Tampereen yliopisto

Henna Katainen

AVOIMEN ONGELMATEHTÄVÄN RATKAISEMISEN HAASTEET YLÄKOULUN MATEMATIIKAN TUNNILLA

Pro gradu -tutkielma
Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kesäkuu 2023

TIIVISTELMÄ

Henna Katainen: Avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteet yläkoulun matematiikan tunnilla
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2023

Ongelmanratkaisutaidot ovat tärkeitä työelämätaitoja nyky-yhteiskunnassa. Matemaattiset ongelmanratkaisutaidot on kirjattu myös perusopetuksen opetussuunnitelmaan yhdeksi matematiikan opetuksen tavoitteista. Tämän vuoksi ongelmanratkaisutaitoja on tärkeää tutkia. Matemaattisen ongelmanratkaisun tutkimusten pohjalta on muodostunut erilaisia jaotteluja taidoista, joita oppilaat ongelmatehtävän ratkaistakseen tarvitsevat. Muodostetut jaottelut on kuvattu kirjallisuudessa usein hyvin yleisellä tasolla. Lisäksi ongelmanratkaisun tutkimiseen on usein käytetty suljettuja ongelmatehtäviä, joissa ongelman alkutilanne on hyvin määritelty ja tehtävään on yksi ainut oikea vastaus. Avoimia ongelmatehtäviä, siis tehtäviä, joissa ongelman alku- tai lopputilanne on jätetty avoimeksi, näkyy tutkimuksissa vain vähän. Ongelmanratkaisun taitoja ja avoimia ongelmatehtäviä on siis tarpeellista tutkia lisää.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, millaisia haasteita yhdeksäsluokkalaiset oppilaat kohtaavat avointa ongelmatehtävää ratkaistessaan. Lisäksi tutkimuksessa havainnoidaan, millaista matemaattista osaamista oppilaat tarvitsevat ongelmatehtävän ratkaisemisen aikana.

Matemaattisella osaamisella tarkoitetaan tässä tutkimuksessa matemaattisia tietoja ja taitoja, joita oppilas tarvitsee oppiakseen matematiikkaa. Matemaattista osaamista on jaoteltu erilailla eri tutkimusten yhteydessä. Tässä tutkimuksessa matemaattisesta osaamisesta käytetään Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin jaottelua, jossa matemaattinen osaaminen jakautuu konseptuaalisen ymmärtämiseen, proseduraalisen sujuvuuteen, strategiseen kompetenssiin, soveltuvaan päättelyyn ja yritteliäisyyteen.

Avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteiden tutkimista varten järjestettiin opetuskokeilu, jossa oppilaat ratkaisivat avointa ongelmatehtävää ryhmissä. Opetuskokeiluun osallistui 10 oppilasta. Tutkimuksen tutkimusaineisto koostui oppilaiden ratkaisukeskusteluista, jotka nauhoitettiin. Lisäksi oppilaiden tuottamat ratkaisut kerättiin. Aineistoa analysoitiin sekä aineistolähtöisesti havainnoiden ongelmatehtävän ratkaisemisessa ilmeneviä haasteita että teorialähtöisesti etsien matemaattisen osaamisen piirteitä ratkaisukeskusteluista.

Tutkimustuloksena havaittiin haasteita esimerkiksi tehtävänantoon liittyvän matematiikan tunnistamisessa, ratkaisustrategian valinnassa ja perustelujen muodostamisessa. Havaittuja haasteita on mahdollista huomioida opetuksessa. Tutkimuksessa esiintyneiden haasteiden ja tehtävässä tarvittavan matemaattisen osaamisen pohjalta muodostettiin myös lista matemaattisen avoimen ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittavasta osaamisesta. Tutkimuksessa havaitut ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittavat tiedot ja taidot osaltaan täydentävät ongelmatehtävän ratkaisemisen taitoihin liittyvää teoriaa ja tuovat siihen avoimen ongelmatehtävän näkökulman.

Avainsanat: matemaattinen osaaminen, avoin ongelmatehtävä, ongelmanratkaisu, konseptuaalinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, soveltuva päättely

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1. Johdanto . . . 1
2. Teoreettinen viitekehys . . . 5
   2.1 Matemaattinen osaaminen . . . 5
   2.2 Matemaattinen ongelmanratkaisu ja ongelmatehtävä . . . 11
   2.3 Ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittavat taidot . . . 12
   2.4 Tutkimuksen avoin ongelmatehtävä . . . 14
3. Tutkimuksen avoimen ongelmatehtävän ratkaisujen taustaa . . . 16
   3.1 Valmistavia määritelmiä ja lauseita . . . 16
   3.2 Aiemmissa tutkimuksissa esiintyneiden ratkaisuiden pohdintaa . . . 22
      3.2.1 Suorakulmio ja nelikulmion ympäri piirretty ympyrä . . . 23
      3.2.2 Pienin yhteenlaskettu etäisyys . . . 25
4. Tutkimusasetelma . . . 30
   4.1 Opetuskokeilu . . . 30
   4.2 Tutkimusmetodi . . . 31
   4.3 Aineistonkeruu ja analysointi . . . 31
   4.4 Eettiset näkökulmat . . . 33
5. Tulokset . . . 35
   5.1 Avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteet . . . 35
      5.1.1 Tehtävänannon rajaaminen . . . 36
      5.1.2 Ongelman ratkaiseminen silmämääräisesti . . . 37
      5.1.3 Strategian harkitseminen . . . 37
      5.1.4 Perustelujen muodostaminen . . . 38
      5.1.5 GeoGebran käyttö . . . 38
      5.1.6 Käsitteiden täsmällisyys . . . 39
      5.1.7 Proseduurin löytyminen . . . 39
   5.2 Matemaattinen osaaminen avoimessa ongelmatehtävässä . . . 40
   5.3 Avoimen ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittava osaaminen . . . 43
6. Pohdinta . . . 45
   6.1 Ratkaisemisen haasteet ja niiden selättäminen . . . 45
   6.2 Avoin ongelmatehtävä matemaattista osaamista kehittämässä . . . 48
   6.3 Luotettavuus ja eettisyys . . . 49
   6.4 Yhteenveto ja jatkotutkimusehdotuksia . . . 51

Lähteet . . . 53

Liite A: Ongelmanratkaisutehtävän tehtävänanto . . . 56

Liite B: Kirje vanhemmille 57
Liite C: Tietosuojailmoitus 58
Liite D: Suostumuslomake 61

1. JOHDANTO

Ongelmanratkaisutaidot ovat korostuneet nyky-yhteiskunnassa. Esimerkiksi OECD:n julkaisun [28] mukaan työnantajat etsivät työntekijöitä, jotka osaavat ratkoa ongelmia. Tämä johtuu siitä, että koneet pystyvät suorittamaan rutiininomaiset tehtävät, jolloin työntekijöiden ei tarvitse ratkoa tai suorittaa niitä manuaalisesti [28]. Sen sijaan työntekijöiden tuleekin selviytyä odottamattomissa ja aiemmin tuntemattomissa tilanteissa mahdollistaakseen esimerkiksi koneiden toiminnan [28].

Ongelmanratkaisun tärkeys matematiikassa on ilmeistä. Leppäaho osoittaa väitöskirjassaan [22] kirjallisuuden perusteella, että ongelmanratkaisu on matematiikan ydin. Laine [19] toteaa ongelmanratkaisun kehittävän lähes kaikenlaisia matemaattisia taitoja. Ongelmanratkaisun tärkeys on huomioitu myös perusopetuksen opetussuunnitelmassa [30], jossa vuosiluokkien 7–9 kohdalla matematiikan tehtäväksi oppiaineena mainitaan oppilaiden innostaminen käyttämään matematiikkaa omassa elämässään ja valmiuksien antaminen ongelmien matemaattiseen mallintamiseen ja ratkaisemiseen sekä ratkaisujen esittämiseen ja niistä keskustelemiseen. Ongelmanratkaisutaidot ovat tärkeitä sen vuoksi, että niiden avulla oppilas voi käyttää muita oppimiaan matemaattisia tietoja ja taitoja arjessaan. Tässä tutkimuksessa on tarkoitus selvittää, millaisia haasteita oppilaat kohtaavat ongelmatehtävää ratkaistessaan. Haasteiden havaitseminen on tärkeää, jotta niihin voidaan opetuksessa reagoida.

Suomessa nousee keskustelunaiheeksi aika-ajoin, että peruskoululaisten matemaattinen osaaminen on laskenut. Matemaattista osaamista tutkitaan esimerkiksi PISA-tutkimuksilla. PISA (Programme for International Student Assessment) on OECD:n jäsenmaiden tutkimusohjelma, joka tuottaa tietoa koulutuksen tilasta ja tuloksista kansainvälisesti [16]. PISA-tutkimuksien mukaan suomalaisnuorten matemaattinen osaaminen on laskenut 2000-luvun alusta alkaen [31]. Vuonna 2003 teetetyssä PISA-tutkimuksessa Suomi oli matemaattisen osaamisen osalta osallistujamaista toisena, kun taas vuonna 2012 Suomi oli kahdestoista [31].

Matemaattinen osaaminen on Joutsenlahden [11] mukaan yksi oppilaan matemaattisen ajattelun ilmentymistä. Matemaattiseen osaamiseen liittyviä käsitteitä esiintyy kirjallisuudessa useita ja jokaisella on oma määrittelytapansa. Esimerkiksi Kilpatrick, Swafford ja Findell [14] käyttävät nimitystä matemaattinen osaaminen (mathematical proficiency), kun

taas OECD:n julkaisussa [27] matemaattista osaamista kuvataan käsitteellä matemaattinen lukutaito (mathematical literacy).

Kilpatrick, Swafford ja Findell [14] ovat yhdistäneet matemaattisen osaamisen käsitteeseen matemaattiset tiedot ja taidot. Matemaattiseen osaamiseen kuuluu se, millaista tietoa, ymmärrystä ja taitoa yksilö nykytiedon valossa tarvitsee oppiakseen matematiikkaa [14]. Matemaattisen osaamisen osa-alueisiin kuuluu Kilpatrickin ym. [14] mukaan konseptuaalinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, soveltuva päättely ja yritteliäisyys.

Matemaattinen lukutaito -käsite on esitetty PISA-tutkimuksen viitekehyksessä [27]. Matemaattinen lukutaito käsitteenä tarkoittaa matemaattista osaamista, jota käytetään erilaisissa tilanteissa [27]. Matemaattinen lukutaito on yksilön kykyä tunnistaa ja ymmärtää, mihin matematiikkaa käytetään, tehdä perusteluja ja arvioita sekä käyttää tarpeita vastaavaa matematiikkaa [27]. Lukutaito -termi viittaa siihen, että oppilaiden tulee kyetä käyttämään matematiikan kieltä, johon sisältyvät esimerkiksi käsitteet, rakenteet, merkinnät ja symbolit [27].

PISA-tutkimuksessa matemaattisella osaamisella tarkoitetaan tiivistetysti sanoen oppilaiden tietoja ja taitoja erityisesti, kun oppilaat ratkovat matemaattisia ongelmia erilaisissa tilanteissa [16]. Matemaattiset ongelmanratkaisutaidot siis korostuvat PISA-tutkimuksissa. PISA-tulosten lasku voi kertoa siitä, että matemaattisissa ongelmanratkaisun taidoissa on puutteita.

Matemaattiset ongelmatehtävät perustuvat siihen, että oppilas itse muodostaa tehtävään ratkaisun aiempien tietojensa pohjalta yhdistellen vanhoja tietoja uudella tavalla [22]. Jos tehtävästä voi heti tunnistaa toimenpiteet, joita tehtävän suorittaminen vaatii, tehtävä on rutiinitehtävä [22]. Ongelmatehtävät voivat olla suljettuja tai avoimia riippuen ongelman asettelusta. Avoimeen ongelmatehtävään ei usein ole yhtä oikeaa vastausta, vaan oppilaan tulee joko tehdä alkutilanteeseen tai ratkaisustrategiaan liittyviä valintoja, mitkä vaikuttavat lopputulokseen.

Ongelmatehtävät kehittävät ongelmanratkaisua, mikä todettiin tärkeäksi taidoksi matematiikassa. Kuitenkin Leppäahon [22] mukaan ongelmatehtävien tekeminen, saati niiden opettaminen jäävät koulussa vähäiseksi ja usein niitä ehtivät tekemään vain lahjakkaimmat oppilaat. Kaikki matematiikan opettajat eivät siis vielä ole ottaneet omaan opetukseensa ongelmatehtäviä. Tämä voi johtua esimerkiksi siitä, että opettajalla on negatiivisia kokemuksia ongelmatehtävän käyttämisestä oppitunnilla. Oppilaiden itseohjautuvuus tehtävien parissa saattaa joskus olla täysin kadoksissa, jolloin he tarvitsevat perustehtäviinkin runsaasti opettajan apua. Tämä ei välttämättä ole omiaan kannustamaan opettajaa käyttämään opetuksessaan ongelmatehtävää, jossa oppilaan täytyisi entistä enemmän pyrkiä itseohjautuvasti etsimään ratkaisua.

Ongelmanratkaisussa esiin tulevien haasteiden tutkiminen voisi osaltaan vähentää opettajien ennakkokäsityksiä ongelmatehtäviä kohtaan. Kun opettaja tietää, millaisia haasteita oppilaalle voi tehtävässä tulla vastaan, hän pystyy reagoimaan niihin jo etukäteen. Ongelmanratkaisun aikana tulevia haasteita onkin jonkin verran tutkittu ja niiden avulla on muodostettu jaotteluja taidoista, joita oppilas tarvitsee ongelmatehtävää tehdessään. Esimerkiksi Moses [24] on tutkinut ongelmanratkaisun haasteita ja sitä kautta luonut oman jaottelunsa taidoista, joita ongelmanratkaisuun tarvitaan. Jaotteluun kuuluu esimerkiksi lukutaito ja visualisointi [24]. Nämä käsitteet itsessään sisältävät jo useita taitoja, esimerkiksi lukutaitoon voi liittyä sekä kielellinen että matemaattinen lukutaito ja tehtävän ymmärtäminen, kun taas visualisointiin voi liittyä tilanteen hahmottaminen ja kuvittaminen. Teoriassa esiintyvät jaottelut ongelmanratkaisuun tarvittavista taidoista eivät siis ole useinkaan tarkkoja.

Pascual ja San Pedro [29] tutkivat tutkimuksessaan opiskelijoiden ongelmanratkaisukykyä toisen asteen koulutuksen jälkeen. Tutkimuksessa pyrittiin muodostamaan reaalimaailman ongelmatilanteita, joita oppilaat ratkaisivat. Yksi esimerkki tehtävistä oli:

> Mr. Galangilla on suorakulmion muotoinen pelto, jonka sivut ovat 1000 metriä ja 1500 metriä. Hän jakaa maansa lapsilleen siten, että jokainen lapsi saa neliön muotoisen pellon. Mikä on tässä tapauksessa Mr. Galangin pienin mahdollinen lasten määrä? [29].

Pascualin ja San Pedron tutkimuksen [29] yksi päätavoitteista oli tunnistaa opiskelijoiden vaikeudet ongelmanratkaisuprosessissa [29]. Tutkimustuloksena saatiin, että opiskelijoiden haasteet ongelman esittelyvaiheessa olivat kielelliset haasteet ja opiskelijoiden tottumattomuus ongelmatehtäviin. Tutkimuksessa selvisi, että osa opiskelijoista ei ollut aiemmin ratkaissut vastaavia ongelmatehtäviä. Tällöin on vaikea suunnitella strategioita ongelman ratkaisemiseksi. Tutkimuksessa nousi esiin myös, että oppilailla ei ole tapana tarkistaa ratkaisuaan, joten arviointivaihe jäi ongelmanratkaisuprosessista puuttumaan [29].

Useimmissa ongelmanratkaisua tutkivissa tutkimuksissa käytetyt ongelmatehtävät ovat suljettuja tehtäviä. Myös Pascualin ja San Pedron [29] tutkimuksessa käytetyt tehtävät, mainittu peltotehtävä mukaan lukien, olivat suljettuja. Avoimiin ongelmatehtäviin ja sen ratkaisemisen haasteisiin liittyviä tutkimuksia on tehty verrattain vähän.

Ongelmanratkaisun haasteita ja ongelmanratkaisuun tarvittavia taitoja on siis tutkittu aiemmissa tutkimuksissa. Tutkimuksissa käytetyt tehtävät ovat kuitenkin usein olleet suljettuja ongelmatehtäviä ja niiden pohjalta luodut jaottelut matemaattiseen ongelmanratkaisuun tarvittavista taidoista melko ylimalkaisia. Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteita. Haasteita tutkimalla voidaan saada selville, mihin ongelmanratkaisun taitoihin olisi hyvä kiinnittää huomiota opetuksessa. Lisäksi avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteiden tunteminen voi auttaa

opettajia järjestämään ongelmanratkaisua sisältäviä oppitunteja. Haasteita tutkitaan sekä tehtävän ratkaisemisessa tulevien ongelmien että matemaattisen osaamisen havainnoinnin kautta. Matemaattista osaamista havainnoidaan Kilpatrickin ym. [14] matemaattisen osaamisen jaottelun avulla.

Tämän tutkimuksen tutkimuskysymykset ovat:

1. Millaisia haasteita oppilaat kohtaavat avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisessa?
2. Millaista matemaattista osaamista oppilaat tarvitsevat ratkaistessaan avointa ongelmatehtävää?

2. TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Luvussa 2.1 määritellään, mitä matemaattinen osaaminen tarkoittaa ja esitetään tutkimuksessa käytetty Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin [14] matemaattisen osaamisen jaottelu viiteen eri osa-alueeseen. Luvussa 2.2 esitellään ongelmanratkaisuun, ongelmatehtävään ja ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittaviin taitoihin liittyvää teoriaa.

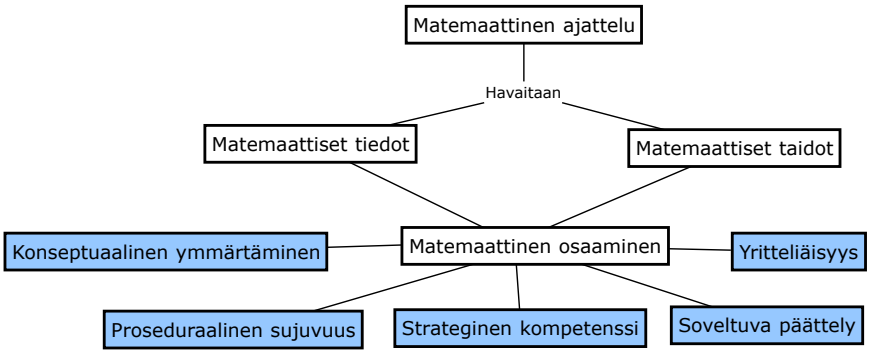
2.1 Matemaattinen osaaminen

Yksi tämän tutkimuksen tavoitteista on havainnoida oppilaiden matemaattista osaamista. Matemaattinen osaaminen on Joutsenlahden [11] mukaan matemaattisen ajattelun ilmentymä. Oppilaiden matemaattista ajattelua voidaan siis havainnoida matemaattisen osaamisen kautta. Tässä tutkimuksessa matemaattinen osaaminen määritellään Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin esittämällä tavalla, jonka mukaan matemaattinen osaaminen tarkoittaa matemaattisia tietoja ja taitoja, joita oppilas tarvitsee oppiakseen matematiikkaa.

Kun tutkitaan matemaattista osaamista, on hyvä pohtia, mitä osa-alueita siihen liittyy. Kilpatric, Swafford ja Findell [14] ovat jakaneet matemaattisen osaamisen viiteen osa-alueeseen: konseptuaaliseen ymmärtämiseen, proseduraaliseen sujuvuuteen, soveltuvaan päättelyyn, strategiseen kompetenssiin ja yritteliäisyyteen. Matemaattista osaamista havainnoidaan tässä tutkimuksessa näiden osa-alueiden avulla. Osa-alueisiin sisältyviä matemaattisia tietoja ja taitoja on tässä työssä laajennettu myös muun kirjallisuuden perusteella. Kilpatrickin ym. [14] mukaan matemaattisen osaamisen viisi osa-aluetta ovat toisiinsa kytköksissä ja riippuvaisia toisistaan, kun kehitetään oppilaan matemaattista osaamista. Osa-alueet ovat toisiinsa kytköksissä, sillä Kilpatrickin ym. [14] mukaan syvä ymmärrys vaatii, että oppija kykenee yhdistämään tiedon palasia. Tiedon yhdistelememinen on avainasemassa siinä, pystyvätkö oppijat käyttämään osaamistaan ongelmanratkaisutilanteessa. Lisäksi metakognitio eli tieto omasta ajattelusta ja taito käyttää omaa ymmärtämistään ja ongelmanratkaisua on ratkaisevassa osassa ongelmanratkaisutilanteessa [14].

Kuvaan 2.1 on koottu yhteen tämän tutkimuksen kannalta oleellisia käsitteitä, jotka liittyvät matemaattiseen osaamiseen. Oppilaan matemaattista ajattelua voidaan havaita matemaattisten tietojen ja taitojen kautta. Matemaattinen osaaminen voidaan ajatella mate-

maattisen ajattelun ilmentymänä ja se sisältää matemaattiset tiedot ja taidot. Matemaattinen osaaminen jakautuu Kilpatrickin ym. [14] mukaan viiteen eri osa-alueeseen, joita tässä tutkimuksessa havainnoidaan.



Kuva 2.1. *Kaavio tutkimuksen kannalta oleellisista matemaattiseen osaamiseen liittyvistä käsitteistä.*

Tässä tutkimuksessa matemaattisen osaamisen osa-alueina käytetään siis Kilpatrickin ym. [14] jaottelua, jonka mukaan matemaattiseen osaamiseen kuuluu konseptuaalinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, soveltuva päättely ja yritteliäisyys. Jokaiseen osa-alueeseen kuuluu erilaisia matemaattisia tietoja ja taitoja, jotka näkyvät opiskelijan suorituksessa.

Konseptuaalista ymmärtämistä määriteltäessä on hyödyllistä pohtia ensin konseptuaalisen tiedon käsitettä. Matemaattinen tieto jaetaan usein konseptuaaliseen eli käsitteelliseen ja proseduraaliseen eli menetelmiin liittyvään tietoon [22]. Käsitteellä tarkoitetaan yksilön henkistä rakennetta, ja toisaalta yhteisesti hyväksyttyä ilmauksen merkitystä [11]. Toisin sanoen käsite voi tarkoittaa esimerkiksi kolmion käsitettä. Kuvio on kolmio, kun se täyttää tietyt ehdot. Toisaalta yksilön ymmärrys esimerkiksi kolmion käsitteestä kehittyy lapsuudesta aikuisuuteen kokemuksen perusteella. Lapsena kolmio voi tarkoittaa tietyn muotoista, värityskirjaan piirrettyä kuviota. Aikuisuuteen mennessä näköhavainto on laajentunut tarkoittamaan tietyn määritelmän mukaista geometrista käsitettä. Kuitenkin kyseessä on koko ajan sama käsite, kolmio, eli se on yksilön henkinen rakenne. Konseptuaalinen tieto on aina yhteydessä muihin tietoyksikköihin, joten se on osa tietoverkkoa [11]. Tietoverkko muodostuu siis käsitteistä ja menetelmistä ja niiden välisistä yhteyksistä. Oppijan tieto on konseptuaalista, jos hän tunnistaa sen paikan tietoverkossa [11]. Käsitteellinen tieto eli konseptuaalinen tieto on siis, kuten Haapasalo [6] toteaa, tietoa riippuvuuksista.

Konseptuaalinen ymmärtäminen (conceptual understanding) yhdistää konseptuaalisen

tiedon ja ymmärryksen. Se on matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja niiden välisten suhteiden ymmärtämistä [22]. Oppilaat, joilla on konseptuaalista ymmärrystä ymmärtävät, miksi matemaattinen käsite on tärkeä ja missä konteksteissa se on hyödyllinen [14]. He ovat siis järjestäneet matemaattiset tietonsa yhtenäiseksi kokonaisuudeksi ja uusien asioiden oppiminen tapahtuu liittämällä uudet asiat aiempiin tietoihin [14]. Konseptuaalinen ymmärtäminen auttaa Kilpatrickin ym. [14] mukaan oppilasta muistamaan esimerkiksi proseduureja, sillä jos jokin tieto pääsee unohtumaan, oppilas kykenee rekonstruoimaan sen aiempien tietojensa pohjalta. Tällöin Kilpatrickin ym. [14] mukaan on myös epätodennäköistä, että oppilas muistaa opitun metodin väärin. Kun oppilas ymmärtää, miksi metodi toimii, virheen sattuessa hän huomaa, ettei tulos ole järkevä. Joutsenlahden [11] mukaan konseptuaalinen ymmärtäminen näkyy opiskelijan suorituksissa esimerkiksi silloin, kun opiskelija luo esimerkkejä ja vastaesimerkkejä väitteestä, käyttää ja yhdistää malleja ja erilaisia käsitteiden esitysmuotoja sekä vertaa ja yhdistää toisiaan lähellä olevia käsitteitä ja periaatteita.

Proseduraaliseksi tiedoksi voidaan luokitella Haapasalon [6] mukaan formaalin kielen ja käsitteen symboliset esitykset sekä säännöt, toimintakaavat ja algoritmit, joita käytetään ongelmien ratkaisemiseksi. Formaalin kielen ja käsitteen symbolisiin merkityksiin kuuluu symbolien sekä niiden käyttöä koskevien sääntöjen ymmärtäminen. Esimerkisi symbolien käyttöä koskevista säännöistä Haapasalo [6] antaa yhtälön oikein kirjoittamisen. Proseduraalinen tieto voi olla matemaattisten symbolien lisäksi myös esimerkiksi apuvälineiden ja piirrosten avulla esitettyä [6]. Sääntöihin, toimintakaavoihin ja algoritmeihin liittyvä proseduraalinen tieto muodostuu perättäisistä, lineaarisesti etenevistä askeleista [6]. Tämä tarkoittaa sitä, että edellisestä prosessin vaiheesta tunnistetaan aina seuraava vaihe.

Proseduraalinen sujuvuus (procedural fluency) on yhdistelmä proseduraalisia tietoja ja taitoja. Se ilmenee Kilpatrickin ym. [14] mukaan taitona toteuttaa matemaattiset menettelytavat joustavasti, täsmällisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti. Proseduraalinen sujuvuus sisältää siis tiedon miten ja milloin käyttää proseduureja ja taidon esittää ne tehokkaasti [14]. Proseduraalinen sujuvuus näkyy Joutsenlahden [11] mukaan, kun opiskelija valitsee tehtävään asianmukaisen proseduurin ja soveltaa sitä oikein, osoittaa valitun proseduurin soveltuvaksi tehtävän ratkaisuun ja laajentaa ja muokkaa tuntemiaan proseduureja annetun tehtävän ratkaisemiseksi.

Koulussa oppilaat ratkovat usein hyvin määriteltyjä ongelmia, mutta koulun ulkopuolella oppilaan onkin vaikeampi löytää, mikä ongelma oikeastaan on [14]. Tällöin oppilaan täytyy formuloida ongelma, jotta hän voi käyttää matematiikkaa ratkaisemaan sen [14]. Tätä Kilpatrick, Swafford ja Findell [14] kutsuvat strategiseksi kompetenssiksi (strategic competence). Se sisältää taidon muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Matemaatiikan opetuksen kirjallisuudessa strategista kompetenssia voidaan kutsua myös ongelmanratkaisuksi tai ongelman muotoiluksi [14].

Strateginen kompetenssi näkyy, kun oppija tietää erilaisia ratkaisutapoja, valitsee strategian ongelman ratkaisemiseen, muodostaa ongelmia, tietää ongelmien esitysmuotoja ja valitsee hyödyllisimmän ja pystyy ratkaisemaan uusia tilanteita [1]. Lisäksi oppija havaitsee matemaattisia suhteita ja suunnittelee uusia ratkaisumenetelmiä tarvittaessa [14].

Soveltuva päättely (adaptive reasoning) sisältää kyvyn loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selityksiin ja perusteluihin [14]. Sen avulla oppija varmistuu, että ajattelu on oikeaa ja pätevää [14]. Soveltuva päättely perustuu vaihtoehtojen huolelliseen harkintaan ja sisältää tiedon siitä, kuinka johtopäätökset perustellaan [14]. Soveltuvaan päättelyyn kykenevä oppija ajattelee ratkaisun olevan oikein, jos se seuraa hyväksyttyjä loogisia jalanjälkiä [14]. Tällöin oppilas ei anna suurta painoarvoa saadulle vastaukselle. Soveltuvaan päättelyyn sisältyy myös intuitio [25]. Intuitiivinen ymmärrys näkyy, kun oppilas ennustaa jonkin asian totuuden epäröimättä ja analysoimatta ensin analyyttisesti [25]. Intuition vuoksi soveltuvalla päättelyllä on laajempi ulottuvuus kuin yleisellä päättelyllä, joka sisältää vain induktiivisen ja deduktiivisen päättelyn [25]. Soveltuva päättelyn taitoihin kuuluu kyky ajatella loogisesti tilanteiden ja käsitteiden välistä suhdetta [25]. Lisäksi soveltuvan päättelyn avulla oppilas kykenee antamaan epävirallisia selityksiä ja perusteluja ja tietää kuinka todistaa tai perustella tulokset [1].

Yritteliäisyys (productive disposition) koostuu yksilön ahkeruudesta ja tehokkuudesta, jotka seuraavat yksilön asenteesta nähdä matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja vaivanarvoisena [14] . Jotta oppilas kehittää matemaattiseen osaamiseen liittyviä kykyjään, hänen täytyy uskoa, että matematiikka on ymmärrettävissä ja tietyllä vaivannäöllä opittavissa [14]. Toisaalta myös jonkun matemaattisen osaamisen osa-alueen kehittyessä oppilaan asenteet ja uskomukset muuttuvat positiivisemmiksi, mikä edistää muiden piirteiden kehittymistä [11].

Yritteliäisyyteen liittyviä keskeisiä käsitteitä ovat siis uskomukset ja asenteet. Nämä vaikuttavat metakognition kautta opiskelijan suorituksiin [11]. Metakognitiot ohjaavat opiskelijan ajattelua, päätöksentekoa ja säätelevät strategioiden käyttöä, sillä niiden kautta opiskelija tietoinen omasta ajattelustaan [11]. Opiskelijalla täytyy olla kuva siitä, mitä hän hallitsee, jotta hän voi kehittyä tehokkaammaksi ongelmanratkaisijaksi [11].

Matemaattisen osaamisen osa-alueet ja se, miten ne näkyvät opiskelijan suorituksessa on koottu taulukkoon 2.1. Taulukosta on jätetty pois yritteliäisyys, sillä tämän tutkimuksen tutkimusmenetelmillä (ratkaisukeskusteluiden äänittäminen ja ratkaisujen kerääminen) ei pystytä luotettavasti havainnoimaan oppilaiden yritteliäisyyttä. Taulukkoa 2.1 käytetään hyväksi tutkimusaineiston analysoinnissa.

Myös muita matemaattisen osaamisen osa-alueiden jaotteluita löytyy kirjallisuudesta. Yhdysvaltalainen jatkuva tutkimussarja, NAEP (The National Assessment of Educational Progress), tutkii perus- ja toisen asteen opiskelijoiden osaamista [23]. NAEP:n julkaisussa [23] matemaattista osaamista on mitattu tehtävien matemaattisen monimutkaisuuden

Taulukko 2.1. *Matemaattisen osaamisen osa-alueet oppilaan suorituksessa*

Konseptuaalinen ymmärtäminen	Käsitteiden käyttö oikein eri yhteyksissä Käsitteiden välisten yhteyksien tunnistaminen Menetelmien muistaminen ja rekonstruointi Erilaisten esitysmuotojen käsittely Esimerkkien ja vastaesimerkkien luonti [14, 11]
Proseduraalinen sujuvuus	Asianmukaisen proseduurin valinta Rutiininomaiset laskutoimitukset Symboleja ja kaavoja sisältävien lausekkeiden käsittely Matemaattisen tiedon esitys- ja merkintätavat [14, 11]
Strateginen kompetenssi	Tilanteeseen liittyvän matematiikan tunnistus Tieto erilaisista ratkaisutavoista Ongelmanratkaisustrategian valinta Ongelmien muodostaminen Uusien ratkaisumenetelmien suunnitteleminen [14, 11, 1]
Soveltuva päättely	Intuitiivinen ymmärrys Epäviralliset selitykset ja perustelut Tieto, kuinka perustella tulos Looginen ajattelu Vaihtoehtojen huolellinen harkinta [14, 11, 1, 25]

(mathematical complexity) avulla. Tehtävien matemaattinen monimutkaisuus määräytyy sen mukaan, mitä osaamisalueita sen suorittamiseen liittyy [23]. Näitä osaamisalueita ovat: käsitteiden muistaminen ja tunnistaminen, joustava ajattelu, ratkaisumenetelmän valinta, perustelu, päättely, suunnittelu, analysointi, luova ajattelu ja erityistapauksien yleistäminen [23].

Myös OECD on julkaisussaan [27] esittänyt oman jaottelunsa matemaattisen osaamisen osa-alueista. Osa-alueet määräytyvät siten, että niille voidaan määrittää eri osaamisen tasoja [27]. OECD luokittelee julkaisussaan [27] matemaattisen osaamisen osa-alueet seuraavasti:

- ajattelu ja päättely
- perustelu
- viestintä

- mallintaminen
- ongelman muotoileminen ja ratkaiseminen
- esittäminen
- symbolisen, formaalin ja teknisen kielen käyttö ja operaatiot
- apuvälineiden käyttö.

Kilpatrick ym. [14] toteavat, että heidän jaottelussaan on yhtäläisyyksiä NAEP:n luomaan jaotteluun. OECD:n jaottelu eroaa kuitenkin aika paljon Kilpatrickin ym. jaottelusta. Osa OECD:n luettelemista osa-alueista kuuluu useaan Kilpatrickin ym. esittämään osa-alueeseen. Esimerkiksi mallintaminen on määritelty tarkoittavan tilanteen jäsentämistä, todellisuuden muokkaamista matemaattisiksi rakenteiksi, mallin varmistamista, arviointia ja esittämistä [27]. Mallintaminen kuuluu siis sekä strategiseen kompetenssiin, johon kuuluu tilanteeseen liittyvän matematiikan tunnistaminen että soveltuvaan päättelyyn, johon kuuluu ratkaisutavan perustelu. Kuitenkin suurin osa Kilpatrickin ym. esittämistä osa-alueista on yhdistettävissä OECD:n luettelemiin osa-alueisiin. Konseptuaaliseen ymmärtämiseen liittyy OECD:n esittämistä osa-alueista esittäminen. Proseduraaliseen sujuvuuteen liittyy symbolisen ja formaalin kielen käyttö, operaatiot ja apuvälineiden käyttö. Strategiseen kompetenssiin kuuluu mallintamisen lisäksi ongelman muotoileminen kun taas soveltuvaan päättelyyn kuuluvat ajattelu, päättely ja perustelu.

Kaikki OECD:n julkaisussa [27] luetellut osa-alueet eivät kuitenkaan sisälly Kilpatrickin ym. [14] esittämään jaotteluun. Esimerkiksi viestintään liittyvää osa-aluetta ei Kilpatrickin ym. jaottelusta löydy. Viestinnällä tarkoitetaan itsensä ilmaisemista suullisesti ja kirjallisesti sekä muiden kirjallisten tai suullisten lausuntojen ymmärtämistä [27]. Kielen käyttöön ei myöskään kiinnitetä yhtä paljon huomiota Kilpatrickin ym. jaottelussa kuin OECD:n luomassa jaottelussa. Toisaalta esimerkiksi käsitteisiin liittyvä osaaminen on Kilpatrickin ym. osa-alueissa selvemmin näkyvillä.

OECD:n jaottelu on luotu tuomaan esiin eri matemaattisen osaamisen tasoja. Esimerkiksi OECD:n jaottelussa ongelman muotoileminen ja ratkaiseminen omana osaamisalueenaan vastaa erilaisten ongelmatehtävien ratkaisua [27]. Tässä tutkimuksessa on tarkoitus havaita mitä matemaattista osaamista oppilaat tarvitsevat ongelmatehtävää ratkaistessaan. Matemaattisen osaamisen havainnoimiseen käytetään Kilpatrickin ym. [14] luomaa jaottelua, sillä jaottelun avulla on luontevampaa tarkastella avoimeen ongelmanratkaisuprosessiin liittyvää osaamista, johon liittyy vahvasti strategiseen kompetenssin ja soveltuvaan päättelyyn liittyvät taidot. Lisäksi konseptuaaliseen ymmärtämiseen liittyvä osaaminen korostuu Kilpatrickin ym. [14] jaottelussa, mikä on olennaista avointen ongelmatehtävien ratkaisemista tutkiessa.

2.2 Matemaattinen ongelmanratkaisu ja ongelmatehtävä

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden [30] oppimiskäsityksen mukaan oppilas on aktiivinen toimija. Tämä tarkoittaa sitä, että oppilaan tulisi oppia asettamaan tavoitteita ja ratkaisemaan ongelmia itsenäisesti ja ryhmässä [30]. Tämä osa oppimiskäsityksen kuvauksesta liittyy konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, jonka mukaan tieto ei siirry, kuten behavioristisessa oppimiskäsityksessä, vaan oppilas jäsentää sen itse aiemman tiedon pohjalta [22]. Leppäaho [22] toteaa, että Matematiikan oppitunti rakentuu usein siten, että uusi asia opetellaan ensin. Tämän jälkeen oppilaat tekevät perustehtäviä ja sen jälkeen sovelletaan. Nopeimmat saattavat edetä ongelmanratkaisua vaativiin tehtäviin [22]. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan luonnollisempi tapa olisi, että oppilaat itse, esimerkiksi ongelmatehtävän avulla, pohtisivat uutta, opeteltavaa asiaa ja pyrkisivät liittämään sen aiemmin opittujen tietojen avulla osaksi tietoverkkoaan.

Matemaattinen ongelmanratkaisu lähtee ongelmatilanteesta. Ongelmatilanne on tehtävätilanne, jonka ratkaisemiseksi oppilaan tulee yhdistellä tuttuja tietoja uudella tavalla [22]. Jos tehtävästä voi heti tunnistaa toimenpiteet, joita tehtävän suorittaminen vaatii, tehtävä on rutiinitehtävä [22]. Oleellista ongelmatilanteessa siis on, ettei ratkaisu löydy heti, mutta oppilaalla on valmiudet ratkaista tehtävä [22].

Ongelmalähtöinen oppiminen tarkoittaa ajattelu- ja oppimistaitojen opettamista integroituneena oppiaineen opettamiseen [15]. Tällöin tavoitteena ei ole vain sisältöjen oppiminen vaan lisätä strategisia ja metakognitiivisia taitoja, joiden avulla oppilaat kykenevät entistä tehokkaammin käsittelemään oppiainetta konstruktiivisesti [15]. Toisin sanoen ongelmalähtöisessä oppimisessa uusi asia voidaan oppia esimerkiksi ongelmatehtävän kautta, jolloin oppilaan täytyy itse muodostaa tapa, jolla tehtävän voi ratkaista. Esimerkiksi tällainen tehtävä voisi olla avaruuslävistäjän pituuden kaavan muodostaminen aiempien tietojen pohjalta [34]. Ongelmalähtöinen oppiminen vastaa siis opetusuunnitelman oppimiskäsitykseen.

Ongelmatehtävät voidaan luokitella avoimiin ja suljettuihin alku- ja lopputilanteen mukaan [22]. Suljetussa tehtävässä sekä alku- että lopputilanne ovat suljettuja ja ongelmaan on tällöin vain yksi oikea vastaus [22]. Avoimessa ongelmatehtävässä joko alku tai lopputilanne on avoin [22]. Avoimessa alkutilanteessa opiskelijan annetaan tehdä valintoja alkutilanteen suhteen ja hän saa itse päättää, mistä lähtökohdista hän pääsee vaadittuun lopputulokseen [22]. Avoimessa lopputilanteessa tehtävään ei ole yhtä ainoaa oikeaa vastausta, vaan ratkaisu on oikein, kun se toteuttaa annetut alkuehdot [22]. Ongelman alku- ja lopputilanteen molempien ollessa avoimia ratkaisijan tulee luoda oma tehtävä annetusta tilanteesta ja ratkaista se haluamallaan tavalla [22]. Kuvassa 2.2 on esimerkkejä erilaisista avoimista tehtävistä. Suljettua tehtävää edustaa tehtävä, jossa on suljettu alku- sekä lopputilanne.

	Avoin lopputilanne	Suljettu lopputilanne
Avoin alkutilanne	Suunnittele huone, jossa on mahdollisimman vähän hukkatilaa. Huoneeseen tulee mahtua sänky, kirjoituspöytä ja vaatekaappi.	Piirrä huoneen pohjapiirustus ja laske sen pinta-ala
Suljettu alkutilanne	Piirrä kaksi erilaista huonetta, joiden kummankin pinta-ala on 15 m^2.	Laske suorakulmion muotoisen huoneen pinta-ala, kun sen pituus on 4 metriä ja leveys 2,5 metriä.

Kuva 2.2. *Esimerkkejä avoimista ja suljetuista alku- ja lopputilanteista*

Avoin ongelmatehtävä on käyttökelpoinen silloin, kun ratkaisussa pyritään korostamaan ymmärtämistä ja luovuutta [22]. Avoimet tehtävät voivat olla esimerkiksi tutkimustehtäviä tai alun perin suljettuja tehtäviä, joiden tehtävänannoista on poistettu joitain ehtoja [22].

Minkälainen sitten on hyvä ongelmatehtävä? Leppäaho [22] mainitsee, että ongelmatilanteen tulisi saada oppilas motivoitumaan ongelman ratkaisemisesta. Leinhardtin [21] mukaan tehtävän autenttisuus on tärkeä ominaisuus hyvälle ongelmatehtävälle. Autenttisessa ongelmatilanteessa on jokin matemaattinen ominaisuus, joka ei ole itsestäänselvä mutta on luonnostaan tärkeä [21]. Leinhardt [21] toteaa, että usein tarvitaan empiiristä tutkimusta selvittämään, minkälainen ongelmatilanne toimii. Pólya [34] antaa myös ohjeeksi valita ongelmatehtävä hyvin: tehtävä ei saa olla liian vaikea eikä liian helppo. Lisäksi sen tulee olla luonnollinen ja kiinnostava. Ongelmatehtävän valinta tulee siis tehdä huolella niin, että tehtävä on motivoiva ja tarpeeksi haastava, muttei kuitenkaan liian vaikea.

2.3 Ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittavat taidot

Ongelmanratkaisun taitoja pidetään matematiikassa korkeatasoisen oppimisen tavoitteena, sillä ongelmanratkaisu kehittää lähes kaikenlaisia matemaattisia taitoja [19]. Eri lähteissä ongelmanratkaisuun tarvittavia taitoja lähestytään kuitenkin eri lähtökohdista ja näin on syntynyt useita erilaisia luetteloita ja luokitteluja taidoista, joita ongelmanratkaisuun tarvitaan.

Joutsenlahden [11] mukaan ongelmanratkaisun hallinta edellyttää, että opiskelija

- tunnistaa ja muotoilee ongelmia
- päättää annetun tiedon riittävyydestä ja loogisesta ristiriidattomuudesta
- käyttää strategioita, tietoa, malleja ja tehtävään sopivaa matematiikkaa
- luo, laajentaa ja muokkaa proseduureja
- käyttää päättelyä uusissa tilanteissa

- arvioi ratkaisujen järkevyyttä ja oikeellisuutta.

Kinnunen ja Vauras [15] ovat esittäneet neljä matemaattista erityisosaamista edustavaa toiminnan tasoa, jotka liittyvät ongelmanratkaisuun: käsitteellinen, strateginen, tekninen ja operaatioiden taso. Käsitteelliselle tasolle kuuluu käsitteiden, strategioiden ja tekniikkojen ymmärtäminen ja ongelman matemaattisten elementtien tunnistaminen. Strateginen taso tarkoittaa ongelmalle erityisten ratkaisustrategioiden valitsemista ja toteutusta. Tekninen taso sisältää ratkaisua kohti vievät säännöt, merkitsemistavat ja laskutekniikat. Operaatioiden tasolle kuuluvat mentaaliset operaatiot ja automaatioiksi muuntuneet laskutoimitukset. Kinnusen ja Vauraan [15] luokittelussa ei ole huomioitu ongelman muotoilua ja tunnistamista eikä päättelyn ja arvioinnin osuutta Joutsenlahden [11] esittämiin ongelmanratkaisuun tarvittaviin taitoihin verrattuna. Toisaalta Joutsenlahti [11] ei ole erikseen maininnut käsitteiden ymmärtämistä jaottelussaan.

Ballew ja Cunningham [2] ovat tiivistäneet ongelmanratkaisuun tarvittavat taidot neljään eri kykyyn:

- kyky lukea ongelma
- kyky asettaa ongelma siten, että tarpeelliset laskutoimitukset on mahdollista suorittaa
- kyky suorittaa tarvittavat laskutoimitukset
- kyky yhdistää lukeminen ja ongelman käsittely ongelman kokonaisratkaisuksi.

Ballewn ja Cunninghamin [2] jaottelussa käsitteellisellä osaamisella ei ole painoarvoa. Ongelman lukemiseen on sen sijaan kiinnitetty enemmän huomiota kuin Joutsenlahden [11] ja Kinnusen ja Vauraan [15] jaotteluissa.

Moses esittää artikkelissaan [24] oman havainnoinninsa kautta kolme tasoa, jotka aiheuttavat oppilaille haasteita ongelmanratkaisussa. Haasteet esitetään ongelmanratkaisussa tarvittavina taitoina.

- Taso 1: ongelmaan tutustuminen
  - oppilaan motivointi
- Taso 2: perustaidot
  - matemaattiset taidot, kuten laskutaito ja termien ja käsitteiden hallinta
  - lukutaito
- Taso 3: Yleiset kognitiiviset taidot
  - visualisointi
  - joustava ajattelu
  - analogioiden muodostaminen [24]

Mosesin [24] havaintojen mukaan oppilat eivät pidä tuntemattomia tilanteita tärkeinä ja kiinnostavina, minkä vuoksi oppilaan motivointi on tärkeää. Ongelman asetteluun tulee siis käyttää erityisesti vaivaa [24]. Lukutaito tarkoittaa erityisesti matematiikan kielen tuntemista, siis ongelmassa esiintyvien matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä. Joustavalla ajattelulla Moses tarkoittaa, että oppilas tuottaa ideoita ja tunnistaa ongelmasta muutakin kuin siinä annetut faktat [24]. Tällä voidaan tarkoittaa esimerkiksi, että oppilas tunnistaa matemaattisia käsitteitä ja rajoituksia, jotka tilanteeseen liittyvät, mutta tehtävänannossa näitä ei ole sanottu. Mosesin [24] jaottelussa esiintyvät käsitteet ovat hieman erilaisia kuin Joutsenlahden [11] ja Kinnusen ja Vauraan [15]. Esimerkiksi joustavan ajattelun ja analogioiden muodostamisen voidaan ajatella liittyvän ratkaisustrategian valintaan.

Myös Pólyan ratkaisemisen taito- kirjassa [34] esitetään ongelmanratkaisuun liittyviä vaiheita ja vaiheisiin liittyviä taitoja. Ensimmäisessä vaiheessa oppilaan tulee ymmärtää ongelma ja selvittää, mikä on ongelmanratkaisun tavoite. Tähän tarvitaan lukutaitoa ja lukemisen ymmärtämistä. Toisessa vaiheessa oppilas muodostaa suunnitelman ongelman ratkaisemiseksi. Tähän vaiheeseen oppilaan tulee valita, mitä laskutoimituksia, selvityksiä ja kehitelmiä ratkaisemiseen tarvitaan. Kolmannessa vaiheessa oppilas toteuttaa suunnitelman, jolloin tarpeellisia taitoja ovat päättelyn oikeellisuuden varmistaminen, muodollisten sääntöjen noudattaminen ja proseduurien tietäminen. Neljäs vaihe sisältää ratkaisun tarkastelun, arvioinnin, uudelleen harkinnan ja tehtävänantoon palaamisen.

Kaikki edellä mainitut näkemykset ongelman ratkaisuun tarvittavista taidoista ovat omia versioitaan, joissa on hieman eroavaisuuksia ja toisaalta myös jotain yhteistä. Taulukkoon 2.2 on koottuna tiivistetysti yhdistelmä näistä kaikista ongelmanratkaisuun tarvittavista taidoista.

Taulukko 2.2. *Ongelmanratkaisuun tarvittavat taidot [2, 24, 34, 15, 11]*

Ongelman ymmärtäminen	Lukutaito, matemaattisten elementtien tunnistaminen ongelmasta
Strategiset taidot	Joustava ajattelu, vastaavuuksien muodostaminen, ratkaisustrategian valinta
Tekninen suorittaminen	Käsitteiden hallinta, proseduurien luominen ja laajentaminen, laskutoimitusten suoritus
Arviointi	Ongelman ymmärtämisen ja käsittelyn yhdistäminen ratkaisuksi, ratkaisun loogisuus

2.4 Tutkimuksen avoin ongelmatehtävä

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan haasteita, joita yläkoululaisille tulee ongelmatehtävää ratkaistessaan. Lisäksi tarkastellaan millaista matemaattista osaamista yläkoululaiset tarvitsevat avoimen ongelmatehtävän aikana. Tutkimuksen ongelmatehtävä päätettiin valita

geometriaan liittyvistä tehtävistä, sillä geometriaan liittyvät tehtävät ovat helposti yhdistettävissä arkimaailmaan. Lisäksi geometrian tehtäviin liittyy usein kuvien piirtämistä. Tehtävän ratkaisuihin piirretyt kuvat auttavat tutkijaa hahmottamaan, mitä oppilaat ovat ratkaisuillaan tarkoittaneet. Lisäksi kuviokielen avulla oppilas voi viestiä matemaattisesta osaamisesta.

Luvussa 2.2 todettiin, että usein tarvitaan empiiristä tutkimusta selvittämään, minkälainen on hyvä ja toimiva ongelmatehtävä. Tässä tutkimuksessa ongelmatehtävää ei ollut mahdollista kokeilla etukäteen, joten tutkimukseen päädyttiin valitsemaan aiemmin tehty ja kokeiltu ongelmatehtävä. Vaihtoehtoisia ongelmatehtäviä löytyi esimerkiksi Hirvosen [8] tekemästä GeoGebra-materiaalista. Yksi tehtävistä oli linkkitornitehtävä, jossa oppilaan tuli Ylöjärven karttapohjaan selvittää karttaan merkittyjen linkkitornien kantama-alueet [8]. Tehtävä on suljettu ongelmatehtävä. Avoimia ongelmatehtäviä löytyi oppikirjoista ja aiemmista tutkimuksista hyvin vähän. Tutkimuksen opetuskokeilussa päädyttiin käyttämään ongelmatehtävänä huvipuistotehtävää, joka on esitetty Hähkiöniemen ym. tutkimuksessa [10]:

> Huvipuistotehtävä
>
> Neljä kaupunkia rakennuttaa yhteistyössä hulppean huvipuiston. Tutki GeoGebraa apuna käyttäen, mikä olisi optimaalisin ja tasapuolisin sijainti huvipuistolle. Pohdi erilaisia tilanteita sen mukaan, miten kaupungit ovat sijoittuneet toisiinsa nähden.

Samaa tehtävää käytettiin Christoun, Mousoulidesin, Pittaliksen ja Pitta-Pantazin tutkimuksessa [3], jossa huvipuiston tilalla oli lentokenttä, joten vastaavaa tehtävää on käytetty kahdessa tutkimuksessa. Tutkimuksissa on kuvattu oppilaiden tuottamia ratkaisuja tehtävään, mikä osaltaan vahvistaa sitä, että huvipuistotehtävä on hyvä ongelmatehtävä, jonka ratkaisemiseen tarvitaan geometrian käsitteitä. Lisäksi huvipuistotehtävä on avoin ongelmatehtävä, joihin liittyviä haasteita ei ole aiemmissa tutkimuksissa juurikaan tutkittu.

Hähkiöniemen ym. [10] tutkimuksen tuloksissa esitettiin erilaisia hypoteeseja, joita oppilaat esittivät ratkaisuksi huvipuisto-ongelmaan. Myös Christoun ym. tutkimuksessa [3] kerrottiin opiskelijoiden muodostamia ratkaisuja. Taulukkoon 2.3 on koottu muutamia Hähkiöniemen ym [10] ja Christoun ym. [3] tutkimuksissa esiintyneitä ratkaisuja huvipuistotehtävään.

Neliön tai suorakulmion lävistäjien leikkauspiste
Epäsymmetrisen nelikulmion lävistäjien leikkauspiste
Ympäri piirretyn ympyrän keskipiste
Piste, johon on pienin yhteenlaskettu etäisyys kaupungeista [3, 10].

Taulukko 2.3. *Oppilaiden esittämiä ratkaisuja huvipuistotehtävään aiemmissa tutkimuksissa*

3. TUTKIMUKSEN AVOIMEN ONGELMATEHTÄVÄN RATKAISUJEN TAUSTAA

Tässä luvussa käsitellään taulukkoon 2.3 kerättyjä, oppilaiden aiemmissa tutkimuksissa tekemiä, ratkaisuja huvipuistotehtävään. Tehtävä on avoin ongelmatehtävä, joten siihen on olemassa useita oikeita vastauksia. Oppilaiden tuottamiin ratkaisuihin muodostetaan Euklidisen geometrian keinoin perusteluja ja lisähuomioita. Lopuksi esitellään vielä Fermat'n neljän pisteen sijaintiongelma, jonka avulla voidaan löytää piste, josta on lyhin yhteenlaskettu etäisyys neljään pisteeseen.

3.1 Valmistavia määritelmiä ja lauseita

Esitetään ensin määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan, kun tarkastellaan aiemmissa tutkimuksissa esiintyneitä ratkaisuja. Lukijalta oletetaan joidenkin geometrian perustietojen tuntemusta. Kaikkia valmistavia lauseita ei todisteta, vaan todistuksissa viitataan teoksiin, joissa kyseinen lause on todistettu. Myöskään Eukleideen tasogeometrian aksioomia ei esitetä.

Määritelmä 3.1. Kulmaa sanotaan:

- *koveraksi*, jos se on pienempi kuin oikokulma,
- *kuperaksi*, jos se on suurempi kuin oikokulma. [37, 12 §]

Määritelmä 3.2. Kahta kulmaa sanotaan:

- *eksplementtikulmiksi*, jos niiden summa on täysi kulma,
- *suplementtikulmiksi*, jos niiden summa on oikokulma. [37, 12 §].

Määritelmä 3.3. Kun kaksi suoraa leikkaa toisensa, muodostuu neljä koveraa kulmaa. Tällöin vierekkäin olevia kulmia sanotaan toistensa *vieruskulmiksi* ja vastakkain olevia toistensa *ristikulmiksi*. [37, 13 §].

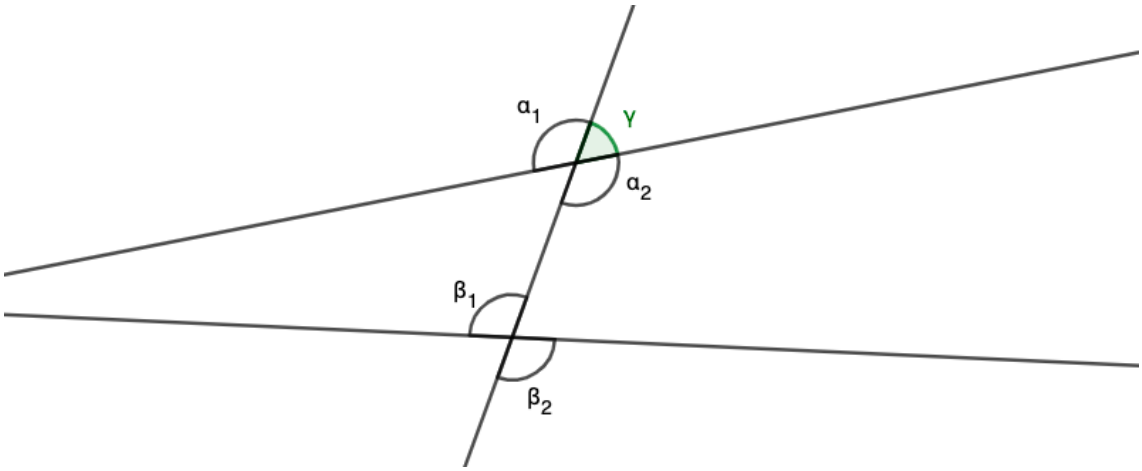
Kuvaan 3.1 merkitys kulmat ovat kaikki koveria. Lisäksi kuvassa 3.1 kulmat α_1 ja γ ovat suplementtikulmia ja myös vieruskulmia. Vastakkain olevat kulmat α_1 ja α_2 ovat ristikulmia, kuten myös β_1 ja β_2.

Lause 3.1. *Ristikulmat ovat yhtäsuuret. [37, 13 §, lause]*

Todistus. Ks. [20, s. 23–24] □

Määritelmä 3.4. Jos suora l leikkaa suoria a ja b, syntyy kaksi neljän koveran kulman muodostamaa ryhmää. Kahta eri ryhmään kuuluvaa kulmaa sanotaan *samankohtaisiksi*, jos suora l on niillä samannimisenä kylkenä. [37, 17 §]

Kuvassa 3.1 Kulmat α_1 ja β_1 sekä α_2 ja β_2 ovat samankohtaisia.



Kuva 3.1. *Havainnollistus kulmista, jotka syntyvät suoran leikatessa kahta muuta suoraa.*

Lause 3.2. *Suora l leikkaa suorat n ja m siten, että samankohtaiset kulmat ovat yhtenevät täsmälleen silloin, kun n ja m ovat yhdensuuntaiset. [20, s.32]*

Todistus. Ks. [20, s.31–32]. □

Ympäri piirrettyyn ympyrään liittyvää ratkaisuehdotusta tarkastellessa tarvitaan seuraavaa ympyrän kehäkulmiin ja keskuskulmiin liittyvää lausetta.

Lause 3.3. *Ympyrän kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta [37, 80§].*

Väisälän [37] mukaan kahta kuviota sanotaan *yhteneviksi*, jos ne voidaan asettaa päällekkäin siten, että kuviot yhtyvät täydellisesti. Tällaisia yhteneviä kuvioita voivat olla esimerkiksi janat ja kulmat, jolloin yhtenevyyden sijaan voidaan puhua myös niiden yhtäsuuruudesta [20]. Kolmioiden yhtenevyyslauseet kertovat, millä ehdoilla voidaan sanoa tiettyjen kolmioiden olevan yhtenevät. Lehtinen ym. [20] esittävät yhden kolmion yhtenevyyslauseista (yhtenevyyslause sks) aksioomana, jonka jälkeen loput todistetaan tämän avulla. Tässä tutkielmassa tarvittavat kolmion yhtenevyyslauseet esitetään kaikki lauseina ilman todistuksia.

Lause 3.4 (Yhtenevyyslause ksk)**.** *Jos kolmion kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu ovat yhtäsuuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät [37, 34 §, Yhtenevyyslause »ksk»].*

Lause 3.5 (Yhtenevyyslause sks)**.** *Jos kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät [37, 36 §, Yhtenevyyslause »sks»].*

Lause 3.6 (Yhtenevyyslause sss)**.** *Jos kolmion sivut ovat yhtäsuuret kuin toisen kolmion sivut, niin kolmiot ovat yhtenevät. [37, 33 §, Yhtenevyyslause »sss»]*

Huvipuistotehtävän tehtävänannossa pyydetään kirjaamaan eri ratkaisuvaihtoehtoja, kun kaupungit ovat sijoittuneet eri tavoilla. Neljä kaupunkia muodostaa nelikulmion, joten on tarpeellista määritellä nelikulmioihin liittyviä käsitteitä ja esittää niihin liittyviä lauseita.

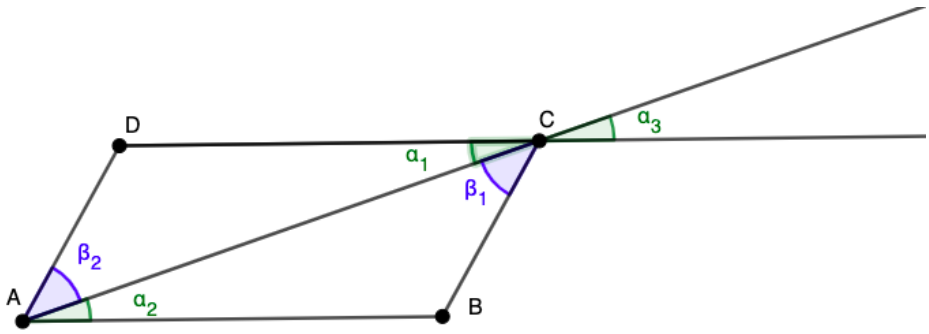
Määritelmä 3.5. Nelikulmiota sanotaan *suunnikkaaksi*, jos sen molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhdensuuntaiset. [37, 62 §]

Määritelmä 3.6. *Suorakulmio* on suunnikas, jonka kulmat ovat suoria kulmia. [37, 65 §]

Lause 3.7. *Suunnikkaan molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhtä suuret. [37, 62 §, lause 1]*

Todistus. Vrt.[37, s. 68–69]. Olkoon $ABCD$ suunnikas. Suunnikkaan lävistäjä AC jakaa suunnikkaan kahteen kolmioon kuvan 3.2 mukaisesti. Suunnikkaan määritelmän 3.5 mukaan sivut AB ja DC ovat yhdensuuntaiset, joten lauseen 3.2 perusteella $\alpha_2 = \alpha_3$. Lisäksi α_1 ja α_3 ovat ristikulmia, joten lauseen 3.1 perusteella $\alpha_1 = \alpha_3$. Nyt siis $\alpha_1 = \alpha_2$ Samalla tavalla sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaiset, joten $\beta_1 = \beta_2$.

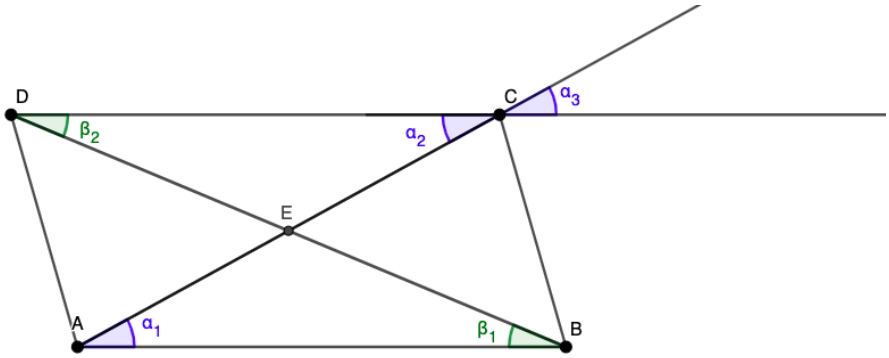
Nyt kolmioiden $\triangle ACD$ ja $\triangle ABC$ kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu AC ovat yhtä suuret. Kolmiot ovat siis yhtenevät yhtenevyyslauseen 3.4 perusteella. Tällöin kaikki kolmioiden vastinsivut ovat yhtä suuret, siis $AB = CD$ ja $AD = CB$.



Kuva 3.2. *Suunnikas $ABCD$, jolle on piirretty lävistäjä AC*

□

Lause 3.8. *Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. [37, 64 §, Lause 1]*



Kuva 3.3. *Suunnikas $ABCD$, jolle on piirretty lävistäjät ja lävistäjien leikkauspiste E*

Todistus. [37, s. 70] Olkoot $ABCD$ suunnikas ja E sen lävistäjien leikkauspiste. Kuvaan 3.3 on piirretty suunnikas $ABCD$ ja sen lävistäjät. Nyt suunnikkaan määritelmän 3.5 mukaan janat AB ja DC ovat yhdensuuntaiset, joten lauseen 3.2 mukaan $\alpha_1 = \alpha_3$. Lisäksi lauseen 3.1 perusteella $\alpha_3 = \alpha_2$, joten $\alpha_1 = \alpha_2$. Samalla tavalla $\beta_1 = \beta_2$.

Lauseen 3.7 perusteella $|AB| = |CD|$. Nyt siis lauseen 3.4 mukaan kolmiot $\triangle ABE$ ja $\triangle CDE$ ovat yhtenevät. Tällöin $|EA| = |EC|$ ja $|EB| = |ED|$.

□

Seuraavaksi esitetään Pythagoraan lause ja eräs sen todistuksista. Todistukseen tarvitaan neliöiden, kolmioiden ja suorakulmioiden pinta-alan käsitettä, jotka oletetaan tässä tunnetuiksi. Pinta-alaa merkitään kyseisen kuvion nimellä.

Lause 3.9 (Pythagoraan lause)**.** *Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan neliö on yhtä suuri kuin kateettien neliöiden summa. [37, 44 § ja 109 §]*

Pythagoraan lause voidaan siis kirjoittaa kuvan 3.4 suorakulmaiselle kolmiolle

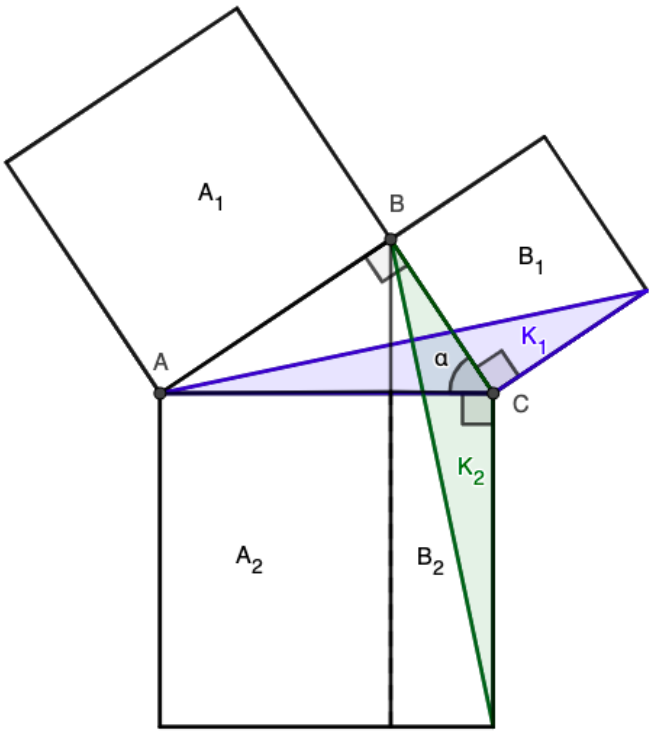
$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

Todistus. Vrt. [37, s. 47] Olkoot suorakulmainen kolmio $\triangle ACB$, jonka kateetit ovat AB ja BC ja toinen terävistä kulmista merkitty kirjaimella α, suorakulmaisen kolmion kateeteille piirretyt neliöt A_1 ja B_1 ja hypotenuusalle piirretty neliö C_1. Neliöiden pinta-alat ovat siis

$$A_1 = |AB|^2 \tag{3.1}$$

$$B_1 = |BC|^2 \quad \text{ja} \tag{3.2}$$

$$C_1 = |AC|^2. \tag{3.3}$$



Kuva 3.4. *Pythagoraan lauseen todistuksen apukuva.*

Neliö C_1 on jaettu kolmion $\triangle ACB$ korkeussuoralla suorakulmioihin A_2 ja B_2. Nyt on siis

$$A_2 + B_2 = C_1$$

Lisäksi kuvan 3.4 osoittamalla tavalla on piirretty kolmiot K_1 (sinisellä) ja K_2 (vihreällä).

Nyt kolmion K_1 kanta ja korkeus ovat samat kuin neliöllä B_1, siis kateetin BC pituus. Kolmion pinta-ala on puolet vastaavan kantaisesta ja korkuisesta neliöstä, siis $K_1 = \frac{B_1}{2}$ Kolmion K_2 kanta on sama kuin suorakulmiolla B_2 ja sen korkeus on myös sama kuin suorakulmion B_2 korkeus. Kolmion K_2 pinta-ala on puolet suorakulmion B_2 pinta-alasta, $K_2 = \frac{B_2}{2}$.

Kolmioilla K_1 ja K_2 on yhtä pitkät sivut, joista toisen pituus on $|BC|$ ja toisen $|AC|$. Lisäksi näiden sivujen välinen kulma sisältää molemmissa kolmioissa suoran kulman ja kulman α, siis sivujen välinen kulma on molemmissa yhtä suuri. Täten kolmiot K_1 ja K_2 ovat yhtenevyyslauseen 3.5 perusteella yhteneviä. Tällöin kolmioiden pinta-ala on yhtä suuri, joten

$$\frac{B_1}{2} = \frac{B_2}{2}, \quad \text{siis} \quad B_1 = B_2.$$

Samalla tavalla voidaan näyttää, että

$$A_1 = A_2$$

(ks. [37, s. 47]).

Yhtälöstä

$$A_2 + B_2 = C_1$$

saadaan siis

$$C_1 = A_1 + B_1.$$

Kun pinta-alat kirjoitetaan kolmion $\triangle ACB$ sivunpituuksien avulla, saadaan

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2.$$

□

Oppilaiden tekemien ratkaisujen käsittelyyn tarvitaan lisäksi kolmioepäyhtälöä. Kolmioepäyhtälön todistamiseen tarvitaan lausetta, jonka mukaan kolmion suurempaa kulmaa vastapäätä on pidempi kylki kuin pienempää kulmaa vastapäätä oleva kylki [37]. Todistuksessa oletetaan myös tunnetuksi tieto, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtäsuuret.

Lause 3.10. *Kolmiossa suurempaa kulmaa vastapäätä oleva sivu on suurempi kuin pienempää kulmaa vastapäätä oleva sivu [37, 78§, Lause 2]*

Todistus. Ks. [37, s. 83]. □

Lause 3.11 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Kolmion $\triangle ABC$ sivujen pituudelle pätee epäyhtälö*

$$|BA| + |AC| > |BC|$$

[5, s.77, Kolmioepäyhtälö].

Todistus. Vrt. [5, s. 77 Kolmioepäyhtälön todistus].

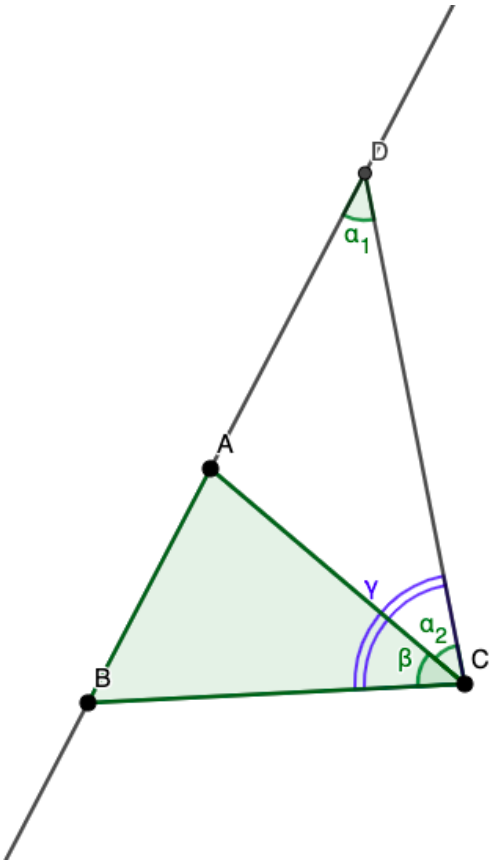
Olkoot $\triangle ABC$ ja piste D janan AB kautta kulkevalla suoralla siten, että $|AD| = |AC|$. Merkitään lisäksi $\angle ADC = \alpha_1$, $\angle DCA = \alpha_2$, $\angle ACB = \beta$ ja $\angle DCB = \gamma$ Tilanne on kuvattu kuvassa 3.5.

Nyt

$$|BD| = |BA| + |AD| = |BA| + |AC|.$$

Koska $\gamma = \alpha_2 + \beta$, niin $\alpha_2 < \gamma$. Lisäksi $\triangle ACD$ on tasakylkinen kolmio, joten $\alpha_1 = \alpha_2$. Nyt siis myös $\alpha_1 < \gamma$.

Koska $\alpha_1 < \gamma$, niin kulmaa γ vastapäätä oleva sivu BD on pidempi kuin kulmaa α_1



Kuva 3.5. *Kolmioepäyhtälön todistuksen apukuva.*

vastapäätä oleva sivu BC lauseen 3.10 perusteella. Voidaan siis kirjoittaa

$$|BC| < |BD| = |BA| + |AC|.$$

□

3.2 Aiemmissa tutkimuksissa esiintyneiden ratkaisuiden pohdintaa

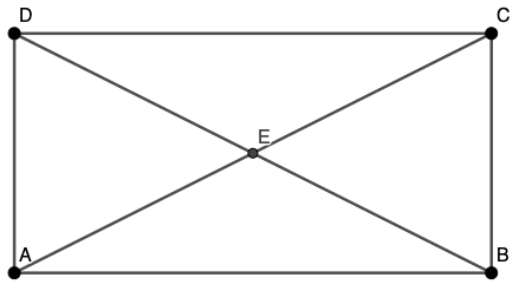
Taulukkoon 2.3 kerättyjä, aiemmissa tutkimuksissa esiintyneitä, ratkaisuja pohditaan alaluvussa 3.2.1 Euklidisen geometrian keinoin. Luvussa osoitetaan esimerkiksi että suorakulmion lävistäjien leikkauspiste on yhtä kaukana suorakulmion kulmista. Lisäksi pohditaan tilannetta, jossa nelikulmion ympäri voi piirtää ympyrän. Alaluvussa 3.2.2 esitetään lause, jonka avulla voidaan löytää piste, johon on lyhin yhteenlaskettu etäisyys neljästä kaupungista.

3.2.1 Suorakulmio ja nelikulmion ympäri piirretty ympyrä

Hähkiöniemen ym. tutkimuksessa [10] suurin osa oppilaista ratkaisi tehtävän asettamalla kaupungit suorakulmion tai neliön kulmiin ja sijoittamalla huvipuiston kuvion lävistäjien keskipisteeseen. Esimerkissä 3.1 osoitetaan, että tämä ratkaisu on tasapuolinen kaikille kaupungeille.

Esimerkki 3.1. Osoitetaan, että suorakulmion lävistäjät leikkaavat toisensa pisteessä, joka on yhtä kaukana kaikista kulmista.

Olkoot $ABCD$ suorakulmio ja piste E suorakulmion lävistäjien leikkauspiste. Suorakulmio on kuvassa 3.6. Tällöin määritelmän 3.6 mukaan $ABCD$ on suunnikas, joten lauseen 3.8 perusteella $|EA| = |EC|$ ja $|ED| = |EB|$. Voidaan siis kirjoittaa



Kuva 3.6. *Kuva suorakulmiosta $ABCD$, johon on merkitty lävistäjien leikkauspiste E.*

$$|AC| = |EA| + |EC| = 2|EA| \tag{3.4}$$

ja

$$|BD| = |EB| + |DE| = 2|EB|. \tag{3.5}$$

Lauseen 3.7 perusteella $|AB| = |DC|$ ja $|AD| = |BC|$, joten Pythagoraan lauseen 3.9 avulla pätee

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = |DC|^2 + |AD|^2 = |DB|^2.$$

Nyt siis

$$|AC|^2 = |DB|^2, \quad \text{joten} \quad |AC| = |DB|.$$

Kun tähän sijoitetaan yhtälöt 3.4 ja 3.5, saadaan

$$2|EA| = 2|EB| \quad \text{siis} \quad |EA| = |EB|,$$

jolloinka myös on yhtäpitävää, että

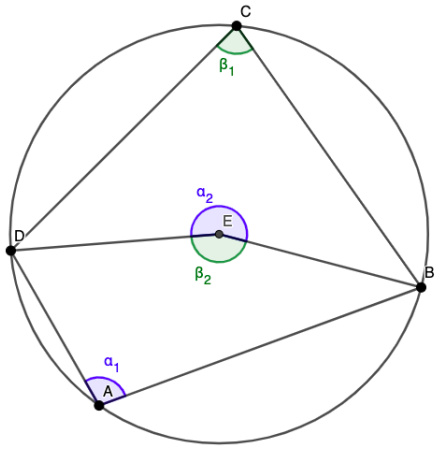
$$|EA| = |EB| = |EC| = |ED|.$$

Siis suorakulmion kulmien etäisyys pisteestä E, joka on suorakulmion lävistäjien leikkauspiste, on yhtä suuri.

Christoun ym. tutkimuksessa [3] eräs oppilas oli ratkaissut tehtävän piirtämällä nelikulmion ympärille ympyrän ja selvittämällä ympyrän keskipisteen. Kaikkien nelikulmioiden ympäri ei voi piirtää ympyrää, mutta niille, joiden ympärille voi, voidaan todistaa seuraava ominaisuus.

Lause 3.12. *Jos nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä, niin sen vastakkaiset kulmat ovat suplementtikulmia. [37, 83 §, Lause 1]*

Todistus. Vrt. [37, 83, Lauseen 1 todistus]. Oletetaan, että nelikulmion $ABCD$ ympäri voidaan piirtää ympyrä. Osoitetaan, että nelikulmion vastakkaisten kulmien α_1 ja β_1 summa on oikokulma, siis suuruudeltaan $180°$. Tilanne on kuvattu kuvassa 3.7.



Kuva 3.7. *Kuva nelikulmion ympäri piirretystä ympyrästä.*

Nyt kulmat α_1 ja β_1 ovat ympyrän kehäkulmia. Kulma α_1 vastaa kaarta DCB, jonka keskuskulma on α_2 ja kulma β_1 vastaa kaarta BAD, jonka keskuskulma on β_2. Kehäkulma on puolet keskuskulmasta lauseen 3.3 perusteella, joten

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_2}{2} \quad \text{ja} \quad \beta_1 = \frac{\beta_2}{2}. \tag{3.6}$$

Ympyrä on piirretty nelikulmion ympäri, joten kaaret DCB ja BAD muodostavat koko

ympyrän kehän. Siis niiden keskuskulmien summa on täysi kulma, $360°$. Siis

$$\alpha_2 + \beta_2 = 360° \quad \text{joten}$$
$$\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\beta_2}{2} = 180°. \quad \text{Kun tähän sijoitetaan yhtälöt 3.6, saadaan}$$
$$\alpha_1 + \beta_1 = 180°.$$

□

3.2.2 Pienin yhteenlaskettu etäisyys

Mikä olisi tasapuolisin ja optimaalisin sijainti huvipuistolle? Edellä käsitellyt suorakulmion lävistäjien leikkauspiste ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste pätevät vain, kun kaupungit on sijoitettu hyvin rajoitetulla tavalla. Hähkiöniemen ym. [10] tutkimuksessa oppilaiden ratkaisuissa nousi esiin myös ratkaisuehdotus: huvipuiston kannattaa sijaita pisteessä, josta on pienin yhteenlaskettu matka kaikkiin kaupunkeihin. Ratkaisu olisi varmasti optimaalinen ja mahdollisesti myös melko tasapuolinen, mutta miten tällaisen pisteen voi löytää?

Jo Fermat esitti ongelman pisteen, jonka yhteenlaskettu etäisyys kolmesta pisteestä on pienin mahdollinen, löytämisestä [33]. Huvipuistotehtävässä kyseessä on neljä kaupunkia, jotka rakennuttavat huvipuiston, siis pyritään selvittämään pisteen pienintä yhtenlaskettua etäisyyttä neljästä pisteestä. Tätä kutsutaan usein Fermat'n neljän pisteen sijaintiongelmaksi (4-point Fermat location problem) [33]. Ongelmaan on kuin onkin löydetty ratkaisu. Jos pisteet muodostavat kuperan nelikulmion, siis nelikulmion, jonka kulmat ovat alle 180 astetta, pienin yhteenlaskettu etäisyys on nelikulmion lävistäjien keskipisteessä [33]. Jos nelikulmio ei ole kupera, pienin yhteenlaskettu etäisyys on pisteessä, joka kuuluu kolmen muun pisteen muodostamaan suljettuun kolmioon [33].

Lause 3.13. *Piste, josta Euklidinen etäisyys neljälle kiinteälle pisteelle A, B, C ja D on pienin mahdollinen on:*

1. *lävistäjien leikkauspiste, kun pisteet A, B, C ja D muodostavat kuperan nelikulmion,*
2. *se kiinteistä pisteistä, joka kuuluu kolmen muun kiinteän pisteen muodostamaan kolmioon tai janaan. [33, Theorem 1].*

Todistus. Vrt. [33, s. 2]. Osoitetaan ensin kohta 1. Kohdan 1 todistuksessa Plastria [33] mukailee Fagnanon vuonna 1775 julkaistussa atrikkelissa, "Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia"(1775) [4], esittämää todistusta.

Oletetaan, että pisteet A, B, C ja D muodostavat kuperan nelikulmion ja piste E kuuluu janojen AC ja DB leikkauspisteeseen. Olkoon lisäksi piste $X \in \mathbb{R}^2$ ja $X \neq E$. Nyt

pisteet A, C ja X muodostavat kolmion tai janan. Tällöin kolmioepäyhtälön 3.11 mukaan

$$|AE| + |EC| = |AC| \leq |AX| + |XC|.$$

Yhtäsuuruus pätee, jos piste X on janalla AC. Tällöin X ei voi olla janalla DB. Siis samalla tavalla

$$|DE| + |EB| = |DB| < |DX| + |XB|.$$

Nyt siis

$$|AE| + |EC| + |DE| + |EB| < |AX| + |XC| + |DX| + |XB|.$$

Siis pisteestä E on lyhin mahdollinen yhteenlaskettu matka pisteisiin A, B, C ja D.

Osoitetaan sitten kohta 2.

Oletetaan, että piste D kuuluu pisteiden A, B ja C muodostamaan kolmioon tai janaan. Osoitetaan ensin, että piste, jonka etäisyys pisteistä A, B, C ja D on pienin mahdollinen, on kolmion $\triangle ABC$ tai näistä pisteistä muodostuneen janan sisällä.

Olkoon piste $X \in \mathbb{R}^2$ siten, että $X \notin \triangle ABC$. Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa pisteet A, B ja C muodostavat kolmion.

Nimetään kolmion $\triangle ABC$ kärkipisteet siten, että piste X ei kuulu pisteiden C ja B kautta kulkevalle suoralle ja on eri puolella pisteiden C ja B kautta kulkevaa suoraa kuin pisteet A ja D. Olkoot lisäksi piste X' pisteen X projektio pisteiden C ja B kautta kulkevalle suoralle ja piste D' janan DX ja pisteiden C ja B kautta kulkevan suoran leikkauspiste. Tilanne on piirretty kuvaan 3.8.

Nyt Pythagoraan lauseen 3.9 avulla

$$|CX'| = |\sqrt{|CX|^2 - |XX'|^2} < \sqrt{|CX|^2} = |XC|. \tag{3.7}$$

Samoin

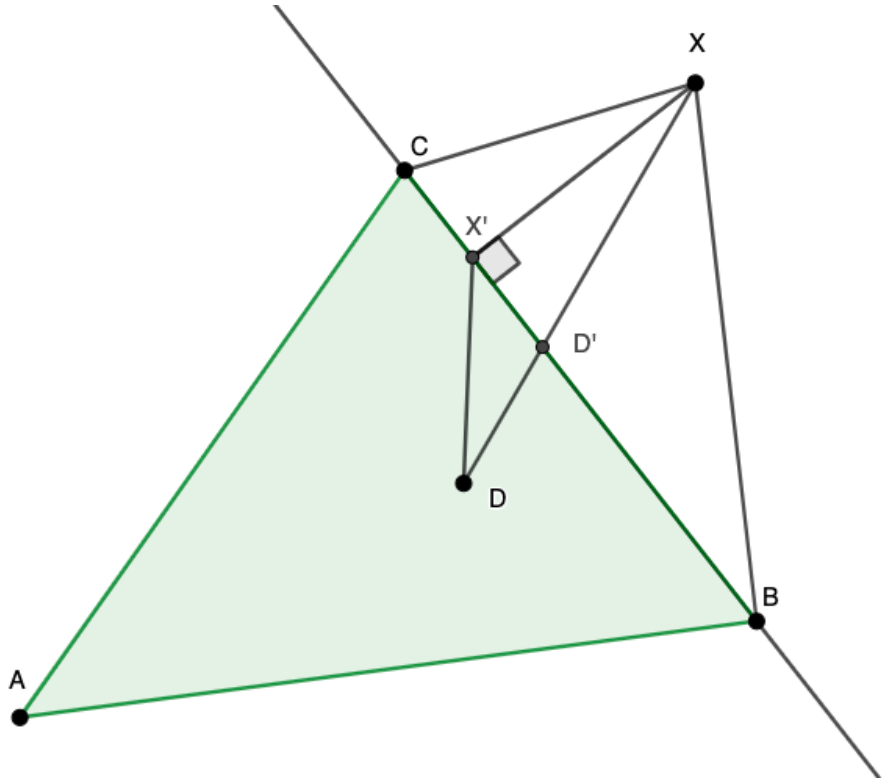
$$|BX'| < |BX|.$$

Lisäksi kolmioepäyhtälön 3.11 avulla saadaan

$$|DX'| < |DD'| + |D'X'| \tag{3.8}$$

Pytagoraan lauseen 3.9 mukaan

$$|D'X'| = |\sqrt{|D'X|^2 - |XX'|^2} < \sqrt{|D'X|^2} = |D'X|. \tag{3.9}$$



Kuva 3.8. *Kuva kohdan 2 todistuksessa kuvatusta tilanteesta, jossa piste X on kolmion $\triangle ABC$ ulkopuolella.*

Siispä epäyhtälöiden 3.8 ja 3.9 perusteella

$$|DX'| < |DD'| + |D'X| = |DX|.$$

Samoin voidaan osoittaa

$$|AX'| < |AX|$$

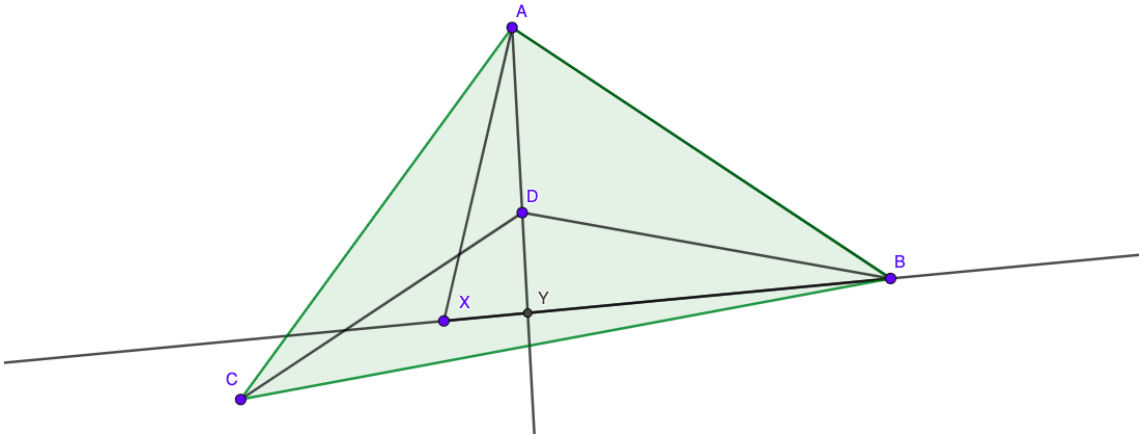
Siis piste X' on lähempänä kaikkia pisteitä A, B, C ja D kuin piste X.

Tarkastellaan vielä erikoistapausta, jossa pisteet A, B, C muodostavat janan AC. Olkoon X' pisteen X projektio janan AC kautta kulkevalle suoralle. Tällöin voidaan Pythagoraan lauseen 3.9 avulla, epäyhtälön 3.7 tavoin, osoittaa, että X' on lähempänä kaikkia pisteitä A, B, C ja D.

Jos piste X kuuluu janan AC kautta kulkevalle suoralle, valitaan pisteeksi X' janan AC päätepisteistä lähempänä oleva. Tällöin selvästi piste X' on lähempänä kaikkia pisteitä A, B, C ja D.

Siis optimaalisen pisteen on oltava kolmion sisällä.

Oletetaan sitten, että piste X kuuluu kolmioon $\triangle ABC$. Nimetään pisteet A, B ja C siten, että $D \in \triangle AXB$. Tällöin pisteiden A ja D kautta kulkeva puolisuora leikkaa pisteiden X ja B kautta kulkevan suoran pisteessä Y. Tilanne on kuvattu kuvassa 3.9. Jos pisteet



Kuva 3.9. *Kuva kohdan 2 todistuksessa kuvatusta tilanteesta, jossa piste X kuuluu kolmioon $\triangle ABC$.*

A, B, C muodostavat janan AC, valitaan pisteeksi Y janan XB päätepisteistä pistettä A lähempänä oleva.

Tällöin kolmioepäyhtälön 3.11 mukaan

$$|DB| \leq |DY| + |YB| \tag{3.10}$$

$$|AY| \leq |AX| + |XY| \tag{3.11}$$

$$|CD| \leq |CX| + |XD| \tag{3.12}$$

Nyt epäyhtälöiden 3.10 ja 3.11 avulla saadaan

$$|AD| + |BD| \leq |AD| + |DY| + |YB| = |AY| + |BX| - |YX| \leq |AX| + |BX| \tag{3.13}$$

Siis epäyhtälöiden 3.12 ja 3.13 mukaan

$$|AD| + |BD| + |CD| + |DD| \leq |AX| + |BX| + |CX| + |DX|,$$

joten pisteeseen D on lyhin mahdollinen yhteenlaskettu matka. □

Yhteenvetona voidaan siis todeta, että kaikki taulukossa 2.3 esitetyt ratkaisuideat vastaavat tehtävänantoon ainakin osittain. Piste, johon on lyhin yhteenlaskettu matka kaupungeista on optimaalisin mahdollinen ratkaisu. Tämän pisteen voi löytää Fermat'n neljän pisteen sijaintiongelman ratkaisun, lauseen 3.13 avulla. Euklidisen geometrian keinoin osoitettiin, että suorakulmion tai neliön lävistäjien leikkauspiste on tasapuolinen sijainti huvipuistolle esimerkin 3.1 mukaan. Lisäksi lauseen 3.13 perusteella suorakulmion tai neliön lävistäjien leikkauspiste on optimaalinen ratkaisu. Lauseen 3.13 mukaan myös epäsäännöllisen nelikulmion lävistäjien leikkauspiste on optimaalinen ratkaisu, jos kaupun-

kien muodostama nelikulmio on kupera. Kaupunkien ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on tasapuolinen ratkaisu, sillä kaikkien kaupunkien etäisyys keskipisteestä on ympyrän säteen verran. Tämä ratkaisu saattaa kuitenkin olla hyvin kaukana optimaalisuudesta, jos kaikki kaupungit sijaitsevat esimerkiksi puolikkaalla ympyrän kaarella.

4. TUTKIMUSASETELMA

Tässä tutkimuksessa tutkittiin ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteita luvussa 2.4 esitetyn huvipuistotehtävän avulla. Haasteita tutkittiin havainnoimalla sekä ongelmatehtävän ratkaisemisessa syntyviä ongelmia että matemaattisen osaamisen osa-alueiden näkymistä ongelmatehtävän ratkaisussa. Osaamisen tarkastelu on tärkeää sen kannalta, että haasteita voi löytää myös pohtimalla, mitkä osaamisen osa-alueet eivät tehtävän ratkaisussa nousseet esiin. Tutkimuskysymykset ovat:

1. Millaisia haasteita oppilaat kohtaavat avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisessa?
2. Millaista matemaattista osaamista oppilaat tarvitsevat ratkaistessaan avointa ongelmatehtävää?

4.1 Opetuskokeilu

Tutkimusta varten järjestettiin yksi 45 minuutin opetuskokeilu, jonka aikana oppilaat ratkaisivat pareittain tai kolmen hengen ryhmässä ongelmatehtävää. Opetuskokeiluun osallistui 10 yhdeksäsluokkalaista oppilasta, joista muodostettiin neljä ryhmää. Opetuskokeilu suoritettiin tietokoneluokassa. Tunnin aluksi oppilaille kerrottiin tutkimuksesta ja heiltä kerättiin tutkimusluvat. Tämän jälkeen oppilaiden tietokoneille tuotiin muistitikulta tehtävänannon sisältävä Word-dokumentti, johon ratkaisut kirjattiin. Tehtävänantona oli huvipuistotehtävä, joka on hieman muokattu versio Hähkiöniemen ym. [10] esittämästä tehtävästä:

> Huvipuistotehtävä
>
> Neljä kaupunkia rakennuttaa yhteistyössä huvipuiston. Tutki GeoGebran avulla, mikä olisi optimaalisin ja tasapuolisin sijainti huvipuistolle.
> Kirjaa ylös eri ratkaisuvaihtoehtoja, kun kaupungit ovat sijoittuneet eri tavoilla.

Word-dokumentissa oli ohjattu oppilaita etsimään useita ratkaisuja merkitsemällä neljälle ratkaisulle täyttökohta. Word-dokumentti on liitteessä A. Alkuvalmisteluihin kului aikaa noin 10 minuuttia. Tämän jälkeen oppilaat suorittivat tehtävää noin 30 minuuttia ja tunnin lopuksi oppilaiden ratkaisut kerättiin muistitikulle.

4.2 Tutkimusmetodi

Tutkimus on laadullinen tutkimus. Laadulliselle tutkimukselle on ominaista, että aineistoa tulkitaan osana kontekstia [13]. Matemaattisen ongelmanratkaisun haasteita tutkittaessa on tärkeää huomioida esimerkiksi, ovatko oppilaat aiemmin ratkaisseet ongelmatehtäviä. Tämä vaikuttaa tutkimuksen tulokseen. Siis kontekstin huomioiminen on tärkeää tutkimuksessa. Yksi laadullisen tutkimuksen ominaispiirteistä on sitoutuminen lähelle menevään tarkasteluun [13]. Tämä tarkoittaa, että tutkija on suorassa kontaktissa ihmisiin ja asioihin, joita hän yrittää tutkimuksessaan ymmärtää [13]. Suora kontakti voi tapahtua esimerkiksi havainnoinnin kautta [13]. Ongelmatehtävän ratkaisun haasteisiin sisälle pääseminen toteutuu tässä tutkimuksessa oppilaiden havainnointina, kun he suorittavat ongelmatehtävää.

4.3 Aineistonkeruu ja analysointi

Opetuskokeilun aikana aineistonkeruu tapahtui oppilaiden ratkaisukeskusteluita nauhoittamalla. Lisäksi oppilaiden ratkaisuna tuottamat Word-dokumentit kerättiin opetuskokeilun jälkeen muistitikulle. Nauhoitteita syntyi neljä kappaletta ja niiden jokaisen kesto oli noin 30 minuuttia. Äänitteet ensin kuunneltiin ja muodostettiin yleiskuvaa, mitä oppilaat ovat kokeilun aikana tehneet. Tämän jälkeen äänitteet kuunneltiin uudelleen ja litteroitiin. Litterointi tapahtui käsin kirjoittamalla oppilaiden keskustelut ja opettajan kommentit ylös. Tässä vaiheessa aineistosta poistettiin tutkimukseen oleellisesti kuulumattomat seikat. Esimerkiksi jos oppilaat tehtävän aluksi pelasivat muutaman minuutin shakkia, keskustelu jätettiin huomiotta. Lisäksi, jos oppilaat keskustelivat muusta kuin tehtävänantoon tai ongelman ratkaisemiseen liittyvästä, tämä poistettiin litterointivaiheessa.

Tutkimusaineistoa analysoitiin kahdella laadullisen sisällönanalyysin tavalla: perinteisellä sisällönanalyysillä (conventional content analysis) ja suunnatulla sisällönanalyysillä (directed content analysis). Perinteisen sisällönanalyysin avulla analysoitiin ongelmatehtävän ratkaisemisessa esiintyviä haasteita. Perinteistä sisällönanalyysiä käytetään usein, kun tavoitteena on kuvata jotain ilmiötä ja teoriaa ja tutkimuskirjallisuutta ilmiöstä on rajoitetusti [9]. Perinteiselle sisällönanalyysille on tyypillistä, että tutkija välttää käyttämästä ennakkoon määriteltyjä kategorioita aineiston havainnoimisessa [9]. Sen sijaan kategoriat nousevat aineistosta [9]. Tutkimuksessani käytettiin ainoastaan yhtä ongelmatehtävää, joten analyysissä käsitellään tämän tietyn ongelmatehtävän ratkaisemiseen liittyviä haasteita. Ongelmatehtävän ratkaisemiseen liittyvät haasteet on usein kuvattu teoriassa hyvin yleisellä tavalla. Tietyllä oppitunnilla tehtyyn ongelmatehtävään liittyvät haasteet voivat olla paljon tarkemmin luokiteltavissa, kuin teoriassa kuvatut, joten perinteistä sisällönanalyysia on perusteltua käyttää, jottei analyysimenetelmä rajoita mahdollisia havaintoja.

Perinteisen sisällönanalyysin avulla aineistosta havainnoitiin tehtävän ratkaisemisen ai-

kana syntyneitä ongelmia. Tämä toteutettiin sekä kuuntelemalla äänitteitä että lukemalla litteroitua tekstiä. Aluksi litteroidusta tekstistä korostettiin kohdat, joissa oppilailla oli jokin haaste tai ongelma. Ongelmiksi luokiteltiin esimerkiksi tilanteet, joissa oppilaat jäivät jumiin ratkaistessaan tehtävää, heidän tuottamansa ratkaisu oli vajaa tai jokin sisältö osoittautui virheellisesti ymmärretyksi. Tekstistä korostetuista havainnoista kirjoitettiin kuvaus Excel-dokumenttiin. Tämän jälkeen havainnoille annettiin nimitys ja havainnot värikoodattiin siten, että samaan aihealueeseen liittyvät havainnot saivat saman värin. Esimerkiksi perustelujen puuttumiseen liittyvät havainnot värikoodattiin sinisellä. Tämän jälkeen saman värikoodin saaneista havainnoista muodostettiin nimitys, joka kuvasi niitä kaikkia. Esimerkiksi perusteluihin liittyvät haasteet saivat nimityksen vajaat perustelut. Kuvassa 4.1 on ote muodostuneesta Excel-taulukosta. Näin ilmenneitä ongelmia saatiin yhdisteltyä ja luokiteltua eri luokkiin kuuluviksi. Luokkia muodostui yhteensä seitsemän kappaletta:

- tehtävänannon rajaaminen
- strategian harkitseminen
- silmämääräinen ratkaiseminen
- perustelujen muodostaminen
- GeoGebran käyttö
- käsitteiden täsmällisyys
- proseduurin löytyminen.

Havaintoluokat ja kuinka monta kertaa havaintoja esiintyi eri ryhmien keskusteluissa on koottu luvussa 5 esitettävään taulukkoon 5.1.

Suunnattua sisällönanalyysiä käytettiin analysoimaan matemaattisen osaamisen osa-alueita ja niiden näkymistä oppilaiden ratkaisuissa. Suunnatulle sisällönanalyysille on ominaista, että teoria tai asiaa koskevat tutkimustulokset ovat luokittelun lähtökohtana [9]. Tällöin eri havaintoluokille on annettu nimitykset etukäteen ja aineistosta esiin nousevat havainnot sijoitetaan valmiisiin luokkiin [9].

Matemaattisen osaamisen osa-alueiden havainnoinnin pohjana käytettiin Kilpatrickin ym. [14] matemaattisen osaamisen jaottelua viiteen osa-alueeseen. Tutkimuksen havaintoluokiksi valittiin näistä neljä: konseptuaalinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi ja soveltuva päättely. Yritteliäisyys jätettiin tutkimuksesta pois, sillä sen havainnointi vaatisi oppilaiden motivaation ja omiin kykyihinsä uskomisen analysointia, mihin ei tällä tutkimusmenetelmällä voinut ottaa kantaa. Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin esittämiä esimerkkejä siitä, miten eri osa-alueet näkyvät tehtävän ratkaisemisessa on laajennettu muiden lähteiden avulla luvussa 2.1. Taulukkoon 2.1 on koottu yhteenveto, kuinka matemaattisen osaamisen osa-alueet näkyvät oppilaan suorituksessa.

	A	B	C
1		Haaste: Mitä jää sanomatta? Mihin jäädään jumiin? Mistä olisi voinut päästä vielä eteenpäin?	Haasteen nimeäminen
2	Ryhmä 1, Ratkaisu 3	Huvipuisto sijoitetaan "ympyrän kehälle" yhtä kauas kaikista kaupungeista johonkin satunnaiseen suomen kaupunkiin. Perustelu: kaikista sama matka. Tässä sama kuin 1. ratkaisussa, jää näyttämättä onko matka oikeasti yhtä pitkä kaikkiin, mitään matemaattista perustetta tilanteelle ei anneta.	Ei matemaaattista määritystä
3	Ryhmä 1, Ratkaisu 3	Ryhmä ei perustele, miksi olisi optimaalista sijoittaa se johonkin muuhun kaupunkiin.	Perustelut
4	Ryhmä 1, Ratkaisu 4	Suomen karttaan sijoitettuna huvipuisto sijoitetaan lahteen, sillä Lahti on "keskeisimmällä paikalla" Minkä suhteen Lahti on keskeisimmällä paikalla, mitä tällä tarkoitetaan?	Käsitteen täsmällisyys
5	Ryhmä 1, Ratkaisu 4	Optimaalisin- ja tasapuolisin perustelut jäävät vajaaksi.	Perustelut
6	Ryhmä2 Ratkaisu 1	Eivät pääse tehtävässä alkuun, lukevat tehtävänantoa, eivät ymmärrä yhtään, mitä pitäisi tehdä	Tehtävässä alkuun pääseminen

Kuva 4.1. *Ote analyysivaiheessa muodostetusta Excel-taulukosta.*

Analyysi aloitettiin korostamalla litteroidusta tekstistä kohtia, joissa esiintyy matemaattista osaamista. Tällaisia kohtia olivat esimerkiksi matemaattisten käsitteiden käyttäminen, ymmärtämistä osoittavat kommentit, ratkaisun muodostamiseen liittyvät kommentit ja perustelemiseen liittyvät keskustelunvaiheet. Näistä havainnoista kirjoitettiin kuvaus ja havainnot nimettiin taulukon 2.1 mukaan. Jotkut havainnot sopivat useampaan kohtaan taulukossa, jolloin tilanne nimettiin kohdalla, joka tarkimmin vastasi havainnon tilannetta. Havaintoja verrattiin myös aiempiin havaintoihin, jotta samaan asiaan liittyviä havaintoja ei nimettäisi eri tavoilla. Jos osaamiselle ei löytynyt nimitystä taulukosta 2.1, se luokiteltiin kohtaan "muut" ja nimitys annettiin myöhemmin sen mukaan, mikä kuvasi tilannetta parhaiten. Analyysin lopputuloksena syntyi kuvan 5.4 taulukko, johon on merkitty analyysissa havaitut taulukon 2.1 osa-alueet sekä kuinka monta kertaa näitä suorituksen aikana havaittiin kunkin ryhmän kohdalla.

4.4 Eettiset näkökulmat

Jokainen tutkija vastaa ensisijaisesti itse hyvän tieteellisen käytännön noudattamisesta [38]. Tampereen yliopisto on tiivistänyt hyvään tieteelliseen käytäntöön liittyvän ohjeistuksen verkkosivuillaan [38]. Hyvään tieteelliseen käytäntöön kuuluu eettisesti kestävät

tiedonhankinta-, tutkimus- ja arviointimenetelmät [38]. Vuori [36] tiivistää tämän tarkoittavan sitä, että tutkimuksessa tulee kunnioittaa tutkittavien ihmisarvoa, yksityisyyttä, itsemääräämisoikeutta ja muita oikeuksia. Lisäksi Vuori [36] mainitsee, ettei tutkittaville tule aiheutua merkittävää haittaa tutkimukseen osallistumisesta. Tässä tutkimuksessa tutkittavien oikeudet on varmistettu jakamalla oppilaille oppitunnin aluksi tietosuojailmoitukset, joissa kerrottiin, miten kerättyjä tietoja käsitellään tutkimuksessa. Tietosuojailmoitus löytyy liitteenä C. Tutkittavien tietosuojaa parannettiin keräämällä tutkittavista mahdollisimman vähän tietoja. Henkilötietoina tutkimuksessa käsiteltiin ainoastaan oppilaiden ääntä, joka myös poistettiin analyysivaiheessa äänitteiden litteroimisella.

Hyvään tieteelliseen käytäntöön kuuluu myös vaadittavien tutkimuslupien hankinta [38]. Tutkimukseni tapahtui yläkoulussa, joten hain tutkimusluvan yläkoulun rehtorilta ja kunnan sivistysjohtajalta. Lupahakemukseen liitin kuvauksen tutkimuksesta, aineistonkeruutavasta ja kerättävistä tiedoista ja niiden säilytyksestä ja tuhoamisesta.

Tutkimukseni on ihmisiin kohdistuva tutkimus, joten tutkimuksessa on Tampereen yliopiston ohjeistuksen mukaan otettava huomioon tutkimuslupien lisäksi tutkittavien tiedottaminen, tietoon perustuva suostumus, henkilötietojen käsittely ja tietosuoja.

Oppilaita ja oppilaiden vanhempia tiedotettiin tutkimuskokeilusta etukäteen. Tiedote lähetettiin vanhemmille Wilma-viestinä, jossa pyydettiin ilmoittamaan, jos vanhemmat eivät halua oppilaan osallistuvan tutkimukseen. Tällä varmistettiin myös, että vanhemmat voivat halutessaan vaikuttaa lapsensa osallistumiseen tutkimukseen. Wilma-viestissä oli myös tutkijan sähköposti. Tiedote on liitteessä B. Lisäksi oppilaille jaettiin tunnin aluksi tietosuojailmoitukset, joissa kerrottiin, miten kerättyjä tietoja käsitellään tutkimuksessa. Tietosuojailmoitus löytyy liitteenä C. Tietosuojailmoitukseen on myös kirjattu oppilaille tiedoksi heidän oikeutensa esimerkiksi vetäytyä tutkimuksesta halutessaan. Oppilaiden vapaaehtoisuus tutkimuksen osallistumiseen varmistettiin oppilaiden täyttämillä suostumuslomakkeilla. Lomakkeessa oli kohdat sekä henkilötietojen keräämistä varten että tutkimukseen osallistumista varten. Henkilötieto, joka tutkimuksessa kerättiin, oli oppilaan ääni. Lomake löytyy liitteestä D.

5. TULOKSET

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen tulokset ja perusteluja, mistä tilanteista tai havainnoista tulokset on muodostettu. Luvussa 5.1 käsitellään haasteita, joita havaittiin ongelmatehtävän ratkaisussa. Luvussa 5.2 käsitellään oppilaiden ongelmatehtävän ratkaisemisen aikana havaittua matemaattista osaamista. Tuloksista muodostetaan luvussa 5.3 yhteenveto taidoista, joita avoimen ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvitaan.

5.1 Avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteet

Ongelmatehtävän ratkaisemisen ongelmia tutkittaessa käytettiin perinteistä sisällönanalyysiä havainnoimalla ongelmakohtia ja nimeämällä niitä. Havainnoista nousi esiin seitsemän eri kategoriaa: tehtävänannon rajaaminen, ratkaisustrategian harkitseminen, ongelman ratkaiseminen silmämääräisesti, perustelujen muodostaminen, GeoGebran käyttö, käsitteiden täsmällinen käyttö ja proseduurin löytyminen.

Ryhmien ongelmatehtävän ratkaisemisessa kohtaamat haasteet on koottu taulukkoon 5.1. Taulukkoon 5.1 on myös merkitty, kuinka monesti haaste esiintyi ryhmän ratkaisukeskustelun aikana. Taulukosta voidaan lukea, että eniten haasteita on ollut perustelujen riittävyydessä. Perustelujen vajavuus havaittiin seitsemän kertaa. Ongelma ratkaistiin silmämääräisesti ilman matemaattisia perusteluja kuudessa eri kohdassa. Myös käsitteiden täsmällisyyteen liittyviä ongelmia esiintyi viisi kertaa.

Taulukko 5.1. *Ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteet*

	Ryhmä 1	Ryhmä 2	Ryhmä 3	Ryhmä 4
Tehtävänannon rajaaminen		1		1
Strategian harkitseminen	1		1	1
Silmämääräinen ratkaiseminen	3	1	2	
Perustelujen muodostaminen	2	1	2	2
GeoGebran käyttö	1	1	1	
Käsitteiden täsmällisyys	1	2	2	
Proseduurin löytyminen		1		

5.1.1 Tehtävänannon rajaaminen

Huvipuistotehtävän tehtävänannossa kehotettiin etsimään huvipuistolle mahdollisimman optimaalinen ja tasapuolinen sijainti. Tehtävänannossa ei kuitenkaan kerrottu, miten kaupungit olivat sijoittuneet, vaan oppilaiden tuli tehtävän alussa sijoittaa kaupungit haluamallaan tavalla. Ryhmillä 2 ja 4 oli vaikeuksia tehtävässä alkuun pääsemisessä. Ryhmän 2 keskustelussa päiviteltiinkin tehtävänantoa:

```
Oppilas 2: Täs ei oo mitään järkeä tässä tehtävässä.
Oppilas 1: Geometria... Mä en ymmärrä tätä yhtään.
Oppilas 2: Siis millä tavalla miten niinku.
Oppilas 1: (Lukee tehtävänannon)
Oppilas 2: Mä en nyt ihan tajunnu, tässä on ehkä
           ideana tajuta se mahollisimman hyvin.
```

Ryhmälle 2 tilanne lähti aukeamaan, kun opettaja kehotti heitä sijoittamaan kaupungit GeoGebraan. Tällöin oppilaat ymmärsivät, että heidän tulee itse muodostaa tehtävän alkutilanne, siis rajata tehtävänantoa. Ryhmällä 4 taas ongelmana oli se, ettei tehtävänannossa selkeästi sanottu, miltä kantilta optimaalisuutta ja tasapuolisuutta tulisi käsitellä.

```
Oppilas 1: Mä mietin, että pitääkö tässä miettiä sitä taloudellista,
           vai sitä et mikä on se keskikohta.
Oppilas 2: Optimaalisin... se on matemaattisesti.
Oppilas 1: Pitäiskö tässä geogebrassa näkyä jotain?
Oppilas 2: No jos laitetaan ne kaupungit vaikka pisteinä.
Oppilas 1: Vaikka tonne ja tonne...
Oppilas 2: No jos tälleen mietitään ni A:n (kaupungin)
           ei kannata osallistua ollenkaan.
Oppilas 1: Laitetaa ihan lähekkäin.
Oppilas 2: Mitä meiän pitää nyt niinku tutkia tässä?
Oppilas 1: Keskikohta?
Oppilas 2: Nii kaupunkien keskellä.. vai oisko se
           suurimmassa kaupungissa.
Oppilas 1: Mietitään tätä nyt taloudellisesti.
```

Keskustelu on koottu otteista ryhmän 4 käymästä keskustelusta, kun he aloittivat tekemään tehtävää. Keskustelussa oppilaat heittelivät ideoita kaikenlaisista ratkaisumahdollisuuksista. Aluksi ryhmäläiset pohtivat, että pitääkö tehtävässä miettiä taloudellista tasapuolisuutta ja optimaalisuutta vai pyrkiä löytämään kaupunkien muodostaman kuvion keskikohta. Ryhmä alkoi rajaamaan tehtävänantoa merkitsemällä kaupungit pisteinä. Lopulta ryhmä hylkäsi idean pohtia etäisyyksiä ja valitsi tutkivansa tehtävää taloudellisesta näkökulmasta. Tehtävänannon rajaaminen siis tuotti tässäkin tapauksessa haasteen teh-

tävässä alkuun pääsemiselle. Oikeastaan ryhmä 4 olisi näihin ideoihin paneutuessaan saanut jo monta eri ratkaisua tehtävälle. Kuitenkaan ratkaisuideoita ei lähdetty oikeasti toteuttamaan. Lisäksi ryhmä 4 rajasi lopulta tehtävänannosta GeoGebran käytön kokonaan pois, vaikka tehtävänannossa kehotettiin pohtimaan tilannetta GeoGebran avulla.

5.1.2 Ongelman ratkaiseminen silmämääräisesti

Kun kaupungit oli sijoitettu GeoGebraan, oli vuorossa huvipuiston mahdollisen sijainnin pohtiminen. Tähän liittyät haasteet olivat ongelman silmämääräinen ratkaiseminen ja ratkaisustrategian harkinta. Ryhmät 1 ja 3 lähtivät ratkaisemaan tehtävää silmämääräisesti sijoittamalla. Molemmat ryhmät asettivat huvipuiston ensimmäiseksi ratkaisukseen suorakulmion keskipisteeseen.

```
Opettaja: Mitä te ootte saanu sinne?
Oppilas 2: Ykkös tuossa, kakkos tuossa, kolmas tuossa, neljäs tuossa,
           ni sitte tuohon keskelle.
Opettaja: Okei. Miten te saitte sen siihen keskelle? Laitoitte vaan?
Oppilaat: Laitettiin vaan.
Opettaja: No miten te pystyisitte näyttämää, että se on keskellä
Oppilas 1: Se pitäs mitata et jos kattoo tällee...
           (oppilas piirtää lävistäjät suorakulmiolle)
Oppilas 2: Nii se keskikohta kyllä kannattaa kattoo.
```

Keskustelussa ryhmän 3 kanssa opettaja pyysi oppilaita osoittamaan, että heidän huvipuistonsa todella sijaitsee keskellä. Ryhmän 3 oppilaat keksivät heti tavan piirtää lävistäjät suorakulmiolle ja siirtää huvipuisto lävistäjien leikkauspisteeseen. Ryhmän 3 oppilaat muodostivat toisen ratkaisunsa samalla tavalla siirtämällä kaupungit vinoneliön muotoon ja selvittämällä sen lävistäjien leikkauspisteen. Kolmannessa ratkaisussa oppilaat sijoittivat kaupungit silmämääräisesti samalle suoralle ja huvipuiston jälleen silmämääräisesti yhtä kauas kaikista. Opettaja kävi tässä vaiheessa jälleen kehottamassa oppilaita näyttämään, että huvipuisto tosiaan on yhtä kaukana kaikista kaupungeista. Oppilaat eivät siis ymmärtäneet, että huvipuiston paikka tulisi määrittää ja perustella matematiikan avulla.

5.1.3 Strategian harkitseminen

Ryhmissä 1, 3 ja 4 ratkaisustrategia valittiin niin, että tehtävään muodostettiin ratkaisu sen mukaan, mitä mieleen sattui juolahtamaan. Esimerkiksi ryhmän 3 keskustelussa tuli esiin, että ratkaisu tehtiin vain sen kummempia vaihtoehtoja miettimättä.

```
Oppilas 1: 8.8 noin, tää on meiän neljäs (ratkaisu)
Oppilas 2: Toi on aika samanlainen. (kuin ryhmän kolmas ratkaisu)
Oppilas 1: Nii on mut onhan noi ylemätkin. Mä sanon et tää käy.
```

Keskustelussa esiintyvä neljäs ratkaisu on kuvassa 5.3. Kuvassa 5.2 on ratkaisu, johon oppilas 2 keskustelussa viittasi. Oppilaat perustelivat erilaisuuden sillä, että "huvipuisto on sijoitettu nurkkaan". Tilanne on kuitenkin matemaattisesti samanlainen. Huvipuistot sijaitsevat ympyrän kehällä ja huvipuisto ympyrän keskipisteessä. Oppilaat eivät miettineet mahdollisia ratkaisuvaihtoehtoja, vaan muodostivat ratkaisut mahdollisimman nopeasti.

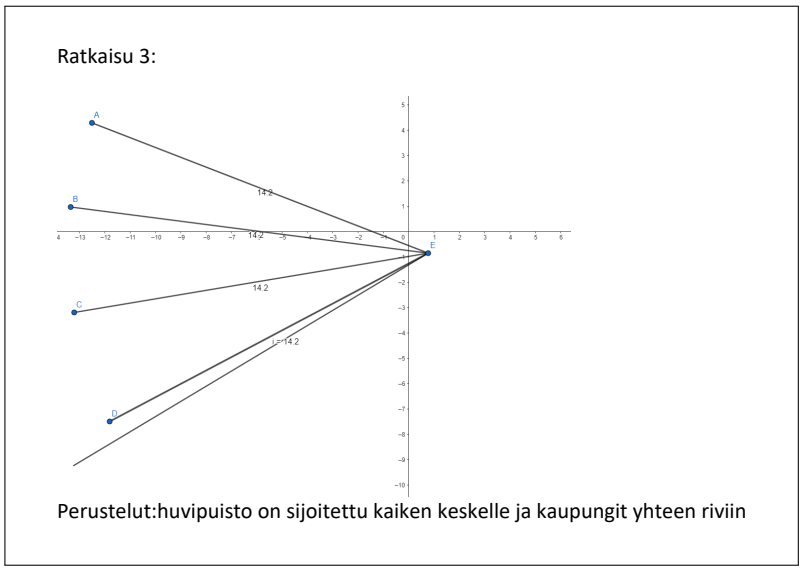
5.1.4 Perustelujen muodostaminen

Kun ryhmä oli saanut ratkaisuideansa valmiiksi, tuli heidän liittää kuvakaappaus ratkaisusta Word-dokumenttiin ja kirjoittaa ratkaisun alle perustelut. Useimmilla ryhmillä oli ratkaisuissa vajaat perustelut. Ryhmä 3 vastasi kaikissa ratkaisuissaan ainoastaan kysymykseen, mikä olisi tasapuolisin sijainti huvipuistolle ja sijoittivat huvipuiston aina yhtä kauas kaikista kaupungeista. Kuvat 5.2 ja 5.3 ovat esimerkkejä ryhmän 3 ratkaisuista. Optimaalisuuden perusteleminen puuttuu ratkaisuista. Kuvassa 5.1 näkyy ryhmän 1 ratkaisu, jossa huvipuisto on sijoitettu suurimpaan kaupunkiin. Perusteluna tässä on, että siellä on eniten kävijöitä ja muut kaupungit hyötyisivät silti rahallisesti. Tässä ratkaisussa on mietitty optimaalisuutta sen kannalta, missä kaupungissa kävijöitä on eniten. Kuitenkin tasapuoliseen ratkaisuun vaadittaisiin lisää perusteluja esimerkiksi siitä, miten muut kaupungit hyötyvät rahallisesti ja hyötyvätkö ne yhtä paljon kuin Helsinki, johon huvipuisto on sijoitettu.

Kuva 5.1. *Ryhmän 1 toinen ratkaisu.*

5.1.5 GeoGebran käyttö

GeoGebran käytön ongelmat liittyivät kaikilla ryhmillä siihen, että GeoGebran työkaluja käytettiin hyödyksi tehtävän ratkaisemiseen vain vähän. GeoGebran työkaluista ryhmät 2 ja 3 käyttivät vain pisteitä ja janoja. Ryhmä 1 käytti monikulmiota lisäksi huvipuiston



Kuva 5.2. *Ryhmän 3 kolmas ratkaisu*

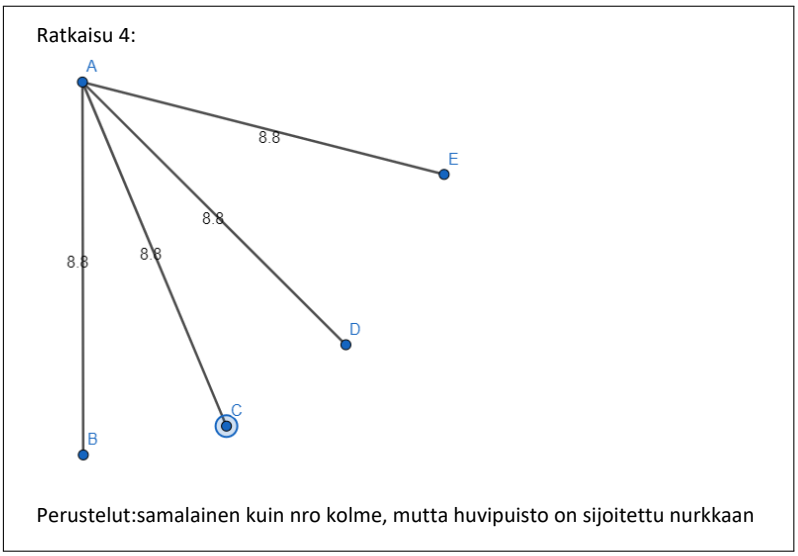
merkitsemiseen. Janojen pituuksia käyttivät kaksi ryhmää opettajan opastamana, mutta niiden hyöty jäi vähäiseksi tehtävän ratkaisussa.

5.1.6 Käsitteiden täsmällisyys

Käsitteiden täsmällinen käyttö olisi auttanut useita ryhmiä ratkaisuja tehdessään. Käsitteitä kuitenkin kuului ryhmien keskusteluissa hyvin vähän. Ryhmissä 1, 2 ja 3 esiintyi jollain tavalla keskipisteen käsite. Oppilaat kuitenkin huomasivat, ettei keskipiste riitä aina kuvaamaan tilannetta, jolloin he eivät enää käyttäneetkään puheessaan keskipisteen käsitettä vaan muita tilannetta kuvaavia sanoja, kuten: keskeinen paikka ja kaiken keskellä. Lisäksi suorakulmion käsitettä ei kuulunut, vaikka useimmat aloittivat tehtävän ratkaisun tarkastelemalla suorakulmiota. Tehtävän kannalta olisi hyödyllistä tunnistaa suorakulmion ominaisuudet ja verrata niitä muihin nelikulmioihin, kuten suunnikkaisiin tai epäsäännöllisiin nelikulmioihin. Kuvassa 5.2 on ryhmän 3 ratkaisu, johon ryhmä on kirjoittanut perusteluksi, että kaupungit on sijoitettu yhteen riviin ja huvipuisto kaiken keskelle. Ryhmä ei kuitenkaan ole huomannut, että oikeastaan kaupungit ovat ympyrän kaarella ja sitä kautta huvipuisto on tämän ympyrän keskipisteessä. Tällaiset käsitteelliset havainnot auttaisivat oppilaita myös perustelujen täsmällisyydessä. Vastaava tilanne on ryhmän 3 neljännessä ratkaisussa, joka löytyy kuvasta 5.3. Oppilaat huomasivat keskustelussa, että tilanne on samanlainen, mutta eivät osanneet sanoittaa, millä tavalla.

5.1.7 Proseduurin löytyminen

Huvipuistotehtävässä proseduraalinen osaaminen on hyvin pienessä roolissa, sillä tehtävän ratkaisemiseen ei välttämättä tarvita esimerkiksi laskutoimituksia. Kuitenkin ryhmän 2



Kuva 5.3. *Ryhmän 3 neljäs ratkaisu*

ratkaisu jäi jumiin lopulta proseduurin löytymiseen. He keksivät strategian selvittää piste, josta on lyhin yhteenlaskettu matka kaikkiin pisteisiin, mutta eivät löytäneet proseduuria, jolla pisteen olisi saanut selville. Yhdeksäsluokkalaiselle olisi tuossa vaiheessa riittänyt kokeileminen ja sitä kautta havainnoida, mihin suuntaan huvipuistoa siirrettäessä summa pienenee ja mihin suuntaan kasvaa.

5.2 Matemaattinen osaaminen avoimessa ongelmatehtävässä

Kuvan 5.4 taulukkoon on koottu ryhmien keskusteluissa havaitut matemaattisen osaamisen piirteet. Ryhmien keskusteluissa havaittiin konseptuaaliseen ymmärtämiseen, strategiseen kompetenssiin ja soveltuvaan päättelyyn liittyviä piirteitä. Proseduraaliseen sujuvuuteen ei liittynyt havaintoja. Lisäksi ryhmän 2 keskustelussa havaittiin viestintään liittyvää osaamista. Viestintä on sijoitettu kuvan 5.4 taulukossa kohdan "muut" alle, sillä viestintään liittyvää kohtaa ei löytynyt taulukosta 2.1.

Kaiken kaikkiaan matemaattisen osaamisen piirteitä havaittiin eniten ryhmän 2 suorituksessa. Muilla ryhmillä havaittiin matemaattisen osaamisen piirteitä yhteensä yhdeksässä eri tilanteessa, kun taas ryhmällä 2 näitä piirteitä näkyi kahdeksassa eri tilanteessa. Tämän vuoksi havainnot esitetään ryhmän 2 keskustelun ja ratkaisuiden avulla. Ryhmään 2 kuului kaksi oppilasta, joista käytetään nimityksiä oppilas 1 ja oppilas 2.

Ryhmä 2 pääsi tehtävässä alkuun, kun opettaja kehotti heitä sijoittamaan kaupungit GeoGebraan. Oppilaat sijoittivat kaupungit heti suorakulmion muotoon ja totesivat, että keskipiste olisi hyvä sijainti huvipuistolle. Tässä vaiheessa oppilaat käyttävät strategista kompetenssia. He tunnistivat tilanteeseen liittyvän matematiikan. Keskipisteen ryhmä löysi piirtämällä suorakulmion lävistäjät. Tämä vaihe liittyy konseptuaaliseen ymmärtämiseen. Oppilaat muistivat menetelmän ja käyttivät sitä keskipisteen määrittämiseen.

Matemaattisen osaamisen osa-alue		Ryhmä 1	Ryhmä 2	Ryhmä 3	Ryhmä 4
Konseptuaalinen ymmärtäminen	Käsitteiden käyttö oikein eri yhteyksissä	1		1	
	Menetelmien muistaminen ja rekonstruointi		1	1	
	Esimerkkien ja vastaesimerkkien luonti		1		
Strateginen kompetenssi	Ongelman muodostaminen		1		
	Tilanteeseen liittyvän matematiikan tunnistaminen		1		1
	Ongelmanratkaisustrategian valinta		1		1
Soveltuva päättely	Epäviralliset selitykset ja perustelut	2	1		1
	Intuitiivinen ymmärrys		1		
Muut	Viestintä		2		

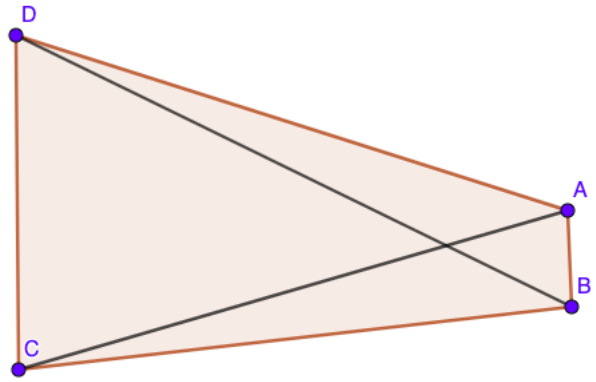
Kuva 5.4. *Taulukko, johon on koottu tutkimuksessa havaitut matemaattisen osaamisen piirteet*

Ryhmän keskustelussa kuitenkin kuuluu, etteivät ryhmäläiset olleet ratkaisuun aivan tyytyväisiä:

```
Oppilas 2: Se on neljän kaupungin keskellä, jolloinka
           se on tasapuolisesti kaikilla.
Oppilas 1: Yhtä lähellä kaikkia... mutta onko se?
Oppilas 2: Miten niin onko se?
Oppilas 1: Nii onko se yhtä lähellä kaikkia, jos me esimerkiksi
           tehtäis.. (oppilas piirtää nelikulmion, joka ei ole
           suorakulmio) ni onhan se paljon lähempänä nytte niiku
           vaikka näitä kahta.
           Tää on tämmönen niinku radikaalimpi,mutta tässä huomataan,
           että ei oo yhtä lähellä näitä kaikkia.
```

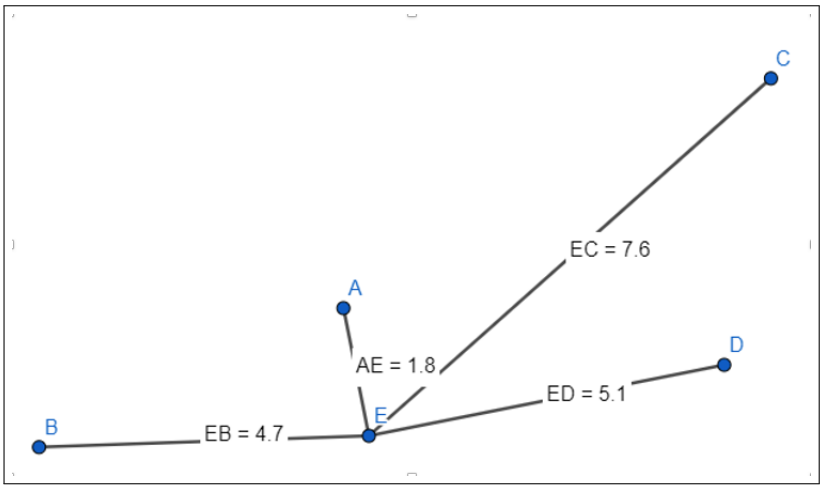
Oppilaat eivät piirrosta tilanteesta omaan ratkaisuunsa sijoittaneet, mutta kuvassa 5.5 näkyy esimerkki tilanteesta, jota oppilaat kuvailevat keskustelussaan. Tilanteessa näkyy soveltuva päättely ja konseptuaalinen ymmärtäminen. Oppilas 1 päätteli intuitiivisesti, ettei heidän ratkaisunsa ole täysin aukoton ja osoitti vastaesimerkin avulla, ettei lävistäjien piirtäminen sovellu kaikkiin nelikulmioihin. Tilanteessa huomataan myös viestintään liittyvää osaamista. Oppilas 1 ilmaisi matemaattista sisältöä suullisesti ja kirjallisesti kuvion avulla.

Ryhmä 2 siirtyi seuraavaksi pohtimaan tilannetta, jossa kaupungit ovat sijoittuneet niin, että kolme kaupunkia on lähempänä toisiaan ja neljäs kaupunki kauempana. Kuvassa 5.6 on esitetty oppilaiden esittämä ratkaisu. Perusteluissa ratkaisun kohdalla luki: "Kolme



Kuva 5.5. *Kuva ryhmän 2 kuvailemasta tilanteesta.*

kaupungeista ovat lähellä huvipuistoa. Olisi mahdotonta saada huvipuisto lähelle kaikkia." Opettaja kehotti oppilaita perustelemaan, miksi huvipuisto on juuri tuossa, eikä ylempänä, alempana, oikealla tai vasemmalla.



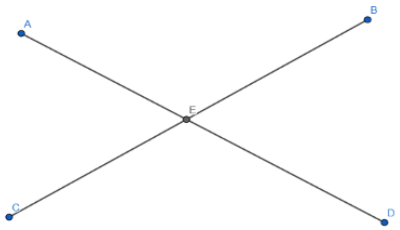
Kuva 5.6. *Kuva ryhmän 2 toisesta ratkaisusta.*

```
Oppilas 2: Jokaista mahollista suuntaa kohtaan perustelu: emme nosta
           sitä oikealle ylös, koska.., emme ota sitä oikealle
           koska.., emme ota sitä myöskään...
Oppilas 1: No jos sen tekis jotenki.. Mitenkä näitä sais?
           Tässä kaupunkien järjestelyssä mitää parempaa paikkaa?
Oppilas 2: Onks tässä nyt se sama järjestys?
Oppilas 1: On, mutta saisko sen mitenkää paremmin?
Oppilas 2: Sillee että se on A:ssa.
Oppilas 1: Sitte se ois hirveen kaukana kaikista muista.
Oppilas 2: Sit se ois lähellä yhtä mutta myös kaukana.
```

```
Oppilas 1: Oisko joku tapa saaha se sellaseen kohtaan
           tavallaan, että se ois aina niinku,
           ne matkat... se ois pienin mahollinen yhteenlaskettu
           matka... jos sais laskettua semmosen kohan.
```

Tilanteessa huomataan jälleen strategisen kompetenssin käyttö. Oppilaat esittivät itselleen kysymyksen, miten tilanteen saisi optimoitua eli miten voisi saada huvipuistolle paremman paikan. He keksivät strategian ongelman ratkaisemiseen: täytyy etsiä kohta, johon on pienin yhteenlaskettu matka kaikista kaupungeista. Oppilailla kuitenkin loppui aika tehtävän kanssa ja he jäivät jumiin koittaessaan etsiä geogebrasta apuja pienimmän yhteenlasketun matkan laskemiseen. Lopulta he merkitsivät ensimmäisen ratkaisunsa kohdalle, että tässä kuviossa toteutuu lyhin yhteenlaskettu matka. Kuvassa 5.7 näkyy oppilaiden tekemä kuvio ja perustelu, joka on kirjattu Word-dokumenttiin. Jää kuitenkin epäselväksi, miten opiskelijat päättelivät, että kuvan tilanteessa yhteenlaskettu matka on lyhin mahdollinen, mikä pitää kyllä paikkansa, kuten luvussa 3.2.2 todettiin. Tilanteessa huomataan jälleen myös viestintää: oppilaat viestivät toisilleen matematiikan avulla.

Ratkaisu 1:



Perustelut: Huvipuisto on kaikille neljälle kaupungille suotuisammassa paikassa. Yhteenlaskettu matka kaupungeista on lyhyin mahdollinen.

Kuva 5.7. *Kuva ryhmän 2 ratkaisusta ja perusteluista.*

5.3 Avoimen ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittava osaaminen

Luvuissa 5.1 ja 5.2 käsiteltiin avoimen ongelmatehtävän, siis huvipuistotehtävän, ratkaisemisen haasteita sekä tehtävässä tarvittavia matemaattisen osaamisen piirteitä. Näistä tuloksista on koottu yhteenvetona tutkimuksen avoimen ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittavasta osaamisesta kertova taulukko 5.2. Taulukko 5.2 on muodostettu taulukon 2.2 jaotteluun. Uutena kategoriana taulukkoon on lisätty viestintä, joka tämän tutkimuksen pareittain tehtävässä ongelmatehtävässä oli tärkeässä roolissa. Vaikka taulukossa

puhutaankin ongelmanratkaisuun tarvittavista tiedoista ja taidoista, voi sen ajatella myös tarkoittavan avoimessa ongelmatehtävässä vastaan tulevia haasteita, jos tämä taito tai tieto ei ole oppilaalla hallussa.

Taulukko 5.2. *Tutkimuksen avoimeen ongelmatehtävään tarvittavat tiedot ja taidot. Vrt. taulukko 2.2.*

Ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittava osaaminen	**Tutkimuksen avoimen ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittava osaaminen**
Ongelman ymmärtäminen	tehtävänannon rajaaminen tehtävään liittyvän matematiikan tunnistaminen
Strategiset taidot	ratkaisuideoiden luominen ongelman muodostaminen intuitiivinen ymmärrys vaihtoehtojen huolellinen harkinta
Tekninen suorittaminen	käsitteiden nimeäminen ja niihin liittyvien ominaisuuksien tunnistaminen esimerkkien luominen menetelmien muistaminen GeoGebran käyttö proseduurien löytäminen
Arviointi	perustelujen muodostaminen
Viestintä	oman ajattelun selittäminen

6. POHDINTA

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli havainnoida haasteita, joita oppilaille tulee avointa ongelmatehtävää tehdessään. Lisäksi tutkimuksessa havainnoitiin ongelmatehtävässä tarvittavaa matemaattista osaamista, joka osaltaan täydentää myös haasteiden havainnointia.

Haasteita, joita oppilaat kohtasivat ongelmatehtävää ratkaistessaan, kuvaa tutkimuksen tulososion taulukko 5.1. Näistä haasteista esiin nousevat erityisesti ongelman ymmärtämiseen, ratkaisustrategiaan, käsitteiden tunnistamiseen ja perustelujen muodostamiseen liittyvät haasteet. Lisäksi tulosten yhteenvedon taulukkoon 5.2 on koottu tutkimuksen avoimessa ongelmatehtävässä, huvipuistotehtävässä, tarvittavat tiedot ja taidot. Taulukon kohdat on siis käännettävissä mahdollisesti tehtävässä tuleviksi haasteiksi.

Huvipuistotehtävässä tarvittavaa osaamista havainnoitiin Kilpatrickin ym. [14] osaamisen osa-alueiden avulla. Tutkimuksen tuloksista yhteenvetona koottu taulukko 5.2 kuvaa taitoja ja tietoja, joita oppilaat tarvitsivat tämän tutkimuksen huvipuistotehtävän ratkaisemiseen.

6.1 Ratkaisemisen haasteet ja niiden selättäminen

Tutkimuksen tuloksissa huomattiin, että avointa ongelmatehtävää ratkaistessaan oppilailla oli haasteita ongelman ymmärtämiseen, strategiaan, arviointiin ja käsitteisiin liittyvissä taidoissa. Ongelman ymmärtämisen haasteet liittyivät tässä tutkimuksessa tehtävänannon rajaamiseen ja tehtävään liittyvän matematiikan tunnistamiseen. Strategiset haasteet liittyivät erityisesti ratkaisustrategian harkintaan. Oppilaat eivät myöskään arvioineet ratkaisuaan, mikä näkyi tehtävän ratkaisuissa vajaina perusteluina. Lisäksi käsitteet, siis käsitteiden nimeäminen ja käsitteisiin liittyvien ominaisuuksien tunnistaminen, tuottivat oppilaille haasteita.

Tutkimuksen taustateoriassa luvussa 2.3 todettiin, että ongelman ymmärtämisen, ratkaisustrategiaan, käsitteisiin ja arviointiin liittyviä taitoja tarvitaan ongelmatehtävän ratkaisemisessa. Tutkimuksessa havaitut ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteet ovat siis linjassa aiemman tutkimuksen kanssa. Tutkimus kuitenkin tuo avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisen näkökulman aiemmin esitettyyn teoriaan. Tehtävänannon avoimuuteen liit-

tyivät erityisesti ongelman ymmärtämisen haasteet, jotka tässä tutkimuksessa olivat tehtävänannon rajaaminen ja tehtävän silmämääräinen ratkaiseminen. Nämä ongelman ymmärtämiseen liittyvät haasteet liittyivät vahvasti avoimeen tehtävänantoon, eikä tutkimuksen taustateorioissa ollut huomioitu näihin haasteisiin liittyviä taitoja.

Pascual ja San Pedro totesivat tutkimuksessaan [29] ongelmatehtävien haasteiksi ongelman ymmärtämisen ja arvioinnin haasteet. He esittivät ongelman ymmärtämiseen liittyvien haasteiden johtuneen tutkimuksessaan suurimmaksi osaksi siitä, etteivät oppilaiden kielelliset taidot olleet riittäviä ongelman ymmärtämiseen. Arvioinnista Pascual ja San Perdo [29] toteavat, ettei oppilailla ole tapaa arvioida ratkaisuaan. Tämä huomattiin myös Huvipuistotehtävän yhteydessä. Arviointiin liittyvät haasteet näkyivät tässä tutkimuksessa perustelujen muodostamisen haasteena. Oppilaiden tuottamat ratkaisut tehtävään toteuttivat usein vain toisen tehtävänannossa annetuista kriteereistä: ratkaisu oli joko tasapuolinen tai optimaalinen. Jos oppilaat olisivat arvioineet ratkaisuaan, siis palanneet tehtävänantoon, he olisivat mahdollisesti huomanneet, että heidän ratkaisunsa kaipaa lisää perusteluja.

Strategiset haasteet liittyivät tutkimuksen ongelmatehtävässä ratkaisustrategian harkitsemiseen. Ratkaisustrategian valinta näkyy erityisesti Kinnusen ja Vauraan [15] esittämien ongelmanratkaisuun liittyvien toiminnan tasojen strategisessa tasossa, joka tarkoittaa ongelmalle erityisten ratkaisustrategioiden valitsemista. Tämän tutkimuksen avoimessa ongelmatehtävässä pyydettiin useita ratkaisuja ongelmaan, jolloin ratkaisustrategian valinta tapahtui useita kertoja ongelman ratkaisemisen aikana.

Moses [24] on aiemmin havainnut ongelmanratkaisun haasteeksi käsitteiden hallinnan. Käsitteelliset haasteet liittyivät tässä tutkimuksessa käsitteiden nimeämiseen ja käsitteisiin liittyvien ominaisuuksien tunnistamiseen. Tämä tutkimus siis tarkentaa käsitteellisiin haasteisiinkin liittyviä havaintoja.

PISA-tutkimuksessa halutaan korostaa matematiikan osaamista tilanteissa, jotka edellyttävät asioiden ymmärtämistä, pohtimista ja perustelemista [17]. PISA-tutkimuksessa oppilaiden osaamista arvioidaan suoritustasojen mukaan. Esimerkiksi suoritustasoa 2 pidetään vähimmäistasona nuorten selviytymiselle nykyajan yhteiskunnassa [17]. Suoritustaso 2 kertoo siitä, että oppilas kykenee ilman suoria ohjeita huomaamaan, kuinka yksinkertaisen tilanteen voi esittää matemaattisesti [32]. Ongelman ymmärtämiseen liittyviä taitoja pidetään siis PISA-tutkimuksessa vähimmäisvaatimuksena nyky-yhteiskunnassa. Myös strategian valitsemiseen ja arviointiin liittyvät taidot korostuvat PISA-tutkimuksessa.

Ongelmanratkaisutaitojen tärkeys matematiikassa todettiin johdannossa 1. Tulevaisuuden työelämässä ongelmanratkaisutaidot korostuvat yhä enemmän. Myös matematiikan osalta ongelmanratkaisutaidot korostuvat, kun laskimet kykenevät hoitamaan laskutoimitukset ja jopa analysoimaan. Toisaalta PISA-tutkimusten tulosten lasku osoittaa sen, että matemaattiset ongelmanratkaisutaidotkin ovat laskussa. Tämä on huolestuttavaa, sillä

koulumme tulisi kyetä tarjoamaan oppilaille työelämässä tarvittavia taitoja.

Tässä tutkimuksessa havaitut avoimen ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteet osoittavat puutteita oppilaiden ongelmanratkaisun taidoissa. Tutkimuksen ongelmatehtävä oli kuitenkin hyvin avoin, joten tehtävänannon vaikutusta haasteisiin ei voida väheksyä. Tehtävänannon ymmärtäminen ja tehtävään liittyvän matematiikan tunnistaminen on tärkeässä osassa ratkaisustrategian valinnan ja koko tehtävän suorittamisen kannalta. Tässä tutkimuksessa osa haasteista saattoi johtua siitä, etteivät oppilaat olleet ratkaisseet aiemmin vastaavia ongelmatehtäviä. Haapasalo kehottaakin [7] aloittamaan ongelmatehtävien harjoittelun tehtävistä, joissa oppilaat tarvitsevat korkeintaan muutamaa yksinkertaista menetelmää ratkaistakseen ongelman.

Tehtävässä alkuun pääsemistä ja ratkaisustrategioiden löytämistä voisi harjoitella esimerkiksi pitämällä aina matematiikan tunnin aluksi pienen ongelmatehtävätuokion, jossa oppilaille esitetään jokin ongelma, johon he keksivät erilaisia ratkaisutapoja. Tämän jälkeen ratkaisut kerätään taululle, jotta oppilaat kuulevat myös muiden keksimiä ratkaisutapoja tehtävään.

Leppäahon [22] väitöstutkimuksessa ongelmanratkaisun opettamisesta todettiin, että oppilaiden perustelun taidot paranivat, kun heille opetettiin ongelmatehtävien ratkaisemista. Yksi perustelun taitoja parantava tekijä tutkimuksessa oli ratkaisukartta. Ratkaisukarttaan merkitään tehtävänannon tiedot huolellisesti, mahdollinen apupiirros ja kaikki ratkaisuyritykset [22]. Lopuksi ratkaisukarttaan merkitään oikea ratkaisu [22]. Ratkaisukartan avulla opettaja saa lisäksi tietoa, missä kohtaa ratkaisua oppilaalla on vaikeuksia [22].

Opettajan on myös hyvä huomioida tutkimuksessa havaitut haasteet avoimen ongelmatehtävän valinnassa ja omassa ohjauksessaan ongelmanratkaisua sisältävällä tunnilla. Ongelmatehtävän asettelu on tärkeässä roolissa sen kannalta, miten oppilaat lähtevät ongelmaa ratkaisemaan. Esimerkiksi huvipuistotehtävän tehtävänanto antoi mahdollisuuden käsitellä asiaa arjen näkökulmasta, jolloin oppilaat eivät välttämättä kokeneet tarpeelliseksi käyttää matematiikkaa ratkaisussaan. Matematiikan näkökulmaa lisätäkseen tehtävänannossa voisi pyytää oppilaita määrittämään geometrian tietojen avulla huvipuiston sijainti. Vastaavasti tässä tutkimuksessa esimerkiksi kehotus "määritä matemaattisesti" olisi voinut tuottaa hyvin erilaisia ratkaisuja.

Opettajan kannattaa heti ongelmatehtävän annettuaan kiertää ryhmät läpi ja varmistaa, että ongelma on ymmärretty oikein. Jos oppilaat eivät ole aiemmin ratkaisseet avoimia ongelmatehtäviä, opettaja voi ohjata ryhmää esimerkiksi keräämällä taululle joitain apukysymyksiä johdattelemaan ratkaisuja haluttuun suuntaan. Näin opettaja helpottaa sekä tehtävässä alkuun pääsemistä, strategian löytymistä että perustelujen muodostamista. Huvipuistotehtävässä nämä apukysymykset voisivat olla esimerkiksi: Mitä geometrisia kuvioita neljä kaupunkia voivat muodostaa? Onko muodostamanne ratkaisu optimaalinen, miksi? Onko muodostamanne ratkaisu tasapuolinen, miksi? Kysymyksistä ensimmäinen ohjaa

oppilaita geometriseen ratkaisutapaan ja auttaa rajaamaan ongelmaa. Kaksi seuraavaa kysymystä taas kyseenalaistavat oppilaiden muodostamaa ratkaisua ja pyrkivät herättämään keskustelua perusteluista. Myöskin opettajan perustelua vaativat kysymykset voisivat herättää oppilaissa enemmän keskustelua, siis lisäisivät viestintää mutta myös perusteluja. Opettajan kysymysten asettelulla on myös merkitystä. Esimerkiksi on täysin eri asia kehottaa "keskustelkaa, onko tuo sijainti optimaalinen huvipuistolle" kuin kysyä "miksi tuo sijainti on optimaalinen huvipuistolle". Jälkimmäinen kysymys vaatii oppilailta heti jonkin näköistä perustelua, kun taas ensimmäisen tarkoitus on herättää keskustelua.

6.2 Avoin ongelmatehtävä matemaattista osaamista kehittämässä

Tutkimuksessa havaittu avoimessa ongelmatehtävässä, siis huvipuistotehtävässä, tarvittava osaaminen on koottu taulukkoon 5.2. Taulukon 5.2 mukaan huvipuistotehtävässä alkuunpääsemiseen tarvittiin ongelman ymmärtämiseen liittyviä taitoja, kuten tehtävänannon rajaaminen ja tehtävään liittyvän matematiikan tunnistaminen. Ongelman ymmärtämisen jälkeen oppilas tarvitsi strategisia taitoja, kuten ratkaisuideoiden luomista, ongelman muodostamista, intuitiivista ymmärrystä ja vaihtoehtojen huolellista harkintaa valitakseen tehtävään sopivan ratkaisustrategian. Ongelman ratkaistakseen oppilas tarvitsi myös tekniseen suorittamiseen liittyviä taitoja. Näitä taitoja olivat: käsitteiden nimeäminen ja niihin liittyvien ominaisuuksien tunnistaminen, esimerkkien luominen, menetelmien muistaminen, GeoGebran käyttö ja proseduurien löytäminen. Tutkimuksen ongelmatehtävä tehtiin pareittain, joten oppilaiden tuli kyetä myös viestimään matematiikasta toisilleen. Lopuksi oppilas muodosti ratkaisun ja perustelut tehtävään. Tässä vaiheessa oppilaan tulisi arvioida, vastasiko hän tehtävän kysymykseen.

Tutkimuksen tehtävään tarvitut ongelmanratkaisun taidot löytyvät lähes kaikki luvussa 2.3 esitellyistä teorioista. Kuitenkaan mikään ongelmanratkaisutaitoja esittävistä teorioista ei yksinään kata tutkimuksessa havaittuja avoimeen ongelmanratkaisuun tarvittavia taitoja. Esimerkiksi Joutsenlahden [11] luomasta jaottelusta ei löydy käsitteellistä osaamista. Kinnusen ja Vauraan [15] luoma jaottelu taas korostaa käsitteellistä osaamista, mutta heidän jaottelustaan ei löydy ongelman arviointiin liittyviä taitoja. Ballewn ja Cunninghamin [2] sekä Pólyan [34] jaotteluissa ongelman ymmärtämiselle on annettu paljon painoarvoa, mutta käsitteellinen osaaminen ei juurikaan näy. Jokaisesta teoriasta löytyi kuitenkin jotain yhtäläisyyksiä tutkimuksessa havaittuun osaamiseen. Ongelmatehtävässä tarvittavaa osaamista ei siis kokonaisuudessaan löytynyt mistään aiemmasta teoriasta. Teorioita yhdistelemällä voidaan saada kattava kuva tarvittavasta osaamisesta. Tutkimuksessa havaitut avoimen ongelmatehtävän ratkaisemiseen tarvittavat taidot myös osaltaan tarkentavat aiemmissa tutkimuksissa huomattuja ongelmatehtävässä tarvittavia taitoja, kuten luvussa 6.1 todettiin.

Avoimessa ongelmatehtävässä tarvitaan siis paljon erilaista matemaattista osaamista.

Kilpatrickin ym. [14] matematiikan osaamisen osa-alueista ainoastaan proseduraalinen sujuvuus jäi tässä tehtävässä pienemmälle painoarvolle, mutta toisenlaisessa tehtävässä sekin osa-alue voisi korostua. Avoimia ongelmatehtäviä käyttämällä on siis mahdollisuus kehittää kaikkia matemaattisen osaamisen osa-alueita. Kaikkien matemaattisen osaamisen osa-alueiden kehittäminen on oppilaiden kannalta tärkeää, sillä osa-alueet tukevat toisiaan ja mahdollistavat yhdessä asioiden oppimisen, kuten Kilpatrick ym. [14] toteavat. Tässäkin tutkimuksessa havaittiin, miten osa-alueet tukevat toisiaan. Ryhmän 2 suorituksessa havaittiin huomattavasti enemmän matemaattista osaamista kuin muilla ryhmillä. Matemaattinen osaaminen näkyi ryhmällä 2 lähes kaikilla osaamisen osa-alueilla proseduraalista sujuvuutta lukuun ottamatta.

Kouluissa olisi siis tärkeää kehittää kaikkia matemaattisen osaamisen osa-alueita eikä vain esimerkiksi proseduraalista sujuvuutta. Haapasalo [6] toteaakin, että ymmärtävä oppiminen on mahdollista vain, kun konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto liittyvät vahvasti toisiinsa. Tällöin ne tukevat toistensa muodostumista. Tässä tutkimuksessa konseptuaalisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden rinnalle tulevat vielä strategioihin ja päättelyyn liittyvä osaaminen, jotka liittyvät yhtä kiinteästi oppilaiden matemaattiseen osaamiseen.

Kaikkien matemaattisen osaamisen osa-alueiden kehittäminen voisi tapahtua esimerkiksi ongelmatehtäviä tekemällä. Kuten tutkimuksen huvipuistotehtävän ratkaisuissa huomattiin, ongelmatehtävässä tarvittiin erityisesti strategiaan, päättelyyn ja käsitteisiin liittyvää osaamista, joten ongelmatehtävien avulla, näihin liittyvää osaamista voitaisiin myös kehittää.

6.3 Luotettavuus ja eettisyys

Kvalitatiivisen tutkimuksen luotettavuuden arvioinnissa voidaan käyttää esimerkiksi kategorioita: totuusarvo, johdonmukaisuus, puolueettomuus ja sovellettavuus [26]. Tutkimuksen johdonmukaisuuteen ja luotettavuuteen vaikuttaa tutkimusmetodi [35]. Tässä tutkimuksessa tutkittiin oppilaiden osaamista ja ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteita ja tutkimusmetodiksi valikoitui ratkaisukeskustelujen äänittäminen ja havainnointi ja oppilaiden tuottamien ratkaisujen tarkastelu. Oppilaan matemaattinen osaaminen todettiin luvussa 2.1 matemaattisen ajattelun ilmentymäksi. Joutsenlahden ja Tossavaisen [12] mukaan matematiikan kielentäminen on matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla. Matemaattista osaamista voidaan siis havainnoida, kun oppilaat kielentävät matematiikkaa. Joutsenlahti ja Tossavainen [12] luettelevat myös matematiikan opiskelussa käytettyjä kieliä. Näitä kieliä ovat matematiikan symbolikieli, taktiilinen toiminnan kieli, kuviokieli ja luonnollinen kieli. Tämän tutkimuksen tutkimusmetodilla saatiin tietoa oppilaiden matemaattisesta osaamisesta oppilaiden käyttämän luonnollisen kielen ja kuviokielen avulla. Luonnollisen kielen avulla ilmaistua matemaattista osaamista havaittiin ratkaisukeskuste-

lujen äänitteiden avulla. Tehtävänannossa oli kehotettu oppilaita liittämään ratkaisuihinsa kuvakaappaukset GeoGebraan piirtämistään kuvioista ja kirjoittamaan perustelut kuvan alle. Ratkaisujen tekeminen toi esiin siis oppilaiden matemaattista osaamista sekä kuviokielen että luonnollisen kielen keinoin. Tutkimuksen tutkimusmetodi soveltui siis tutkimuksen tavoitteisiin hyvin.

Ratkaisukeskustelujen äänittämisellä oli pientä vaikutusta ryhmien keskusteluihin. Tutkimusaineistossa tämä vaikutus huomattiin etenkin ryhmällä 1, jonka jäsenet eivät ensimmäiseen kymmeneen minuuttiin sanoneet juuri mitään. Kuitenkin hekin sittemmin unohtivat äänityksen tuoman jännityksen ja juttelivat tehtävän ratkaisemisesta normaaliin tapaan. Muilla ryhmillä tällaista jännitystä ei havaittu. Muiden ryhmien oppilaat saattoivat keskustelun tauottua koputella ääninauhurin mikrofonia. Lisäksi oppilaat muistivat ääninauhurin olemassaolon usein sanottuaan jotain kritiikkiä tehtävää kohtaan ja kiirehtivät korjaamaan sanomisiaan. Ääninauhuri ei siis ratkaisevasti vaikuttanut oppilaiden ratkaisukeskusteluihin tai etenkään tutkimustehtävän ratkaisemisessa tuleviin ongelmiin.

Totuusarvoa arvioidessa on otettava huomioon tutkijan havaintoihin vaikuttaneet henkilökohtaiset kokemukset, jotka ovat voineet johtaa puolueellisuuteen [26]. Tässä tutkimuksessa tutkija ei tuntenut luokkaa entuudestaan, mikä auttaa analysoinnin objektiivisuudessa. Kuitenkin analyysi on aina subjektiivista ja siihen liittyy väistämättä myös tulkintaa [35]. Sekä aineisto- että teorialähtöisessä sisällönanalyysissä on omat haasteensa tutkijan objektiivisuudelle aineistoa käsitellessä. Suunnatun sisällönanalyysin haasteena on, että tutkija lähestyy dataa vahvalla puolueellisuudella, jolloin tutkija löytää todennäköisemmin todisteita, jotka tukevat teoriaa kuin todisteita, jotka eivät tue [9]. Perinteisen sisällönanalyysin haasteena on, että jos konteksti ei ole täysin hallussa, analyysissä syntyvät luokittelukategoriat eivät välttämättä ole keskeisiä, jolloin havainnot eivät edusta tarkasti tietoja [9]. Tässä tutkimuksessa objektiivisuutta pyrittiin lisäämään analysoimalla aineistoa useaan otteeseen niin, että liian pitkälle viedyt johtopäätökset saataisiin kitkettyä pois. Tavoitteena analyysissa on ollut, että kuka tahansa tutkija olisi voinut tehdä samoja johtopäätöksiä. Suunnatussa analyysissä pyrittiin myös siihen, ettei osaamiseen viittaavia piirteitä tulkita tietyn osaamisen osa-alueen alle, ellei sitä teoriassa ole tarkasti sanottu.

Tutkimuksen johdonmukaisuutta voi parantaa sillä, että aineistoa tulkitaan johdonmukaisesti ja läpinäkyvästi [26]. Myös tämä toteutuu tutkimuksessa, sillä aineistoa ja siitä tehtyjä tulkintoja on kuvattu luvussa 5 tarkasti oppilaiden keskusteluja kuvaamalla ja kertomalla, mitä johtopäätöksiä keskustelusta on tehty. Päättelyketjut on kuvattu mahdollisimman tarkasti.

Tutkimuksen yleistettävyyttä pohtiessa on hyvä verrata toisiin vastaavanlaisiin tutkimuksiin. Hähkiöniemen ym. tutkimukseen [10] verrattuna etenkin oppilaiden GeoGebran käytössä tehtävän ratkaisemiseen oli runsaasti eroja. Hähkiöniemen ym. tutkimuksessa [10] oppilaat eivät olleet käyttäneet GeoGebraa aiemmin ja oppilaille esitettiin tunnin alkuun

GeoGebran käyttöön liittyviä esimerkkejä. Tässä tutkimuksessa oppilaat olivat käyttäneet GeoGebraa jonkin verran. Kuitenkaan oppilaat tässä tutkimuksessa eivät hyödyntäneet GeoGebraa yhtä monipuolisesti kuin Hähkiöniemen ym. [10] tutkimuksessa. Lisäksi Hähkiöniemen ym. muodostamaan [10] taulukkoon hypoteeseista, joita oppilaat muodostivat tehtävän ratkaisussa, ei sisältynyt yhtään silmämääräisesti tehtyä ratkaisua. Ongelmatehtävän ratkaisemisen haasteet saattavat siis riippua esimerkiksi oppitunnin kulusta. Kuitenkin täysin vastaavalla tavalla teetetty tutkimus luultavasti tuottaisi samanlaisia haasteita oppilaille.

Tampereen yliopiston hyvän tieteellisen käytännön ohjeistuksessa [38] on kehotettu rehellisyyteen, yleiseen huolellisuuteen ja tarkkuuteen kaikissa tutkimuksen vaiheissa. Rehellisyys tarkoittaa sitä, ettei tutkimuksen havaintoja ja tuloksia ole vääristelty tai sepitetty eli muodostettu tekaistuja havaintoja [38]. Tässä tutkimuksessa tutkimuksen toteutus ja tulosten analysointi on pyritty tekemään mahdollisimman läpinäkyvästi. Lisäksi ohjeistuksessa kehotetaan muiden tutkijoiden työn huomioimiseen esimerkiksi viittauskäytännöissä [38]. Tutkimuksessa on pyritty viittaamaan muiden tutkimuksiin ja lähteisiin asiaan kuuluvalla tavalla huolellisesti ja tarkasti.

Tutkimuksen suorittamiseen liittyviä eettisiä kysymyksiä on pohdittu luvussa 4.4. Tutkimuslupien ja tutkimukseen osallistuneiden tiedottamisen lisäksi olen pyrkinyt anonymisoimaan henkilöt jo tutkimuksen aineistonkeruuvaiheessa. Mahdollisimman hyvä anonymisointi kertoo myös tutkittavien oikeuksien kunnioittamisesta. Opetuskokeilun aikana nimesin oppilaat jo ryhmien numeroiden mukaan ja tallensin äänitteet ja ryhmien tekemät tuotokset myös ryhmien numeroiden mukaan. Litteroinnin yhteydessä muokkasin puhetapoja ja murteellisia ilmauksia niin, ettei myöskään niistä voisi tunnistaa puhujaa. Olen myös jättänyt tutkimukseen käytetyn koulun ja kunnan mainitsematta, jotta tutkittavien henkilöiminen olisi entistä haastavampaa.

6.4 Yhteenveto ja jatkotutkimusehdotuksia

Tutkimuksessa havaittu avoimeen ongelmatehtävään tarvittava osaaminen pätee tämän tutkimuksen ongelmatehtävään ja tutkimuksen opetusryhmään, mutta esimerkiksi kvantitatiivisen lisätutkimuksen avulla voitaisiin tutkia, päteekö saatu tulos kaikkiin ryhmissä tehtäviin avoimiin ongelmatehtäviin.

Tutkimuksen tarkoituksena oli myös havaita haasteita, jotta opettaja pystyisi reagoimaan niihin. Opettajan ohjaus on merkittävässä roolissa avointa ongelmatehtävää ratkaistessa. Seuraavaan listaan on koottu asioita, joiden avulla opettaja voi ohjata oppilaita joko yksilöinä tai ryhmänä ongelmatehtävän aikana:

- varmistus, että tehtävänanto on ymmärretty,
- apukysymyksien kirjoittaminen taululle oppilaiden ratkaisujen tueksi,

- keskustelua herättävien kysymysten kysyminen,
- tehtävänannon muokkaaminen.

Listaan kootut asiat olisivat voineet auttaa oppilaita tämän tutkimuksen avoimessa ongelmatehtävässä, mutta samat ohjeet pätevät myös muissa ongelmatehtävissä.

Tässä tutkimuksessa havainnoitiin Kilpatrickin ym. [14] esittämistä matemaattisen osaamisen osa-alueista konseptuaalista ymmärtämistä, proseduraalista sujuvuutta, soveltuvaa päättelyä ja strategista kompetenssia. Yritteliäisyys jätettiin pois havainnoinnista, sillä tämän tutkimuksen tutkimusmetodi ei soveltunut sen havainnointiin. Suomalaisnuorten ongelmanratkaisutaitoja on tutkittu vuoden 2012 PISA-tutkimuksessa [18]. Tutkimuksessa huomattiin, että suomalaisnuorten menestyminen ongelmanratkaisutehtävissä oli kaikista osallistujamaista selvimmin kiinni oppilaan sinnikkyydestä [18]. Voisi siis olla tarpeellista tehdä jatkotutkimusta, jossa havainnoidaan oppilaiden yritteliäisyyttä ja sen vaikutusta oppilaan suoriutumiseen matemaattisessa ongelmanratkaisussa. Kuten Moses [24] toteaakin, ongelmatehtävän asettelu on ratkaisevassa asemassa siinä, motivoituuko oppilas tehtävästä. Oppilaiden motivaatiota ja yritteliäisyyttä voisi havainnoida siis erityisesti erilaisten ongelmatehtävien asettelujen kautta.

LÄHTEET

[1] H. Alfaro ja J. Joutsenlahti. ”Promoting learning with understanding: Introducing languaging exercises in calculus course for engineering students at the university level”. *LUMAT General Issue* 8.1 (2020), s. 229–251.

[2] J. W. Ballew H. ja Cunningham. ”Diagnosing Strengths and Weaknesses of Sixth-Grade Students in Solving Word Problems”. *Journal for Research in Mathematics Education* 13.3 (1982).

[3] C. Christou et al. ”Problem Solving and Problem Posing in Dynamic Geometry Environment”. *The Mathematics Enthusiast* 2.2 (2005), s. 125–143.

[4] G. F. Fagnano. ”Problemata quaedam ad methodum maximorumet minimorum spectantia”. *Nova Acta Eruditorum* (1775), s. 281–303.

[5] R. Fenn. *Geometry*. London: Springer, 2001.

[6] L. Haapasalo. ”Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta”. Teoksessa: *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 1997.

[7] L. Haapasalo. ”Ongelmanratkaisun oppimisesta”. Teoksessa: *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 1997.

[8] M. Hirvonen. *Monikulmiot*. URL: https://www.geogebra.org/m/dgkmtmzb (viitattu 04. 05. 2023).

[9] H-F. Hsieh ja S. E. Shannon. ”Three Approaches to Qualitative Content Analysis”. *Qualitative Health Research* 15.9 (2005), s. 1277–1288.

[10] M. Hähkiöniemi, H. Leppäaho ja A. Viholainen. ”Avoin ongelmanratkaisu teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä”. Teoksessa: *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta*. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja, 2012.

[11] J. Joutsenlahti. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. Väitöskirja*. Tampere: Tampereen yliopisto, 2005.

[12] T. Joutsenlahti J. ja Tossavainen. ”Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa”. Teoksessa: *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, 2018.

[13] K. Juhila. ”Laadullisen tutkimuksen ominaispiirteet”. Teoksessa: *Laadullisen tutkimuksen verkkokäsikirja*. Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto. URL: https://www.fsd.tuni.fi/fi/palvelut/menetelmaopetus/ (viitattu 07. 03. 2023).

[14] J. Kilpatrick, J. Swafford ja B. Findell. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press, 2001.

[15] R. Kinnunen ja M. Vauras. ”Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella”. Teoksessa: *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 1997.

[16] Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. *PISA Arviointialueet. Matematiikan osaaminen*. 16. helmikuuta 2023. URL: https://ktl.jyu.fi/fi/pisa/arviointialueet (viitattu 28. 02. 2023).

[17] P. Kupari et al. *PISA 12 ensituloksia*. 2013. URL: http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-263-241-8.

[18] K. Kyllönen S. ja Nissinen. *Suomalaisnuorten ongelmanratkaisutaidot*. 2014. URL: https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/75218/okm16.pdf (viitattu 28. 04. 2023).

[19] T. Laine. ”Matematiikka ongelmanratkaisuna ja ongelmana”. Teoksessa: *Projekteja ja prosesseja : Opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä*. Tampereen yliopisto, 2003.

[20] M. Lehtinen, J. K. Merikoski ja T. Tossavainen. *Johdatus taosgeometriaan*. WSOY, 2007.

[21] G. Leinhardt. ”Comments on Thomas Romberg’s Chapter”. Teoksessa: *Mathematical Thinking and Problem Solving*. University of Carolina, 1994.

[22] H. Leppäaho. *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa: ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Väitöskirja.* Jyväskylä, 2007.

[23] *Mathematics Assessment Framework For The 2022 And 2024 National Assessment of Educational Progress*. National Assessment Governing Board, U.S. Department of Education, 2022. URL: https://www.nagb.gov/content/dam/nagb/en/documents/publications/frameworks/mathematics/2022-24-nagb-math-framework-508.pdf.

[24] B. Moses. ”Individual Differences in Problem Solving”. *The Arithmetic Teacher* 30.4 (1982), s. 10–14.

[25] A. Muin, S. H. Hanifah ja F. Diwidian. ”The effect of creative problem solving on students’ mathematical adaptive reasoning”. *Journal of Physics: Conference Series* 948.1 (2018).

[26] H. Noble ja J. Smith. ”Issues of validity and reliability in qualitative research”. *Evidence-Based Nursing* 18.2 (2015), s. 34–35. DOI: 10.1136/eb-2015-102054. URL: https://ebn.bmj.com/content/18/2/34.

[27] OECD. *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy*. 2006. DOI: https://doi.org/10.1787/9789264026407-en. URL: https://www.oecd-ilibrary.org/content/publication/9789264026407-en.

[28] OECD. *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving Students' Skills In tackling Real-Life Problems (Volume VI)*. 2014. DOI: http://dx.doi.org/10.1787/9789264208070-en.

[29] L. Pascual ja A. San Pedro. "Post Secondary Students' Level of Proficiency in Solving Real World Problems in Mathematics". *Journal of Applied Mathematics and Physics* 6.1 (2018), s. 198–214. DOI: 10.4236/jamp.2018.61019.

[30] *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Helsinki: Opetushallitus, 2014.

[31] *Pisa 2012: Suomalaisnuorten osaaminen laskussa*. 2014. URL: https://okm.fi/-/pisa-2012-finlandska-ungas-kunskapsniva-har-sjunkit (viitattu 26. 04. 2023).

[32] *PISA 2018 Results: Contry Note, Finland*. 2019. URL: https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_FIN.pdf (viitattu 26. 04. 2023).

[33] M. Plastria. "4-point Fermat location problems revisited. New proofs and extensions of old results". *IMA Journal of Management Mathematics* 17 (2006). DOI: 10.1093/imaman/dpl007.

[34] G. Pólya. *Ratkaisemisen taito: Kuinka lähestyä matemaattisia ongelmia*. Tallinna: AS Pakett, 2014.

[35] A. Saaranen-Kauppinen A. ja Puusniekka. *KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto [verkkojulkaisu]*. URL: https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus/ (viitattu 04. 04. 2023).

[36] J. Vuori. "Tutkimusetiikka ihmistieteissä". Teoksessa: *Laadullisen tutkimuksen verkkokäsikirja*. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto. URL: https://www.fsd.tuni.fi/fi/palvelut/menetelmaopetus/kvali/tutkimusetiikka/tutkimusetiikka-ihmistieteissa/ (viitattu 04. 05. 2023).

[37] K. Väisälä. *Geometria*. Porvoo: WSOY, 1961.

[38] Tampereen yliopisto. *Hyvä tieteellinen käytäntö*. URL: https://www.tuni.fi/fi/tutkimus/vastuullinen-tiede/hyva-tieteellinen-kaytanto#expander-trigger--3c948806-a2d5-45d9-bc12-19558c6f2ef2 (viitattu 04. 05. 2023).

LIITE A: ONGELMANRATKAISUTEHTÄVÄN TEHTÄVÄNANTO

Huvipuistotehtävä

Neljä kaupunkia rakennuttaa yhteistyössä huvipuiston. Tutki GeoGebran avulla, mikä olisi optimaalisin ja tasapuolisin sijainti huvipuistolle.

Kirjaa ylös **eri ratkaisuvaihtoehtoja**, kun kaupungit ovat sijoittuneet eri tavoilla.

GeoGebraan pääset linkistä: https://www.geogebra.org/calculator

Vaihda graafi -näkymä geometria -näkymäksi.

Liitä ratkaisuistasi tähän tiedostoon **kuvakaappaus** ja kirjoita sen alle **perustelut**.

Kuvakaappauksen ohjeet:
Kirjoita hakuun kuvakaappaustyökalu ja valitse se luettelosta. Paina uusi ja maalaa se osa näytöstä, josta haluat kuvankaappauksen ottaa.

Ryhmän numero:	

Ratkaisu 1:
Perustelut:

Ratkaisu 2:
Perustelut:

Ratkaisu 3:
Perustelut:

Ratkaisu 4:
Perustelut:

LIITE B: KIRJE VANHEMMILLE

Arvoisat vanhemmat!

Teen tutkimusta matematiikan tehtävien ratkaisemisen haasteista pro graduani varten. Tätä varten olen suunnitellut yhden oppitunnin mittaisen opetuskokeilun, jossa oppilaat ratkaisevat geometriaan liittyvää ongelmatehtävää ryhmissä. Kokeilu suoritetaan matematiikan tunnilla xx.xx.

Aineistonkeruu tutkimuksessa tapahtuu nauhoittamalla oppilaiden ratkaisukeskusteluja ja keräämällä ryhmien ratkaisut. Tutkimustulokset käsitellään anonyymisti, eikä tutkimuksessa tuoda julki mitään tietoja, joiden perusteella tutkimukseen osallistuneet voitaisiin tunnistaa. Aineisto säilytetään ainoastaan tutkijan nähtävillä ja kuultavilla ja hävitetään tutkimuksen valmistuttua.

Tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista. Mikäli ette halua lapsenne osallistuvan tutkimukseen, ilmoitattehan siitä keskiviikkoon xxxx mennessä luokanvalvojalle.

Jos haluatte lisätietoja tutkimukseen osallistumisesta, voitte laittaa viestiä suoraan minulle alla olevaan sähköpostiin.

Yhteistyöterveisin:
Henna Katainen, matematiikan opettajaopiskelija
Tampereen yliopisto
henna.katainen@tuni.fi

LIITE C: TIETOSUOJAILMOITUS

Tietosuojailmoitus 3.2.2023

Pro gradu -tutkimus
EU:n yleinen tietosuoja-asetus (EU 2016/679) artiklat 12-14

1. Tutkimuksen nimi, luonne ja kesto
Tutkimuksen nimi: Pro gradu -tutkimus

☒Kertatutkimus

Tutkimuksen kestoaika: 1.6.2023 asti.
Henkilötietojen käsittelyaika: 1.6.2023 asti.

2. Rekisterinpitäjä

☒ Kyseessä on opiskelijatutkimus (rekisterinpitäjä ei työsuhteessa Tampereen korkeakoulusäätiöön), jolloin rekisterinpitäjä on opiskelija.

Nimi Henna Katainen
Sähköpostiosoite henna.katainen@tuni.fi

3. Tutkimusrekisterin tietosisältö
Rekisterissä käsitellään opetuskokeilun aikana nauhoitettuja äänitiedostoja ja oppilasryhmien tuottamia ratkaisuja tehtävään (Microsoft Word-tiedostot). Tutkimuksen yhteydessä kerätyt tutkimuslupalomakkeet säilytetään myös niin, ettei ulkopuoliset pääse niihin käsiksi.

4. Henkilötietojen tietolähteet
Tiedot kerätään matematiikan oppitunnilla opetuskokeilun aikana.

5. Henkilötietojen käsittelyn tarkoitus
Pro gradu -tutkielman tekeminen

6. Henkilötietojen käsittelyn oikeusperusta
Henkilötietojen käsittelyn oikeusperusta EU:n yleinen tietosuoja-asetus, artikla 6 kohta 1 sekä tietosuojalaki 4 §:

☒ Tutkittavan suostumus

7. Ar**kaluonteiset henkilötiedot** (erityisiin henkilötietoryhmiin kuuluvat tiedot ja rikostiedot)
☒ Tutkimuksessa ei käsitellä arkaluonteisia henkilötietoja
☐ Tutkimuksessa käsitellään seuraavia arkaluonteisia henkilötietoja:
- ☐ Rotu tai etninen alkuperä
- ☐ Poliittiset mielipiteet
- ☐ Uskonnollinen tai filosofinen vakaumus
- ☐ Ammattiliiton jäsenyys
- ☐ Geneettiset tiedot
- ☐ Biometristen tietojen käsittely henkilön yksiselitteistä tunnistamista varten
- ☐ Terveystiedot

☐ Luonnollisen henkilön seksuaalinen käyttäytyminen tai suuntautuminen

8. Rekisterin suojauksen periaatteet

Manuaalisen aineiston (esim. paperiaineisto) suojaaminen:
☒ Lukitussa tilassa
☐ Lukitussa kaapissa
☐ Muuten, miten:

Digitaalisen aineiston suojaaminen (esim. tietojärjestelmät ja laitteet):
☒ käyttäjätunnus
☒ salasana
☒ kaksivaiheinen käyttäjän tunnistus (MFA)
☐ pääsynhallinta verkko-osoitteiden avulla (IP-osoitteet)
☐ käytön rekisteröinti (lokitietojen kerääminen)
☐ kulunvalvonta
☐ muu, mikä:

Suorien tunnistetietojen käsittely:
☒ Suorat tunnistetiedot poistetaan analysointivaiheessa
☐ Aineisto on pseudonymisoitu
☐ Aineisto analysoidaan suorin tunnistetiedoin, koska (peruste suorien tunnistetietojen säilyttämiselle): Kirjoita tekstiä napsauttamalla tai napauttamalla tätä.

Tietojen suojaus tietojen siirroissa:
☒ tiedonsiirron salaus (kuvaile miten): Tieto siirretään ääninauhureista suoraan tutkijan tietokoneelle Tampereen yliopiston Office 365 -palveluun.
☐ tiedoston salaus (kuvaile miten): Kirjoita tekstiä napsauttamalla tai napauttamalla tätä.
☐ muu, mikä: Kirjoita tekstiä napsauttamalla tai napauttamalla tätä.

9. Henkilötietojen käsittely tutkimuksen päättymisen jälkeen

☒ Tutkimusrekisteri hävitetään
☐ Tutkimusrekisteri arkistoidaan anonymisoituna ilman tunnistetietoja
☐ Tutkimusrekisteri arkistoidaan tunnistetiedoin

Mihin aineisto arkistoidaan ja miten pitkäksi aikaa: Aineisto hävitetään tutkimuksen päättymisen jälkeen, viimeistään kesäkuussa 2023.

10. Rekisteröidyn oikeudet ja niiden mahdollinen rajoittaminen

Rekisteröidyllä on, ellei tietosuojalainsäädännöstä muuta johdu:

- Tietojen tarkastusoikeus (oikeus saada pääsy henkilötietoihin)
  - Rekisteröidyllä on oikeus tietää, käsitelläänkö hänen henkilötietojaan vai ei, ja mitä henkilötietoja hänestä on tallennettu.

- Oikeus tietojen oikaisemiseen
  - Rekisteröidyllä on oikeus vaatia, että häntä koskevat virheelliset, epätarkat tai puutteelliset henkilötiedot oikaistaan tai täydennetään ilman aiheetonta viivytystä. Lisäksi henkilöllä on oikeus vaatia, että tarpeettomat henkilötiedot poistetaan.

- Oikeus tietojen poistamiseen
  - Rekisteröidyllä on poikkeustapauksissa oikeus saada henkilötietonsa kokonaan poistettua rekisterinpitäjän rekistereistä (oikeus tulla unohdetuksi).

- Oikeus käsittelyn rajoittamiseen
  - Rekisteröidyllä on tietyissä tilanteissa oikeus pyytää henkilötietojensa käsittelyn rajoittamista siksi aikaa, kunnes hänen tietonsa on asianmukaisesti tarkistettu ja korjattu tai täydennetty.

- Vastustamisoikeus
  - Henkilöllä on tietyissä tilanteissa oikeus henkilökohtaiseen, erityiseen tilanteeseensa perustuen milloin tahansa vastustaa henkilötietojensa käsittelyä.

- Oikeus siirtää tiedot järjestelmästä toiseen
  - Rekisteröidyllä on tietyissä tilanteissa oikeus saada häntä koskevat henkilötiedot, jotka hän on toimittanut rekisterinpitäjälle, jäsennellyssä, yleisesti käytetyssä ja koneellisesti luettavassa muodossa, ja oikeus siirtää tiedot toiselle rekisterinpitäjälle.

- Oikeus tehdä valitus valvontaviranomaiselle
  - Rekisteröidyllä on oikeus tehdä valitus erityisesti vakinaisen asuin- tai työpaikkansa sijainnin mukaiselle valvontaviranomaiselle, jos hän katsoo, että henkilötietojen käsittelyssä rikotaan EU:n yleistä tietosuoja-asetusta (EU) 2016/679. Rekisteröidyllä on lisäksi oikeus käyttää hallinnollisia muutoksenhakukeinoja sekä muita oikeussuojakeinoja.

    Yhteystiedot:

    Tietosuojavaltuutetun toimisto
    Käyntiosoite: Lintulahdenkuja 4, 00530 Helsinki
    Postiosoite: PL 800, 00531 Helsinki
    Vaihde: 029 56 66700
    Faksi: 029 56 66735
    Sähköposti: tietosuoja@om.fi

Rekisteröidyn oikeuksien käyttämistä koskevissa pyynnöissä noudatetaan rekisterinpitäjän tietopyyntöprosessia.

LIITE D: SUOSTUMUSLOMAKE

Tampereen yliopisto

1 (1)

SUOSTUMUSLOMAKE

Tutkimus matematiikan tehtävien ratkaisemisen haasteista

Suostumus harjoitustutkimukseen osallistumiseksi

Minua on pyydetty osallistumaan yllä mainittuun harjoitustutkimukseen ja olen saanut kirjallista tietoa tutkimuksesta, tietosuojailmoituksen ja mahdollisuuden esittää siitä tutkijalla (-joille) kysymyksiä.
Ymmärrän, että tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista ja että minulla on oikeus kieltäytyä siitä sekä peruuttaa suostumus ja keskeyttää tutkimus väliaikaisesti syytä ilmoittamatta. Ymmärrän myös, että tiedot käsitellään luottamuksellisina.

Annan suostumukseni tutkimukseen. ❑

Annan suostumukseni henkilötietojen käsittelyyn tutkimuksessa. ❑

_____
Paikka ja päivämäärä

_____
Allekirjoitus

_____
Nimenselvennys