. [1, s. 86, 238])

Hyperbolisten monikulmioiden määritelmiä varten tarvitaan lokaalisti äärellisen kokoelman määritelmä. Lisäksi tarvitaan hyperbolisen puolitason määritelmä.

Määritelmä 3.8. Hyperbolinen puolitaso voi olla joko *avoin* tai *suljettu*. Hyperbolisen tason suoran l komplementtijoukko sisältää kaksi erillistä osaa, jotka molemmat ovat suoran l määrittämiä avoimia puolitasoja. *Suljettu puolitaso* saadaan hyperbolisen suoran l ja sen määrittämän avoimen puolitason yhdisteenä.

Määritellään seuraavaksi lokaalisti äärellinen kokoelma. Tätä varten määritellään vielä *avoin hyperbolinen kiekko* U.

Määritelmä 3.9. [1, s. 108] Pisteen z ϵ-säteinen kiekkoympäristö kompleksitasossa on

$$U_\epsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \epsilon\}.$$

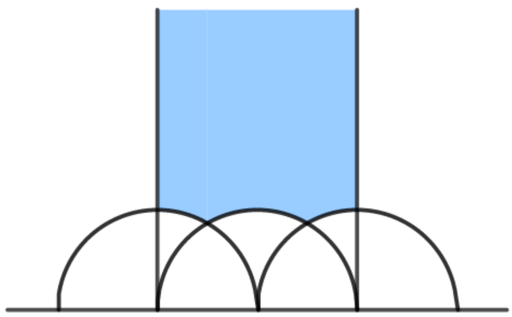
Määritelmä 3.10. [1, s. 154] Olkoon $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kokoelma hyperbolisen tason H puolitasoja. Jokaisella $\alpha \in A$ olkoon l_α puolitason $\mathcal{H}_\alpha$ määrittävä hyperbolinen suora. Kokoelmaa $\mathcal{H}$ sanotaan *lokaalisti äärelliseksi*, jos jokaista $z \in H$ kohti on olemassa sellainen $\epsilon > 0$, että $U_\epsilon(z) \cap l_\alpha \neq \emptyset$ vain äärellisen monella indeksillä $\alpha \in A$.

Määritellään seuraavaksi *konveksi joukko*.

Määritelmä 3.11. [1, s. 146] Olkoon X hyperbolisen tason osajoukko. Osajoukon X sanotaan olevan konveksi, jos kaikille $x, y \in X$, missä $x \neq y$, on olemassa niitä yhdistävä suljettu hyperbolinen jana l_{xy} osajoukossa X.

Hyperbolisten monikulmioiden määrittelyssä tarvitaan konveksin joukon määritelmää.

Määritelmä 3.12. [1, s. 156] *Hyperbolinen monikulmio* on hyperbolisen tason suljettu, konveksi osajoukko, joka voidaan esittää suljettujen hyperbolisten puolitasojen $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in A$, leikkauksena, missä kokoelma $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on lokaalisti äärellinen.



Kuva 3.4. *Hyperbolinen monikulmio puolitasossa* $\mathbb{H}$ *[1, s. 157].*

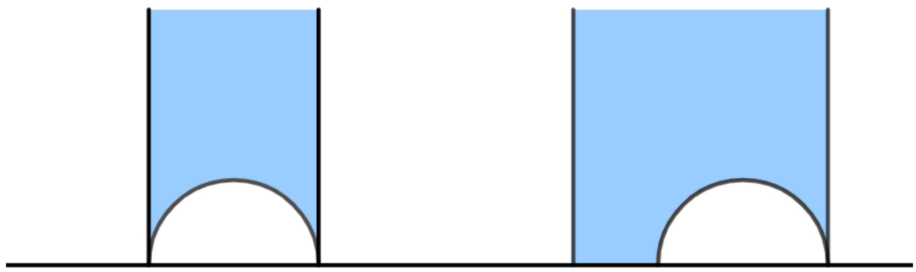
Hyperbolisia monikulmioita on useita erilaisia. Seuraavalla määritelmällä rajataan tarkasteltavien monikulmioiden luokkaa.

Määritelmä 3.13. [1, s. 162] Monikulmiota P, jolla on äärellisen monta sivua, kutsutaan hyperbolisessa tasossa *järkeväksi monikulmioksi*, jos P ei sisällä avointa puolitasoa.

Hyperbolinen kolmio on hyperbolisessa geometriassa *järkevä monikulmio.*

Määritelmä 3.14. [1, s. 163] *Hyperbolinen kolmio* on järkevä hyperbolinen monikulmio, jolla on kolme sivua.

Kuvassa 3.5 esitetään vasemmalla hyperbolinen kolmio ja oikealla kolmisivuinen hyperbolinen monikulmio. Kuvassa värillinen alue esittää hyperbolista monikulmiota. Hyperbolisen kolmion kärjet voivat sijaita ylemmässä puolitasossa, reaaliakselilla tai äärettömyydessä. Tämän vuoksi niitä on eri näköisiä. Kuvan 3.5 kolmion kaksi kärkeä ovat reaaliakselilla ja kolmas äärettömyydessä. Hyperbolinen kolmio, jonka kaikki kärjet ovat ylemmässä puolitasossa, vastaa enemmän mielikuvaa euklidisesta kolmiosta. Tällainen kolmio on kuvassa 3.6.



Kuva 3.5. *Vasemmalla on hyperbolinen kolmio ja oikealla hyperbolinen komisivuinen monikulmio puolitasossa* $\mathbb{H}$ *[1, s. 163].*

Tarkastellaan seuraavaksi trigonometrisiä laskukaavoja hyperbolisille kolmioille. Hyperbolisille kolmioille on voimassa kolme trigonometristä lakia: kosinilause I, kosinilause II ja sinilause.

Euklidisessa geometriassa on voimassa kosinilause: Olkoon Δ euklidinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ sekä kulmien vastakkaisten sivujen pituudet a, b ja c. Tällöin on voimassa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Hyperbolisessa geometriassa on voimassa vastaava lause.

Lause 3.15. (Kosinilause I) Olkoon Δ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ ja kulmien vastaisten sivujen pituudet ovat a, b ja c. Tällöin

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh c \sinh b \cos\alpha$$

(vrt. [1, s. 183]).

Todistus. Sivuutetaan. □

Hyperbolisessa geometriassa on voimassa myös toinen kosinilause, jonka mukaan hyperbolisen kolmion sivun hyperbolinen pituus määräytyy kolmion sisäkulmien mukaan.

Lause 3.16. (Kosinilause II) Olkoon Δ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ ja kulmien vastaisten sivujen pituudet ovat a, b ja c. Tällöin

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cosh c.$$

Todistus. Merkitään $A = \cosh a, B = \cosh b$, ja $C = \cosh c$. Ensimmäisen kosinilauseen perusteella

$$A = BC - \sinh b \sinh c \cos \alpha.$$

Kirjoitetaan kaikki toisen kosinilauseen termit muuttujien A, B ja C avulla. Huomaa, että esimerkin 3.1 kohdan 1 perusteella esimerkiksi $\sinh^2 a = \cosh^2 a - 1 = A^2 - 1$. Näin ollen saadaan

$$\cos\alpha = \frac{BC - A}{\sinh b \sinh c} = \frac{BC - A}{\sqrt{(B^2 - 1)(C^2 - 1)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{AB - C}{\sinh a \sinh b} = \frac{AB - C}{\sqrt{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}},$$

$$\cos\beta = \frac{AC - B}{\sqrt{(A^2 - 1)(C^2 - 1)}}.$$

Jotta $\sin\alpha$ ja $\sin\beta$ saadaan laskettua, tarvitaan seuraavaa tulosta, joka seuraa ensimmäisestä kosinilauseesta ja esimerkin 3.1 kohdasta 1.

Ensimmäisen kosinilauseen perusteella saadaan, että

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha &= 1 - \cos^2\alpha \\
&= 1 - \left(\frac{BC - A}{\sinh b \sinh c}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{A^2 - 2ABC + B^2C^2}{\sinh^2 b \sinh^2 c}.
\end{aligned}$$

Kun merkitään $1 = \frac{\sinh^2 b \sinh^2 c}{\sinh^2 b \sinh^2 c}$, saadaan yhtälö muotoon

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha &= \frac{\sinh^2 b \sinh^2 c}{\sinh^2 b \sinh^2 c} - \frac{A^2 - 2ABC + B^2C^2}{\sinh^2 b \sinh^2 c} \\
&= \frac{\sinh^2 b \sinh^2 c - A^2 + 2ABC - B^2C^2}{\sinh^2 b \sinh^2 c}.
\end{aligned}$$

Kun otetaan yhtälöstä neliöjuuri puolittain ja merkitään $\sinh^2 b \sinh^2 c = (B^2 - 1)(C^2 - 1)$, saadaan

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\sqrt{(B^2 - 1)(C^2 - 1) - A^2 + 2ABC - B^2C^2}}{\sqrt{(B^2 - 1)(C^2 - 1)}} \\
&= \frac{\sqrt{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}}{\sqrt{(B^2 - 1)(C^2 - 1)}}.
\end{aligned}$$

Vastaavasti termin $\sin\beta$ yhtälöksi saadaan

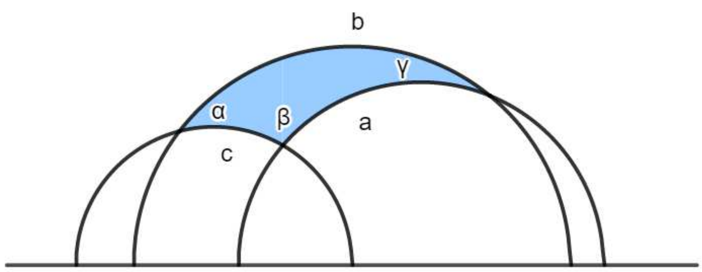
$$\sin\beta = \frac{\sqrt{1+2ABC-A^2-B^2-C^2}}{\sqrt{(A^2-1)(C^2-1)}}.$$

Sijoittamalla ja sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} &= \frac{\frac{(BC-A)(AC-B)}{\sqrt{(B^2-1)(C^2-1)}\sqrt{(A^2-1)(C^2-1)}} + \frac{AB-C}{\sqrt{(A^2-1)(B^2-1)}}}{\frac{1+2ABC-A^2-B^2-C^2}{\sqrt{(B^2-1)(C^2-1)}\sqrt{(A^2-1)(C^2-1)}}} \\
&= \frac{(BC-A)(AC-B)+(AB-C)(C^2-1)}{1+2ABC-A^2-B^2-C^2} \\
&= \frac{(2ABC-A^2-B^2-C^2+1)\,C}{2ABC-A^2-B^2-C^2+1} \\
&= C \\
&= \cosh c.
\end{aligned}$$

(vrt. [1, s. 183, 258]) □

Esimerkki sellaisesta hyperbolisesta kolmiosta, jonka kaikki sivut ovat euklidisten puoliympyröiden kaaria, on esitetty kuvassa 3.6.



Kuva 3.6. *Hyperbolinen kolmio hyperbolisessa puolitasossa* $\mathbb{H}$.

Sekä euklidisessa että hyperbolisessa geometriassa voidaan ensimmäisen kosinilauseen avulla laskea kolmion kulmat, kun tunnetaan sen sivujen pituudet. Toisesta kosinilauseesta seuraa, että hyperbolisen kolmion sivujen pituudet voidaan laskea, kun tunnetaan kolmion kulmat. Tästä seuraa, että hyperbolisen kolmion kulmat määräävät sen pinta-alan. Tässä suhteessa hyperbolinen ja euklidinen geometria eroavat toisistaan. Euklidiset kolmiot voivat olla yhdenmuotoisia, vaikka niillä olisi eri pituiset sivut ja siis myös eri pinta-alat. Tässä työssä ei käsitellä hyperbolista pinta-alaa. Mainitaan kuitenkin, että hyperbolisen kolmion pinta-alan ja sen kulmien välillä on seuraava yhteys:

Lause 3.17. Olkoon T hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ. Tällöin hyperbolisen kolmion T hyperbolinen pinta-ala on

$$area_{\mathbb{H}}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Todistus. Ks. [1, s. 172].

□

Koska hyperbolisen kolmion pinta-ala on suurempi kuin nolla, seuraa lauseesta 3.3, että sen kulmien summa on pienempi kuin π. Tässäkin suhteessa hyperboliset kolmiot eroavat euklidisista kolmioista, joiden kulmien summa on aina π. Lasketaan seuraavaksi esimerkiksi hyperbolisen kolmion T sivujen pituudet.

Esimerkki 3.18. Olkoon T hyperbolinen kolmio, ja sen kulmat $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{3}$ ja $\gamma = \frac{\pi}{7}$. Olkoot a, b ja c kulmien α, β ja γ vastakkaisten sivujen hyperboliset pituudet.

Hyperbolisille pituuksille pätee, että

$$\cosh a = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)} \sim 1,1989;$$

$$\cosh b = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \sim 1,1524;$$

$$\cosh c = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sqrt{3}}{3} \sim 1,0403.$$

Esimerkin 3.1 perusteella hyperbolisen kosinin käänteisfunktion lausekkeen avulla saadaan laskettua hyperboliset pituudet a, b ja c. Lasketaan hyperboliset pituudet kaavalla $a = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, sillä pituuksien tulee olla vähintään nolla. Hyperboliseksi pituudeksi a saadaan

$$a = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)^2 - 1}\right) = 0,6207.$$

Hyperboliseksi pituudeksi b saadaan

$$b = \ln\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)^2 - 1}\right) = 0,5453.$$

Ja hyperboliseksi pituudeksi c saadaan

$$c = \ln\left(\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\left(\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1}\right) = 0,2830.$$

Huomataan, että kolmion T kulmien summa on

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{7} = \frac{41\pi}{42} < \pi.$$

Lauseen 3.3 mukaan kolmion T pinta-ala on

$$area_{\mathbb{H}}(T) = \pi - \frac{41\pi}{42} = \frac{\pi}{42}.$$

Euklidisessa geometriassa on voimassa sinilause: Olkoon Δ euklidinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ sekä kulmien vastakkaisten sivujen pituuden a, b ja c. Tällöin on voimassa

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Vastaavanlainen tulos voidaan todistaa hyperbolisille kolmioille:

Lause 3.19. (Sinilause) Olkoon Δ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ sekä kulmien vastakkaisten sivujen pituudet a, b ja c. Tällöin

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin b} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}.$$

Todistus. Merkitään $A = \cosh a, B = \cosh b$, ja $C = \cosh c$. Ensimmäisen kosinilauseen perusteella

$$A = BC - \sinh c \sinh b \cos\alpha.$$

Koska sinifunktiot sekä hyperboliset sinifunktiot tämän lauseen tilanteessa saavat ainoastaan positiivisia arvoja, riittää osoittaa, että

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c}.$$

Ensimmäisen kosinilauseen perusteella saadaan, että

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{BA - C}{\sinh a \sinh b}\right)^2,$$

siis

$$\begin{aligned}
\sin^2\gamma \sinh^2 a \sinh^2 b &= \left(1 - \left(\frac{BA - C}{\sinh(a)\sinh(b)}\right)^2\right)\left(A^2-1\right)\left(B^2-1\right) \\
&= \left(1 - \frac{A^2B^2 - 2ABC + C^2}{(A^2-1)(B^2-1)}\right)\left(A^2-1\right)\left(B^2-1\right) \\
&= \left(A^2-1\right)\left(B^2-1\right) - \frac{(A^2B^2 - 2ABC + C^2)(A^2-1)(B^2-1)}{(A^2-1)(B^2-1)} \\
&= \left(A^2-1\right)\left(B^2-1\right) - A^2B^2 - C^2 + 2ABC \\
&= 1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC.
\end{aligned}$$

Kun yhtälön molemmat puolet jaetaan termillä $\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c$, saadaan

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c} = \frac{1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2)}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}.$$

Yhtälön oikea puoli ei muutu, jos kulmia α, β tai γ permutoidaan, joten yhtälön vasen puoli ei myöskään saa muuttua, jos permutoidaan kyseisiä kulmia α, β tai γ. Tästä seuraa, että

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c}$$

(vrt. [1, s. 258]). $\square$

Euklidisessa geometriassa Pythagoraan lause kertoo suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien ja kolmion kulmien suhteen. Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisen kolmion kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö. Olkoot a ja b suorakulmaisen kolmion kateetteja ja c suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Tällöin

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Seuraavaksi todistetaan vastaava lause hyperbolisessa geometriassa.

Kuvassa 3.7 on hyperbolisen Pythagoraan teoreeman mukainen kolmio hyperbolisessa puolitasossa $\mathbb{H}$. Hyperbolisen kolmion kulma $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Lause 3.20. (Pythagoraan lause hyperbolisille kolmioille) Olkoon Δ kolmio ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$. Olkoot kolmion kulmat $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta$ ja γ. Olkoot kulmia vastaavien vastakkaisten sivujen hyperboliset pituudet a, b ja c. Tällöin

$$\cosh a = \cosh b \cosh c.$$

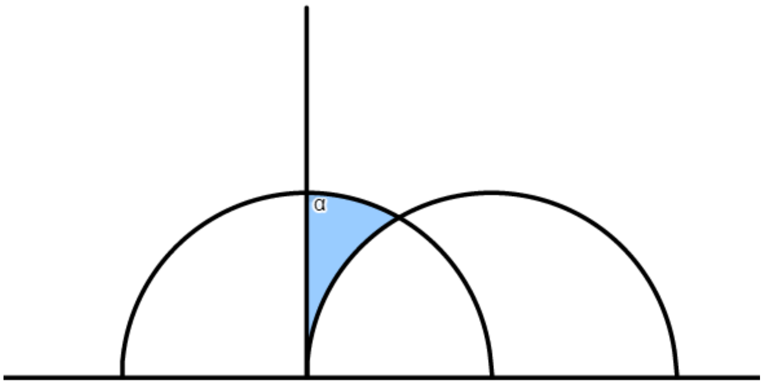
Todistus. Oletetaan ensimmäinen hyperbolinen kosinilause tunnetuksi. Olkoon hyperbolisen kolmion Δ kulma $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Tällöin

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Ensimmäisestä hyperbolisesta kosinilauseesta seuraa tällöin

$$\begin{aligned}\cosh a &= \cosh b \cosh c - \sinh c \sinh b \cos\alpha \\ &= \cosh b \cosh c - \sinh c \sinh b \cos\frac{\pi}{2} \\ &= \cosh b \cosh c.\end{aligned}$$

$\square$



Kuva 3.7. *Hyperbolinen kolmio, jonka kulma α on suora.*

Kuvassa 3.7 ympyrät ja suora rajoittavat pienen hyperbolisen kolmion. Suoran ja vasemmanpuolisen ympyrän leikkauspiste on kolmion kärki ja kulma α on 90 astetta.

4. TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on tutkia opiskelijoiden kielentämistä matemaattisen keskustelun aikana. Lisäksi tavoitteena on tutkia, millaisia matemaattisen osaamisen piirteitä keskusteluista on havaittavissa. Tarkastelun kohteena on myös mahdolliset erot ryhmien työskentelytavoissa kahden eri opetusmenetelmän välillä.

Tässä luvussa esitellään tutkimuskysymysten lisäksi kahden eri Insinöörimatematiikan perusteet -kurssin toteutuskertojen käytännön järjestelyjä, kuten opintojaksojen aikatauluja, materiaaleja ja viikkoharjoituksia. Lisäksi tässä luvussa esitellään keskustelutehtävät, joita opiskeilijat ratkaisivat ja jotka videoitiin tutkimusta varten. Luvun lopussa kerrotaan tutkimuksen menetelmistä ja esitellään tulokset.

4.1 Tutkimusongelmat ja tutkimuskysymykset

Tähän tutkimukseen kerättiin aineistoa kahdella erillisellä Insinöörimatematiikan perusteet -kurssin toteutuskerralla, käänteisen opetuksen toteutuksella sekä luentototeutuksella, Tampereen yliopistossa lukuvuonna 2020–2021.

Tutkimuksessa haluttiin vastata seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

1. Millaista matematiikan osaamista opiskelijoiden keskusteluista on löydettävissä Insinöörimatematiikan perusteet -kurssilla?
2. Millaisia kielentämisen keinoja ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijat käyttävät matemaattisen keskustelun yhteydessä
3. Onko matematiikan keskustelutehtävien ratkaisemisen yhteydessä käytetyillä työskentelytavoilla eroa käänteiselle toteutukselle ja luentototeutukselle osallistuneiden opiskelijoiden välillä?

4.2 Opintojaksototeutusten käytänteet

Tutkimukseen osallistui ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoita Insinöörimatematiikan perusteet -kurssilla. Kurssilla oli kaksi toteutustapaa: käänteisen opetuksen toteutus sekä perinteinen luentoihin ja harjoituksiin perustuva toteutus. Kurssin kummatkin toteutukset pidettiin samanaikaisesti syksyllä 2020.

Käänteisen opetuksen Insinöörimatematiikan perusteet -kurssi oli tarkoitettu automaatiotekniikan, konetekniikan, materiaalitekniikan, rakennustekniikan sekä ympäristö- ja energiatekniikan ensimmäisen vuoden opiskelijoille. Muiden koulutusohjelmien ensimmäisen vuoden opiskelijat osallistuivat rinnakkaiselle luentototeutuskerralle. Toteutus oli siis ennalta määrätty tutkinto-ohjelman mukaan, joten opiskelijat eivät itse voineet valita toteutustapaa. [12] [13]

Käänteisen opetuksen toteutuksella ei luennoitu ollenkaan, vaan opiskelijalle annettiin ”suurempi vastuu tutustua ensin itsenäisesti käsiteltäviin asioihin kurssimonisteen, opetusvideoiden ja verkkotehtävien avulla” [12]. Opiskelijoiden edistystä tuettiin ja seurattiin viikottaisilla pienryhmäkeskusteluilla, joissa käytiin opettajan ja pienryhmän välistä keskustelua kurssin etenemisestä (prime time -tilaisuus). Näillä pienryhmäkeskusteluilla opettaja pyrki saamaan tietoa kunkin opiskelijan osaamisesta kurssilla. Tarpeen vaatiessa opiskelija ohjattiin tukitoimien pariin. Pienryhmäkeskusteluihin liittyi myös palautettava ryhmätehtävä, joka tehtiin joko ennen ryhmäkeskustelua tai sen jälkeen. Kurssilla oli kullekin pienryhmälle oma harjoitustilaisuus kerran viikossa. Harjoitustilaisuudessa käsiteltiin Moodlessa jaossa olevia harjoitustehtäviä, joita oli kuusi viikossa. Neljä niistä oli tarkoitus olla tehtynä ja palautettuna kurssin Moodle-alustalle harjoitustilaisuuteen mennessä, ja näiden etukäteistehtävien ratkaisuja käsiteltiin tilaisuudessa käymällä läpi välivaiheet. Kahta muuta tehtävää oli mahdollista jäädä tämän jälkeen tekemään harjoitustilaisuudessa ohjatusti. Palautettaville tehtäville tehtiin kummallekin itsearviointi Moodlessa. Lisäksi tehtävät vertaisarvioitiin muiden opiskelijoiden toimesta. Joka aiheviikon lopulla opiskelija teki myös itsearviointia omasta oppimisestaan. [12]

Opintojaksolla oli siis suuri määrä erilaisia tehtäviä, joiden painoarvo arvostelussa oli yhteensä 70 prosenttia. Kurssin suorittamiseen kuului myös yksilötyönä tehtävä portfolio, joka yhdessä tentin kanssa muodosti loput 30 prosenttia kurssin arvosanasta. Portfolion ideana oli jokaisen aiheviikon tai -kokonaisuuden päätteeksi koostaa tiivistelmä tai käsitekartta oleellisimmista asioista. Kurssi oli mahdollista suorittaa hyväksytysti ilman tenttiä. [12]

Insinöörimatematiikan luentototeutuksena järjestetyllä kurssilla pidettiin laskuharjoitukset kerran viikossa. Laskuharjoituksissa opiskelija sai vapaasti laskea harjoitustehtäviä, ja kysyä niihin apua tarvittaessa. Harjoitustehtäviin sisältyi tehtäviä, jotka ratkaistiin paperille ja palautettiin Moodle-alustalle. Paperitehtäviä oli viikoittain kuusi kappaletta. Pisteiden saaminen tehtävistä edellytti palautettujen tehtävien itsearviointia, sekä toisen opiskelijan tehtävien vertaisarviointia. Harjoitustehtäviin sisältyi myös verkkotehtäviä, joita oli myös kuusi kappaletta viikoittain. Kurssin tenttiin osallistuminen edellytti, että harjoitustehtäviä oli oltava tehtynä puolet kaikista harjoitustehtävistä. Harjoitustehtävien painoarvo arvostelussa oli 50 prosenttia ja tentin toiset 50 prosenttia. [13]

Kummankin toteutuksen ensimmäisillä viikoilla opiskelijoilta kerättiin tutkimusluvat kurssin

Moodle-alustan kyselylomakkeen kautta. Tutkimuksen aineistossa esiintyvät keskustelutehtävät sisältyivät osaksi kurssisuoritusta kaikilla kurssin opiskelijoilla, mutta tutkimukseen valittiin keskustelutallenteita vain sellaisilta opiskelijoiden pienryhmiltä, joissa jokainen opiskelija oli antanut tutkimusluvan.

4.3 Tutkimusaineisto

Tutkimuksen aineistona ovat käänteisen opetuksen toteutuksessa sekä luentototeutuksessa opiskelijoiden ryhmässä tuottamat suulliset keskustelutehtävien ratkaisut. Aineisto kerättiin syyslukukaudella 2020–2021. Tutkimusaineisto koostuu kahdesta käänteisen toteutuksen ja kahdesta luentototeutuksen taltioidusta ryhmäkeskustelusta. Ryhmäkeskustelun aikana opiskelijat ratkaisivat keskustellen kaksi Insinöörimatematiikan kurssin tehtävää. Tehtävät on esitelty alla. Opiskelijat keskustelivat tehtävistä Teams-etäyhteydellä, ja keskustelut taltioitiin käyttäen Teamsin nauhoitus-toimintoa. Taltiointi sisälsi siis Teams-alustan videokuvaa ja äänitallenteen. Esimerkiksi oman näytön jakaminen muille ja kameran päällä pitäminen niin, että kuva näkyy, oli vapaaehtoista.

Luentototeutuksella keskusteluryhmien valinta tapahtui Moodle-alustalla, ja kukin opiskelija sai valita ryhmänsä itse sopivimman ajankohdan perusteella. Ryhmän maksimikoko oli kahdeksan henkilöä. Käänteisen opetuksen toteutuksessa pienryhmät määräytyivät tutkinto-ohjelman mukaan jo kurssin alussa, eikä keskustelutehtävää varten tarvinnut ryhmäytyä uudelleen. Ryhmä valitsi kaikille ryhmän jäsenille yhteisesti sopivan ajankohdan tehtävien tekemistä ja taltiointia varten. Opiskelijoille annettiin tehtäväksi ratkaista ryhmässä kaksi matematiikan tehtävää keskustellen.

Tutkimuksessa tutkittiin seuraavanlaisten kielentämistehtävien pohjalta käytävää keskustelua:

1. Virheiden etsintä: annetusta ratkaisusta etsitään virheet, ja ratkaistaan ne [18]. Ratkaisu on usein annettu matematiikan symbolikielellä. Tämän tyyppiset tehtävät edistävät opiskelijan proseduraalista sujuvuutta, käsitteellistä ymmärtämistä ja mukautuvaa kompetenssia [36].
2. Kysymykseen vastaaminen ja vastauksen perusteleminen: selitys ja perustelut annetaan luonnollisella kielellä [26]. Tehtävä voi liittyä esimerkiksi kuvaajan tulkintaan, tai yhtälön ratkaisun sanalliseen perustelemiseen. Tämän tyyppiset tehtävät edistävät luonnollisen kielen käyttöön liittyvää mukautuvaa kompetenssia, kun opiskelijalta kysytään selityksiä ja perusteluja sekä vahvistavat strategista kompetenssia. [36]

Ensimmäisessä tehtävässä opiskelijoiden tuli löytää virheet yhtälön ratkaisusta, keskustella niistä ja korjata virheet keskustelun aikana. Tehtävästä tuli palauttaa oikea ratkaisu kirjallisena kurssin Moodle-alustalle. Tehtävä 1 on esitetty kuvassa 4.1. Toinen tehtävä oli kuvaajan tulkinta -tehtävä. Tehtävässä tuli tulkita kolmen funktion, hypebolisen sinin, kosinin ja tangentin kuvaajia, ja vastata annettuihin kysymyksiin suullisesti perustellen. Kirjallista ratkaisua ei tässä tehtävässä vaadittu. Tehtävä 2 on esitetty kuvassa 4.2.

1. Korjatkaa virheet yhtälön $5\cosh x - \sinh x = 5$ virheellisestä ratkaisusta sekä selittäkää sanallisesti, mitä tehtävässä tapahtuu. Tallenteen lisäksi palauttakaa ratkaisusta kirjallinen korjattu versio Moodleen. Palautustiedoston alkuun kirjoitetaan kaikkien keskusteluun osallistuneiden nimet pisteiden kirjaamista varten.

Virheellinen ratkaisu:

$$\begin{aligned} 5\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x} - e^x}{2} &= 5 \\ \frac{5}{2}e^x - \frac{5}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x &= 5 \\ 2e^x - 3e^{-x} &= 5 \\ 2e^x + 5 - 3e^{-x} &= 0 \\ 2\left(e^x\right)^2 + 5e^x - 3e^{-x}e^x &= 0 \\ 2\left(e^x\right)^2 + 5e^x - 3 &= 0 \\ 2t^2 + 5e^x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

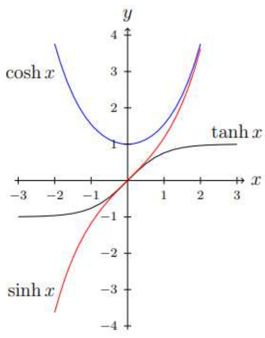
$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$x = \ln(-1) = -\ln 1 = -1$$

Kuva 4.1. *Insinöörimatematiikan perusteet -kurssin ensimmäinen keskustelutehtävä.*

2. Tätä tehtävää ei tarvitse palauttaa kirjallisesti, mutta sen pitää löytyä tallenteesta. Selvittäkää kuvan avulla, mitä seuraavista ominaisuuksista on funktioilla $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \cosh x, \quad g(x) = \sinh x \quad \text{ja} \quad h(x) = \tanh x.$$



(a) Onko funktio parillinen funktio? (Käsitelkää jokainen kolmesta funktiosta erikseen.)

(b) Onko funktio pariton funktio?

(c) Onko funktio injektio? Jos ei, voiko siitä saada injektion, jos rajoittaa määrittelyjoukkoa jotenkin, mutta ei maalijoukkoa?

(d) Onko funktio surjektio? Jos ei, voiko siitä saada surjektion, jos rajoittaa määrittelyjoukkoa jotenkin, mutta ei maalijoukkoa?

(e) Onko funktio bijektio? Jos ei, voiko siitä saada bijektion, jos rajoittaa määrittelyjoukkoa jotenkin, mutta ei maalijoukkoa?

Kuva 4.2. *Insinöörimatematiikan perusteet -kurssin toinen keskustelutehtävä.*

4.4 Tutkimusmenetelmät ja aineiston analyysi

Tämä tutkimus voidaan karkeasti jakaa kahteen tarkasteltavaan osaan: opiskelijoiden keskusteluista löydettävät matemaattisen osaamisen piirteet sekä matemaattinen kielentäminen. Näiden aiheiden lähempi tarkastelu ja tämän tutkimuksen aineisto johdattaa laadullisten tutkimusmenetelmien pariin. Kvalitatiivisessa tutkimuksessa aineiston määrä voi vaihdella paljonkin. Keskeisessä roolissa ei ole niinkään aineiston koko, sillä kvalitatiivisessa tutkimuksessa tarkoituksena on ymmärtää tiettyä toimintaa, kuvata jotakin tapahtumaa tai antaa teoreettisesti mielekäs tulkinta tutkittavasta ilmiöstä. [7] Lisäksi aineistoa ei ensisijaisesti muokata numeeriseen muotoon [20].

Kvalitatiivisen tutkimuksen aineisto on usein syntynyt ilman että tutkija on vaikuttanut sen syntymiseen. Tällaisia aineistoja ovat esimerkiksi ihmisten keskustelut ja arkinen toiminta. [20] Näin syntyi myös tämän tutkimuksen aineisto, sillä opiskelijat itse taltioivat keskustelunsa. Aineistosta oli havaittavissa, että opiskelijat kokivat keskustelun Teams-alustalla luonnolliseksi ja joskus jopa unohtivat keskustelun taltioinnin olevan päällä. Tässä tutkimuksessa aineisto koostuu neljästä erillisen opiskelijaryhmän taltioidusta keskustelusta eli aineisto on kooltaan melko suppea. Opiskelijoiden keskusteluista pyritään nostamaan esiin aineiston analysoinnin eri vaiheissa tutkimuskysymyksiin vastaavia teemoja mahdollisimman tarkasti.

Laadullisen aineston analyysi luo aineistoon selkeyttä ja siten tuottaa uutta tietoa tutkittavasta aiheesta. Sisällönanalyysi on menettelytapa, jonka avulla esimerkiksi kirjalliseen muotoon saatettu puhe tai keskustelu voidaan analysoida systemaattisesti ja objektiivisesti [27, s. 105]. Analyysin keinoin aineisto pyritään tiivistämään kadottamatta aineiston sisältämää tietoa. Tavoitteena on kasvattaa aineiston informaatioarvoa luomalla hajanaisesta aineistosta selkeää ja mielekästä. [7] Myös tässä tutkimuksessa sisällönanalyysi tehtiin kirjallisesta aineistosta. Analysointi alkoi opiskelijoiden käymien keskustelujen litteroinnilla. Keskustelut litteroitiin sanasta sanaan, jotta analyysin tekeminen ja keskustelun seuraaminen olisi helpompaa.

Laadullisen aineiston sisällönanalyysi voidaan tehdä kolmella eri analyysitavalla: aineistolähtöisesti, teoriaohjaavasti tai teorialähtöisesti [27, s.110]. Tässä tutkimuksessa tutkimuskysymykseen 1 vastataan teorialähtöisellä analyysitavalla, ja tutkimuskysymyksiin 2 ja 3 aineistolähtöisellä analyysitavalla.

Teorialähtöisesti toteutetussa sisällönanalyysissa aineiston luokittelu perustuu aikaisempaan viitekehykseen, esimerkiksi johonkin teoriaan [27, s. 116]. Tässä tutkimuksessa luokittelu perustuu Kilpatricin yms. teoriaan matematiikan osaamisen osa-alueista (ks. 2.3). Aineiston analyysirunko on strukturoitu eli aineistosta kerätään vain niitä asioita, jotka sopivat esiteltyyn teoriaan. Tämä on hyödyllistä esimerkiksi silloin, kun aikaisempaa teoriaa testataan uudenlaisessa kontekstissa [27, s. 116]. Tässä tutkimuksessa halutaan selvittää, millaista matemaattista osaamista opiskelijoiden matemaattisesta keskustelusta on löydettävissä. Kyseisen teorian avulla on tutkittu korkeakouluopiskelijoiden kirjallista kielentämistä (ks. [36], [26]), joten mielenkiinto tässä tutkimuksessa on suullisessa kielentämisessä.

Tutkimuskysymykseen 1 vastattaessa opiskelijoiden keskusteluista pyrittiin havannoimaan erityisesti taulukossa 4.1 esiteltyjä matemaattisen osaamisen piirteitä.

käsitteellinen ymmärtäminen	- ymmärrys miksi matemaattinen idea on tärkeä - taito ymmärtää, identifioida ja sanoittaa yhteyksiä käsitteiden välillä - kyky seurata työtään - kyky tunnistaa menettelyn oikeellisuus - matematiikan esittäminen eri tavoin - matemaattisten syy- ja seuraussuhteiden selittäminen
proseduraalinen sujuvuus	- proseduurien sujuva ja tehokas käyttö - mekaaninen laskeminen, sieventäminen
strateginen kompetenssi	- useiden ratkaisutapojen tunnistaminen - ratkaisutapojen valinta tehtävään sopivalla tavalla - erilaisten esitystapojen tunteminen ja oikeanlainen käyttö - kyky ratkaista uusia tehtävätyyppejä
mukautuva kompetenssi	- kyky perustella tulokset - antaa perusteluita ja selityksiä
yritteliäisyys	- matematiikan kokeminen mielekkäänä - matematiikan oppimisen kokeminen tärkeänä

Taulukko 4.1. *Kunkin osa-alueen eritellyt taidot (ks. Kilpatrick ym. [19].)*

Litteroitu aineisto luettiin useaan kertaan läpi, ja tekstistä poimittiin otteita, joista pystyttiin erottamaan matematiikan osaamisen eri osa-alueita. Litteroidun tekstin sekaan merkittiin reunamerkinnöillä, mitä matematiikan osaamista kyseinen kohta sisältää, ja kyseinen ote kirjoitettiin suoran lainauksen muotoon. Otteita on esitelty seuraavassa luvussa.

Tutkimuskysymyksiin 2 ja 3 vastattiin aineistolähtöisellä analyysillä. Aineistolähtöinen analyysi voidaan pääpiirteittäin jakaa kolmeen osaan, joita ovat aineiston pelkistäminen, ryhmittely ja teoreettisten käsitteiden luominen [27]. Tässä tutkimuksessa aineiston pelkistämisellä tarkoitetaan keskustelujen litterointia. Tutkimuskysymyksiin 2 ja 3 vastattaessa litteroitu aineisto tulostettiin paperille, ja luettiin useasti läpi. Useamman läpilukukerran jälkeen aineistosta alkoi nousta esiin erilaisia tapoja ja strategioita, joilla opiskelijat kielensivät matematiikkaa. Näitä tapoja ja strategioita merkittiin ylös eri väreillä litteroituun tekstiin, jotta erilaisten strategioiden ja tapojen havaitseminen litteroidusta aineistosta olisi helpompaa. Kyseisistä kohdista muodostui yläkäsite "kielentämisen strategiat", ja tälle yläkäsitteelle löytyi erilaisia alakäsitteitä, joita ovat: ryhmän jäsenten tuki, kielentäminen matemaattisesti ja ei-matemaattisesti, kurssimateriaalien tuki, mielipiteeseen vetoaminen, matematiikan kolmen kielen hyödyntäminen. Aineistosta kerättiin otteita opiskelijoiden keskustelusta kunkin strategian alle. Seuraavassa luvussa esitellään kuvaavia otteita kustakin alakäsitteestä.

Aineistoa analysoitaessa sisältölähtöisin menetelmin siitä alkoi hahmottua vastauksia tutkimuskysymykseen 3. Keskustelujen tallenteita katsoessa ja litterointeja lukiessa ryhmien työskentelytavoissa oli havaittavissa eroja, joita esitellään tarkemmin seuraavassa luvussa.

5. TUTKIMUSTULOKSET

Tässä luvussa on esitelty tutkimuksen tulokset. Ensin on esitelty tutkimuskysymyksen 1 tulokset, jonka jälkeen tutkimuskysymyksen 2 tulokset. Tutkimuskysymyksen 1 tulokset on jäsennelty tehtäväkohtaisesti. Ensin on esitelty, millaisia matemaattisen osaamisen piirteitä kunkin neljän ryhmän keskustelusta on löydettävissä tehtävästä 1 käydystä keskustelusta, ja sitten vastaavasti tehtävästä 2. Tutkimuskysymyksen 2 tulokset on esitelty alaotsikoittain lukemisen helpottamiseksi.

Tässä kappaleessa opiskelijoiden ryhmät on numeroitu niin, että ryhmät 1 ja 2 ovat käänteisen opetuksen ryhmiä ja ryhmät 3 ja 4 luentototeutuksen ryhmiä. Opiskelijoiden keskusteluista on esitetty suorina lainauksina otteita luotettavuuden parantamiseksi litteroidusta aineistosta niin, että opiskelijat on eritelty erillisinä puhujina anonyymisti merkinnöin OP1, OP2 ja OP3 ja niin edelleen. Opiskelijoiden numerointi seuraa sitä järjestystä, kuinka he oikeasti keskustelivat taltioinnin aikana. Numeroinnin avulla on helpompi seurata, kuinka monta opiskelijaa ottaa osaa keskusteluun.

5.1 Matemaattinen osaaminen

Opiskelijoiden keskusteluista pystyttiin tunnistamaan matemaattisen pätevyyden mallin (ks. Kuva 2.3) avulla erilaisia piirteitä, jotka liittyvät opiskelijoiden matemaattiseen osaamiseen: käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen ja mukautuva kompetenssi sekä yritteliäisyys. Seuraavaksi esitellään opiskelijoiden keskusteluista havaittuja osaamisen piirteitä osa-alue kerrallaan.

Käsitteellinen ymmärtäminen

Käsitteellisen ymmärtämisen piirteitä oli löydettävissä kaikista neljästä ryhmästä. Tehtävästä 1 käydyistä matemaattisista keskusteluista oli havaittavissa taitoa ymmärtää, identifioida ja sanoittaa yhteyksiä käsitteiden välillä sekä kykyä seurata ryhmänsä työskentelyä. Lisäksi keskusteluista oli havaittavissa kykyä esittää matematiikkaa eri tavoin. Tehtävässä 2 korostui etenkin käsitteiden ymmärtäminen ja käsitteiden välisten yhteyksien sanoittaminen sekä matemaattisten syy- ja seuraussuhteiden selittäminen.

Käsitteellinen ymmärtäminen näkyi esimerkiksi ryhmän 1 keskustelussa erityisesti opiskelijoiden kykynä seurata ryhmänsä etenemistä tehtävässä, kykynä löytää virheet tehtävästä 1 ja korjata ne. Opiskelijat huomaavat heti tehtävän toiselta riviltä (Liite A.2) merkkivirheen, ja osaavat korjata sen:

> OP1: ”*Hetkonen miks tähän on tullu miinus viis kahdesosaa?*”
> OP2: ”*Sen pitäis olla plus*”
> OP1: ”*Sitten täsä pitäis olla plussa*”
> OP3: "*Niin sit se on plus*"
> OP1: "*Tänne plussa ja tänne plussa*".

Ryhmä 2 huomasi heti tehtävän 1 virheellisen ratkaisun ensimmäiseltä riviltä (Liite A.1) hyperbolisten funktioiden käytetyn hyperbolisen sinin määritelmän virheelliseksi, mikä osoittaa myös käsitteellistä ymmärtämistä.

> OP1: ”*Onks noi ensinnäkää oikein noi muutetut muodot tossa*”
> OP2: ”*Ei oo, toi sinin muoto on väärin, siel on noi termit väärin päin, eiks oo?*”

Ryhmällä 1 käsitteellinen ymmärtäminen näkyi tehtävässä 2 syy-seuraussuhteiden ymmärtämisenä sekä sanoittamisena ja perustelemisena, kun he keskustelivat, kuinka hyperbolisesta kosinista saisi muodostettua injektion määrittelyjoukkoa rajoittamalla (Liite B, kohta c). Opiskelija osoittaa hyperbolisen kosinin kuvaajaa samalla kertoen:

> OP1: ”*Tästähän saa silloin injektion, kun tän rajottaa sillai, että ku tää on niinku nollasta pienempään tai miinus äärettömästä nollaan, jompikumpi*”.

Tehtävässä 2 ryhmän 2 opiskelijat keskustelivat parillisen funktion (Liite B, kohta b) käsitteestä. He osoittivat ymmärtävänsä käsitteen ja kykyä kielentää ymmärtämäänsä käsitettä suullisesti. Opiskelijat sanoittivat yhteyksiä tehtävässä käytettävien käsitteiden välillä, kun he osasivat kertoa, mikä tekee hyperbolisen kosinin funktion kuvaajasta parillisen:

> OP1: ”*Toi kosini, tai nii, hyperbolinen kosini näyttäis olevan parillinen, osaako kaikki sanoa miksi?*”
> OP2: ”*Vaikka toi, otetaan vaikka x:n arvo yks, niinkun tulee miinus yks, niin edelleen funktion arvo pysyy samana.*”
> OP3: ”*Juu ja se on niinku symmetrinen ton y-akselin suhteen.*”

Keskustellessaan parillisen funktion määritelmästä tehtävässä 2 ryhmän 4 jäsenet osoittivat käsitteellistä ymmärtämistä, ja kielentäessään käsitteen merkitystä muille. Ryhmän 4 jäsenet käyttivät erilaista perustelua kuin esimerkiksi ryhmän 2 opiskelijat:

> OP1: "*Joo no eikö parillisen funktion määritelmä oo että f x on yhtä suuri kuin f miinus x.*"
> OP4: "*Öö joo mun mielestä.*"
> OP3: "*Elikkä näistä parillinen on tuo kosini.*"

Ryhmän 3 keskustelu tehtävästä 2 oli aktiivista ja sujuvaa. Ryhmän jäsenet kyselivät toisiltaan kysymyksiä, ja ratkaisivat tehtävää yhdessä. Opiskelija esittää kysymyksen tehtävän a-kohtaan liittyen ja toinen opiskelija vastaa. Sekä kysyjä että vastaaja osoittavat ymmärtävänsä funktion parillisuuden käsitteen ja osaavat sanoittaa yhteyksiä käsitteiden välillä. Lisäksi nämä kaksi opiskelijaa antavat erilaiset selitykset samalle käsitteelle, eli he esittävät matematiikkaa eri tavoin. Tämä on osoitus käsitteellisestä ymmärtämisestä.

> OP3: "*Johtuuks toi parillinen siitä just et se saa niiku sen yhen arvon kahella eri määrittelyjoukon arvolla?*"
> OP1: "*Jos se on parillinen niin f(x):ä on yhtä suuri kuin f miinus x.*"

Proseduraalinen sujuvuus

Proseduraalista sujuvuutta tarvitaan etenkin erilaisia laskutoimituksia ratkaistaessa. Proseduraalisen sujuvuuden piirteitä, kuten proseduurien sujuvaa ja tehokasta käyttöä sekä mekaanisen laskemisen taitoa oli havaittavissa kaikilla neljällä ryhmällä tehtävästä 1 käydyistä matemaattisista keskusteluista.

Proseduraalista sujuvuutta tarvitaan esimerkiksi yhtälönratkaisussa, joten peruslaskutoimitukset on oltava hallussa tehtävää 1 tehtäessä. Ryhmä 2 osoitti mekaanisen laskemisen taitoa ja proseduurien sujuvaa käyttöä tehtävän 1 ratkaisemisessa, kun he ratkaisivat suullisesti yhtälönratkaisun välivaiheita ja korjasivat virheitä. Ryhmän 2 eräs opiskelija huomaa rivien 3 ja 4 (Liite A.3) välillä virheellisessä ratkaisussa tapahtuneen virheen. Samaan aikaan toinen opiskelija huomaa tehtävän ratkaisun loppuvaiheilla (Liite A.8) luonnollisen logaritmin laskusääntöä koskevan virheen:

> OP1: ”*Nii tos on toi vitonen siirretty toiselle puolelle ton kolmannen rivin jälkeen ja toi on plussaa tuolla toisella puolella.*”
> OP2: ”*Sitte tuo loppu ei oo oikein, x on ln miinus yks, niin se ei oo kyllä yks.*”

Ryhmä 4 lähti ratkaisemaan tehtävää 1 hieman eri tavalla kuin muut ryhmät. Siinä missä muut ryhmät etsivät ensin virheet tehtävästä ja kirjoittivat oikeaa ratkaisua joko samaan aikaan yhden ryhmän jäsenen toimesta tai vasta kokonaan keskustelun tallennuksen jälkeen, ryhmä 4 lähti suoraan tekemään oikeaa ratkaisua kirjallisesti. Virheiden etsintä siis sivuutettiin, ja tehtävä ratkaistiin heti ryhmän kesken oikein. Tehtävän ratkaisun aikana syntyi kuitenkin keskustelua, josta oli löydettävissä matemaattisen osaamisen osa-alueita, etenkin proseduraalista sujuvuutta mekaanisen laskemisen muodossa. Opiskelijat ehdottivat myös eri tapoja ratkaista samaa yhtälöä, mikä osoittaa strategista kompetenssia. Eräs opiskelija ehdotti, että yhtälössä luku viisi vähennettäisiin kummaltakin puolen yhtälöä, ja sen jälkeen kerrottaisiin termillä e^x, kun taas toinen opiskelija sanoi, että lukua viisi ei tarvitse vähentää vielä tässä vaiheessa ratkaisua (Liite A, rivit 3–4):

> OP1: "*Mitä nyt piti tehdä, voiks sen tota pistää jo t sijotuksen vai mitä nyt piti*

tehdä?"

OP4: "*Tuo se vitonen sinne toiselle puolelle ja sitte kerrotaan sillä e potens-siin x:llä tai voihan sen nyt tossakin kertoo periaatteessa.*"

OP3: "*Juu kerro vaa vaikka siinä kohtaa.*"

Strateginen kompetenssi

Strategista kompetenssia oli havaittavissa kaikkien neljän ryhmän matemaattisista keskusteluista tehtävässä 1 ja 2. Strateginen kompetenssi oli havaittavissa useiden ratkaisutapojen tunnistamisena sekä tehtävään sopivan ratkaisutavan valintana kummassakin tehtävässä.

Ryhmä 1 lähti yhdessä ryhmänä etsimään virheitä tehtävästä 1. Ryhmän jäsenet keskustelivat aktiivisesti ja yksi ryhmän jäsenistä kirjoitti keskustelun aikana tehtävän oikeaa ratkaisua ylös paperille. Opiskelijat ratkaisivat tehtävän yhtälöä yksi rivi kerrallaan, jolloin yksi opiskelija kirjoitti oikeaa ratkaisua ylös, ja muut etsivät virheitä samalla keskustellen niistä. Tässä ryhmä osoitti osaavansa esittää matematiikkaa sekä suullisesti että kirjallisesti, mikä on osoitus strategisesta kompetenssista. Strategista kompetenssia huomattiin myös ryhmän 1 ratkaisustrategian valinnassa. Ennen kuin opiskelijat olivat lähteneet ratkaisemaan tehtävää, yksi opiskelijoista ehdotti, että tehtävässä edettäisiin rivi riviltä:

OP1: ”*Ehkä kannattaa tehdä sillai askel kerrallaan.*”

Ryhmä 2 osoitti strategista kompetenssia esittämällä kaksi erilaista lähestymistapaa vastatakseen tehtävässä 2 esitettyihin kysymyksiin. Opiskelija esittää kysymyksen, kuinka tehtävää kannattaisi lähteä ratkomaan. Hän kysyy muilta ryhmän jäseniltä, edetäänkö tehtävässä yksi funktio kerrallaan kohta kohdalta, vai yksi kohta kerrallaan kaikki funktiot läpi käyden. Opiskelijat päätyvät yhdessä tuumin käymään tehtävän yksi kohta kerrallaan kaikki funktiot läpi käyden:

OP1: "*Katotaaks me täs kakkoses niinku jokanen funktio itekseen kohdat a:sta eehen ja sitte seuraavalla funktiolla sama.*"

OP2: "*Näin se taitaa..*"

OP1: "*Vai niinku a kohta jokasella, b kohta jokasella.*"

OP3: "*Tehdään se jälkimmäinen ehdotus, että a-kohta jokasella ja sitte b-kohta jokasella.*"

OP2: "*Joo.*"

OP4: "*No mennää vaik sit tos järjestyksessä että kosini sini tan.*"

Mukautuva kompetenssi

Mukautuvalla kompetenssilla tarkoitetaan kykyä käyttää loogista päättelyä. Mukautuvaa kompetenssia opiskelijat käyttivät etenkin tehtävässä 1, kun he perustelivat miksi jokin tehtävässä tehty välivaihe on väärin. Tehtävässä 2 mukautuva kompetenssi näyttäytyi kykynä antaa perusteluja ja selityksiä kuhunkin tehtävässä esitettyyn kysymykseen sekä kykynä perustella omia päätelmiä ja väitteitä.

Esimerkiksi ryhmä 3 aloitti tehtävän 1 ratkaisemisen osoittamalla mukautuvaa kompetenssia. Eräs opiskelija aloittaa keskustelun kertomalla jo löytämiään virheitä, johon toinen opiskelija lisää perusteluja, miksi juuri ensimmäinen ja toinen rivi (Liite A) on ratkaistu väärin. Opiskelijoiden kyky perustella tehtävässä tehtyjen laskutoimitusten virheellisyys on osoitus mukautuvasta kompetenssista:

> OP1: "*Tässähän on nyt näitä sitten ympyröity elikkä kun tääl on tuolla otettu hyperbolinen sini äxästä elikkä täs on ilmeisesti otettu sen vastaluku, niin sillon pitäis tän etumerkin myös vaihtua plussaksi ja sitte tota tääl on lähetty ottaa tätä viis kahesosaa e x ja sitte tääl on plussa niin tänne on jostain syystä tullu miinus. Sitte tänne on kans tullu vääriä merkkejä* [osoittaa toista riviä]. *Tässä pitäis olla plussa. Toi on periaatteessa ihan oikein.*"
> OP2: "*Mut..*"
> OP1: "*Nii oliks sulla joku kysymys?*"
> OP2: "*Eei vaan niin se ois ollu väärin jos se ois ollu miinus, mut kun sen pitäiskin olla plussa niin se on ihan oikein.*"

Mukautuvaa kompetenssia ryhmän 1 kohdalla löydettiin tehtävästä 2 käydyistä keskusteluista. Opiskelijat osasivat perustella, miksi hyperbolinen kosini on parillinen ja hyperbolinen sini ja tangentti parittomia. Opiskelijat perustelivat funktion parillisuutta tai parittomuutta symmetrisyyden avulla. Mukautuva kompetenssi näyttäytyy siten, että opiskelijat kykenivät löytämään ratkaisun tehtävään ja antavaan järkevän perustelun ratkaisulle:

> OP1: ”*Eiks se oo sillon symmetrinen y-akselin suhteen ni se on parillinen.*”
> OP2: ”*Juu on.*”
> OP3: ”*Siis tää, kosinifunktio on parillinen ja noi muut on parittomii ku ne on symmetrisii origon suhteen.*”

Bijektion määritelmän ryhmän 4 opiskelijat tehtävässä 2 muistivat oikein, mutta edellisen kohdan väärinkäsityksen takia meni e-kohtakin pieleen. Opiskelijat olivat tehtävän d-kohdassa päätyneet siihen, että hyperbolinen tangentti on surjektio (Liite B, kohdat d ja e). Vaikka ryhmä päätyy virheelliseen ratkaisuun, on keskustelusta silti löydettävissä matemaattisen osaamisen piirteitä. Ryhmä osaa sanoittaa käsitteitä, perustella tuloksia ja antaa selityksiä, mikä on osoitus mukautuvasta kompetenssista:

OP4: "*Nonii eli se on bijektio jos se on molemmat eli sitte.*"
OP2: "*Niin bijektio eli siis sini ja tangentti on ja kosinia pitäis vähä rajottaa ni sit siitäki sais*"
OP1: "*Nii just tosta y-akselista.*"
OP4: "*Joo.*"

Yritteliäisyys

Ryhmän 1 jäsenet tekivät tehtävän 1 alusta loppuun huolellisesti, ja löysivät kaikki virheet. Lisäksi he muodostivat tehtävän oikean kirjallisen ratkaisun keskustelun aikana. Keskustelun lopuksi yksi ryhmän 1 jäsen kokosi kaikki ryhmän löytämät virheet ja kertoi ne ääneen. Opiskelija kertoo, kuinka virheellisen ratkaisuin toisella rivillä (ks. Liite A.2) oli merkkivirheitä, ja näistä muodostuu väärä lauseke seuraavalle riville. Lisäksi opiskelija kertoo, että kolmannelta riviltä (Liite A.3) vähennettäessä luku 5 yhtälön molemmin puolin, on luku 5 sittenkin lisätty yhtälön vasemmalle puolelle. Lisäksi rivillä 5 (Liite A.5) yhtälö on kerrottu puolittain termillä e^x, ja merkitty termiä e^x muuttujalla t, on yhtälöön unohdettu laittaa termin e^x tilalle muuttuja t rivillä 6 (Liite A.6)

OP1: ”*Sitten pitää vissiin tälle kameralle selittää vielä niinkun että mitä tehtävässä tapahtuu. – nii täsä kaikki nää virheet nii täällä tuli pari väärää merkkiä eli merkkivirheit tuli, siitä tuli heti väärä lauseke, ja sitte täältä ku siirretää tää, vähennetää puolittai yhtälö vitosella, –, ni täällä pitäis olla miinusmerkki, sit ku tätä on kerrottu e potenssiin x:llä, –, ja sitten täällä on unohtunut sijoittaa tonne t. Tää ratkaisukaava on kai ihan oikein, eiku ei, tuolta puuttuu miinus viis, ja saadaan väärät nollakohdat, sit tää logaritmin lasku tälläi näin on ihan väärin, ei tälläin saa tehdä. Ei tommosta sääntöö oo olemassa että luonnollinen logaritmi miinus ykkösestä on miinus ln1, eikä ln ykkösestä oo ykkönen*”

Ryhmän 1 opiskelijoiden aktiivinen keskustelu, tehtävän saattaminen loppuun nopeasti ja pääseminen oikeaan ratkaisuun kertoo, että matematiikka on heille mielekästä ja tärkeää. Tämä on osoitus ryhmän yritteliäisyydestä.

Yritteliäisyys näyttäytyy myös ryhmän 2 keskustelussa siten, että tehtävän 1 ratkaisemista ei jätetty kesken, vaikka yksi virhe tehtävästä oli jo löydetty. Yksi ryhmän 2 opiskelija oli valmis jättämään tehtävän tekemisen ensimmäisen virheen löytämiseen, mutta muut olivat toista mieltä, ja tehtävä tehtiin loppuun asti. Opiskelijat löysivät ensimmäisen virheen tehtävän toiselta riviltä (Liite A.2). Koska kyseinen virhe vaikuttaa muihinkin yhtälön ratkaisun kohtiin, on virheitä runsaasti lisää.

OP1: ”*Ei kai tätä tarvii sit sen enempää sit alkaa tutkimaan jos se on heti tossa?*”
OP2: ”*Oli siellä myöhemminkin toisen asteen yhtälön ratkaisukaavassakin*

virhe ja tolleen mutta löyty nyt heti sitten alusta”
OP3: ”*Mmm korjatkaa virheet*”
OP1: ”*Kaikki?*”
OP2: ”*Ilmeisesti*”

Tästä opiskelijat jatkoivat virheiden etsimistä ja saattoivat keskustelun loppuun, jonka jälkeen tekivät vielä kirjallisen ratkaisun tehtävästä.

Ryhmän 2 motivaatio ja yritteliäisyys tehtävää 2 kohtaan näkyi virheellisen ratkaisun korjaamisena. Opiskelijat keskustelivat bijektion käsitteestä tehtävän viimeisessä kohdassa (Liite B), kunnes yksi opiskelija huomaa päättelyssään virheen. Opiskelija huomaa, että onkin sekoittainut injektion ja bijektion käsitteet keskenään, ja vastaukset ovat menneet väärin. Opiskelijat palaavat vielä tehtävän d-kohdasta c-kohtaan miettimään injektion käsitettä vielä uudelleen. Opiskelijat osoittavat halua ratkaista tehtävän kaikki kohdat oikein ja ymmärtää käsiteltävät käsitteet oikein:

OP4: "*Hetkone nyt mää ainaki menin sekasi tossa c-kohdassa mä ajattelin injektioo bijektiona, mutta mites tää ny o tota meniköhä muutki vähä sekasi siinä?*"
OP2: "*Ei ainakaa itellä.*"
OP3: "*C-kohassa?*"
OP4: "*Nii eiks toi tangentti oo ainaki injektio?*"

5.2 Kielentämisen strategiat ja erot työskentelytavoissa

Ryhmien keskusteluista oli havaittavissa eroja esimerkiksi aktiivisuudessa ja tehtävien tekotavassa. Ryhmän 1 keskustelun tunnelma oli alusta loppuun asti rento ja avoin. Keskusteluun otti osaa useampi henkilö, ja tehtävät etenivät kohti loppua koko ryhmän työpanoksen ansiosta. Ryhmässä oli havaittavissa keskustelua johtava henkilö, ja hän jakoi näyttöään muille näyttäen keskustelun aiheena olevaa tehtävää. Ryhmässä toinen henkilö kirjasi tehtävän oikeaa ratkaisua keskustelun yhteydessä paperille. Ryhmän jäsenet kyselivät toisiltaan kysymyksiä epäselvissä kohdissa. Ryhmän jäsenet selittivät termejä auki toisilleen niin, että jokainen keskusteluun osallistuva ymmärsi tehtävät.

Ryhmän 2 keskustelu oli myös sujuvaa ja tunnelma keskustelun aikana oli rento. Tehtävät etenivät kohti ratkaisua keskustellen, mutta ryhmä ei kuitenkaan jakanut näyttöään, vaan keskustelu käytiin pelkästään suullista luonnollista kieltä käyttäen.

Ryhmän 3 keskustelussa yksi opiskelijoista omaksui itselleen tehtävän tekemisessä ja keskustelussa selvästi muuta ryhmää aktiivisemman roolin. Hän oli tehnyt tehtävän 1 jo ennen keskustelun taltiointia. Keskustelun taltioinnin aikana hän jakoi tehtävää näytöllään ja kertoi oman ratkaisunsa muille. Opiskelijan puhuessa muut ryhmän jäsenet täydensivät paikoitellen hänen vastaustaan. Tehtävässä 2 muut ryhmän opiskelijat pääsivät enemmän ääneen, ja keskustelu oli aktiivisempaa kuin tehtävässä 1.

Ryhmä 4 teki tehtävän 1 hieman eri tavalla kuin muut ryhmät. Virheiden etsimisen sijaan he lähtivät suoraan muodostamaan tehtävän oikeaa, korjattua kirjallista ratkaisua. Keskustelua syntyi tehtävästä 1, mutta se liittyi enemmän tehtävän mekaaniseen ratkaisuun kuin tehtävän virheisiin. Tehtävässä 2 keskustelu oli aktiivista, mutta opiskelijat päätyivät vastauksissaan virheellisiin ratkaisuihin.

Opiskelijoiden keskusteluista ja matemaattisen kielen käytöstä löydettiin yhteneväisyyksiä ja eroavaisuuksia, joita esitellään seuraavaksi. Videoita katsoessa ja litterointeja lukiessa aineistosta alkoi hahmottua erilaisia kielentämisen strategioita, joita opiskelijat käyttivät keskustellessaan tehtävistä. Näitä strategioita ovat käsitteen kielentäminen matemaattisesti, kielentäminen puhekielellä, oppimateriaalien ja muiden ryhmän jäsenten tuki sekä omaan mielipiteeseen vetoaminen. Lisäksi opiskelijat hyödynsivät matematiikan kolmea kieltä, luonnollista kieltä, symbolikieltä ja kuviokieltä kielentäessään matematiikkaa keskusteluissaan. Kielentämisellä matemaattisesti tarkoitetaan tässä yhteydessä täsmällistä matemaattisten termien ja käsitteiden käyttöä keskusteluissa. Edellä mainituista kielentämisen kategorioista esitellään esimerkkiotteita seuraavaksi.

Ryhmän jäsenten tuki

Opiskelijoiden keskusteluista on nähtävissä, kuinka he tukeutuvat toisiinsa keskustelujen aikana. Opiskelijat kyselevät toisiltaan kysymyksiä, ja täydentävät toistensa vastauksia.

Ryhmässä 1 keskustelutehtävien tekemiseen osallistui kahdeksan opiskelijaa. Keskustelusta on kuitenkin erotettavissa vain viiden opiskelijan äänet, joten kolme opiskelijaa ovat olleet passiivisen kuuntelijan roolissa. Nämä viisi opiskelijaa keskustelivat tehtävistä yhdessä aktiivisesti, ja kyselivät toisiltaan kysymyksiä tehtäviin liittyen sekä varmistivat vastauksiaan toisiltaan. Keskustelussa toistuu kysymyssana ”eikö” useasti, ja opiskelijat hakivat varmistusta omiin väitteisiinsä muilta ryhmän jäseniltä. Tehtävä 1 eteni kohti ratkaisua monen opiskelijan vastausten ansiosta. Ryhmän 1 opiskelijat keskustelevat, kuinka tehtävä tulisi kirjoittaa paperille tehtävän toisesta rivistä eteenpäin (Liite A.2):

> OP4: "*Sen pitäis olla plussa, kyllä.*"
> OP1: "*Niin pitäs, eiks pitäis?*"
> OP3: "*Joo*"
> OP3: "*Eli mikä seuraavaks?*"
> OP1: "*Nii eli onks sul nyt tähän asti tehtynä?*"(osoittaa hiirellä toista yhtälöä)
> OP3: "*Joo.*"
> OP1: "*No sittehä siitä..*"
> OP4: "*Siitä tulee kolme kertaa e x, eikö? Ja miinus kolme, eiks toi toinen oo oikein.*"

Vastaavaa keskustelua on havaittavissa muidenkin ryhmien tallenteista. Esimerkiksi ryhmän 3 jäsenet keskustelevat tehtävässä 2 mitkä annetuista funktioista ovat injektioita. Yksi ryhmän jäsenistä ilmaisee mielipiteensä, että hyperbolinen sini ja tangentti olisivat injektiota. Lisäksi hän kertoo, että hyperbolisesta kosinistakin saisi injektion. Toinen opiskelija yhtyy mielipiteeseen, ja kolmas opiskelija jatkaa keskustelua vielä kertomalla tarkemmin, kuinka hyperbolisesta kosinista saisi injektion:

> OP4: "*Nii toi sinh ja tanh ainakin mun mielestä nyt on niitä injektioita. Eiks ton coshnki sais periaatteessa injektioksi jos tarkasteltais vaan tyyliin että nollasta eteenpäin tai nollasta taaksepäin.*"
> OP2: "*Joo*"
> OP3: "*Nii jos tosta rajottais ton määrittelyjoukon nollasta äärettömään.*"

Mielipiteeseen vetoaminen

Yksi runsaasti videoilla esiintyvä tapa keskustella ja ottaa kantaa keskusteluun, oli omaan mielipiteeseen vetoaminen. Sen sijaan, että opiskelijat olisivat tarkistaneet jonkin käytettävän määritelmän oikeellisuuden, opiskelijat sanoivat, että väite on heidän mielestään joko oikein tai väärin. Tämä on kuitenkin luonnollinen tapa aloittaa keskustelu tai jatkaa sitä. Lisäksi muut ryhmän jäsenet voivat kommentoida ja tarkentaa opiskelijan väitettä. Etenkin tehtävässä 2 opiskelijat vetosivat omaan mielipiteeseensä ottaessaan osaa keskusteluun.

Mielipiteeseen vedottiin esimerkiksi ryhmän 2 keskustelussa. Opiskelija kertoo, kuinka hänen mielestään on niin, ettei hyperbolinen tangentti saa kaikkia arvoja y-akselilta. Tähän toinen opiskelija vastaa, että hyperbolinen tangentti saa arvoja väliltä $[-1, 1]$:

> OP4: ”*Mutta tangentti näyttäis mun mielestä siltä että se ei ihan kaikkia y:n arvoja saa.*”
> OP1: ”*Jep se menee tossa ykkösen ja miinus ykkösen välillä nii.*”

Myös ryhmän 3 keskustelussa mielipiteeseen vetoaminen oli yksi kielentämisen strategia. Opiskelija aloittaa tehtävään 2 vastaamisen sanomalla, että hänen mielestään hyperbolinen sini ja kosini ovat parittomia funktioita. Tähän toinen opiskelija esittää tarkentavan kysymyksen. Hän kysyy, johtuuko funktion parillisuus siitä, että funktio saa yhden arvon kahdella eri määrittelyjoukon arvolla. Tähän kolmas opiskelija vastaa kertoen parillisen funktion määritelmän:

> OP1: "*Mun mielestä sinh ja tanh on parittomii.*"
> OP2: "*Johtuuks toi parillinen siitä just et se saa niiku sen yhen arvon kahella eri määrittelyjoukon arvolla.*"

OP3: "*Jos se on parillinen niin f(x):ä on yhtä suuri kuin f miinus x.*"

Kurssimateriaalien tuki

Ryhmän jäsenten lisäksi opiskelijat hakevat varmistusta matemaattisen ajattelunsa tueksi kurssimateriaaleista. Ryhmän 1 jäsenten keskustellessa opiskelijat pohtivat hyperbolisen sinifunktion kulkua ja sitä, onko hyperbolinen sini surjektio (Liite B, kohta d). Yksi opiskelijoista ei ole varma, läheneekö hyperbolisen sinin kuvaaja jotain arvoa. Eräs opiskelija ilmaisee mielipiteensä asiasta kertoen, että hänen mielestään funktio kasvaa rajatta. Toinen opiskelija ottaa asiasta selvää avaamalla kurssilla käytössä olleen kurssimonisteen, ja tarkistaa asian sieltä. Opiskelijat päätyvät tulokseen, että hyperbolisen sinin arvojoukko on koko reaalilukujen joukko:

OP5: ”*Mä en tiä eiks toi sinh lähene jotai arvoo*”
OP1: "*Läheneekö?*"
OP5: "*Emmä tiä läheneekö.*"
OP3: "*Must se näyttää et se kasvaa rajatta.*"
OP1: "*Katotaanpas* [avaa kurssimonisteen]*, hyperbolisen sinin arvojoukko on reaaliluvut eli se ei lähene mitään arvoo.*"
OP5: "*Nii mut siis määrittelyjoukko.*"
OP1: ”*Eiks sini oo määritelty kaikilla?*”
OP5: ”*On vai? Ok.*”
OP1: ”*Kyllähän sää tonne* [osoittaa kurssimonisteesta $\sinh x$ määritelmää] *voit sijoittaa minkä tahansa.*"

Kielentäminen matemaattisesti

Opiskelijat kielensivät matematiikkaa keskustelujensa aikana käyttäen täsmällisiä matemaattisia termejä. Etenkin tehtävän 2 keskusteluissa oli havaittavissa täsmällistä matemaattista kielentämistä. Opiskelijat käyttivät hyperbolisista funktioista useasti lyhyemmin termejä sini, kosini tai tangentti tarkoittaen kuitenkin hyperbolista siniä, kosinia tai tangenttia. Jotkin opiskelijat kuitenkin korjasivat täsmällisesti kielentämiään käsitteitä.

Ryhmän 1 keskustelun aikana yksi opiskelijoista käyttää hyperbolisesta kosinista termiä kosinifunktio, samoin toinenkin ensin, mutta tarkentaa termiä sitten:

OP1: ”*Siis tää, kosinifunktio on parillinen.*”
OP5: ”*Joo se f on parilline ja noi kaks muuta on parittomii.*"
OP1: ”*Juu ku ne on symmetrisii origon suhteen.*”
OP1: ”*Eli kosini, hyperbolinen kosini x:stä on parilline ja tanh ja sinih on parittomia.*"

Tehtävässä 1 täsmällinen kielenkäyttö näkyi käytettyjen laskutoimitusten kuvaamisena. Siinä missä osa ryhmän jäsenistä käytti puhekieltä laskutoimituksia kuvaillessaan, osa käytti täsmällisiä termejä, kuten yhteenlasku ja vähennyslasku. Lisäksi murtolukujen osoittajasta ja nimittäjästä käytettiin oikeita termejä puhekielen termien ”yläkerta” ja ”alakerta” sijaan. Ryhmän 3 jäsenet keskustelevat tehtävän 1 virheellisen ratkaisun toisesta rivistä:

> OP4: "*Eikös tos toisel rivil ollu sillatti et ne oli vaan laskettu yhteen tai vähennetty toisistaan et niis oli se sama nimittäjä?*"

Täsmällistä matematiikan kielentämistä oli havaittavissa sellaisissa kohdissa keskustelua, kun opiskelijat selittivät jotain määritelmää tai termiä toisilleen. Ryhmän 4 jäsenet keskustelivat parillisen funktion käsitteestä kielentäen määritelmää toisilleen:

> OP1: ”*Joo no eikö parillisen funktion määritelmä oo että f x on yhtä suuri kuin f miinus x?*”

Kielentäminen puhekielellä

Kielentäminen puhekielen keinoin oli yleinen strategia keskustella tehtävistä. Tehtävässä 1 esiintyi enemmän puhekielen käyttöä keskustelujen aikana kuin tehtävässä 2. Esimerkiksi ryhmän 1 keskustelussa yhtälön ratkaisun välivaiheissa esiintyi puhekieltä. Kun opiskelijat tarkoittivat, että yhtälön molemmin puolin lisätään tai vähennetään termi, puhuivat he termin siirtämisestä tai heittämisestä toiselle puolle yhtälöä. Myös kun laskutoimituksen seurauksena termi supistuu pois, sanoivat he kyseisen termin "lähtevän pois":

> OP4: ”*Se vitone, joka on siellä toisella puolella, niin se pitäis olla miinus, kun se on siirretty tonne toiselle puolelle, ja mä veikkaan että ex:n noi kertoimetkin varmaan eri tulokset kun tossa on kun siellä on niitä plus ja miinusmerkkejä miten sattuu.*”
> OP5: "*Eikö tosta tuu kolme kerta e potenssiin x, ku se on plussaks muuttunu tuo viimene termi tos.*"
> OP1: ”*Sittehä me voitas . . . tää, jos ois järkevää et tää kerrottais kakkosella nii tonne tulis kymppi ja nää lähtis pois täältä.*”

Puhekielellä kuvataan myös tehtävässä 1 virheelliseen ratkaisuun tehtyjä laskutoimituksia. Keskustelujen litteroinnista havaitaan, kuinka opiskelijat käyttävät yhteen- ja vähennyslaskuista käsitteitä pluslasku ja miinuslasku. Myös kun lukuja ja termejä vähennetään toisistaan tai lisätään toisiinsa, opiskelijat käyttävät termejä ”miinustetaan” ja ”plussataan”. Esimerkiksi ryhmän 2 jäsenet keskustelevat tehtävässä 1 rivillä 7 löytyneestä virheestä (A.7). Rivillä on toisen asteen yhtälön ratkaisukaava, josta ollaan laskettu ratkaisu vain yhteenlaskua käyttäen:

> OP3: ”*No tos on viel, no yks kohta on toi ku on plus miinus nii siin ei oo käyty*

tota toista vaihtoehtoo läpi.”
OP1: ”*Nii siin on vaan miinustettu seiska ja unohdettu se toinen, plussa.*”

Matematiikan kolmen kielen hyödyntäminen

Vaikka tehtävä oli nimenomaan keskustelutehtävä, hyödynsivät opiskelijat keskustelujensa tukena matematiikan kielentämisessä matematiikan kuvio- ja symbolikieltä. Opiskelijat jakoivat Teams-keskustelualustalla näytöillään kuvaa tehtävästä, ja perustelivat sanomaansa kirjallisen matemaattisen tekstin tai kuvioiden avulla. Näin muiden ryhmän jäsenten oli helpompi seurata keskustelua. Vain ryhmä 2 ei jakanut näytöillään mitään, vaan ryhmän jäsenet keskustelivat pelkästään suullisesti tehtävistä.

Ryhmä 1 hyödynsi suullisen kielentämisen lisäksi myös matematiikan symbolikieltä ratkoessaan tehtävää 1. Opiskelijat olivat löytäneet runsaasti virheitä tehtävästä, ja yksi ryhmän jäsen oli alkanut kirjoittaa tehtävän oikeaa ratkaisua ylös paperille. Opiskelijat keskustelevat, kuinka oikea ratkaisua tulisi kirjoittaa. Sen sijaan, että tehtävää kirjoittava opiskelija olisi kertonut suullisesti, missä vaiheessa tehtävän ratkaisu on edennyt paperille, hän näyttää sen kameran kautta muille ryhmän jäsenille:

OP3: "*Eli e potenssiin x on t.*"
OP1: "*Nii siis se t:n arvo sinne e potenssiin x on yhtä suuri ku ne mitä saatiin ratkasuiks.*"
OP3: "*Oota mul on nyt tääl tämmönen* [näyttää kirjallista ratkaisua kameralle, niin että kaikki näkevät].*"*
OP1: "*Toi on yks kolmasosaa* [osoittaa hiirellä lukua 2/6] *kaks kuudesosaa on yks kolmasosa.*"
OP3: "*Joo siin pitäis lukee oikeesti kaks kolmasosaa.*"

Esimerkiksi ryhmä 3 keskusteli tehtävästä 2 siten, että yksi ryhmän jäsen jakoi muille näyttöään, ja perusteli tehtävän kuvan avulla, kuinka hyperbolisesta kosinifunktiosta saisi injektion (Liite B, kohta c). Opiskelija käyttää luonnollista kieltä ja matematiikan kuviokieltä vastauksessaan:

OP1: "*Nii elikkä jos ton cos h vetäis tosta vaan poikki* [osoittaa hiirellä kuvaajan kohtaa $x = 0$] *ja tarkastelis vaan positiivisia tai negatiivisia reaalilukuja, niin sillon se olis injektio.*"

6. TUTKIMUKSEN LUOTETTAVUUS

Sarajärven ja Tuomen [27, s. 135] mukaan laadullisen tutkimuksen luotettavuuden arvioinnista ei ole olemassa yksiselitteisiä ohjeita. Eskola ja Suoranta [7] kirjoittavat, että laadullisen tutkimuksen luotettavuutta voidaan arvioida seuraavien kriteerien avulla: uskottavuus, siirrettävyys, varmuus sekä vahvistuvuus. Uskottavuudella tarkoitetaan, vastaavatko tutkijan tekemä käsitteellistäminen ja tulkinta tutkittavien käsityksiä. Siirrettävyydellä tarkoitetaan tutkimustulosten siirrettävyyttä toiseen kontekstiin. Varmuutta tutkimukseen saadaan ottamalla mahdollisuuksien mukaan huomioon ulkoista vaihtelua aiheuttavat tekijät. Vahvistuvuudella tarkoitetaan sitä, että tehdyt tulkinnat perustuvat tutkimustuloksiin tutkijan omien käsitysten sijaan.

Tarkastelun kohteena tässä tutkimuksessa oli neljä taltioitua opiskelijoiden keskustelua. Otoskoko on pieni, joten tutkimustuloksia ei voi eikä ole tarkoituskaan yleistää suurempaan joukkoon. Tässä tutkimuksessa tarkoituksena oli selvittää mahdollisimman tarkasti, millaisia matemaattisen osaamisen piirteitä ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoiden keskusteluista oli löydettävissä. Lisäksi tarkoituksena oli tutkia, kuinka ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijat kielentävät matematiikkaa. Kolmantena tarkasteltavana aiheena oli mahdolliset erot työskentelytavoissa eri toteutusten pienryhmien välillä.

Tutkimuksen aineistossa opiskelijoiden matemaattinen keskustelu muodostuu kahden erilaisen tehtävän ympärille. Erilaisista tehtävistä saadaan aikaan erilaista keskustelua, ja näin ollen erilaisia tuloksia. Tuloksia on tarkasteltava siinä kontekstissa, jossa tulokset on kerätty. Tarkempaa tietoa opiskelijoiden matemaattisen osaamisen piirteistä ja kielentämisen strategioista olisi saatu, jos keskustelutehtäviä olisi ollut useampia erilaisia.

Otoskoko on kuitenkin hyvin pieni, ja se vähentää tutkimustulosten luotettavuutta erityisesti tutkimuskysymyksen 3 kohdalla. Saattaa olla, että toisilla ryhmillä eroja ei ole havaittavissa. Tutkimuskysymyksen 3 kohdalla ei siis välttämättä päästäisi vastaaviin tuloksiin eri otoksella kuin tässä tutkimuksessa.

Tutkija ei ottanut kontaktia tutkimukseen osallistuneihin opiskelijoihin, jolloin keskustelujen taltiointitilanne oli mahdollisimman autenttinen. Tutkijalla ei ollut tietoa opiskelijoiden matemaattisesta osaamisesta muutoin, joten kielentämisen keinot ja matemaattisen osaamisen piirteet opiskelijoiden keskusteluista sopivat kyseisen aineiston tutkimisen kohteiksi.

Tutkimukseen osallistuminen oli vapaaehtoista. Kaikki tutkimukseen osallistuneet opiskelijat olivat antaneet tutkimusluvan kurssin Moodle-alustalla. Osallistujat eivät ole tunnistettavissa ja aineistoa on käsitelty huolellisesti. Opiskelijoiden keskusteluista on esitetty tuloksissa suoria lainauksia luotettavuuden parantamiseksi. Tutkimuksen tulokset raportoitiin totuudenmukaisesti. Analyysin kulku kuvattiin raportissa mahdollisimman selkeästi, jotta pystytään osoittamaan yhteys aineiston ja tulosten välillä.

Asetettuihin tutkimuskysymyksiin 1 ja 2 onnistuttiin vastaamaan hyvin valituilla tutkimusmenetelmillä ja analysointikeinoilla. Aineistosta saatiin laadullisin tutkimusmenetelmin teorialähtöisen sisällönanalyysin keinoin selville, millaisia matematiikan osaamisen piirteitä opiskelijoiden keskusteluista on löydettävissä. Sisältölähtöisen aineiston analyysin keinoin onnistuttiin aineistosta löytämään erilaisia opiskelijoiden käyttämiä matematiikan kielentämisen strategioita sekä eroja pienryhmien työskentelytavoissa. Näin ollen tutkimuksessa saatiin vastaukset tutkimuksessa asetettuihin tutkimuskysymyksiin.

7. POHDINTA

Tutkimuksen tarkoituksena oli tutkia, millaista matemaattista osaamista ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoiden matemaattisista keskusteluista on löydettävissä. Lisäksi tarkasteltiin kahden eri opetusmenetelmän pienryhmien matemaattista kielentämistä sekä mahdollisia eroja ryhmien työskentelytavoissa. Tutkimuksen aineistosta on havaittavissa, että kaikkien tutkimukseen valikoituneiden ryhmien matemaattisista keskusteluista oli löydettävissä kaikkia viittä matemaattisen osaamisen piirrettä. Tuloksista havaitaan myös, että etenkin tehtävän 1 (ks. 4.1) keskusteluissa korostuu mekaanisen laskemisen taito, ja kyky seurata ryhmän edistymistä. Tämä kertoo proseduraalisesta sujuvuudesta ja käsitteellisestä ymmärtämisestä. Alfaron ja Joutsenlahden [36] mukaan tehtävät, jossa tarkoituksena on etsiä ja korjata tehtävässä tehdyt virheet edistävät opiskelijan proseduraalista sujuvuutta, käsitteellistä ymmärtämistä ja mukautuvaa kompetenssia. Mukautuvaa kompetenssia opiskelijoiden on taas käytettävä tehtävässä 1 silloin, kun he määrittävät keskustelun aikana heille ehdotetun strategian pätevyyden. [19, s. 130]

Tehtävän 2 (ks. 4.2) keskusteluissa korostuu oikeanlainen käsitteiden käyttäminen ja käsitteiden ymmärtäminen. Lisäksi perustelujen tuottaminen ja antaminen sekä jo opitun soveltaminen korostuu. Nämä kertovat käsitteellisestä ymmärtämisestä ja mukautuvasta kompetenssista. Alfaron ja Joutsenlahden [36], ja Rinneheimon ja Suhosen [26] mukaan tehtävät, joissa tarkoituksena on kysymyksiin vastaaminen ja vastauksien perusteleminen edistävät luonnollisen kielen käyttöön liittyvää mukautuvaa kompetenssia ja kehittävät sitä kautta myös strategista kompetenssia.

Strateginen kompetenssi on havaittavissa kahdesta eri tehtävästä usealla eri tavalla. Tehtävässä 1 strateginen kompetenssi näkyy tapana etsiä virheitä tehtävästä sekä tapana laskea yhtälön ratkaisun välivaiheita. Esimerkiksi ryhmien 1 ja 4 jäsenet päättivät yhdessä ratkoa tehtävää rivi riviltä, kun taas ryhmien 2 ja 3 jäsenet etsivät virheitä sieltä täältä. Tehtävässä 2 strateginen kompetenssi näyttäytyy siinä, kuinka ryhmäläiset lähtevät ratkaisemaan tehtävää. Kaikki ryhmät päätyvät ratkaisemaan tehtävän samalla tavalla, yksi tehtävän alakohta kerrallaan läpi käyden kaikki tehtävässä esitetyt funktiot.

Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin [19, s. 116] mukaan yritteliäisyys on matematiikan kokemista arvokkaana, mielekkäänä ja käyttökelpoisena. Yritteliäisyys todennäköisesti korostuu, jos opiskelijalla on mukautuva kompetenssi, strateginen kompetenssi, proseduraalinen sujuvuus ja käsitteellinen ymmärtäminen hyvin kehittyneinä. Tämän tutkimuksen tulosten mukaan yritteliäisyys näkyi opiskelijoiden sitoutumisena tehtävien ratkaisemiseen ja haluun oppia sekä ymmärtää tehtävissä käsiteltävät asiat. Yritteliäisyys näyttäytyi esimerkiksi tehtävässä alkuun päin palaamisena, kun tehtävä oli aluksi ratkaistu väärin. Yritteliäisyys näkyi myös siinä, että esimerkiksi tehtävän 1 ratkaisemista ei jätetty kesken, vaikka osa virheistä oli jo löydetty. Vaikka osa ryhmän jäsenistä oli valmiita jättämään tehtävän tekemisen siihen, osa ryhmän jäsenistä kannusti jatkamaan tehtävän tekemisen loppuun asti. Yhdessä opiskelijat pääsivät tehtävissä oikeisiin ratkaisuihin. Kilpatrickin ym. [19, s. 131] mukaan yritteliäisyyttä on mahdollisuus kehittää tarjoamalla opiskelijoille mahdollisuuksia ymmärtää matematiikkaa ja kokea onnistumisen ilo.

Tällaiset vertaisten kanssa tehtävät keskustelutehtävät tarjoavat opiskelijoille mahdollisuuden korjata mahdollisia matemaattisia virhekäsityksiään vertaisiltaan, sillä kynnys kysyä vertaiseltaan apua on matalampi kuin avun kysyminen esimerkiksi opettajalta. Esimerkiksi Leen [29] mukaan matematiikan oppikirjoissa ja opettajien puheessa käytetty kieli on hyvin erityyppistä kuin opiskelijoiden yleinen, arjessa käyttämä kieli. Tässä tutkimuksessa havaitaan, että opiskelijat kielentävät matematiikkaa vertaistensa kanssa puhekielen keinoin. Opiskelijat ottavat keskustelussa huomioon myös matematiikan täsmällisyyden, ja pyrkivät puhekielen lisäksi käyttämään täsmällisiä matemaattisia termejä kielentäessään matematiikkaa.

Opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittäminen onnistuu parhaiten tilanteissa, joissa opiskelijoilla on mahdollisuus lukea, kirjoittaa ja keskustella ideoistaan. Tällöin kielen käytöstä matematiikassa tulee luonnollista. [29] Tämän tutkimuksen aineistossa esiintyvät keskustelutehtävät ovat hyvä tapa tuoda luonnollisen kielen, symbolisen kielen ja kuviokielen käyttöä osaksi matematiikan opiskelua. Tutkimuksen tuloksista havaitaan, että opiskelijat kielentävät matematiikkaa useilla erilaisilla strategioilla. Yksi näistä on matematiikan kolmen kielen käyttäminen. Puhuessaan toisilleen opiskelijat käyttävät luonnollista kieltä. Opiskelijat jakoivat näyttöjään ja hyödynsivät tehtävässä annettuja kuvioita kielentämisensä tukena. Lisäksi opiskelijat kirjoittivat ylös joko tietokoneella tai käsin paperille tehtävän 1 oikeaa ratkaisua, jolloin he käyttivät matematiikan symbolikieltä.

Keskustelutehtävistä käydyistä keskusteluista sekä käänteisen toteutuksen ryhmillä että luentototeutusten ryhmillä on havaittavissa vertaisoppimista, jota Fung ym. [9] mukaan on aina mukana käänteisessä opetuksessa. Ryhmän jäsenet kyselevät kysymyksiä toisiltaan, ja saavat vastauksia niihin. Näin tehdessään mahdolliset virhekäsitykset korjaantuvat. Lisäksi ryhmän jäsenet täydentävät toistensa vastauksia. Keskusteluista on havaittavissa, kuinka opiskelijan on helpompi näyttää osaamattomuutensa vertaiselleen kuin esimerkiksi yliopiston opettajalle.

Ryhmä on aina jäsentensä summa. Jokaisesta tämän tutkimuksen ryhmästä oli löydettävissä jäseniä, jotka eivät osallistuneet matemaattiseen keskusteluun. Sofroniou [30] toteaa, että ryhmän matemaattisesti heikommat jäsenet voivat joskus jättää tehtävien ratkaisemisen muille. Kuitenkin hiljaisemmatkin opiskelijat voivat oppia muilta ryhmän jäseniltä kuuntelemalla matemaattista keskustelua. Lisäksi keskusteluun osallistuvilla on paremmat mahdollisuudet käsiteltävän asian oppimiseen kuin heillä, jotka eivät osallistu [8].

Haapasalon [10] mukaan toimivassa ryhmässä jäsenten kyvyt yhdistyvät, jolloin ryhmän suoritus nopeutuu ja tehtävän tuloksen oikeellisuus vahvistuu. Tässä tutkimuksessa oli havaittavissa eroja ryhmien toimivuudessa. Käänteisen opetuksen ryhmät 1 ja 2 keskustelivat tehtävistä aktiivisesti yhdessä usean ryhmän jäsenen kesken, ja pääsivät yhdessä tehtävissä oikeisiin tuloksiin. Luentototeutukselle osallistuneen ryhmän 3 keskustelusta oli selkeästi havaittavissa keskustelun johtaja, ja muille ryhmän jäsenille ei jäänyt paljoakaan sanavaltaa. Ryhmän keskustelun johtaja oli ennen ryhmäkeskustelua tehnyt tehtävän 1 itsenäisesti valmiiksi, ja esitteli oman ratkaisunsa ryhmälle. Ryhmän 3 ratkoessa tehtävää 2 keskusteluun osallistui tasapuolisemmin ryhmän jäseniä. Ryhmä pääsi kuitenkin oikeisiin ratkaisuihin kummassakin tehtävässä. Luentototeutukselle osallistunut ryhmä 4 ratkaisi tehtävän 1 omalla tavallaan tehden suoraan oikean kirjallisen ratkaisun. Tehtävä 2 tuotti ryhmälle hankaluuksia, ja he päätyivätkin vääriin ratkaisuihin.

Haapasalon [10] mukaan yhden ryhmän jäsenen onnistuminen koetaan koko ryhmän onnistumiseksi. Tässä tutkimuksessa oli havaittavissa, kuinka yksi ryhmän jäsen voi vaikuttaa omalla aktiivisella suoriutumisellaan koko ryhmän onnistumiseen. Lisäksi onnistunut ryhmätyöskentely vaatii ryhmän yksimielistä sitoutumista tiettyihin työskentelytapoihin ja päämääriin [10]. Luentototeutuksen ryhmät oli koottu keskustelutehtävien tekemistä varten, joten ryhmällä ei ollut mahdollista suunnitella keskustelutehtävien tekemistä etukäteen, jolloin työskentelytapojen valinta jäi kunkin opiskelijan omalle vastuulle. Osa opiskelijoista oli siis tutustunut keskustelutehtäviin itsenäisesti ennen keskustelujen taltiointia, osa taas ei. Käänteisen opetuksen ryhmät oli koottu jo kurssin alussa, ja heille oli tarjottu kurssin alusta alkaen mahdollisuuksia työskennellä ryhmänsä kanssa.

Toivola [31] erottaa yhteisöllisen ja yhteistoiminnallisen oppimisen toisistaan. Käänteisen toteutuksen ryhmillä on keskusteluista havaittavissa yhteisöllisen oppimisen piirteitä. Ryhmän jäsenet pohtivat, jakavat tietoa kysymysten ja vastausten kautta ja käsittelevät samoja ongelmia yhdessä tehtävien tekemisen aikana. Yhteistoiminnallisessa oppimisessa opiskelijat pyrkivät yhteiseen tuotokseen [31]. Etenkin ryhmällä 3 korostui se, että tehtävä oli saatava nopeasti valmiiksi. Ryhmällä 4 tehtävän saaminen loppuun korostui, vaikka tehtävä 1 suoritettiin puutteellisesti ja tehtävä 2 päätyi vääriin ratkaisuihin. Kaikissa ryhmissä syntyi kuitenkin matemaattista keskustelua, joka Toivolan [31] mukaan mahdollistaa muilta oppimisen ja omien ajattelutapojen kyseenalaistamisen, ja siten johtaa syvempään ymmärrykseen.

Ryhmien keskustelusta on myös havaittavissa motivaatioon liittyviä seikkoja. Käänteisen opetuksen toteutuksen pienryhmien keskusteluista on havaittavissa, kuinka ryhmän jäsenet haluavat tehdä tehtävät oikein ja siten, että he ymmärtävät tehtävien ratkaisut. Tämä näkyy esimerkiksi kysymysten kysymisenä, ja virheellisiin vastauksiin puuttumisena ja niiden ratkaisemisena. Luentototeutuksen ryhmien keskusteluista on havaittavissa tehtävien suorituskeskeisyys. Ryhmät ratkaisevat tehtävät nopeasti, eivätkä huomaa tekemiään virheitä, saati korjaa niitä. Keskustelulle ei jäänyt kovinkaan paljoa tilaa tehtäviä tehdessä.

8. JOHTOPÄÄTÖKSET JA JATKOTUTKIMUS

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen johtopäätökset ja jatkotutkimusehdotus. Tutkimuksessa vastattiin kolmeen tutkimuskysymykseen. Tarkastelun kohteena oli opiskelijoiden matemaattisesta keskustelusta havaittavat matemaattisen osaamisen piirteet, matematiikan suullinen kielentäminen sekä mahdolliset erot ryhmien työskentelytavoissa kahden eri opetusmenetelmän pienryhmien välillä.

Tarkastellaan vastausta tutkimuksen ensimmäiseen tutkimuskysymykseen. Tutkimuksen tulosten mukaan opiskelijoiden matemaattisista keskusteluista oli löydettävissä monipuolisesti eri matematiikan osaamisen osa-alueita. Tehtävissä tarvittavat matemaattisen osaamisen osa-alueet riippuvat annetusta tehtävätyypistä. Tämän tutkimuksen aineiston kaksi keskustelutehtävää erosivat tehtävätyypeiltään toisistaan, ja tarjosivat opiskelijoille mahdollisuuden kehittää monipuolisesti eri matemaattisen osaamisen osa-alueita. Tutkimustulosten perusteella on kannattavaa lisätä erilaisia keskustelutehtäviä matematiikan kursseille yliopistossa, jotta opiskelijat pääsevät kehittämään monipuolisesti useita matematiikan osaamisen osa-alueita, jolloin matemaattinen osaaminen kokonaisuudessaan kehittyy.

Toiseen tutkimuskysymykseen vastattaessa aineistolähtöisen analyysin keinoin havaittiin, että opiskelijat käyttävät useita erilaisia kielentämisen strategioita, joita ovat kielentäminen puhekielellä, kielentäminen täsmällisin matemaattisin termein, vetoaminen omaan mielipiteeseen ja kurssimateriaaleihin, sekä matematiikan kolmen kielen hyödyntäminen. Nämä strategiat yhdessä luovat opiskelijoille luontevan tavan opiskella matematiikkaa. Näistä opettavaisimpia ja oppimisessa hyödyllisiä ovat tukeutuminen vertaisiinsa ja kurssimateriaaleihin. Omaan mielipiteeseen vetoaminen on hyvä tapa aloittaa matemaattinen keskustelu, mutta mielipiteelle on hyvä löytää varmistus esimerkiksi kurssimateriaalista varsinkin silloin, jos ryhmä on epävarma ratkaisustaan.

Kolmas tutkimuskysymys käsitteli mahdollisia eroja työskentelytavoissa kahden eri toteutustavan ryhmien välillä. Aineistoa analysoitaessa havaittiin eroja ryhmien työskentelytapojen välillä. Käänteisen opetuksen kahden pienryhmän keskusteluista nousi esiin yhteisöllisen oppimisen piirteitä, esimerkiksi halu oppia yhdessä. Opiskelijat kyselivät toisiltaan avoimesti kysymyksiä, ja keskusteluun osallistui useampi ryhmän jäsen. Tämä saattaa selittyä esimerkiksi sillä, että opiskeljat tunsivat toisensa entuudestaan, ja keskustelu oli siksi rentoa ja sujuvaa. Perinteisen luentototeutuksen pienryhmien työskentelytavoissa korostui tehtävien nopea loppuun saattaminen. Opiskelijat tekivät annetut tehtävät nopeasti, mutta he tekivät virheitä matemaattisessa päättelyssään, eivätkä korjanneet niitä. Keskustelutehtävien teossa korostui tehtävien suoristuskeskeisyys, joka on yksi yhteistoiminnallisen oppimisen piirteistä.

On kuitenkin otettava huomioon, että Insinöörimatematiikan perusteet -kurssitoteutukset olivat olleet keskustelutehtävien taltiointivaiheessa käynnissä vain noin kolme viikkoa. Käänteisen opetuksen toteutuksen aktiivisen ryhmäyttämisen vaikutus ei luultavasti ole vielä tässä vaiheessa kovin paljon päässyt vaikuttamaan ryhmän toimintaan, sillä ryhmät muodostettiin kurssin alussa. Lisäksi kyseessä oli ensimmäinen matematiikan kurssi yliopistossa, joten todennäköisesti ryhmän jäsenet eivät ole työskennelleet matematiikan tehtävien parissa yhdessä aikaisemmin. Tutkimuksen aineiston otos on hyvin pieni, sillä tarkasteltavana on vain neljän pienryhmän matemaattiset keskustelut. Tämän kaltaista aineistoa tutkittaessa määrällinen tarkastelu voisi tuottaa selvemmän kuvan ja luotettavampaa tietoa aiheesta. Kolmanteen tutkimuskysymykseen vastaamista varten tämä aineisto ei ollut paras mahdollinen.

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin opiskelijoiden matemaattista keskustelua vain yhdellä keskustelukerralla. Jatkossa samaa ilmiöitä voisi tutkia suuremmalla aineistolla pitkittäistutkimuksena siten, että aineisto koostuisi esimerkiksi viikottaisista matemaattisista pienryhmien keskusteluista. Tarkastelun kohteena olisivat tällöin mahdolliset muutokset opiskelijoiden työskentelytavoissa pitkällä aikavälillä kahdella eri opetuksen toteutustyypillä. Tämä mahdollistaisi luotettavammat tulokset tarkasteltavasta aiheesta.

Pienryhmien kokoaminen voisi jatkossa tapahtua luentototeutuksen puolella esimerkiksi opiskelijoille sopivan ajankohdan perusteella niin, että pienryhmä pysyisi samana koko pitkittäistutkimuksen ajan. Näin ryhmän jäsenet ehtisivät tutustua toisiinsa, ja ryhmän keskustelusta tulisi todennäköisesti luonnollisempaa viikko viikolta. Ryhmät voitaisiin koota myös tutkinnon perusteella kummallakin toteutustavalla, kunhan pienryhmät pysyvät samoina läpi tutkimuksen.

Tutkimuksessa käytettäviä keskustelutehtäviä voisi olla tyypiltään useita erilaisia. Sarikka [28, s. 26] esittää diplomityössään seitsemän erilaista kielentämistehtävän mallia, joita ovat koodaus, täydennys, virheen etsintä, ratkaisusta tehtävä, ratkaisun argumentointi, tiedonseulonta ja omin sanoin selvitys. Tässä tutkimuksessa käytetyt tehtävätyypit olivat virheen etsintä ja omin sanoin selvitys. Seuraaviin tutkimuksiin voisi antaa opiskelijoille useita erilaisia kielentämistehtäviä ratkottavaksi, ja tutkia, millaista matemaattista osaamista näiden tehtävien perusteella syntyvästä matemaattisesta keskustelusta on löydettävissä.

LÄHTEET

[1] James W. Anderson. *Hyperbolic Geometry*. London: Springer, 2005.

[2] Jacqueline Bernero. ”Motivating Students in Math Using Cooperative Learning.” (2000).

[3] Benjamin Braun et al. ”What does active learning mean for mathematicians”. *The Best Writing on Mathematics* (2018), s. 169–178.

[4] Robin Brewer ja Sara Movahedazarhouligh. ”Successful stories and conflicts: A literature review on the effectiveness of flipped learning in higher education”. *Journal of Computer Assisted Learning* 34.4 (2018), s. 409–416.

[5] George Buch ja Carryn Warren. ”The Flipped Classroom: Implementing Technology to Aid in College Mathematics Student's Success.” *Contemporary Issues in Education Research* 10.2 (2017), s. 109–116.

[6] Sabita D'Souza ja Leigh Wood. ”Tertiary students' views about group work in mathematics”. Teoksessa: *Proceedings of the Educational Research, Risks and Dilemmas – New Zealand Association for Research in Education (NZARE) and Australian Association for Research in Education (AARE) Joint Conference, The University of Auckland, Auckland, New Zealand*. Vol. 29. 2003.

[7] Jari Eskola ja Juha Suoranta. *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Tampere: Vastapaino, 1998.

[8] Indigo Esmonde ja Jennifer Langer-Osuna. ”Power in numbers: Student participation in mathematical discussions in heterogeneous spaces”. *Journal for Research in Mathematics Education* 44.1 (2013), s. 288–315.

[9] Chak-Him Fung, Michael Besser ja Kin-Keung Poon. ”Systematic literature review of flipped classroom in Mathematics.” *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 17.6 (2021).

[10] Lenni Haapasalo. *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu*. Jyväskylä. Gummerus Kirjapaino Oy, 1994.

[11] Edwin Herman ja Gilbert Strang. *Calculus*. Texas: OpenStax, 2016.

[12] *Insinöörimatematiikan perusteet (Flippaus) MATH.APP.110-2020-2021-1. Kurssimateriaali.* 2020. URL: https://moodle.tuni.fi/course/view.php?id=9525 (viitattu 21. 02. 2023).

[13] *Insinöörimatematiikan perusteet (Luennot ja harjoitukset) MATH.APP.110-2020-2021-3. Kurssimateriaali.* 2020. URL: https://moodle.tuni.fi/mod/page/view.php?id=558747 (viitattu 21. 02. 2023).

[14] Jorma Joutsenlahti. ”Kielentäminen matematiikan opiskelussa”. Teoksessa: *A. Virta & O. Marttila (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium*. Vol. 7. 2003, s. 188–196.

[15] Jorma Joutsenlahti. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä – 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. Tampere University Press, 2005.

[16] Jorma Joutsenlahti ja Kaisu Rättyä. ”Matematiikan kielentämisen tutkimuksen lähtökohtia kielen näkökulmasta Sanan lasku-projektissa”. Teoksessa: *Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta: Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Tampereella 14.-15.10. 2010*. 2011, s. 171–187.

[17] Jorma Joutsenlahti ja Timo Tossavainen. ”Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa” (2018).

[18] Jorma Joutsenlahti et al. ”Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa”. Teoksessa: *Annual symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Resaerch Association*. University of Jyväskylä. 2013, s. 59–70.

[19] Jeremy Kilpatrick et al. *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Vol. 2101. National Academy Press Washington, DC, 2001.

[20] *Laadullisen tutkimuksen ominaispiirteet*. URL: https://www.fsd.tuni.fi/fi/palvelut/menetelmaopetus/ (viitattu 23. 03. 2023).

[21] Clare Lee. *Language for learning mathematics: assessment for learning in practice: Assessment for learning in practice*. McGraw-Hill Education (UK), 2006.

[22] Judit Moschkovich. ”Issues regarding the concept of mathematical practices”. Teoksessa: *Proficiency and beliefs in learning and teaching mathematics*. Brill, 2013, s. 257–275.

[23] Lauri Myrberg. *Differentiaali- ja integraalilaskenta korkeakouluja varten osa 1*. Yhteiskirjapaino Oy, 1974.

[24] David Pimm. *Routledge Revivals: Speaking Mathematically (1987): Communication in Mathematics Clasrooms*. Routledge, 2019.

[25] Michael Prince. ”Does active learning work? A review of the research”. *Journal of engineering education* 93.3 (2004), s. 223–231.

[26] Kirsi-Maria Rinneheimo ja Sami Suhonen. ”Languaging and conceptual understanding in engineering mathematics”. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education* 10.2 (2022), s. 171–189.

[27] Anneli Sarajärvi ja Jouni Tuomi. *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Tammi, 2017.

[28] Hanna Sarikka. ”Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena”. Diplomityö. Tampereen yliopisto, 2014.

[29] Anna Sfard et al. ”Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say?” *For the learning of mathematics* 18.1 (1998), s. 41–51.

[30] Anastasia Sofroniou ja Konstantinos Poutos. ”Investigating the effectiveness of group work in mathematics”. *Education Sciences* 6.3 (2016), s. 30.

[31] Marika Toivola, Pekka Peura ja Markus Humaloja. ”Flipped learning – Käänteinen oppiminen” (2017).

[32] Marika Toivola ja Harry Silfverberg. ”Flipped learning -approach in mathematics teaching – a theoretical point of view”. Teoksessa: *Proceedings of the annual symposium of Finnish mathematics and science education research association*. 2014, Oulu, s. 93–102.

[33] Timo Tossavainen. ”Matematiikan kieliaspekti ja matematiikkakuva”. *Teoksessa A. Niikko, I. Pellikka & E. Savolainen (toim.) Oppimista, opetusta, monitieteisyyttä. Kirjoituksia Kuninkaankartanonmäeltä. Verkkojulkaisu. Joensuun yliopisto. Savonlinnan opettajankoulutuslaitos* (2008), s. 233–243.

[34] Timo Tossavainen. ”Matematiikka ja kieli”. *Tieteessä tapahtuu* 23.4 (2005).

[35] Noreen Webb ja Ann Mastergeorge. ”Promoting effective helping behavior in peer-directed groups”. *International journal of educational research* 39.1-2 (2003), s. 73–97.

[36] Helen Alfaro Viquez ja Jorma Joutsenlahti. ”Promoting learning with understanding: Introducing languaging exercises in calculus course for engineering students at the university level”. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education* 8.1 (2020), s. 229–251.

[37] Marcy Wood ja Crystal Kalinec. ”Student talk and opportunities for mathematical learning in small group interactions”. *International Journal of Educational Research* 51 (2012), s. 109–127.

LIITE A: TEHTÄVÄN 1 MALLIRATKAISU

Keskustelutehtävä 1

Virheellinen ratkaisu:

$$5\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5 \tag{A.1}$$

$$\frac{5}{2}e^x - \frac{5}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x = 5 \tag{A.2}$$

$$2e^x - 3e^{-x} = 5 \tag{A.3}$$

$$2e^x + 5 - 3e^{-x} = 0 \tag{A.4}$$

$$2\left(e^x\right)^2 + 5e^x - 3e^{-x}e^x = 0 \tag{A.5}$$

$$2t^2 + 5e^x - 3 = 0 \tag{A.6}$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \tag{A.7}$$

$$x = \ln(-1) = -\ln 1 = -1 \tag{A.8}$$

Keskustelutehtävän 1 malliratkaisu:

Tehtävässä ratkaistaan yhtälöä

$$5\cosh x - \sinh x = 5.$$

Sijoitetaan $\sinh x$ ja $\cosh x$ paikalle niitä vastaavat määritelmät:

$$5\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5$$

Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla 2:

$$5(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) = 10$$

Kerrotaan sulkeet auki:

$$5e^x + 5e^{-x} - e^x + e^{-x} = 10$$

Lasketaan samanmuotoiset termit yhteen:

$$4e^x + 6e^{-x} = 10$$

Kerrotaan yhtälö puolittain termillä e^x:

$$e^x \cdot 4e^x + e^x \cdot 6e^{-x} = 10e^x$$

Kertomalla termit e^{-x} termillä e^x saadaan tulokseksi luku 1.

$$4(e^x)^2 + 6 = 10e^x$$

Merkitään nyt termiä e^x muuttujalla t, ja viedään muuttujat yhtälön vasemmalle puolelle:

$$4t^2 - 10t + 6 = 0$$

Ratkaistaan muodostunut toisen asteen yhtälö käyttäen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4}$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{8}$$

$$t = \frac{10 \pm 2}{8}$$

Muuttujan t arvoksi saadaan:

$$t = \frac{10 + 2}{8} = \frac{3}{2}$$

tai

$$t = \frac{10 - 2}{8} = 1$$

Merkitään $t = e^x$, ja ratkaistaan muuttuja x ottamalla puolittain luonnollinen logaritmi:

$$e^x = \frac{3}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

tai

$$e^x = 1$$

$$x = \ln(1) = 0$$

Vastaus on siis $x = 0$ tai $x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

LIITE B: TEHTÄVÄN 2 MALLIRATKAISU

Keskustelutehtävän 2 malliratkaisu

a) Onko funktio parillinen funktio? (Käsitelkää jokainen kolmesta funktiosta erikseen.)
Hyperbolinen kosini, $f(x) = \cosh x$ on parillinen, sillä sen kuvaaja on symmtrinen y-akselin suhteen. Siis $f(x) = f(-x) =$. Muut tehtävän funktiot eivät ole parillisia.

b) Onko funktio pariton funktio?
Parittomille funktioille pätee $-f(x) = f(-x)$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Sanotaan, että pariton funktio on symmetrinen origon suhteen. Parittomia funktioita ovat siis
$g(x) = \sinh x$ ja $h(x) = \tanh x$.

c) Onko funktio injektio? Jos ei, voiko siitä saada injektion, jos rajoittaa määrittelyjoukkoa, mutta ei maalijoukkoa?
Injektiossa mitkään kaksi määrittelyjoukon alkiota eivät kuvaudu samalle maalijoukon alkiolle. Funktiot $g(x) = \sinh x$ ja $h(x) = \tanh x$ ovat injekioita, mutta funktio $f(x) = \cosh x$ ei ole. Funktiosta $f(x) = \cosh x$ saa injektion, jos määrittelyjoukon rajoittaa joko välille $[0, \infty[$ tai välille $]-\infty, 0]$.

d) Onko funktio surjektio? Jos ei, voiko siitä saada surjektion, jos rajoittaa määrittelyjoukkoa, mutta ei maalijoukkoa?
Surjektion tapauksessa jokaiseen arvojoukon alkioon on liitettävä yksi määrittelyjoukon alkio. Funktio $g(x) = \sinh x$ on surjektio, mutta funktiot $h(x) = \tanh x$ ja $f(x) = \cosh x$ eivät ole, sillä funktio $f(x)$ ei saa arvoja välillä $]1, \infty[$ millään määrittelyjoukon arvoilla. Funktio $h(x)$ saa arvoja vain väliltä $]-1, 1[$, joten Lisäksi niistä ei saa surjektioita määrittelyjoukkoa rajoittamalla.

e) Onko funktio bijektio? Jos ei, voiko siitä saada bijektion, jos rajoittaa määrittelyjoukkoa, mutta ei maalijoukkoa?
Ollakseen bijektio funktion on oltava sekä injektio että surjektio. Edellisten kohtien perusteella funktio $g(x) = \sinh x$ on sekä injektio että surjektio. Näin ollen se on bijektio. Muista funktioista ei saa bijektiota määrittelyjoukkoa rajoittamalla.