Tampereen yliopisto

Katariina Niemi

MUUTOKSET PITKÄN MATEMATIIKAN YLIOPPILASKIRJOITUSTEN TEHTÄVISSÄ

Ylioppilaskirjoitusten sähköistyminen ja uudet opetussuunnitelmat

Pro gradu -tutkielma
Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Huhtikuu 2023

TIIVISTELMÄ

Katariina Niemi: Muutokset pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtävissä
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2023

Tässä pro gradu -tutkielmassa on aiheena pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävät ja muutokset niissä vuosina 2014–2022. Tutkielman tavoitteena on selvittää, miten lukion opetussuunnitelman perusteiden (LOPS) muutos sekä kokeen sähköistyminen on vaikuttanut koetehtäviin. Molemmat muutokset ajoittuivat kevääseen 2019. Tutkimus toteutettiin teorialähtöisenä sisällönanalyysinä ja aineistona tutkimuksessa toimi pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävät keväiltä 2014–2022. Lisäksi aineistona oli tehtäväkohtaiset pistekeskiarvot ja tehtäviin tulleiden vastausten lukumäärä. Näiden osalta haettiin tutkimuslupaa Ylioppilastutkintolautakunnalta. Tutkimuksen teoreettisen viitekehyksen muodostivat uudistettu Bloomin taksonomia sekä lukion opetussuunnitelmien perusteiden 2003 ja 2015 mukaiset lukiokurssit.

Bloomin taksonomian tason *3. soveltaa* osuus on ollut yli puolet lähes kaikissa kokeissa ja keväällä 2019 sen osuus nousi vielä aiempaa korkeammalle. Kevään 2022 kokeessa pisteitä sai ensimmäisen kerran vain tason *1. muistaa* osaamisella, kun aiemmin taso *2. ymmärtää* oli ollut alin, jolla oli mahdollista saada pisteitä. Muiden Bloomin taksonomian tasojen osuudet vaihtelivat melko tasaisesti. A-, B1- ja B2-osiin jakautuneista kokeista havaittiin, että A-osat koostuivat pääosin tasojen 1–3 osaamisesta ja B1- ja B2-osissa tarvittiin myös tasojen 4–6 osaamista. Kevään 2019 jälkeen A-osan tehtävissä on tarvittu hieman vähemmän tason *2. ymmärtää* osaamista ja toisaalta myös tason *5. arvioida* osaamista tarvittiin keväällä 2022.

Kevään 2019 jälkeen koetehtävissä oli tasaisemmin kaikkien kurssien sisältöä. Kurssien painotukset vaihtelivat kokeissa satunnaisesti sekä ennen kevättä 2019 että sen jälkeen. Joillakin kursseilla vaihtelua painotuksissa oli enemmän ennen kevättä 2019 ja toisilla sen jälkeen. Syventävien kurssien *MAA11–MAA13* osuus kokeesta vaihteli enemmän ennen kevättä 2019 ja niiden osuus tasaantui sen jälkeen. Kokeiden A-osa oli aina mahdollista tehdä vain pakollisten kurssien osaamisella ja pääosin myös kokeiden B1- ja B2-osat. Koetehtävissä on myös ollut yhä enemmän usean eri kurssin asioita sisältäviä alakohtia.

Tehtävissä menestymistä tarkasteltiin tehtäväkohtaisilla pistekeskiarvoilla. Koko kokeen tasolla pistekeskiarvojen osuus oli korkein keväiden 2014 ja 2015 kokeissa, jonka jälkeen keväinä 2016–2018 se laski matalammalle tasolle. Kevään 2019 jälkeen se laski vielä hieman matalammalle tasolle, mistä voidaan päätellä, että kokeen vaikeustaso on hieman noussut tarkasteluajan aikana. Parhaan pistekeskiarvon sai lähes kaikissa kokeissa sen ensimmäisestä tehtävästä.

Yksi keskeisimmistä havainnoista oli se, että kevään 2019 jälkeen usean eri kurssin sisältöjä testaavat tehtävät ovat hieman lisääntyneet. Sähköistymisen yhteydessä myös kokeen pisteytys muuttui 6 pisteen tehtävistä 12 pisteen tehtäviin, mikä mahdollisti tehtävän jakamisen yhä useampaan erilliseen alakohtaan. Tämä mahdollistaa esimerkiksi Bloomin alimpien tasojen testaamisen tai ensimmäisten kurssien sisällön kysymisen, kun tehtävän ei tarvitse olla niin laaja.

Avainsanat: Pitkä matematiikka, ylioppilaskirjoitukset, sähköistyminen, tehtävät, luokittelu, todistaminen

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO

Pitkän matematiikan ylioppilaskoe on kokenut isoja muutoksia viimeisen 10 vuoden sisällä. Ensimmäinen iso muutos tapahtui keväällä 2016, kun koe jaettiin A-, B1- ja B2 -osiin. Kokeen kokonaistehtävämäärä laski 15 tehtävästä 13 tehtävään, tehtävien valinnaisuus väheni, 9 pisteen arvoiset jokeritehtävät jäivät pois ja kaikista tehtävistä tuli samanarvoiset [24]. Toinen iso muutos tapahtui puolestaan keväällä 2019, kun matematiikan ylioppilaskoe muuttui sähköiseksi. Tuolloin myös tehtävien pisteytys meni uusiksi ja tehtävien maksimipistemäärä nousi kaikissa tehtävissä 12 pisteeseen [22]. Samoihin aikoihin lukion opetussuunnitelmien perusteet muuttuivat ja myös lukion kurssijako muuttui. Kaikkien näiden muutosten vuoksi on mielenkiintoista lähteä tutkimaan pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtäviä ja tarkastella sitä, miten ne ovat muuttuneet kaikkien muiden muutosten mukana.

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutustutaan siihen, miten pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävät ovat muuttuneet vuodesta 2014 vuoteen 2022. Tarkastelu on jaettu kolmeen eri näkökulmaan, jotta tehtävien muutoksia voidaan tarkastella monipuolisesti. Tutkimus toteutettiin luokittelemalla ylioppilaskokeiden tehtäviä ja tarkastelemalla tehtäväkohtaisia pistekeskiarvoja sekä tehtäviin tulleiden vastausten lukumääriä.

Ensimmäisenä näkökulmana on tehtävien muutosten tarkastelu Bloomin uudistetun taksonomian mukaan. Bloomin taksonomia on alun perin Benjamin Bloomin vuonna 1956 kehittämä luokittelutapa opetuksen tavoitteille [5]. Anderson ja Krathwohl julkaisivat tästä taksonomiasta uudistetun version vuonna 2001 ja siitä käytetään nimitystä uudistettu Bloomin taksonomia [1]. Tässä tutkielmassa toteutettu tehtävien luokittelu noudattaa tämän uudistetun Bloomin taksonomian mukaista jaottelua. Sekä alkuperäisestä että uudistetusta Bloomin taksonomiasta on kerrottu laajemmin luvussa 2.

Tehtävät luokitellaan myös lukiokurssien perusteella, jotta saadaan selville minkä kurssien taitoja ylioppilaskokeissa testataan. Lukion opetussuunnitelmien perusteet vaihtuivat kesken tarkastellun ajanjakson, joten on tarpeen esitellä sekä vanhemman että uudemman lukion opetussuunnitelmien perusteiden mukaiset lukiokurssit. Nämä on esitelty luvussa 3. Tässä luvussa on myös esitelty tarkemmin ylioppilaskokeen tarkastelujakson aikana kohtaamat muutokset.

Lukion kurssien muutoksia tarkastellessa havaittiin, että uudemman lukion opetussuunnitelmien perusteiden mukaisessa kurssissa *MAA11* todistamista painotettiin yhä enemmän. Todistaminen on siis tärkeä teema myös lukiossa. Luvussa 4 tutustutaan tarkemmin erilaisiin todistusmenetelmiin ja esitellään muutama esimerkki ylioppilaskokeissa olleista todistustehtävistä.

Tämä tutkimus toteutettiin teoreettisena sisällönanalyysinä. Tarkemmat tutkimuskysymykset, tutkimusmenetelmä ja tutkimuksen aineisto sekä sen hankinta on esitelty luvussa 5. Tutkimuksen tulokset ja havaintoja niistä on esitetty luvussa 6. Tulokset on esitetty erilaisten pylväsdiagrammien, kuvaajien ja taulukoiden avulla. Tuloksia on pyritty esittämään mahdollisimman paljon visuaalisesti, jotta niitä olisi helpompi lukea. Viimeisessä luvussa 7 on esitelty vastaukset tutkimuskysymyksiin. Lisäksi luvussa on pohdittu tutkimuksen luotettavuutta. Liitteessä A on esitetty tarkemmat kuvaajat tehtäväkohtaisista pistekeskiarvoista ja tehtäviin tulleiden vastausten lukumääristä.

2. BLOOMIN TAKSONOMIA

Bloomin taksonomia on Benjamin Bloomin johdolla kehitetty luokittelutapa osaamistasoille. Bloomin taksonomian tarkoituksena on antaa luokittelutapa opetuksen osaamistavoitteille ja näin konkretisoida osaamisen tasoja. Osaamistasoista on helpompaa keskustella, kun ne on nimetty ja määritelty selkeästi. Tämä helpottaa opettajia, sillä taksonomian avulla he pystyvät hahmottamaan paremmin oppilaiden osaamistasoja. Taksonomian avulla myös koetehtävien valinta on helpompaa, sillä on helpompi hahmottaa, minkälaista osaamista kukin tehtävä vaatii. [5] Bloomin taksonomiaa on hyödynnetty matematiikan opetuksessa sen julkaisusta vuodesta 1956 lähtien [21].

Bloomin taksonomiasta on tehty myös päivitetty versio, jota kutsutaan uudistetuksi Bloomin taksonomiaksi [1]. Käydään seuraavaksi läpi alkuperäinen Bloomin taksonomia ja päivityksen siihen tuomat muutokset ja täydennykset.

2.1 Alkuperäinen Bloomin taksonomia

Bloomin taksonomia koostuu kolmesta pääalueesta, joita ovat kognitiivinen eli ajattelun taso, affektiivinen eli tunteiden taso ja psykomotorinen taso. Kognitiiviseen tasoon kuuluvat muun muassa tiedon muistaminen ja tunnistaminen sekä erilaiset kyvyt ja taidot. Affektiiviseen eli tunteiden tasoon kuuluvat puolestaan esimerkiksi muutokset tunteissa ja asenteissa sekä arvostuksen kehittäminen. Psykomotorinen taso eli käsittelyn tai motoriikan taso jää pieneen rooliin toisella ja sitä ylemmillä kouluasteilla, joten sen tarkastelua ei ole pidetty niin tarpeellisena. [5] Tässä tutkielmassa toteutettu luokittelu sisältyy kognitiiviseen tasoon.

Taksonomian haluttiin olevan koulutuksellinen, looginen ja psykologinen luokittelujärjestelmä. Koulutuksellinen näkökulma huomioitiin tekemällä luokista sellaiset, että ne noudattavat opettajien tekemiä huomioita opetussuunnitelmien laatimisesta ja opetustapojen valitsemisesta. Loogisuus näkyy siinä, että jokainen käsite on määritelty hyvin ja että käsitteitä käytetään oikein ja säännönmukaisesti. Psykologinen näkökulma puolestaan varmistaa sen, että taksonomia on yhteensopiva useimpien psykologisten teorioiden kanssa. [5]

Bloomin taksonomian kognitiivisen alueen kuusi päätasoa ovat:

1. Tietäminen (Knowledge)
2. Ymmärtäminen (Comprehension)
3. Soveltaminen (Application)
4. Analysointi (Analysis)
5. Syntetisointi (Synthesis)
6. Arviointi (Evaluation).

Tasojen järjestys noudattaa pääosin yllä olevan listan mukaista järjestystä. Seuraavan tason tavoitteiden saavuttaminen perustuu aina edeltävän tavoitetason osaamiseen. [5] Esimerkiksi se, että osaa soveltaa, vaatii ensin pohjalle asian ymmärtämisen. Taksonomian tasot etenevät yksinkertaisesta kohti monimutkaista ja konkreettisesta kohti abstraktimpaa tasoa [13]. Kukin taso voidaan jakaa vielä tarkempiin osa-alueisiin, jotka on esitelty seuraavissa alaluvuissa.

2.1.1 Tietäminen

Taksonomian ensimmäinen taso on *tietäminen*. Tietäminen on määritelty asioiden tai eri kokoisten kokonaisuuksien muistamiseksi. Tietäminen voidaan jaotella kolmeen eri alaluokkaan. Nämä alaluokat ovat alakohtainen perustieto, menetelmätieto ja alan käsitteellinen tieto. [5]

Alakohtaiseen perustietoon kuuluu alan terminologian tietäminen eli esimerkiksi oman alan sanaston hallitseminen. Tähän alaluokkaan kuuluu myös tarkkojen yksityiskohtien muistaminen, kuten esimerkiksi kemiallisten aineiden ominaisuuksien muistaminen. [5] Matematiikassa tällainen tehtävä voisi olla esimerkiksi ympyrän geometriaan liittyvien kappaleen osien tunnistaminen kuvasta ja niiden nimeäminen.

Menetelmätiedolla tarkoitetaan tietämystä käsitteiden ja ilmiöiden opiskelutavoista, järjestämistavoista, arvostelutavoista ja kritisointitavoista. Siihen sisältyy yleisten käytäntöjen tunteminen, kuten pilkutussääntöjen hallitseminen. Myös trendien ja järjestysten tunteminen kuuluu tähän, ja esimerkki siitä on evoluutioteorian ymmärtäminen. Luokittelu ja kategorisointi sekä kriteerien ja metodologian tunteminen kuuluvat myös tähän alaluokkaan. [5]

Alan käsitteelliseen tietoon kuuluu alan teorioiden, rakenteiden ja yleistysten hallitseminen. Tämäkin alaluokka voidaan jakaa täsmällisempiin kategorioihin, joita ovat periaatteiden ja yleistysten tunteminen sekä teorioiden ja rakenteiden tunteminen. Kemian pääperiaatteiden tunteminen on esimerkki ensimmäisestä ja ymmärrys niiden yhteyksistä toisiinsa on esimerkki jälkimmäisestä kategoriasta. [5]

Tämän tason tehtävissä voi olla asioiden luokittelua, nimeämistä tai erilaisten huomioiden tekemistä [21]. Tehtävänannossa voidaan pyytää piirtämistä, kuvailua, etsimistä, kertomista tai tunnistamista [14]. Matematiikan tehtävässä voitaisiin pyytää esimerkiksi piirtämään toisen asteen funktion kuvaaja, jolloin opiskelijan täytyisi muistaa, minkä muotoinen toisen asteen funktion kuvaaja on ja miten se käyttäytyy.

2.1.2 Ymmärtäminen

Toisena tasona taksonomiassa on *ymmärtäminen*. Tällä tasolla yksilö käsittää, mitä häneltä kysytään, ja osaa hyödyntää käytössä olevaa materiaalia vastaamiseen. Ymmärtäminen voidaan jakaa kääntämiseen, tulkitsemiseen ja päättelyyn. [5]

Kääntäminen tarkoittaa, että hallitsee tiedon muuttamisen muodosta toiseen niin, että sen merkitys säilyy. Matematiikassa esimerkki tällaisesta on symbolin ja sen merkityksen yhteys. [5] Oppilas esimerkiksi ymmärtää, että laskutoimituksessa esiintyvä symboli π tarkoittaa lukua pii ja osaa myös käyttää sitä. Bloomin ym. mukaan kääntämistä on myös siirtyminen abstraktiotasolta toiselle eli esimerkiksi yksinkertaistavan esimerkin kertominen abstraktista aiheesta tai kääntämistä voi tapahtua myös kielestä toiseen [5]. Tällöin tehtävänä voi olla esimerkiksi lauseen kääntäminen suomesta ruotsiksi.

Tulkitseminen tarkoittaa tiedon uudelleenjärjestelyä tai uutta näkökulmaa aiheeseen. Esimerkki tulkinnasta on kyky tulkita erilaisia aineistotyyppejä. Tulkintaan kuuluu, että oppilas osaa tunnistaa ja ymmärtää aiheen ydinasiat sekä niihin vaikuttavat tekijät [5].

Päättely tarkoittaa, että oppilas ymmärtää aineiston erilaisia syy-seuraussuhteita kuten trendejä tai taipumuksia. Hän siis osaa esimerkiksi ennustaa tulevia trendejä. [5]

Tälle tasolle tyypillisiä tehtäviä (matematiikassa) ovat kääntäminen, yhteenvedon tekeminen, havainnollistaminen ja keskusteleminen [21]. Tehtävänannossa esiintyy usein verbejä kuten kuvaile, tee yhteenveto, selitä, vertaile, ennusta, käännä, tulkitse tai erottele [14]. Jotta matematiikan tehtävästä pystyy keskustelemaan, se vaatii yleensä tehtävän ymmärtämisen. Tämän vuoksi taito keskustella matematiikan tehtävästä osoittaa, että myös ymmärtää tehtävän.

2.1.3 Soveltaminen

Taksonomian kolmas taso on *soveltaminen*. Sen hallitseminen vaatii siis pohjalle sekä tietämisen että ymmärtämisen, koska ne ovat Bloomin taksonomiassa sitä ennen. [5] Tämä tuntuu luontevalta, sillä esimerkiksi matemaattisen tehtävän ratkaiseminen ilman, että osaa tulkita aineistoa tai muistaa teorioita, on luultavasti mahdotonta.

Soveltamista on teorioiden, periaatteiden tai yleistysten käyttäminen yksittäisten tehtävien ratkaisemisessa. Näissä tehtävissä oppilaan tulee itse osata valita sopivin teoria tai menetelmä ratkaistakseen tehtävän. Bloom ym. esittelevät myös vuokaaviomallin tämän tehtävätyypin ratkaisuprosessista, ja se on jaettu kuuteen askeleeseen. Yksi askel on esimerkiksi tehtävään soveltuvan ratkaisumenetelmän valitseminen. Muun muassa trigonometrian sääntöjen hyödyntäminen tosielämän ongelmiin on soveltamista. [5]

Tämän luokan tyypillisiä matematiikan tehtäviä ovat erilaiset tiedon käyttämistä ja soveltamista tai ongelmanratkaisumenetelmien käyttämistä vaativat tehtävät. Tehtävät voivat olla myös suunnittelua, kokeilua tai tiedon manipulointia. [21] Matematiikassa manipulointia on esimerkiksi jonkin yhtälön muokkaaminen toiseen muotoon, josta se on helpompi ratkaista. Lordin ja Baviskarin mukaan tehtävänannossa esiintyviä verbejä voivat olla muun muassa sovella, ratkaise, muodosta, havainnollista, laske tai näytä [14].

2.1.4 Analysointi

Bloomin taksonomian neljäs taso on *analysointi*. Analysoinnilla tarkoitetaan tiedon jakamista pienempiin kokonaisuuksiin tai osiin siten, että sen eri osat erottuvat toisistaan. Tällöin siitä voidaan löytää esimerkiksi asioiden välisiä riippuvuussuhteita tai tutkia, miten tieto on järjestetty materiaalissa. Analysointi voidaan jakaa perusosien analyysiin, suhteiden analyysiin ja organisaation periaatteiden analyysiin. [5]

Perusosien analyysissä pyritään tunnistamaan tekstin eri osia ja esimerkiksi tunnistamaan oletukset, joita ei ole mainittu erikseen [5]. Varsinkin matematiikassa tämä taito on oleellinen, sillä laskutehtäviin sisältyy usein oletuksia, joita ei erikseen mainita tehtävänannossa. Tällainen voisi olla esimerkiksi oletus siitä, että yhtälönratkaisussa ei voida jakaa nollalla. Sanallisissa tehtävissä täytyy myös usein osata poimia tehtävänannosta oleelliset tiedot, jotta tehtävän saa ratkaistua.

Suhteiden analyysissä tutkitaan materiaalin tekijöiden tai osien välistä kommunikointia. Esimerkiksi kyky havaita loogiset virheet tehtävästä tai arvio siitä, mikä on tehtävän kannalta tärkeä oletus, ovat suhteiden analysointia. [5] Näistä varsinkin ensimmäistä voi esiintyä matematiikan tehtävissä, jos tehtävässä on esitetty tehtävän ratkaisu välivaiheineen ja opiskelijan tulee havaita virhe päättelyketjusta. Toisaalta voi olla tehtävän kannalta oleellista tarkistaa jonkin funktion määrittelyjoukko, jotta se on voimassa halutulla alueella.

Organisaation periaatteiden analyysissä keskitytään siihen, miten kokonaisuus pysyy kasassa. Usein sitä yhdistää organisaatio, systemaattinen järjestys tai jokin muu rakenne. Rakenne voi olla selkeästi näkyvissä tai vain pääteltävissä ja se sisältää perustan, tarvittavan järjestyksen sekä toiminnot, jotka muodostavat kokonaisuuden. Kirjoittajan tieteenalan tai filosofian tunnistaminen hänen työstään on esimerkki organisaation periaatteiden analyysistä. [5]

Tämän tason tehtävä voi olla jonkin rakenteen tunnistaminen ja analysoiminen, ideoiden järjestäminen tai trendien tunnistaminen [21]. Tehtävänannossa voi esiintyä verbejä tarkastele, analysoi, muodosta, tutki, erottele, vertaile tai luokittele [14]. Matematiikassa tämän tason tehtävä voisi olla kahden eri yhtälönratkaisutavan vertailua. Tehtävässä opiskelija voisi vertailla esimerkiksi välivaiheiden määrää tai erotella ratkaisun eri vaiheet.

2.1.5 Syntetisointi

Viides taso on *syntetisointi*. Siinä pyritään muodostamaan itse uusi kokonaisuus saatavilla olevista elementeistä. Niitä järjestetään ja yhdistellään niin, että saadaan muodostettua uusi kuvio tai rakenne. Syntetisointi voidaan jakaa henkilökohtaisen tiedon tuottamiseen, suunnitelman tai ehdotetun toimintojoukon tuottamiseen ja abstraktien suhteiden joukon johtamiseen. Tällä tasolla opiskelijan on mahdollista käyttää myös luovuuttaan tehtävän sallimissa rajoissa. [5]

Henkilökohtaisen tiedon tuottaminen tarkoittaa, että opiskelija osaa kehittää viestintäänsä siten, että hän pystyy ilmaisemaan tunteensa, kokemuksensa ja ideansa muille. Tehtävänanto antaa tehtävälle kuitenkin tiettyjä vaatimuksia, jotka ohjaavat tiedon tuottamista. Tällaista on esimerkiksi kyky kertoa vaikuttavasti omista henkilökohtaisista kokemuksistaan. [5]

Suunnitelman tai ehdotetun toimintojoukon tuottaminen tarkoittaa siis tehtävänannon vaatimusten mukaisesti toteutettua suunnitelmaa. Vaatimuksena voi olla esimerkiksi tietynlaisen datan kerääminen, ja opiskelijan tulee suunnitella, miten hän saa sen kerättyä. Esimerkiksi se, että annetuista tiedoista osaa johtaa ratkaisutavan, jolla saadaan haluttu lopputulos, on suunnitelman luomista. [5] Tämän tyyppisiä tehtäviä on matematiikassa usein sanallisissa tehtävissä, joissa annetaan tietoja ja kerrotaan, mitä halutaan saada selville. Itse ratkaisuprosessi täytyy kuitenkin suunnitella itse.

Abstraktien suhteiden joukon johtaminen koostuu siitä, että opiskelija osaa käsitellä valmista dataa tai ilmiötä ja selittää tai luokitella sitä. Opiskelija osaa myös johtaa tavanomaisten perusoletusten tai symbolisten esitysten pohjalta uusia yhteyksiä asioiden välille tai jopa luoda uutta tietoa. Esimerkiksi kyky tehdä matemaattisia havaintoja ja yleistyksiä kuuluu tähän kategoriaan. [5]

Tämän tason tehtävissä voi hyödyntää aiemmin opittuja käsitteitä ja luoda niiden avulla uusia ideoita. Tehtävät voivat sisältää myös suunnittelua ja keksimistä, päättelyä, muokkaamista, ennustamista tai yhdistelyä. [21] Lordin ja Baviskarin mukaan tehtävänannossa esiintyviä verbejä ovat muun muassa luo, suunnittele, keksi, kehitä, ehdota, muodosta tai järjestä uudelleen [14].

2.1.6 Arviointi

Kuudes taso on *arviointi*. Tällä tasolla opiskelija siis arvioi, miten valitut ratkaisut, menetelmät, materiaalit tai ideat sopivat tehtävän tarkoitukseen. Opiskelijan täytyy hyödyntää erilaisia kriteerejä ja standardeja, jotta hän osaa arvioida tiedon vaikuttavuutta, tyydyttävyyttä tai paikkansapitävyyttä. Tiedon arviointi voi perustua opiskelijalle annettuihin kriteereihin tai opiskelija voi määritellä kriteerit itse. Arviointi voi myös perustua joko määrälliseen tai laadulliseen lähestymistapaan. Arviointi on Bloomin taksonomiassa ylimmällä tasolla, sillä osatakseen tehdä arvioita opiskelijan tulee hallita kaikki alemmat tasot. [5]

Opiskelija voi arvioida tietoa joko sen sisäisistä lähtökohdista tai perustuen ulkopuolisiin kriteereihin. Sisäisiä lähtökohtia tiedon arvioinnille ovat esimerkiksi sen looginen paikkansapitävyys tai johdonmukaisuus. Esimerkki tästä on se, että osaa havaita loogisesta päättelyketjusta virhepäätelmän. Ulkopuolisia arviointikriteerejä voivat olla esimerkiksi kyseiselle aineistolle ja tieteenalalle tyypilliset standardit, säännöt tai tekniikat. Opiskelijan täytyy siis osata sijoittaa arvioitava aineisto oikeaan kontekstiin, jotta hän tietää sille soveltuvat arviointikriteerit. Esimerkiksi kyky arvioida jonkin asian terveyshyötyjä kriittisesti perustuu ulkopuolisiin arviointikriteereihin. [5]

Tämän tason tehtävissä voi olla teorioiden ja tulosten arvioimista sekä ideoiden vertailua. Tehtävissä voi olla myös ratkaisemista, arvostelua, suosittelemista tai arvosanan antamista. [21] Lordin ja Baviskarin mukaan tehtävissä esiintyviä verbejä ovat arvioi, anna arvosana, suosittele, osoita oikeaksi, päätä, väittele tai tarkista [14]. Tämän tason tehtävä matematiikassa voisi siis olla esimerkiksi toisen opiskelijan tekemän tehtävän vertaisarviointi.

2.2 Uudistettu Bloomin taksonomia

Anderson ja Krathwohl [1] julkaisivat uudistetun Bloomin taksonomian vuonna 2001. Uudistettu versio tehtiin, jotta opettajat suhtautuisivat taksonomiaan hyödyllisenä työkaluna eikä vain historiallisena teoksena. Lisäksi alkuperäinen taksonomia kaipasi heidän mielestään päivitystä, sillä tieto oppimisesta ja opettamisesta on lisääntynyt alkuperäisen taksonomian julkaisun jälkeen. [1]

Oppimisen tavoitteet, joihin opetuksella pyritään, voidaan usein jakaa johonkin asiasisältöön sekä kuvaukseen siitä, mitä asiasisällöllä tehdään tai mitä sille on tehty. Asiasisältöä kuvataan usein substantiivilla, kun taas sen käsittelyä kuvaa parhaiten verbi. Alkuperäisessä taksonomiassa nämä molemmat näkökulmat sisältyivät samaan luokittelujärjestelmään eikä niitä tarkasteltu erikseen. Uudistetussa taksonomiassa nämä kaksi näkökulmaa erotettiin omiksi dimensioiksi eli ulottuvuuksiksi, jolloin oppimista voidaan tarkastella pelkästään joko tiedon tai ajattelun dimensiolla. Tiedon dimensio perustuu substantiiveihin eli se kuvaa sitä, minkä asiasisällön osaamista tehtävä vaatii. Ajattelun dimensio perustuu verbeihin eli se kuvaa sitä, mitä tiedolla tehdään tai mitä sille on tehty. [13] Dimensiot voidaan yhdistää taksonomiataulukon avulla, jolloin saadaan vieläkin tarkempi kuva oppimisen tavoitteista. Tähän palataan alaluvussa 2.2.3. Tarkastellaan seuraavaksi sekä ajattelun että tiedon dimensioita erikseen.

2.2.1 Ajattelun dimensio

Uudistetussa taksonomiassa ajattelun dimension tasot vastaavat suurelta osin alkuperäisen taksonomian kognitiivisen alueen mukaisia päätasoja. Uudistetun Bloomin taksonomian ajattelun dimension tasot ovat:

1. Muistaa (Remember)
2. Ymmärtää (Understand)
3. Soveltaa (Apply)
4. Analysoida (Analyze)
5. Arvioida (Evaluate)
6. Luoda (Create).

Uudistetussa taksonomiassa ajattelun dimension tasojen nimet muuttuivat substantiiveista verbeiksi eli esimerkiksi ensimmäisen tason nimi *tietäminen* muuttui muotoon *muistaa*. Toinen muutos tapahtui tasojen järjestyksessä, sillä uudistetussa taksonomiassa taso *luoda* on viimeisenä, kun taas alkuperäisessä taksonomiassa sitä vastaava taso *syntetisointi* oli viidentenä. Vastaavasti alkuperäisen taksonomian viimeinen taso *arviointi* on uudistetussa taksonomiassa viidentenä nimellä *arvioida*. Tasot *ymmärtäminen, soveltaminen* ja *analysointi* pysyivät samoilla paikoilla, mutta tasojen nimet ovat nyt *ymmärtää, soveltaa* ja *analysoida*.

Myös tasojen sisällöt on uudistetussa taksonomiassa jaoteltu uudestaan. Tarkastellaan seuraavaksi kunkin tason jaottelua tarkemmin. Nyt tasojen jaottelussa ei ole mukana asiasisällön osaamista, joten luokittelu keskittyy täysin siihen, mitä tiedolla tehdään tai mitä sille on tehty. Uudistetussa taksonomiassa kukin taso on siis jaettu kognitiivisiin prosesseihin, joita on nyt yhteensä 19 kappaletta [1, 13].

Ensimmäinen taso eli *muistaa* tarkoittaa olennaisten asioiden säilyttämistä pitkäkestoisessa muistissa. Se voidaan jakaa tunnistamiseen ja mieleen palauttamiseen. Tunnistamisella tarkoitetaan sitä, että osaa yhdistää pitkäkestoisessa muistissa olevan asian esitetyn materiaalin kanssa. Mieleen palauttaminen tarkoittaa olennaisen tiedon hakemista pitkäkestoisesta muistista. [1] Matematiikassa tunnistaminen voisi tarkoittaa sitä, että opiskelija osaa tunnistaa kuvaajasta esimerkiksi toisen asteen funktion kuvaajan. Mieleen palauttaminen puolestaan voisi olla esimerkiksi helpon kertolaskun tuloksen muistaminen ilman, että laskee sitä. Alkuperäisessä taksonomiassa taso *tietäminen* oli jaettu useisiin eri tasoihin sekä niiden alatasoihin [5]. Uudistetussa taksonomiassa tämä ei ole enää tarpeen, sillä tiedon dimensio keskittyy tiedon eri tasoihin. Palataan tiedon dimensioon tarkemmin alaluvussa 2.2.2.

Toinen taso eli *ymmärtää* tarkoittaa, että osaa suullisten, kirjallisten ja graafisten ohjeiden avulla muodostaa yhteyksiä asioiden välille. Taso jaetaan seitsemään alatasoon, jotka ovat tulkitseminen, esimerkin antaminen, luokitteleminen, yhteenvedon tekeminen, päätteleminen, vertaileminen ja selittäminen. Tulkitsemisella tarkoitetaan, että osaa vaihtaa esitystapaa esimerkiksi suullisesta numeeriseksi. Esimerkin antaminen tarkoittaa puolestaan havainnollistavan tai yksityiskohtaisen esimerkin antamista periaatteesta tai käsitteestä. Luokitteleminen on asioiden jakamista kategorioihin. Yhteenvedon tekemisellä tarkoitetaan keskeisen teeman tai ydinasioiden kertomista lyhyesti. Päättelemistä on loogisen johtopäätöksen tekeminen annetusta tiedosta ja vertaileminen on yhtäläisyyksien etsimistä kahden asian väliltä. Selittäminen tarkoittaa, että osaa muodostaa systeemille syy-seuraussuhteen. [1]

Kolmas taso eli *soveltaa* tarkoittaa, että osaa toteuttaa tai käyttää jotakin menettelytapaa annetussa tilanteessa. Se voidaan jakaa toteuttamiseen ja täytäntöönpanoon. Toteuttamisessa menettelytapaa käytetään tuttuun tehtävään, mutta täytäntöönpanossa tehtävä ei ole ennalta tuttu. Toteuttamista on esimerkiksi muistikaavan hyödyntäminen annettuun yhtälöön. [1] Täytäntöönpanoa on puolestaan sanallisessa matematiikan tehtävässä, johon täytyy käyttää jotain tiettyä menettelytapaa.

Neljäs taso eli *analysoida* tarkoittaa, että materiaali jaetaan osatekijöihin ja tutkitaan, miten ne liittyvät toisiinsa ja kokonaisuuden rakenteeseen tai tarkoitukseen. Se voidaan jakaa erottelemiseen, järjestämiseen ja dekonstruointiin. Erotteleminen tarkoittaa, että materiaalista erotellaan olennainen ja epäolennainen sisältö tai tärkeä ja merkityksetön sisältö. Esimerkiksi sanallisessa matematiikan tehtävässä voi olla annettuna myös tarpeettomia lukuja, jolloin täytyy osata erottaa olennaiset luvut turhista. Järjestelemisessä määritellään, miten osat sopivat tai toimivat rakenteessa. Dekonstruointi tarkoittaa materiaalin taustalla olevien näkökulmien, arvojen tai tarkoitusten määrittämistä. [1]

Viides taso eli *arvioida* tarkoittaa arvion tekemistä kriteereihin ja standardeihin perustuen. Se voidaan jakaa tarkastamiseen ja kritisointiin. Tarkastaminen tarkoittaa, että materiaalista etsitään epäjohdonmukaisuuksia tai virheitä, tarkastellaan kokonaisuuden johdonmukaisuutta tai tutkitaan toteutetun prosessin vaikuttavuutta. Kritisoinnissa materiaalia verrataan ulkoisiin kriteereihin ja muun muassa etsitään epäjohdonmukaisuuksia materiaalin ja ulkoisten kriteerien väliltä sekä tutkitaan, onko materiaali johdonmukainen myös ulkoisten kriteerien mukaan. Kritisoinnissa voidaan myös arvioida sitä, onko käytetty ratkaisuprosessi soveltuva ongelman ratkaisuun. [1] Matematiikassa tarkistamista on esimerkiksi laskutoimituksen välivaiheiden loogisen paikkansapitävyyden tarkistaminen. Ulkoisia kriteerejä ei huomioida, joten tehtävässä on voitu laskea esimerkiksi väärää asiaa, mutta itse laskutoimitus on oikein. Kritisointia sisältävä tehtävä olisi esimerkiksi sellainen, jossa tulee arvioida valittua yhtälönratkaisumenetelmää, jos tehtävässä on useampi vaihtoehtoinen tapa ratkaista se.

Kuudes taso eli *luoda* tarkoittaa uuden kokonaisuuden muodostamista annetuista osista. Osat voidaan myös järjestää uudelleen uudeksi kuvioksi tai rakenteeksi. Taso voidaan jakaa kehittämiseen, suunnittelemiseen ja tuottamiseen. Kehittämisessä keksitään annettujen kriteerien nojalta vaihtoehtoisia väitteitä. Suunnittelemisessa suunnitellaan prosessi jonkin tehtävän suorittamiseksi. Tuottamisessa keksitään uusi tuote. [1] Matematiikassa tarvitaan usein suunnittelemista, kun ratkaistaan sanallista tehtävää ja mietitään, miten saadaan ratkaistua annetuista tiedoista haluttu tieto.

Myös uudistetussa taksonomiassa ajattelun dimension tasot ovat hierarkkisessa järjestyksessä siten, että tason *muistaa* kognitiiviset prosessit ovat yksinkertaisimpia ja tason *luoda* kognitiiviset prosessit ovat monimutkaisimpia. Uudistetussa taksonomiassa hierarkian noudattaminen ei ole kuitenkaan niin tarkkaa ja tasot voivat myös leikata toisiaan. Jonkin alemman tason kognitiivinen prosessi voi olla esimerkiksi hierarkiassa korkeammalla olevan tason kognitiivista prosessia monimutkaisempi. [13]

2.2.2 Tiedon dimensio

Alkuperäisessä taksonomiassa tiedon eri tasot sisältyivät tason *tietäminen* eri alatasoille. Uudistetussa taksonomiassa tiedon dimension tasot noudattavat pitkälti samaa jaottelua, mutta tasojen nimiä on päivitetty ja alatasoja on yhdistetty. [1] Neljäs taso, *metakognitiivinen tieto*, on uusi taso, jota ei tunnistettu vielä alkuperäisen taksonomian teon aikana [13].

Uudistetun taksonomian tiedon dimensio sisältää neljä eri tasoa, jotka ovat:

A. Perustieto (Factual Knowledge)

B. Käsitteellinen tieto (Conceptual Knowledge)

C. Prosessitieto (Procedural Knowledge)

D. Metakognitiivinen tieto (Metacognitive Knowledge).

Myös nämä tasot etenevät perustiedosta kohti metakognitiivista tietoa eli tiedon taso syvenee konkreettisesta kohti abstraktimpaa tietoa. Käydään seuraavaksi läpi kunkin tason tiedon määritelmä ja sen alakategoriat.

Perustieto tarkoittaa tiedon peruselementtejä, jotka opiskelijan tulee tietää ratkaistakseen ongelmia tai tutustuakseen johonkin tieteenalaan. Perustieto voidaan jakaa terminologian tietämiseen ja tiettyjen yksityiskohtien ja elementtien tuntemiseen. [1] Perustieto vastaa melko pitkälti alkuperäisen taksonomian tiedon tason alaluokkaa *alakohtainen perustieto*.

Käsitteellinen tieto tarkoittaa peruselementtien välisiä keskinäisiä suhteita laajemmassa rakenteessa, joka mahdollistaa niiden toimimisen yhdessä. Käsitteellinen tieto voidaan jakaa luokittelujen ja kategorioiden tuntemiseen, periaatteiden ja yleistysten tuntemiseen sekä teorioiden, rakenteiden ja mallien tuntemiseen. [1] Käsitteellinen tieto vastaa lähinnä alkuperäisen taksonomian tiedon tason alaluokkaa *alan käsitteellinen tieto*, mutta mukana on myös osia alaluokasta *menetelmätieto*.

Prosessitieto tarkoittaa tietoa siitä, miten tehdä jotain tai tietoa tutkimusmenetelmistä. Prosessitietoon kuuluu myös kriteerit erilaisten tekniikoiden, algoritmien, menetelmien tai taitojen käyttämiseen. Prosessitieto voidaan jakaa alakohtaisten taitojen ja algoritmien tuntemiseen, alakohtaisten tekniikoiden ja menetelmien tuntemiseen sekä kriteereiden tuntemiseen siten, että osaa valita sopivan menettelytavan. [1] Prosessitiedossa on osittain samoja teemoja kuin alkuperäisen taksonomian tiedon tason alaluokassa *menetelmätieto*.

Metakognitiivinen tieto tarkoittaa kognition tuntemista yleisesti sekä tietoisuutta ja tuntemusta omasta kognitiostaan. Kognitiolla tarkoitetaan tapaa, jolla ihminen ajattelee eli miten hän käsittelee tietoja aivoissaan. Metakognitiivisen tiedon taso voidaan jakaa strategiseen tietoon, kognitiivisten tehtävien tuntemiseen sekä itsensä tuntemiseen. Strategista tietoa on muun muassa erilaisten muistisääntöjen osaaminen tai omien opiskelutavoitteiden asettaminen. Kognitiivisten tehtävien tunteminen voi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että tietää opetettavan asian jäävän paremmin mieleen avoimesta tehtävästä kuin monivalintatehtävästä. Vastaavasti yhteenvedon tekeminen auttaa ymmärtämään asiaa syvemmin, sillä se vaatii aivoilta enemmän työtä. Itsensä tuntemista on se, että tunnistaa, mitä osaa ja mitä taas ei osaa. Itsensä tuntemista on myös se, että osaa arvioida, minkälaisiin tehtäviin oma osaaminen riittää. [1] Kuten luvun alussa todettiin, tätä tasoa ei ollut alkuperäisessä taksonomiassa ollenkaan, vaan sen tarve tunnistettiin vasta myöhemmin.

2.2.3 Taksonomiataulukko

Bloomin alkuperäisessä taksonomiassa oli mukana vain yksi dimensio eli ajattelun taso ja se eteni tietämisestä kohti arvioimista. Uudistetussa taksonomiassa on mukana myös toinen dimensio, tiedon dimensio. Toinen ulottuvuus mahdollistaa sen, että taksonomia voidaan esittää taulukkona, kuten taulukossa 2.1. Pystysarakkeissa esitetään tällöin ajattelun tasot 1–6 ja vaakariveillä tiedon tasot A–D. [1, s. 4–5]

Taulukko 2.1. *Taksonomiataulukko. Kirjaimet vastaavat tiedon dimension tasoja siten, että A on perustieto, B on käsitteellinen tieto, C on prosessitieto ja D on metakognitiivinen tieto.*

	1. Muistaa	2. Ymmärtää	3. Soveltaa	4. Analysoida	5. Arvioida	6. Luoda
A.	Esim. 1					
B.				Esim. 2		
C.						
D.						

Kun ajattelun ja tiedon dimensiot yhdistetään taulukoksi 2.1, dimensioiden eri tasojen leikkauksiin muodostuu soluja. Taulukon avulla mikä tahansa tavoite voidaan luokitella sijoittamalla tavoitteen verbi sopivaan pystysarakkeeseen ja vastaavasti tavoitteen substantiivi sopivalle vaakariville. [13] Esitellään tehtävien asettelusta taulukkoon kaksi esimerkkiä. Esimerkissä 1 on tehtävä, jossa on tehtävänantona “Luettele viisi ensimmäistä alkulukua”. Tämä tehtävä kuuluu tiedon dimension tasolle perustieto ja ajattelun dimension tasolle muistaa. Näin ollen tehtävän tavoite on sarakkeessa 1 ja rivillä A. Tätä solua merkitään yhdistelmällä A1 eli esimerkin 1 tehtävän tavoite on solussa A1. Esimerkkinä 2 on Airasian et al. esittelemä tehtävä, jossa täytyy erotella rationaaliluvut irrationaaliluvuista. Tehtävä kuuluu tiedon dimension tasolle käsitteellinen tieto ja ajattelun dimension tasolle analysoida. [1] Tehtävä sijoittuu soluun B4. Molemmat esimerkkitehtävät on merkitty taulukkoon 2.1.

Taksonomiataulukon käyttäminen tavoitteiden, toiminnan ja arvioinnin luokitteluun tarjoaa tiivistetyn, selkeän ja visuaalisen esityksen halutusta kokonaisuudesta [13]. Taulukko antaa tavoitteesta tarkan kuvauksen, mutta selkeyden vuoksi tässä tutkielmassa keskitytään luokittelemaan tehtäviä vain uudistetun taksonomian ajattelun dimension mukaisiin tasoihin. Tällöin Bloomin uudistetun taksonomian mukaisessa luokittelussa keskitytään tehtävien ratkaisutapoihin, eikä niinkään siihen, mitä tietoja tehtävissä kysytään. Tehtävien sisällöt luokitellaan luvussa 3 esiteltyjen kurssijakojen mukaan.

3. MATEMATIIKKA LUKIOSSA JA YLIOPPILASKOE

Tässä luvussa tutustutaan lyhyesti lukion pitkään matematiikkaan ja sen kurssijakoon. Tarkastellaan myös lukion opetussuunnitelman vaihdoksen tuomia muutoksia pitkän matematiikan kursseihin. Lisäksi tutustutaan pitkän matematiikan ylioppilaskokeeseen ja sen muutoksiin.

3.1 Lukion pitkä matematiikka

Suomen lukioissa on ollut viimeisen 10 vuoden aikana käytössä lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 ([15], LOPS 2003), lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 ([16] , LOPS 2015) ja lukion opetussuunnitelman perusteet 2019 ([17], LOPS 2019). LOPS 2003 on ollut käytössä 1.8.2005 lähtien ja se poistui käytöstä 1.8.2016, kun LOPS 2015 otettiin käyttöön. LOPS 2015 oli voimassa 1.8.2021 asti, jolloin otettiin käyttöön LOPS 2019. LOPS 2019 on otettu käyttöön syksyllä 2021 aloittaneille lukiolaisille, joten tutkielman kirjoitushetkellä he eivät ole vielä ehtineet osallistua ylioppilaskokeisiin. Tämän vuoksi tutkielman kannalta kiinnostavia ovat LOPS 2003 ja LOPS 2015.

Lukion matematiikka on jaettu pitkään ja lyhyeen oppimäärään. Tutkielmassa tarkastellaan vain pitkän matematiikan ylioppilaskokeita, joten keskitytään vain pitkän matematiikan sisältöihin. Taulukossa 3.1 on esitetty LOPS 2003:n mukaiset ja taulukossa 3.2 LOPS 2015:n mukaiset pitkän matematiikan lukiokurssit. Lukion pitkän matematiikan kurssit koostuvat pakollisista, valtakunnallisista syventävistä ja koulukohtaisista soveltavista kursseista. Ylioppilaskoe perustuu vain valtakunnallisiin pakollisiin ja syventäviin kursseihin, jotka on määritelty myös LOPS:ssa [25]. Kunkin kurssin vaativuustaso (pakollinen/syventävä) on ilmoitettu taulukoissa 3.1 ja 3.2 kurssin tasona.

Yksi isoimmista muutoksista lukion opetussuunnitelmien perusteissa on ensimmäisen kurssin muutos pitkän matematiikan kurssista *MAA1 Funktiot ja yhtälöt* (LOPS 2003) kaikille yhteiseksi pakolliseksi matematiikan kurssiksi *MAY1 Luvut ja lukujonot* (LOPS 2015). Nyt lukion ensimmäisellä matematiikan kurssilla ovat kaikki lukion aloittavat opiskelijat, ja jako pitkään ja lyhyeen matematiikkaan tapahtuu vasta toisella matematiikan kurssilla. *MAY1*-kurssin tavoitteena on muun muassa kerrata lukualueet ja peruslaskutoimitukset sekä ymmärtää lukujonon käsite [16]. LOPS 2003:ssa lukujonot mainitaan ensimmäisen kerran vasta kurssilla *MAA9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot* [15].

Taulukko 3.1. *Pitkän matematiikan lukiokurssit LOPS 2003 [15].*

Kurssi	Taso
MAA1 Funktiot ja yhtälöt	Pakollinen
MAA2 Polynomifunktiot	Pakollinen
MAA3 Geometria	Pakollinen
MAA4 Analyyttinen geometria	Pakollinen
MAA5 Vektorit	Pakollinen
MAA6 Todennäköisyys ja tilastot	Pakollinen
MAA7 Derivaatta	Pakollinen
MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot	Pakollinen
MAA9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot	Pakollinen
MAA10 Integraalilaskenta	Pakollinen
MAA11 Lukuteoria ja logiikka	Syventävä
MAA12 Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä	Syventävä
MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi	Syventävä

Taulukko 3.2. *Pitkän matematiikan lukiokurssit LOPS 2015 [16].*

Kurssi	Taso
MAY1 Luvut ja lukujonot	Pakollinen
MAA2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt	Pakollinen
MAA3 Geometria	Pakollinen
MAA4 Vektorit	Pakollinen
MAA5 Analyyttinen geometria	Pakollinen
MAA6 Derivaatta	Pakollinen
MAA7 Trigonometriset funktiot	Pakollinen
MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot	Pakollinen
MAA9 Integraalilaskenta	Pakollinen
MAA10 Todennäköisyys ja tilastot	Pakollinen
MAA11 Lukuteoria ja todistaminen	Syventävä
MAA12 Algoritmit matematiikassa	Syventävä
MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi	Syventävä

Toinen muutos on tapahtunut kurssien nimissä. Kurssin *MAA11* nimi on muuttunut muodosta *Lukuteoria ja logiikka* (LOPS 2003) muotoon *Lukuteoria ja todistaminen* (LOPS 2015). Molemmissa lukion opetussuunnitelmien perusteissa tavoitteena on tutustua todistusperiaatteisiin sekä harjoitella todistamista. Sekä LOPS 2003:n että LOPS 2015:n keskeisissä sisällöissä on mainittu “suora, käänteinen ja ristiriitatodistus”, minkä lisäksi LOPS 2015:ssa on mainittuna induktiotodistus ja geometrinen todistaminen [15, s. 123–124, 16,

s. 135]. Opetukseen sisältyvät todistustavat on määritelty tarkemmin LOPS 2015:ssa ja tämä korostuu myös kurssin nimen muutoksessa.

Myös muiden kurssien nimet ja sisällöt sekä kurssien keskinäinen järjestys on muuttunut jonkin verran. Kurssien tarkemmat sisällöt ja kuvaukset löytyvät lukion opetussuunnitelmien perusteista [15, 16].

Kolmas selkeä muutos on tapahtunut teknisten apuvälineiden käytössä. LOPS 2003:ssa yhtenä matematiikan opetuksen tavoitteena mainitaan tarkoituksenmukaisten teknisten apuvälineiden käyttäminen. Tämän lisäksi kurssin *MAA12 Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä* tavoitteena on, että "opiskelija harjaantuu käyttämään nykyaikaisia matemaattisia välineitä" [16, s. 135]. LOPS 2015:ssa mainitaan heti alussa, että "opiskelija harjaannutetaan käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen ja tutkimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä" [16, s. 129]. Tämän lisäksi LOPS 2015:ssa on listattu esimerkkejä hyödynnettävistä ohjelmistoista. Jokaisen kurssin tavoitteisiin on myös täsmennetty se, mihin teknisiä apuvälineitä tulisi osata käyttää.

3.2 Ylioppilaskoe

Pitkän matematiikan ylioppilaskoetta on uudistettu vuosien saatossa jonkin verran. Käydään seuraavaksi läpi tutkielman ja tehtävien analysoinnin kannalta oleelliset muutokset.

Ennen vuotta 2016 pidetyissä kokeissa oli 15 tehtävää, joista sai vapaasti valita ja tehdä 10 tehtävää. Tehtävät pisteytettiin asteikolla 0–6 pistettä. Koe sisälsi myös jokeritehtäviä, joista oli mahdollisuus saada 9 pistettä. [23] Opiskelijoilla oli laskin käytettävissään koko kokeen ajan. Vuodesta 2012 eteenpäin opiskelijoilla oli kokeessa käytössä symbolinen laskin [20].

Koetta uudistettiin keväällä 2016, jolloin koe jaettiin A- ja B-osiin. A-osassa oli neljä tehtävää, joista kaikkiin tuli vastata. Opiskelijoilla oli käytössään paperinen taulukkokirja, mutta ei laskinta. B-osa jakaantui B1- ja B2-osiin. B1-osa sisälsi viisi tehtävää, joista kolmeen tuli vastata. B2-osa sisälsi neljä tehtävää, joista myös kolmeen tuli vastata. B1- ja B2-osissa opiskelijoilla oli käytössään sekä taulukkokirja että laskin. Opiskelijat saivat laskimen käyttöönsä palautettuaan A-osan vastaukset kokeen valvojalle. A-osan tehtävissä vastattiin suoraan kysymyspaperiin ja B-osan tehtävissä erilliselle vastauspaperille. Jokaisesta tehtävästä oli mahdollisuus saada 0–6 pistettä eli kokeen maksimipistemäärä oli 60 pistettä. [24]

Keväällä 2019 tapahtui seuraava uudistus, jossa koe muuttui sähköiseksi. Kokeen tehtävien määrä pysyi samana kuin paperisessa kokeessa ja kokeessa oli edelleen A- ja B-osat. A-osassa opiskelijoilla oli käytössään vain peruslaskinohjelmisto. Opiskelija sai kaikki kokeessa käytettävät ohjelmistot käyttöönsä, kun oli palauttanut kokeen A-osan. [11] Tarkempi listaus kokeessa käytössä olleista ohjelmista löytyy Matematiikan digitaalisen kokeen määräyksistä. Sähköistymisen myötä tehtäviin oli mahdollista ottaa mukaan aineistoja erillisinä tiedostoina. Jos aineisto on esimerkiksi taulukkomuodossa, kokeessa on käytettävissä taulukkolaskentaohjelmisto, jolla sitä on mahdollista käsitellä. Kokeen pisteytys muuttui siten, että jokaisesta tehtävästä sai 0–12 pistettä ja kokeen maksimipistemäärä nousi täten 120 pisteeseen. [22]

4. TODISTAMINEN

Kuten luvussa 3 huomattiin, todistaminen on nykyään merkittävä osa myös lukion pitkää matematiikkaa. Esimerkiksi kurssin *MAA11* nimi muuttui LOPS:n vaihtuessa *Lukuteoriasta ja logiikasta Lukuteoriaan ja todistamiseen*. Mitä todistaminen siis on?

Todistamista voidaan ajatella keinona, jolla voidaan perustella matemaattista tietoa [10]. Todistus koostuu yhdestä väitteestä eli aksioomasta ja päättyy toiseen väitteeseen eli lauseeseen [18]. Garnierin ja Taylorin mukaan todistus voi olla jatkumo erilaisia loogisesti eteneviä vaiheita, jotka koostuvat lähinnä symbolisista merkinnöistä. Viimeisessä vaiheessa väite osoitetaan todeksi. Tämän määritelmän mukaan todistus on siis ehdoton ja tiukka testi matemaattiselle totuudelle. Toisaalta todistaminen voidaan nähdä myös tapana selittää tai esittää ideoita. Todistuksen avulla matemaatikko voi esittää kollegalleen perustelut ja osoittaa näin saamansa tuloksen päteväksi. [7] Matemaatikoiden mukaan todistuksen tarkoitus on vakuuttaa heille, että väite on tosi [10].

Todistus voi olla hyvin muodollinen, jolloin se koostuu lähinnä loogisista argumenteista. Todistus voi olla myös vähemmän muodollinen, jolloin se voi sisältää muun muassa kuvaajia, sanoja ja symboleita. Tällöin todistus on usein helpommin ymmärrettävissä. [7]

Hemmi esittelee väitöksessään [10] kaksi eri lähestymistapaa todistukselle. Ne ovat *vakuuttavuus* (conviction) ja *selitys* (explanation). Vakuuttavuus tarkoittaa, että jonkin väitteen uskotaan olevan tosi matematiikassa. Selitys puolestaan kertoo, miksi jokin väite on tosi matematiikassa. Vakuuttua voi esimerkiksi deduktiivisesta todistuksesta tai esimerkistä. Selityksen voi saada puolestaan esimerkiksi kokeellisesta väitteestä tai muodollisesta esityksestä. Opiskelijat ovat usein vakuuttuneita esimerkiksi opettajan esittämän väitteen totuudesta eivätkä tämän vuoksi koe tarvetta sen todistamiselle. [10]

Jotta todistamista ymmärtää paremmin, täytyy tuntea sen takana olevaa logiikkaa. Ensimmäisessä alaluvussa käydään läpi yleisimmät logiikan termit ja joitain todistustapojen kannalta oleellisia tuloksia. Toisessa alaluvussa esitellään erilaisia todistustapoja ja kolmannessa alaluvussa esimerkkejä niiden käytöstä.

4.1 Logiikka

Tämä alaluku perustuu pääosin lähteeseen [3]. Muut luvussa käytetyt lähteet on merkitty erikseen.

Määritelmä 4.1. *Propositio* on lause, joka on joko tosi tai epätosi. Propositio ei voi olla molempia samanaikaisesti. Logiikassa propositiota merkitään usein kirjaimilla p, q, r tai s.

Propositio voi olla matemaattinen, kuten esimerkissä 4.1. Propositio voi olla myös esimerkiksi lause: "Tampere on Suomen pääkaupunki". Kyseinen lause on siis propositio, koska sen tiedetään olevan epätosi ja täten sillä on totuusarvo eli se on aina joko tosi tai epätosi.

Esimerkki 4.1. Olkoon propositio $p : 1 + 1 = 2$ ja olkoon propositio $q : 1 + 1 = 3$. Propositio p on siis tosi ja propositio q on epätosi.

Määritelmä 4.2. *Negaatio* muuttaa väitteen merkityksen ja totuusarvon päinvastaiseksi. Negaatiota merkitään symbolilla $\neg$.

Jos propositio on tosi, sen negaatio on epätosi. Vastaavasti jos propositio on epätosi, sen negaatio on tosi. Jos propositio on "Tampere on Suomen pääkaupunki", sen negaatio on "Tampere ei ole Suomen pääkaupunki". Negaatio voidaan merkitä eri tavoin eri lähteissä. Proposition p negaatiota voidaan merkitä myös muiden symboleiden avulla, esimerkiksi $\sim p$ [3], $\bar{p}$ [7] tai se voidaan kirjoittaa sanallisesti ei-p [2].

Esimerkki 4.2. Olkoon propositio $p : 1 + 1 = 2$, joka on tosi. Tällöin sen negaatio on $\neg p$: $1 + 1 \neq 2$, joka on siis epätosi.

Propositioita voidaan myös yhdistää keskenään, jolloin saadaan väitteitä. Propositiot voidaan yhdistää erilaisilla loogisilla konnektiiveilla. Näitä ovat *ja*, *tai*, *jos... niin* ja *jos ja vain jos*. Määritellään nämä seuraavaksi.

Määritelmä 4.3. *Konjunktiossa* kaksi propositiota yhdistetään sanalla *ja*. Sitä merkitään symbolilla $\wedge$. Konjunktio on tosi, kun sen molemmat propositiot ovat tosia. Konjunktio on epätosi, jos toinen tai molemmat propositiot ovat epätosia.

Propositioiden p ja q konjunktio on $p \wedge q$, joka luetaan: p ja q.

Esimerkki 4.3. Olkoon propositio p : 3 on alkuluku ja olkoon propositio $q : 1 + 1 = 2$. Nyt konjunktio $p \wedge q$ on tosi, koska propositio p on tosi ja propositio q on tosi. Konjunktio $\neg p \wedge q$ taas on epätosi, koska propositio $\neg p$ on epätosi.

Määritelmä 4.4. *Disjunktiossa* kaksi propositiota yhdistetään sanalla *tai*, joka on matematiikassa inklusiivinen eli se sisältää joko toisen tai molemmat. Sitä merkitään symbolilla $\vee$. Disjunktio on tosi, kun toinen tai molemmat propositiot ovat tosia. Disjunktio on epätosi, kun molemmat propositiot ovat epätosia.

Propositioiden p ja q disjunktio on $p \vee q$, joka luetaan: p tai q tai molemmat.

Esimerkki 4.4. Olkoon propositio p : 3 on alkuluku ja olkoon propositio $q : 1 + 1 = 2$. Nyt disjunktio $p \vee q$ on tosi, sillä propositio p on tosi ja propositio q on tosi. Mutta myös disjunktiot $\neg p \vee q$ ja $p \vee \neg q$ ovat tosia, sillä disjunktiossa riittää, että toinen propositioista on tosi. Ainoastaan disjunktio $\neg p \vee \neg q$ on epätosi, koska molemmat propositiot ovat tällöin epätosia.

Määritelmä 4.5. *Implikaatiossa* yhdestä propositiosta seuraa toinen propositio. Implikaatiota merkitään implikaationuolella $\rightarrow$. Implikaatio on tosi aina, kun sen ensimmäinen propositio eli etujäsen on epätosi. Lisäksi se on tosi, kun etujäsen on tosi ja toinen propositio eli takajäsen on tosi. Implikaatio on epätosi vain silloin, kun etujäsen on tosi ja takajäsen epätosi.

Kun propositiosta p seuraa propositio q, niin se merkitään Määritelmän 4.5 mukaan $p \rightarrow q$ ja luetaan: jos p, niin q. Implikaatiota kutsutaan myös ehdolliseksi väitteeksi.

Määritelmä 4.6. *Ekvivalenssissa* kaksi propositiota ovat yhtäpitävät. Ekvivalenssia merkitään ekvivalenssinuolella $\leftrightarrow$. Ekvivalenssi on tosi, kun molemmilla propositioilla on sama totuusarvo. Jos propositioiden totuusarvot ovat eri, ekvivalenssi on epätosi.

Propositioiden p ja q välinen ekvivalenssi on $p \leftrightarrow q$, joka luetaan: p jos ja vain jos q. Jos ja vain jos lyhennetään tekstissä usein muotoon joss. Ekvivalenssi $p \leftrightarrow q$ sisältää väitteet $p \rightarrow q$ ja $q \rightarrow p$. Jotta ekvivalenssi on voimassa, täytyy molempien implikaatioiden olla tosia eli konjunktio $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ on tosi.

Loogisten väitteiden tarkastelussa hyödynnetään totuustauluja, joissa propositioiden ja väitteiden totuusarvoja merkitään kirjaimilla T (tosi/true) ja F (epätosi/false).

Määritelmä 4.7. *Tautologia* on väite, joka on aina tosi.

Määritelmä 4.8. [12, s. 7] *Ristiriita (contradiction)* on väite, joka on aina epätosi.

Totuustaulussa tautologia tarkoittaa, että kaikilla propositioiden totuusarvoilla väitteen totuusarvo on kaikissa tilanteissa tosi. Tämä tarkoittaa, että väite on tosi kaikissa mahdollisissa tilanteissa. Totuustaulussa ristiriita puolestaan tarkoittaa tilannetta, jossa väite on epätosi kaikilla propositioiden totuusarvoilla. Mikäli väite johtaa ristiriitaan, se on epätosi kaikissa tilanteissa.

Määritelmä 4.9. *Kontrapositio* saadaan, kun vaihdetaan ehdollisen väitteen $p \rightarrow q$ etujäsenen p ja takajäsenen q paikkoja ja otetaan niistä negaatiot. Kontrapositio on muotoa $\neg q \rightarrow \neg p$.

Lause 4.1. *Ehdollisen väitteen $p \rightarrow q$ ja sen kontraposition $\neg q \rightarrow \neg p$ totuusarvo on aina sama.*

Todistus. Muodostetaan totuustaulu sekä ehdollisesta väitteestä että sen kontrapositiosta. Totuustaulusta 4.1 nähdään, että ehdollinen väite $p \rightarrow q$ ja kontrapositio $\neg q \rightarrow \neg p$ ovat yhtäpitäviä, sillä niiden ekvivalenssi on tautologia. Täten ehdollisella väitteellä ja sen kontrapositiolla on aina sama totuusarvo.

Taulukko 4.1. *Ehdollisen väitteen ja kontraposition ekvivalenssi. [3, s. 129]*

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

□

Lause 4.2. *Proposition p ja sen negaation negaation $\neg(\neg p)$ totuusarvot ovat samat.*

Todistus. Totuustaulusta 4.2 nähdään, että väite $p \leftrightarrow (\neg(\neg p))$ on tautologia. Propositio p ja sen negaation negaatio $\neg(\neg p)$ ovat täten yhtäpitäviä.

Taulukko 4.2. *Negaation negaatio.*

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$p \leftrightarrow (\neg(\neg p))$
T	F	T	T
F	T	F	T

□

Lause 4.3. *Implikaation $p \rightarrow q$ negaatio $\neg(p \rightarrow q)$ on yhtäpitävä konjunktion $p \wedge \neg q$ kanssa.*

Todistus. Osoitetaan väitteet $\neg(p \rightarrow q)$ ja $p \wedge \neg q$ yhtäpitäviksi totuustaulun avulla.

Taulukko 4.3. *Implikaation negaatio [3, s. 132].*

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(\neg(p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	F	T

Totuustaulun 4.3 viimeisestä sarakkeesta nähdään, että väitteiden $\neg(p \rightarrow q)$ ja $p \wedge \neg q$ ekvivalenssi on tautologia eli väitteet ovat aina yhtäpitävät. □

Todistuksissa tarvitaan myös kvanttoreita. Määritellään ne seuraavaksi.

Määritelmä 4.10. [8, s. 100] *Kaikkikvanttori* $\forall$ tarkoittaa, että kaikilla muuttujilla x on jokin ominaisuus D.

Määritelmä 4.11. [8, s. 100] *Olemassaolokvanttori* $\exists$ tarkoittaa, että on olemassa muuttuja x, jolla on jokin ominaisuus D.

Määritelmien 4.10 ja 4.11 ominaisuus D voi olla esimerkiksi se, että muuttuja x kuuluu joukkoon U. Tällöin kaikkikvanttorille väite $\forall x \in U$ tarkoittaa, että kaikki muuttujat x kuuluvat joukkoon U. Vastaavasti olemassaolokvanttorille väite $\exists x \in U$ tarkoittaa, että on olemassa muuttuja x joka kuuluu joukkoon U.

Lause 4.4. *[7, s. 41] Väitteen $\forall x A(x)$ negaatio $\neg(\forall x A(x))$ on yhtäpitävä väitteen $\exists x \neg A(x)$ kanssa.*

Todistus. Katso esimerkiksi [7, s. 41–42]. □

4.2 Todistusmenetelmät

Tässä alaluvussa käydään läpi erilaisia tapoja tehdä todistus. Todistusmenetelmät perustuvat kirjoihin [3], [4], [6], [7], [8] ja [9].

Edellisessä alaluvussa propositioita merkittiin pienillä kirjaimilla p, q, r tai s. Tässä alaluvussa väitteitä merkitään isoilla kirjaimilla P, Q, R tai S. Nämä väitteet ovat kokonaisuuksia, jotka voivat sisältää eri konnektiiveilla yhdistettyjä propositioita. Esimerkiksi väite P voi sisältää disjunktion $p \vee q$.

Lause 4.5. *[3, 7] Ehdollisen väitteen suora todistus (direct proof of a conditional proposition). Olkoon väite $P \to Q$ ja olkoon sen etujäsen P tosi. Osoitetaan, että implikaatio $P \to Q$ on tosi. Tällöin takajäsen Q on tosi.*

Todistus. Etujäsen P on tosi ja suorittamalla sarja loogisia päättelyitä voidaan osoittaa, että implikaatio $P \to Q$ on tosi. Näistä ehdoista seuraa, että konjunktio $P \wedge (P \to Q)$ on tosi vain, kun implikaation $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$ takajäsen Q on tosi. Täten takajäsen Q on tosi, kun etujäsen P ja implikaatio $P \to Q$ ovat tosia. Väitteen totuustaulu on esitetty taulukossa 4.4.

Totuustaulun 4.4 viimeisestä sarakkeesta nähdään, että annettu väite $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$ on tosi, sillä se on tautologia ja täten tosi kaikissa tilanteissa. □

Ehdollisen väitteen suorassa todistuksessa käytettyä päättelytapaa kutsutaan *modus ponens* -päättelysäännöksi. Lauseessa 4.5 esiteltiin yksi todistustapa ehdolliselle väitteelle $P \to Q$. Ehdollinen väite voidaan todistaa myös kontrapositiolla Lauseen 4.6 mukaan. Tätä päättelytapaa kutsutaan *modus tollens* -päättelysäännöksi.

Taulukko 4.4. *Ehdollisen väitteen suoran todistuksen totuustaulu.*

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge (P \to Q)$	$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Lause 4.6. *[7, s. 64] Ehdollisen väitteen todistaminen kontrapositiolla (Proof of a Conditional Proposition using the Contrapositive). Olkoon väite $P \to Q$. Oletetaan, että takajäsenen negaatio $\neg Q$ on tosi. Väite on tosi, kun sen kontrapositio $\neg Q \to \neg P$ on tosi.*

Todistus. Määritelmän 4.9 mukaan implikaation $P \to Q$ kontrapositio on $\neg Q \to \neg P$ ja Lauseen 4.1 mukaan implikaatio ja sen kontrapositio ovat yhtäpitävät. Osoitetaan kontrapositio $\neg Q \to \neg P$ todeksi vastaavasti kuin suorassa todistuksessa.

Oletetaan, että väitteen $P \to Q$ takajäsenen negaatio $\neg Q$ on tosi. Osoitetaan loogisten päättelyiden avulla, että implikaatio (kontrapositio) $\neg Q \to \neg P$ on tosi. Näistä ehdoista seuraa, että konjunktio $(\neg Q \to \neg P) \wedge \neg Q$ on tosi vain, kuin implikaation $((\neg Q \to \neg P) \wedge \neg Q) \to \neg P$ takajäsen $\neg P$ on tosi. Kontraposition takajäsen $\neg P$ on täten tosi, kun negaatio $\neg Q$ ja kontrapositio $\neg Q \to \neg P$ ovat tosia. Väitteen totuustaulu on esitetty taulukossa 4.5. Koska implikaatio $P \to Q$ on yhtäpitävä kontraposition $\neg Q \to \neg P$ kanssa, implikaatio $P \to Q$ on tosi.

Taulukko 4.5. *Ehdollisen väitteen kontrapositiotodistuksen totuustaulu [3, s. 129].*

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \to \neg P$	$(\neg Q \to \neg P) \wedge \neg Q$	$((\neg Q \to \neg P) \wedge \neg Q) \to \neg P$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

Totuustaulun 4.5 viimeisestä sarakkeesta nähdään, että annettu väite $((\neg Q \to \neg P) \wedge \neg Q) \to \neg P$ on tosi, sillä se on tautologia ja täten tosi kaikissa tilanteissa. $\square$

Lause 4.7. *[4, s. 58–59] Todistaminen ristiriidan avulla (Proof by Contradiction) . Olkoon väite $P \to Q$. Oletetaan, että väitteen etujäsen P ja takajäsenen negaatio $\neg Q$ ovat tosia. Osoitetaan, että tästä seuraa ristiriita. Tällöin väite $P \to Q$ on tosi.*

Todistus. Todistetaan väite $P \to Q$. Lauseen 4.7 oletuksen mukaan implikaation etujäsen P ja takajäsenen negaatio $\neg Q$ ovat tosia, joten konjunktio $P \wedge \neg Q$ on tosi.

Osoitetaan loogisten päättelyiden avulla, että oletuksesta "$P \wedge \neg Q$ on tosi", seuraa ristiriita. Tämä tarkoittaa, että väite $P \wedge \neg Q$ ei voi olla tosi missään tilanteessa. Usein ristiriitaan johtava väite on konjunktio $B \wedge \neg B$, jossa B on jokin väite. Väitteillä B ja $\neg B$ on aina eri totuusarvot, joten niiden konjunktio on aina ristiriita.

Koska väite $P \wedge \neg Q$ johti ristiriitaan, se on aina epätosi. Lauseen 4.3 mukaan väitteet $P \wedge \neg Q$ ja $\neg(P \to Q)$ ovat yhtäpitävät eli väite $\neg(P \to Q)$ on myös epätosi. Väitteen $\neg(P \to Q)$ negaatio $\neg(\neg(P \to Q))$ on täten tosi. Lauseen 4.2 nojalla väite $\neg(\neg(P \to Q))$ ja väite $P \to Q$ ovat yhtäpitävät, joten väite $P \to Q$ on tosi.

□

Väite voidaan myös *todistaa vaiheittain (Proof by Cases)*. Tämä tarkoittaa, että todistus jaetaan pienempiin todistettaviin kokonaisuuksiin. Yksi esimerkki todistuksen vaiheisiin jakamista vaativasta tehtävästä on sellainen, jossa tarkastellaan esimerkiksi parillisia ja parittomia lukuja (katso esimerkiksi [12, s. 27]). Toinen esimerkki on Lauseessa 4.8 esitetty ekvivalenssiväitteen todistus.

Lause 4.8. *[7, s. 64] Ekvivalenssiväitteen todistaminen (Proof of a Biconditional Proposition). Olkoon väite $P \leftrightarrow Q$. Väite on tosi, kun implikaatiot $P \to Q$ ja $Q \to P$ ovat tosia.*

Todistus. Jaetaan todistus kahteen tapaukseen, sillä ekvivalenssi $P \leftrightarrow Q$ on yhtäpitävä väitteen $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ kanssa. Todistetaan ensin implikaatio $P \to Q$ aiemmin esitetyillä implikaatioiden todistustavoilla. Tämän jälkeen todistetaan myös implikaatio $Q \to P$ väitteelle sopivalla todistustavalla.

Konjunktio $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ on tosi, kun molemmat implikaatiot $P \to Q$ ja $Q \to P$ ovat tosia. Totuustaulusta 4.6 nähdään, että konjunktio $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ on tosi, kun väitteillä P ja Q on sama totuusarvo. Konjunktion totuusarvo on myös sama kuin ekvivalenssin $P \leftrightarrow Q$, sillä niiden ekvivalenssi on tautologia, kuten totuustaulun 4.6 viimeisestä sarakkeesta nähdään. Implikaatioiden $P \to Q$ ja $Q \to P$ osoittaminen todeksi todistaa täten ekvivalenssin $P \leftrightarrow Q$.

Taulukko 4.6. *Ekvivalenssiväitteen totuustaulu [3, s. 119].*

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$P \leftrightarrow Q$	$((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

□

Aina väitettä ei pysty todistamaan todeksi, mutta väite voidaan kumota osoittamalla se epätodeksi. Usein tehtävissä on oletuksena, että se toteutuu kaikilla tehtävässä olevan muuttujan arvoilla. Tällöin voidaan etsiä yksi ratkaisu, jolle se ei toteudu ja nojata siihen. Tämän voi tehdä *vastaesimerkin* avulla Lauseen 4.9 mukaisesti.

Lause 4.9. *[7, s. 67] Vastaesimerkillä todistaminen (Use of Counter-Examples). Väite, joka on voimassa kaikilla määrittelyjoukon alkioilla, voidaan osoittaa epätodeksi yhdellä vastaesimerkillä.*

Todistus. Väite $\forall x[A(x) \rightarrow B(x)]$ halutaan osoittaa epätodeksi. Väite tarkoittaa, että kaikilla muuttujilla x, joilla on ominaisuus A, on myös ominaisuus B. Väite voidaan myös yleistää kuvaamaan mitä tahansa ehdollista väitettä, joka toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla. Oletetaan nyt, että kaikilla muuttujilla x on ominaisuus A.

Väite on epätosi, jos väite $\forall x B(x)$ on epätosi. Osoitetaan, että väitteen $\forall x B(x)$ negaatio $\neg(\forall x B(x))$ on tosi. Lauseen 4.4 mukaan väite $\neg(\forall x B(x))$ on yhtäpitävä väitteen $\exists x \neg B(x)$ kanssa. Väite $\exists x \neg B(x)$ tarkoittaa, että on olemassa muuttuja x siten, että sillä ei ole ominaisuutta B. Tämä voidaan osoittaa etsimällä esimerkkitapaus x_0, jolla ei ole ominaisuutta B. Täten väite $\exists x \neg B(x)$ on osoitettu todeksi ja myös sen kanssa yhtäpitävä väite $\neg(\forall x B(x))$ on tosi. Väitteen $\neg(\forall x B(x))$ negaatio $\neg(\neg(\forall x B(x)))$ on siis epätosi ja Lauseen 4.2 nojalla se on yhtäpitävä väitteen $\forall x B(x)$ kanssa, joten väite $\forall x B(x)$ on epätosi. □

Induktiolla tai induktiivisella päättelyllä tarkoitetaan prosessia, jossa esimerkkitilanteista voidaan tehdä yleisesti päteviä päätelmiä [3, s. 3]. Se voidaan määritellä matemaattisesti Lauseiden 4.11 ja 4.12 mukaan. Matemaattisella induktiolla voidaan aukottomasti todistaa jokin sääntö tai malli myös äärettömille tapauksille ja sen voimassaolo seuraa positiivisten kokonaislukujen aksioomista [9, s. 1–2]. Jotta induktioperiaatteiden voidaan osoittaa olevan voimassa kaikille kokonaisluvuille, tarvitaan todistuksiin Lauseen 4.10 Hyvinjärjestysperiaatetta.

Lause 4.10. *[8, s. 184] Hyvinjärjestysperiaate (the Well-Ordering Principle). Jokaisella epätyhjällä positiivisten kokonaislukujen osajoukolla on pienin alkio.*

Todistus. Katso esimerkiksi [6, s. 9]. □

Lauseissa 4.11 ja 4.12 vaihetta a kutsutaan perusaskeleeksi ja vaihetta b induktioaskeleeksi. Perusaskeleessa osoitetaan, että väite on voimassa tilanteessa, jossa $n = k$. Usein luku $k = 0$ tai $k = 1$, mutta se voi olla myös jokin muu positiivinen kokonaisluku. Induktioaskel koostuu induktio-oletuksesta, induktioväitteestä sekä todistuksesta, jossa osoitetaan, että induktio-oletuksesta seuraa induktioväite.

Lause 4.11. *[8, s. 184] Induktioperiaate. Olkoon $S(n)$ väite, jossa luku n on positiivinen kokonaisluku. Jos*

a. $S(1)$ *on tosi, ja*

b. jollakin kokonaisluvuilla $n = m$ *induktio-oletuksesta* $S(m)$ *seuraa induktioväite* $S(m+1)$,

niin väite $S(n)$ *on tosi kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla* n.

Todistus. [8, s. 184] Todistetaan Lause 4.11 osoittamalla, että ei ole olemassa positiivista kokonaislukua, joka ei toteuta väitettä $S(n)$ annetuilla ehdoilla.

Olkoon $S(n)$ väite, joka toteuttaa ehdot a ja b. Olkoon

$$F = \{t \in \mathbb{Z}^+ \mid S(n) \text{ on epätosi}\}.$$

Osoitetaan, että $F = \emptyset$ Lauseen 4.7 mukaisen ristiriitatodistuksen avulla.

Oletetaan, että $F \neq \emptyset$. Määritelmän 4.10 mukaan joukolla F on olemassa pienin alkio s. Koska ehdon a mukaan $S(1)$ on tosi, niin $s \neq 1$ ja täten $s > 1$. Siis $s - 1 \in \mathbb{Z}^+$. Koska $s-1 \notin F$, niin $S(s-1)$ on tosi. Ehdosta b seuraa, että $S((s-1)+1) = S(s-1+1) = S(s)$ on tosi ja $s \in F$. Tästä seuraa ristiriita, sillä $s \in F$ ja $S(s)$ on tosi. Oletus $F \neq \emptyset$ johti ristiriitaan, joten $F = \emptyset$ on tosi. Ei siis ole olemassa positiivista kokonaislukua, jolle väite $S(n)$ on epätosi. □

Lause 4.12. *[9, s. 36] Toinen induktioperiaate. Olkoon $S(n)$ väite, jossa luku n on positiivinen kokonaisluku. Olkoon k jokin positiivinen kokonaisluku. Jos*

a. $S(k)$ *on tosi, ja*

b. jollakin kokonaisluvuilla $n = m \geq k$ *induktio-oletuksesta* $S(k) \wedge S(k+1) \wedge \cdots \wedge S(m)$ *seuraa induktioväite* $S(m+1)$,

niin väite $S(n)$ *on tosi kaikilla kokonaisluvuilla* $n \geq k$.

Todistus. [8, s. 37] Todistetaan Lause 4.12 osoittamalla, että ei ole olemassa kokonaislukua, joka ei toteuta väitettä $S(n)$ annetuilla ehdoilla.

Oletetaan, että väite $S(k)$ on tosi jollakin kokonaisluvulla k ja että implikaatio

$$[S(k) \wedge S(k+1) \wedge \cdots \wedge S(m)] \rightarrow S(m+1)$$

on voimassa kaikilla kokonaisluvuilla $m \geq k$. Olkoon joukko

$$B = \{n > m \mid S(n) \text{ on epätosi}\}.$$

Osoitetaan Lauseen 4.7 mukaisen ristiriitatodistuksen avulla, että $B = \emptyset$.

Oletetaan, että joukko $B \neq \emptyset$. Nyt joukko B on epätyhjä positiivisten kokonaislukujen joukko, joten sillä on Määritelmän 4.10 mukaan pienin alkio. Olkoon tämä pienin alkio l.

Joukon B määritelmän mukaan kaikilla kokonaisluvuilla $k \leq t < l$ väite $S(t)$ on tosi. Ehdon b tulee olla voimassa, joten siitä seuraa, että myös väite $S(l)$ on tosi. Tästä seuraa ristiriita, sillä $l \in B$ ja $S(l)$ on tosi. Oletus $B \neq \emptyset$ aiheuttaa ristiriidan, joten $B = \emptyset$. Täten on osoitettu, että ei ole olemassa kokonaislukua n, jolla väite $S(n)$ ei ole tosi.

□

Lauseen 4.11 induktioperiaatetta kutsutaan myös ensimmäiseksi induktioperiaatteeksi tai heikoksi matemaattiseksi induktioksi. Vastaavasti Lauseen 4.12 toista induktioperiaatetta kutsutaan vahvaksi induktioperiaatteeksi. Tämä johtuu siitä, että siinä induktio-oletus on vahvempi. Ensimmäisessä induktioperiaatteessa oletetaan, että väite on tosi jäsenelle $n-1$ ja todistetaan, että se on tosi jäsenelle n. Toisessa induktioperiaatteessa oletetaan, että väite on tosi kaikille luvuille m, kun $m < n$ ja todistetaan, että se on tosi jäsenelle n. Induktioperiaate ja toinen induktioperiaate ovat keskenään ekvivalentteja. [9]

4.3 Esimerkkejä

Tehdään muutama esimerkkitehtävä todistuksista. Ensimmäisenä tehdään kevään 2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen [27] tehtävän 11 kohdan 1 induktiotodistus.

Lause 4.13. *[27] Olkoon $a_1 = \sqrt{2}$ ja $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, kun $n \geq 1$. Osoita induktiolla, että jono a_n on kasvava.*

Todistus. Ratkaistaan tehtävä Lauseen 4.11 ensimmäisen induktioperiaatteen mukaan. Osoitetaan ensin perusaskel todeksi.

Perusaskel. Osoitetaan, että jono (a_n) on kasvava, kun $n = 1$. Nyt $a_{n+1} = a_{1+1} = a_2$ ja $a_n = a_1 = \sqrt{2}$. Saadaan, että

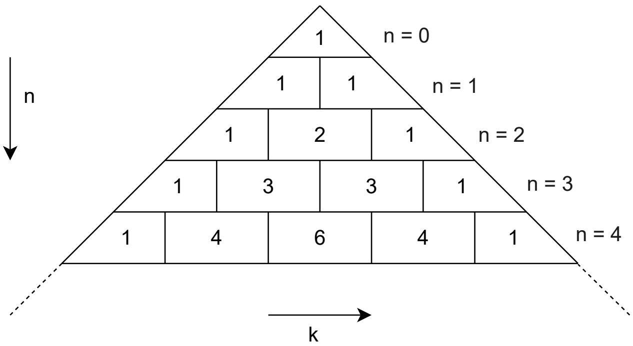
$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Koska $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$, niin jono a_n on kasvava, kun $n = 1$.

Induktioaskel. Nyt induktio-oletus on, että jono a_n on kasvava, kun $n = k$ ja $k \geq 1$. Induktioväite on, että jono (a_n) on kasvava, kun $n = k + 1$ ja $k \geq 1$. Osoitetaan, että induktio-oletuksesta seuraa induktioväite.

Koska jono (a_k) on kasvava, niin jonon jäsen a_k on suurempi kuin jäsen a_{k-1}. Jonon (a_k) k:s jäsen on

$$a_k = \sqrt{2 + a_{k-1}}.$$



Kuva 4.1. *Pascalin kolmio.*

Jonon (a_{k+1}) jäsen $k+1$ on

$$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k}.$$

Nyt

$$a_k = \sqrt{2+a_{k-1}} < \sqrt{2+a_k} = a_{k+1},$$

sillä $a_{k-1} < a_k$. Täten jono (a_{k+1}) on kasvava.

Induktiotodistuksen perusteella jono (a_n) on kasvava kaikilla $n \geq 1$.

$\square$

Toisena esimerkkinä tehdään kevään 2022 pitkän matematiikan kokeen [29] tehtävän 12 mukainen Pascalin kolmioon liittyvä todistustehtävä. Tehtävän ratkaisu on esitetty esimerkissä 4.5. Pascalin kolmio on kuvan 4.1 mukainen kolmio, joka muodostuu binomikertoimista $\binom{n}{k}$. Muuttuja n on Pascalin kolmion rivi ja muuttuja k kertoo, monesko jäsen se on kyseisellä rivillä. Pascalin kolmion ensimmäinen rivi on $n=0$ ja kyseisellä rivillä on vain yksi jäsen, joten myös $k=0$. Ensimmäisen rivin jäsenen binomikerroin on siis $\binom{0}{0}=1$, mikä on merkitty kuvaan 4.1. Toisella rivillä $n=1$ ja sen rivin jäsenet ovat $\binom{1}{0}=1$ ja $\binom{1}{1}=1$. Kun Pascalin kolmiossa edetään riville $n=2$, saadaan jäsen $\binom{2}{1}=2$ laskettua binomikertoimen lisäksi edellisen rivin jäsenten $\binom{1}{0}=1$ ja $\binom{1}{1}=1$ summana. Vastaavasti saadaan laskettua myös myöhempien rivien jäseniä, kuten huomataan myös esimerkissä 4.5 tarvittavasta Lemmasta 4.14.

Lemma 4.14. *Pascalin kolmion rivin $n+1$ jäsen k saadaan rivin n jäsenten k ja $k-1$ summana eli*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Todistus. Osoitetaan väite todeksi osoittamalla termit $\binom{n+1}{k}$ ja $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ yhtäpitäviksi.

Aloitetaan avaamalla binomilauseke, jolloin saadaan

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\cdot(n+1-k)!}.$$

Lavennetaan yhtälön oikea puoli termillä $(n-k)!(k-1)!$ ja jäsennellään lauseke uudelleen. Nyt

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n+1-k)!} &= \frac{\overbrace{(n+1)!}^{=(n+1)\cdot n!}\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!}{k!\cdot(n-k+1)!\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{n!\cdot(n+1+\overbrace{k-k}^{\text{Lisätään } k-k})\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!}{k!\cdot(n-k+1)!\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{[n!\cdot(n-k+1)+n!\cdot k]\cdot(n-k)!(k-1)!}{k!\cdot(n-k+1)!\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{[n!\cdot(n-k+1)\cdot(k-1)!+n!\cdot\overbrace{k\cdot(k-1)!}^{=k!}]\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k+1)!\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{n!\cdot\overbrace{(n-k)!\cdot(n-k+1)}^{=(n-k+1)!}\cdot(k-1)!+n!\cdot k!\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k+1)!\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{n!\cdot(n-k+1)!\cdot(k-1)!+n!\cdot k!\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k+1)!\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{n!\cdot(n-k+1)!\cdot(k-1)!}{k!\cdot(n-k+1)!\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&\quad + \frac{n!\cdot k!\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k+1)!\cdot(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-(k-1))!} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 4.5. [29] Osoita induktiolla, että Pascalin kolmion rivillä n olevien lukujen summa on 2^n, eli

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 2^n. \tag{4.1}$$

Todistus. Ylioppilaskokeen tehtävänannossa Pascalin kolmion luvut on määritelty rekursiivisesti ja haluttu todistus on tehty niihin perustuen. Osoitetaan lause todeksi kombinatoriikan avulla ilman tehtävänannon mukaista rekursiivista määrittelyä.

Merkitään Pascalin kolmion lukuja binomikertoimina siten, että rivillä n kohdassa k oleva luku on $\binom{n}{k}$. Tällä tavalla merkittynä todistettava väite on muotoa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Ratkaistaan tehtävä Lauseen 4.11 induktioperiaatteen mukaan.

Perusaskel. Osoitetaan, että väite on tosi Pascalin kolmion ensimmäisellä rivillä, kun $n = 0$. Ensimmäisellä rivillä on vain luku $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1 = 2^0$. Rivin summa on siis 2^n, kun $n = 0$.

Induktioaskel. Induktio-oletus on, että Pascalin kolmion rivillä m olevien lukujen summa on 2^m eli

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m.$$

Induktioväite on, että Pascalin kolmion rivillä $m + 1$ olevien lukujen summa on 2^{m+1} eli

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} = 2^{m+1}.$$

Osoitetaan, että induktio-oletuksesta seuraa induktioväite.

Kirjoitetaan induktioväitteen summa auki

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} =& \binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+1}{2} + \dots \\ &+ \binom{m+1}{m-1} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1}\end{aligned}$$

ja hyödynnetään Lemmaa 4.14 binomikertoimien avaamiseen. Summan ensimmäinen luku on $\binom{m+1}{0} = 1$ ja viimeinen luku on $\binom{m+1}{m+1} = 1$. Summaksi saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} =& 1 + \left[\binom{m}{1} + \binom{m}{0}\right] + \left[\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\right] + \dots \\ &+ \left[\binom{m}{m-1} + \binom{m}{m-2}\right] + \left[\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}\right] + 1.\end{aligned}$$

Havaitaan, että binomikertoimet toistuvat summassa kahdesti lukuun ottamatta kertoimia $\binom{m}{0} = 1$ ja $\binom{m}{m} = 1$. Sijoitetaan lasketut kertoimet ja järjestellään lauseke uudestaan, jolloin saadaan

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k} = 2 + 2\cdot\binom{m}{1} + 2\cdot\binom{m}{2} + \cdots + 2\cdot\binom{m}{m-2} + 2\cdot\binom{m}{m-1} + 2.$$

Edelleen saadaan

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k} = 2\left[1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-1} + 1\right].$$

Induktio-oletuksen mukaan summa on

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-1} + 1 = 2^m,$$

joten saadaan, että

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k} = 2\cdot 2^m = 2^{m+1}.$$

Induktiotodistuksen perusteella Pascalin kolmion rivillä n olevien lukujen summa on 2^n.

$\square$

5. TUTKIMUSMENETELMÄT

Tässä luvussa esitellään tutkimuskysymykset, tutkimusmenetelmä sekä tutkimuksen aineisto.

5.1 Tutkimuskysymykset

Tutkimuskysymykset ovat listattuna alla. Tavoitteena on siis hahmottaa, miten LOPS:n muutos ja ylioppilaskokeen sähköistyminen ovat vaikuttaneet tehtäviin ja niiden vaikeustasoon.

1. Miten ylioppilaskokeen tehtävät ovat muuttuneet vuosina 2014–2022 Bloomin taksonomian näkökulmasta?
2. Miten ylioppilaskokeen tehtävät ovat muuttuneet LOPS:n muutoksen myötä eli miten kokeessa kysyttävät kurssisisällöt ovat muuttuneet vuosina 2014–2022?
3. Miten ylioppilaskokeen vaikeustaso on muuttunut vuosina 2014–2022 ja miten muutokset ovat vaikuttaneet siihen?

Aineistoa tarkastellaan siis kolmesta eri näkökulmasta, jotka ovat Bloomin taksonomia, LOPS:ien mukaiset kurssijaot sekä koetehtävien vaikeustaso.

5.2 Tutkimusmenetelmä

Tutkimus toteutettiin teorialähtöisenä sisällönanalyysinä eli aineiston analyysin luokittelussa käytettiin ennalta määriteltyä viitekehystä [19]. Aineiston luokittelu tehtiin luvussa 2 määritellyn uudistetun Bloomin taksonomian mukaan sekä luvussa 3 esitellyn lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaisen kurssijaon mukaan. Ne toimivat luokittelun viitekehyksenä.

Tutkimuksessa oli aineistona pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävät keväästä 2014 kevääseen 2022 siten, että tarkastelussa olivat vain keväällä pidettyjen kokeiden tehtävät. Luokittelun tukena on hyödynnetty Ylioppilastutkintolautakunnan julkaisemia Hyvän vastauksen piirteitä kustakin kokeesta.

Aineiston luokittelu lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaisten kurssien mukaan toteutettiin siten, että ennen kevättä 2019 pidetyt pitkän matematiikan ylioppilaskokeet luokiteltiin LOPS 2003:n mukaan. Keväästä 2019 eteenpäin ylioppilaskokeet luokiteltiin LOPS 2015:n mukaisesti. Keväällä 2019 pitkän matematiikan kirjoittaneista opiskelijoista suurin osa on aloittanut lukio-opinnot syksyllä 2016, jolloin he ovat olleet ensimmäiset LOPS 2015:n mukaan opiskelleet opiskelijat. Keväällä 2019 ja mahdollisesti myös sen jälkeen ylioppilaskoetta on ollut tekemässä myös LOPS 2003:n mukaan opiskelleita opiskelijoita, mutta valtaosa opiskelijoista on opiskellut LOPS 2015 mukaiset pitkän matematiikan opinnot. Pitkän matematiikan ylioppilaskoe muuttui sähköiseksi keväällä 2019 ja LOPS 2015:n tavoitteet tukivat paremmin sähköisen kokeen vaatimia taitoja, kuten teknisten apuvälineiden hallintaa.

Tehtävien luokittelu LOPS:n mukaan toteutettiin niin, että jokainen tehtävä luokiteltiin kokonaisuutena sen kurssin mukaan, joka oli LOPS:n mukaisessa kurssijärjestyksessä viimeisimpänä. Jos tehtävässä oli selkeästi useampi alakohta, esimerkiksi a- ja b-osat, ja ne kuuluivat eri kurssien sisältöihin, molemmat kurssit otettiin huomioon. Tehtäviä luokiteltaessa esimerkiksi analyyttistä geometriaa vaatinut tehtävä, jossa täytyi derivoida, luokiteltiin tehtävän vaativimman derivoinnin mukaisen kurssin mukaan. Jos siis derivoitiin esimerkiksi trigonometristä funktiota, se luokiteltiin joko *MAA9*-kurssin (LOPS 2003) tai *MAA7*-kurssin (LOPS 2015) mukaan.

Luokittelu Bloomin taksonomian mukaan toteutettiin niin, että jokainen tehtävä luokiteltiin kokonaisuutena. Poikkeuksena oli tehtävät, joissa oli erillisiä tehtäviä tai tehtävän osia alakohtina. Tehtävä luokiteltiin siihen Bloomin taksonomian tasoon, jonka osaaminen on taksonomiassa ylimpänä. Eli jos tehtävä sisälsi esimerkiksi suoraviivaisen yhtälönratkaisun, se sijoittui taksonomian tasolle *3. soveltaa*. Jos tehtävä vaatisi kahden yhtälönratkaisutavan vertailua, se sijoittuisi taksonomiassa ylemmälle tasolle *5. arvioida* tason *3. soveltaa* sijaan. Esimerkiksi tyypillinen tason *6. luoda* tehtävä on sellainen, jossa täytyy itse kehittää ratkaisumenetelmä ja muodostaa tarvittavat yhtälöt esimerkiksi geometrisen ongelman ratkaisemiseksi. Jos tehtävässä oli useampi alakohta, jotka sijoittuivat eri tasoille, on molemmat tasot mainittu.

Luvussa 6 käsitellään ensin muutoksia tehtävissä Bloomin taksonomian ja LOPS:n mukaan. Näissä tarkasteluissa on huomioitu tehtävien alakohtien eriävät pistemäärät. Jos tehtävässä oli useampi alakohta, joista oli mahdollista saada eri pistemäärä, on tämä painotus huomioitu tulosten tarkastelussa. Esimerkiksi tehtävässä, jossa a-kohdasta saisi 2 pistettä ja b-kohdasta 10-pistettä, on huomioitu niin, että a-kohdan vaatima Bloomin taksonomian osaamistaso ja lukiokurssi huomioitiin 2 pisteen arvoisena ja vastaavasti b-kohdan 10 pisteen arvoisena. Koe huomioitiin kokonaisuutena ja kunkin Bloomin taksonomian tason tai kurssin osuus kokeesta laskettiin prosentteina. Vertailussa kokonaispistemääränä oli kokeen kaikista tehtävistä yhteenlaskettu pistemäärä. Yksittäinen opiskelija vastasi kokeissa korkeintaan 10 tehtävään, kun vaihtoehtoisia tehtäviä oli 13 tai 15 kappaletta. Tämän vuoksi yksittäisen opiskelijan kokeessa eri luokkien painotus saattoi poiketa nyt lasketusta. Kokonaisuuden tarkastelu antaa kuitenkin laajemman kuvan kokeesta ja tämän vuoksi painotukset laskettiin kaikkien tehtävien yhteispisteistä.

Aineistona oli luokiteltujen koetehtävien lisäksi kustakin kokeesta jokaisen tehtävän pistekeskiarvot ja tehtävään vastanneiden opiskelijoiden lukumäärä. Tätä aineistoa varten haettiin Ylioppilastutkintolautakunnalta tutkimuslupaa keväiden 2012–2022 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävien pistekeskiarvojen hyödyntämiseen tutkimuksen tukena. Tutkimusalueeksi rajautui myöhemmin kokeet keväiltä 2014–2022. Saatua aineistoa käsiteltiin tutkimuseettisiä periaatteita noudattaen ja tutkimuksessa esitetyt tulokset ovat anonyymeja.

Saadussa aineistossa oli kerrottu tehtäväkohtaisesti se, kuinka monta prosenttia vastanneista oli saanut esimerkiksi 1 pisteen. Näistä tiedoista laskettiin painotetut pistekeskiarvot, jotta saatiin tehtäväkohtaiset pistekeskiarvot kullekin tehtävälle. Tätä tietoa hyödynnettiin tulosten analysoinnissa.

Tehtävien pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärät oli ilmoitettu aineistossa tehtäväkohtaisesti, joten tehtävien alakohtien tietoja ei ollut mahdollista tarkastella tarkemmin. Tämän vuoksi luokitellut tehtävät on ilmoitettu tehtäväkohtaisesti myös ilman painotuksia, jotta niitä on mahdollista verrata pistetietoihin ja vastausten lukumääriin. Näihin palataan luvussa 6.

Pistekeskiarvoista voidaan analysoida sitä, miten hyvin opiskelijat menestyivät tehtävässä eli miten hyvin he asian osasivat. Tehtäviin vastanneiden lukumäärä kertoo puolestaan sen, minkälaisia tehtäviä opiskelijat mieluiten tekivät tai minkälaisissa tehtävissä he uskoivat menestyvänsä parhaiten. Kaikissa kokeissa on jonkin verran valinnaisuutta, joten myös tätä näkökulmaa on kiinnostava tutkia.

6. TUTKIMUSTULOKSET

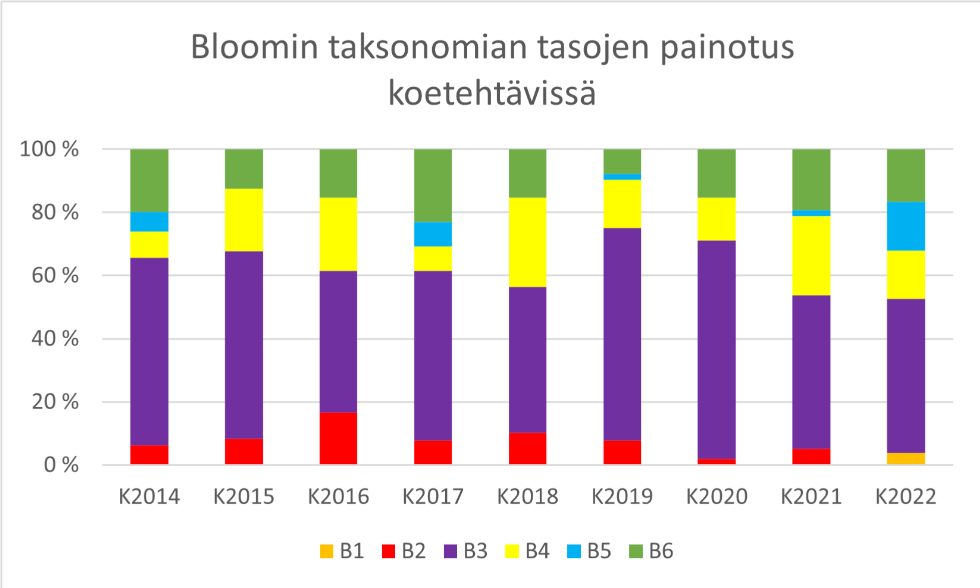
Tässä luvussa käydään läpi tutkimuksen tuloksia. Tulosten käsittelyssä on huomioitu kolme eri näkökulmaa. Ensin tarkastellaan tehtävien muutosta Bloomin taksonomian mukaan ja toisena tehtävien muutoksia LOPS:ien mukaan. Viimeisenä tarkastellaan tehtävien vaikeustason muutoksia pistekeskiarvojen ja tehtäviin tulleiden vastausten lukumäärien perusteella.

6.1 Bloomin taksonomian mukaan

Kuvassa 6.1 on esitelty kunkin Bloomin taksonomian tason painotus prosentteina koko kokeen pistemäärästä. Kokeen kokonaispistemääränä on nyt käytetty kokeen kaikkien tehtävien yhteenlaskettua pistemäärä eli vuosien 2014 ja 2015 kohdalla on huomioitu myös jokeritehtävien 14 ja 15 suurempi pistemäärä. Tehtävät luokiteltiin kokonaisuuksina, mikäli niissä ei ollut erikseen pisteytettäviä alakohtia. Pisteet jaettiin Bloomin taksonomian tasoille tehtävien pisteytyksen mukaan ja tämä pistemäärä jaettiin koko kokeen pistemäärällä, jolloin saatiin kunkin tason osuus prosentteina koko kokeesta. Saadut tiedot on koottu kuvan 6.1 pylväsdiagrammiin. Selite B1 tarkoittaa Bloomin taksonomian tasoa *1. muistaa*. Vastaavasti merkinnät B2, B3, B4, B5 ja B6 tarkoittavat seuraavia Bloomin taksonomian tasoja.

Kuvasta 6.1 voidaan havaita, että violetin Bloomin taksonomian tason *3. soveltaa* osuus on ollut kaikissa kokeissa suurin. Ennen A-, B1- ja B2-osiin jakamista keväinä 2014 ja 2015 tason *3. soveltaa* osuus oli noin 59 % ja jaon jälkeen sen osuus pieneni 45–54 % välille. Ylioppilaskokeen sähköistymisen jälkeen keväällä 2019 tason *3. soveltaa* osuus nousi jopa noin 67 %:iin, kun se oli aiemmin pysynyt alle 60 %:ssa. Vielä keväällä 2020 soveltamisen osuus oli noin 69 %, mutta keväinä 2021 ja 2022 sen osuus jäi alle 50 %:n. Kokeen sähköistymisen aikaan soveltamisen osuus oli siis korkeampi, mutta se laski takaisin vuosien 2016–2018 tasolle jo keväiden 2021 ja 2022 kokeissa.

Muiden kysyttyjen tasojen osuudet vaihtelivat kokeittain eikä kaikissa kokeissa testattu kaikkien tasojen hallitsemista. Ainoastaan tasoja *3. soveltaa*, *4. analysoida* ja *6. luoda* tarvittiin kaikissa kokeissa. Kuvasta 6.1 havaitaan, että missään kokeessa ei ollut kaikkien tasojen tehtäviä, vaan aina jokin puuttui. Suurimmassa osassa kokeita puuttuva taso oli alin taso *1. muistaa*.



Kuva 6.1. *Bloomin taksonomian tasojen painotus koetehtävissä.*

Tehtäviä luokiteltaessa havaittiin, että sähköistymisen myötä kokeissa lisääntyi usean alakohdan sisältävät tehtävät, jotka mahdollistivat pienempien kokonaisuuksien kysymisen. Tämä näkyy kuvan 6.1 pylväsdiagrammissa esimerkiksi siten, että kevään 2022 kokeessa pisteitä sai pelkän tason *1. muistaa* osaamisella eli tehtävässä sai pisteitä vain tunnistamalla tai palauttamalla mieleen kysyttyjä asioita. Kokeen tehtävässä 5 [29] oli seuraava monivalintatehtävä:

"Suora, jolla on ympyrän kanssa kaksi yhteistä pistettä, on ympyrän... kaari, sekantti, tangentti vai segmentti."

Tehtävässä piti valita oikea vaihtoehto ja siitä sai 1 pisteen. Valitun luokittelutavan mukaan kokonaisuus luokiteltiin sen vaativimman osaamistason mukaan, joten muissa tehtävissä tai kokeissa tarvittua tasoa *1. muistaa* ei ole huomioitu luokittelussa, vaikka sen tason osaamista tarvittaisiin myös muissa tehtävissä.

Kahden alimman tason osuus on vaihdellut 1,9–16,7 % välillä ja kaikissa kokeissa oli mahdollista saada pisteitä hallitsemalla tasot *1. muistaa* ja *2. ymmärtää*. Tyypillinen tason *2. ymmärtää* tehtävä oli kuvaajien tulkitsemista vaativa tehtävä, kuten esimerkiksi kevään 2016 kokeen tehtävä 4 [26]. Tehtävässä oli annettu derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja tietyllä välillä ja kuvaajasta tuli määrittää muun muassa funktion $f(x)$ ääriarvokohdat. Tehtävän ratkaisemiseksi riitti derivaattafunktion käyttäytymisen ymmärtäminen.

Bloomin taksonomian tasoa *5. arvioida* esiintyi koetehtävissä vaihdellen. Keväiden 2015, 2016, 2018 ja 2020 kokeissa sitä ei tarvinnut ollenkaan tai sitä vaatineissa tehtävissä tarvittiin myös tason *6. luoda* osaamista. Kevään 2022 kokeessa tason *5. arvioida* osaamista tarvittiin kahdessa tehtävässä. Kokeen tehtävässä 2 oli annettu kaksi yhtälöä ja kaksi yhtälönratkaisutapaa, ja opiskelijan tehtävänä oli valita kumpaa ratkaisutapaa hän käyttää ensimmäiselle yhtälölle ja kumpaa toiselle yhtälölle [29]. Opiskelijan täytyi siis arvioida, mikä ratkaisutapa toimi parhaiten millekin yhtälölle. Tason *5. arvioida* esiintyminen kokeissa on hieman kasvanut kokeen sähköistymisen jälkeen, sillä ennen sähköistymistä sitä oli 2/5 kokeista ja sähköistymisen jälkeen 3/4 kokeista. Tason osuus on kuitenkin melko pieni ja tarkasteltujen kokeiden määrä pieni, joten vielä tämän tarkastelun perusteella ei pystytä toteamaan, onko tason *5. arvioida* tehtävien määrä lisääntynyt/lisääntymässä pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa.

Tasojen *4. analysoida* ja *6. luoda* osuudet olivat toiseksi suurimmat lähes kaikissa kokeissa ja niiden järjestys vaihteli melko tasaisesti. Tason *4. analysoida* osuus vaihteli 7,7–28,2 % välillä eikä sähköistyminen vaikuttanut sen esiintymiseen. Arvot vaihtelevat tasaisesti sekä ennen että jälkeen sähköistymistä ja LOPS:n muutosta. Tason *6. luoda* osuus vaihteli 7,7–23,1 % välillä. Myös tämän tason osuus vaihteli melko tasaisesti koko tarkasteluaikana. Tyypillinen tason *6. luoda* tehtävä oli geometriaa tai analyyttistä geometriaa vaativa tehtävä, jossa piti itse muodostaa lausekkeet ja ratkaista se, miten saavuttaa tehtävänannossa haluttu ratkaisu. Opiskelijan täytyi siis luoda itse ratkaisutapa ja muodostaa esimerkiksi yhtälö, jotta sai ratkaistua halutun tiedon.

Kaikki tässä alaluvussa esitetyt prosentit laskettiin suhteessa koko kokeen kaikkien tehtävien kokonaispistemäärään. Yksittäinen opiskelija vastasi kuitenkin korkeintaan 10 tehtävään, joten yksittäiselle opiskelijalle Bloomin taksonomian tasojen painotukset menisivät eri tavalla. Esimerkiksi keväiden 2014 ja 2015 kokeissa 9 pisteen jokeritehtäviin vastaaminen antaa isomman painotuksen näiden tehtävien vaatimalle tasolle. Opiskelijoilla oli mahdollisuus valita tehtävät, joihin he vastasivat, joten valinnaisten tehtävien Bloomin taksonomian tasoja voi jäädä kokonaan pois hänen kokeestaan.

Kuvan 6.2 taulukossa on Bloomin taksonomian mukaan luokitellut koetehtävät tehtäväkohtaisesti kullekin kokeelle. Taulukossa keltaisella pohjalla on A-osan tehtävät, sinisellä pohjalla B1-osan tehtävät ja vihreällä pohjalla B2-osan tehtävät. Keväiden 2014 ja 2015 kokeiden tehtävät ovat oranssilla pohjavärillä. Bloomin taksonomian tasot *1. muistaa*, *2. ymmärtää* ja *3. soveltaa* ovat taulukossa vaaleamman sävyisinä ja tasot *4. analysoida*, *5. arvioida* ja *6. luoda* hieman tummemman sävyisinä. Taulukon solujen värit on määritelty tehtävän korkeimman Bloomin taksonomian tason mukaan.

Kuvasta 6.2 havaitaan, että keväällä 2014 oli mahdollista valita 9 tehtävää ja keväällä 2015 10 tehtävää, joiden tekemiseen riitti Bloomin taksonomian kolme alinta tasoa. Koe oli siis mahdollista tehdä lähes kokonaan tai jopa kokonaan pelkästään kolmen alimman tason vaatimilla taidoilla.

Keväinä 2016–2022 koe jakaantui A-, B1- ja B2-osiin, joista A-osassa opiskelijat vastasivat kaikkiin tehtäviin. Kun tarkastellaan kokeiden A-osion Bloomin taksonomian tasoja, voidaan havaita, että lähes kaikki A-osan tehtävät sijoittuvat Bloomin taksonomian tasoille 1–3. Ainoa poikkeus on kevään 2022 tehtävä 2, joka vaatii tason 5 osaamista. Kokeen

Tehtävä	K2014	K2015	K2016	K2017	K2018	K2019	K2020	K2021	K2022
1	B3	B2	B2 B3	B3	B3	B3	B3	B2 B3	B3
2	B2	B3	B3	B2	B3	B3	B3	B3	B5
3	B3	B4	B3	B3	B3	B3	B3	B3	B3
4	B3	B3	B2	B3	B2	B2	B3	B3	B3
5	B3	B3	B4	B3	B3	B6	B6	B6	B1 B3
6	B3	B4	B4	B6	B6	B4	B3	B4	B3
7	B4	B3	B6	B6	B4	B4	B4	B4	B4
8	B3	B6	B3	B3	B4	B3	B3	B4 B6	B6
9	B6	B6	B3	B3	B3	B3	B6	B3	B5
10	B6	B3	B3	B5	B2 B4	B3 B5	B3	B4 B5	B6
11	B3 B4	B3	B6	B4	B6	B3	B3	B3	B3 B6
12	B5	B3	B2 B3	B6	B3	B3	B2 B4	B6	B3
13	B3	B3	B4	B3	B4	B3	B3	B4	B4
14	B3 B6	B2 B4							
15	B3	B3							

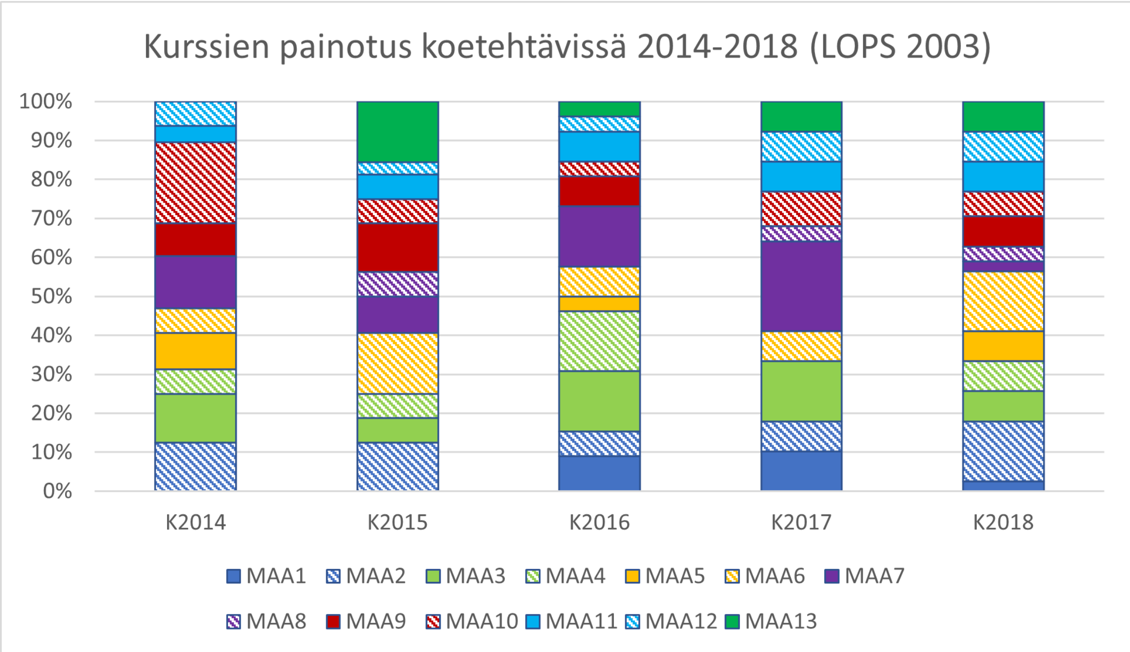
Kuva 6.2. *Kokeiden 2014–2022 tehtävien luokittelu Bloomin taksonomian mukaan.*

sähköistymisen ja LOPS:n muutoksen jälkeen A-osasta on vähentynyt tason *2. ymmärtää* vaativat tehtävät. Ennen sähköistymistä jokaisessa A-osassa oli vähintään yksi tehtävä, joka oli mahdollista tehdä tason *2. ymmärtää* osaamisella. Esimerkiksi keväiden 2020 ja 2022 kokeiden A-osien kaikki tehtävät vaativat vähintään tason *3. soveltaa* osaamista.

Kokeiden B1- ja B2-osissa tulevat mukaan myös Bloomin taksonomian ylemmät tasot 4–6. Tehtävissä on edelleen myös tason *3. soveltaa* tehtäviä sekä alakohdissa myös tasojen *1. muistaa* ja *2. ymmärtää* tehtäviä. Sekä B1-osassa että B2-osassa opiskelijoiden tulee vastata kolmeen tehtävään, joten kaikissa kokeissa opiskelijan on vastattava ainakin yhteen tehtävään, joka vaatii tasojen 4–6 osaamista. Tasoja 4–6 (taulukossa 6.2 tummemmalla) vaativia tehtäviä oli ennen kevättä 2019 tasaisesti 5–6 kappaletta kokeiden B1- ja B2-osissa yhteensä. Keväinä 2019 ja 2020 niiden määrä oli alimmillaan ja tehtäviä oli 4 kappaletta, mutta keväällä 2021 niiden määrä oli korkeimmillaan, kun tehtäviä oli jopa 7 kappaletta. Sähköistyminen tai LOPS:n muutos ei aiheuttanut huomattavia muutoksia Bloomin taksonomian tasojen jakautumisessa B1- ja B2-osan tehtäviin. Kuvan 6.2 taulukkoon palataan alaluvussa 6.3.

6.2 Lukion opetussuunnitelman mukaan

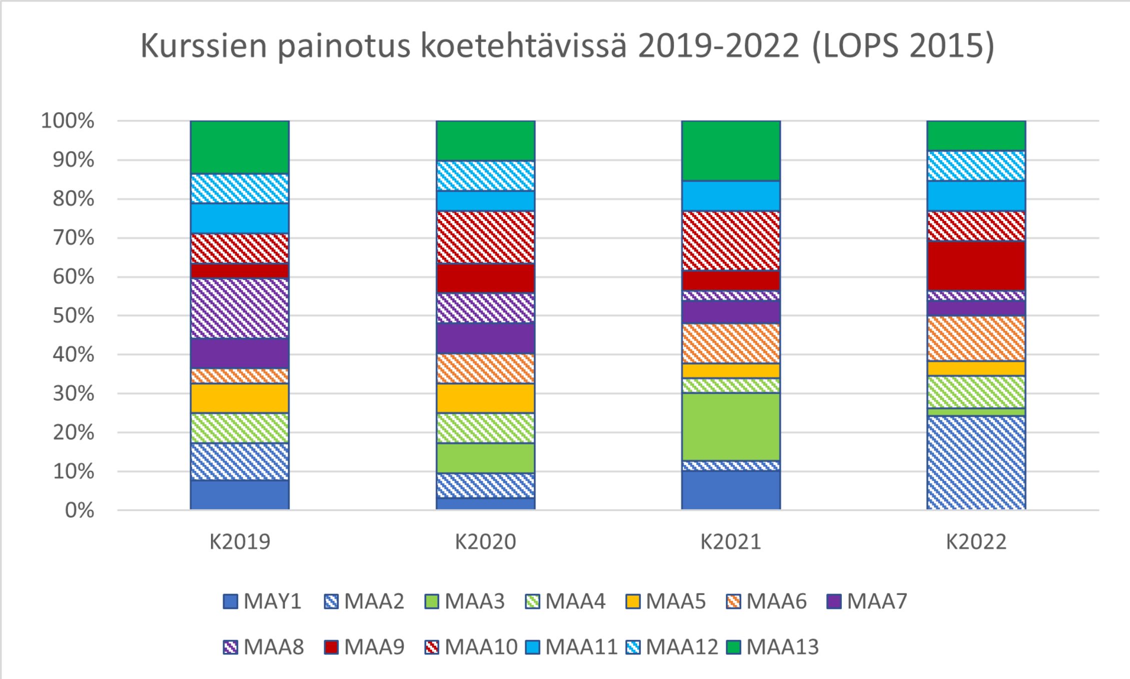
Tarkastellaan seuraavaksi sitä, miten kurssien painotus on muuttunut ylioppilaskokeissa. Kuvassa 6.3 on esitelty pylväsdiagrammina kunkin LOPS 2003 mukaisen kurssin sisältöä vaativien tehtävien osuus koko kokeen pistemäärästä keväiltä 2014–2018. Tarkastelussa on huomioitu tehtävät kokonaisuuksina ja luokiteltu ne sen mukaan. Tehtävien erikseen pisteytetyt alakohdat on huomioitu eri kursseille, jos ne olivat eri kurssin sisältöä. Pylväsdiagrammi muodostettiin vastaavasti kuin Bloomin taksonomian mukaan tehty alaluvussa 6.1, mutta nyt tehtävät jaettiin Bloomin taksonomian tasojen sijaan LOPS:ien mukaisille kursseille. Kurssit ovat listattuna luvussa 3.1 taulukoissa 3.1 ja 3.2. Luokittelusta kerrottiin tarkemmin luvussa 5.2.



Kuva 6.3. *Kurssien painotus ylioppilaskokeissa vuosina 2014–2018.*

Kuvasta 6.3 havaitaan, että kurssien painotukset vaihtelevat kokeiden välillä melko paljon. Esimerkiksi keväällä 2014 *MAA10 Integraalilaskenta* -kurssin osuus kokeen tehtävistä oli 20,8 %, mutta keväinä 2015–2019 se on ollut melko tasaisesti 3,9–9,0 % välillä. Kevään 2017 kokeessa ei kuvan 6.3 mukaan ollut kurssien *MAA4 Analyyttinen geometria* tai *MAA5 Vektorit* sisältöjä ollenkaan ja vastaavasti kurssin *MAA7 Derivaatta* osuus oli jopa 23,1 %. Todellisuudessa koe sisälsi analyyttisen geometrian tehtävän ja vektoritehtävän, mutta näissä täytyi myös derivoida. Valitun luokittelutavan vuoksi nämä tehtävät sijoittuivat *MAA7*-kurssin alle ja sen vuoksi näyttää, että *MAA4*- tai *MAA5*-kurssien tehtäviä ei ollut kokeessa ollenkaan.

Kuvassa 6.4 on esitelty vastaavat tiedot keväiden 2019–2022 kokeista LOPS 2015 -kurssijaon mukaisesti. Kuten luvussa 3 esiteltiin, kurssien järjestys ja myös sisällöt ovat osittain muuttuneet LOPS 2003 ja LOPS 2015 välillä, joten kuvien 6.3 ja 6.4 kurssikohtainen vertailu suoraan ei ole mielekästä.



Kuva 6.4. *Kurssien painotus ylioppilaskokeissa vuosina 2019–2022.*

Sähköistymisen ja LOPS:n muutoksen jälkeen koetehtävissä on ollut tasaisemmin kaikkien kurssien sisältöä. Pisteiden jakautuminen tasaisemmin eri kursseille johtuu ainakin osittain siitä, että sähköistymisen jälkeen kokeissa on ollut enenevissä määrin tehtäviä, joissa on useampia alakohtia. Tämä mahdollistaa pienempien kokonaisuuksien kysymistä, jolloin tehtävä on helpommin kohdistettavissa esimerkiksi ensimmäisten kurssien sisältöihin, sillä tehtävän ei tarvitse olla kovin laaja.

Kuvan 6.3 mukaan vuosina 2014 ja 2017 kokeessa ei ollut kolmen kurssin tehtäviä ollenkaan ja vuonna 2015 kahden kurssin tehtävät puuttuivat kokonaan. Sekä vuonna 2014 että 2015 puuttui tehtävä, jossa olisi pärjännyt *MAA1 Funktiot ja yhtälöt* -kurssin tiedoilla. Vuoden 2019 jälkeen kokeista on puuttunut korkeintaan yksi puhtaasti tietyn kurssin sisältöihin perustuva tehtävä. Aiemmin todettiin, että valittu luokittelutapa aiheuttaa sen, että kaikkia kursseja ei välttämättä näy kuvissa 6.3 ja 6.4, vaikka niiden tietoja kokeessa tarvitaankin. Kuitenkin se, mitä enemmän kursseja kuvaajissa on, kertoo sen, että kokeessa kysytään enemmän suoraan jonkin kurssin aiheeseen liittyviä tehtäviä. Esimerkiksi vektoritehtävissä tämä tarkoittaa sitä, että tehtävä perustuu vektorikurssien *MAA5 Vektorit* (LOPS 2003) tai *MAA4 Vektorit* (LOPS 2015) sisältöihin. Lisäksi tehtävässä voi tarvita myös aiempien kurssien sisältöjä. Jos tehtävässä olisi vielä lisäksi esimerkiksi derivointia, vaadittaisiin tehtävässä myös derivaattakurssien *MAA7 Derivaatta* (LOPS 2003) ja *MAA6 Derivaatta* (LOPS) osaamista. Tämän tarkastelutavan vuoksi erityisesti *MAA3–MAA5* -kurssien (LOPS 2003, LOPS 2015) osuudet kuvissa 6.3 ja 6.4 ovat osittain harhaanjohtavia eikä niitä tarkastella sen vuoksi lähemmin.

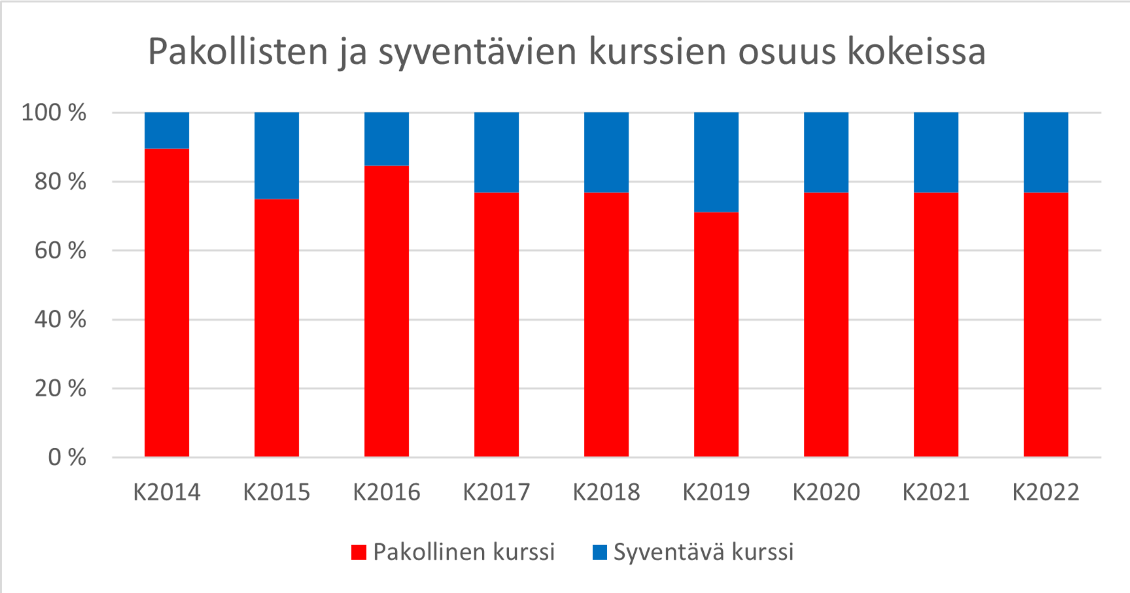
Ensimmäisten kurssien *MAA1 Funktiot ja yhtälöt* (LOPS 2003) ja *MAY1 Luvut ja lukujonot* (LOPS 2015) sisällöt ovat hyvin erilaiset, joten niiden vertailu ei ole mielekästä. Kurssien *MAA2 Polynomifunktiot* (LOPS 2003) ja *MAA2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt* (LOPS 2015) sisällöt ovat pysyneet lähes samoina. Keväinä 2014–2018 kurssin *MAA2* osuus vaihteli 6,4–15,4 % välillä ja keväinä 2019–2022 2,6–24,4 % välillä. Sähköistymisen ja LOPS:n muutoksen jälkeen sen osuus on vaihdellut enemmän kuin sitä ennen.

Derivaattakurssien *MAA7 Derivaatta* (LOPS 2003) ja *MAA6 Derivaatta* (LOPS 2015) osuuksissa on ollut hieman muutoksia. Ennen kevättä 2019 ja LOPS:n muutosta kurssin *MAA7* osuus vaihteli 2,6–23,1 % välillä ja kevään 2019 jälkeen kurssin *MAA6* osuus 3,9–11,5 % välillä. Ennen kevättä 2019 kurssin osuus kokeissa vaihteli huomattavasti enemmän kuin kevään 2019 jälkeen. Kurssien sisällöt ovat LOPS:ien mukaan säilyneet samoina lukuun ottamatta LOPS 2015 täsmennyksiä teknisten apuvälineiden käyttämiseen [15, 16]. Kurssien muuttunut sisältö ei siis selitä osuuden tasaantumista.

Sekä LOPS 2003:ssa että LOPS 2015:ssa on kurssi *MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot*. Ennen LOPS:n muutosta ja sähköistymistä sen osuus kokeista oli melko pieni. Keväinä 2014 ja 2016 ei ollut ollenkaan tähän kurssiin pohjautuvaa tehtävää, keväällä 2015 sen osuus oli 6,3 % ja keväinä 2017 ja 2018 vain 3,9 %. LOPS:n muutoksen ja sähköistymisen jälkeen sen osuus nousi keväällä 2019 jopa 15,4 %:iin, keväällä 2020 se oli 7,7 % ja keväinä 2021–2022 se oli taas vain 2,6 %. Muutoksen jälkeen keväällä 2019 sen osuus nousi aiempaa korkeammalle, mutta myös laski aiempaa matalammalle tasolle keväinä 2021 ja 2022. Tämäkin voi selittyä lisääntyneillä tehtävien useilla erillisillä alakohdilla, jolloin on mahdollista kohdistaa tälle kurssille suuntautuva pienempi kokonaisuus.

Syventävien kurssien *MAA11 Lukuteoria ja logiikka* sekä *MAA12 Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä* (LOPS 2003) ja niitä vastaavien kurssien *MAA11 Lukuteoria ja todistaminen* sekä *MAA12 Algoritmit matematiikassa* (LOPS 2015) osuudet ovat pysyneet lähes samoina koko tarkasteluajan. *MAA11*-kurssin osuus on vaihdellut keväinä 2014–2022 välillä 4,2–7,7 % ja sitä on kysytty kaikissa kokeissa. *MAA12*-kurssin osuus on samana aikana vaihdellut välillä 3,1–7,7 %, mutta keväällä 2021 sitä ei ollut ollenkaan. Kolmannen syventävän kurssin *MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi* osuus on vaihdellut enemmän, kevään 2014 kokeessa sitä ei kysytty ollenkaan ja keväinä 2015–2022 se on vaihdellut melko tasaisesti välillä 3,9–15,6 %. Yksittäisten syventävien kurssien osuuksiin sähköistymisellä tai LOPS:n muutoksella ei vaikuta olevan vaikutusta.

Kuvassa 6.5 on esitelty pylväsdiagrammina pakollisten ja syventävien kurssien osuudet kustakin kevään kokeesta aikavälillä 2014–2022. Syventävien kurssien osuus on ollut korkeimmillaan keväällä 2019, jolloin niiden osuus oli 28,9 %. Vastaavasti syventävien kurssien osuus oli alimmillaan keväällä 2014, jolloin niiden osuus oli vain 10,4 %. LOPS:n muutoksen ja sähköistymisen jälkeen keväällä 2019 syventävien kurssien osuus oli korkeimmillaan, mutta sen jälkeen niiden osuus on ollut tasaisesti 23,1 %. Ennen vuotta



Kuva 6.5. *Pakollisten ja syventävien kurssien osuus ylioppilaskokeen tehtävissä keväinä 2014–2022.*

2019 syventävien kurssien osuus vaihteli enemmän, mutta keväästä 2020 alkaen se on pysynyt täysin samana. Isoja muutoksia tässäkään ei kuitenkaan ole tapahtunut.

Taulukossa 6.6 on LOPS 2003:n kurssijaon mukaan luokitellut tehtävät. Vuodesta 2016 eteenpäin koe jakautui A-, B1- ja B2-osiin, joten nämä kokonaisuudet on eroteltu taulukoissa eri värein. Keltaisella pohjavärillä on A-osan tehtävät, sinisellä B1-osan tehtävät ja vihreällä B2-osan tehtävät. Keväiden 2014 ja 2015 kokeiden tehtävät on oranssilla pohjavärillä. Pakolliset kurssit *MAA1/MAY1–MAA10* on merkitty taulukkoon hieman vaaleamman sävyisinä ja syventävät kurssit *MAA11–MAA13* hieman tummemmalla pohjavärillä. Taulukon solun sävy määräytyi tehtävän järjestyksessä viimeisimmän kurssin mukaan.

Kuvan 6.6 taulukossa tähdellä * merkityn kevään 2016 kokeen tehtävässä 9 oli vaihtoehtoiset tehtävät 9.1 ja 9.2, joista toiseen tuli vastata ja siitä oli mahdollista saada 6 pistettä. Tehtävässä 9.1 oli *MAA12 Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä* -kurssin asiaa ja tehtävä 9.2 kurssin *MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi* asiaa. [26] Osuuksia laskiessa tämä on huomioitu siten, että molemmat alakohdat on huomioitu 3 pisteen arvoisina.

Keväiden 2014 ja 2015 osalta kuvan 6.6 taulukosta huomataan, että suurin osa tehtävistä koostuu yhdestä kokonaisuudesta tai alakohdista, jotka kuitenkin perustuvat saman kurssin asiaan. Tämä havaitaan siitä, että taulukon soluissa on mainittu vain yksi kurssi. Kevään 2014 kokeessa neljässä tehtävässä ja kevään 2015 kokeessa vain yhdessä tehtävässä on ollut mahdollista jaotella tehtävä kahden eri kurssin alle. Lisäksi havaitaan, että syventävien kurssien sisältöihin perustuvat tehtävät painottuvat pääosin kokeiden viimeisiin tehtäviin 11–15.

Tehtävä	K2014	K2015	K2016	K2017	K2018
1	MAA2	MAA9	MAA1 MAA2	MAA2	MAA1 MAA7 MAA10
2	MAA7	MAA2	MAA1 MAA2	MAA1	MAA2
3	MAA7 MAA10	MAA8	MAA5 MAA10	MAA7	MAA9
4	MAA2	MAA2	MAA7	MAA8 MAA10	MAA2
5	MAA4	MAA4	MAA6	MAA1 MAA10	MAA4
6	MAA9	MAA6	MAA3	MAA3	MAA3
7	MAA6	MAA9	MAA3	MAA7	MAA6
8	MAA5	MAA3	MAA4	MAA12	MAA11
9	MAA3 MAA5	MAA7	MAA12 MAA13 *	MAA11	MAA12
10	MAA10	MAA10	MAA11	MAA7	MAA5
11	MAA7 MAA10	MAA11	MAA7	MAA6	MAA7
12	MAA12	MAA7 MAA12	MAA9	MAA3	MAA8 MAA10
13	MAA9 MAA11	MAA13	MAA4	MAA13	MAA13
14	MAA3	MAA6			
15	MAA10	MAA13			

Kuva 6.6. *Kokeiden 2014–2019 tehtävien luokittelu LOPS 2003 mukaan.*

Keväiden 2016–2018 osalta kuvan 6.6 taulukosta nähdään, että kokeen A-osa perustuu vain pakollisten kurssien sisältöihin. Kokeiden B1- ja B2-osissa tarvitaan puolestaan sekä pakollisten että syventävien kurssien tietoja. Koska B1- ja B2-osissa tuli molemmissa vastata kolmeen tehtävään, opiskelijan on mahdollista valita tehtävät niin, että hän voi tehdä vain pakollisiin kursseihin pohjautuvia tehtäviä. Keväiden 2016–2018 koetehtävissä oli korkeimmillaan kolmen eri kurssin sisältöä kevään 2018 kokeen ensimmäisessä tehtävässä. Lisäksi keväällä 2016 kolmessa tehtävässä, keväällä 2017 kahdessa tehtävässä ja keväällä 2018 yhdessä tehtävässä oli alakohtia, joissa oli eri kurssien asiaa.

Taulukossa 6.7 on LOPS 2015 -kurssijaon mukaisesti luokitellut tehtävät. Nämäkin kokeet jakautuvat vastaavasti A-, B1- ja B2-osiin ja niiden pohjavärit ovat samat kuin taulukossa 6.6. Myös tässä taulukossa pakolliset kurssit ovat vaaleampina ja syventävät tummemman sävyisinä.

Kuten keväiden 2016–2018 kokeissa, myös keväinä 2019–2022 kokeiden A-osat perustuivat pakollisten kurssien sisältöihin ja B1- sekä B2-osissa tarvittiin myös syventävien kurssien sisältöjä. Opiskelijoiden oli myös näissä kokeissa pääosin mahdollisuus vali-

Tehtävä	K2019	K2020	K2021	K2022
1	MAY1	MAY1 MAA2	MAY1 MAA6	MAA2 MAA6 MAA8
2	MAA4	MAA4	MAA4 MAA5	MAA2
3	MAA8	MAA9	MAA2 MAA9	MAA2 MAA7
4	MAA2	MAA6	MAA3 MAA7	MAA5 MAA9
5	MAA5 MAA9	MAA3	MAA6	MAA2 MAA3 MAA4 MAA5 MAA6 MAA8
6	MAA10	MAA5	MAA3	MAA9
7	MAA5	MAA10	MAA10	MAA10
8	MAA11	MAA12	MAA10	MAA13
9	MAA12	MAA13	MAA13	MAA12
10	MAA13	MAA8	MAA11	MAA6
11	MAA7	MAA11 MAA13	MAA1 MAA8	MAA4
12	MAA8	MAA1 MAA10	MAA3	MAA11
13	MAA2 MAA13	MAA7	MAA2	MAA2

Kuva 6.7. *Kokeiden 2019–2022 tehtävien luokittelu LOPS 2015 mukaan.*

ta tehtävät niin, että pakollisten kurssien sisällöillä voi tehdä vaaditun tehtävämäärän. Ainut poikkeus oli keväällä 2019, jolloin B2-osassa tarvitsi tehtävissä 10 ja 13 *MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi* -kurssin osaamista. Tehtävässä 13 osan pisteistä sai kuitenkin myös *MAA2 Polynomifunktiot*-kurssin osaamisella. Kevään 2022 kokeen tehtävässä 5 oli jopa kuuden eri kurssin sisältöä ja tehtävässä 1 kolmen eri kurssin sisältöä. Lisäksi kokeen tehtävissä 3 ja 4 tarvittiin myös kahden eri kurssin sisältöjä. Keväällä 2019 kahdessa, keväällä 2020 kolmessa ja keväällä 2021 viidessä eri tehtävässä tarvitsi kahden eri kurssin sisältöjä.

Sähköistyminen ja LOPS:n muutos on mahdollistanut sen, että koetehtävässä voi olla useita eri kursseihin pohjautuvia alakohtia. Esimerkiksi kokeiden pisteytyksen muutos 6 (tai 9) pisteen tehtävistä 12 pisteen tehtäviin mahdollistaa tehtävien jakamisen pienempiin erillisiin osiin. Kun tehtävän maksimipistemäärä oli 6 (tai 9) pistettä, tehtävän pystyi jakamaan korkeintaan 6 (tai 9) erilliseen osaan. Kun tehtävien maksimipistemäärä nousi 12 pisteeseen, on tehtävä mahdollista jakaa jopa 12 erilliseen osaan.

6.3 Pistekeskiarvojen ja vastausten lukumäärien mukaan

Tarkastellaan seuraavaksi kokeiden vaikeustasojen muutoksia koetehtävien pistekeskiarvojen avulla. Tarkastellaan myös opiskelijoiden valitsemia tehtäviä tehtäviin tulleiden vastausten lukumäärien perusteella. Tarkastelussa on muutokset koko kokeen tasolla sekä keväiden 2016–2022 osalta myös kokeiden eri osien mukaan. Liitteessä A on esitetty pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärät tehtäväkohtaisesti kullekin tarkasteltavalle kokeelle. Näitä tietoja hyödynnetään analysoinnin tukena. Myös tutkielman lukija voi halutessaan tutustua näihin tietoihin tarkemmin ja vertailla niitä esimerkiksi kuviin 6.2, 6.6 ja 6.7.

Taulukossa 6.1 on esitetty kokeiden kaikkien tehtävien yhteenlasketut pistekeskiarvot sekä niiden osuus koko kokeen pistemäärästä. Esimerkiksi keväällä 2014 kokeen kaikkien 15 tehtävän yhteenlasketut pistekeskiarvot olivat 47,6 pistettä. Koko kokeen kaikkien tehtävien yhteenlasketut maksimipisteet olivat 96 pistettä, joten osuus koko kokeen pisteistä on $\frac{47{,}6}{96} * 100\% \approx 49,6\%$. Koetehtävien pisteytys muuttui LOPS:n muutoksen ja sähköistymisen jälkeen, joten yhteenlasketut pistekeskiarvot eivät ole suoraan vertailtavissa. Tämän vuoksi on laskettu myös yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus koko kokeen pistemäärästä.

Taulukko 6.1. *Yhteenlasketut pistekeskiarvot ja niiden osuus koko kokeen pistemäärästä.*

Kevät	Yhteenlasketut pistekeskiarvot	Osuus koko kokeen pistemäärästä
2014	47,6	49,6 %
2015	48,9	51,0 %
2016	36,6	46,9 %
2017	38,2	49,0 %
2018	34,5	44,2 %
2019	64,9	41,6 %
2020	60,7	38,9 %
2021	56,8	36,4 %
2022	72,5	46,5 %

Taulukosta 6.1 voidaan havaita, että ennen kokeen jakamista osiin keväinä 2014 ja 2015 yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus oli välillä 49,6–51,0 %, mikä on hieman korkeampi kuin myöhempinä keväinä. Tuolloin kokeissa oli siis 15 tehtävää, joista 13 tehtävästä oli mahdollisuus saada 6 pistettä ja kahdesta tehtävästä jopa 9 pistettä. Yhteensä opiskelijat vastasivat 10 vapaavalintaiseen tehtävään. Keväästä 2016 eteenpäin kokeissa on ollut neljä kaikille pakollista tehtävää ja lisäksi mahdollisuus valita B1-osassa 3/5 tehtävästä ja B2-osassa 3/4 tehtävästä. Keväinä 2014 ja 2015 opiskelijoilla oli enemmän

valinnanvaraa tehtävissä ja he pystyivät valitsemaan itselleen helpoimmat tehtävät, mikä voi selittää hieman korkeampaa tulosta.

Ennen sähköistymistä ja LOPS:n muutosta keväällä 2019 yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus koko kokeen pistemäärästä on ollut pääosin hieman korkeampi kuin kevään 2019 jälkeen, mutta erot eivät ole huomattavia. Kevään 2019 jälkeen kokeiden vaikeustasoissa on ollut melko isoja eroja. Keväällä 2021 yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus koko kokeen pistemäärästä on 36,4 % ja keväällä 2022 jopa 46,5 %. Yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus nousi siis yli 10 % yhdessä vuodessa eli kevään 2022 kokeen tehtävistä on saatu keskimäärin huomattavasti paremmat pisteet kuin keväällä 2021. Tämä voidaan havaita myös liitteen A kuvista A.8 ja A.9.

Taulukossa 6.2 on eritelty keväiden 2016–2022 A-, B1- ja B2-osien tehtävien yhteenlasketut pistekeskiarvot ja niiden osuus koko osan kokonaispistemäärästä. Taulukossa kirjain A tarkoittaa A-osan tehtävien yhteenlaskettua pistekeskiarvoa ja merkintä A % tarkoittaa A-osan yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuutta koko A-osan pisteistä. Vastaavat merkinnät ovat myös B1- ja B2-osilla.

Taulukko 6.2. *Kokeen eri osien yhteenlasketut pistekeskiarvot ja niiden osuus koko osan pistemäärästä.*

Kevät	A	A %	B1	B1 %	B2	B2 %
2016	17,3	72,1 %	14,0	46,7 %	5,3	22,1 %
2017	14,6	60,8 %	13,2	44,0 %	10,4	43,3 %
2018	14,3	59,6 %	15,2	50,7 %	5,0	20,1 %
2019	28,9	60,2 %	28,9	48,2 %	7,1	14,8 %
2020	24,5	51,0 %	27,9	46,5 %	8,3	17,3 %
2021	27,3	56,9 %	20,3	33,8 %	9,2	19,2 %
2022	32,4	67,5 %	32,0	53,3 %	8,1	16,9 %

Taulukosta 6.2 voidaan havaita, että suurin muutos pistekeskiarvoissa on tapahtunut kokeiden B2-osissa. Ennen sähköistymistä ja LOPS:n muutosta yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus koko osan pistemäärästä vaihteli välillä 20,1–43,3 %. Kevään 2019 jälkeen tuo väli on ollut 14,8–19,2 %, mikä jää aiempaa matalammaksi. Opiskelijat ovat siis saaneet muutoksen jälkeen B2-osion tehtävistä suhteessa vähemmän pisteitä kuin aiemmin. A- ja B1-osien kohdalla ei ole havaittavissa niin selkeää muutosta ennen ja jälkeen kevään 2019.

Yhteenlasketut pistekeskiarvot on laskettu aina kunkin osan mukaan ja ne suhteutettu sen osan kaikkien tehtävien kokonaispistemäärään. Opiskelijat eivät kuitenkaan vastanneet välttämättä kaikkiin tehtäviin ja B1- sekä B2-osissa tehtäviä piti tehdä molemmista osioista kolme kappaletta. Tarkastelussa on nyt kokeiden vaikeustason muutos kokonaisuudessaan, joten oli mielekkäämpää verrata koko kokeen tai osuuksien kaikkia tehtäviä.

Korkeimman pistekeskiarvon saanut tehtävä keväinä 2016–2022 on ollut tehtävä 1 kaikissa kokeissa lukuun ottamatta kevään 2017 koetta, jossa se oli tehtävä 2. Kun tarkastellaan kuvan 6.2 taulukkoa, havaitaan, että parhaan pistekeskiarvon saanut tehtävä on Bloomin taksonomian tasoilla *2. ymmärtää* ja/tai *3. soveltaa*. Keväiden 2016–2018 osalta korkeimman pistekeskiarvon saaneessa tehtävässä ollut mahdollista saada pisteitä vain ensimmäisen *MAA1 Funktiot ja yhtälöt* -kurssin (LOPS 2003) osaamisella. Lisäksi keväällä 2016 tehtävässä tarvitsi kurssin *MAA2 Polynomifunktiot* sisältöä ja keväällä 2018 kurssien *MAA7 Derivaatta* ja *MAA10 Integraalilaskenta* sisältöjä. Keväinä 2019–2021 tehtävässä 1 oli mahdollista saada pisteitä edelleen vain ensimmäisen kurssin *MAY1 Luvut ja lukujonot* osaamisella. Keväällä 2020 tehtävässä oli lisäksi *MAA2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt* -kurssin sisältöä ja keväällä 2021 *MAA6 Derivaatta* -kurssin sisältöä. Keväällä 2022 ensimmäisessä tehtävässä tarvitsi kurssien *MAA2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt*, *MAA6 Derivaatta* ja *MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot* (LOPS 2015) osaamista. Keväinä 2016–2022 parhaan pistekeskiarvon tehtävästä oli siis mahdollista saada pisteitä ensimmäisten kurssien osaamisella ja lisäksi myös vaihtelevien myöhempien kurssien osaamisella. Ensimmäisten kurssien sisällöt muuttuivat LOPS:n muutoksen yhteydessä, joten joko Ylioppilastutkintolautakunta on huomioinut muutoksen tehtäviä laatiessa tai opiskelijat ovat osanneet ensimmäisten kurssien asian riippumatta siitä, mitä kurssin sisältö on. Kevään 2016 jälkeen tehtävä 1 tai 2 oli myös kaikille pakollinen tehtävä, koska se kuului kokeen A-osaan.

Keväinä 2014 ja 2015 korkeimmat pistekeskiarvot tulivat myös kokeen alkupuolen tehtävistä, keväällä 2014 tehtävästä 2 ja keväällä 2015 tehtävästä 1. Kuvan 6.2 mukaan molemmat tehtävät sijoittuivat Bloomin taksonomian tasolle *2. ymmärtää*. Kuvasta 6.6 nähdään, että kevään 2014 tehtävä perustui kurssiin *MAA7 Derivaatta* ja kevään 2015 kurssiin *MAA9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot*. Myöhemmissä kokeissa helpoimmat tehtävät perustuivat ensimmäisten kurssien sisältöihin, mutta näissä pisteitä sai vain huomattavasti pidemmälle edenneiden kurssien osaamisesta. Molemmat ovat kuitenkin tason *2. ymmärtää* tehtäviä, joten niissä ei ole esimerkiksi tarvinnut ratkaista yhtälöitä.

B1-osassa eniten vastauksia kertyi kaikissa kokeissa tehtävään, joka perustui pakolliseen kurssiin. Ennen kevättä 2019 B1-osassa myös vähiten vastauksia saanut tehtävä perustui kaikissa kokeissa pakolliseen kurssiin, mutta kevään 2019 jälkeen vähiten vastauksia keräsi 3/4 kokeesta syventävään kurssiin perustuva tehtävä. Vähiten vastauksia saanut pakolliseen kurssiin perustuva tehtävä oli kevään 2021 tehtävä 8, jossa tuli arvioida pinta-alaa simuloimalla [28]. Tehtävä luokiteltiin *MAA10 Todennäköisyys ja tilastot* -kurssin (LOPS 2015) alle, mutta luokitteluvaiheessa vaihtoehtona mietittiin myös syventävää kurssia *MAA12 Algoritmit matematiikassa* (LOPS 2015). LOPS 2015:a päädyttiin tulkitsemaan niin, että tämä tehtävä oli ratkaistavissa myös *MAA10*-kurssin avulla. Mikäli myös tämä tehtävä olisi luokiteltu *MAA12*-kurssin alle, olisi kaikki kevään 2019 jälkeiset B1-osan vähiten vastatut tehtävät vaatineet syventävien kurssien osaamista. Ennen kevättä 2019 vähiten vastattu tehtävä oli pakollisen kurssin tehtävä ja keväästä 2019 eteenpäin vähiten vastattu tehtävä on ollut lähes aina syventävään kurssiin perustuva. Vaikka syventävien kurssien tehtävät eivät olleet vastatuimpia, niistä on tullut keväinä 2016 ja 2021 B1-osan parhaat pisteet. Tämä voi johtua siitä, että vain tehtävään tarvitun syventävän kurssin opiskelleet vastasivat ja he menestyivät tehtävässä hyvin.

Myös B2-osassa opiskelijat vastasivat eniten tehtäviin, joissa pärjäsi pakollisten kurssien osaamisella. Ainoastaan keväällä 2019 suosituin tehtävä oli 10, joka perustui kurssin *MAA11 Lukuteoria ja todistaminen* (LOPS 2015) sisältöön. Vastaavasti vähiten vastauksia tuli keväinä 2016, 2017, 2019 ja 2022 syventävien kurssien osaamista vaativiin tehtäviin.

B1-osassa eniten vastattu tehtävä oli myös 4/7 kokeessa saanut osion parhaan pistekeskiarvon. Vähiten vastattu tehtävä oli 4/7 kokeesta saanut puolestaan osion matalimman pistekeskiarvon. Yli puolessa kokeista opiskelijat ovat osanneet vastata tehtävään, jonka he osaavat. Vastaavasti he ovat myös osanneet jättää vastaamatta vaikeimpiin tehtäviin. B2-osassa eniten vastattu tehtävä oli saanut 5/7 kokeesta myös korkeimman pistekeskiarvon, mutta vähiten vastattu tehtävä oli saanut huonoimman pistekeskiarvon vain kevään 2017 kokeessa. B2-osassa opiskelijat ovat puolestaan osanneet vielä paremmin vastata tehtäviin, jotka he osaavat. Toisaalta he eivät ole osanneet arvioida niin hyvin sitä, mikä tehtävä on heille vaikein. LOPS:n muutoksella tai sähköistymisellä ei vaikuttanut olevan tähän vaikutusta.

Aiemmin havaittiin, että tehtävissä on yhä useamman kurssin alla olevia yksittäisiä kysymyksiä ja esimerkiksi keväällä 2022 tehtävässä 5 oli jopa kuuden eri kurssin sisältöä. Tämä tehtävä oli kyseisen kokeen B1-osan suosituin tehtävä ja se sai myös B1-osan korkeimman pistekeskiarvon. Tehtävä testasi Bloomin taksonomian tasoja *1. muistaa* ja *3. soveltaa*, joten kovin haastavia tehtävät eivät olleet siitäkään näkökulmasta. Usean eri kurssin sisältöjen testaaminen saman tehtävän alla oli opiskelijoiden mieleen ja he myös menestyivät tehtävässä. Se, että tehtävä on vastatuin ja pistekeskiarvo on korkein kertoo myös sen, että lähes kaikki kokeeseen vastanneet ovat menestyneet tehtävässä.

7. POHDINTA

Tässä luvussa käydään läpi tutkimuksen tärkeimpiä tuloksia ja esitetään pohdintaa niistä. Lisäksi tarkastellaan tutkimuksen luotettavuutta.

7.1 Tulosten tarkastelua

Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, onko lukion opetussuunnitelman perusteiden muutos LOPS 2003:sta LOPS 2015:iin vaikuttanut pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtäviin tai niiden vaikeustasoon. Samaan aikaan LOPS:n muutoksen kanssa pitkän matematiikan ylioppilaskoe sähköistyi ja sen pisteytystapa muuttui. Muutos ajoittui kevääseen 2019, jolloin koe oli ensimmäistä kertaa sähköinen ja ensimmäiset LOPS 2015 mukaan opiskelleet opiskelijat olivat tekemässä koetta.

Tutkimuksen teoreettisena viitekehyksenä toimi uudistettu Bloomin taksonomia, josta kerrottiin tarkemmin luvussa 2. Luokittelua ohjasi myös lukion opetussuunnitelman perusteet LOPS 2003 ja LOPS 2015 ja erityisesti niiden mukainen lukion kurssijako. Näistä kerrottiin tarkemmin luvussa 3.

Luvussa 6.1 tarkasteltiin Bloomin taksonomian tasojen osuuksia koko kokeen tasolla sekä niiden esiintymistä tehtäväkohtaisesti. Tasojen osuuksissa ei ollut tapahtunut merkittäviä muutoksia ennen ja jälkeen sähköistymisen ja LOPS:n muutoksen. Kaikissa kokeissa suurimman painoarvon sai taso *3. soveltaa* ja sen osuus oli yli puolet koko kokeen pistemäärästä lähes kaikissa kokeissa. Sähköistymisen jälkeen tason *3. soveltaa* osuus nousi jopa 69 %:iin, mutta sen osuus palasi aiemmalle tasolle jo keväällä 2021. Toiseksi eniten painoarvoa kokeissa sai vaihtelevasti tasot *4. analysoida* ja *6. luoda*, joiden osaamista kysyttiin myös kaikissa kokeissa. Tason *1. muistaa* taidoilla sai pisteitä ensimmäisen kerran vasta sähköistymisen jälkeen keväällä 2022. Tätä saattaa selittää kokeissa sähköistymisen jälkeen lisääntyneet usean erillisen alakohdan sisältävät tehtävät, jotka mahdollistavat pienten kokonaisuuksien kysymisen.

Tehtäväkohtaisessa tarkastelussa havaittiin, että sähköistymisen jälkeen kokeiden 2016–2022 A-osissa on hieman vähentynyt tason *2. ymmärtää* osuus. Lisäksi keväällä 2022 A-osan tehtävä vaati jopa tason *5. arvioida* osaamista, kun kaikissa aiemmissa kokeissa A-osassa on ollut korkeintaan tason *3. soveltaa* tehtäviä. Kokeiden B1- ja B2-osissa tehtävät olivat kokonaisuutena vähintään tason *3. soveltaa* tehtäviä ja jos tasoja *1. muistaa* tai *2. ymmärtää* oli tehtävissä, tehtävän toisessa alakohdassa vaadittiin myös jonkin korkeamman tason taitoja. Sähköistyminen tai LOPS:n muutos vaikutti tasojen jakautumiseen kokeen eri osien kesken lähinnä siten, että kevään 2019 jälkeen A-osassa on ollut kerran korkeamman tason tehtävä ja tason *2. ymmärtää* osuus on hieman vähentynyt. Sähköistyminen ja LOPS:n muutos ei ole aiheuttanut tehtäviin suuria muutoksia Bloomin taksonomian näkökulmasta, mutta pieniä muutoksia on havaittavissa.

Ennen tehtävien luokittelua osattiin odottaa, että Bloomin taksonomian alimmat tasot *1. muistaa* ja *2. ymmärtää* jäävät pieneen rooliin ylioppilaskokeissa. Tämä johtui siitä, että valtaosa ylioppilaskokeen tehtävistä vaatii laskemista tai yhtälönratkaisua, ja ne puolestaan vaativat vähintään tason *3. soveltaa* taitoja. Oli kuitenkin yllättävää, kuinka vähän vain kahden alimman tason taidoilla sai pisteitä kokeissa. Korkeampien tasojen tehtävät vaativat myös näiden tasojen osaamista ja täten näiden kahden alimman tason osaamista vaaditaan kokeessa todellisuudessa laajemmin. Näissä tehtävissä tarvitaan kuitenkin myös korkeampien tasojen osaamista. Kevään 2019 sähköistymisen jälkeen kokeen pisteytys muuttui, jolloin koetehtävät oli mahdollista jakaa aiempaa pienempiin kokonaisuuksiin ja tehtäviin oli mahdollista tulla aiempaa enemmän erillisiä alakohtia. Tämä vaikutti siihen, että kokeissa voidaan kysyä tarkemmin jonkin tietyn tason tehtäviä, mutta niiden osuus koko kokeesta voi olla hyvin pieni. Tällaisissa tehtävissä tasojen *1. muistaa* ja *2. ymmärtää* kysyminen on helpompaa, kun usein “helposta” tehtävästä voi antaa vain 1 pisteen, joka on $\frac{1}{12}$ koko tehtävän pisteistä. Aiemmalla pisteytystavalla 1 piste olisi ollut $\frac{1}{6}$ koko tehtävän pisteistä, jolloin tehtävän alakohdan painoarvo on suurempi. Näiden havaintojen perusteella on odotettavissa, että myös jatkossa ylioppilaskokeissa on usean alakohdan tehtäviä, joissa vaaditaan usean eri Bloomin taksonomian tason mukaisia tehtäviä.

Luvussa 6.2 tarkasteltiin LOPS:ien mukaisten kurssien osuuksia koko kokeen tasolla sekä niiden sijoittumista eri osien tehtäviin. Kun tarkasteltiin eri kurssien osuuksia koko kokeesta, havaittiin, että LOPS:n muutoksen jälkeen koetehtävissä on ollut tasaisemmin kaikkien kurssien sisältöä eli kokeen pisteet jakautuivat tasaisemmin eri kurssien alle. Tehtävät luokiteltiin aina järjestyksessä viimeisimmän siinä tarvitun kurssin mukaan ja tämä luokittelu johtaa harhaan erityisesti geometrian, analyyttisen geometrian ja vektoreita käsittelevien kurssien osalta. Näissä tehtävissä tarvitaan usein myös jonkin myöhäisemmän kurssin osaamista. Tämän vuoksi näiden kurssien osuuksien muutoksia ei vertailtu tarkemmin. Kurssin *MAA2 Polynomifunktiot* (LOPS 2003) osuus koko kokeesta vaihteli vähemmän ennen kevättä 2019, kun taas sitä pääosin vastaavan kurssin *MAA2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt* osuus vaihteli enemmän kevään 2019 jälkeen. Derivaattakurssien *MAA6* (LOPS 2003) ja *MAA6* (LOPS 2015) osuus kokeissa puolestaan vaihteli enemmän ennen kevättä 2019 ja vähemmän sen jälkeen. Kurssin *MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot* (LOPS 2003, LOPS 2015) osuus koetehtävistä nousi aiempaa korkeammalle heti sähköistymisen ja LOPS:n muutoksen jälkeen, mutta laski keväinä 2021 ja 2022 jopa matalammalle tasolle kuin ennen muutosta. Yksittäisten syventävien kurssien osuuksiin muutoksella ei ollut vaikutusta, mutta kaikkien syventävien kurssien yhteenlaskettu osuus koetehtävistä tasaantui muutosten jälkeen samaksi jopa kolmessa peräkkäisessä kokeessa. Aiemmin niiden osuudessa oli ollut enemmän vaihtelua.

Ennen sähköistymistä ja LOPS:n muutosta koetehtävissä oli korkeintaan kolmen kurssin sisältöä ja tämäkin oli vain kerran keväällä 2018. Muutamissa tehtävissä oli myös kahden kurssin sisältöä. Kevään 2019 jälkeen kokeissa on ollut jopa viiden kurssin sisältöä samassa tehtävässä erillisinä kohtina. Samoissa tehtävissä on ollut myös kahden tai kolmen eri kurssin sisältöjä enemmän kuin ennen kevättä 2019. Useamman eri kurssin asiaa testaavia tehtäviä on siis ollut hieman enemmän kevään 2019 jälkeen. Kaikissa kokeissa A-osa perustui vain pakollisiin kursseihin ja B1- ja B2-osissa tarvittiin myös syventävien kurssien sisältöä. Ennen sähköistymistä kokeesta oli mahdollista valita 10 tehtävää, jotka pystyi tekemään pakollisten kurssien osaamisella. Sähköistymisen jälkeen keväällä 2019 B2-osassa tarvitsi syventävien kurssien osaamista kahdessa tehtävässä, jolloin niistä täytyi vastata vähintään toiseen. Keväästä 2020 eteenpäin on ollut mahdollista vastata 10 tehtävään pakollisten kurssien osaamisella.

Kurssien osuuksien vertaileminen kokeissa oli mielenkiintoista, mutta haastavaa, sillä kurssisisällöt muuttuivat LOPS:n muutoksen yhteydessä. Oletus oli, että ylioppilaskokeessa pyritään testaamaan laajasti kaikkien kurssien osaamista ja pääosin näin olikin. Yllättävää tuloksissa oli se, miten lähes kaikissa kokeissa jonkin kurssin osuus oli suuri, mutta taas edellisessä tai seuraavassa kokeessa saman kurssin osuus saattoi olla huomattavasti pienempi tai sitä ei ollut ollenkaan. Eri kurssien sisältöjen painotus vaihteli kokeittain ja tämä oli täysin satunnaista. Osalle kursseista niiden osuus kokeesta vaihteli enemmän ennen kevättä 2019 ja osalle enemmän kevään 2019 jälkeen. Sähköistymisellä ja LOPS:n muutoksella ei täten ollut juurikaan vaikutusta kurssien painotuksiin yleisellä tasolla.

Kolmantena näkökulmana luvussa 6.3 tutkittiin koetehtävien vaikeustason muutoksia ja opiskelijoiden tekemiä tehtävävalintoja. Ensin verrattiin kunkin kokeen kaikkien tehtävien yhteenlaskettuja pistekeskiarvoja ja niiden osuutta koko kokeen pistemäärästä. Tästä tarkastelusta havaittiin, että yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus oli kaikkein korkein keväiden 2014 ja 2015 osalta. Tällöin opiskelijat saivat valita vapaasti tehtävät, joihin he vastasivat. Kevään 2019 jälkeen yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus on vaihdellut enemmän kuin ennen kevättä 2019, mutta toisaalta se on pysynyt pääosin hieman matalammalla tasolla kuin ennen kevättä 2019. Lisäksi verrattiin keväiden 2016—2022 osalta kunkin osion kaikkien tehtävien yhteenlaskettuja pistekeskiarvoja ja niiden osuutta koko osion pistemäärään. Suurin muutos oli tapahtunut B2-osion tehtävien kohdalla, sillä kevään 2019 jälkeen B2-osan tehtävien pistekeskiarvojen osuus koko osan pistemäärästä on ollut hieman alempi kuin ennen kevättä 2019. A- ja B1-osien kohdalla ei ole tapahtunut selkeää muutosta.

Parhaan pistekeskiarvon sai kaikissa tarkastelluissa kokeissa sen ensimmäinen tai toinen tehtävä. Keväinä 2014 ja 2015 parhaan pistekeskiarvon sai kursseihin *MAA7 Derivaatta* ja *MAA9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot* perustuvat tehtävät. Tämä oli poikkeuksellista, sillä tämän jälkeen olleissa kokeissa parhaan pistekeskiarvon saaneessa tehtävässä on saanut pisteitä myös joko kokonaan tai osittain vain ensimmäisten kurssien osaamisella. Erityisesti ensimmäisen kurssin sisältö muuttui LOPS:in muutoksen myötä, mutta se on silti pitänyt paikkansa tehtävässä, jolla on ollut kokeen korkein pistekeskiarvo. Parhaan pistekeskiarvon saaneissa tehtävissä on myös ollut usein useamman eri kurssin sisältöä eli myös erillisiä alakohtia.

Vuodesta 2016 eteenpäin B1-osion suosituin tehtävä oli kaikissa kokeissa pakolliseen kurssiin perustuva. Vähiten vastattu tehtävä oli ennen kevättä 2019 myös pakolliseen kurssiin perustuva, mutta kevään 2019 jälkeen vähiten vastattu tehtävä oli yhtä poikkeusta lukuun ottamatta kaikissa kokeissa syventävään kurssiin perustuva tehtävä. Myös B2-osassa vastatuin tehtävä oli yhtä poikkeusta lukuun ottamatta pakolliseen kurssiin perustuva tehtävä. Vähiten vastauksia tuli melko tasaisesti sekä pakollisiin että syventäviin kursseihin perustuvista tehtävistä. Tähän ei ollut vaikutusta sähköistymisellä ja LOPS:n muutoksella. Yli puolissa kokeista B1-osan eniten vastattu tehtävä sai osan parhaan pistekeskiarvon ja vähiten vastattu osan matalimman pistekeskiarvon. B2-osassa eniten vastatussa tehtävässä oli enemmistössä kokeista myös osan paras pistekeskiarvo. Sen sijaan B2-osassa vähiten vastattu tehtävä sai huonoimman pistekeskiarvon vain yhdessä kokeessa. LOPS:n muutoksella tai sähköistymisellä ei ollut juurikaan vaikutusta opiskelijoiden tehtävävalintoihin.

Erityisesti kokeiden vaikeustasojen muutoksen tarkastelu oli kiinnostavaa, sillä kokeen luonne muuttui melko paljon sen muuttuessa paperisesta sähköiseksi. Matematiikan osaamisen lisäksi opiskelijoiden tuli hallita myös sähköisten apuvälineiden, kuten erilaisten ohjelmistojen, käyttäminen, jotta he voivat menestyä kokeessa. Koko kokeen yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus koko kokeen pistemäärästä laski hieman matalammalle tasolle heti kevään 2019 jälkeen, mikä kertoo siitä, että kokeiden tehtävistä on tullut keskimäärin heikommat pisteet kuin ennen sähköistymistä. Vasta keväällä 2022 yhteenlaskettujen pistekeskiarvojen osuus nousi samalle tasolle kuin ennen sähköistymistä. Kokeiden vaikeustaso siis nousi hieman keväällä 2019, minkä takana saattoi olla sekä vaikeammat koetehtävät että kokeen sähköistyminen.

7.2 Tutkimuksen luotettavuus

Tässä tutkimuksessa oli aineistona vain keväinä 2014–2022 pidetyt ylioppilaskokeet. Jos aineisto laajennettaisiin myös syksyisin pidettyihin kokeisiin tai aikajanaa laajennettaisiin, tulokset perustuisivat laajempaan aineistoon ja ne olisivat täten luotettavampia. Aineistosta voisi tehdä myös täsmällisemmän tarkastelemalla yksittäisiä tehtäviä tarkemmin. Tämän voisi toteuttaa jakamalla kunkin tehtävän vaatiman osaamisen vielä pienempiin kokonaisuuksiin esimerkiksi YTL:n pisteytysohjeiden avulla. Tällöin esimerkiksi eri kurssien sisältöjen esiintymisestä saisi paremman kuvan. Nyt tehtävät luokiteltiin kokonaisuuksina, jos niissä ei ollut erillisiä alakohtia. Tämä osittain vääristi tuloksia, sillä esimerkiksi derivointia sisältävä vektoritehtävä luokiteltiin myöhemmin tulevan derivaattakurssin alle. Tuloksissa saattoi siis näkyä koe, jossa ei ollut ollenkaan vektorikurssiin liittyvää tehtävää. Jos tehtävä jaettaisiin pienempiin osiin ja laskettaisiin painoarvo vektoreita sisältävän kurssin, derivaattaa sisältävän kurssin ja muiden tarvittavien kurssien mukaan, nämä kaikki näkyisivät tuloksissa, mikä tekisi tuloksista luotettavampia ja yksityiskohtaisempia.

Laadullisen tutkimuksen luotettavuudessa yksi keskeinen näkökulma on tiedon objektiivisuus [19]. Tässä tutkimuksessa tehtävien luokittelu perustui tutkijan omaan arviointikykyyn ja tulkintaan tutkimuksen teoreettisesta viitekehyksestä. Todennäköisesti toinen tutkija luokittelisi tehtävät hieman eri tavalla, vaikka hänellä olisi käytössään sama teoreettinen viitekehys. Tulosten luotettavuutta parantaisi se, että tehtävät luokittelisi useamman henkilön tiimi tai useampi yksittäinen tutkija, joiden luokittelua voitaisiin verrata keskenään. Tämä vähentäisi virheellisten tulkintojen mahdollisuutta.

LÄHTEET

[1] Peter Airasian et al. *A taxonomy for learning, teaching, and assessing : a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Toim. Lorin Anderson ja David Krathwohl. Longman New York, 2001.

[2] Carl Allendoerfer ja Cletus Oakley. *Fundamentals of freshman mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1959.

[3] Robert Blitzer. *Thinking Mathematically*. 3. painos. Pearson Prentice Hall, 2005. ISBN: 0-13-143243-5.

[4] Ethan Bloch. *Proofs and Fundamentals: A First Course in Abstract Mathematics*. 2. painos. New York, NY: Springer New York, 2011. ISBN: 1-4419-7127-0.

[5] Benjamin Bloom et al. *Taxonomy of Educational Objectives: the Classification of Educational Goals: Handbook. 1, Cognitive Domain*. Longman London, 1979.

[6] Benjamin Fine ja Gerhard Rosenberger. *Number Theory: An Introduction via the Distribution of Primes*. 1. painos. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2007. ISBN: 0-8176-4541-1.

[7] Rowan Garnier ja John Taylor. *Discrete mathematics : proofs, structures and applications*. 3. painos. Boca Raton, FL: CRC Press, an imprint of Taylor % Francis, 2009. ISBN: 0-429-13575-0.

[8] Ralph Grimaldi. *Discrete and combinatorial mathematics : an applied introduction*. 3. painos. Addison-Wesley, 1994. ISBN: 0-201-60044-7.

[9] David Gunderson. *Handbook of Mathematical Induction : Theory and Applications*. 1. painos. Boca Raton, FL: CRC Press, 2014. ISBN: 0-429-14793-7.

[10] Kirsti Hemmi. *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice*. Väitöskirja, Stockholm University, 2006. ISBN: 91-7155-307-X.

[11] Jenni Honkanen. *Matematiikan sähköistyminen herättää kritiikkiä - YTL vastaa useimmiten kysyttyihin kysymyksiin*. 13. helmikuuta 2019. URL: https://yle.fi/aihe/artikkeli/2018/02/13/matematiikan-sahkoistyminen-herattaa-kritiikkia-ytl-vastaa-useimmiten (viitattu 08. 02. 2023).

[12] Joseph Kirtland. *Proofs 101 : an introduction to formal mathematics*. 1. painos. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2021. ISBN: 9780367536817.

[13] David Krathwohl. ”A revision of Bloom's taxonomy: An overview”. *Theory into practice* 41.4 (2002), s. 212–218.

[14] Thomas Lord ja Sandhya Baviskar. ”Moving students from information recitation to information understanding - Exploiting Bloom's Taxonomy in creating science questions”. *Journal of College Science Teaching* 36.5 (2007), s. 40–44. URL: https://

www.researchgate.net/publication/228641608_Moving_students_from_information_recitation_to_information_understanding_Exploiting_Bloom's_taxonomy_in_creating_science_questions (viitattu 04. 12. 2022).

[15] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. 2003. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf (viitattu 06. 12. 2022).

[16] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. 2015. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf (viitattu 06. 12. 2022).

[17] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. 2019. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf (viitattu 06. 12. 2022).

[18] Jan Thompson, Thomas Martinson ja Virpi Kauko. *Matematiikan käsikirja*. 3. painos. Helsinki: Tammi, 1994. ISBN: 951-31-0471-0.

[19] Jouni Tuomi ja Anneli Sarajärvi. *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Tammi, 2002. ISBN: 951-26-4856-3.

[20] Lauri Vanhala. ”Kaikki laskimet sallitaan yo-kokeissa - tuliko matematiikasta helppoa”. *Suomen Kuvalehti* (17. maaliskuuta 2012). URL: https://suomenkuvalehti.fi/kotimaa/kaikki-laskimet-sallitaan-yo-kokeissa-tuliko-matematiikasta-helppoa/ (viitattu 09. 03. 2023).

[21] David Webb. ”Bloom's Taxonomy in Mathematics Education”. Teoksessa: *Encyclopedia of Mathematics Education*. Toim. Stephen Lerman. Springer Netherlands, 2014, s. 63–68. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-8_17.

[22] Ylioppilastutkintolautakunta. *Matematiikan digitaalisen kokeen määräykset*. 8. toukokuuta 2019. URL: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikka_digitaalinen_koe.pdf (viitattu 07. 02. 2023).

[23] Ylioppilastutkintolautakunta. *Matematiikan koe, pitkä oppimäärä*. 19. maaliskuuta 2014. URL: https://yle.fi/progressive/fynd/oppiminen/oppiminen.yle.fi/yo-kokeet/matematiikka_pitka.pdf (viitattu 09. 03. 2023).

[24] Ylioppilastutkintolautakunta. *Matematiikan kokeen määräykset*. 23. elokuuta 2016. URL: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikka.pdf (viitattu 07. 02. 2023).

[25] Ylioppilastutkintolautakunta. *Matematiikan kokeen määräykset ja ohjeet*. 27. toukokuuta 2022. URL: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikan_koe.pdf (viitattu 21. 11. 2022).

[26] Ylioppilastutkintolautakunta. *Pitkän matematiikan ylioppilaskoe, kevät 2016*. 23. maaliskuuta 2022. URL: https://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/02/24/2016-kevat-matematiikka-pitka-oppimaara (viitattu 17. 04. 2023).

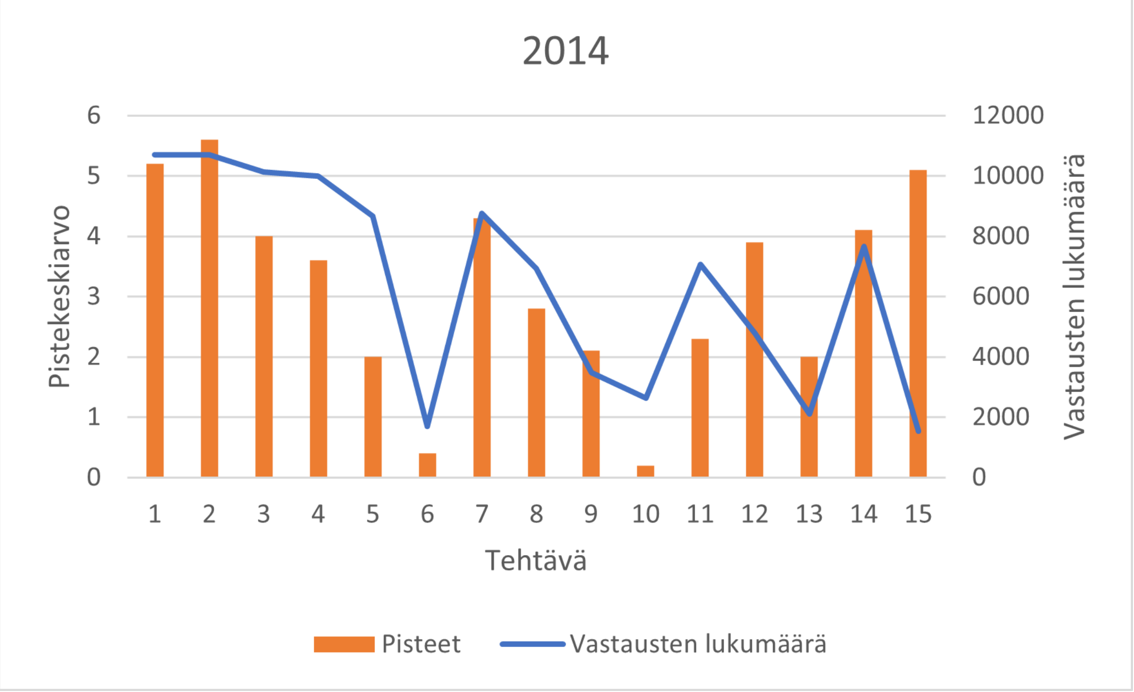
[27] Ylioppilastutkintolautakunta. *Pitkän matematiikan ylioppilaskoe, kevät 2020*. 18. maaliskuuta 2020. URL: https://yle.fi/plus/abitreenit/2020/kevat/2020-03-18_M_fi/index.html (viitattu 14. 03. 2023).

[28] Ylioppilastutkintolautakunta. *Pitkän matematiikan ylioppilaskoe, kevät 2021*. 24. maaliskuuta 2022. URL: https://yle.fi/plus/abitreenit/2021/Kevat/2021-03-24_M_fi/index.html#10 (viitattu 17. 04. 2023).

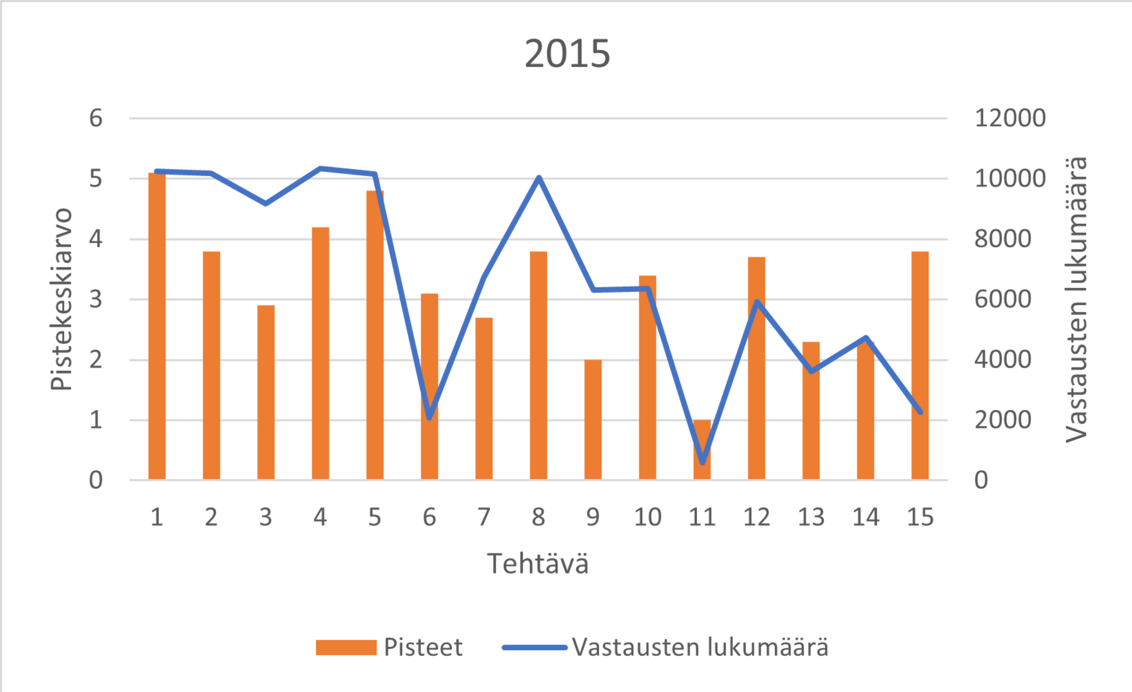
[29] Ylioppilastutkintolautakunta. *Pitkän matematiikan ylioppilaskoe, kevät 2022*. 23. maaliskuuta 2022. URL: https://yle.fi/plus/abitreenit/2022/Kevat/2022-03-23_M_fi/index.html (viitattu 14. 03. 2023).

LIITE A: TEHTÄVÄKOHTAISET PISTEKESKIARVOT JA TEHTÄVIIN VASTANNEIDEN LUKUMÄÄRÄT

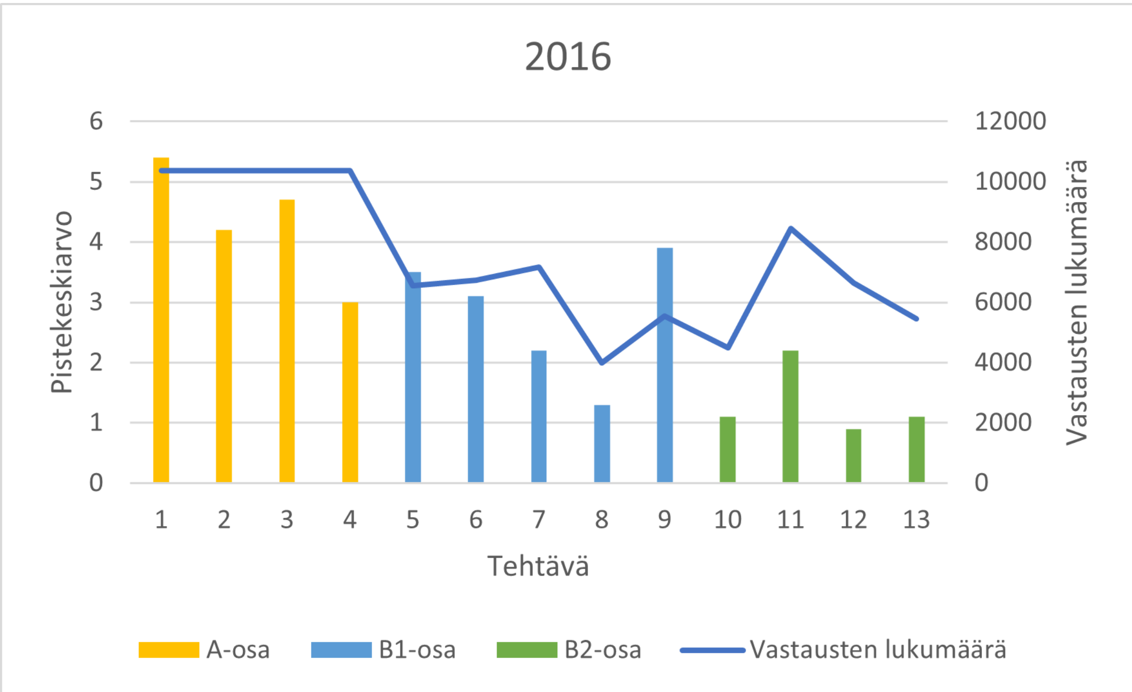
Tässä liitteessä on esitetty tehtävien pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärät kuvaajien muodossa. Kuvaajien värit noudattavat samaa väritystä kuin luvun 6 kuvissa 6.2, 6.6 ja 6.7.



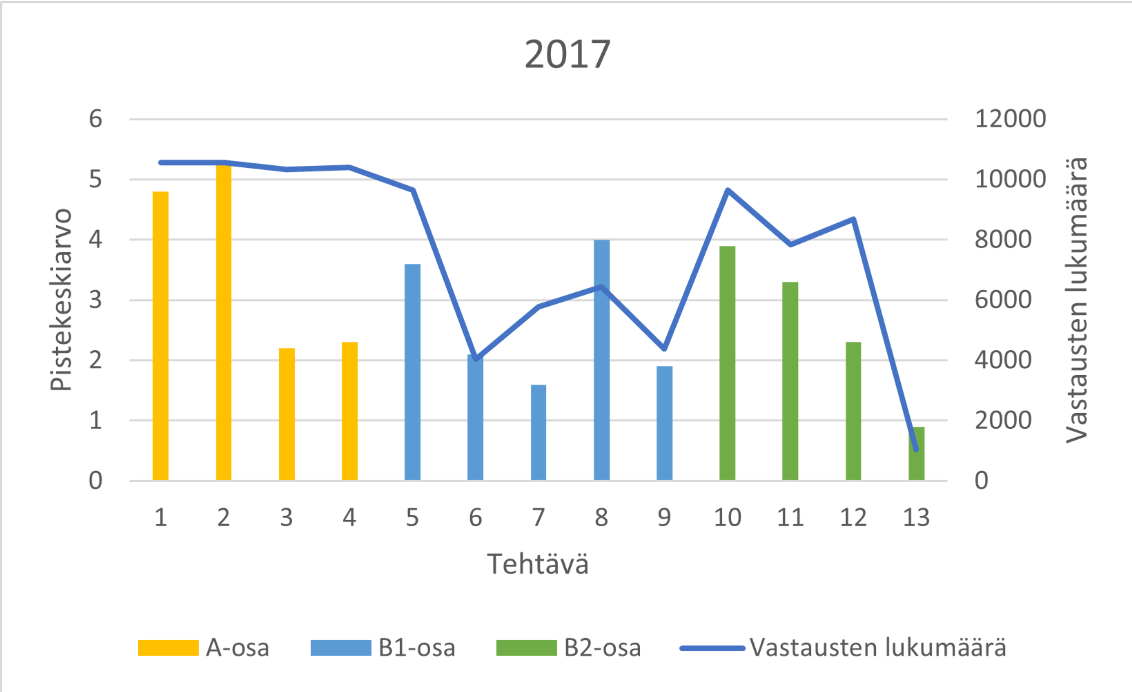
Kuva A.1. *Kevään 2014 kokeen pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärä.*



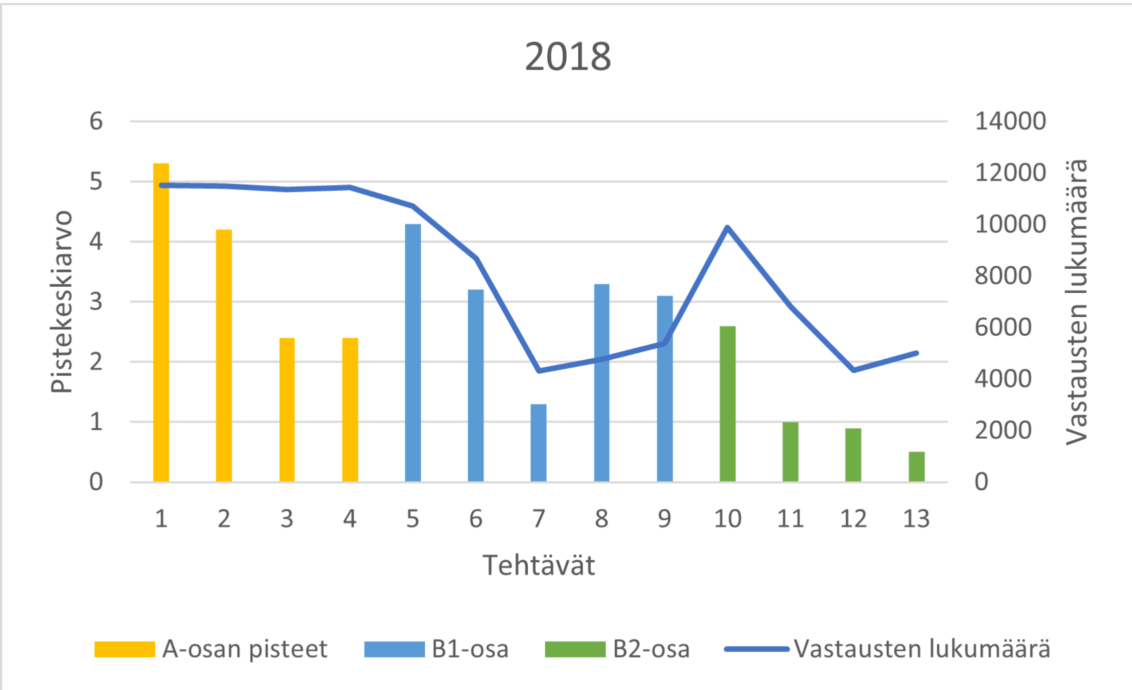
Kuva A.2. *Kevään 2015 kokeen pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärä.*



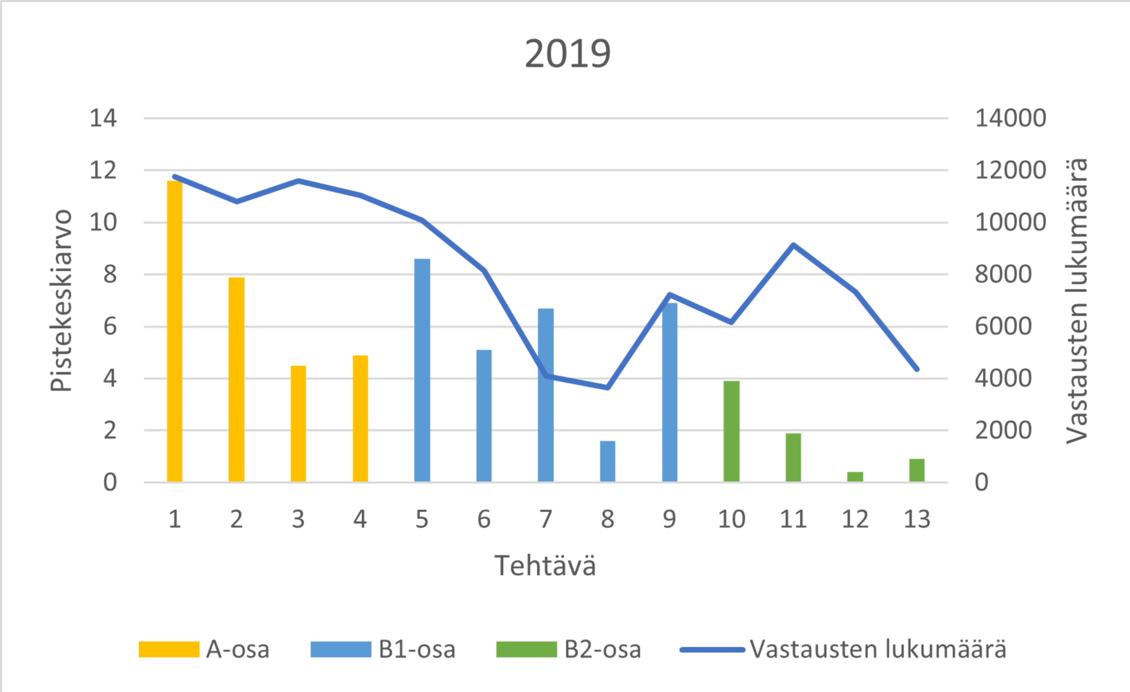
Kuva A.3. *Kevään 2016 kokeen pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärä.*



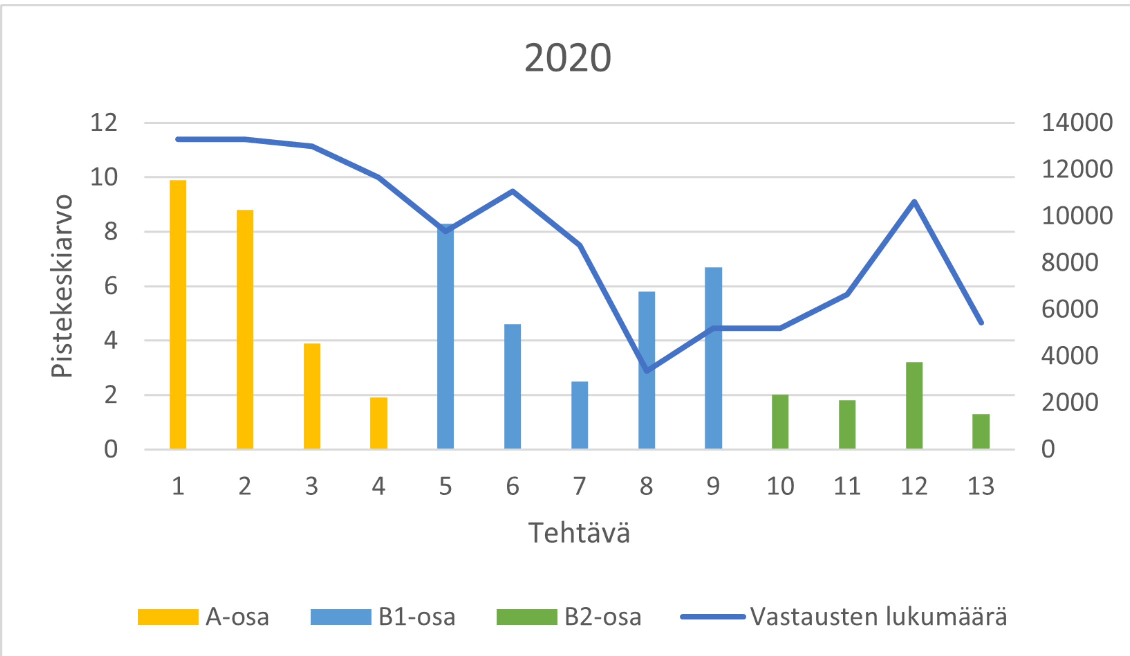
Kuva A.4. *Kevään 2017 kokeen pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärä.*



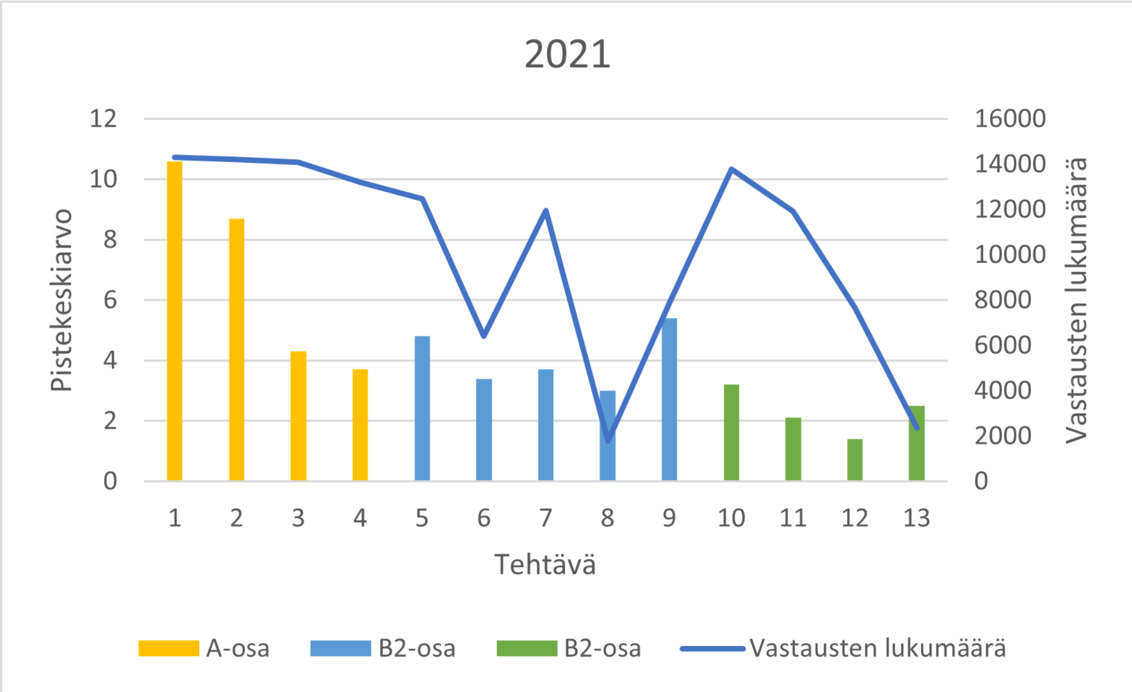
Kuva A.5. *Kevään 2018 kokeen pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärä.*



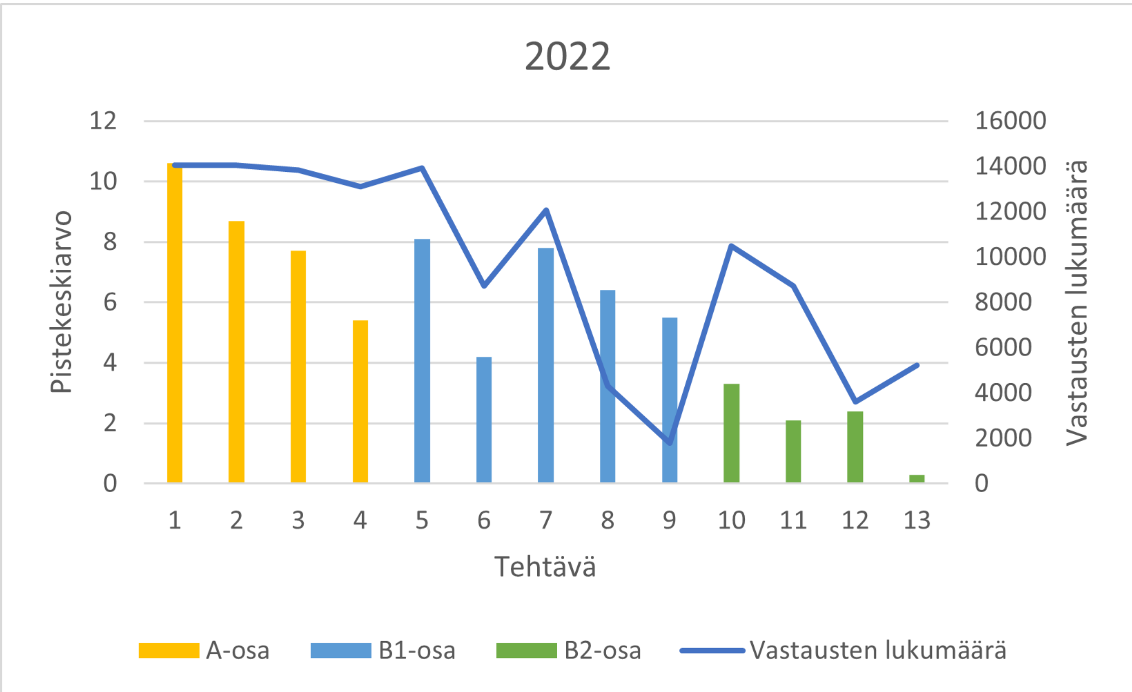
Kuva A.6. *Kevään 2019 kokeen pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärä.*



Kuva A.7. *Kevään 2020 kokeen pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärä.*



Kuva A.8. *Kevään 2021 kokeen pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärä.*



Kuva A.9. *Kevään 2022 kokeen pistekeskiarvot ja tehtäviin vastanneiden lukumäärä.*